Contenido del curso

Print to PDF

Contents

Información del académico

- **Profesor:** Dr. Jesús Emmanuel Solís Pérez
- **Correo:** jsolisp@unam.mx
- Página personal del profesor

Prerequisitos

1. Cálculo I y II, Álgebra Lineal y Geometría Analítica, Variable Compleja

Software requerido y herramientas

1. MATLAB y MATLAB Simulink.
2. Sistema operativo: Windows 10, Linux, o macOS.
3. Navegador: Google Chrome, Opera o Firefox.
4. Markdown para escribir documentación.
5. Sistema de control de versiones.

Temario

Unidad	Tema	Contenido	Material
I	Introducción a la dinámica de los sistemas lineales	• Conceptos básicos. • Modelos analíticos de estudio de sistemas.	1. Código (Live Script)
II	Antecedentes matemáticos	• Álgebra Lineal. • Ecuaciones Diferenciales. • Transformada de Fourier. • Transformada de Laplace.	1. Código (Live Script)
III	Modelado en el dominio de la frecuencia	• Función de Transferencia. • Modelado de sistemas mecánicos. • Modelado de sistemas eléctricos y electro-mecánicos. • Modelado de sistemas hidráulicos y térmicos. • Otro tipo de sistemas.	1. Código (Live Script)
IV	Modelado en el dominio del tiempo	• Ecuaciones en variables de estado. • Modelado de sistemas mediante ecuaciones de estado. • Relación entre el modelo en variables de estado y la función de transferencia.	1. Código (Live Script)
V	Análisis de dinámicas de sistemas en el dominio del tiempo	• Respuesta en el tiempo. • Análisis de los puntos de equilibrio.	1. Código (Live Script)

Unidad	Tema	Contenido	Material
		• Estabilidad de los puntos de equilibrio.	

Para presentar examen

Tendrán derecho a presentar exámenes parciales aquellos estudiantes que hayan cubierto por lo menos el 80% de asistencia.

Código de conducta

La conducta del profesorado y alumnado del curso será acorde con los principios y valores especificados en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México aprobado el 1 de julio del 2015 por el Consejo Universitario, en especial en lo referente a la integridad y honestidad académica. “La integridad y la honestidad académica implican: Citar las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u obras artísticas que se empleen en el trabajo universitario, y no sustraer o tomar la información generada por otros o por sí mismo sin señalar la cita correspondiente u obtener su consentimiento y acuerdo. No falsificar, alterar, manipular, fabricar, inventar o fingir la autenticidad de datos, resultados, imágenes o información en los trabajos académicos, proyectos de investigación, exámenes, ensayos, informes, reportes, tesis, audiencias, procedimientos de orden disciplinario o en cualquier documento inherente a la vida académica universitaria” (Gaceta UNAM, 30 de julio 2015).

Libros de apoyo

1. Nise, N. S. (2020). Control systems engineering. John Wiley & Sons.
2. Khalil, H. K. (2002). Nonlinear systems third edition. Patience Hall, 115.
3. Slotine, J. J. E., & Li, W. (1991). Applied nonlinear control (Vol. 199, No. 1, p. 705). Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall.
4. Johansson, R. (1993). System modeling and identification. Prentice-hall.

(Última modificación: 10 de julio de 2024)

Introducción a la dinámica de los sistemas lineales

Contents

Conceptos básicos

Antes de comenzar a estudiar sistemas dinámicos, necesitamos introducir algunos conceptos básicos.

> **Definition 1 (Señal)**
>
> *Fís*. Variación de una corriente eléctrica u otra magnitud que se utiliza para transmitir información.

Tipos de señales eléctricas

- **Señal analógica**. Tiene una variación continua en el tiempo con un número infinito de valores.
- **Señal digital**. Tiene una variación discreta de valores en el tiempo con un número finito de valores.
- **Señal digital binaria**. Tiene sólo dos niveles de tensión $V+$ o 0, en valores binarios 1 y 0.
- **Concepto de sistema**. Conjunto de componentes físicos relacionados que actúan como una unidad completa.

Definition 2 (Modelo)

m. Esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja, como la evolución económica de un país, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento.

Sistemas seguidores

- La entrada de referencia cambia de valor frecuentemente.
- Ejemplo: servomecanismos; la salida es alguna posición, velocidad o aceleración mecánica.

Sistemas de regulación automática

- La entrada de referencia es o bien constante o bien varía lentamente con el tiempo, y donde la tarea fundamental consiste en mantener la salida en el valor deseado a pensar de las perturbaciones presentes.
- Ejemplos: el sistema de calefacción de una casa, un regulador de voltaje, un regulador de presión de suministro de agua.

Podemos utilizar alguna de las siguientes estrategias para obtener modelos que representen un sistema. Por ejemplo:

- **Modelación de sistemas**. El sistema se suele analizar como subsistemas más simples. Se suelen utilizar leyes físicas, enfoques como Euler-Lagrange Hamilton, o bloques para el caso de los modelos compartimentales. Los modelos obtenidos suelen llamarse como *modelo de caja blanca* o *modelo interno**.
- **Identificación de sistemas**. Emplea observaciones de entrada y salida de un sistema para construir un modelo. No considera dinámicas internas sino en su respuesta ante una entrada determinada. En este punto se pueden utilizar estrategias poliniomiales o Redes Neuronales Artificiales, por mencionar algunas. Los modelos obtenidos suelen llamarse como *modelo de caja negra* o *modelo entrada-salida*.
- **Estrategia híbrida**. Es una combinación de las anteriores. Parte de un modelo obtenido de leyes físicas y los elementos desconocidos son identificados o estimados por alguna estrategia de identificación. Los modelos obtenidos suelen llamarse como *modelo de caja gris*.

En la literatura podemos encontrar la clasificación de los modelos de acuerdo con su tipo. Por ejemplo:

- **Modelos causales**. Dependen de las condiciones presentes y pasadas para determinar una futura. En otras palabras, hay una relación de causalidad.
- **Modelos no causales**.
- **Modelos estáticos**. Depende de las condiciones presentes y no de las pasadas.
- **Modelos dinámicos**. Los estados del sistema dependen de lo que haya sucedido con anterioridad debido a que suele haber algún tipo de almacenamiento de energía. Suelen llamarse también como *sistemas con memoria*.
- **Modelos estocásticos**. Incluye variables aleatorias que afectan el sistema. Por consiguiente, resulta imposible predecir el valor que éstas puedan tomar.
- **Modelos determinísticos**. Carecen de variables aleatorias. Por consiguiente, es posible conocer su comportamiento.
- **Modelos de parámetros concentrados**. Requiren de ecuaciones con derivadas o ecuaciones de diferencia ordinarias.
- **Modelos de parámetros distribuidos**. Su formulación implica ecuaciones diferenciales con derivadas parciales.
- **Modelos lineales**. Son sistemas que cumplen con la propiedad de proporcionalidad y superposición.
- **Modelos no lineales**. Modelos cuyos términos llevan multiplicidad entre los estados del sistema, potencias de los estados o funciones trascendentes cuyo argumento es alguna de las variables de estado del sistema.
- **Modelos invariantes en el tiempo**. Los parámetros del sistema se consideran constantes en el tiempo.
- **Modelos variantes en el tiempo**. Los parámetros del sistema varían en función del tiempo.
- **Modelos continuos**. Sistemas que dependen del tiempo t, donde t es una variable continua que toma cualquier valor real.
- **Modelos discretos**. En este tipo de sistemas, el tiempo se considera que es una variable discreta denotada como k y toma sólo unos valores en puntos específicos de la recta de los reales.

Índices de error

Uno de los criterios que debe cumplir el modelo de un sistema es la validación. Para ello, evualuamos cuán preciso es para representar los datos experimentales del fenómeno que estamos estudiante. Es decir, evaluamos la diferencia entre los datos experimentales y los datos obtenidos por nuestro modelo. A esta diferencia le llamamos error y se puede cuantificar a partir de algunos de los siguientes índices.

Criterios integrales

Integral del Error Absoluto (IAE)

$$\mathrm{IAE} = \int_0^\infty |e(t)|\mathrm{d}t,$$

donde

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t).$$

- Fácil aplicación.
- No se pueden optimizar sistemas altamente sub ni altamente sobre amortiguados.
- Difícil de evaluar analíticamente.

Integral del Tiempo por el Error Absoluto (ITAE)

$$\mathrm{ITAE} = \int_0^\infty t|e(t)|\mathrm{d}t.$$

- Los errores tardíos son más castigados.
- Buena selectividad.
- Difícil de evaluar analíticamente.

Integral del Error Cuadrático (ISE)

$$\mathrm{ISE} = \int_0^\infty e^2(t)\mathrm{d}t.$$

- Da mayor importancia a los errores grandes.
- No es un criterio muy selectivo.

- Respuesta rápida pero oscilatoria, estabilidad pobre.

Integral del Tiempo por el Error Cuadrático (ITSE)

$$\mathrm{ITSE} = \int_0^{\infty} te^2(t)\mathrm{d}t.$$

- Los grandes errores iniciales tienen poco peso pero los que se producen más tarde son fuertemente penados.
- Mejor selectividad con respecto al ISE

Criterios estadísticos

Mean Square Error (MSE)

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} e_k^2.$$

- No recomendable para estudiar modelos de predicción.
- No tiene escala original el error porque está elevado al cuadrado.
- No se mide en unidades de los datos experimentales.

Root Mean Square Error (RMSE)

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} e_k^2}.$$

- Sensible a valores atípicos.
- No se ajusta a la demanda (¿qué es demanda?).
- Se mide en unidades de los datos experimentales.

Mean Absolute Error (MAE)

$$\mathrm{MAE} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} |e_k|.$$

- Mide la precisión de los datos simulados.
- Se mide en unidades de los datos experimentales.
- No es sensible a valores atípicos.
- Utilizado para analizar series temporales.

Mean Absolute Percentage Error (MAPE)

$$\mathrm{MAPE} = \frac{100\%}{N}\sum_{k=0}^{N} \frac{e_k}{y_k}.$$

- Mide el error en porcentajes.
- Indicador de desempeño.
- Fácil interpretación.
- Ampliamente utilizado para evaluar modelos de predicción.

Tabla de MAPE

- Si $\mathrm{MAPE} < 10$, entonces el modelo es altamente preciso
- Si $10 < \mathrm{MAPE} < 20$, entonces el modelo es bueno
- Si $20 < \mathrm{MAPE} < 50$, entonces el modelo es razonable
- Si $\mathrm{MAPE} > 50$, entonces el modelo es impreciso

FIT

Obtiene el porcentaje de variación de salida que es explicado por un modelo

$$\mathrm{FIT} = 100\left(1 - \frac{\|y - \hat{y}\|}{\|y - \bar{y}\|}\right).$$

Modelos analíticos de estudio de sistemas

Modelo empírico. Se obtiene a partir de las leyes físicas del sistema. Por ejemplo, las siguientes ecuaciones describen la zona líquida del flujo bifásico en un intercambiador de calor de doble tubo helicoidal

- Ecuación de continuidad

$$\dot{m}_{i+1} = \dot{m}_i,$$

$$v_{l_i} = \left[\frac{\dot{m}_i}{\rho_{l_i} A}\right],$$

$$v_{l_{i+1}} = \left[\frac{\dot{m}_{i+1}}{\rho_{l_{i+1}} A}\right].$$

- Ecuación de cantidad de movimiento

$$p_{i+1} = p_i - \frac{\triangle z}{A}\left(\frac{\Phi \bar{f} \bar{\dot{m}} p}{8\bar{\rho}A^2} + \bar{\rho} A g \sin(\theta) + \left[\frac{\dot{m}\left(x_g v_g + (1 - x_g) v_l\right)}{\triangle z}\right]_i^{i+1}\right).$$

Modelo analítico. Es la representación matemática de un problema. Por ejemplo, la siguiente ecuación diferencial representa a un modelo para describir el crecimiento poblacional de ciertos organismos

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = K \cdot N(t) \cdot \ln\left(\frac{A}{N(t)}\right).$$

Antecedentes matemáticos

Contents

En este capitulo, vamos a recordar algunos conceptos de álgebra lineal que nos servirán para analizar sistemas dinámicos. Para ello, vamos a extender la noción de combinación lineal de vectores en $\mathbb{R}^n$ a un espacio vectorial V cualquiera.

Álgebra Lineal

Combinaciones lineales

Un \myindex{sistema no homogéneo} de m ecuaciones con n incógnitas de la forma

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3, \\
\vdots \quad &= \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned}$$

puede ser representado de forma vectorial como sigue

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{m1}} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{m2}} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{m3}} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

o equivalentemente como

$$x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n = v,$$

donde u_1, u_2, ..., u_n, v son los vectores columnas, respectivamente.

Definition 3

Un vector v es una \myindex{combinación lineal} de los vectores u_1, u_2, ..., u_n si existen escalares a_1, a_2, ..., a_n tales que

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \cdots + a_nu_n.$$

La ecuación vectorial

$$v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + \cdots + x_nu_n,$$

tiene una solución cuando los x_1, x_2, ..., x_n son escalares por determinar.

Ejemplo

- Sean

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces v es una combinación lineal de u_1, u_2 y u_3 dado que el sistema o ecuación vectorial

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o bien

$$\begin{aligned} 2 &= x + y + z, \\ 3 &= x + y, \\ -4 &= x, \end{aligned}$$

tiene una solución $x = -4$, $y = 7$, $z = -1$. Es decir

$$v = -4u_1 + 7u_2 - u_3.$$

Dependencia lineal

Definition 4

Los vectores u_1, u_2, u_3, $\dots$, $u_n \in \mathbb{R}$ son \myindex{linealmente dependientes} si existen escalares a_1, a_2, $\dots$, a_n no todos nulos tales que

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \cdots + a_nu_n = 0.$$

La ecuación vectorial

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + \cdots + x_nu_n = 0,$$

tiene una solución no nula donde los escalares x_1, x_2, x_3, $\dots$, x_n se deben determinar. En otro caso, los vectores son llamados \myindex{linealmente independientes}.

Ejemplo

- La solución de

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o bien

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0, \\ x - y - 5z &= 0, \\ x + 3y + 3z &= 0. \end{aligned}$$

¿Cómo llegamos a lo siguiente?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0, \\ x + y &= 0, \\ x &= 0, \end{aligned}$$

cuya representación queda

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

es la solución no nula $x = y = z = 0$. Por lo tanto, los tres vectores son linealmente independientes.

El sistema de ecuaciones lineales

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o bien

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0, \\ x - y - 5z &= 0, \\ x + 3y + 3z &= 0, \end{aligned}$$

tiene una solución no nula $(x, y, z) = (3, -2, 1)$. Por lo tanto, estos tres vectores son linealmente dependientes.

Ejemplo

- Realice la conversión de la siguiente ecuación vectorial en un sistema de ecuaciones lineales equivalente y resuélvalo

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 5y + 2z \\ 3x + 8y + 3z \end{bmatrix}.$$

Ejemplo

- Escriba el vector $v = (1, -2, 5)$ como combinación lineal de los vectores $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3)$ y $u_3 = (2, -1, 1)$.

Ejemplo

Determine si los siguientes vectores son linealmente independientes o dependientes

- $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, -1, 3)$ y $u_3 = (1, -5, 3)$.
- $u_1 = (1, -2, -3)$, $u_2 = (2, 3, -1)$ y $u_3 = (3, 2, 1)$.

Ecuaciones lineales y sus soluciones

Se entiende por *ecuación lineal* con n incógnitas x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_n a una ecuación que puede escribirse de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b,$$

donde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son constantes reales. Aquí la constante $a_k$se denomina el *coeficiente* de x_k y b se denomina la *constante* de la ecuación lineal.

Se le llama *conjunto solución*, *solución general* o simplemente *solución* de la ecuación al conjunto de todas las soluciones denotado como sigue

$$S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b; \quad a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo

- La ecuación $2x - 5y + 3xz = 4$ no es lineal debido al producto de dos incógnitas.

Ejemplo

- La ecuación $x + 2y - 4z + t = 3$ es lineal en las cuatro incógnitas x, y, z, t.

Theorem 1

Consideremos la ecuación lineal $Ax = b$

- Si $a \neq 0$, entonces $x = b/A = A^{-1}b$ es solución única de $Ax = b$.
- Si $a = 0$, pero $b \neq 0$, entonces $Ax = b$ no tiene solución.
- Si $a = 0$ y $b = 0$, entonces todo escalar k es solución de $Ax = b$.

Una *ecuación degenerada* es una ecuación lineal que tiene la siguiente forma

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n = b,$$

donde cada coeficiente es igual a cero y su solución está dada como sigue

Theorem 2

Sea la *ecuación lineal degenerada* $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n = b$ se tiene

- Si $b \neq 0$ entonces la ecuación no tiene solución.
- Si $b = 0$ entonces todo vector es una solución.

Theorem 3

Sea una ecuación lineal no degenerada de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b,$$

con primera incógnita x_p.

Dará una solución única cualquier conjunto de valores de las incógnitas x_j con $j \neq p$.

Note

Las incógnitas x_j se llaman *variables libres* porque pueden tomar cualquier valor.

Ejemplo Dada la siguiente ecuación

$$2x - 4y + z = 8,$$

encuentre

- Sus soluciones particulares.
- Su solución general.

La solución general de una ecuación lineal no degenerada con dos incógnitas x y y de la forma

$$ax + by = c,$$

donde a, b y c son reales está dada como sigue

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax + by = c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Un sistema de dos *ecuaciones lineales no degeneradas* con dos incógnitas está dado como sigue

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y = c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2, \end{aligned}$$

donde u_1 y u_2 son números reales que satisfacen ambas ecuaciones y se le conoce como *solución simultánea* y se escribe como $u = (u_1, u_2)$.

Podemos recurrir al método gráfico para encontrar tres casos:

- El sistema tiene exactamente una solución.
- El sistema no tiene soluciones.
- El sistema tiene un número infinito de soluciones.

Ejemplo

- Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned} L_1: \quad 2x + 5y = 8, \\ L_2: \quad 3x - 2y = -7. \end{aligned}$$

Matrices escalonadas

Definition 5

Una matriz A se dice que está en *forma escalonada* o se denomina *matriz escalonada* si cumple las siguientes condiciones

- Las filas no nulas están en la parte inferior de la matriz.
- Cada entrada principal no nula está a la derecha de la entrada principal.

Definition 6

Una *matriz aumentada* M de m ecuaciones y n incógnitas está dada como sigue

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} & b_m \end{bmatrix}.$$

La *matriz de coeficientes* A del sistema anterior está dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{aligned} x + y - 2z + 4t &= 5, \\ 2x + 2y - 3z + t &= 3, \\ 3x + 3y - 4z - 2t &= 1, \end{aligned}$$

se resuelve reduciendo su matriz aumentada M a la forma escalonada y después a la forma canónica, *i.e.*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución general queda como sigue

$$\begin{aligned} x + y - 10t &= -9, \\ z - 7t &= -7, \end{aligned}$$

y el conjunto solución

$$S = \{ u \in \mathbb{R}^4 \mid u = (-9 - y + 10t, y, -7 + 7t, t), \quad y, t \in \mathbb{R} \}.$$

Sistema de ecuaciones lineales homogéneos

Definition 7

Un sistema de ecuaciones lineales es *homogéneo* si todas las constantes son iguales a cero, es decir

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \vdots \quad &= \vdots \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + a_{m_3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

El sistema anterior tiene una solución llamada *solución nula* o *solución trivial* denotada como n-ada $0 = (0, 0, 0, \ldots, 0)$. Entonces el sistema puede reducirse a un sistema equivalente en forma escalonada

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \vdots \quad &= \vdots \\ a_{rj_r}x_{j_r} + a_{r,j_r+1}x_{j_r+1} + \cdots + a_{rn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Del sistema anterior tenemos dos posibilidades

- Si $r = n$, entonces el sistema tiene sólo la solución no nula.
- Si $r < n$, entonces el sistema tiene una solución no nula.

Ejemplo

- Determine si $u = (8, 1, 2)$ es solución de la siguiente ecuación lineal $x + 2y - 3z = 4$.
- Encuentre cada una de las soluciones de la ecuación $2x + y + x - 5 = 2y + 3x + y + 4$.
- Encuentre la solución general de la ecuación lineal $x - 2y + 3z = 4$.
- Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 7, \\ 2x - y + 4z &= 17, \\ 3x - 2y + 2z &= 14. \end{aligned}$$

Ejemplo

Determine los valores de k para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1, \\ 2x + 3y + kz &= 3, \\ x + ky + 3z &= 2, \end{aligned}$$

obtenga

- Una solución única.
- Ninguna solución.
- Infinitas soluciones.

Ejemplo

Reduzca la siguiente matriz A a la forma escalonada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & -7 & 10 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo Resuelva el siguiente sistema utilizando la matriz aumentada

$$
\begin{aligned}
x + 2y - 3z - 2s + 4t &= 1, \\
2x + 5y - 8z - s + 6t &= 4, \\
x + 4y - 7z + 2t &= 8.
\end{aligned}
$$

Ejemplo Determine si el siguiente sistema homogéneo tiene una solución no nula

$$
\begin{aligned}
x + 2y - z &= 0, \\
2x + 5y + 2z &= 0, \\
x + 4y + 7z &= 0, \\
x + 3y + 3z &= 0.
\end{aligned}
$$

Álgebra de matrices

Dadas dos matrices A y B de orden $m \times n$

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{3n} \\ a_{\mathrm{n1}} & a_{\mathrm{n2}} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & b_{3n} \\ b_{\mathrm{n1}} & b_{\mathrm{n2}} & \cdots & b_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix},
$$

podemos sumarlas o multiplicarlas.

La suma de A y B es una matriz $A + B$ de $m \times n$

$$
A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{m1}} + b_{\mathrm{m1}} & a_{\mathrm{m2}} + b_{\mathrm{m2}} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} + b_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}.
$$

El producto de un escalar k y una matriz A es la matriz kA de orden $m \times n$

$$\mathrm{kA} = \begin{bmatrix} \mathrm{ka}_{11} & \mathrm{ka}_{12} & \cdots & \mathrm{ka}_{1n} \\ \mathrm{ka}_{21} & \mathrm{ka}_{22} & \cdots & \mathrm{ka}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{ka}_{\mathrm{m1}} & \mathrm{ka}_{\mathrm{m2}} & \cdots & \mathrm{ka}_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}.$$

Theorem 4

Sea $M_{mn}(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices de $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ se tiene

- $(A+B)+C = A+(B+C)$.
- $A+0 = A$.
- $A+(-A) = 0$.
- $A+B = B+A$.
- $a(A+B) = aA+aB$.
- $(a+b)A = aA+bA$.
- $(ab)A = a(bA)$.
- $1 \cdot A = A, 0 \cdot A = 0$.

El producto de dos matrices A_{mp} y B_{pn}, denotado como AB de $m \times n$ está definido como

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & \cdots & A_1 \cdot B^n \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & \cdots & A_2 \cdot B^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m \cdot B^1 & A_m \cdot B^2 & \cdots & A_m \cdot B^n \end{bmatrix},$$

donde las A_i, con $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ son las filas de la matriz A y las B^j con $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ son las columnas de la matriz B.

Theorem 5

Sean A, B y C *matrices arbitrarias* de órdenes compatibles, entonces las operaciones están definidas como sigue con un escalar cualquiera $k \in \mathbb{R}$

- $(AB)C = A(BC)$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(B + C)A = BA + CA$.
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

La *transpuesta* de una matriz A, denotada como A^T se obtiene de escribir las filas de A, por orden, como columnas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{m1}} & a_{\mathrm{m2}} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{\mathrm{m1}} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{1n}} & a_{\mathrm{2n}} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}.$$

Theorem 6

Sean A y B *matrices arbitrarias* de órdenes compatibles, las operaciones están definidas para un escalar $k \in \mathbb{R}$ cualquiera como sigue

- $(A + B)^T = A^T + B^T$.
- $(A^T)^T = A$.
- $(kA)^T = kA^T$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede ser representado de forma equivalente como sigue

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{m1}} & a_{\mathrm{m2}} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

o simplemente $Ax = b$, donde $A = (a_{ij})$ es la *matriz de coeficientes* del sistema, $x = (x_j)$ representa el *vector de incógnitas* y $b = (b_i)$ el *vector de constantes*.

La *matriz aumentada* del sistema dado en la expresión anterior está dada como sigue

$$[A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\text{m}1} & a_{\text{m}2} & \cdots & a_{\text{mn}} & b_m \end{bmatrix}.$$

Ejemplo

El siguiente ejemplo representa un sistema de ecuaciones lineales y su ecuación matricial equivalente

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z = 7, \\ x - 2y - 5z = 3, \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ecuaciones Diferenciales

Definition 8

Una *ecuación diferencial* es una ecuación que involucra derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + xy\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^4 x}{\mathrm{d}t^4} + 5\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 3x = \sin(t),$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v.$$

Definition 9

Se define como *ecuación diferencial ordinaria* a una ecuación diferencial que involucra derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una *sola variable* independiente.

En la primer y segunda ecuación, x es la variable independiente en la primera y t lo es en la segunda.

Definition 10

Se define como *ecuación diferencial parcial* a una ecuación diferencial que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a más de una variable independiente.

La tercer ecuación es un ejemplo de ecuación diferencial parcial donde las variables independientes son s y t.

Definition 11

El *orden* de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor orden que aparece en ella.

Definition 12

El *grado* de una ecuación diferencial es el grado de la derivada de mayor orden que aparece en ella.

Ejemplo Considere las siguientes ecuaciones diferenciales

- $\dot{y} + by = 0,$
- $L\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0,$
- $x\dot{y} + y = 3,$
- $\frac{\partial z}{\partial x} = z + x\frac{\partial z}{\partial y},$
- $(\ddot{y})^2 + (\dot{y})^3 + 3y = x^2.$

Definition 13

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es *lineal* en la *variable dependiente* y así como en la *variable independiente* x si está escrita como sigue

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x).$$

Definition 14

Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n, en la variable dependiente y así como en la variable independiente x si se expresa como sigue

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\dot{y}(x) + a_n(x)y(x) = b(x),$$

donde a_0 no es idénticamente cero y el término $b(x)$ se le llama *término no homogéneo*.

¿Cómo podemos identificar las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales?

- La variable dependiente y y sus derivadas ocurren sólo en el primer grado.
- No hay productos de y o cualquiera de sus derivadas.
- No hay funciones trascendentales de y o sus derivadas

Ejemplo

Las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias son lineales

- $\ddot{y}(x) + 5\dot{y}(x) + 6y(x) = 0,$
- $y^{iv}(x) + x^2\dddot{y}(x) + x^3\dot{y}(x) = x \cdot \exp(x).$

> **Hint**
>
> La primer ecuación es homogénea mientras que la segunda es no homogénea.

Ejemplo

Las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias son no lineales

- $\ddot{y}(x) + 5\dot{y}(x) + 6y^2(x) = 0,$
- $\ddot{y}(x) + 5(\dot{y}(x))^3 + 6y = 0,$
- $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta \cdot t) = 0,$
- $\ddot{y}(x) + 5y(x)\dot{y}(x) + 6y(x) = 0.$

Una *EDO lineal* es EDO con *coeficientes constantes* si todos los coeficientes de las variables dependientes y sus derivadas son constantes. Si alguno de los coeficientes es función de la variable independiente se dice entonces que es una EDO lineal con *coeficientes variables*.

Ejemplo

Clasifique cada una de las siguientes ecuaciones como ordinarias, parciales, lineales, no lineales, homogéneas, no homogéneas, con coeficientes constantes o variables así como su grado y orden.

- $\dot{y}(x) + x^2y = x\exp(x)$,
- $\dddot{y}(x) + 4\ddot{y}(x) - 5\dot{y}(x) + 3y(x) = \sin(x)$,
- $u_{xx} + u_{yy} = 0$,

- $y^{iv}(x)+3[\ddot{y}(x)]^5+5y(x)=0$,
- $\ddot{y}(x)+y\sin(x)=0$,
- $\ddot{y}(x)+x\sin(y)=0$,
- $x^{vi}(t)+\left(x^{iv}(t)\right)\left(\dddot{x}(t)\right)+x=t$,
- $(\dot{r}(s))^3=\sqrt{\ddot{r}(s)+1}$.

Soluciones

La ecuación

$$F\left(x,y,\dot{y},\ddot{y},\dddot{y},\ldots,y^{(n)}\right)=0,$$

es una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden y representa una relación entre las $n+2$ variables $x,y,\dot{y},\ddot{y},\dddot{y},\ldots,y^{(n)}$ que puede ser resuelta para $y(n)$ en términos de las otras variables, i.e.

$$y^{(n)}=f(x,y,\dot{y},\ddot{y},\dddot{y},\ldots,y^{(n-1)}).$$

Definition 15

Sea f una función real definida para toda x, se dice que la función f es una solución explícita si f satisface los siguientes requisitos

$$F\left(x,f,\dot{f},\ddot{f},\dddot{f},\ldots,f^{(n)}\right),$$

está definida $\forall x\in I$.

$$F\left(x,f,\dot{f},\ddot{f},\dddot{f},\ldots,f^{(n)}\right)=0.$$

Lo anterior se traduce en que si al sustituir $f(x)$ y sus derivadas por y así como sus correspondientes derivadas, ésta se reduce a una identidad en I.

Definition 16

Una relación de la forma $g(x, y)$ se conoce como *solución implícita* si esta relación define una función real f de la variable x en un intervalo I tal que esta función es una *solución explícita*.

Ejemplo

La función f está definida $\forall x \in \mathbb{R}$ como sigue

$$f(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x),$$

la cual es una solución explícita de la siguiente ED

$$\ddot{y}(x) + y(x) = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo

La relación

$$x^2 + y^2 - 25 = 0,$$

es una solución implícita de la siguiente ED

$$x + y(x)\dot{y}(x) = 0,$$

en el intervalo $I = (-5, 5)$.

Cuando hablamos de "resolver" una ecuación diferencial debemos considerar que no existen métodos exactos de solución y para ello utilizamos métodos aproximados. Por ejemplo:

- Métodos de integración por series.
- **Métodos numéricos**.
- Métodos gráficos

Ejemplo

Encuentre una solución a la ecuación diferencial

$$\dot{y} = 2x,$$

tal que en $x = 1$ esta solución valga 4.

Problema con valor inicial. Implica que la solución o sus derivadas tomen valores en un solo valor de x.

$$\ddot{y}(x) + y(x) = 0, \quad y(1) = 3, \quad \dot{y}(1) = -4.$$

Problema con valores en la frontera. Implica que la solución o sus derivadas tomen valores de dos valores diferentes de x.

$$\ddot{y} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi/2) = 5.$$

Ejemplo

Resuelva el siguiente problema con valor inicial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}, \quad y(3) = 4.$$

Transformada de Laplace

Suponga que f es una función real de la variable $t > 0$ y s un parámetro real, entonces definimos la *transformada de Laplace* de f como

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$F(s) = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Para aplicar la transformada de Laplace a problemas físicos, es necesario invocar la transformada inversa. Si $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$, entonces la *transformada inversa de Laplace* está dada como sigue

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t), \quad t \geq 0,$$

la cual mapea la transformada de Laplace de una función de regreso a la función original.

De las tablas tenemos

$$\mathscr{L}\left\{\dot{f}(t)\right\} = sF(s) - f(0), \tag{1}$$

$$\mathscr{L}\left\{\ddot{f}(t)\right\} = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0), \tag{2}$$

$$\mathscr{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Ejemplo

Muestre que $y = 4\exp(2x) + 2\exp(-3x)$ es la solución al problema con valor inicial

$$\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 0, \quad y(0) = 6, \quad \dot{y}(0) = 2.$$

Definition 17

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal si está escrita de la siguiente forma

$$\dot{y}(x) + p(x)y(x) = q(x).$$

Ejemplo

Considere la siguiente ecuación diferncial y obtenga su solución

$$x\dot{y} + (x+1)y = x^3 \quad \rightarrow \quad \dot{y} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = x^2,$$

con $p(x) = 1 + \frac{1}{x}$ y $q(x) = x^2$.

Ejemplo

Encuentre la solución a los siguientes problemas con valor inicial utilizando Laplace y el método descrito anteriormente

- $\dot{y} - 8y = 0, \quad y(0) = -3.$,
- $\dot{y} + 16y = 0, \quad y(0) = 2.$,
- $-4\dot{y} - 3y = 0, \quad y(0) = 1.$,
- $16\dot{y} + y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$,
- $\dot{y} + 2y = 1$,
- $\dot{y} + 4y = 8x$,
- $\dot{y} + 3y = 6x^2$,
- $\dot{y} + 3y = 3x^2 e^{-3x}$.

Modelado en el dominio de la frecuencia

Contents

Función de Transferencia

Considere un sistema lineal invariante en el tiempo (*LTI*) cuya *función de transferencia* es $G(s)$ y la entrada así como la salida se representan por $x(t)$, $y(t)$, respectivamente. Dicha función se puede escribir como el cociente de dos polinomios en s, esto es

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_n)},$$

o bien

$$G(s) = \frac{b_n s^n + \cdots + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

La *transformada de Laplace* de la salida $Y(s)$ es

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{p(s)}{q(s)} X(s),$$

donde $X(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada $x(t)$.

La respuesta en estado estacionario de un sistema estable LTI a una entrada sinusoidal no depende de las condiciones iniciales. Considerando que $Y(s)$ tiene únicamente polos distintos (simples), la ecuación anterior se puede representar en fracciones parciales como sigue:

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)\frac{\omega X}{s^2+\omega^2},$$

$$Y(s) = \frac{a}{s+j\omega} + \frac{\bar{a}}{s-j\omega} + \frac{b_1}{s+s_1} + \frac{b_2}{s+s_2} + \cdots + \frac{b_n}{s+s_n}, \tag{3}$$

donde a y $b_i, i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes y $\bar{a}$ es el complejo conjugado de a.

Por consiguiente, si aplicamos la transformada inversa de Laplace a la \cref{eqn:y_fracciones_parciales} tenemos

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1e^{-s_1 t} + b_2e^{-s_2 t} + \cdots + b_ne^{-s_n t}, \quad t \geq 0.$$

Función de transferencia propia

Considere la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son dos polinomios con coeficientes reales, entonces tenemos

- *Función impropia*. El $\deg N(s) > \deg D(s)$.
- *Función propia*. El $\deg N(s) \leq \deg D(s)$.
- *Función estrictamente propia*. El $\deg N(s) < \deg D(s)$.
- *Función bipropia*. El $\deg N(s) = \deg D(s)$.

Polos y zeros

Considere una función de transferencia racional propia

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son polinomios con coeficientes reales y $\deg N(s) \leq \deg D(s)$.

Definition 18

Un número complejo o real finito λ es un *polo* de $G(s)$ si $|G(s)| = \infty$, donde $|\cdot|$ denota el valor absoluto. Por otro lado, si $G(\lambda) = 0$ entonces es un *zero* de $G(s)$.

Ejemplo

Considere la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{2\left(s^3 + 3s^2 - s - 3\right)}{(s-1)\,(s+2)(s+1)^3},$$

obtenga sus polos y zeros.

Ejemplo

Sea $u(t) = 1$ con $t \leq 0$ la respuesta de escalón unitario, calcule la respuesta de estado cero de la siguiente función de transferencia

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{3s - 1}{(s+1)(s+2)} \cdot U(s).$$

Estabilidad de sistemas

- **Sistema absolutamente estable**. Todos los polos del sistema estén estrictamente en el semi-plano izquierdo, sin importar la multiplicidad.
- **Sistema marginalmente estable**. Al menos un polo está sobre el eje imaginario con multiplicidad uno y el resto están estrictamente en el semi-plano izquierdo, sin importar la multiplicidad.
- **Sistema inestable**. Al menos un polo está sobre el eje imaginario con multiplicidad mayor a uno o en el semiplano derecho.

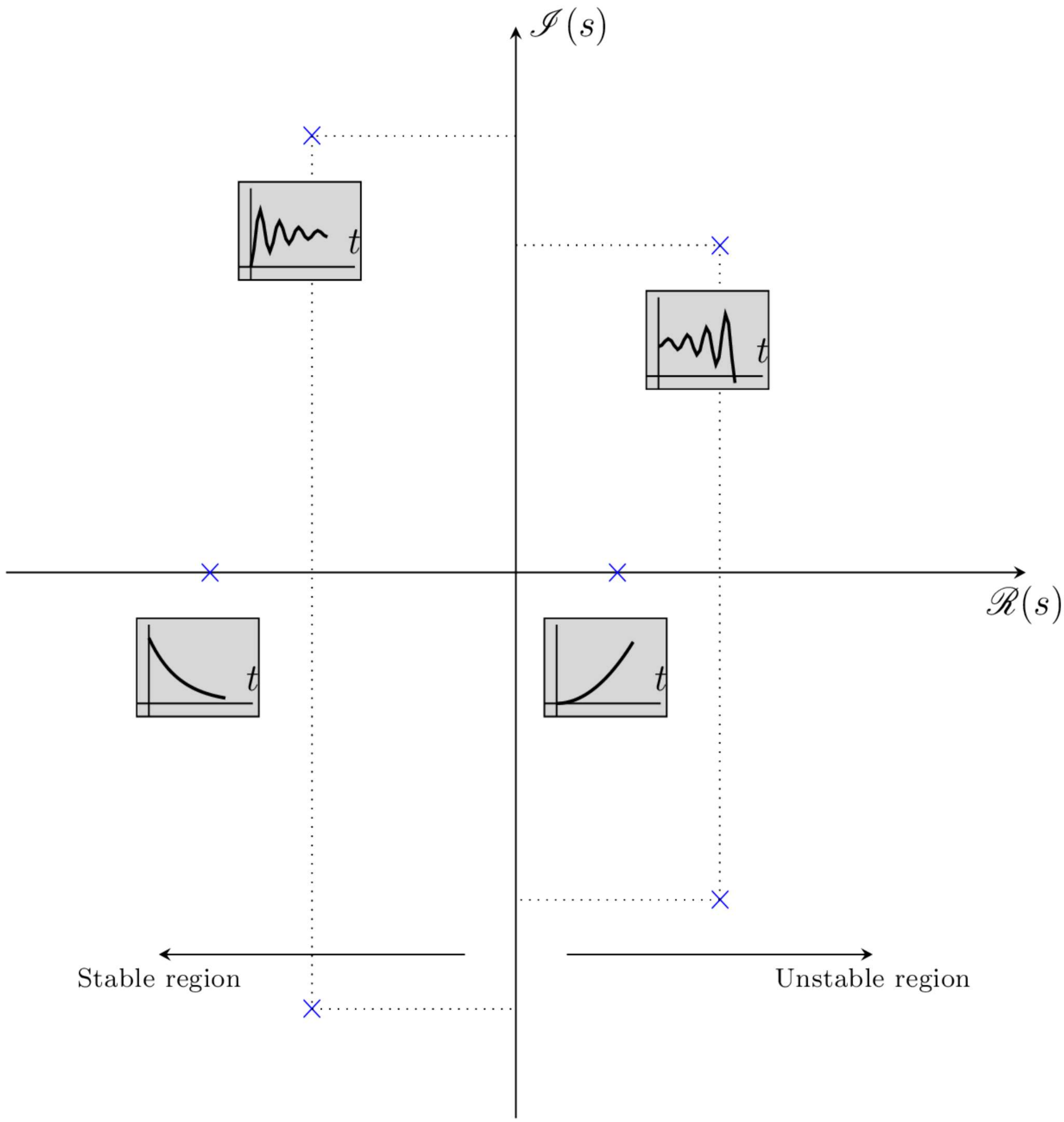


Fig. 1 Mapa de polos y zeros.

Polinomio de Hurwitz

Definition 19

Un polinomio con coeficientes reales es llamado *polinomio de Hurwitz* si todas sus raíces tienen partes reales negativas.

Considere el siguiente polinomio

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \quad a_n > 0,$$

donde $a_i, i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes reales.

Condiciones necesarias

- Si $D(s)$ es *Hurwitz*, entonces todos los coeficientes de $D(s)$ deben ser positivos.
- Si $D(s)$ tiene un término perdido o un coeficiente cero, entonces no es Hurwitz.

Theorem 7

Un polinomio con coeficientes positivos es un polinomio Hurwitz si y sólo si cada entrada en la tabla Routh es positivo, o equivalentemente, si y sólo si cada entrada en la primer columna de la tabla $(b_{61}, b_{51}, b_{41}, b_{31}, b_{21}, b_{11}, b_{01})$ es positivo.

Ejemplo

Considere el siguiente polinomio

$$2s^4 + s^3 + 5s^2 + 3s + 4.$$

Determine si el sistema es estable o no estable utilizando el método de Routh-Hurwitz.

Ejemplo

Considere el siguiente polinomio

$$2s^5 + s^4 + 7s^3 + 3s^2 + 4s + 2.$$

Determine si el sistema es estable o no estable utilizando el método de Routh-Hurwitz.

Ejemplo

Considere el siguiente polinomio

$$2s^5 + s^4 + 7s^3 + 3s^2 + 4s + 1.5.$$

Determine si el sistema es estable o no estable utilizando el método de Routh-Hurwitz.

Ejemplo

Considere la siguiente función de transferencia

$$G_o(s) = \frac{(2s+1)(s+1)}{s^5+5s^4+12s^3+14s^2+3s+1}.$$

Determine si el sistema es estable o no estable utilizando:

- Polos y zeros.
- El método de Routh-Hurwitz.

Ejemplo

Considere la siguiente función de transferencia

$$G_o(s) = \frac{8k}{(s+1)(s^2+2s+2)+8k}.$$

Determine si el sistema es estable o no estable utilizando el método de Routh-Hurwitz.

Ejemplo

Determine el intervalo de estabilidad para el siguiente sistema

$$G(s) = \frac{k(s^2-2s+5)}{s^3+(5+k)s^2+(12-2k)s+5k-18}.$$

Utilice el criterio de Routh-Hurwitz para resolver este ejercicio.

Modelado de sistemas eléctricos y electro-mecánicos

Ley de corrientes de Kirchhoff

Tiene como base el principio de conservación de la carga eléctrica. Por ejemplo, considere un nudo en el que convergen tres corrientes como se muestra en la Fig. 2

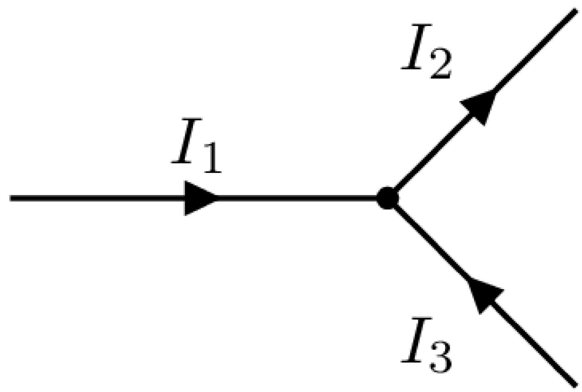


Fig. 2 Sistema masa-resorte-amortiguador.

La primera ley de Kirchhoff denotada como *LCK*, permite establecer la siguiente relación

$$I_1 + I_3 = I_2,$$

de la cual se desprende la siguiente definición.

Definition 20

La suma de las corrientes que entran en un nudo es igual a la suma de las corrientes que salen del mismo [Antón *et al.*, 2007]

Equivalentemente podemos tener

$$I_1 + I_3 + (-I_2) = 0,$$

que nos dice, según la siguiente definición

Definition 21

La suma algebráica de todas las corrientes que entran en un nudo es igual cero [Antón *et al.*, 2007].

Hint

Las corrientes que entran en el nudo son positivas mientras que las corrientes que salen son negativas.

Ley de tensiones de Kirchhoff

Tiene como base el principio de conservación de la energía. Por ejemplo, considere el circuito mostrado en la Fig. 3 donde la polaridad de la tensión fue elegida de forma arbitraria

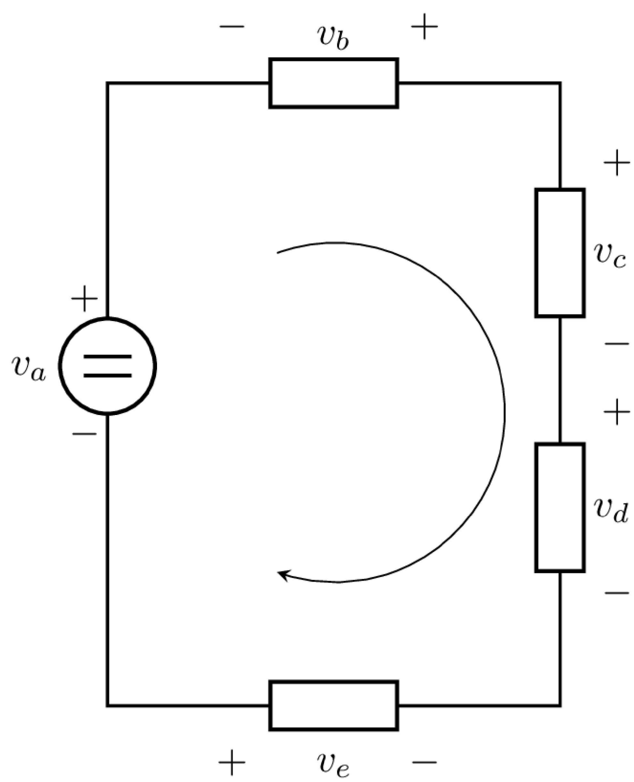


Fig. 3 Sistema masa-resorte-amortiguador.

Si recorremos un lazo en un sentido arbitrario -escogido de forma arbitraria en el sentido de las agujas del reloj- y aplicamos la segunda ley de Kirchhoff, llegamos a la siguiente expresión

$$V_a + V_b + V_e = V_c + V_d,$$

o equivalentemente

$$V_a + V_b - V_c - V_d + V_e = 0,$$

finalmente, reacomodando términos, obtenemos

$$-V_a - V_b + V_c + V_d - V_e = 0.$$

Diodo tunel

El circuito de diodo tunel se muestra en la siguiente figura

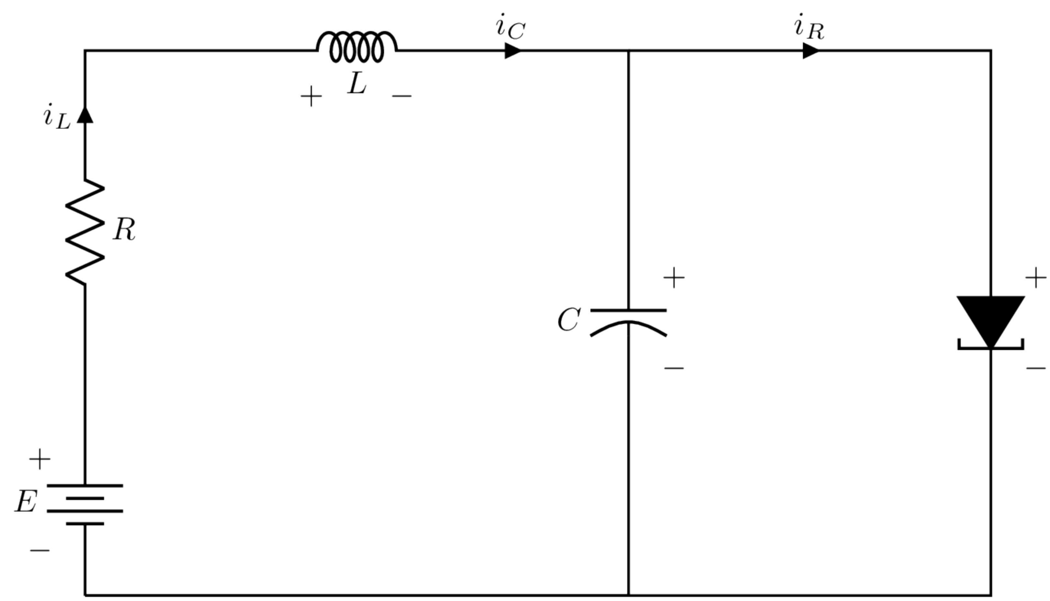


Fig. 4 Diodo túnel.

donde la relación constitutiva que caracteriza el tunel diodo está dada por $i_R = h(v_R)$. Los elementos almacenadores de energía son el inductor L y el capacitor C. Asumiendo que estos elementos son lineales e invariantes en el tiempo, podemos llegar a representar este sistema a partir del siguiente modelo

$$\begin{aligned} i_C &= C\dot{v}_C, \\ v_L &= L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}, \end{aligned} \tag{4}$$

donde v e i denotan el voltaje y corriente a través de un elemento. Además, el sub índice especifica el elemento.

Las ecuaciones del circuito de diodo tunel se pueden representar en forma de espacio-estados si consideramos $u = E$ como una entrada constante, $x_1 = v_C$ (tensión en el capacitor) y $x_2 = i_L$ (corriente en el inductor).

Utilizando las *Leyes de Kirchhoff* y expresando i_C como una función de las variables de estado x_1 , x_2 y la entrada u, tenemos lo siguiente

$$i_C + i_R - i_L = 0,$$

por consiguiente

$$i_C = -h(x_1) + x_2.$$

Del mismo modo, expresamos v_L como una función de las variables x_1, x_2, u y utilizamos las *Leyes de Kirchhoff* como sigue

$$v_C - E + Ri_L + v_L = 0.$$

donde $v_L = -x_1 - Rx_2 + u$.

Reescribiendo las ecuaciones del sistema (4), tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{C}(-h(x_1) + x_2), \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L}(-x_1 - Rx_2 + u), \end{aligned} \tag{5}$$

Circuito R-C

La relación que establece el flujo electromagnético ϕ y la corriente i que lo produce está dada por la siguiente ecuación

$$\phi = Li,$$

donde L es una constante que depende de los factores geométricos y de entorno llamada inductancia.

Los cambios de flujo electromagnético originan potenciales eléctricos relacionados por la *Ley de Faraday*

$$u_L = -\dot{\phi},$$

donde u_L denota el voltaje en las terminales de la inductancia a razón del cambio de flujo. Por consiguiente, la *Ley de Faraday* se puede expresar como sigue

$$u_L = -L\dot{\phi}.$$

En elementos resistivos el voltaje u_R entre el componente y la corriente i que circula por él obedecen a la *Ley de Ohm* dada como siguiente

$$u_R = Ri, \tag{6}$$

donde R es una constante que depende del componente denominado resistencia.

El voltaje u_C entre las terminales de una capacitancia y la carga q siguen la siguiente relación

$$u_C = \frac{Q}{C} \equiv \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t,$$

donde C es una constante que depende de la geometría y el entorno denominada capacitancia. Si consideramos que la corriente se define como una variación temporal de carga

$$i = \dot{Q}, \quad Q = \int i\mathrm{d}t,$$

entonces u_C se expresa en los siguientes términos

$$u_C = \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t. \tag{7}$$

Considere el circuito mostrado en la Fig. 5

Aplicando la *Ley de tensiones de Kirchhoff*, obtenemos

$$u_R + u_C = V_{in}. \tag{8}$$

Sustituyendo (6) y (7) en (8), tenemos

$$Ri + \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t = V_{in},$$

expresado la ecuación anterior en términos de la carga Q, tenemos la siguiente expresión

$$R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_{in}, \tag{9}$$

Aplicando la *Ley de corrientes de Kirchhoff*, obtenemos

$$i_R + i_C = i,$$

dado que el voltaje entre los componentes eléctricos es el mismo y lo denotamos por u, tenemos

$$\frac{u}{R} + C\dot{u} = i.$$

Considerando el modelo dado en la Ec. (9) y tomando V como la carga en el capacitor dividida por la capacitancia $V := \frac{Q}{C}$ y $\dot{V} := \frac{\dot{Q}}{C}$, sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned} R\dot{V}C + \frac{1}{C}VC &= V_{in}, \\ R\dot{V}C + V &= V_{in}. \end{aligned}$$

Entonces, el modelo del circuito RC mostrado en la Fig. 5 está dado por la siguiente ecuación

$$\dot{V} + \frac{1}{RC}V = \frac{1}{RC}V_{in}.$$

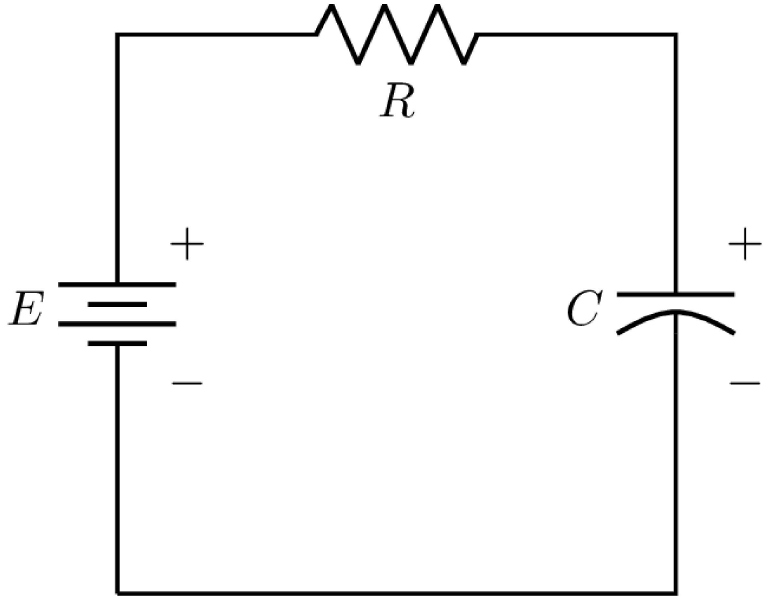


Fig. 5 Modelo de circuito R-C.

Modelado de sistemas hidráulicos y térmicos

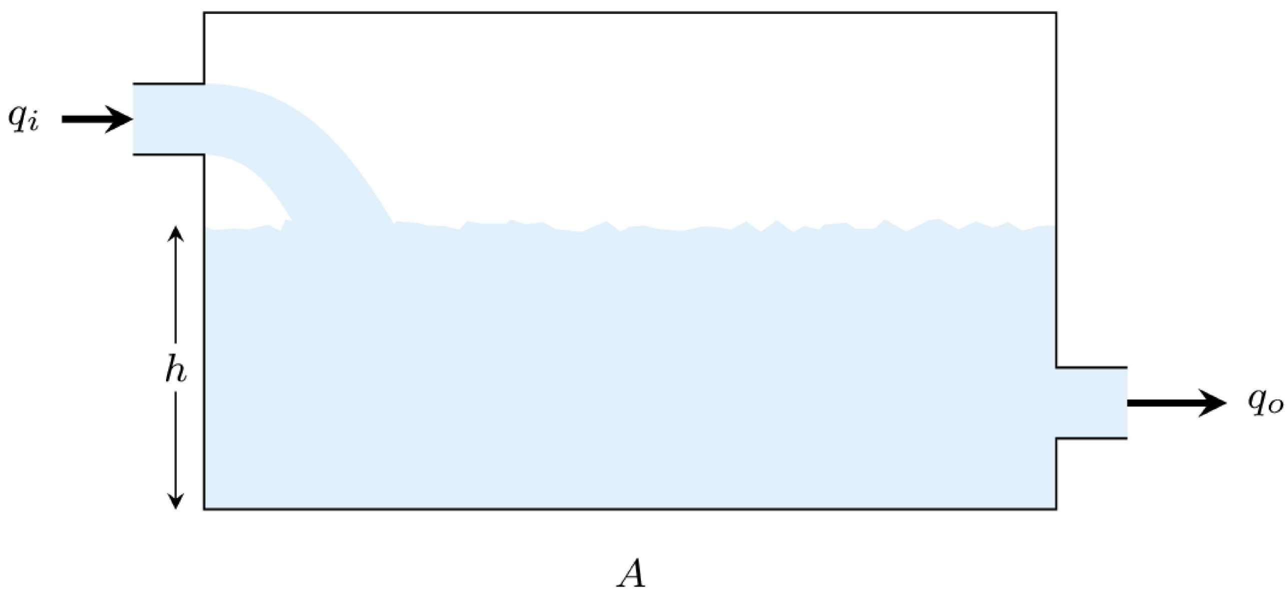


Fig. 6 Modelo de un tanque.

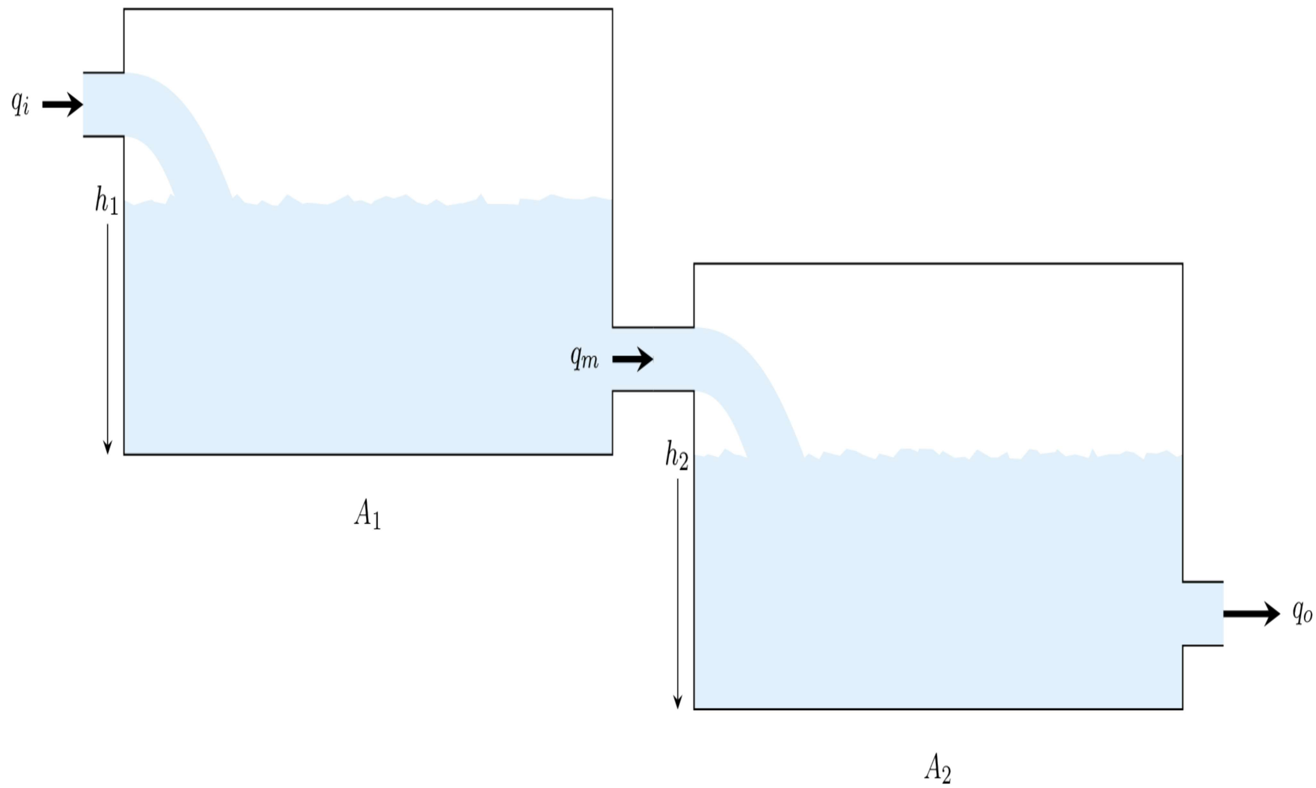


Fig. 7 Modelo de dos tanques en cascada.

Otro tipo de sistemas

Atractor de Lorenz

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \sigma\,(y - x),\\
\dot{y} &= x\,(\rho - z) - y,\\
\dot{z} &= xy - \beta z,
\end{aligned}$$

Modelo presa-depredador

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \alpha x - \beta xy,\\
\dot{y} &= \delta xy - \gamma y,
\end{aligned}$$

Modelado en el dominio del tiempo

Contents

Ecuaciones en variables de estado

Método de los factores integrantes

Para resolver una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$ax'' + bx' + cx = 0,$$

podemos sustituir $u(t) = e^{mt}$ en la ecuación anterior, para obtener

$$(am^2 + bm + c)e^{mt} = 0.$$

Puesto que e^{mt} no se anula, tenemos la siguiente ecuación característica

$$am^2 + bm + c = 0,$$

de donde tenemos tres casos que considerar:

- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación anterior tiene dos soluciones reales m_1 y m_2. Entonces la solución general es $u(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$.

- Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación tiene dos raíces complejas conjugadas $\mu \pm i\sigma$. Entonces la solución general es $u(t) = e^{\mu t}(c_1 \cos(\sigma t) + c_2 \sin(\sigma t))$.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una raíz doble m. Entonces la solución general es $u(t) = e^{mt}(c_1 + c_2 t)$.

Sistemas lineales desacoplados

El método de factores integrantes se puede usar para resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma

$$\dot{x} = Ax.$$

La rescribimos como $\dot{x} - Ax = 0$, la multiplicamos por e^{-at} para obtener

$$(xe^{-at})' = 0,$$

con lo que $xe^{-at} = c$, donde c es una constante. La solución general está dada por

$$x(t) = ce^{at},$$

donde la constante $c = x(0)$, es el valor de la función en el tiempo $t = 0$.

Ejemplo

Consideremos ahora el sistema lineal desacoplado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1, \\ \dot{x}_2 &= 2x_2. \end{aligned}$$

Este sistema se puede escribir en forma matricial como

$$\dot{x} = Ax,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Note

Observe que A es una matriz diagonal, y en general siempre que A sea una matriz diagonal, el sistema se reduce a un sistema lineal desacoplado.

La solución general del sistema desacoplado anterior puede obtenerse mediante el método de los factores integrantes (o usando el de separación de variables) y se expresa como

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{-t}, \\ x_2(t) &= c_2 e^{2t}, \end{aligned}$$

o equivalentemente por

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

donde $c = x(0)$.

Definition 22

El *retrato fase*, o *diagrama de órbitas*, de un sistema de ecuaciones diferenciales tales con $x \in \mathbb{R}^n$, es el conjunto de todas las curvas integrales en el espacio fase.

Ejemplo

Consideremos el siguiente sistema lineal desacoplado en

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2, \\ \dot{x}_3 &= -x_3, \end{aligned}$$

cuya solución general está dada por

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= c_1 e^t, \\
x_2(t) &= c_2 e^t, \\
x_3(t) &= c_3 e^{-t}.
\end{aligned}
$$

El retrato fase para este sistema se muestra a continuación

El plano $x_1 x_2$ se define como *subespacio inestable* y al eje x_3 se le llama el *subespacio estable*.

Diagonalización

Se pueden usar las técnicas algebraicas para diagonalizar una matriz A cuadrada para reducir el sistema lineal

$$
\dot{x} = Ax,
$$

a un sistema lineal desacoplado. Primero consideramos el caso cuando A tiene eigenvalores reales y distintos. El siguiente teorema del Algebra Lineal nos ayudará a resolver este problema.

Theorem 8

Si los eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de una matriz A de orden $n \times n$ son reales y distintos, entonces cualquier conjunto de eigenvectores correpondientes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ forma una base para $\mathbb{R}^n$, la matriz $P = [v_1 \ v_2 \ \ldots \ v_n]$ es invertible y

$$
P^{-1}AP = diag\,[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n].
$$

Definition 23 (Polinomio característico)

Sean $A, I \ \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con I definida como la matriz identidad. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

- La matriz característica de A se define como $A - \lambda I$.
- El determinante de la matriz característica de A es un polinomio en λ; se denomina *polinomio característico* de A y se define como $\phi_A(\lambda) = |A - \lambda I|$.
- La *ecuación característica* de A se define como $\phi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$.

Definition 24 (Eigenvalores)

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se dice que un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ es un *eigenvalor* de A si satisface la ecuación característica de A

$$\phi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = 0.$$

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\phi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$ sí, y sólo sí, el sistema

$$(A - \lambda I)\nu = 0,$$

tiene soluciones no triviales. La ecuación anterior se puede expresar como

$$A\nu = \lambda\nu.$$

Así, tenemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un *eigenvalor* de A si existe un $\nu \mathbb{R}^n$, con $\nu \neq 0$ tal que $(A - \lambda I)\nu = 0$.

Definition 25 (Eigenvectores)

Todo vector ν que satisfaga $(A - \lambda I)\nu = 0$, se llama un *Eigenvector* de A correspondiente a λ.

Theorem 9 (Cayley-Hamilton)

Sea $A^{n \times n}$ una matriz con polinomio característico $\phi_A(\lambda)$ entonces $\phi_A(A) = 0$.

Considere la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -\frac{7}{2} \\ 6 & 4 \end{bmatrix},$$

cuyo polinomio característico está definido como sigue

$$
\begin{aligned}
\phi_A(\lambda) &= \left| \begin{bmatrix} -6 & -\frac{7}{2} \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} -6-\lambda & -\frac{7}{2} \\ 6 & 4-\lambda \end{bmatrix} \right|, \\
&= (-\lambda - 6)(4-\lambda) - (6)\left(-\frac{7}{2}\right) = \lambda^2 + 2\lambda - 3.
\end{aligned}
$$

Entonces, $\phi_A(A)$ se define como sigue

$$
\begin{aligned}
\phi_A(A) &= A^2 + 2A - 3I, \\
&= \begin{bmatrix} -6 & -\frac{7}{2} \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -\frac{7}{2} \\ 6 & 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -6 & -\frac{7}{2} \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} 15 & 7 \\ -12 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & -7 \\ 12 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Considere el sistema lineal

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 - 3x_2, \\
\dot{x}_2 &= 2x_2.
\end{aligned}
$$

Escriba el sistema anterior en la forma $\dot{x} = Ax$, encuentre los eigenvalores de A así como un par de eigenvectores correspondientes. A partir de esto, obtenga el sistema desacoplado.

Definition 26

Supongamos que la matriz A de orden $n \times n$ tiene k eigenvalores negativos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ y $n-k$ eigenvalores positivos $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$ y que estos eigenvalores son distintos. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ el conjunto de eigenvectores correspondientes. Entonces los *subespacios estable* e *inestable* del sistema lineal, E^e y E^i, son los subespacios generados por $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ y $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$, respectivamente, i.e.

$$E^e = gen\{v_1, \ldots, v_k\},$$

$$E^i = gen\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}.$$

Si la matriz A tiene eigenvalores imaginarios puros, entonces también hay otro subespacio llamado el subespacio centro, E^c.

Ejemplo

Encuentre los eigenvalores y eigenvectores de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo Encuentre los eigenvalores y eigenvectores de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo Encuentre los eigenvalores y eigenvectores de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Encuentre los eigenvalores y eigenvectores de la matriz A, resuelva el sistema lineal $\dot{x} = Ax$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Escriba las siguientes ecuaciones diferenciales lineales en la forma $\dot{x} = Ax$ y resuelva

- $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$,
- $\ddot{x} + \dot{x} = 0$,
- $\dddot{x} - 2\ddot{x} - x + 2x = 0$.

Ecuaciones en variables de estado

La representación de un sistema *LTI* en espacio de estados tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{13}x_3(t) + b_1u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{23}x_3(t) + b_2u(t), \\ \dot{x}_3(t) &= a_{31}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{33}x_3(t) + b_3u(t), \\ y(t) &= c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_3(t) + du(t), \end{aligned}$$

donde u, x, y son la entrada y la salida; $x_i, i = 1, 2, 3$ son llamadas las *variables de estado*; a_{ij}, b_i, c_i y d son constantes; $\dot{x}_i := \mathrm{d}x_i(t)/\mathrm{d}t$.

Sistema definido en espacio de estados

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

además $C = [c_1 \quad c_2 \quad c_3]$.

Considérese el sistema definido mediante

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned}$$

donde

- x = vector de estado (vector de dimensión n)
- y = vector de salida (vector de dimensión m)
- u = vector de control (vector de dimensión r)
- A = matriz de estado (matriz de dimensión $n \times n$)
- B = matriz de control (matriz de dimensión $n \times r$)
- C = matriz de salida (matriz de dimensión $m \times n$)
- D = matriz de transmisión directa (matriz de dimensión $m \times r$)

Ejemplo

Considere el siguiente sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -6x_1 - 3.5x_2 - u, \\
\dot{x}_2 &= 6x_1 + 4x_2 + u, \\
y &= 4x_1 + 5x_2.
\end{aligned}
$$

Determine

- Si la función de transferencia es propia o impropia.
- Sus polos y zeros.
- La respuesta ante una entrada tipo escalón unitario $u(t) = 1$.

Modelado de sistemas mediante ecuaciones de estado

Sistemas no lineales

La solución de una ecuación diferencial elemental

$$\dot{x} = g(x),$$

está dada por

$$x(t) = x(0) + \int_0^t g(s)\mathrm{d}s,$$

si g es integrable.

Para tratar con sistemas dinámicos que son modelados por un número finito de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p), \\
\dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p), \\
\vdots &= \vdots \\
\dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p),
\end{aligned}$$

donde $\dot{x}_i$ denota la derivada de x_i con respecto a la variable tiempo t y $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Del mismo modo, llamamos a las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *variables de estado*.

Usualmente utilizamos la notación vectorial para escribir estas ecuaciones de una forma compacta, *i.e.*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ f_3(t, x, u) \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix}$$

y reescribimos las n ecuaciones diferenciales diferenciales de primer orden como una ecuación diferencial vectorial de primer orden de dimensión n, *i.e.*

$$\dot{x} = f(t, x, u),$$

donde x es el estado y u como la entrada. Aquí, definimos la salida del sistema como sigue

$$y = h(t, x, u).$$

Método de Euler

Considere una Ecuación Diferencial Ordinaria (*EDO*) de la forma

$$\dot{y}=f(x), \tag{10}$$

donde f es una función. La solución general a la Ec. (10) está dada por la siguiente expresión

$$y=\int f(x)\mathrm{d}x+c,$$

donde c es una constante arbitraria. Para obtener una solución, dependemos de un valor inicial de la forma

$$y\left(x_0\right)=y_0.$$

Para la mayoría de problemas de valor inicial no es posible encontrar una solución exacta (analítica) ya que las ecuaciones son no lineales, discontinuas, o estocásticas. Por ejemplo, $\dot{y}=e^{xy^4}$. Por lo tanto, necesitamos de un método numérico para aproximar la solución.

Es posible aproximar el término del lado izquierdo de un problema de valor inicial $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ utilizando el *teorema de Taylor* alrededor de un punto dado x_0

$$f\left(x_1\right)=f\left(x_0\right)+\left(x_1-x_0\right)\dot{f}\left(x_0\right)+\tau,$$

donde τ es el error de truncamiento

$$\tau=\frac{\left(x_1-x_0\right)^2}{2!}\ddot{f}\left(\xi\right), \quad \xi\in\left[x_0,x_1\right].$$

Recordando que $h=x_1-x_0$, las ecuación anterior queda definida como sigue

$$\dot{f}\left(x_0\right)=\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)}{h}-\frac{h}{2}\ddot{f}\left(\xi\right)$$

Es posible obtener el método de Euler directo utilizando una variación de la *interpolación de Lagrange* llamada *diferencia dividida*.

Podemos aproximar cualquier función $f(x)$ utilizando un polinomio de grado $P_n(x)$ y un término de error

$$
\begin{aligned}
f(x) &= P_n(x) + \text{error}, \\
&= f\left(x_0\right) + f\left[x_0, x_1\right]\left(x - x_0\right) + f\left[x_0, x_1, x_2\right]\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right), \\
&+ \cdots + f\left[x_0, \ldots, x_n\right] \prod_{i=0}^{n-1}\left(x - x_1\right) + \text{error},
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
f\left[x_0, x_1\right] &= \frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0}, \\
f\left[x_0, x_1, x_2\right] &= \frac{f\left[x_1, x_2\right] - f\left[x_0, x_1\right]}{x_2 - x_0}, \\
f\left[x_0, x_1, \ldots, x_n\right] &= \frac{f\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right] - f\left[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\right]}{x_n - x_0}.
\end{aligned}
$$

Derivando $P_n(x)$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\dot{P}_n(x) = f\left[x_0, x_1\right] + f\left[x_0, x_1, x_2\right]\left\{\left(x - x_0\right) + \left(x - x_1\right)\right\}, \\
+ \cdots + f\left[x_0, \ldots, x_n\right] \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(x - x_0\right) \ldots \left(x - x_{n-1}\right)}{\left(x - x_i\right)},
\end{aligned}
$$

por consiguiente el error se define como sigue

$$
\text{error} = \left(x - x_0\right) \ldots \left(x - x_n\right) \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}.
$$

Definimos entonces la primer derivada como sigue

$$
\dot{f}(x) = \left[x_0, x_1\right] = \frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0},
$$

lo que implica

$$
\dot{f}(x) = \frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0} + O(h), \quad \text{Euler},
$$

$$
\dot{f}(x) = \frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_{-1}\right)}{x_1 - x_{-1}} + O\left(h^2\right), \quad \text{Central}.
$$

Utilizando el mismo método, obtenemos una aproximación a la segunda derivada como sigue

$$\ddot{f}\left(x_0\right) = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O\left(h^2\right),$$

$$\ddot{f}\left(x_0\right) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O\left(h^2\right), \quad \text{central.}$$

Ejemplo

Resuelva numéricamente la ecuación diferencial de primer orden

$$\begin{gathered} \dot{y} = f\left(x, y\right), \\ a \leq x \leq b. \end{gathered}$$

Ejemplo

Aplique la fórmula de Euler a la ecuación de primer orden con una entrada oscilante

$$\dot{y} = \sin(x), \quad 0 \leq x \leq 10.$$

Ejemplo

El crecimiento demográfico simple está descrito por una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\dot{y} = \varepsilon y,$$

cuya solución exacta está dada por

$$y = Ce^{\varepsilon x}.$$

Dada la siguiente condición inicial

$$y\left(0\right) = 1,$$

con una tasa de cambio de $\varepsilon = 0.5$, la solución analítica queda expresada como sigue

$$y = e^{0.5x}.$$

Aplique la fórmula de Euler para obtener una solución aproximada.

Método de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta (*RK*) está relacionado con la expansión de la *serie de Taylor*, con la diferencia de que no es necesaria la diferenciación de f.

Los métodos RK se escriben de la siguiente forma

$$w_{n+1} = w_n + hF(t, w, h; f), \quad n \geq 0,$$

donde el error de truncamiento está definido por

$$T_n(y) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hF(t_n, y(t_n), h; f),$$

tal que el error está dado como sigue $\tau_n(y)$

$$T_n = h\tau_n(y).$$

Reescribiendo términos, tenemos

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) - hF(t_n, y(t_n), h; f) + h\tau_n(y).$$

Considere el método explícito de un paso

$$\frac{w_{i+1} - w_i}{h} = F(f, t_i, w_i, h),$$

con

$$F(f, t, y, h) = a_0 k_1 + a_1 k_2,$$

$$F(f, t, y, h) = a_0(t, y) + a_1(t + \alpha_1, y + \beta_1),$$

donde $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$.

Note

En la formulación del *método de Runge-Kutta* existe un parámetro libre. En este caso, α_0.

Theorem 10

Sea $f(t,y)$ y todas sus derivadas parciales de orden menor o igual a $n+1$ continuas sobre $D=\{(t,y)|a\leq t\leq b, c\leq y\leq d\}$ y sea $(t_0,y_0)\in D$ para cada $(t,y)\in D$, $\exists\xi\in(t,t_0)$ y $\mu\in(y,y_0)$ con

$$f(t,y)=P_n(t,y)+R_n(t,y),$$

donde

$$\begin{aligned}P_n(t,y)=f(t_0,y_0)&+\left[(t-t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(t_0,y_0)\right]\\&+\left[\frac{(t-t_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0,y_0)+(y-y_0)(t-t_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial t}(t_0,y_0)\right.\\&+\left.\frac{(y-y_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0,y_0)\right]\\&+\cdots+\\&+\left[\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(t-t_0)^{n-j}(y-y_0)^j\frac{\partial^n f}{\partial y^j\partial t^{n-j}}(t_0,y_0)\right].\end{aligned}$$

Podemos utilizar el Theorem 10 para encontrar los valores a_1, α_1 y β_1 considerando que $\alpha_1 f(t+\alpha_1,y+\beta_1)$ aproxima a Taylor de segundo orden

$$f(t,y)+\frac{h}{2}\dot{f}(t,y)$$

con un error no mayor a $O\left(h^2\right)$.

Utilizando

$$\dot{f}\left(t,y\right)=\frac{\partial f}{\partial t}(y,t)+\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\dot{y}(t),$$

la expresión de Taylor de segundo orden se puede escribir como sigue

$$f\left(t,y\right)+\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(y,t)+\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)f\left(t,y\right).$$

Expandiendo $\alpha_1 f\left(t+\alpha_1,y+\beta_1\right)$ y su *polinomio de Taylor* de grado uno alrededor de (t,y), tenemos

$$\alpha_1 f\left(t+\alpha_1,y+\beta_1\right)=\alpha_1 f\left(t,y\right)+a_1\alpha_1\frac{\partial f}{\partial t}(t,y)+a_1\beta_1\frac{\partial f}{\partial y}+a_1R_1\left(t+\alpha_1,y+\beta_1\right),$$

donde

$$R_1\left(t+\alpha_1,y+\beta_1\right)=\frac{\alpha_1^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi,\mu)+\alpha_1\beta_1\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial y}(\xi,\mu)+\frac{\beta_1^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\mu),$$

para algún $\xi\in[t,t+\alpha_1]$ y $\mu\in[y,y+\beta_1]$.

Los métodos de orden mayor se obtienen de forma similar. Por ejemplo, Runge-Kutta de tercer orden se expresa como sigue

$$\frac{w_{i+1}-w_i}{h}=F\left(f,t_i,w_i,h\right),$$

con

$$F\left(f,t,w,h\right)=a_0k_1+a_1k_2+a_2k_3,$$

donde

$$a_0+a_1+a_2=1,$$

$$\begin{aligned}k_1&=f\left(t_i,w_i\right),\\k_2&=f\left(t_i+\alpha_1h,t_i+\beta_{11}k_1\right),\\k_3&=f\left(t_i+\alpha_2h,t_i+\beta_{21}k_1+\beta_{22}k_2\right).\end{aligned}$$

Escogiendo $\alpha_2 = 1$, $\beta_{11} = \frac{1}{2}$, obtenemos la siguiente ecuación

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3),$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_i, w_i\right), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, w_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + h, w_n - hk_1 + 2hk_2\right). \end{aligned}$$

Para obtener el método de Runge-Kutta de cuarto orden, consideramos

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha, \\ k_1 &= hf\left(t_i, w_i\right), \\ k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf\left(t_{i+1}, w_i + k_3\right), \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

Relación entre el modelo en variables de estado y la función de transferencia

Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx. \end{aligned} \tag{11}$$

Podemos obtener la función de transferencia $G(s)$ del sistema (11) si aplicamos *Laplace* en ambos lados de la igualdad

$$\mathcal{L}\left\{\dot{x}\right\} = A\mathcal{L}\left\{x\right\} + B\mathcal{L}\left\{u\right\},$$

de (1), tenemos

$$\begin{aligned} sX(s) - X(0) &= AX(s) + bU(s), \\ sX(s) - AX(s) &= BU(s) + X(0), \\ (sI - A)X(s) &= BU(s) + X(0), \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}\left[BU(s) + x_0\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

donde $x_0 := X(0)$.

Recordando que $y = Cx$, aplicando Laplace tenemos

$$\mathcal{L}\{y\} = C\mathcal{L}\{x\},$$

por consiguiente

$$Y(s) = CX(s). \tag{13}$$

Sustituyendo (12) en (13)

$$\begin{aligned} Y(s) &= C(sI - A)^{-1}\left[BU(s) + x_0\right], \\ &= C(sI - A)^{-1}BU(s) + C(sI - A)^{-1}x_0. \end{aligned} \tag{14}$$

Asumiendo condiciones iniciales iguales a cero $x_0 = 0$, podemos obtener la función de transferencia del sistema (11) como sigue

$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B.$$

Análisis de dinámicas de sistemas en el dominio del tiempo

Contents

Considere un sistema autónomo representado por la siguiente ecuación

$$\dot{x} = f(x), \tag{15}$$

donde $f : D \leftarrow R^n$ es un mapa local de Lipschitz de un dominio $D \subset R^n$ en R^n.

Para poder estudiar la estabilidad del sistema (15), es necesario obtener $\bar{x} \in D$ que denota el punto de equilibrio

$$f(\bar{x}) = 0.$$

Localización de los puntos de equilibrio

Definition 27

El punto de equilibrio $x = 0$ de $\dot{x} = f(x)$ es

estable si, para cada $\varepsilon > 0$, hay un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

- inestable si no es estable.
- asintóticamente estable si este es estable y δ se escoge tal que.

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0.$$

Ejemplo 1.

Considere las ecuaciones del péndulo simple y obtenga sus puntos de equilibrio

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2. \end{aligned}$$

Linealización de sistemas en torno a un punto de equilibrio

Un sistema (LTI) de la forma

$$\dot{x} = Ax, \tag{16}$$

tiene un punto de equilibrio en el origen. Este punto de equilibrio está aislado si y sólo si $\det(A) \neq 0$. Si $\det(A) = 0$, la matriz A tiene un espacio nulo no trivial.

Las propiedades de estabilidad del origen pueden ser caracterizadas por las ubicaciones de los *eigenvalores* de la matriz A.

Recordemos que la solución al sistema $\dot{x} = Ax$ dada una condición inicial x_0 está dada como sigue

$$x(t) = \exp(At)x_0.$$

Además, para cualquier matriz A existe una matriz P no \myindex{singular} que transforma A en su forma de **Jordan**, *i.e.*

$$P^{-1}AP = J = \text{blockdiag}\,[J_1, J_2, \ldots, J_r],$$

donde J_i es el bloque de Jordan asociado con el eigenvalor λ_i de A.

La forma generalizada del bloque de Jordan, considerando un orden m, tiene la forma siguiente

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}_{m \times m},$$

por consiguiente

$$\exp(At) = P\exp(Jt)P^{-1} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1}\exp(\lambda_i t)R_{ik},$$

donde m_i es el orden del bloque de Jordan asociado con el eigenvalor λ_i.

Theorem 11

El punto de equilibrio $x = 0$ de $\dot{x} = Ax$ es estable si y sólo si todos los eigenvalores de A satisfacen $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0$ y cada eigenvalor con $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$ tiene un bloque de Jordan asociado de uno. El punto de equilibrio $x = 0$ es (globalmente) asintóticamente estable sí y sólo sí todos los eigencalores de A satisfacen $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$.

La demostración de este teorema se puede consultar en Khalil (2002).

Linealización

Suponga que las funciones f_1 y f_2 del sistema autónomo de segundo orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{17}$$

son continuamente diferenciables y que además $p = (p_1, p_2)$ es un punto de equilibrio, el sistema (17) se puede expandir mediante serie de Taylor en torno a (p_1, p_2) como sigue

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(p_1, p_2) + a_{11}(x_1 - p_1) + a_{12}(x_2 - p_2) + \mathrm{H.O.T}, \\ \dot{x}_2 &= f_2(p_1, p_2) + a_{21}(x_1 - p_1) + a_{22}(x_2 - p_2) + \mathrm{H.O.T}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left.\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1 = p_1, x_2 = p_2}, \quad a_{12} = \left.\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_1 = p_1, x_2 = p_2}, \\ a_{21} &= \left.\frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1 = p_1, x_2 = p_2}, \quad a_{22} = \left.\frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_1 = p_1, x_2 = p_2}, \end{aligned}$$

y H.O.T. denota los términos de orden superior de la expansión de Taylor, es decir $(x_1 - p_1)^2, (x_2 - p_2)^2, (x_1 - p_1) \times (x_2 - p_2)$, y así sucesivamente.

Dado que (p_1, p_2) denota el punto de equilibrio, tenemos

$$f_1(p_1, p_2) = f_2(p_1, p_2) = 0.$$

Puesto que consideramos trayectorias cercanas a este punto, definimos

$$y_1 = x_1 - p_1, \quad y_2 = x_2 - p_2.$$

Por consiguiente, las ecuaciones de estado quedan de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 = \dot{x}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \text{H.O.T},\\ \dot{y}_2 = \dot{x}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \text{H.O.T}.\end{aligned}$$

Si consideramos una vecindad cercana al punto de equilibrio, entonces podemos decir que los términos H.O.T son despreciables y por consiguiente, realizamos una aproximación de la ecuación de estado no lineal por la ecuación de estado lineal como sigue

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 = \dot{x}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2,\\ \dot{y}_2 = \dot{x}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2.\end{aligned}$$

Reescribiendo lo anterior en una forma vectorial, tenemos

$$\dot{y} = Ay,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{x=p} = \frac{\partial f}{\partial x}\Bigg|_{x=p}$$

Note

La matrix $[\partial f/\partial x]$ es llamada la matriz Jacobiana de $f(x)$ mientras que A es la matriz Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio p.

Ejemplo

- Considere el circuito de diodo tunel que se muestra a continuación

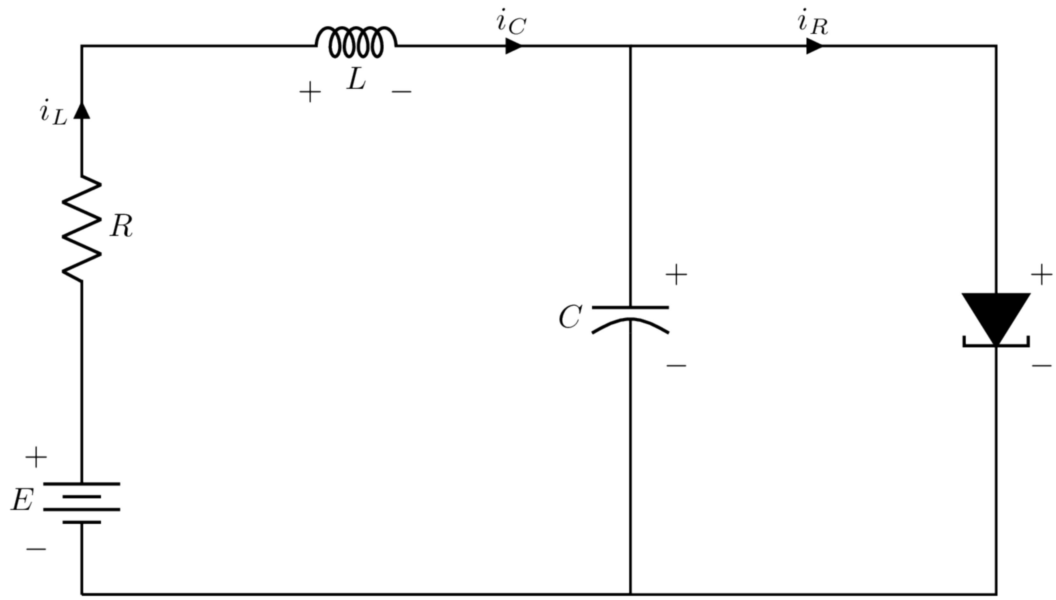


Fig. 8 Diodo túnel.

donde los elementos de almacenamiento de energía son el capacitor C y el inductor L mientras que el diodo tunel es representado por la relación $i_R = h(v_R)$. Asumiendo que los elementos del circuito son lineales e invariantes en el tiempo, el circuito de diodo tunel se puede representar matemáticamente como sigue

$$\begin{aligned} i_C &= C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}, \\ v_L &= L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}, \end{aligned} \tag{18}$$

donde i, v representan la corriente y el voltaje a través de los elementos, respectivamente.

Considere que los parámetros del modelo son $u = 1.2V$, $R = 1.5k\Omega = 1.5 \times 10^3\Omega$, $C = 2pF = 2 \times 10^{-12}F$, $L = 5\mu H = 5 \times 10^{-6}H$. Además, suponga que $h(\cdot)$ está dada por

$$h(x_1) = 17.76x_1 - 103.79x_1^2 + 229.62x_1^3 - 226.31x_1^4 + 83.72x_1^5.$$

1. Utilice las Leyes de Kirchhoff para reescribir las ecuaciones anteriores.
2. Encuentre los puntos de equilibrio.
3. Linealice el sistema.
4. Evalúe la matriz Jacobiana en los puntos de equilibrio.

Ejemplo

- Considere el péndulo simple mostrado en la siguiente

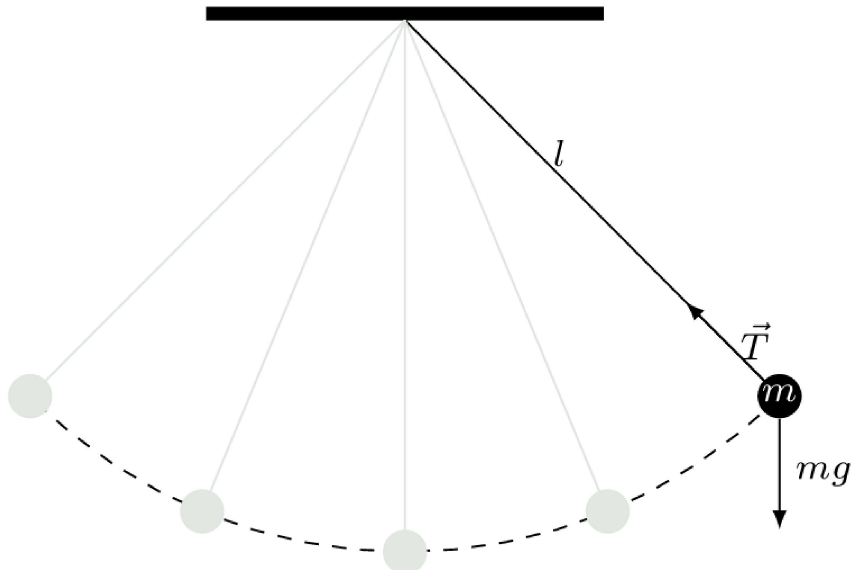


Fig. 9 Diagrama de péndulo simple sin fuerza externa.

donde l denota la longitud de la varilla, y m la masa de la bola.

Cuya representación en espacio de estados está dada como sigue

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2. \end{aligned} \tag{19}$$

1. Encuentre los puntos de equilibrio.
2. Linealice el sistema.
3. Evalúe la matriz Jacobiana en los puntos de equilibrio.

Análisis de la estabilidad de sistemas dinámicos linealizados

Considere un sistema LTI como se muestra en la Ec. (16) donde A es una matriz real de dimensión 2×2. La solución a este sistema con una condición inicial x_0 está dada por la siguiente ecuación

$$x(t) = M \exp(J_r t) M^{-1} x_0,$$

donde J_r es la forma real de Jordan de A y M es una matriz real no singular tal que $M^{-1}AM = J_r$. Dependiendo de los eigenvalores λ_i de la matriz A, la forma de Jordan puede tomar los siguientes casos

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix},$$

donde k puede tomar el valor de 0 o 1.

Caso 1. Ambos eigenvalores son reales: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$.

El sistema tiene dos eigenvectores reales v_1 y v_2 asociados con λ_1 y λ_2, respectivamente. Donde el sistema es transformado en dos ecuaciones diferenciales de primer orden después de un cambio de coordenadas $z = M^{-1}x$, *i.e.*

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1, \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2, \end{aligned}$$

cuya solución está dada como sigue, para las condiciones iniciales (z_{10}, z_{20})

$$z_1(t) = z_{10} e^{\lambda_1 t}, \quad z_2(t) = z_{20} e^{\lambda_2 t}.$$

Cuando $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, el retrato fase tiene la forma de la Figura 1.15(a), donde $x = 0$ es llamado *nodo estable*. Por otro lado, si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, $x = 0$, el retrato fase se muestra en la Figura 1.15(b) y se le conoce como *nodo inestable*.

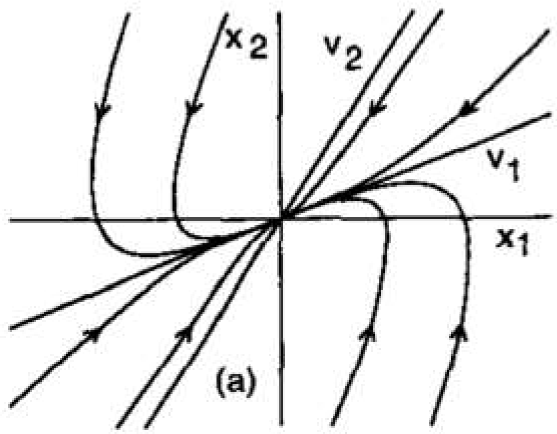


Figure 1.15: Phase portraits for (a) a stable node; (b) an unstable node.

Si el sistema tiene eigenvalores con signos opuestos, esto es $\lambda_2 < 0\lambda_1$, decimos que λ_2 es un eigenvalor estable y λ_1 inestable. Por consiguiente, el retrato fase que corresponde a esta trayectoria se muestra en la Figura 1.16(a).

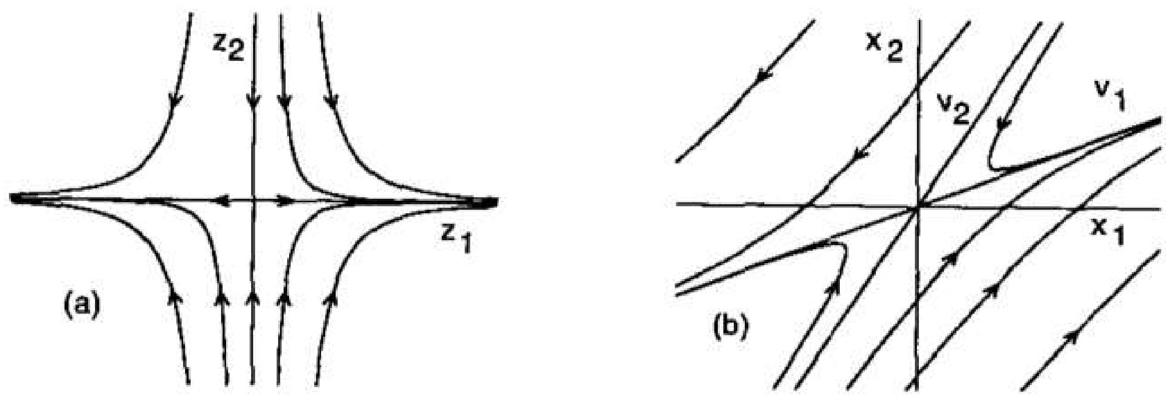


Figure 1.16: Phase portrait of a saddle point (a) in modal coordinates; (b) in original coordinates.

Caso 2. Eigenvalores complejos: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

El sistema $\dot{x} = Ax$ después de la transformación de coordenadas $z = M^{-1}x$ tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \alpha z_1 - \beta z_2, \\ \dot{z}_2 &= \beta z_1 + \alpha z_2. \end{aligned}$$

Puesto que la solución a este sistema es oscilatoria, se puede expresar en coordenadas polares como sigue

$$r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{z_2}{z_1}\right),$$

teniendo dos ecuaciones diferenciales de primer orden desacopladas

$$\dot{r} = \alpha r,$$
$$\dot{\theta} = \beta.$$

La solución de este sistema, para una condición inicial (r_0, θ_0) es

$$r(t) = r_0 r^{\alpha t}, \quad \theta(t) = \theta_0 + \beta_t.$$

Dependiendo del valor de α, el retrato fase puede tomar alguna de las siguientes formas

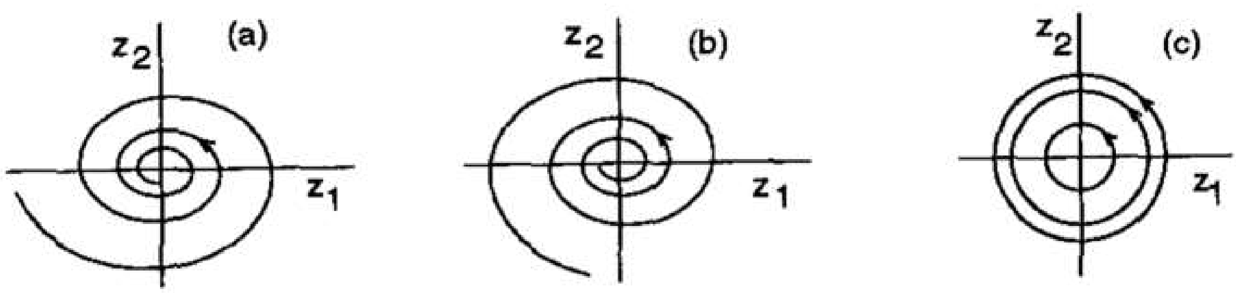
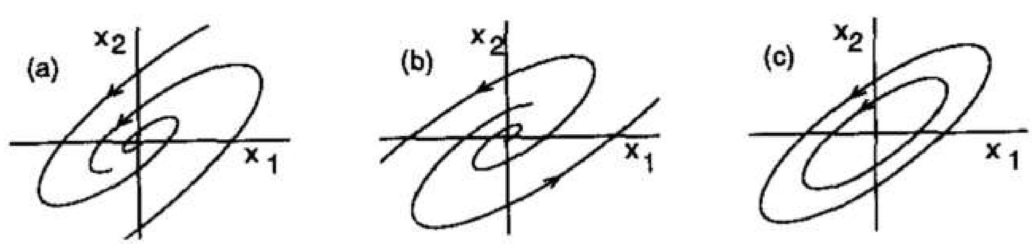


Figure 1.17: Typical trajectories in the case of complex eigenvalues. (a) $\alpha < 0$; (b) $\alpha > 0$; (c) $\alpha = 0$.

> **Note**
>
> El punto de equilibrio $x = 0$ es un *foco estable* si $\alpha < 0$, *foco inestable* si $\alpha > 0$ y *centro* si $\alpha = 0$ como se muestra a continuación
>
> 
>
>
> Figure 1.18: Phase portraits for (a) a stable focus; (b) an unstable focus; (c) a center.

Caso 3. Eigenvalores múltiples diferentes de cero: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$

Para este caso, el sistema $\dot{x} = Ax$ después de un cambio de coordenadas toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda z_1 + k z_2, \\ \dot{z}_2 &= \lambda z_2, \end{aligned}$$

cuya solución, con c.i. (z_{10}, z_{20}) está dada como sigue

$$z_1(t) = e^{\lambda t}\,(z_{10} + k z_{20} t), \quad z_2(t) = e^{\lambda t} z_{20}.$$

Los retrato fase para este caso, considerando $k = 0$ y $k = 1$ se muestran en la siguiente figura

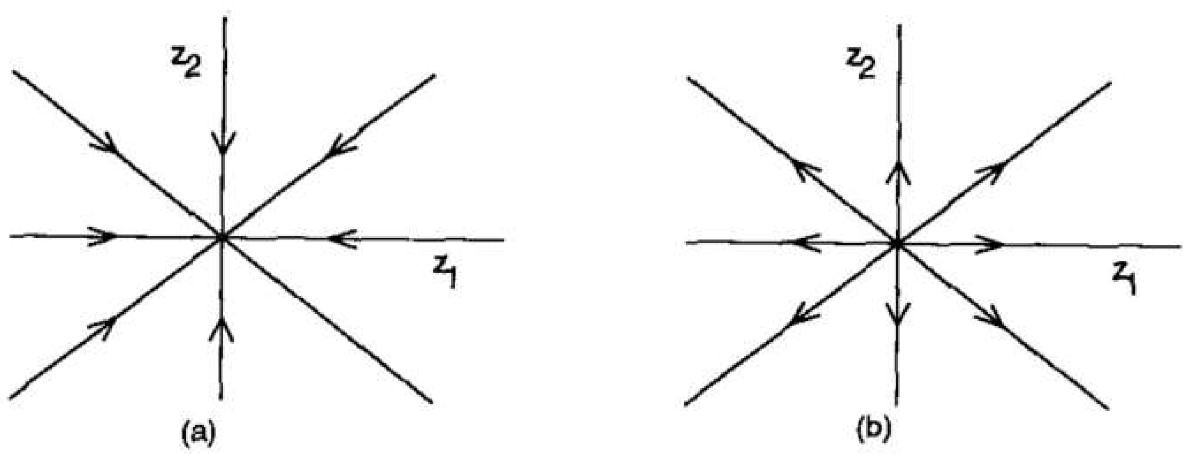


Figure 1.19: Phase portraits for the case of nonzero multiple eigenvalues when $k = 0$: (a) $\lambda < 0$; (b) $\lambda > 0$.

Aquí, el punto de equilibrio $x = 0$ se le conoce como *nodo estable* si $\lambda < 0$ y nodo inestable si $\lambda > 0$. Las trayectorias se muestran en la siguiente representación

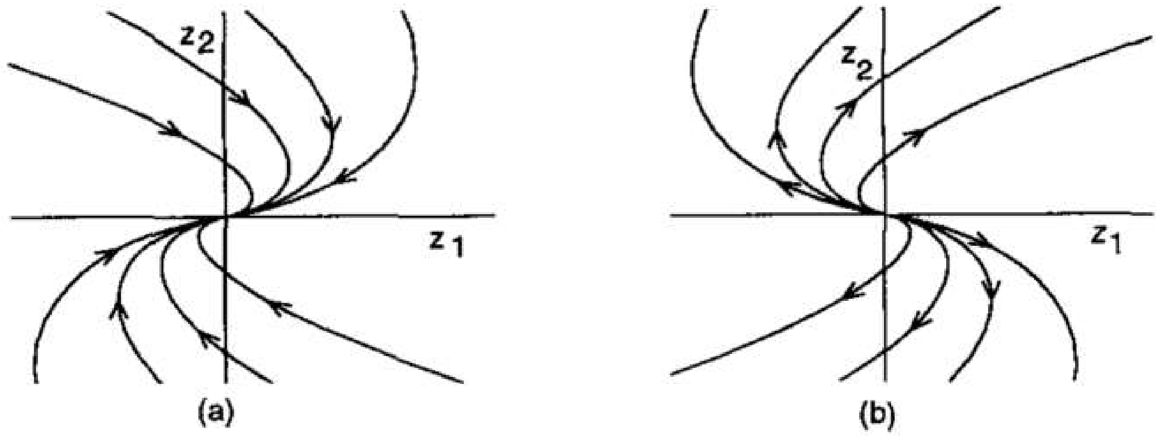


Figure 1.20: Phase portraits for the case of nonzero multiple eigenvalues when $k = 1$: (a) $\lambda < 0$; (b) $\lambda > 0$.

Caso 4. Uno o ambos autovalores son cero

Cuando $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$, el sistema después de una transformación de coordenadas tiene la siguiente representación

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= 0, \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2, \end{aligned}$$

cuya solución es

$$z_1(t) = z_{10}, \quad z_2(t) = z_{20} e^{\lambda_2 t}.$$

Cuano ambos eigenvalores se encuentran en el origen y se aplica una transformación del coordenadas al sistema $\dot{x} = Ax$, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución está dada como sigue

$$z_1(t) = z_{10} + z_{20} t, \quad z_2(t) = z_{20}.$$

Las trayectorias que forman el retrato fase para estos casos en particular se muestran en la siguientes figuras

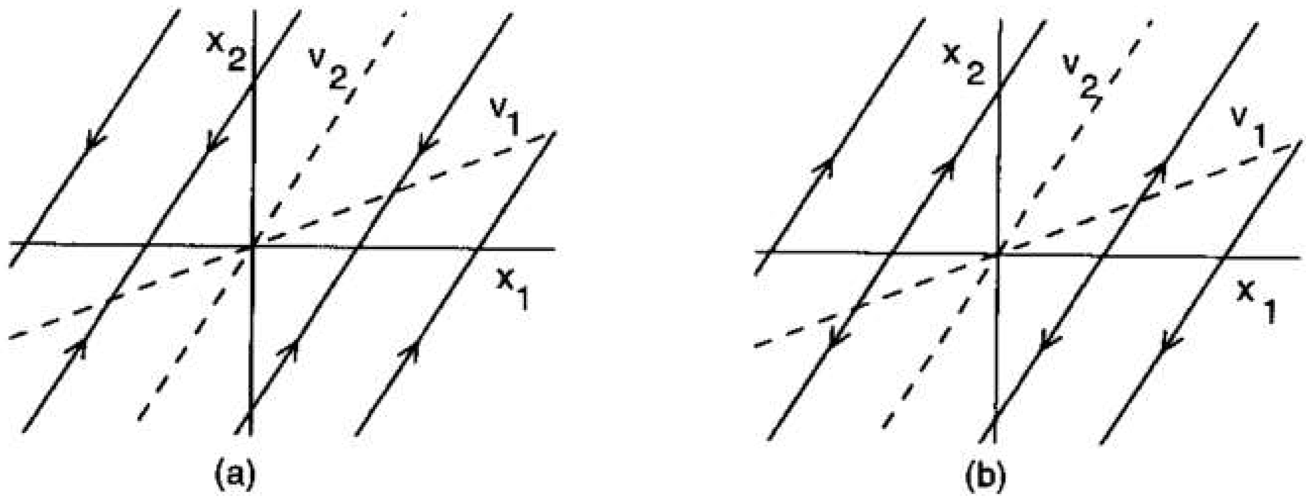


Figure 1.21: Phase portraits for (a) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 < 0$; (b) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 > 0$.

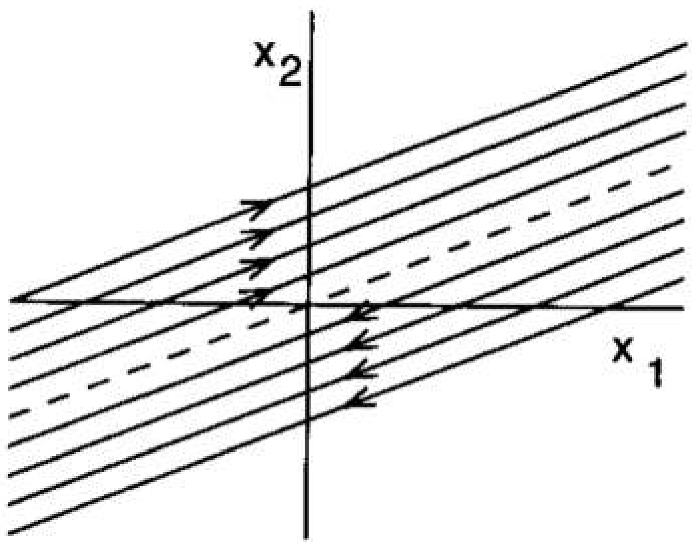


Figure 1.22: Phase portrait when $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Ejemplo

- Clasifique los puntos de equilibrio del circuito de diodo tunel (18) y determine su estabilidad.

Ejemplo

- Clasifique los puntos de equilibrio del sistema de péndulo simple (19) y determine su estabilidad.

Respuesta de estado estacionario

Considere un sistema entrada-salida lineal como se muestra en la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu,\\ y &= Cx,\end{aligned}$$

donde su solución se puede obtener a partir de la ecuación de convolución

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{20}$$

Como se puede observar, la respuesta del sistema depende de una condición inicial x_0 y una entrada u. Además, es posible observar que en esta expresión existen dos componentes: la *respuesta transitoria* y la *respuesta de estado estable*. La primera ocurre cuando se aplica una entrada y se observa un desajuste entre la condición inicial y la solución de estado estable. La segunda refleja el comportamiento del sistema bajo las entradas dadas. En la Fig. 10 podemos ver estos dos componentes en respuesta ante una entrada de tipo escalón unitario.

> **Note**
>
> En la práctica, se espera que si la entrada es periódica la respuesta también lo sea. Lo mismo con entradas constantes.

Un *escalón unitario*, *entrada escalón* o *escalón de Heaviside* es una función definida a pedazos como sigue

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \tag{21}$$

Definimos entonces como *respuesta escalonada* a la salida $y(t)$ a partir de una condición inicial en el punto de equilibrio del sistema y una entrada $u(t)$ de la forma (21).

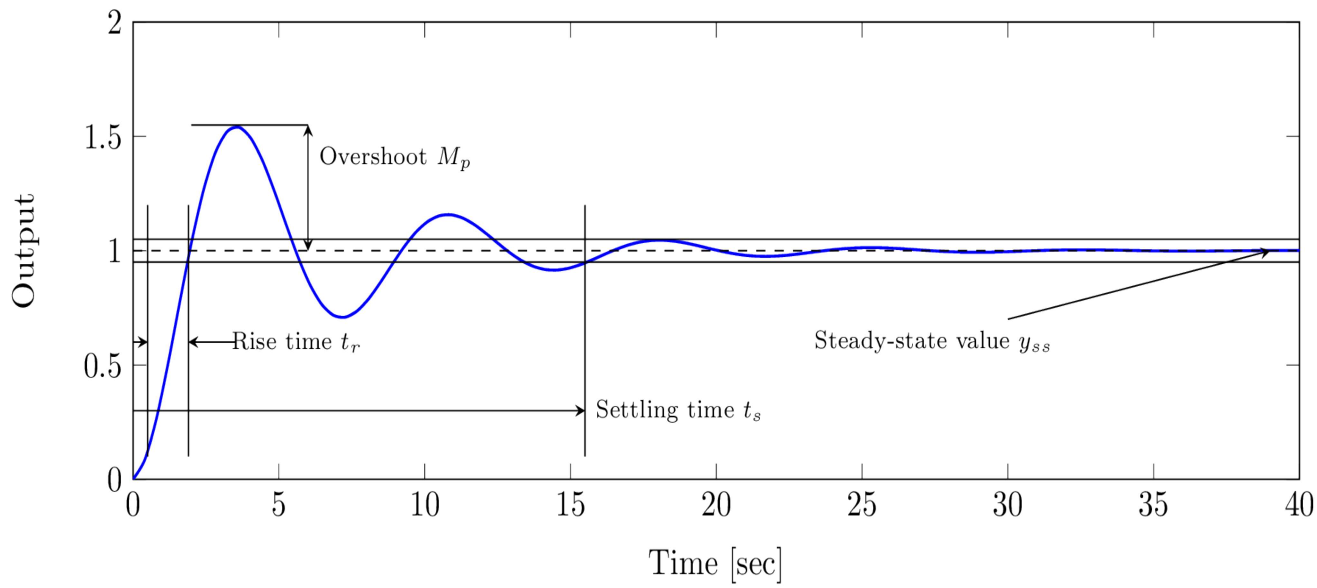


Fig. 10 Respuesta del sistema ante una entrada tipo escalón. Se observa el tiempo de subida (*Rise time*), sobretiro (*Overshoot*), tiempo de asentamiento (*Settling time*) y valor en estado estable (*Steady-state value*).

Utilizando la ecuación de convolución \eqref{eqn:conv_eq}, podemos calcular la respuesta ante una entrada tipo escalón considerando $x_0 = 0$. Entonces, tenemos

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau = C\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathrm{d}\tau, \\
&= C\int_0^t e^{A\sigma}B\mathrm{d}\sigma = C\Big(A^{-1}e^{A\sigma}B\Big)\Big|_{\sigma=0}^{\sigma=t}, \\
&= CA^{-1}e^{At}B - CA^{-1}B,
\end{aligned}
$$

o bien

$$
y(t) = \underbrace{CA^{-1}e^{At}B}_{\text{transitorio}} \underbrace{-CA^{-1}B}_{\text{estado estable}}
$$

Velocidad de respuesta

Definimos como rendimiento transitorio a la velocidad de respuesta o la velocidad en la que el sistema alcanza al estado estable. Generalmente se especifica en términos de tiempo de levantamiento (*rise time*), tiempo de asentamiento (*settling time*) y sobretiro (*overshoot*). El *tiempo de levantamiento* lo definimos como el tiempo requerido para la respuesta pase de 0 al 90% del valor en estado estacionario como se muestra en la Fig. 10. En otras palabras, buscamos el valor más pequeño t_r tal que

$$y\left(t_r\right) = 0.9 y_{ss}$$

donde t_s denota el \myindex{tiempo de asentamiento}. Es decir, el tiempo que le toma a la respuesta del sistema alcanzar y mantenerse dentro del $\pm 2\%$ de su valor en estado estable, o bien, el valor más pequeño t_s tal que

$$|y - y_{ss}| \leq 0.02 y_{ss}, \quad \forall\, t \geq t_{ss}.$$

Sea $y_{\max}$ el valor máximo de $|y(t)|,\ \forall t \geq 0$ o bien

$$y_{\max} := \max |y(t)|,$$

entonces el *sobretiro* se define como sigue

$$M_p := \frac{y_{\max} - y_{ss}}{y_{ss}} \times 100\%.$$

Referencias

[AntonPMartin07] J.C.Á. Antón, L.M. Pascual, and F.J.F. Martín. *Introduccion al analisis de circuitos electricos*. Textos universitarios. Universidad de Oviedo, 2007. ISBN 9788483176375. URL: https://books.google.com.cu/books?id=L00nvc3kAFYC.