■

5 Teoremi Limite

Theorem 58 *(Legge dei grandi numeri per sequenze uniformemente integrabili). Sia $\{X_n\}$ una sequenza di variabili aleatorie con valor medio nullo, indipendenti e uniformemente integrabili. Allora $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i \to_1 0$.*

Proof. Notiamo innanzitutto che non abbiamo ipotizzato che queste variabili abbiano momento secondo finito e limitato, altrimenti il risultato seguirebbe banalmente dalla legge dei grandi numeri di Chebyshev. Le ipotesi del Lemma sono verificate, ad esempio, se le variabili sono identicamente distribuite. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} X_n &= X_n I_{\{|X_N| \leq M\}} + X_n I_{\{|X_N|>M\}} \\ &= X_n' + X_n'' = X_n' - E[X_n'] + X_n'' - E[X_n''] \ , \end{aligned}$$

perché $E[X_n'] + E[X_n''] = 0$. Abbiamo

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{X_i' - E[X_i']\} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{X_i'' - E[X_i'']\} \ .$$

La prima sequenza aleatoria è la media aritmetica di variabili aleatore con valor medio nullo e varianza uniformemente limitata da M^2, quindi va a zero in media quadratica per la legge dei grandi numeri di Chebyshev. Per la seconda parte possiamo scrivere

$$\begin{aligned} E[|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{X_i'' - E[X_i'']\}|] &\leq 2 \sup_{i=1,2,3,\ldots} E[|X_n I_{\{|X_N|>M\}}|] \\ &\leq \varepsilon \ , \end{aligned}$$

per l'uniforme integrabilità, scegliendo M in modo appropriato. ■

Theorem 59 *(Legge forte dei grandi numeri - Borel) Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con valor medio $\mathbb{E}[X] = \mu$ e momento quarto finito $\mathbb{E}\left[X^4\right] = \mu_4$. Allora*

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to_{c.c.} \mu \ .$$

Proof. Senza perdita di generalità consideriamo $\mu = 0$; infatti

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to_{c.c.} \mu\right\} \Longleftrightarrow \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i' \to_{c.c.} 0 \ , \ X_i' := X_i - \mu\right\} \ .$$

Notiamo innanzitutto che

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^4\right] = O(\frac{1}{n^2}) \ ;$$

infatti

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\overline{X}_n^4\right] &= \frac{1}{n^4} \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4}\right] \\
&= \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[X_i^4\right] + \frac{3}{n^4}\sum_{\substack{i_1,i_2=1 \\ i_i \neq i_2}}^{n} \mathbb{E}\left[X_{i_1}^2\right]\mathbb{E}\left[X_{i_2}^2\right] \\
&= \frac{n}{n^4}\mathbb{E}\left[X_1^4\right] + \frac{3n(n-1)}{n^4}\mathbb{E}\left[X_1^2\right]\mathbb{E}\left[X_2^2\right] \\
&= O(n^2) \ .
\end{aligned}$$

La prima uguaglianza è dovuta al fatto che $\mathbb{E}\left[X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4}\right] = 0$ se c'è almeno un indice diverso da tutti gli altri; basta quindi focalizzarsi sul caso in cui gli indici siano tutti uguali, oppure uguali a coppie (diverse tra loro). Ci sono n termini del primo tipo, $3n(n-1)$ del secondo. A questo punto, utilizzando la disuguaglianza di Markov, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr\left\{\overline{X}_n > \varepsilon\right\} \leq Const \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\varepsilon^4} < \infty \ ,$$

e la disuguaglianza è dimostrata. ■

Remark 60 *E' interessante notare come questa legge forte dei grandi numeri sia stata enunciata per la prima volta all'inizio del novecento da Emile Borel all'interno di problemi di Teoria dei Numeri. In particolare, Borel la utilizzo per dimostrare che i numeri tra* $[0,1]$*, espressi in forma binaria, hanno quasi sempre una proporzione uguale di* 0 *e di* 1*. Questo esclude automaticamente tutti i numeri con espansione finita o periodica, cioè i razionali; ma in realtà dimostra che hanno misura nulla anche numeri di classi più ampie. Paradossalmente, per pochissimi numeri conosciuti è stato effettivamente dimostrato che hanno questa struttura "normale".*