

## 5 Teoremi Limite

**Theorem 58** (Legge dei grandi numeri per sequenze uniformemente integrabili). *Sia  $\{X_n\}$  una sequenza di variabili aleatorie con valor medio nullo, indipendenti e uniformemente integrabili. Allora*

$$\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow_1 0.$$

### Spiegazione Semplice

**Cosa dice questo teorema?** Questo è un altro tipo di Legge dei Grandi Numeri (LLN). La LLN dice che la media di un campione ( $\bar{X}_n$ ) converge alla media vera (qui 0).

**Perché è speciale?** La Legge dei Grandi Numeri "Debole" (di Chebyshev, vista nel Capitolo 1) richiedeva un'ipotesi forte: che le variabili avessero *momento secondo finito* (cioè una varianza finita).

Questo teorema è più generale. Sostituisce l'ipotesi "varianza finita" con "uniformemente integrabili" (UI). Come abbiamo visto nel Capitolo 4, l'UI è una condizione più debole che serve a "controllare le code" (i valori estremi).

Questo teorema ci dice che basta l'UI (e l'indipendenza) per garantire che la media campionaria converga in media ( $r = 1$ ) alla media vera.

*Dimostrazione.* Notiamo innanzitutto che non abbiamo ipotizzato che queste variabili abbiano momento secondo finito e limitato, altrimenti il risultato seguirebbe banalmente dalla legge dei grandi numeri di Chebyshev. Le ipotesi del Lemma sono verificate, ad esempio, se le variabili sono identicamente distribuite. Possiamo scrivere

$$X_n = X_n I_{\{|X_N| \leq M\}} + X_n I_{\{|X_N| > M\}}$$

perché

$$= X'_n + X''_n = X'_n - E[X'_n] + X''_n - E[X''_n],$$

$E[X'_n] + E[X''_n] = 0$ . Abbiamo

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{X'_i - E[X'_i]\} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{X''_i - E[X''_i]\}$$

La prima sequenza aleatoria è la media aritmetica di variabili aleatore con valor medio nullo e varianza uniformemente limitata da  $M^2$  quindi va a zero in media quadratica per la legge dei grandi numeri di Chebyshev. Per la seconda parte possiamo scrivere

$$E\left[\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{X''_i - E[X''_i]\}\right|\right] \leq 2 \sup_{i=1,2,3,\dots} E[|X_n I_{\{|X_N| > M\}}|]$$

per l'uniforme integrabilità, scegliendo  $M$  in modo appropriato.  $\square$

### Spiegazione Semplice

**Come funziona la dimostrazione (in breve)?** Questa è una tecnica standard chiamata *truncation* (troncamento).

#### 1. Si divide la variabile $X_n$ in due parti:

- $X'_n$ : la parte "buona" (i valori "normali" sotto la soglia  $M$ ).
- $X''_n$ : la parte "cattiva" (i valori "estremi" sopra la soglia  $M$ ).

#### 2. Si dimostra che la media della parte "buona" converge a 0: La parte $X'_n$ è limitata (non può superare $M$ ), quindi ha varianza finita. Per la Legge dei Grandi Numeri di Chebyshev, la sua media converge.

**3. Si dimostra che la media della parte "cattiva" converge a 0:** L'ipotesi di Uniforme Integrabilità (UI) è stata creata apposta per questo. Ci garantisce che, scegliendo  $M$  abbastanza grande, il contributo medio delle "code" ( $X''_n$ ) è trascurabile (vicino a 0).

Se entrambe le parti vanno a zero, la loro somma (la  $X_n$  originale) deve anch'essa convergere a zero in media.

**Theorem 59** (Legge forte dei grandi numeri - Borel). *Sia  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con valor medio  $\mathbb{E}[X] = \mu$  momento quarto finito  $\mathbb{E}[X^4] = \mu_4$ . Allora*

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow_{c.c.} \mu.$$

### Spiegazione Semplice

#### Legge Debole vs. Legge Forte

Questo è un teorema molto famoso, la **Legge Forte dei Grandi Numeri (SLLN)**.

- **Legge Debole (WLLN)** (vista prima,  $\rightarrow_p$ ): Ci dice che per  $n$  grande, è *improbabile* essere lontani dalla media  $\mu$ . (La probabilità di essere lontani  $\rightarrow 0$ ).
- **Legge Forte (SLLN)** (questa,  $\rightarrow_{c.c.}$ ): Ci dice che, per  $n$  grande, *quasi certamente* (con probabilità 100%) la media  $\bar{X}_n$  converge a  $\mu$  e *ci rimane* vicina per sempre. È una garanzia molto più forte.

**L'ipotesi  $\mathbb{E}[X^4] < \infty$ :** Questa è un'ipotesi molto restrittiva (chiede che il "momento quarto" sia finito). La SLLN vale anche solo con il momento primo finito ( $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ , Teorema di Kolmogorov), ma quella dimostrazione è molto più difficile. Questa (di Borel) è una versione più vecchia e più facile da dimostrare, ma richiede ipotesi più forti.

*Dimostrazione.* Senza perdita di generalità consideriamo  $\mu = 0$ ; infatti

$$\bar{X}_n \rightarrow_{c.c.} 0, \quad \text{se} \quad \bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$$

Notiamo innanzitutto che  $\mathbb{E}[\bar{X}_n^4] = O(\frac{1}{n^2})$ ; infatti

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\bar{X}_n^4] &= \frac{1}{n^4} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^n \mathbb{E}[X_{i_1} X_{i_2} X_{i_3} X_{i_4}] \\ &= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^4] + \frac{3}{n^4} \sum_{i_1 \neq i_2}^n \mathbb{E}[X_{i_1}^2] \mathbb{E}[X_{i_2}^2] \\ &= \frac{n}{n^4} \mathbb{E}[X_1^4] + \frac{3n(n-1)}{n^4} \mathbb{E}[X_1^2] \mathbb{E}[X_2^2] \\ &= O(n^{-2}). \end{aligned}$$

La prima uguaglianza è dovuta al fatto che  $\mathbb{E}[X_{i_1} X_{i_2} X_{i_3} X_{i_4}] = 0$  se c'è almeno un indice diverso da tutti gli altri; basta quindi focalizzarsi sul caso in cui gli indici siano tutti uguali, oppure uguali a coppie (diverse tra loro). Ci sono  $n$  termini del primo tipo,  $3n(n-1)$  del secondo. A questo punto, utilizzando la diseguaglianza di Markov, per ogni  $\epsilon > 0$  si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} Pr\{|\bar{X}_n| > \epsilon\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[\bar{X}_n^4]}{\epsilon^4} \leq Const \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \epsilon^4} < \infty,$$

e la diseguaglianza è dimostrata. □

## Spiegazione Semplice

**Come funziona la dimostrazione (in breve)?** Questa dimostrazione usa un trucco molto potente:

1. **Calcolare un momento alto:** Si calcola la media del 4° momento della media campionaria,  $\mathbb{E}[\bar{X}_n^4]$ . Dopo molti calcoli (che sfruttano l'indipendenza per annullare i termini misti), si scopre che questo valore è  $O(n^{-2})$ , cioè va a zero molto velocemente, come  $1/n^2$ .
2. **Usare Markov:** Si usa la diseguaglianza di Markov (vista nel Cap. 1) per "tradurre" questo risultato sui momenti in un risultato sulle probabilità.  $\mathbb{P}(|\bar{X}_n| > \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[\bar{X}_n^4]}{\epsilon^4}$ . Poiché il numeratore è  $O(n^{-2})$ , l'intera probabilità è  $O(n^{-2})$ .
3. **Usare la Convergenza Completa (Borel-Cantelli):** Questo è il passaggio chiave. Si sommano le probabilità:  $\sum \mathbb{P}(|\bar{X}_n| > \epsilon) \leq \sum O(n^{-2})$ . Poiché la serie  $\sum 1/n^2$  converge (è un numero finito), abbiamo la *Convergenza Completa* (vista nel Cap. 4).
4. **Concludere:** Come sappiamo dal Cap. 4, la Convergenza Completa (tipo 5) implica la Convergenza Quasi Certa (tipo 4). Fine.

L'ipotesi del 4° momento serve solo a far funzionare il punto 3, garantendo che la serie  $\sum 1/n^2$  converga.

**Remark 60.** E' interessante notare come questa legge forte dei grandi numeri sia stata enunciata per la prima volta all'inizio del novecento da Emile Borel all'interno di problemi di Teoria dei Numeri. In particolare, Borel la utilizzò per dimostrare che i numeri tra  $[0,1]$ , espressi in forma binaria, hanno quasi sempre una proporzione uguale di 0 e di 1. Questo esclude automaticamente tutti i numeri con espansione finita o periodica, cioè i razionali; ma in realtà dimostra che hanno misura nulla anche numeri di classi più ampie. Paradossalmente, per pochissimi numeri conosciuti è stato effettivamente dimostrato che hanno questa struttura "normale".

## Spiegazione Semplice

**Cosa sono i "Numeri Normali"?** Questo è un'applicazione affascinante della SLLN.

Prendi un numero a caso tra 0 e 1 e scrivi le sue cifre binarie (0 e 1) all'infinito. Puoi pensare a ogni cifra come a un lancio di moneta ( $X_n$ ). Se la moneta è onesta ( $\mu = 0.5$ ), la SLLN dice che la media delle cifre ( $\bar{X}_n$ ) convergerà *quasi certamente* a 0.5.

Questo significa che "quasi tutti" i numeri reali (con probabilità 1) hanno esattamente il 50% di 0 e il 50% di 1 nella loro espansione binaria. Questi sono chiamati "numeri normali".

I numeri *razionali* (come  $1/3 = 0.010101\dots$  in binario) non sono normali (in questo caso hanno 50% di 0 e 50% di 1, ma la SLLN si applica anche a blocchi di cifre, e  $1/3$  non ha il 25% di "00", "01", "10", "11").

La parte paradossale è che, sebbene "quasi tutti" i numeri siano normali, è incredibilmente difficile dimostrarlo per un numero specifico che ci viene in mente (come  $\pi$  o  $e$ ).