Sistemi di Voto - Parte 1

Capitolo 23 del testo

Indice

1 Reti e informazione

Il materiale descritto in queste lezioni costituisce il Capitolo 23 del testo. In questa serie di lezioni, studiamo in che modo, e con quali esiti, sintetizzare le informazioni in possesso dei singoli individui in una rete al fine di derivare una singola informazione cumulativa che permetterà di prendere una decisione fra una serie di alternative fra le quali scegliere la "migliore" o stilare una graduatoria. Cominciano questo percorso dal punto in cui eravamo rimasti al termine dello studio dei fenomeni di herding.

2 La saggezza della folla

Avevamo concluso la trattazione del fenomeno dell'herding osservando che una cascata imitativa può indurre decisioni sbagliate ossia, non è sempre una buona idea imitare il comportamento della massa... Tuttavia, nel libro *The wisdom of crowd* (2004), James Surowiecki sostiene la tesi secondo la quale "il comportamento aggregato di un numero elevato di persone in possesso di informazione molto limitata può produrre risultati molto accurati". L'assunzione alla base di questa affermazione è che gli individui, ciascuno in possesso di un'informazione privata, operano le loro scelte indipendentemente gli uni dagli altri senza che nessuno conosca le scelte operate dagli altri. Iniziamo la trattazione dei sistemi di voto analizzando proprio questo fenomeno ossia, studiando cosa accade quando un insieme di individui devono prendere una decisione di gruppo ricevendo, ciascuno, un segnale privato e prendendo decisioni individuali - senza, cioè osservare il comportamento degli altri individui.

3 Un nuovo modello di decision making

Definiamo, ora, un modello di decision making individuale:

1. ogni individuo deve prendere una decisione fra due alternative: X o Y. Una delle due è la scelta "giusta", l'altra quella "sbagliata" e lo esprimiamo con il simbolo ">": ad esempio, scriviamo $X > Y$ se X è la scelta giusta. le due alternative sono, a priori, equiprobabili: $P\{X > Y\} = P(Y > X) = \frac{1}{2}$.
2. ogni individuo riceve un segnale privato: x o y. $P\{x|X > Y\} = P\{y|Y > X\} = q > \frac{1}{2}$.
3. ogni individuo sceglie in accordo al proprio segnale privato.
4. ciascun individuo opera la propria scelta fra X e Y, la scrive su una scheda che poi introduce in un'urna.
5. infine, viene presa una decisione collettiva fra X e Y sulla base delle scelte dei singoli individui.

Come avviene nelle votazioni a scrutinio segreto.

Teorema della giuria di Condorcet. Nel modello di decision making appena definito, se $X > Y$ e il numero di individui coinvolti nella decisione è k allora quasi sicuramente $lim_{k\rightarrow\infty} \frac{|\{i:1\leq i\leq k \wedge r_i = X\}|}{k} = q$. ovvero, $lim_{k\rightarrow\infty} P\left(\frac{|\{i:1\leq i\leq k \wedge r_i = X\}|}{k} = q\right) = 1$. dove r_i è la scelta dell'individuo i.

Questo teorema dimostra che, qualora si dovesse prendere una decisione collettiva in favore di X o di Y e si decidesse di decidere in accordo alla scelta della maggioranza degli individui, la decisione collettiva porterebbe a scegliere l'alternativa "giusta" il che mostra come il modello di decision making appena definito sia un esempio nel quale si manifesta "la saggezza della folla" di Surowiecki.

4 Voto non sincero

Il Teorema della giuria di Condorcet è valido nel modello di decision making che abbiamo definito e questo è quanto descritto nelle ipotesi ove è previsto che ogni individuo sceglie in accordo al proprio segnale privato (punto 3) e questo è perfettamente ragionevole, poiché nel modello si assume che il segnale in favore della scelta "giusta" sia quello più probabile (punto 2). Tuttavia, vi sono situazioni nelle quali un individuo può ritenere migliore la scelta in disaccordo al suo segnale privato pur nella ipotesi di cui al punto 2) e questo lo abbiamo già visto nel caso dell'herding cioè, nel caso in cui le scelte erano prese anche osservando il comportamento altrui. Vediamo, ora, come il voto "non sincero" (ossia, una scelta in disaccordo con il proprio segnale privato) abbia senso anche quando si debba prendere una decisione collettiva e ciascun individuo scelga senza osservare gli altri ossia, casi in cui il voto non sincero di un individuo può massimizzare la probabilità che la scelta collettiva sia quella "giusta".

4.1 ESEMPIO: torniamo al gioco delle due urne

questa volta, però, abbiamo:

- un'urna UG contenente 10 palline gialle
- un'urna UV contenente 9 palline verdi e una pallina gialla

come nel gioco delle due urne, scegliamo a caso un'urna fra UG e UV −ossia $P(UG) = P(UV) = \frac{1}{2}$ e le regole del gioco sono un po' diverse:

- abbiamo 3 giocatori, ciascuno dei quali estrae in segreto una pallina dall'urna scelta (e ve la reinserisce)
- dopo che i 3 giocatori hanno estratto ciascuno una pallina, simultaneamente dichiarano ciascuno la propria scelta: UG o UV
- se la maggioranza ha indovinato di quale urna si tratti, tutti e 3 vincono un premio altrimenti nessuno vince

Osserviamo: le differenze sostanziali con il gioco delle due urne che abbiamo visto in precedenza sono:

- le risposte simultanee (invece che sequenziali)
- e una decisione collettiva (a maggioranza) in cui tutti vincono o tutti perdono

4.2 ESEMPIO: il gioco UG/UV

consideriamo la strategia di un giocatore rispetto al suo segnale privato:

- se estrae una pallina gialla, allora

$$P(UG|g) = \frac{P(g|UG) \cdot P(UG)}{P(g|UG) \cdot P(UG) + P(g|UV) \cdot P(UV)} = \frac{\frac{10}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{10}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{10}{11}$$

- ma, se estrae una pallina verde, allora (senza stare a fare tanti conti) $P(UV|v) = 1$ ossia, l'urna è certamente verde

Ora, proviamo a metterci nei panni di uno dei giocatori per capire quale ragionamento possa fare per rispondere in modo da massimizzare la probabilità di vincere:

- io giocatore so che noi tre giocatori vinciamo se almeno due di noi indovinano.
- Quindi mi domando: in quale caso la mia risposta è davvero influente ai fini della vittoria?
- E la risposta è: quando le risposte degli altri due giocatori sono discordi
- perché, se sono concordi, allora la mia risposta non modifica la maggioranza, qualunque cosa io risponda.

Quindi...

- Io giocatore so che noi tre giocatori vinciamo se almeno due di noi indovinano.
- E che la mia risposta è influente solo quando le risposte degli altri due giocatori sono discordi
- Ma se le risposte dei due giocatori sono discordi, allora uno di essi ha risposto UV ossia, assumendo che gli altri due giocatori rispondano sinceramente
- ossia in accordo ai loro segnali privati
- le risposte degli altri due giocatori sono discordi quando uno di loro estrae una pallina verde
- ossia, quando l'urna è UV
- Perciò, assumendo che gli altri due giocatori rispondano sinceramente, la mia risposta è influente ai fini della vittoria solo quando l'urna è UV

- e, quindi, qualunque pallina io estragga, mi conviene rispondere UV!
- E se, invece, gli altri due giocatori non rispondono sinceramente, magari ragionando come ho ragionato io?
- Beh, la strategia di vittoria va a farsi friggere...

4.3 Voto non sincero nelle giurie - unanimità

Una situazione simile si presenta nelle giurie, during i processi quando si deve decidere se un imputato è colpevole (C) o innocente (I) e, a priori, $P(C) = P(I) = \frac{1}{2}$. ciascun giurato riceve un segnale c o un segnale i: come nel caso dell'herding, $P(c|C) = P(i|I) = q > \frac{1}{2}$. in questo caso, occorre aggregare i voti dei giurati per giungere a un verdetto di colpevolezza o di innocenza e per condannare un imputato è necessario che l'insieme S dei segnali ricevuti dai giurati siano indice di colpevolezza con probabilità molto alta non è sufficiente che sia $P(C|S) > \frac{1}{2}$ ma è richiesto che sia $P(C|S) \gg \frac{1}{2}$ *oltre ogni ragionevole dubbio.* diciamo che per condannare un imputato è necessario che tutti i giurati votino in favore della condanna ossia, per condannare l'imputato occorre l'unanimità dei giurati.

In questo caso, se io sono un giurato: in quale situazione la mia risposta è davvero influente ai fini del verdetto?

- Se fra gli altri giurati c'è qualcuno che è in favore dell'innocenza, che io voti per la colpevolezza o per l'innocenza non altera il verdetto
- ma se tutti gli altri giurati sono in favore della colpevolezza, allora è proprio dal mio voto che dipende il verdetto!

Supponiamo che la giuria consti di k giurati e che tutti (tranne me) votino in accordo ai propri segnali calcoliamo la probabilità $P(C|iC^{k-1})$ che l'imputato sia colpevole quando un solo giurato riceve un segnale i:

$$P(C|iC^{k-1}) = \frac{P(ic^{k-1}|C) \cdot P(C)}{P(ic^{k-1}|C) \cdot P(C) + P(ic^{k-1}|I) \cdot P(I)} = \frac{(1-q)q^{k-1} \cdot \frac{1}{2}}{(1-q)q^{k-1} \cdot \frac{1}{2} + q(1-q)^{k-1} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{q^{k-2}}{q^{k-2} + (1-q)^{k-2}}$$

e, dunque, $lim_{k\to\infty} P(C|iC^{k-1}) = lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+(\frac{1-q}{q})^{k-2}} = 1$ perché $q > \frac{1}{2}$ e, quindi, $\frac{1-q}{q} < 1$. ossia, al crescere del numero dei giurati, se uno solo di essi riceve il segnale i allora l'imputato è colpevole quasi sicuramente. E, allora, è meglio che io voti "colpevole" con buona pace dell' "oltre ogni ragionevole dubbio"...

5 Sistemi di voto

Fino ad ora abbiamo considerato due metodi per ottenere una decisione collettiva a partire da un insieme di decisioni individuali

- la maggioranza
- l'unanimità (per una delle due alternative)

nel caso in cui le alternative fra le quali scegliere fossero due. In generale, comunque, ci vengono presentate più alternative fra le quali esprimere le nostre preferenze come succede, ad esempio, nel corso delle elezioni politiche o al festival di Sanremo... E spesso più che decretare semplicemente il vincitore, viene stilata una classifica ossia, un ranking. E, infine, naturalmente, possono essere considerate numerose regole per derivare una decisione collettiva a partire da un insieme di decisioni individuali oltre alle regole della maggioranza e dell'unanimità ed esse prendono il nome di sistemi di voto.

6 Voto individuale

Formalizziamo:

- $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ è un insieme di alternative (o, più semplicemente, $A = [n]$)
- $V = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ è un insieme di votanti (o, più semplicemente, $V = [k]$)

Ciascun votante $v_h \in V$ esprime il suo voto in una di due forme possibili:

1. nella forma di una graduatoria (ranking) $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, ..., a_{hn} \rangle$, ossia come sequenza ordinata delle n alternative nella quale al primo posto si trova l'alternativa preferita fra tutte, al secondo posto la seconda preferita, ecc. ecc. Un ranking è, dunque, un elemento dell'insieme $\Pi(A)$, ossia, l'insieme delle permutazioni degli elementi di A.
2. nella forma di una relazione binaria completa e transitiva $>_h$
   - completa: per ogni coppia di alternative a e a', $a >_h a'$ oppure $a' >_h a$
   - transitiva: se $a >_h a'$ e $a' >_h a''$ allora $a >_h a''$, per qualunque terna di alternative a, a', a''

   dove $a >_h a'$ significa che a è preferito ad a' dal votante h.

6.1 Voto individuale - Strategia

Le due forme possibili di espressione di un voto sono fra loro equivalenti.

- Derivare una relazione binaria completa e transitiva $>_h$ da un ranking $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, ..., a_{hn} \rangle$ è immediato: per ogni indice $i \in [n]$ e per ogni indice $j \in [n]$ tale che $j > i$, poniamo $a_{hi} >_h a_{hj}$.
- Derivare un ranking $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, ..., a_{hn} \rangle$ da una relazione binaria completa e transitiva $>_h$ è, invece, un compito più complesso.
- Allo scopo, procediamo come segue:
  - poiché $>_h$ è completa e transitiva, allora esiste $l \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{l\}, |\{i \in [n] : a_l >_h a_i\}| > |\{i \in [n] : a_j >_h a_i\}|$
  - Lemma 1, dimostrato nelle slide successive
  - allora, per ogni $j \in [n] - \{l\}, a_l >_h a_j$
  - Lemma 2, dimostrato nelle slide successive
  - allora, poniamo $a_{h1} = a_l$ e
  - osservando che $>_h$ è completa e transitiva anche sull'insieme $A - \{a_{h1}\}$
  - ripetiamo il ragionamento sull'insieme $A - \{a_{h1}\}$ per individuare a_{h2}, e così via per individuare $a_{h3}, ..., a_{hn}$

6.2 Voto individuale - Lemma 1 e Dimostrazione

Lemma 1: se $>_h$ è una relazione binaria completa e transitiva nell'insieme $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, allora esiste $l \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{l\}$, $|\{i \in [n] : a_l >_h a_i\}| > |\{i \in [n] : a_j >_h a_i\}|$.

Dimostrazione:

- per ogni alternativa $j \in [n]$, indichiamo con p_j il numero di alternative che j batte nel voto del votante h: $p_j = |\{i \in [n] : a_j >_h a_i\}|$.
- certamente, esiste $l \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{l\}$, $p_l = |\{i \in [n] : a_l >_h a_i\}| \geq |\{i \in [n] : a_j >_h a_i\}| = p_j$. (*)
- perché $p_1, p_2, ..., p_n$ sono numeri!
- supponiamo che esista $m \in [n] - \{l\}$ tale che $|\{i \in [n] : a_l >_h a_i\}| = |\{i \in [n]; a_m >_h a_i\}|$ - ossia, $p_l = p_m$.
- supponiamo che esista $m \in [n] - \{l\}$ tale che $p_l = |\{i \in [n] : a_l >_h a_i\}| = |\{i \in [n] : a_m >_h a_i\}| = p_m$.
- poiché $>_h$ è completa, allora $a_l >_h a_m$ oppure $a_m >_h a_l$.
- 1) se $a_m >_h a_l$: poiché $>_h$ è transitiva allora, per ogni j tale che $a_l >_h a_j$ si ha che $a_m >_h a_j$
- ossia $\{i \in [n] : a_l >_h a_i\} \cup \{a_l\} \subseteq \{i \in [n] : a_m >_h a_i\}$

- e quindi, poiché $a_l \notin \{i \in [n] : a_l >_h a_i\}$, $p_m = |\{i \in [n]; a_m >_h a_i\}| \geq |\{i \in [n]; a_l >_h a_i\}| + 1 > |\{i \in [n]; a_l >_h a_i\}| = p_l$
- un assurdo: $p_l = p_m$ e $p_m > p_l$.
- supponiamo che esista $m \in [n] - \{l\}$ tale che $p_l = |\{i \in [n] : a_l >_h a_i\}| = |\{i \in [n] : a_m >_h a_i\}| = p_m$.
- 2) se $a_l >_h a_m$: poiché $>_h$ è transitiva allora, per ogni j tale che $a_m >_h a_j$ si ha che $a_l >_h a_j$
- ossia $\{i \in [n] : a_m >_h a_i\} \cup \{a_m\} \subseteq \{i \in [n] : a_l >_h a_i\}$
- e quindi, poiché $a_m \notin \{i \in [n] : a_m >_h a_i\}$, $p_l = |\{i \in [n]; a_l >_h a_i\}| \geq |\{i \in [n]; a_m >_h a_i\} \cup \{a_m\}| > |\{i \in [n]; a_m >_h a_i\}| = p_m$
- un assurdo: $p_l = p_m$ e $p_l > p_m$.
- In entrambi i casi, $a_m >_h a_l$ e $a_l >_h a_m$, viene contraddetto quanto supposto circa m e quindi m non esiste e, per ogni $j \in [n] - \{l\}, |\{i \in [n]; a_l >_h a_i\}| > |\{i \in [n]; a_j >_h a_i\}|$.
- QED

6.3 Voto individuale - Lemma 2 e Dimostrazione

Lemma 2: se $>_h$ è una relazione binaria completa e transitiva nell'insieme $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e sia $l \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{l\}$, $|\{i \in [n] : a_l >_h a_i\}| > |\{i \in [n] : a_j >_h a_i\}|$. Allora, per ogni $j \in [n] - \{l\}, a_l >_h a_j$.

Dimostrazione:

- osserviamo che $l \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{l\}$ $|\{i \in [n] : a_l >_h a_i\}| > |\{i \in [n] : a_j >_h a_i\}|$
- esiste in virtù del Lemma 1
- supponiamo che esista $m \in [n] - \{l\}$ tale che $a_m >_h a_l$
- allora, per la transitività di $>_h$ per ogni j tale che $a_l >_h a_j$ si avrebbe che $a_m >_h a_j$
- ossia, $\{i \in [n] : a_l >_h a_i\} \cup \{a_l\} \subseteq \{i \in [n] : a_m >_h a_i\}$
- e quindi, poiché $a_l \notin \{i \in [n] : a_l >_h a_i\}, |\{i \in [n] : a_m >_h a_i\}| > |\{i \in [n]; a_l >_h a_i\}|$
- un assurdo.
- QED

7 Sistemi di voto

Un sistema di voto è una regola che permette di associare un voto collettivo ad un insieme di voti individuali. Formalmente:

- poiché sono irrilevanti i nomi delle alternative e dei votanti, possiamo identificare A con l'insieme [n] e V con l'insieme [k]
- per fissare le idee, assumiamo che i k votanti esprimano i loro voti mediante ranking
- un voto aggregato per n alternative e k votanti è una funzione $f_{n,k} : \Pi([n])^k \to \Pi([n])$ in modo che $f_{n,k}(r_1, r_2, ..., r_k) = r$, dove $r_1, r_2, ..., r_k, r \in \Pi([n])$
- Un sistema di voto è un predicato σ che specifica, per ogni $r_1, r_2, ..., r_k \in \Pi([n])^k$, le regole che devono essere rispettate dal voto aggregato $f_{n,k}(r_1, r_2, ..., r_k)$.

ESEMPIO: supponiamo che i voti individuali dei k votanti siano espressi mediante relazioni binarie $>_1, >_2, ..., >_k$ e indichiamo con $>$ la relazione binaria $f_{n,k}(>_1, >_2, ..., >_k)$ (ossia, $>$ è il voto collettivo corrispondente a $>_1, >_2, ..., >_k$) il sistema di voto a maggioranza è descritto dal predicato σ_M tale che, $\sigma_M(>_1, >_2, ..., >_k, >) = \forall i \in [n] \forall j \in [n][i > j \leftrightarrow |\{h \in [k]; i >_h j\}| > |\{h \in [k]; j >_h i\}|]$ nella votazione finale i è preferito a j se e solo se i è preferito a j dalla maggioranza dei votanti.

8 Sistema di voto a maggioranza

Il sistema di voto a maggioranza è un sistema di voto semplice e intuitivo in particolar modo quando le alternative fra le quali scegliere sono due tuttavia, quando le alternative sono più di due... Consideriamo la situazione seguente: tre amici in vacanza, con budget limitato, devono scegliere se acquistare miele, marmellata o cioccolata per la colazione

- Mario preferisce su tutto la cioccolata, poi la marmellata, e in ultimo il miele: cioccolata $>_M$ marmellata $>_M$ miele
- Paolo preferisce su tutto la marmellata, poi il miele, e in ultimo la cioccolata: marmellata $>_P$ miele $>_P$ cioccolata
- Roberto preferisce su tutto il miele, poi la cioccolata, e in ultimo la marmellata: miele $>_R$ cioccolata $>_R$ marmellata

tre relazioni binarie complete e transitive!

Tuttavia, se proviamo a produrre una relazione binaria $>$ aggregando secondo la regola della maggioranza le tre relazioni otteniamo:

- cioccolata è preferita a marmellata da due votanti
- marmellata è preferita a miele da due votanti
- miele è preferito a cioccolata da due votanti

Ossia, cioccolata $>$ marmellata $>$ miele $>$ cioccolata (!!!!!)

- cioccolata $>$ marmellata
- marmellata $>$ miele
- miele $>$ cioccolata

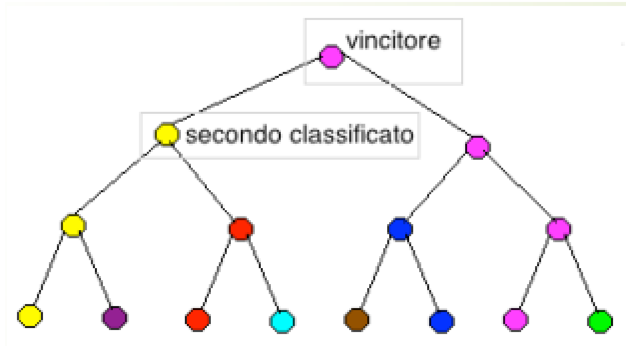
e, in particolare, anche se cioccolata $>$ marmellata e marmellata $>$ miele non è vero che cioccolata $>$ miele. La relazione $>$ non è transitiva!

La situazione appena descritta costituisce **il paradosso di Condorcet**: anche se le relazioni binarie individuali sono transitive, la relazione binaria collettiva ottenuta dalla loro aggregazione a maggioranza può non essere transitiva. Osserviamo che la richiesta di transitività è necessaria affinché l'aggregazione dei voti individuali sia significativa se non è soddisfatta, il voto aggregato non ha significato è il... "minimo sindacale" delle richieste! perciò potrebbe essere problematico usare con più di due alternative il sistema di voto a maggioranza che soffre del paradosso di Condorcet. Il sistema di voto a maggioranza può essere utilizzato come punto di partenza per costruire un nuovo sistema di voto che non soffre del paradosso di Condorcet: il torneo che è il sistema di voto utilizzato nelle manifestazioni sportive i k votanti esprimono ancora le proprie preferenze mediante relazioni binarie tuttavia, la graduatoria finale viene costruita sulla base di una successione di scontri diretti.

9 Il torneo

In un torneo i k votanti esprimono ancora le proprie preferenze mediante relazioni binarie: $>_1, >_2, ..., >_k$ e la graduatoria finale viene costruita sulla base di una successione di scontri diretti:

- se si scontrano le due alternative a e a', risulterà $a > a'$ se $|\{i \in [k] : a >_i a'\}| > |\{i \in [k] : a' >_i a\}|$
- Ovviamente, se k è dispari allora per ogni coppia di alternative a e a' si avrà $a > a'$ o $a' > a$
- ossia, si riuscirà sempre ad avere un vincitore di uno scontro diretto



In un torneo non hanno luogo tutti gli scontri possibili, ma solo quelli fissati da un'agenda ossia, prima dell'inizio del torneo vengono fissate le coppie che devono confrontarsi poi si scontreranno i vincitori di ciascuno scontro, e così via, fino a decretare il vincitore e il secondo classificato per comporre il resto della graduatoria saranno necessari altri incontri.

In un torneo non hanno luogo tutti gli scontri possibili, ma solo quelli fissati da un'agenda e, quindi, l'agenda può avere un ruolo determinante nel decretare il vincitore. ESEMPIO: torniamo ai tre amici in vacanza, alle prese con la decisione di cosa acquistare per la colazione - problema che decidono di risolvere con un torneo

- Mario propone l'agenda secondo la quale il primo scontro è marmellata-miele, e il vincitore si scontrerà con la cioccolata
- Paolo propone l'agenda secondo la quale il primo scontro è miele-cioccolata, e il vincitore si scontrerà con la marmellata
- Roberto propone l'agenda secondo la quale il primo scontro è cioccolata- marmellata, e il vincitore si scontrerà con il miele

poiché avevamo già osservato che cioccolata > marmellata, marmellata > miele e miele > cioccolata, nell'agenda di Mario vince la cioccolata, nell'agenda di Paolo vince la marmellata e nell'agenda di Roberto vince il miele ossia, ciascun amico ha proposto un'agenda che portasse alla vittoria il proprio prodotto preferito! Ossia, il sistema di voto "torneo" è sensibile allo strategic agenda setting.

10 Sistemi di voto posizionali

Supponiamo ora che i voti individuali siano espressi mediante ranking così che il voto del votante h è $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, ..., a_{hn} \rangle$. A ciascun ranking r_h possiamo associare una funzione peso che assegna un valore numerico a ciascuna alternativa dipendentemente dalla sua posizione nel ranking ad esempio, al ranking $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, ..., a_{hn} \rangle$ possiamo associare la funzione w_h tale che $w_h(a_{hi}) = 100 - 10 \cdot i$. tipicamente, la funzione peso è decrescente nella posizione il peso assegnato all'alternativa in posizione i è maggiore del peso assegnato all'alternativa in posizione i+1. In un sistema di voto posizionale,

- dopo aver associato, per ogni $h \in [k]$, una funzione peso w_h al ranking r_h, il ranking collettivo r è ottenuto
- calcolando il peso totale di ciascuna alternativa come somma dei pesi che quella alternativa ha negli h ranking - ossia, per ogni $a \in [n]$, $w(a) = \sum_{1 \leq h \leq k} w_h(a)$
- e poi ordinando le alternative secondo il loro peso totale per ottenere il ranking collettivo.

10.1 Sistemi di voto posizionali - parte 1

In un sistema di voto posizionale,

- dopo aver associato, per ogni $h \in [k]$, una funzione peso w_h al ranking r_h
- funzione peso decrescente nella posizione in graduatoria
- il ranking collettivo r è ottenuto

- calcolando il peso totale di ciascuna alternativa come somma dei pesi che quella alternativa ha negli h ranking - ossia, per ogni $a \in [n]$, $w(a) = \sum_{1 \leq h \leq k} w_h(a)$
- e poi ordinando le alternative secondo il loro peso totale per ottenere il ranking collettivo

Il Borda Count è un particolare sistema di voto posizionale nel quale

- per ogni $h \in [k]$, la funzione peso associata al ranking $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, ..., a_{hn} \rangle$ è la funzione suriettiva $\rho_h : A \to \{0, 1, ..., n-1\}$ tale che $\rho_h(a_{hi}) = n - i$,
- e le alternative vengono ordinate per peso finale ρ non crescente.

10.2 Sistemi di voto posizionali - parte 2

Anche nei sistemi di voto posizionali si manifesta il paradosso di Condorcet, sotto forma di ex aequo. ESEMPIO: consideriamo, ancora i tre amici in vacanza e i tre ranking corrispondenti alle loro relazioni di equivalenza ed applichiamo il Borda Count:

- $r_{Mario} = \langle$cioccolata, marmellata, miele$\rangle$ da cui ρ_{Mario}(cioccolata) $= 2$, ρ_{Mario}(marmellata) $= 1$, ρ_{Mario}(miele) $= 0$
- $r_{Paolo} = \langle$marmellata, miele, cioccolata$\rangle$ da cui ρ_{Paolo}(cioccolata) $= 0$, ρ_{Paolo}(marmellata) $= 2$, ρ_{Paolo}(miele) $= 1$
- $r_{Roberto} = \langle$miele, cioccolata, marmellata$\rangle$ da cui $\rho_{Roberto}$(cioccolata) $= 1$, $\rho_{Roberto}$(marmellata) $= 0$, $\rho_{Roberto}$(miele) $= 2$
- e, quindi ρ(cioccolata) $= 3$, ρ(marmellata) $= 3$, ρ(miele) $= 3$

In un sistema di voto posizionale il problema degli ex aequo viene trattato

- dividendo i premi - nelle competizioni
- ricorrendo ai ballottaggi - nelle elezioni politiche
- ricorrendo al lancio di una moneta

ma non ci occupiamo di queste questioni.

10.3 Sistemi di voto posizionali - parte 3

Invece, ci occupiamo di un'altra caratteristica indesiderabile dei sistemi di voto posizionali che introduciamo mediante un esempio. ESEMPIO: cinque critici cinematografici devono scegliere se assegnare un premio cinematografico a uno dei due film "Il padrino" e "Via col vento"

- tre critici preferiscono "Via col vento" (VV), i rimanenti due "il padrino" (IP)
- e, quindi, il premio andrebbe a "Via col vento"
- prima di arrivare alla votazione finale, però, il comitato organizzatore del premio cinematografico decide di inserire fra i candidati anche "Pulp fiction" (PF)
- ciascuno dei cinque critici ritiene che "Pulp fiction" sia decisamente inadatto alla competizione
- tuttavia, i due critici che preferiscono "Il padrino" a "Via col vento" si accorgono che possono ricorrere a un espediente:
- possono, cioè, votare entrambi secondo il seguente ranking: $\langle IP, PF, VV \rangle$ mentre i tre critici che preferiscono "Via col vento" votano, onestamente: $\langle VV, IP, PF \rangle$ così che $\rho(VV) = 6$, $\rho(IP) = 7$ e $\rho(PF) = 2$
- e il premio va a "Il padrino".

11 Rilevanza delle alternative irrilevanti

Inserendo in posizione opportuna "Pulp fiction", il film che mai avrebbe vinto, i due critici che preferivano "Il padrino" hanno fatto in modo che esso vincesse. E, per farlo, hanno classificato l'alternativa irrilevante ai fini della vittoria in posizione intermedia che non corrispondeva al loro giudizio mentre, se avessero votato onestamente $\langle IP, VV, PF \rangle$ avrebbe vinto "Via col vento". Riconsideriamo ora i ranking dei due gruppi di critici: $\langle VV, IP, PF \rangle$ e $\langle IP, PF, VV \rangle$ Osserviamo che, se ci limitiamo ad osservare le posizioni relative di VV e IP nei due ranking, VV precede IP nella maggioranza dei votanti e quindi sarebbe ragionevole aspettarsi che questo ordine venga rispettato nel voto collettivo indipendentemente da come viene posizionato PF. Invece, il posizionamento opportuno di PF da parte di due votanti ha permesso di modificare le posizioni relative di VV e IP nella graduatoria finale e questo è un problema (di cui soffrono i sistemi di voto posizionali).

12 Sistemi di voto affidabili

Fino a questo momento abbiamo incontrato tre sistemi di voto, quello a maggioranza, il torneo e il sistema di voto posizionale, dei quali non possiamo fidarci completamente

- perché non riescono sempre ad individuare una graduatoria finale
- perché la graduatoria finale dipende dall'ordinamento iniziale delle alternative
- perché i votanti possono "barare" per orientare la graduatoria finale

Ci domandiamo, a questo punto, se sia possibile progettare sistemi di voto affidabili. Ma quando un sistema di voto può essere considerato affidabile? Come minimo, per essere considerato affidabile, un sistema di voto dovrebbe garantire

- di rappresentare le scelte di tutti i votanti nel caso in cui esse siano tutte concordi
- di non consentire l'utilizzo di alternative irrilevanti per orientare la graduatoria finale

12.1 Sistemi di voto affidabili

Come minimo, per essere considerato affidabile, un sistema di voto dovrebbe garantire

- di rappresentare le scelte di tutti i votanti nel caso in cui esse siano tutte concordi
- di non consentire l'utilizzo di alternative irrilevanti per orientare la graduatoria finale

E il paradosso di Condorcet? Non ci interessa più garantire che un sistema di voto non soffra di tale anomalia?! Sì e no, in effetti... Nel senso che nei sistemi di voto che prenderemo in considerazione il voto aggregato (o collettivo) viene descritto mediante un ranking e un ranking corrisponde sempre ad una relazione binaria transitiva e, per inciso, per poter produrre un ranking potrebbe essere necessario introdurre anche una regola che risolva gli ex aequo. Pertanto, per così dire, il paradosso di Condorcet viene eliminato alla radice.

13 Due principi per i sistemi di voto

Sia σ un sistema di voto.

- sia [n] un insieme di alternative e sia [k] un insieme di votanti tali che, per ogni $h \in [k]$, il votante h esprime il ranking $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, ..., a_{hn} \rangle$ sulle n alternative
- indichiamo con r il voto collettivo corrispondente ai voti individuali $r_1, r_2, ..., r_k$ derivato in accordo a σ ossia, $\sigma(r_1, r_2, ..., r_k, r) = vero$
- e siano, per ogni $h \in [k]$, ρ_h la funzione peso (relativa al Borda Count) associata a r_h e ρ la funzione peso associata a r

Principio di Unanimità (U): il sistema di voto σ soddisfa il principio di unanimità se $\forall i, j \in [n][(\forall h \in [k]\rho_h(i) > \rho_h(j)) \to \rho(i) > \rho(j)]$ cioè: ogni qualvolta tutti i votanti preferiscono un'alternativa i a un'alternativa j, allora i è preferita a j anche nella graduatoria finale.

13.1 Due principi per i sistemi di voto

Sia σ un sistema di voto.

Principio di Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti (IIA): il sistema di voto σ soddisfa il principio di indipendenza dalle alternative irrilevanti se $\forall i, j \in [n] \forall (r_1, r_2, ..., r_k), (r'_1, r'_2, ..., r'_k) \in \Pi([n])^k$ $[[\forall h \in [k](\rho_h(i) > \rho_h(j) \leftrightarrow \rho'_h(i) > \rho'_h(j))] \rightarrow [\rho(i) > \rho(j) \leftrightarrow \rho'(i) > \rho'(j)]]$ dove ρ' è la funzione peso associata al ranking collettivo corrispondente a $(r'_1, r'_2, ..., r'_k)$ derivata in accordo a σ. cioè: ogni qualvolta si considerino due insiemi di k votanti per i quali due alternative i e j hanno le stesse posizioni relative per tutte le coppie di votanti omologhi, allora i e j hanno la stessa posizione relativa anche nelle graduatorie finali relative ai due gruppi di votanti ovvero: la posizione relativa di due alternative nella graduatoria finale dipende unicamente dalle posizioni relative delle due alternative nelle graduatorie individuali.

14 Il teorema (di impossibilità) di Arrow

Il teorema di Arrow individua l'unico sistema di voto che rispetta i principi U e IIA.

Teorema di Arrow. Se il sistema di voto σ soddisfa i principi U e IIA, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > 2$ esiste $j \in [k]$ tale che, per ogni k-upla $\langle r_1, r_2, ..., r_k \rangle$ di ranking per n alternative, ciascuno dei ranking espressione di voto di uno dei k votanti il voto collettivo corrispondente ai voti individuali $r_1, r_2, ..., r_k$ derivato in accordo a σ è $r = r_j$.

Riassumiamo: per ogni insieme $[k]$ di votanti esiste $j \in [k]$ tale che il voto collettivo corrispondente ai voti individuali $r_1, r_2, ..., r_k$ dei k votanti derivato in accordo a σ è $r = r_j$ per ogni insieme $[k]$ di votanti esiste $j \in [k]$ tale che $r = r_j$ cioè, l'unico sistema di voto che rispetta U e IIA è la dittatura.