8 Il Metodo Delta

Il Continuous Mapping Theorem ci garantice che se $a_n(X_n - E[X_n])$ è una sequenza di variabili aleatorie che converge in distribuzione ad un limite Z e g è una funzione continua, allora $g(a_n(X_n - E[X_n]))$ converge in distribuzione a $G(Z)$; ad esempio, se $a_n(X_n - E[X_n])$ converge ad una Gaussiana standard e $g(x) = x^2$, allora $g(a_n(X_n - E[X_n]))$ converge in distribuzione ad una Gaussiana con un grado di libertà. Ci poniamo ora una domanda diversa; se applichiamo la trasformazione direttamente a X_n invece che alla sua versione standardizzata, cosa possiamo concludere sulla convergenza? In altre parole, cosa possiamo dire sulla convergenza in distribuzione di $a_n(g(X_n) - E[g(X_n)]$? A questa domanda risponde il cosiddetto metodo delta.

Lemma 73 *Sia G una funzione definita in un intorno dell'origine (da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$) e ivi continua e tale che $G(h) = o(\|h\|)$. Allora*

$$X_n \to_p 0 \Longrightarrow G(X_n) = o_p(\|X_n\|) \ , \ \textit{cioè} \ \frac{G(X_n)}{\|X_n\|} = o_p(1) \ .$$

Proof. E' sufficiente definire la funzione continua

$$g(h) = \begin{cases} \frac{G(h)}{\|h\|} \ , \text{se } \ \|h\| \neq 0 \\ 0 \ , \text{se } \ \|h\| = 0 \end{cases} .$$

Se $X_n \to_p 0$, $g(X_n) \to_p 0$ per il Lemma di Slutzky. ■

Theorem 74 *(Metodo Delta) Sia $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ differenziabile, con matrice Jacobiana limitata in $\mu \in \mathbb{R}^n$. Supponiamo che la sequenza di vettori aleatori X_n sia tale per cui*

$$a_n(X_n - \mu) \to_d X \ ,$$

per a_n sequenza deterministica che diverge all'infinito. Allora

$$a_n(g(X_n) - g(\mu)) \to_d (J(g(\mu))X \ ,$$

dove il vettore X ha dimensioni $k \times 1$ e la matrice Jacobiana $(J(g(\mu))$ ha dimensioni $m \times k$,

$$J(g(\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} .$$

Proof. Per il teorema di Taylor multivariato abbiamo che

$$g(\mu + y) - g(\mu) = (J(g(\mu))^T y + G(y) \ ,$$

con $G(y) = o(\|y\|)$. Prendendo $y = X_n - \mu$ abbiamo

$$g(X_n) - g(\mu) = (J(g(\mu))(X_n - \mu) + G(X_n - \mu) \ ,$$

e per il precedente Lemma sappiamo che

$$\begin{aligned} a_n G(X_n-\mu) &= a_n \left\|X_n-\mu\right\| \frac{G(X_n-\mu))}{\left\|X_n-\mu\right\|} \\ &= \left\|a_n(X_n-\mu)\right\| \frac{G(X_n-\mu))}{\left\|X_n-\mu\right\|} \\ &= O_p(1)o_p(1)=o_p(1) \ . \end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned} a_n(g(X_n)-g(\mu)) &= a_n(J(g(\mu))(X_n-\mu)+a_n G(X_n-\mu) \\ &= (J(g(\mu))a_n(X_n-\mu)+o_p(1) \rightarrow_d (J(g(\mu))X \ . \end{aligned}$$

■

Example 75 *Sia $X_1,...X_n$ una sequenza di variabili IID, per le quali si ha*

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma} \rightarrow_d Z \sim N(0,1) \ .$$

Allora

$$\sqrt{n}(e^{\overline{X}_n}-e^{\mu}) \rightarrow_d N(0,e^{2\mu}\sigma^2) \ .$$

Example 76 *Sia $X_1,...X_n$ una sequenza di variabili IID, per le quali si ha*

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma} \rightarrow_d Z \sim N(0,1) \ .$$

Allora

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n^2-\mu^2) \rightarrow_d 2\mu Z \ .$$

Example 77 *Sia $X_1,...X_n$ una sequenza di vettori aleatori IID, per i quali si ha*

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n-\mu)=\sqrt{n}\left\{\begin{pmatrix} \overline{X}_{1n}-\mu_1 \\ \overline{X}_{2n}-\mu_2 \end{pmatrix}\right\} \rightarrow_d \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \sim N(0,\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}) \ .$$

Allora

$$\sqrt{n}(\overline{X}_{1n}\overline{X}_{2n}-\mu_1\mu_2) \rightarrow_d \begin{pmatrix} \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \mu_2 Z_1+\mu_1 Z_2 \ .$$