10 Il metodo dei momenti

I due stimatori più naturali sono media e varianza empirica; in entrambi i casi possono essere interpretati come lo stimatore che si ottiene sostituendo la distribuzione empirica a quella teorica nel calcolo di parametri che possono esser visti come valori medi di momenti del campione aleatorio. Il metodo dei momenti può essere visto come la generalizzazione di questa idea.

Supponiamo ora di avere un campione aleatorio $X_1, ..., X_n$ estratto da una legge di probabilità P_θ, con $\theta = (\theta_1, ..., \theta_k)$. Supponiamo anche che questa legge ammetta k momenti finiti, cioè $\mu_j = E[X_1^j]$ sia ben definito per $j = 1, ..., k$. Chiamiamo m_j i momenti empirici $m_j := n^{-1} \sum_{i=1} X_i^j$; l'idea di fondo è scegliere il valore dei parametri $\theta_1, ..., \theta_k$ in modo che valga l'uguaglianza vettoriale:

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \mu_1(\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2, ..., \widetilde{\theta}_k) \\
m_2 &= \mu_2(\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2, ..., \widetilde{\theta}_k) \\
&\ \ ... \\
m_k &= \mu_k(\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2, ..., \widetilde{\theta}_k)
\end{aligned}
$$

Più precisamente

Definition 86 *Assumiamo che esista un diffeomorfismo $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ tale che $g(\mu_1, ..., \mu_k) = (\theta_1, ..., \theta_k)$, per ogni valore di $(\theta_1, ..., \theta_k)$. Lo stimatore del metodo dei momenti è allora definito da*

$$(\widetilde{\theta}_1, ..., \widetilde{\theta}_k) := g(m_1, ..., m_k)\ .$$

Per determinare le proprietà asintotiche del nostro stimatore dobbiamo rinforzare leggermente le nostre ipotesi.

Condition 87 *Le variabili aleatorie $X_1, ...X_n$ sono indipendenti ed identicamente distribuite con momenti di ordine $2k$ finiti.*

Proposition 88 *Sotto la precedente condizione, vale il teorema del limite centrale multivariato*

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} m_1 - \mu_1 \\ ... \\ m_k - \mu_k \end{pmatrix} \to_d N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \Omega \right)$$

dove

$$\Omega := \begin{pmatrix} E[(X_1 - \mu_1)^2] & E[(X_1 - \mu_1)(X_1^2 - \mu_2)] & ... & E[(X_1 - \mu_1)(X_1^k - \mu_k)] \\ & ... & ... & ... \\ & & & E[(X_1^k - \mu_k)^2] \end{pmatrix}\ .$$

Proposition 89 *Sotto la precedente condizione, lo stimatore del metodo dei momenti converge in probabilità al valore vero dei parametri e vale il teorema del limte centrale:*

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \widetilde{\theta}_1 - \theta_1 \\ ... \\ \widetilde{\theta}_k - \theta_k \end{pmatrix} \to_d N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, Jg(\mu_1, ..., \mu_k)\Omega Jg(\mu_1, ..., \mu_k)^T \right)\ .$$

Proof. Delta Method multivariato. ∎

Example 90 *(Legge Gamma) Supponiamo di avere un campioni di variabili IID con legge Gamma di parametri α e β, cioè con densità*

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-\frac{y}{\beta}) I_{[0,\infty)}(x) \ , \\ \Gamma(\alpha) &= \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-x) dx \ . \end{aligned}$$

Come noto (si veda l'appendice) abbiamo

$$\begin{aligned} E[X_1] &= \alpha\beta \ , \\ E[X_1^2] &= (\alpha\beta)^2 + \alpha\beta^2 = \alpha\beta^2(\alpha+1) \\ Var[X_1] &= \alpha\beta^2. \end{aligned}$$

Possiamo pertanto scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\mu_1} &= \frac{(\alpha\beta)^2 + \alpha\beta^2 - (\alpha\beta)^2}{\alpha\beta} = \beta \ , \\ \frac{\mu_1^2}{\mu_2 - \mu_1^2} &= \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha\beta^2} = \alpha \ . \end{aligned}$$

Lo stimatore del metodo dei momenti è pertanto

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha} \\ \widetilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2} \\ \frac{m_2 - m_1^2}{m_1} \end{pmatrix}$$

con matrice Jacobiana

$$\begin{aligned} Jg(\mu_1(\alpha,\beta), \mu_2(\alpha,\beta)) &= \begin{pmatrix} \frac{2\mu_1\mu_2}{(\mu_2-\mu_1^2)^2} & -\frac{\mu_2}{\mu_1^2} - 1 \\ -\frac{\mu_1^2}{(\mu_2-\mu_1^2)^2} & \frac{1}{\mu_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2\alpha\beta(\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^2)}{(\alpha\beta^2)^2} & -\frac{(\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^2)}{\alpha^2\beta^2} - 1 \\ -\frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha\beta^2)^2} & \frac{1}{\alpha\beta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2(\alpha+1)}{\alpha\beta} & -2 - \frac{1}{\alpha} \\ -\frac{1}{\beta^2} & \frac{1}{\alpha\beta} \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

Example 91 *Suipponiamo che in una certa città avvengano una serie di reati; poiché però non tutti i reati vengono denunciati, la legge del numero dei crimini osservati può essere vista come una binomiale con k e p incogniti, cioè il nostro campione aleatorio $X_1, ..., X_n$ ha legge*

$$\binom{k}{x} p^x (1-p)^{k-x},$$

con k, p parametri incogniti da stimare. Abbiamo

$$\mu_1 = kp \ , \ \mu_2 = k^2 p^2 + kp(1-p) \ ,$$

e lo stimatore col metodo dei momenti si ottiene invertendo le relazioni

$$\begin{aligned} \overline{X}_n &= kp \ , \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 &= kp(1-p) + k^2 p^2. \end{aligned}$$

Si può ottenere

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_n &= \frac{\overline{X}_n}{\widetilde{k}_n} \ , \\ \widetilde{k}_n &= \frac{\overline{X}_n^2}{\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2} \ . \end{aligned}$$

Il metodo dei momenti fu introdotto da Pearson (1857-1936), matematico ed avvocato, che cambiò il nome da Carl in Karl per la sua ammirazione nei riguardi di Karl Marx. E' da notare che non richiede la consocenza completa della legge di probabilità delle X_i, a differenza del metodo della massima verosimiglianza che discutiamo nella prossima sezione.