Introduzione alla Convergenza delle Variabili Casuali

1 Concetto generale

In probabilità, la **convergenza** riguarda il comportamento di una sequenza di variabili casuali $\{X_n\}$ quando il numero n delle osservazioni cresce molto. Comprendere la convergenza aiuta a capire come si possono stimare grandezze incognite esaminando sequenze di dati.

Perché studiare la convergenza

La nozione di convergenza è fondamentale in statistica e probabilità perché permette di capire come una ripetizione di esperimenti casuali produca risultati sempre più stabili e prevedibili col crescere del numero delle osservazioni.

2 Tipi principali di convergenza

Di seguito vengono presentate le principali tipologie di convergenza, con definizioni formali ed esempi intuitivi.

2.1 Convergenza in probabilità

Una sequenza di variabili aleatorie $X_1, X_2, \ldots$ **converge in probabilità** a una variabile casuale X se, per ogni $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

Si scrive anche $X_n \xrightarrow{p} X$.

Chiarimento: Questo significa che, man mano che osserviamo più dati, la probabilità che X_n si discosti da X di più di ϵ può diventare piccolissima, se n è abbastanza grande.

Esempio: Siano $X_1, X_2, \ldots$ variabili i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite) con media e varianza finite. Allora la *media campionaria*

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

converge in probabilità alla media μ (*Teorema Debole dei Grandi Numeri*).

2.2 Convergenza quasi certa (Almost Sure)

La sequenza X_n **converge quasi sicuramente** (o quasi ovunque) a X se

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \to \infty} X_n = X \right) = 1$$

Si scrive spesso $X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

Chiarimento: Vuol dire che c'è probabilità uno che i valori di X_n si avvicinino sempre di più a X, eccetto, al massimo, su un insieme di casi "impossibili".

Esempio: Se $X_1, X_2, \ldots$ sono i.i.d. con media e varianza finite, la media campionaria $\overline{X}_n$ converge quasi certamente a μ (*Teorema Forte dei Grandi Numeri*).

2.3 Convergenza in distribuzione

La sequenza X_n **converge in distribuzione** a X se, per ogni punto x di continuità della funzione di distribuzione $F_X(x)$,

$$\lim_{n \to \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Si scrive $X_n \xrightarrow{d} X$.

Chiarimento: Questo tipo di convergenza riguarda la "forma" delle distribuzioni di X_n, non direttamente i valori presi dalle variabili casuali.

Esempio: Siano $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. con distribuzione uniforme $U(0, 1)$ e sia $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Allora M_n converge in probabilità a 1, mentre $n(1 - M_n)$ converge in distribuzione a una variabile esponenziale di parametro 1.

3 Relazioni tra le convergenze

- La convergenza quasi certa implica quella in probabilità; la convergenza in probabilità implica quella in distribuzione, ma non viceversa.
- Se una sequenza converge in probabilità ad una costante, allora converge anche in distribuzione alla stessa costante e viceversa.

4 Teoremi fondamentali

4.1 Teorema Debole dei Grandi Numeri (Weak LLN)

Se $X_1, X_2, \dots$ sono i.i.d. con media μ e varianza finita, allora

$$\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$$

ossia la media campionaria converge in probabilità alla media reale.

Dimostrazione sintetica: Basta applicare la disuguaglianza di Chebyshev:

$$\mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - \mu| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(\overline{X}_n)}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \to 0$$

per $n \to \infty$.

4.2 Teorema Forte dei Grandi Numeri (Strong LLN)

Con le stesse ipotesi di sopra,

$$\overline{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu$$

quindi la media campionaria converge quasi sicuramente alla media reale.

5 Esercizio pratico

Si può simulare il lancio di una moneta n volte e calcolare la proporzione di "testa" ottenuta. Vedrai che man mano che n aumenta, la proporzione si avvicina sempre più a 0.5, illustrando il Teorema dei Grandi Numeri.

Simulazione in Python del lancio di una moneta

Il seguente programma simula n lanci di una moneta e calcola la proporzione di "testa" osservata:

```python
import random

num_lanci = 10000  # Numero totale di lanci
testa = 0

for _ in range(num_lanci):
    if random.randint(0, 1) == 1:
        testa += 1

proporzione_testa = testa / num_lanci
print(f"Proporzione di testa: {proporzione_testa:.4f}")
```

6 Note aggiuntive

- **Quando usare quale convergenza**: La convergenza in probabilità è utile per ragionare in senso pratico sul risultato "medio" di una sequenza ripetuta. La convergenza quasi certa dà una garanzia molto forte (succede "sempre" tranne in casi eccezionali). La convergenza in distribuzione è fondamentale per lo studio dei limiti di distribuzioni, come nei teoremi del limite centrale.
- **Osservazione pratica**: In applicazioni concrete, il primo passo nello studio della convergenza è capire quale tipo di convergenza è rilevante per il problema.