4 Uniforme Integrabilità

Abbiamo visto in precedenza che la convergenza in probablità può implicare la convergenza in media r-esima per sequenze di variabili aleatorie uniformemente limitate, perché la limitatezza impedisce che con probabilità anche sempre più piccola si assumano valori sempre più grandi. E' naturale domandarsi se questa richiesta di uniforme limitatezza non sia eccessiva; dovrebbe essere possibile "compensare" il comportamento sulle code in modo da far sì che la massa corrispondente decada comunque a zero. Questa è proprio l'intuizione dietro alla nozione di Uniforme Integrabilità.

Definition 53 *La sequenza di variabili aleatorie $\{X_n\}$ è detta Uniformemente Integrabile se*

$$\lim_{M\to\infty} \sup_n E[|X_n| I_{\{|X_n|>M\}} = 0 \ .$$

Remark 54 *Notiamo innanzitutto che il fatto che i momenti siano uniformemente limitati non è sufficiente a garantire l'uniforme integrabilità: basta infatti considerare l'esempio visto precedentemente, con :*

$$X_n = \begin{cases} 0 \text{ con probabilità } 1 - \frac{1}{n^2} \\ n^2 \text{ con probabilità } \frac{1}{n^2} \end{cases} .$$

Qui $E[X_n] = 1$ per ogni n, quindi il valor medio è unifomemente limitato, però

$$\lim_{M\to\infty} \sup_n E[|X_n| I_{\{|X_n|>M\}}] = 1 \ ,$$

quindi la sequenza non è uniformemente integrabile. D'altra parte si vede subito che la limitatezza dei momenti è una condizione necessaria.

Lemma 55 *(Condizione necessaria per uniforme integrabilità). Se $\{X_n\}$ è uniformemente integrabile, $E[X_n]$ è uniformemente limitato.*

Proof. Si scelga $M = M_\varepsilon$ tale per cui

$$\sup_n E[|X_n| I_{\{|X_n|>M\}}] < \varepsilon \ ;$$

allora $E[|X_n|] = E[|X_n| I_{\{|X_n|\leq M_\varepsilon\}}] + E[|X_n| I_{\{|X_n|>M_\varepsilon\}}] \leq M_\varepsilon + \varepsilon$, da cui segue che il valor medio è limitato uniformemente in n. ■

E' interessante enunciare due condizioni sufficienti per l'Uniforme Integrabilità.

Lemma 56 *(Condizioni sufficienti per l'uniforme integrabilità)*

a) Se la sequenza $\{X_n\}$ è costituita da variabili aleatorie identicamente distribuite con valor medio finito, essa è uniformememente integrabile

b) Se esiste $\eta > 0$ tale per cui $E[|X_n|^{1+\eta}] < M_\eta < \infty$ per ogni n, allora la sequenza è uniformemente integrabile

Proof. Per a), è sufficiente notare che

$$\lim_{M\to\infty} \sup_n E[|X_n| I_{\{|X_n|>M\}}] = \lim_{M\to\infty} E[|X_1| I_{\{|X_1|>M\}}] = 0 \ ,$$

per l'ipotesi del momento primo finito. Per la b), abbiamo che

$$\begin{aligned}
\lim_{M\to\infty} \sup_n E[|X_n| I_{\{|X_n|>M\}}] &\leq \lim_{M\to\infty} \sup_n E[\frac{|X_n|^\eta}{M^\eta} |X_n| I_{\{|X_n|>M\}}] \\
&= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M^\eta} \sup_n E[|X_n|^{1+\eta} I_{\{|X_n|>M\}}] \\
&\leq \lim_{M\to\infty} \frac{M_\eta}{M^\eta} = 0 \ .
\end{aligned}$$

■

Lemma 57 *Sia $\{X_n\}$ una sequenza uniformemente integrabile. Allora $X_n \to_p X$ implica $X_n \to_1 X$.*

Proof. Basta scrivere

$$E[|X_n - X|] \leq E[|X_n - X_n \wedge M|] + E[|X - X \wedge M|] + E[|X_n \wedge M - X \wedge M|] \ .$$

Il primo elemento può essere reso arbitrariamente piccolo per l'uniforme integrabilità, il secondo perché X ha necessariamente valor medio finito (dimostrarlo), il terzo perché abbiamo a che fare con variabili limitate che convergono in probabilità, quindi possiamos fruttare il risultato dimostrato precedentemente.