Processi di diffusione

Capitolo 19 del testo

Azioni e relazioni

- La presenza di una rete influenza il comportamento degli individui che la popolano
  - talvolta, modificando il loro comportamento
  - e questo lo avevamo già visto con l'esperimento di Granovetter
- perché gli individui, proprio in virtù della presenza di una rete, interagiscono fra loro
  - magari, soltanto osservando il comportamento gli uni degli altri
- Molte delle nostre interazioni avvengono a livello locale piuttosto che globale
  - ci interessa il comportamento degli individui con i quali siamo in relazione, piuttosto che il comportamento dell'intera popolazione
- Perciò, gli individui che possono influenzare il nostro comportamento sono quelli con i quali siamo in relazione
- cerchiamo, ora di entrare nel merito della natura di questa "influenza di rete"

Omofilia

- Abbiamo già incontrato il fenomeno della chiusura triadica
  - ossia, la tendenza a che si stabiliscano relazioni fra gli individui che hanno una relazione forte con uno stesso individuo
- Questo fenomeno è strettamente connesso al concetto di omofilia che si esplica in due direzioni:
- in un senso, è la tendenza a connetterci con gli individui che ci assomigliano
  - ad esempio, un individuo tende a non stabilire relazioni con chi ha idee politiche opposte alle sue
  - ma anche: se amo il mare, diventerò amico con la gente che incontro al mare (e che, dunque, come me ama il mare)
- E questo per numerose ragioni
  - selezione: tendo ad essere amico a chi mi somiglia, perché sto meglio con chi mi somiglia che non con chi è diverso da me
  - opportunità: se amo il mare, difficilmente, nelle mie vacanze, incontrerò gli amanti della montagna

Omofilia

- Il fenomeno della chiusura triadica è strettamente connesso al concetto di omofilia che si esplica in due direzioni:
- Nell'altro senso, è la tendenza *diventare simili* agli individui con i quali siamo in relazione
  - ad assumere i loro stessi gusti
  - ad adeguarci ai loro comportamenti
  - e a diventare amici dei loro amici!
- La motivazione soggiacente a questa tendenza è l'esigenza di ridurre la tensione sociale
  - non si può stare sempre a litigare se andare a vedere un thriller o una commedia…
  - prima o poi, uno dei due amici si farà piacere il genere che piace all'altro
- Ma c'è anche una motivazione assolutamente razionale
  - se tutti i miei amici acquistano un nuovo sistema operativo, io, che li stimo (sono miei amici!), assumo che sia una buona idea e lo acquisto a mia volta
  - e, inoltre, se mi tenessi il mio vecchio sistema operativo, magari non potrei più scambiare file con loro…

Processi di diffusione

- Se tutti i miei amici acquistano un nuovo sistema operativo, io lo acquisto a mia volta
  - quando valuto che questo acquisto migliorerà la mia vita
- poi, magari, altri amici lo acquisteranno
- e il nuovo sistema operativo si diffonderà nella rete
- Il processo di *diffusione delle innovazioni* è stato studiato in sociologia già a partire dalla metà del secolo scorso:
  - Ryan e Gross (1943) hanno osservato i processo di adozione di nuovi semi ibridi di mais da parte di un gruppo di agricoltori in Iowa
  - sebbene la maggior parte degli agricoltori veniva a conoscenza dei nuovi semi tramite le comunicazioni dei venditori,
  - a parte un numero limitato di agricoltori,
  - la maggior parte degli agricoltori iniziava a usare i nuovi semi solo dopo aver osservato che un certo numero di vicini / conoscenti / amici li stava utilizzando

Processi di diffusione

- Vogliamo modellare il processo di diffusione in una rete e, per farlo dobbiamo stabilire le regole in base alle quali un nodo decide di cambiare
  - comportamento, opinione, prodotto
- Intanto, definiamo un modello di decisioni ***individuali***
  - ossia, non vi è coalizzazione di gruppi di nodi per prendere collettivamente la stessa decisione
- nel quale le scelte dei nodi sono guidate da *motivazioni di puro interesse personale*:
  - la spinta a cambiare è tanto maggiore quanto maggiore è il vantaggio che si prevede che deriverà dal cambiamento
- Assumiamo che nella rete sia stabilizzato un certo stato delle cose B
  - ad esempio, tutti gli individui nella rete utilizzano lo stesso sistema operativo B
- e che, ad un certo istante, alcuni individui cambino il loro stato in A
  - ad esempio, viene lanciato sul mercato un nuovo sistema operativo A, e, a fini promozionali, viene dato gratuitamente ad un certo insieme di individui
- In quali casi un individuo decide di cambiare il proprio stato da B ad A?
  - Assumendo che chi è nello stato A non torni mai in B

Processi di diffusione

- Modelliamo il processo di diffusione
  - individuale e basato sul vantaggio personale
- mediante un Network Coordination Game
- Sia (u,v) un arco della rete
- assumiamo che il beneficio reciproco di adottare A o B sia quello illustrato in tabella

u \ v	A	B
A	a , a	0 , 0
B	0 , 0	b , b

  - se u e v adottano entrambi A allora entrambi hanno un beneficio pari ad a
  - se u e v adottano entrambi B allora entrambi hanno un beneficio pari a b
  - altrimenti nessuno dei due ha alcun beneficio (dalla reciproca relazione)

Processi di diffusione

- Ma un nodo nella rete ha, in generale, più di un vicino
- Cosa accade quando qualcuno dei vicini di un nodo u è nello stato A e qualcun altro è nello stato B?
  - modello lineare
- Semplicemente, detti n_A il numero di vicini di u nello stato A e n_B il numero di vicini di u nello stato B:
  - se u rimane nello stato B ha un beneficio pari a b n_B, se u passa allo stato A ha un beneficio pari a a n_A,
    - u rimane nello stato B se b n_B > a n_A
    - u passa allo stato A se **$a\ n_A \geq b\ n_B$**
  - si osservi che, a parità di beneficio, u passa ad A (l'innovazione è preferibile al vecchio stato)
- ossia, poiché $n_B = |N(u)| - n_A$, **u passa allo stato A se:** **$a\ n_A \geq b\ (|N(u)| - n_A)$**
  - ossia, se $\frac{n_A}{|N(u)|} a \geq \frac{|N(u)| - n_A}{|N(u)|} b$
  - ossia, detto $p_A = \frac{n_A}{|N(u)|}$, se **$p_A a \geq (1-p_A)b$**
- **u passa allo stato A se, detta p_A la frazione dei vicini di u che è in A, vale che**

$$p_A \geq \frac{b}{a+b}$$

Processi di diffusione

- **u passa allo stato A se, detta p_A la frazione dei vicini di u che è in A, vale che**

$$p_A \geq \frac{b}{a+b}$$

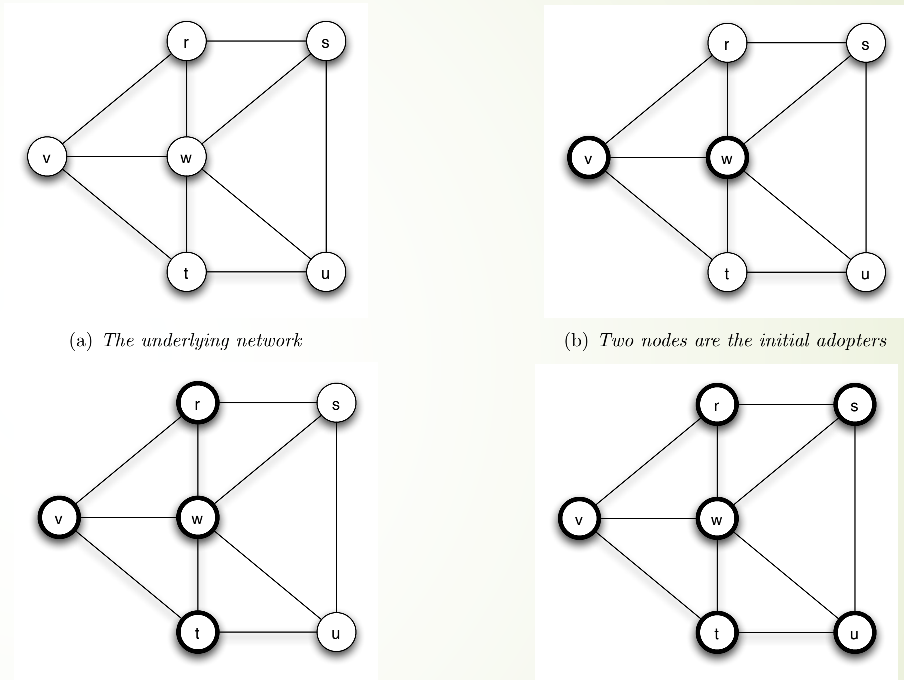
- chiamiamo $\mathbf{q} = \frac{b}{a+b}$ la **soglia di adozione** di A
- Quando **q** è molto piccolo, occorrono pochi vicini nello stato A per indurre un nodo a cambiare stato
  - e **q** è molto piccolo quando a è molto più grande di b
  - ossia, quando lo stato A è molto migliore dello stato B
- Quando a = b occorrono almeno la metà dei vicini nello stato A per indurre un nodo a cambiare stato
  - e questo accade quando lo stato A è confrontabile con lo stato B
- Infine, quando a è molto più piccolo di b, occorrono molti vicini nello stato A per indurre un nodo a cambiare stato
  - e questo accade quando lo stato A è peggiore dello stato B
  - e quindi è faticoso / costoso / rischioso adottare A

Game e configurazioni di equilibrio

- Cerchiamo, ora di capire, se e quali configurazioni di equilibrio ha il network coordination game che abbiamo appena introdotto
  - configurazioni, cioè, in cui nessun nodo cambia il proprio stato da B ad A
  - perché, ricordiamo, assumiamo che nessun nodo "torni indietro" cambiando il proprio stato da A a B
- Osserviamo che esistono almeno due configurazioni di equilibrio: quelle banali
  - quando A non è stato introdotto nella rete, cosicché tutti i nodi sono nello stato B
  - quando, dopo che A è stato introdotto nella rete, tutti i nodi sono passati nello stato A
- Perché, una volta che A viene introdotto nella rete, esso inizia a diffondersi:
  - Quando termina il processo di diffusione?
  - Riesce sempre a raggiungere tutti i nodi?
  - Oppure, talvolta, la diffusione si blocca prima di aver raggiunto tutti i nodi, in configurazioni di equilibrio intermedie?
  - E, in questo caso, *perché* si blocca?
- Cerchiamo di capire, innanzi tutto, con qualche esempio

Esempi di processi di diffusione

- Cerchiamo di capire, innanzi tutto, con qualche esempio
- Lo stato A, viene forzato all'inizio sui nodi v e w
- in questo caso, a=3 e b=2
  - A è migliore di B
- quindi, q = $\frac{2}{3+2}$
- ossia, per adottare A, un nodo deve avere i 2/5 dei vicini nello stato A
- Perciò, un nodo dopo l'altro, tutti i nodi della rete adottano A



(a) *The underlying network*

(b) *Two nodes are the initial adopters*

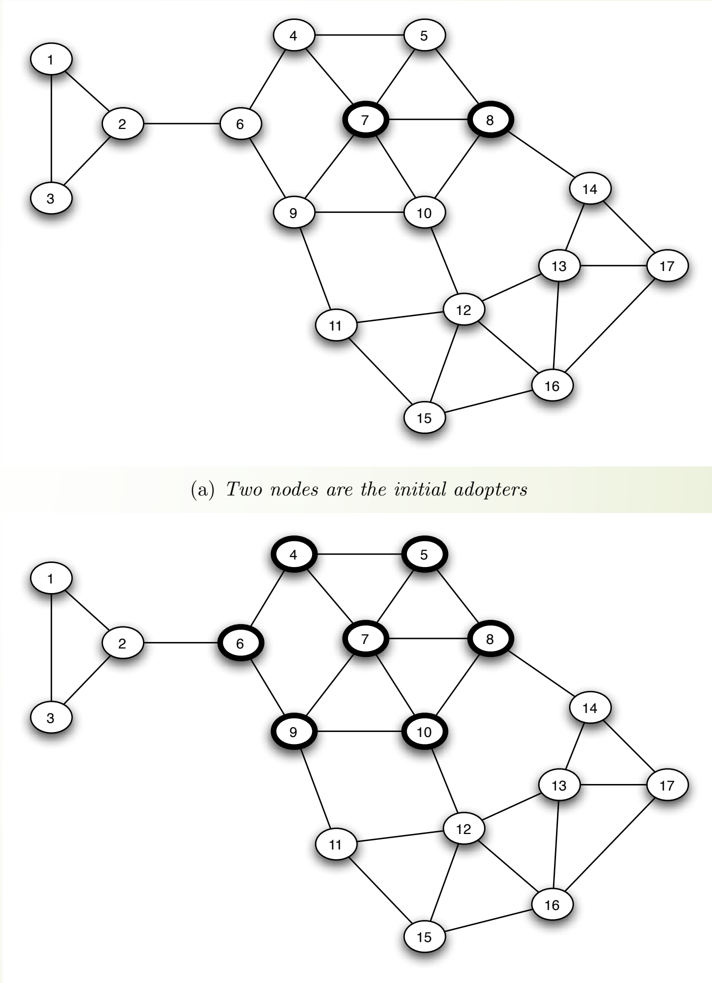
(c) *After one step, two more nodes have adopted*

(d) *After a second step, everyone has adopted*

Figure 19.3: Starting with v and w as the initial adopters, and payoffs $a = 3$ and $b = 2$, the new behavior A spreads to all nodes in two steps. Nodes adopting A in a given step are drawn with dark borders; nodes adopting B are drawn with light borders.

Diffusione e cascate complete

- Altro esempio:
- Caso 1) se a=3 e b=2, ossia q = $\frac{2}{5}$
  - è il caso illustrato in figura
  - ossia, per adottare A, un nodo deve avere i 2/5 dei vicini nello stato A
- In questo caso, non tutti i nodi della rete adottano A:
  - come si vede in figura, A non riesce a raggiungere i nodi fuori dell'esagono
- Caso 2) se a=4 e b=2, ossia q = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
  - dopo aver raggiunto tutti i nodi dell'esagono
  - A è adottato da 2, 11 e 14
  - poi da 1, 3, 12, 13, 17
  - e infine da 15 e 16
- Tutti i nodi hanno adottato A!



(a) *Two nodes are the initial adopters*

Diffusione e cascate complete

- Dai due esempi possiamo trarre una serie di conclusioni
  - intanto, non sempre tutti i nodi si adeguano all'innovazione
  - poi, se questo accade, possiamo aumentare il beneficio derivante dall'adozione di A per indurre tutti i nodi ad adottarlo
    - ad esempio, possiamo abbassare il costo dell'acquisizione di A
    - aumentandone l'attrattiva!
- Ma dovrebbe essere chiaro anche che l'eventualità che tutti i nodi arriveranno ad adottare A dipende dai nodi che scegliamo per forzare lo stato A all'inizio del processo
- dal loro numero
- ma anche dalla loro posizione all'interno della rete
- ad esempio, mantenendo a = 3 e forzando A su 4 nodi (invece che su 2):
  - se forziamo A sui nodi 7, 8, 2 e 12, tutti i nodi adotteranno A
  - se forziamo A sui nodi 7, 8, 2 e 14 o, peggio ancora, 7, 8, 4 e 5, non tutti i nodi adotteranno A
- Come mai?

Diffusione e cascate complete

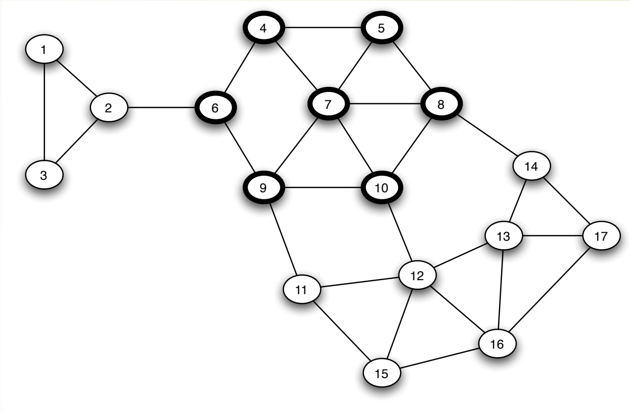
- Prima di procedere, abbiamo bisogno di qualche definizione e di qualche notazione
- Inizialmente, lo stato A viene forzato su un certo insieme **V_0** di nodi che chiameremo ***iniziatori***
- Come abbiamo visto, una volta che A viene introdotto nella rete, esso inizia a diffondersi
- ossia, ha inizio un processo di diffusione che procede *in una sequenza di passi discreti*:
  - al passo 1, un insieme V_1 di vicini di nodi in V_0 adotta A
  - al passo 2, un insieme V_2 di vicini di nodi in $V_0 \cup V_1$ adotta A
  - … al passo t, un insieme V_t di vicini di nodi in $V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{t-1}$ adotta A …
- ossia, indichiamo con **V_i l'insieme dei nodi che adottano A al passo i**

- Viene generata una ***cascata completa*** se ad un certo passo t tutti i nodi hanno adottato A, ossia

se esiste $t \geq 0$ tale che $\bigcup_{0 \leq i \leq t} V_i = V$

Cascate e clusters

- Se ripensiamo all'esempio, sembra che l'innovazione abbia difficoltà a uscire dall'"esagono centrale" – i nodi 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
- che appare come un gruppo coeso di nodi
  - in qualche modo, in qualche senso, una comunità
  - vediamo in quale senso



- Un ***cluster di densità p*** è un sottoinsieme di nodi **V' ⊆ V** tale che la frazione di vicini che ogni suo nodo ha in V' è almeno p:

$$\forall\ \mathbf{u} \in \mathbf{V'} \left[\frac{|\mathbf{N(u)} \cap \mathbf{V'}|}{|\mathbf{N(u)}|} \geq \mathbf{p}\right]$$

  - il sottoinsieme {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} è un cluster di densità p = $\frac{2}{3}$

- Osservazione: l'unione di due cluster di densità p è ancora un cluster di densità p
  - ad esempio, poiché anche {1, 2, 3} è un cluster di densità $\frac{2}{3}$, allora {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} è un cluster di densità $\frac{2}{3}$
- ESERCIZIO: provare a dimostrare questa proprietà

Cascate e clusters

- Notazione: sia G=(V,E) un grafo e sia V' ⊆ V: indichiamo con **G-V'** il grafo ottenuto rimuovendo da G tutti i nodi in V' e tutti gli archi incidenti su nodi in V'
- **Teorema 1**. sia G=(V,E) un grafo e siano $V_0 \subseteq V$ l'insieme di iniziatori e q la soglia di adozione di A: V_0 non genera una cascata completa se e soltanto se $G - V_0$ contiene un cluster di densità maggiore di 1- q
- Dimostrazione: se V_0 non genera una cascata completa
  - allora, esistono nodi che non adottano A
  - Ricordiamo che indichiamo con V_i i nodi che adottano A al passo i : sia t il passo tale che $V_t \neq \emptyset$ e $V_{t+1} = \emptyset$
    - ossia, t+1 è il primo passo in cui A non si diffonde più
  - Poniamo $V_A = \bigcup_{0 \leq i \leq t} V_i$: V_A contiene tutti e soli i nodi che adottano A
  - poiché esistono nodi che non adottano A, allora, $V - V_A \neq \emptyset$
  - Poiché i nodi in $V - V_A$ non adottano A, allora **per ogni** $\mathbf{v \in V - V_A}$: $\frac{|N(v) \cap V_A|}{|N(v)|} < q$
  - e, quindi, poiché $\frac{|N(v) \cap V_A|}{|N(v)|} + \frac{|N(v) \cap (V - V_A)|}{|N(v)|} = 1$, allora $\frac{|N(v) \cap (V - V_A)|}{|N(v)|} > \mathbf{1-q}$
  - ossia, $V-V_A$ è un cluster di densità maggiore di 1- q e $V-V_A$ è contenuto in $G - V_0$

Cascate e clusters

- **Teorema 1**. sia G=(V,E) un grafo e siano $V_0 \subseteq V$ l'insieme di iniziatori e q la soglia di adozione di A: V_0 non genera una cascata completa se e soltanto se $G - V_0$ contiene un cluster di densità maggiore di 1- q
- Dimostrazione: se $G - V_0$ contiene un cluster di densità maggiore di 1 - q
  - cioè, esiste $C \subseteq V - V_0$ tale che, per ogni $v \in C$, $\frac{|N(v) \cap C|}{|N(v)|} > 1 - q$
  - Supponiamo per assurdo che si generi una cascata completa: allora i nodi in C, prima o poi, adotteranno A
  - Sia t il primo passo tale che $V_t \cap C \neq \emptyset$: ossia, per $i < t$, $V_i \cap C = \emptyset$ e esiste $u \in V_t \cap C$
  - Poniamo $V' = \bigcup_{0 \leq i \leq t-1} V_i$: V' sono tutti i nodi che al passo t-1 sono nello stato A
    - e V' non contiene nodi di C
  - Allora:
    - a) poiché C è un cluster di densità > 1 – q e $u \in C$, allora $\frac{|N(u) \cap C|}{|N(u)|}$ **> 1-q**
    - b) poiché $u \in V_t$, allora $\frac{|N(u) \cap V'|}{|N(u)|} \geq$ **q**
  - ossia, poiché $V' \cap C = \emptyset$, $\mathbf{1} = \frac{|N(u)|}{|N(u)|} \geq \frac{|N(u) \cap (C \cup V')|}{|N(u)|} = \frac{|N(u) \cap C|}{|N(u)|} + \frac{|N(u) \cap V'|}{|N(u)|} > \mathbf{1}$: un assurdo

Il ruolo dei weak ties

- Il teorema appena dimostrato mette in luce un nuovo aspetto della dicotomia strong ties / weak ties:
  - le innovazioni si diffondono con relativa facilità all'interno dei cluster
    - ossia, quando viaggia lungo strong ties l'innovazione ha un impatto significativo sui nodi che raggiunge
  - invece, incontrano difficoltà ad uscire dai cluster
    - ossia, quando viaggia lungo weak ties l'innovazione ha un impatto debole sui nodi che raggiunge
- Perciò, possiamo concludere che:
  - mentre l'esperimento di Granovetter ha permesso di mettere in luce la forza dei weak ties
    - in quanto fonte di vantaggi informativi
  - lo studio dei processi di diffusione ne evidenzia la debolezza
    - in quanto ostacolo alla diffusione

Clusters e Marketing virale

- Il teorema appena dimostrato mostra che i cluster ostacolano la diffusione virale di un'innovazione
- Ci domandiamo, ora, se e come è possibile superare lo stallo nel quale, a causa della presenza di cluster sufficientemente densi, uno stato A smette di diffondersi
- Possiamo scegliere gli iniziatori in posizioni tali che ciascun cluster contenga almeno un iniziatore
  - e questa è la lezione che abbiamo imparato dal teorema
- Oppure, come abbiamo già visto, è possibile aumentare l'appetibilità di A
  - per esempio, abbassando il suo prezzo di vendita
  - così da aumentare il beneficio a della sua adozione e diminuire la soglia di adozione
- Ma, dal punto di vista del venditore, abbassare il prezzo di vendita non è una strategia che adotterebbe con molto piacere…
- Allora, ci domandiamo: quanto alto può essere mantenuto il prezzo (quanto bassa può essere l'attrattiva) di A perché la diffusione sia comunque virale?
- O meglio, quanto alta può essere tenuta la soglia di adozione perché si generi una cascata completa?

Capacità di cascata

- Quanto alta può essere tenuta la soglia di adozione q perché si generi una cascata completa?
  - naturalmente, $q = \frac{b}{a+b} \leq 1$
- Innanzi tutto, dipende dalla struttura della rete
  - alcune strutture ostacolano maggiormente di altre la generazione di cascate complete
- **PROBLEMA**: dato un grafo G=(V,E), qual è la soglia di adozione *massima* q_{MAX} in G affinché un "piccolo" insieme V_0 di iniziatori di un nuovo stato A generi una cascata completa?
- Il valore q_{MAX} prende il nome di ***capacità di cascata di G***
- ma, nel descriverlo siamo stati un po' imprecisi: cosa significa che V_0 deve essere "piccolo"? Quanto "piccolo"?!
- Osservazione: se scegliamo $V_0 = V$, allora, la soglia q = 1 genera una cascata completa: tutti i nodi sono forzati nello stato A!
  - Ma ciò non ha molto senso…
- Richiedendo che V_0 sia "piccolo", intendiamo che vogliamo che $|V_0| << |V|$

Capacità di cascata

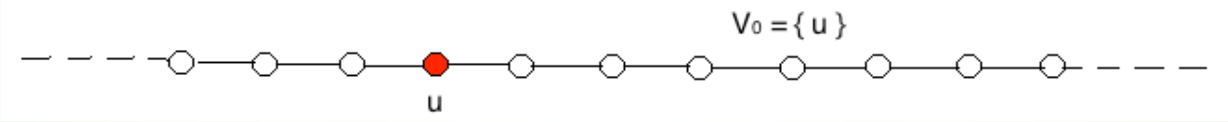
- **PROBLEMA**: dato un grafo G=(V,E), qual è la soglia di adozione *massima* q_{MAX} in G affinché un "piccolo" insieme V_0 di iniziatori di un nuovo stato A generi una cascata completa?

- Ipotesi di lavoro:
- G è un grafo infinito, ossia, contiene un ***numero infinito di nodi***
  - Vedremo degli esempi in cui G è un grafo *regolare*, ossia, la struttura del vicinato di un nodo è uguale a quella di tutti gli altri
    - ESEMPIO: G è una catena di infiniti nodi,
    - oppure una griglia di infiniti nodi
- l'insieme V_0 degli iniziatori può essere un qualsiasi insieme ***finito***

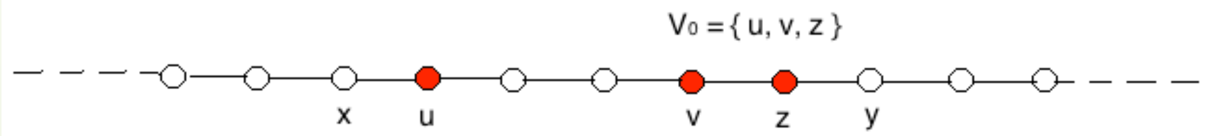
- Cioè: dato un grafo (regolare) infinito, qual è la soglia di adozione *massima* q_{MAX} in G affinché ***esista un insieme finito V_0 di iniziatori*** di un nuovo stato A che generi una cascata completa?

Capacità di cascata

- **PROBLEMA**: dato un grafo regolare infinito, qual è la soglia di adozione *massima* q_{MAX} in G affinché un ***qualsiasi insieme finito V_0 di iniziatori*** di un nuovo stato A generi una cascata completa?
- ESEMPIO: G è una catena infinita
  - se $|V_0| = 1$, ossia, V_0 contiene un solo nodo, allora occorre $q = \frac{1}{2}$ per generare una cascata completa



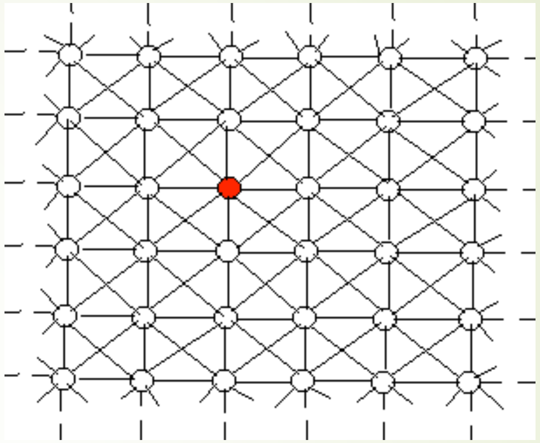
  - ma, scegliendo un insieme più grande, è possibile generare una cascata con $q < \frac{1}{2}$?



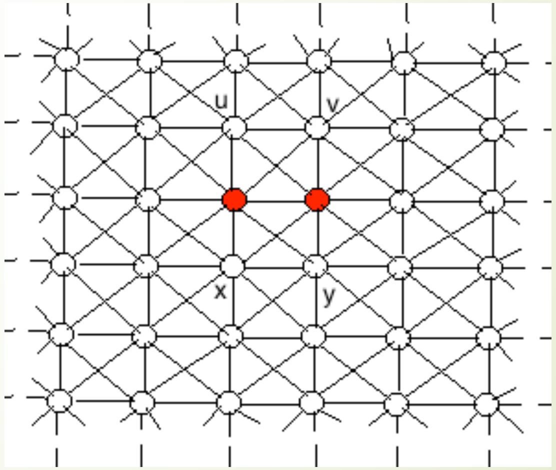
  - No: perché i nodi "al confine" con V_0, i nodi x e y in figura, hanno comunque bisogno di $q = \frac{1}{2}$ per passare ad A
  - Allora, in una catena infinita, $q_{MAX} = \frac{1}{2}$

Capacità di cascata

- ESEMPIO: G è una griglia infinita
  - se $|V_0| = 1$, ossia, V_0 contiene un solo nodo, allora occorre $q = \frac{1}{8}$ per generare una cascata completa

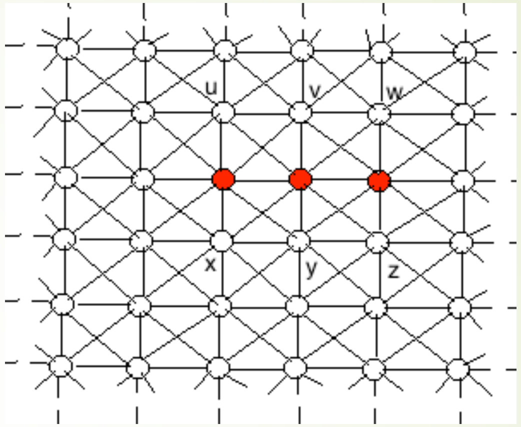


  - se $|V_0| = 2$, ossia, V_0 contiene due nodi, allora, scegliendo i due nodi in V_0 come nodi adiacenti, con $q = \frac{1}{4}$ si riesce a influenzare u, v, x, y e poi a generare una cascata completa

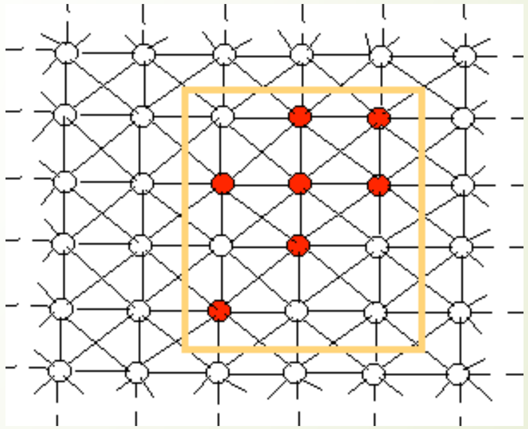


Capacità di cascata

- ESEMPIO: G è una griglia infinita
  - se $|V_0|$ = 3, allora, scegliendo i tre nodi in V_0 come nodi adiacenti, con $q = \frac{3}{8}$ si riesce a influenzare v e y, poi u, w, x, z, e così via fino a generare una cascata completa



  - aumentando $|V_0|$ non si riesce ad aumentare la soglia di adozione: una volta influenzati tutti i nodi nel rettangolo (giallo) che contiene gli iniziatori, occorre uscire da esso e per farlo è necessario $q = \frac{3}{8}$



  - Allora, in una griglia infinita, $q_{MAX} = \frac{3}{8}$

Capacità di cascata

- Dai due esempi della catena e della griglia possiamo concludere quanto segue:
  - la soglia di adozione massima è più bassa nella griglia (che ha una topologia più ricca) che non nella catena (che ha una topologia più povera)
  - in entrambi i casi, essa non supera $\frac{1}{2}$
  - cioè, affinché si generi una cascata completa, A deve essere almeno tanto appetibile di B
- Poiché *la soglia di adozione massima è una caratteristica della rete*
  - ovvero, della sua topologia
- la domanda sorge, a questo punto, spontanea: esistono topologie nelle quali la soglia di adozione massima è maggiore di $\frac{1}{2}$?
- Ossia, esistono topologie nelle quali innovazioni di qualità mediocre soppiantino uno status quo di qualità migliore?
- Fortunatamente, no...

Capacità di cascata

- Poiché *la soglia di adozione massima è una caratteristica della rete*, indicheremo come **q_G la soglia di adozione massima di un grafo G**
- **Teorema**: per ogni grafo infinito G=(V,E) i cui nodi hanno grado finito, $q_G \leq \frac{1}{2}$
- Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un insieme finito di iniziatori V_0 che, con soglia di adozione q $> \frac{1}{2}$, generi una cascata competa (nel grafo G)
  - al solito, indichiamo con V_t l'insieme dei nodi che adottano A al passo t
  - e sia, per ogni t ≥ 0, $S_t = \bigcup_{0 \leq i \leq t} V_i$ l'insieme dei nodi che, al passo t, sono nello stato A
  - Definiamo **l'interfaccia al passo t** l'insieme $\mathbf{I_t}$ degli archi che, al passo t, hanno un estremo in S_t e l'altro estremo in V-S_t : **$I_t = \{ (u,v) \in E: u \in S_t \text{ e } v \in V\text{-}S_t \}$**
  - e **dimostriamo che, per ogni t ≥ 0, $|I_t| > |I_{t+1}|$ oppure $I_t = I_{t+1}$**

Capacità di cascata

- **Teorema**: per ogni grafo infinito G=(V,E) i cui nodi hanno grado finito, $q_G \leq \frac{1}{2}$
- Dimostrazione. Siano q $> \frac{1}{2}$ e $V_0 \subset V$ finito: consideriamo il processo di diffusione in G che parte da V_0
  - **dimostriamo che, per ogni t $\geq$ 0, $|\mathbf{I}_t| > |\mathbf{I}_{t+1}|$ oppure $\mathbf{I}_t = \mathbf{I}_{t+1}$**
  - e, per farlo mostriamo che **se $\mathbf{I}_t \neq \mathbf{I}_{t+1}$ allora $|\mathbf{I}_t| > |\mathbf{I}_{t+1}|$**
    - se $\mathbf{I}_t \neq \mathbf{I}_{t+1}$ allora esiste un nodo v che adotta A al passo t+1, ossia $V_{t+1} \neq \emptyset$
      - e perché un nodo v appartenga a V_{t+1} deve esistere u ∈ N(v) tale che u ∈ S_t
    - ossia, per ogni v ∈ V_{t+1} esiste (almeno) un arco (u,v) ∈ $\mathbf{I}_t$ tale che u ∈ S_t
    - Allora, per ogni nodo v ∈ V_{t+1} ,
      - gli archi incidenti su v il cui altro estremo è in S_t sono in $\mathbf{I}_t$ ma non in $\mathbf{I}_{t+1}$,
      - gli archi incidenti su v il cui altro estremo non è in S_{t+1} sono in $\mathbf{I}_{t+1}$ ma non in $\mathbf{I}_t$
    - ossia: $\mathbf{I}_{t+1} = \mathbf{I}_t - [\, \bigcup_{v \in V_{t+1}} \{ (u,v) \in E : u \in S_t \} \,] \cup [\, \bigcup_{v \in V_{t+1}} \{ (z,v) \in E : z \in V - S_{t+1} \} \,]$

Capacità di cascata

- se $\mathbf{I}_t \neq \mathbf{I}_{t+1}$ allora esiste un nodo v che adotta A al passo t+1, ossia $V_{t+1} \neq \emptyset$
- e perché un nodo v appartenga a V_{t+1} deve esistere $u \in N(v)$ tale che $u \in S_t$
  - ossia, per ogni $v \in V_{t+1}$ esiste un arco $(u,v) \in \mathbf{I}_t$ tale che $u \in S_t$
  - Allora, per ogni nodo $v \in V_{t+1}$,
    - gli archi incidenti su v il cui altro estremo è in S_t sono in $\mathbf{I}_t$ ma non in $\mathbf{I}_{t+1}$,
      - come (u,v) in figura
    - gli archi incidenti su v il cui altro estremo è in S_{t+1} sono in $\mathbf{I}_{t+1}$ ma non in $\mathbf{I}_t$
      - come (v,z) in figura

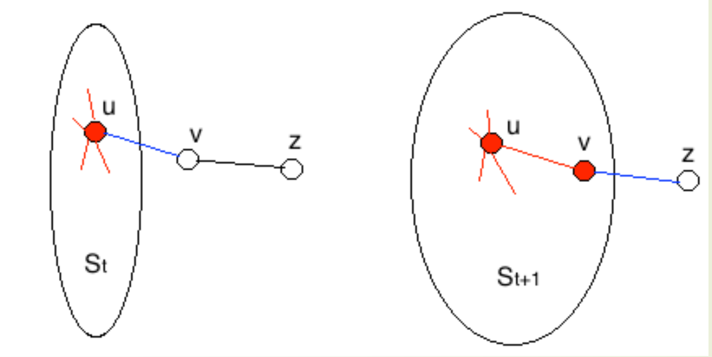


Fig. gli archi di interfaccia sono disegnati blu

- ossia: $\mathbf{I}_{t+1} = \mathbf{I}_t - [\, \cup_{v \in V_{t+1}} \{ (u,v) \in E : u \in S_t \} \,] \cup [\, \cup_{v \in V_{t+1}} \{ (z,v) \in E : z \in V - S_{t+1} \} \,]$

Capacità di cascata

- **Teorema**: per ogni grafo infinito G=(V,E) i cui nodi hanno grado finito, $q_G \leq \frac{1}{2}$
- Dimostrazione. Siano q $> \frac{1}{2}$ e $V_0 \subset V$ finito: consideriamo il processo di diffusione in G che parte da V_0
  - **dimostriamo che, per ogni t $\geq$ 0, $|\mathbf{I}_t| > |\mathbf{I}_{t+1}|$ oppure $\mathbf{I}_t = \mathbf{I}_{t+1}$**
    - se $\mathbf{I}_t \neq \mathbf{I}_{t+1}$ allora esiste un nodo v che adotta A al passo t+1, ossia $V_{t+1} \neq \emptyset$
    - e $\mathbf{I}_{t+1} = \mathbf{I}_t - [\, \cup_{v \in V_{t+1}} \{ (u,v) \in E : u \in S_t \} \,] \cup [\, \cup_{v \in V_{t+1}} \{ (u,v) \in E : u \in V - S_{t+1} \} \,]$
    - e, poiché se $v \neq z$ con $\mathbf{v,z} \notin \mathbf{S_t}$ allora $\{ (u,v) \in E : u \in S_t \} \cap \{ (u,z) \in E : u \in S_t \} = \emptyset$

      e se $v \neq z$ con $\mathbf{v,z} \in \mathbf{V_{t+1}}$ allora $\{ (u,v) \in E : u \in V - S_{t+1} \} \cap \{ (u,z) \in E : u \in V - S_{t+1} \} = \emptyset$,

      allora $|\cup_{v \in V_{t+1}} \{ (u,v) \in E : u \in S_t \}| = \sum_{v \in V_{t+1}} |\{ (u,v) \in E : u \in S_t \}|$

      e $|\cup_{v \in V_{t+1}} \{ (u,v) \in E : u \in V - S_{t+1} \}| = \sum_{v \in V_{t+1}} |\{ (u,v) \in E : u \in V - S_{t+1} \}|$
    - ossia:

      $|\mathbf{I}_{t+1}| = |\mathbf{I}_t| - \sum_{v \in V_{t+1}} |\{ (u,v) \in E : u \in S_t \}| + \sum_{v \in V_{t+1}} |\{ (u,v) \in E : u \in V - S_{t+1} \}|$

Capacità di cascata

- **Teorema**: per ogni grafo infinito G=(V,E) i cui nodi hanno grado finito, $q_G \leq \frac{1}{2}$
- Dimostrazione. Siano $q > \frac{1}{2}$ e $V_0 \subset V$ finito: consideriamo il processo di diffusione in G che parte da V_0
  - **dimostriamo che, per ogni $t \geq 0$, $|I_t| > |I_{t+1}|$ oppure $I_t = I_{t+1}$**
    - se $I_t \neq I_{t+1}$ allora esiste un nodo v che adotta A al passo t+1, ossia $V_{t+1} \neq \emptyset$
    - e $|I_{t+1}| = |I_t| - \sum_{v \in V_{t+1}} |\{(u,v) \in E : u \in S_t\}| + \sum_{v \in V_{t+1}} |\{(u,v) \in E : u \in V - S_{t+1}\}|$
    - ma $|\{(u,v) \in E : u \in S_t\}| = |N(v) \cap S_t|$

      e $|\{(u,v) \in E : u \in V - S_{t+1}\}| = |N(v) - S_{t+1}|$
      - perché, per ogni $v \in V_{t+1}$, $(u,v) \in I_t$ se e solo se $u \in N(v) \cap S_t$,

        e $(u,v) \in I_{t+1}$ se e solo se $u \in N(v) - S_t$
    - ossia: $|I_{t+1}| = |I_t| - \sum_{v \in V_{t+1}} |N(v) \cap S_t| + \sum_{v \in V_{t+1}} |N(v) - S_{t+1}|$

Capacità di cascata

- **Teorema**: per ogni grafo infinito G=(V,E) i cui nodi hanno grado finito, $q_G \leq \frac{1}{2}$
- Dimostrazione. Siano $q > \frac{1}{2}$ e $V_0 \subset V$ finito: consideriamo il processo di diffusione in G che parte da V_0
  - **dimostriamo che, per ogni $t \geq 0$, $|\mathbf{I}_t| > |\mathbf{I}_{t+1}|$ oppure $\mathbf{I}_t = \mathbf{I}_{t+1}$**
    - se $\mathbf{I}_t \neq \mathbf{I}_{t+1}$ allora esiste un nodo v che adotta A al passo t+1, ossia $V_{t+1} \neq \emptyset$
    - e $|\mathbf{I}_{t+1}| = |\mathbf{I}_t| - \sum_{v \in V_{t+1}} |N(v) \cap S_t| + \sum_{v \in V_{t+1}} |N(v) - S_{t+1}|$
    - per ogni $v \in V_{t+1}$, deve essere $\frac{|N(v) \cap S_t|}{|N(v)|} \geq q > \frac{1}{2}$
      - e, dunque, $|N(v) \cap S_t| > |N(v) - S_t|$
        - perché $1 = \frac{|N(v) \cap S_t|}{|N(v)|} + \frac{|N(v) - S_t|}{|N(v)|} > \frac{1}{2} + \frac{|N(v) - S_t|}{|N(v)|}$
    - inoltre, $|N(v) - S_t| > |N(v) - S_{t+1}|$ perché $S_t \subset S_{t+1}$
    - dunque, $|N(v) \cap S_t| > |N(v) - S_{t+1}|$

Capacità di cascata

- **Teorema**: per ogni grafo infinito G=(V,E) i cui nodi hanno grado finito, $q_G \leq \frac{1}{2}$
- Dimostrazione. Siano $q > \frac{1}{2}$ e $V_0 \subset V$ finito: consideriamo il processo di diffusione in G che parte da V_0
  - **dimostriamo che, per ogni $t \geq 0$, $|I_t| > |I_{t+1}|$ oppure $I_t = I_{t+1}$**
    - se $I_t \neq I_{t+1}$ allora esiste un nodo v che adotta A al passo t+1, ossia $V_{t+1} \neq \emptyset$
    - e $|I_{t+1}| = |I_t| - \sum_{v \in V_{t+1}} |N(v) \cap S_t| + \sum_{v \in V_{t+1}} |N(v) - S_{t+1}|$
    - per ogni $v \in V_{t+1}$, deve essere $\frac{|N(v) \cap S_t|}{|N(v)|} \geq q > \frac{1}{2}$
    - da cui, $|N(v) \cap S_t| > |N(v) - S_{t+1}|$
    - allora: $|I_{t+1}| = |I_t| - \sum_{v \in V_{t+1}} |N(v) \cap S_t| + \sum_{v \in V_{t+1}} |N(v) - S_{t+1}|$

      $= |I_t| - \sum_{v \in V_{t+1}} (|N(v) \cap S_t| - |N(v) - S_{t+1}|)$

      $< |I_t|$ "<" perché $V_{t+1} \neq \emptyset$ e $S_t \subset S_{t+1}$

Capacità di cascata

- **Teorema**: per ogni grafo infinito G=(V,E) i cui nodi hanno grado finito, $q_G \leq \frac{1}{2}$
- Dimostrazione. Siano $q > \frac{1}{2}$ e $V_0 \subset V$ finito: consideriamo il processo di diffusione in G che parte da V_0
  - abbiamo dimostrato che, **per ogni $t \geq 0$, $|I_t| > |I_{t+1}|$ oppure $I_t = I_{t+1}$**
  - poiché V_0 è un insieme finito e i nodi di G hanno grado finito, allora l'interfaccia iniziale ha dimensione finita, ossia, $|I_0| = k$, per qualche $k \in \mathbb{N}$
    - allora l'eventualità $I_t \neq I_{t+1}$ non può verificarsi per più di k passi
      - perché ogni volta che $I_t \neq I_{t+1}$ è anche $|I_t| > |I_{t+1}|$
      - e la dimensione dell'interfaccia non può essere < 0 (neanche = 0 in tempo finito su un grafo infinito, peraltro)
    - allora, esiste T tale che, per ogni $t \geq T$, $I_t = I_{t+1}$
      - ossia, dal passo T la diffusione si interrompe
    - ma in un grafo infinito una cascata completa può verificarsi solo in seguito a un processo di diffusione infinito,
    - allora V_0 non genera una cascata completa. QED

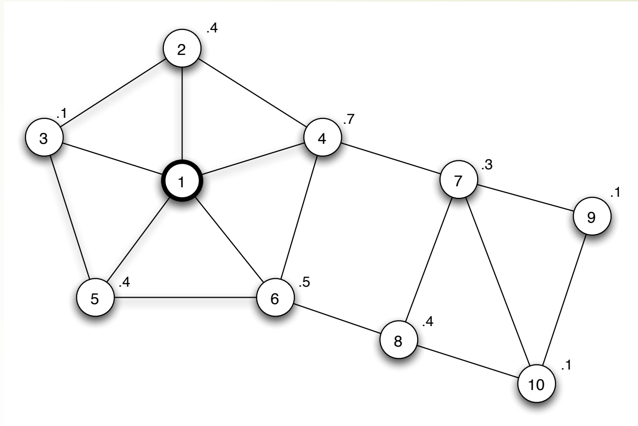
Nodi eterogenei

- Il modello di diffusione considerato fino ad ora è un modello uniforme
  - tutti i nodi associano lo stesso beneficio reciproco nell'adottare A o B
  - che è, rispettivamente, a o b
- Tuttavia, questo modello è poco realistico: ciascun individuo nella rete ha un proprio beneficio nell'adottare A o B
  - che può dipendere, ad esempio, dalle sue capacità di adattarsi al nuovo stato
- Allora, per ogni nodo u nella rete, a_u e b_u sono il beneficio che u ottiene nel relazionarsi, rispettivamente, con un nodo che adotta A o con un nodo che adotta B
- assumiamo, cioè, che il beneficio reciproco di adottare A o B da parte dei nodi adiacenti u e v sia quello illustrato in tabella

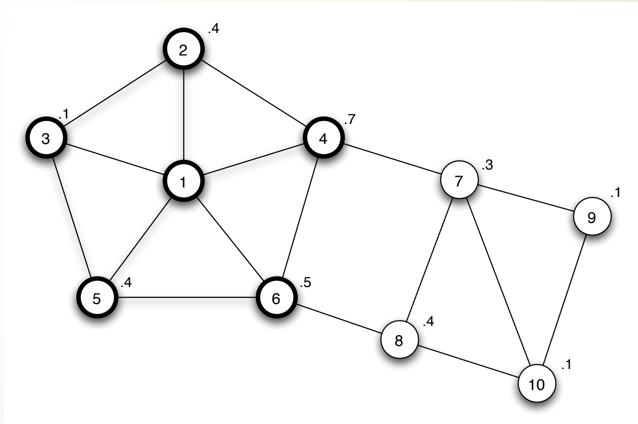
u \ v	A	B
A	a_u, a_v	0 , 0
B	0 , 0	b_u, b_v

Nodi eterogenei

- Per ogni nodo u nella rete, a_u e b_u sono il beneficio che u ottiene nel relazionarsi, rispettivamente, con un nodo che A o con un nodo che adotta B
- Allora, un nodo v ∈ V nello stato B passa allo stato A sulla base del valore $q_v = \frac{b_v}{a_v + b_v}$
- In figura, accanto a ogni nodo v è indicata la sua soglia di adesione q_v
- Osserviamo: anche se il nodo 1 è in posizione centrale, non riuscirebbe a portare nessuno in A se non fosse che $q_3 = 0,1$ è molto piccolo
- Allora, **non è sufficiente scegliere gli iniziatori in base alla loro centralità nella rete**
- occorre anche considerare ***la loro possibilità di avere accesso a nodi facilmente influenzabili***



(a) *One node is the initial adopter*



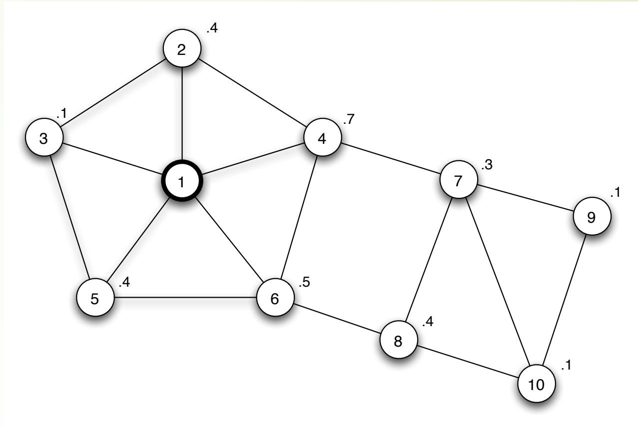
(b) *The process ends after four steps*

Nodi eterogenei

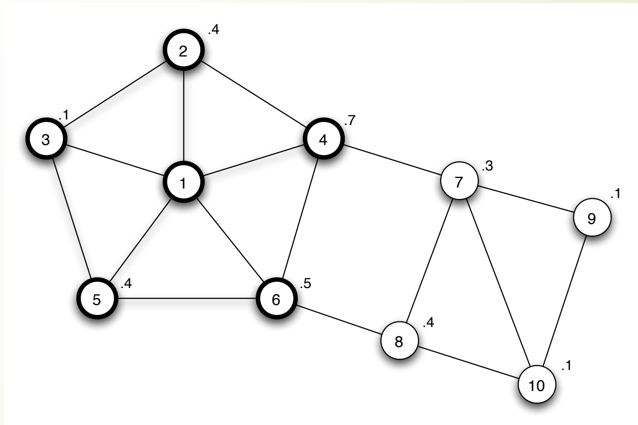
- **Non è sufficiente scegliere gli iniziatori in base alla loro centralità nella rete**
- occorre anche considerare ***la loro possibilità di avere accesso a nodi facilmente influenzabili***
- Così, nel caso nodi eterogenei, la struttura che impedisce la generazione di una cascata completa è il blocking cluster
- $V' \subseteq V$ è un **blocking cluster** se, per ogni $v \in V'$,

$$\frac{|N(v) \cap V'|}{|N(v)|} \geq 1 - q_v$$

- Infatti:
- **Teorema**. sia $G=(V,E)$ un grafo. Nel modello a nodi eterogenei, l'insieme di iniziatori $V_0 \subseteq V$ non genera una cascata completa se e solo se $G - V_0$ contiene un blocking cluster
  - dimostrazione per esercizio!



(a) *One node is the initial adopter*



(b) *The process ends after four steps*

Azione collettiva

- Vogliamo, ora, mostrare come modellare mediante processi di diffusione situazioni nelle quali è richiesto che un'azione abbia luogo *collettivamente*

- Supponiamo che si voglia organizzare una protesta contro un regime dittatoriale
  - e sanguinario!
- Ciascun individuo, ragionevolmente, decide di aderire alla protesta solo se sa con certezza che un numero sufficientemente elevato di individui aderirà alla protesta
  - altrimenti, a fronte del rischio di una repressione feroce non si avrebbe neanche la ragionevole speranza di riuscire a cambiare lo stato delle cose

- Poiché l'ambientazione è quella di una dittatura, possiamo ben pensare che la libertà di stampa sia ostacolata
  - e che, in generale, le comunicazioni siano rese difficoltose

- Ma perché i regimi totalitari sono, generalmente, così interessati a ostacolare le comunicazioni?!

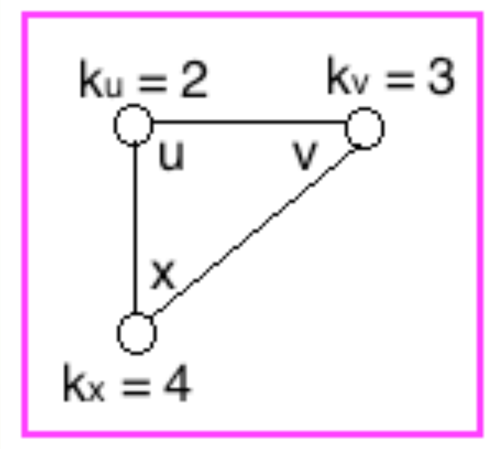
Azione collettiva

- MODELLO:
  - ogni nodo v sceglie una "soglia di confidenza" k_v: aderirà alla protesta solo se almeno k_v individui aderiranno alla protesta
  - ossia, se oltre a lui, aderiranno altri $k_v - 1$ individui
  - ma, poiché le comunicazioni circolano con difficoltà nella rete, le uniche informazioni che v può ottenere sono circa l'adesione o meno alla protesta da parte degli individui con i quali ha una relazione personale, ovvero, i suoi vicini nel grafo
  - e, da ciascun nodo u in N(v), v può sapere quale sia la soglia di adesione di u
    - e, assumendo che siano strong ties, v sa che i vicini gli comunicano la loro vera soglia di adesione: perché v si fida dei suoi amici!
  - ma non può sapere se u ha o meno dei vicini che non siano anche suoi vicini
  - e non può neanche sapere se u aderirà alla protesta
    - sono informazioni pericolose, e ognuno le tiene per sé!
  - in base a quel che vede, v può solo provare a dedurre cosa faranno i suoi vicini

- Vediamo ora, con qualche esempio, in che modo i nodi arrivano a prendere una decisione

Azione collettiva

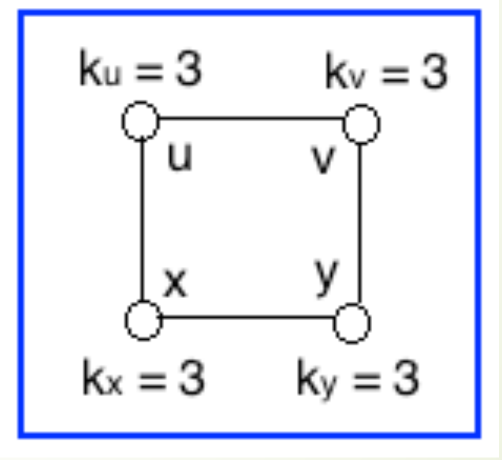
- Nella figura nel riquadro rosa:
  - x non aderisce – non ha abbastanza vicini!
  - v ha bisogno di due vicini che aderiscano: ma vede che x vuole che almeno 3 vicini aderiscano per aderire a sua volta e, poiché v vede di x i soli vicini che hanno in comune (il nodo u), non può sapere se x aderirà o meno e, quindi, v non aderisce
  - ad u sarebbe sufficiente che uno solo dei suoi vicini aderisse. Per lo stesso ragionamento fatto da v, u non può sapere se x aderirà o meno. Inoltre, u sa che v ha bisogno di almeno due vicini che aderiscano per aderire, ma non può sapere se v dispone di informazioni supplementari circa l'adesione di x: perciò, non può dedurre che v parteciperà. Di conseguenza, neanche u aderisce



Azione collettiva

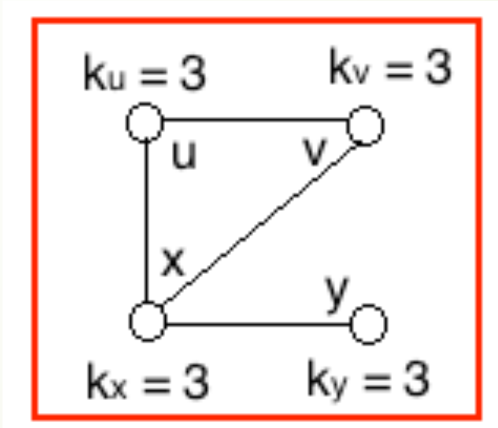
- Nella figura nel riquadro blu:
  - questo caso è un po' più complesso
  - u vede che $k_v = k_x = 3$ e capisce che loro tre (u, v e x) potrebbero aderire
  - ma u non vede y, non sa se v ha o meno altri vicini oltre sé stesso
  - e, quindi, non sa se v può dedurre che almeno due dei suoi vicini aderiranno
  - e poiché u ha bisogno di certezze, u non aderisce!

  - Poiché il grafo è perfettamente simmetrico, nessuno aderisce alla protesta
  - anche se, qualora avessero avuto accesso a informazioni complete, la protesta avrebbe avuto luogo!



Azione collettiva

- Nella figura nel riquadro rosso:
  - u, v, x si vedono l'un l'altro
  - così, u sa che v e x, per partecipare, hanno bisogno che altri due partecipino
  - ma u sa anche che anche v e x sanno esattamente le stesse cose che sa egli stesso
  - … siamo in una situazione "io so che tu sai che io so"…
  - e, poiché si fidano uno dell'altro,
  - partecipano tutti e tre!
    - Senza aver bisogno di conoscere altro della rete...
    - ossia, indipendentemente da y



Azione collettiva: conclusioni

- In assenza di comunicazioni adeguate che abbiano luogo nella rete, l'azione collettiva si verifica difficilmente
  - ecco perché i regimi dittatoriali tendono a favorire *l'ignoranza pluralistica*
  - che permette di concludere erroneamente che pochi individui abbiano una certa opinione
  - come accadeva nell'esempio nel riquadro blu

- Invece, l'esempio nel riquadro rosso permette di osservare l'importanza di disporre di <u>una base di conoscenza comune</u>
  - i giornali, la pubblicità, ecc. , non solo diffondono informazioni
  - ma permettono che tutti siano coscienti del fatto che un certo messaggio è conosciuto da tutti
  - innescando il meccanismo del "io so che tu sai che io so"...

Diffusione in presenza di compatibilità

- Fino ad ora abbiamo considerato i due stati A e B mutuamente esclusivi
  - ciascun nodo o è nello stato A o è nello stato B
  - non può trovarsi, simultaneamente, nello stato A e nello stato B
- Tuttavia, non è infrequente che due stati possano coesistere
  - ad esempio, se installo un nuovo sistema operativo sul mio computer, posso comunque avere un altro computer con il vecchio sistema operativo
  - oppure, nelle regioni di confine la popolazione è tipicamente bilingue
  - e, analogamente, i nodi nelle regioni di confine fra due comunità possono adottare entrambi gli stati prevalenti in ciascuna delle due comunità
- D'ora in avanti, studieremo i processi di diffusione in presenza di compatibilità
  - quando un nodo può essere nello stato A, nello stato B o nello stato AB
- nel modello "nodi omogenei"
  - i benefici (e, come vedremo, i costi) del trovarsi in un certo stato, dipendono soltanto dallo stato
  - sono gli stessi per tutti i nodi

Diffusione in presenza di compatibilità

- Naturalmente, un nodo adotta lo stato misto (AB) ogniqualvolta ne trae beneficio
  - se ho due sistemi operativi, A e B, non ho problemi a interfacciarmi sia con i miei amici che hanno A sia con i miei amici che hanno B
- Ma, allora, perché non adottare sempre lo stato misto?
  - Perché ha un costo, adottare sia A che B!
  - Ad esempio, devo avere due computer, o almeno devo usare una buona quantità di memoria sul mio (unico) computer per tenerci entrambi i sistemi
  - ma, anche, è faticoso ricordare i comandi di entrambi
- In ogni caso, mentre i benefici che otteniamo dall'adottare lo stato AB sono proporzionali al numero di vicini con i quali possiamo comunicare,
  - ossia, guadagniamo per ogni vicino che adotta A e per ogni vicino che adotta B
- il costo lo paghiamo una volta sola

Diffusione in presenza di compatibilità

- Sia (u,v) un arco della rete: il beneficio reciproco di adottare A , B o AB sia quello illustrato in tabella

u \ v	A	B	AB
A	a , a	0 , 0	a , a
B	0 , 0	b , b	b , b
AB	a , a	b , b	max { a, b }, max { a, b }

- Invece, per ogni nodo u, il costo per u di essere nello stato AB è c
- In definitiva,
  - se V_A, V_B e V_{AB} sono gli insiemi dei nodi che sono, rispettivamente, negli stati A, B e AB (con $V_A \cup V_B \cup V_{AB} = V$)
- il beneficio per un nodo u di essere nello stato AB è

$$\sum_{v \in V_A \cap N(u)} a + \sum_{v \in V_B \cap N(u)} b + \sum_{v \in V_{AB} \cap N(u)} \max\{a,b\} - c$$

Diffusione in presenza di compatibilità

- Assodato che il beneficio per un nodo u di essere nello stato AB è

$$\sum_{v \in V_A \cap N(u)} a + \sum_{v \in V_B \cap N(u)} b + \sum_{v \in V_{AB} \cap N(u)} \max\{a,b\} - c$$

- e che il beneficio per essere negli stati A e B, rispettivamente, è

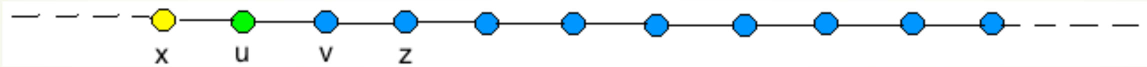
$$\sum_{v \in (V_A \cup V_{AB}) \cap N(u)} a \qquad \text{e} \qquad \sum_{v \in (V_B \cup V_{AB}) \cap N(u)} b$$

- ci proponiamo di studiare la capacità di cascata di una rete in presenza di compatibilità
- e lo faremo solo:
  - analizzando un esempio nel caso particolare in cui G è una catena infinita
  - descrivendo i risultati di uno studio qualitativo nel caso bidimensionale (G è una griglia infinita)
  - dimostrando che, nel caso unidimensionale (G è una catena infinita) l'andamento del processo di diffusione conferma quanto osservato dall'analisi qualitativa
  - indicheremo con $p_A(u)$, $p_B(u)$ e $p_{AB}(u)$ il beneficio di un nodo u nell'adottare, rispettivamente, A, B o AB

Diffusione in presenza di compatibilità

- Esempio: G è una catena infinita, a = 5, b = 3, c = 1
  - per simmetria, è sufficiente considerare una catena infinita solo a destra, il cui primo nodo è nello stato A (giallo) e tutti gli altri sono nello stato B (blu)

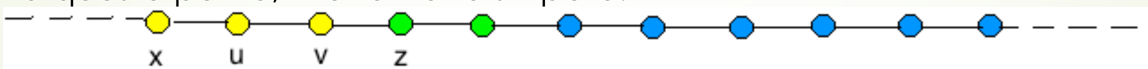
  - al primo passo, u adotta AB (verde): infatti $p_A(u) = 5$, $p_B(u) = 3$ e $p_{AB}(u) = 5+3 - 1 = 7$



  - al secondo passo v adotta AB: infatti $p_A(v) = 5$, $p_B(v) = 3+3 = 6$ e $p_{AB}(v) = 5+3 - 1 = 7$

  - al terzo passo: z adotta AB (per le stesse ragioni di v), ma ora a u conviene abbandonare AB e passare ad A perché $p_A(u) = 10$, $p_B(u) = 0$ e $p_{AB}(u) = 5+5 - 1 = 9$

  - a questo punto, il fenomeno si ripete:



  - ossia, dopo un periodo transitorio durante il quale un nodo adotta lo stato misto, esso passerà ad adottare definitivamente il nuovo stato
  - e quindi si genera una cascata completa nella quale il vecchio stato viene completamente soppiantato dal nuovo

Diffusione in presenza di compatibilità

- Ricordiamo che, nel caso di esclusività fra A e B, la soglia di adozione q è definita come **q =** $\frac{b}{a+b}$
- essa rappresenta la frazione minima dei vicini di un nodo che deve essere nello stato A per convincere quel nodo a passare anch'esso allo stato A
  - e tale frazione dipende dai benefici relativi che ha quel nodo nel trovarsi in uno dei due stati
- In effetti, nella definizione di q possiamo dividere numeratore e denominatore per b ottenendo

$$q = \frac{1}{\frac{a}{b}+1}$$

che evidenzia il ruolo giocato dal rapporto fra il "valore" di A e il "valore" di B nella decisione di un nodo di rimanere nello stato A o passare allo stato B

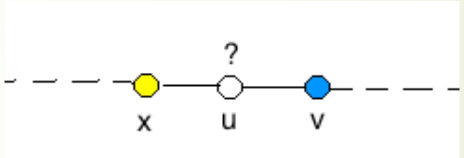
- Nel caso di esclusività fra A e B, abbiamo dimostrato che **non si può generare una cascata completa (in un grafo infinito) se q >** $\frac{1}{2}$
  - **ossia, se il "valore" di A non è almeno pari al "valore" di B**
- Cosa possiamo dire nel caso di compatibilità fra A e B?

Diffusione in presenza di compatibilità

- Nel caso di esclusività fra A e B, abbiamo dimostrato che **non si può generare una cascata completa (in un grafo infinito) se il "valore" di A non è almeno pari al "valore" di B**
- Cosa possiamo dire nel caso di compatibilità fra A e B?
- Intanto, osserviamo che l'operazione di dividere per b che abbiamo poc'anzi effettuato ha permesso di ridursi a studiare i processi di diffusione in funzione del solo parametro $\frac{a}{b}$ invece che dei due parametri a e b
  - e questo è equivalente a fissare b = 1 e studiare i processi di diffusione in funzione di a
- Analogamente, nel caso di compatibilità fra A e B, possiamo fissare b = 1 e studiare i processi di diffusione in funzione di a e c
- Uno studio qualitativo [Kleinberg et al., 2007] ha evidenziato uno "strano" comportamento:
  - lo stato A si impone quando a è molto grande rispetto a c – e questo è ovvio
  - invece, A fa fatica a imporsi quando c è molto grande rispetto ad a – e anche questo è ragionevole
  - infine, **A fa fatica a imporsi anche quando c non è né troppo grande né troppo piccolo rispetto ad a** – e questo è strano!

Diffusione in presenza di compatibilità

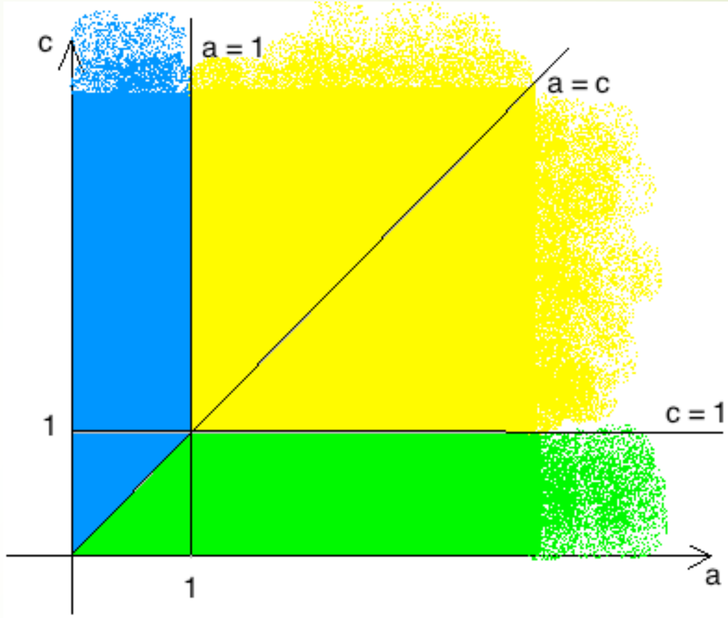
- Per capire le ragioni delle conclusioni dello studio di Kleinberg et al., 2007]
  - lo stato A si impone quando a è molto grande rispetto a mentre A fa fatica a imporsi sia quando c è molto grande rispetto ad a che **quando c non è né troppo grande né troppo piccolo rispetto ad a**
- torniamo a considerare la catena: G è una catena infinita con parametri a e c
- Se x è nello stato A (giallo) e v nello stato B (blu), al nodo u quale stato converrà adottare?



  - Poiché $p_A(u) = a$, $p_B(u) = 1$ e $p_{AB}(u) = a+1-c$
  - se $p_A(u) \geq p_B(u)$ e $p_A(u) \geq p_{AB}(u)$, u adotterà A
    - e questo accade quando $a \geq 1$ e $a \geq a+1-c$ – ossia, quando $a \geq 1$ e $c \geq 1$
  - se $p_B(u) > p_A(u)$ e $p_B u) > p_{AB}(u)$, u rimarrà in B
    - e questo accade quando $1 > a$ e $1 > a + 1 - c$ – ossia, quando $a < 1$ e $a < c$
  - se $p_{AB}(u) > p_A(u)$ e $p_{AB}(u) \geq p_B(u)$, u adotterà AB
    - e questo accade quando $a + 1 - c > a$ e $a + 1 - c \geq 1$
      – ossia, quando $c < 1$ e $a \geq c$
- Riassumiamo tutto ciò in un grafico…

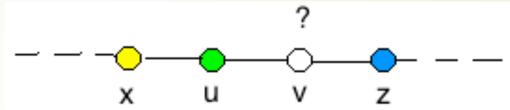
Diffusione in presenza di compatibilità

- Riassumiamo in un grafico nel piano ac
  - $a \geq 1$ e $c \geq 1$, u adotterà A
    regione gialla
  - se $a < 1$ e $a < c$, u rimarrà in B
    regione blu
  - se $c < 1$ e $a \geq c$, u adotterà AB
    regione verde
- A questo punto possiamo già trarre qualche conclusione
  - se u è rimasto nello stato B, allora la diffusione dello stato A è stata bloccata sul nascere: il processo di diffusione non ha avuto nemmeno inizio
  - se u è passato allo stato A, allora, al passo successivo il nodo v (adiacente a u) passerà allo stato A, e così via: si è innescato il processo di diffusione di A, che genererà una diffusione completa senza mai passare per lo stato misto AB.
  - Perciò, per coppie di parametri che cadono nelle regioni blu e gialla l'andamento del processo è chiaro
- Resta da studiare cosa accade quando i parametri cadono nella regione verde…

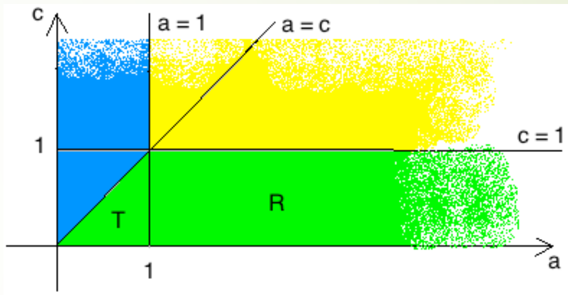


Diffusione in presenza di compatibilità

- quando i parametri cadono nella regione verde, ossia, $c < 1$ e $a \geq c$
  - u ha adottato AB e siamo nella situazione



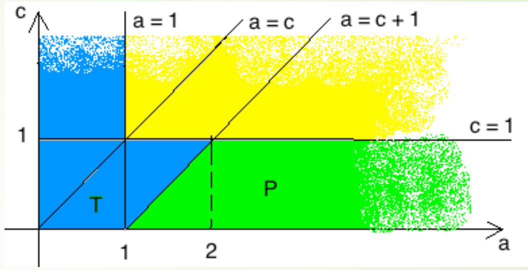
- Quale stato conviene adottare al nodo v?
  - Ora, $p_A(v) = a$, $p_B(v) = 2$ e $p_{AB}(v) = \max\{a,1\} + 1 - c$
    - e, dunque, **$p_{AB}(v) = 2 - c$ se $a < 1$**, ossia, (a,c) è nel triangolo T
    - mentre **$p_{AB}(v) = a+1 - c$ se $a > 1$**, ossia, (a,c) è nel rettangolo (infinito) R,



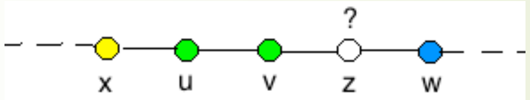
- Dunque:
  - se (a,c) è nel triangolo T: $a < 1$
    - quindi, $p_A(v) < p_B(v)$, e, inoltre $p_{AB}(v) < p_B(v)$, ossia, v adotta B
  - se (a,c) è nel rettangolo R, allora $a > 1$ e
    - **quando $a > 2$** allora $p_B(v) < p_A(v) < p_{AB}(v)$, ossia, **v adotta AB**
    - **quando $a < 2$** allora $p_B(v) > p_A(v)$; inoltre $p_B(v) > p_{AB}(v)$ quando $2 > a + 1 - c$
      - allora: **quando $a < c+1$ v adotta B**, **quando $a > c+1$ v adotta AB**

Diffusione in presenza di compatibilità

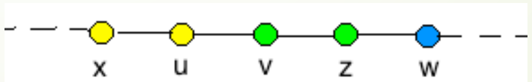
- Seconda serie di conclusioni: se (a,c) ∈ R
  - al passo 2, v non passa allo stato A in nessun caso
  - se v al passo 2 rimane nello stato B, allora la diffusione dello stato A si blocca al passo 2
  - perciò, le coppie (a,c) ∈ R che possono dar luogo a una cascata completa sono quelle nella regione P



- Quando (a,c) ∈ P, al passo 2, la situazione è questa

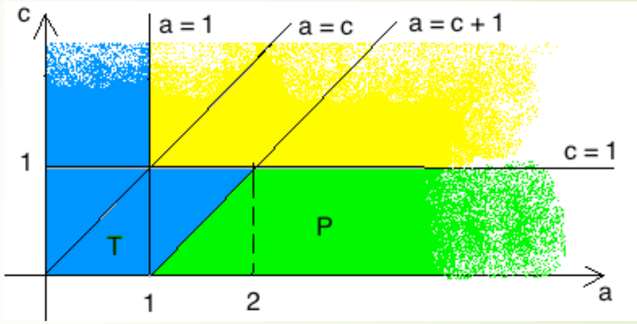


- Poiché (a,c) ∈ P, al passo 3 il nodo z adotta AB
  - in seguito alle stesse considerazioni che ci hanno portato a concludere che, al passo 2 v adotta AB
- E al passo 3 il nodo u rivede la sua posizione:
  - poiché (a,c) ∈ P , allora $a > 1$
  - quindi, $p_{AB}(u) = a + \max\{a,1\} - c = 2a - c < 2a = p_A(u)$,
  - ossia, u non ha più interesse a continuare ad adottare anche lo stato B
  - e, quindi, u adotta lo stato A



Diffusione in presenza di compatibilità

- Conclusioni finali.
  - **Se (a,c) è contenuto nella regione azzurra**
    - ossia, $a < 1$ oppure $a > 1$ e $c < 1$ e $c > a - 1$
  - **lo stato A non si diffonde**
    - la sua diffusione si blocca immediatamente o al passo 2



  - **Se (a,c) è contenuto nella regione gialla**
    - ossia, $a > 1$ e $c > 1$
  - **lo stato A si diffonde immediatamente, senza che alcun nodo passi nello stato AB**
  - **Se (a,c) è contenuto nella zona verde**
    - ossia, $a > 1$ e $c < 1$ e $c < a - 1$
  - **dopo una fase transitoria, in cui i nodi adottano lo stato AB, prende piede definitivamente lo stato A**
- NB: per semplicità, non abbiamo analizzato le uguaglianze (a=1, c=1, c=a-1)

Diffusione in presenza di compatibilità

- Riassumendo:
  - lo stato A non si diffonde se A è peggiore di B, oppure se A è migliore di B ma il costo di AB è elevato quando rapportato al beneficio di poter usare A
    - ossia, se $a < 1$ oppure $a > 1$ e $c > 1$ e $c > a - 1$
  - Lo stato A si diffonde immediatamente, senza che alcun nodo passi nello stato AB se A è migliore di B e, inoltre, il costo di AB è elevato
    - ossia, $a > 1$ e $c > 1$
  - Dopo una fase transitoria, in cui i nodi adottano lo stato AB, prende piede definitivamente lo stato A se B è peggiore di A e, inoltre, il costo di AB è basso sia in assoluto che in relazione al beneficio di poter usare A
    - ossia, $a < 1$ e $c < 1$ e $c < a - 1$
- E questo conferma il risultato dello studio qualitativo in [Kleinberg et al., 2007]