Grafi Geometrici Aleatori e Reti Wireless
Delimitazione Inferiore

Delimitazione inferiore

Teorema (Delimitazione inferiore). Per ogni costante $c > 0$,

$$r(n) = \sqrt{\frac{\ln n + c}{n\pi}} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(G(n, r(n)) \text{ non connesso}\right) > 0$$

Per semplicità, nel corso della dimostrazione denoteremo con G il grafo $G(n, r(n))$ e con r il valore $r(n)$.

Osservazione:
Se nella prova della delimitazione superiore, ossia che

$$r^*(n) \leq \gamma_1 \left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right),$$

abbiamo dovuto cercare una *maggiorazione* della probabilità che G è non connesso (ossia, abbiamo dovuto dimostrare che

$$P(G \text{ non connesso}) \leq \text{qualcosa}),$$

ora, per dimostrare che

$$r^*(n) \geq \sqrt{\frac{\ln n + c}{n\pi}},$$

dobbiamo trovare una *minorazione* della probabilità che G è non connesso (ossia, dobbiamo dimostrare che

$$P(G \text{ non connesso}) \geq \text{qualcosa}),$$

Minorazione della probabilità di non connessione

Dobbiamo trovare una *minorazione* di $P(G$ non connesso).
Per cominciare, introduciamo i seguenti eventi:

- $\varepsilon_{\geq 1}$ = G contiene almeno un nodo isolato
- $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_h}$ = tutti i nodi $i_1, i_2, \ldots, i_h$ sono isolati in G, con $i_1, i_2, \ldots, i_h \in [n]$
- $\varepsilon_{i!}$ = i è l'unico nodo isolato in G, con $i \in [n]$

Ed esprimiamo in loro funzione la probabilità che G sia non connesso:

- ovviamente, se G contiene almeno un nodo isolato allora G è non connesso: dunque, $P(G\ \textbf{non connesso}) \geq P(\varepsilon_{\geq 1})$
- poi, se accade che 1 è l'unico nodo isolato in G, oppure 2 è l'unico nodo isolato in G, oppure ..., oppure n è l'unico nodo isolato in G, allora accade anche che G contiene almeno un nodo isolato (ovviamente!). Dunque:
  $P(\varepsilon_{\geq 1}) \geq P\left(\bigcup_{i\in[n]} \varepsilon_{i!}\right)$
- e poiché $\varepsilon_{1!}, \varepsilon_{2!}, \dots, \varepsilon_{n!}$ sono eventi disgiunti:
  $P\left(\bigcup_{i\in[n]} \varepsilon_{i!}\right) = \sum_{i\in[n]} P(\varepsilon_{i!})$

In conclusione:
$P(G\ \textbf{non connesso}) \geq \sum_{i\in[n]} P(\varepsilon_{i!})$

Minorazione della probabilità

$$P(G\,\text{non connesso}) \geq \sum_{i\in[n]} P(\varepsilon_{i!})$$

Non è però semplice calcolare direttamente $P(\varepsilon_{i!})$: allora, lavoriamo per minorarla con espressioni che sappiamo calcolare.

A questo scopo, osserviamo che:

- i è l'unico nodo isolato in G se e solo se
  - i è un nodo isolato in G e, inoltre
  - comunque scegliamo un altro nodo j, i e j non sono entrambi isolati in G
- dunque, $\varepsilon_{i!} = \varepsilon_i \cap \bigcap_{j\in[n]-\{i\}} \varepsilon_{ij}^C = \varepsilon_i - \bigcup_{j\in[n]-\{i\}} \varepsilon_{ij}$

da cui:

$$P(\varepsilon_{i!}) = P\left(\varepsilon_i - \bigcup_{j\in[n]-\{i\}} \varepsilon_{ij}\right) \geq P(\varepsilon_i) - P\left(\bigcup_{j\in[n]-\{i\}} \varepsilon_{ij}\right) \geq P(\varepsilon_i) - \sum_{j\in[n]-\{i\}} P(\varepsilon_{ij})$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dallo Union Bound.

Strategia per la minorazione

$$P(G\,\text{non connesso}) \geq \sum_{i\in[n]} P(\varepsilon_{i!})$$

e

$$P(\varepsilon_{i!}) \geq P(\varepsilon_i) - \sum_{j\in[n]-\{i\}} P(\varepsilon_{ij})$$

Non ci resta che trovare

una minorazione per $P(\varepsilon_i)$
e
una maggiorazione per $P(\varepsilon_{ij})$

Notazione geometrica

Prima di procedere, indichiamo:

- per un punto $t \in Q$, $C_r(t)$ è il cerchio di centro t e raggio r;
- per $i \in [n]$, $t_i \in Q$ è il punto del quadrato nel quale è posizionato il nodo i.

Minorizzazione $P(\varepsilon_i)$

Si verifica l'evento ε_i se e solo se, una volta fissato t_i, nessun nodo $j \neq i$ è posizionato in $C_r(t_i)$.

- Fissato t_i e fissato $j \neq i$,

$$P(t_j \notin C_r(t_i)) = \frac{\text{area di } (Q - C_r(t_i))}{\text{area di } Q} \geq 1 - \pi r^2$$

- (Maggiore o uguale perché $C_r(t_i)$ potrebbe non essere completamente contenuto in Q se t_i è vicino al bordo di Q)
- Allora, fissato t_i,

$$P(\forall j \neq i : t_j \notin C_r(t_i)) \geq (1 - \pi r^2)^{n-1}$$

- Il punto t_i, nel quale posizionare i, è scelto uniformemente a caso in Q, che è un insieme continuo
- La funzione di densità corrispondente alla scelta uniforme di un punto in Q è

$$f(t) = \frac{1}{\text{area di } Q} = 1$$

E quindi:

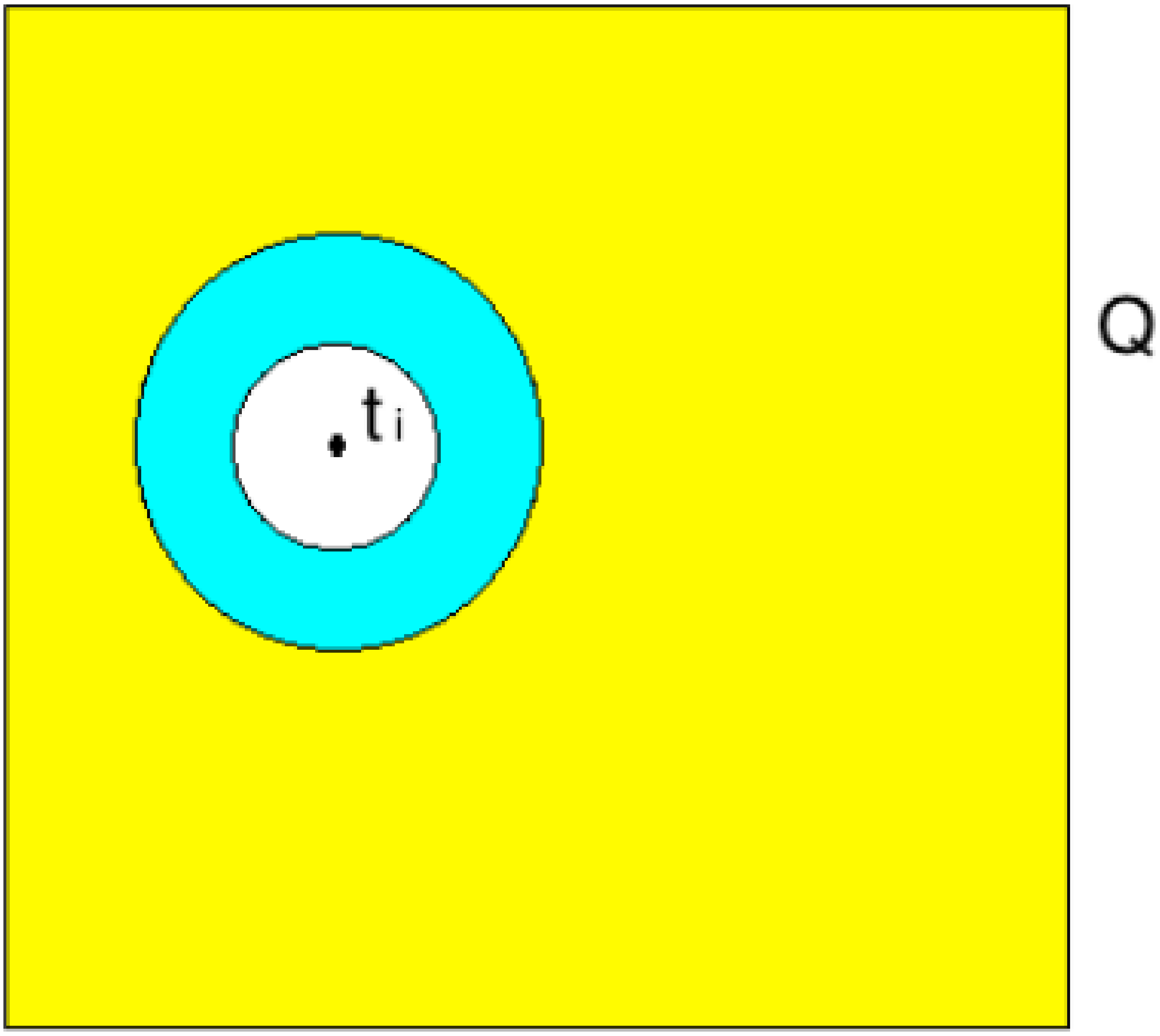
$$P(\varepsilon_i) \geq \int_{t_i \in Q} f(t_i)(1 - \pi r^2)^{n-1} dt_i = \int_{t_i \in Q} (1 - \pi r^2)^{n-1} dt_i = (1 - \pi r^2)^{n-1}$$

Maggioriamo $P(\varepsilon_{ij})$

Si verifica l'evento ε_{ij} se e solo se, una volta fissato t_i, j è posizionato in un nodo $t_j \notin C_r(t_i)$ e nessun nodo $h \in [n] - \{i, j\}$ è posizionato in $C_r(t_i) \cup C_r(t_j)$.

Possiamo esprimere questo evento come unione di due eventi mutuamente esclusivi (disgiunti):

- $\varepsilon_{ij}^1 = t_j \notin C_{2r}(t_i) \wedge \forall h \in [n] - \{i, j\} \, [t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j)]$
  ossia, t_j è nella regione gialla nella figura.
- $\varepsilon_{ij}^2 = t_j \in C_{2r}(t_i) - C_r(t_i) \wedge \forall h \in [n] - \{i, j\} \, [t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j)]$
  ossia, t_j è nell'anello azzurro nella figura.



Allora:

$$P(\varepsilon_{ij}) = P(\varepsilon_{ij}^1 \cup \varepsilon_{ij}^2) = P(\varepsilon_{ij}^1) + P(\varepsilon_{ij}^2)$$

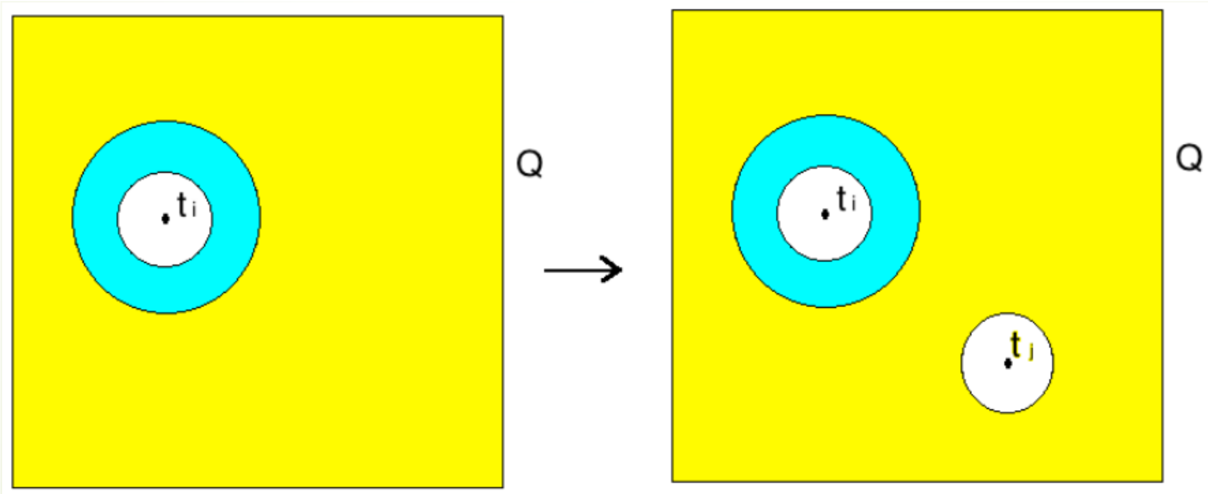
Quindi,

$$P(\varepsilon_{ij}) = P(\varepsilon_{ij}^1) + P(\varepsilon_{ij}^2)$$

Questa formulazione ci aiuterà con la maggiorazione.

Calcoliamo $P(\varepsilon_{ij}^1)$: fissiamo t_i, fissiamo t_j nella zona gialla e fissiamo $h \in [n] - \{i, j\}$.

- La probabilità di scegliere t_h nella regione rimanente (gialla + azzurra nella figura a destra) è pari al rapporto dell'area della regione con l'area del quadrato.
- Ossia, essa è $1 - 2\pi r^2$ *(almeno se t_i e t_j non sono troppo vicini al bordo del quadrato)*



Fissiamo t_i, fissiamo t_j nella zona gialla e fissiamo $h \in [n] - \{i, j\}$.

- La probabilità di scegliere t_h nella regione rimanente (rosa + azzurra nella figura a destra) è pari al rapporto dell'area della regione con l'area del quadrato.
- Ossia, essa è $1-2\pi r^2$ *(almeno se t_i e t_j non sono troppo vicini al bordo del quadrato)*

Calcoliamo $P(\varepsilon_{ij}^1)$ (probabilità congiunta)

Allora, la probabilità che, **per ogni** $h \in [n] - \{i, j\}$, $t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j)$ (con t_j scelto nella zona gialla) è:

$(1 - 2\pi r^2)^{n-2}$ (almeno se t_i e t_j non sono troppo vicini al bordo del quadrato)

- In realtà, complicando leggermente la prova, è possibile giungere agli stessi risultati considerando anche gli **effetti ai bordi**.
- Poiché le tecniche rimangono sostanzialmente invariate, per semplicità studiamo la versione semplificata che non considera gli effetti ai bordi.

Calcoliamo $P(\varepsilon_{ij}^1)$: integrazione

Allora, la probabilità che, per ogni $h \in [n] - \{i, j\}$, $t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j)$ (con t_j scelto nella zona gialla) è $(1 - 2\pi r^2)^{n-2}$
trascurando gli effetti ai bordi

Fissato t_i, la probabilità che, **scegliendo t_j nella zona gialla**, per ogni $h \in [n] - \{i, j\}$, $t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j)$ è

$$\int_{t_j \in Q - C_{2r}(t_i)} f(t_j)(1 - 2\pi r^2)^{n-2} dt_j$$

Infine,

$$P(\varepsilon_{ij}^1) = \int_{t_i \in Q} f(t_i) \left(\int_{t_j \in Q - C_{2r}(t_i)} f(t_j)(1 - 2\pi r^2)^{n-2} dt_j \right) dt_i$$

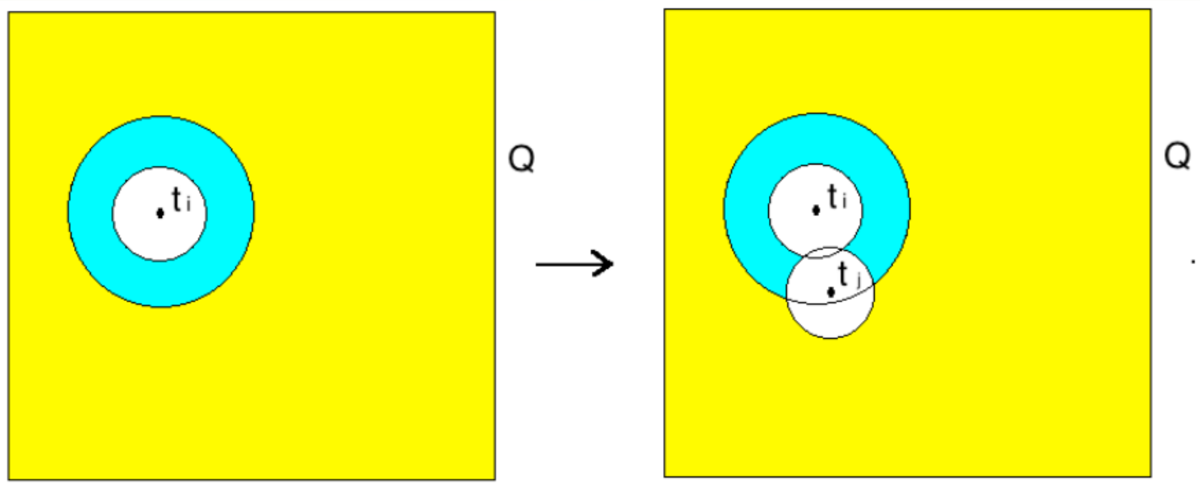
$$= \int_{t_i \in Q} \int_{t_j \in Q - C_{2r}(t_i)} (1 - 2\pi r^2)^{n-2} dt_j \, dt_i$$

$$= \int_{t_i \in Q} (1 - 4\pi r^2)(1 - 2\pi r^2)^{n-2} dt_i = (1 - 4\pi r^2)(1 - 2\pi r^2)^{n-2}$$

Maggioriamo $P(\varepsilon_{ij}^2)$

Fissiamo t_i, fissiamo t_j nella zona azzurra e fissiamo $h \in [n] - \{i, j\}$.

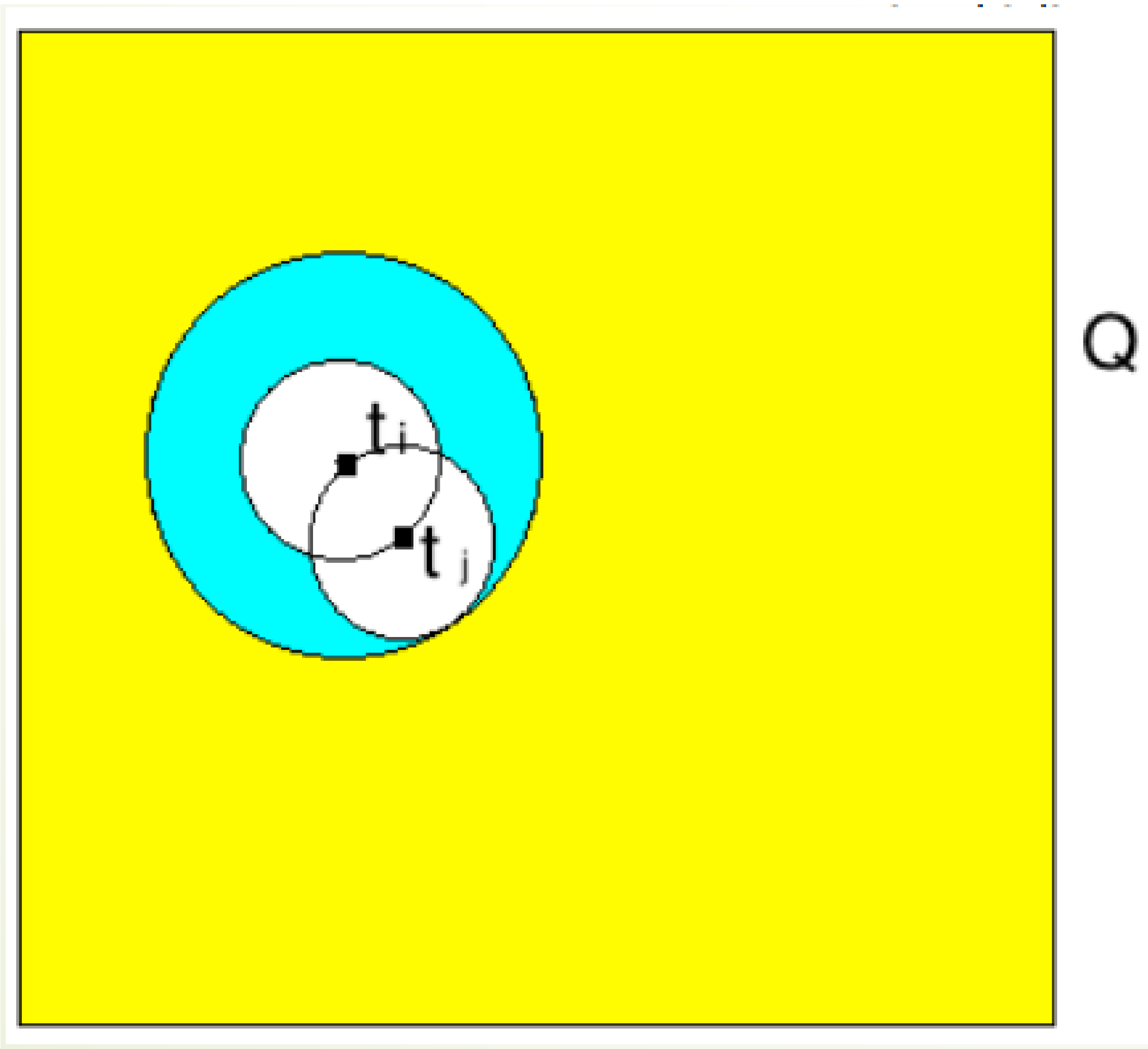
- La probabilità di scegliere t_h nella regione rimanente (gialla + azzurra nella figura a destra) è pari al rapporto dell'area della regione con l'area del quadrato.
- Questa volta, dipende dalla posizione di t_j nella zona azzurra.



Maggioriamo $P(\varepsilon_{ij}^2)$ (analisi geometrica)

- La probabilità di scegliere t_h nella regione rimanente (gialla + azzurra nella figura a destra) è massima quando è massima l'intersezione di $C_r(t_i)$ con $C_r(t_j)$, ossia quando t_j è sulla circonferenza che delimita $C_r(t_i)$.
- In questo caso

$$\text{area}\,(C_r(t_i) \cup C_r(t_j)) = 2\pi r^2 - \text{area}\,(C_r(t_i) \cap C_r(t_j))$$



Calcolo area $C_r(t_i) \cap C_r(t_j)$

- area$(C_r(t_i) \cap C_r(t_j)) = 2\cdot$ area colorata viola $= 2\cdot$[area colorata (rosa e viola) $-$ area t_jAB]
- t_jAt_i è un triangolo equilatero di lato r, allora la sua area è

$$\frac{1}{2} r \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

  area triangolo $t_jAB =$ area triangolo $t_jAt_i = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$

- la regione rosa e viola è un settore circolare di $C_r(t_j)$, e il suo angolo al centro At_jB è il doppio di At_jt_i che misura $\frac{\pi}{3}$ (perché t_jAt_i e t_jBt_i sono triangoli equilateri)
- allora, l'area della regione rosa e viola è

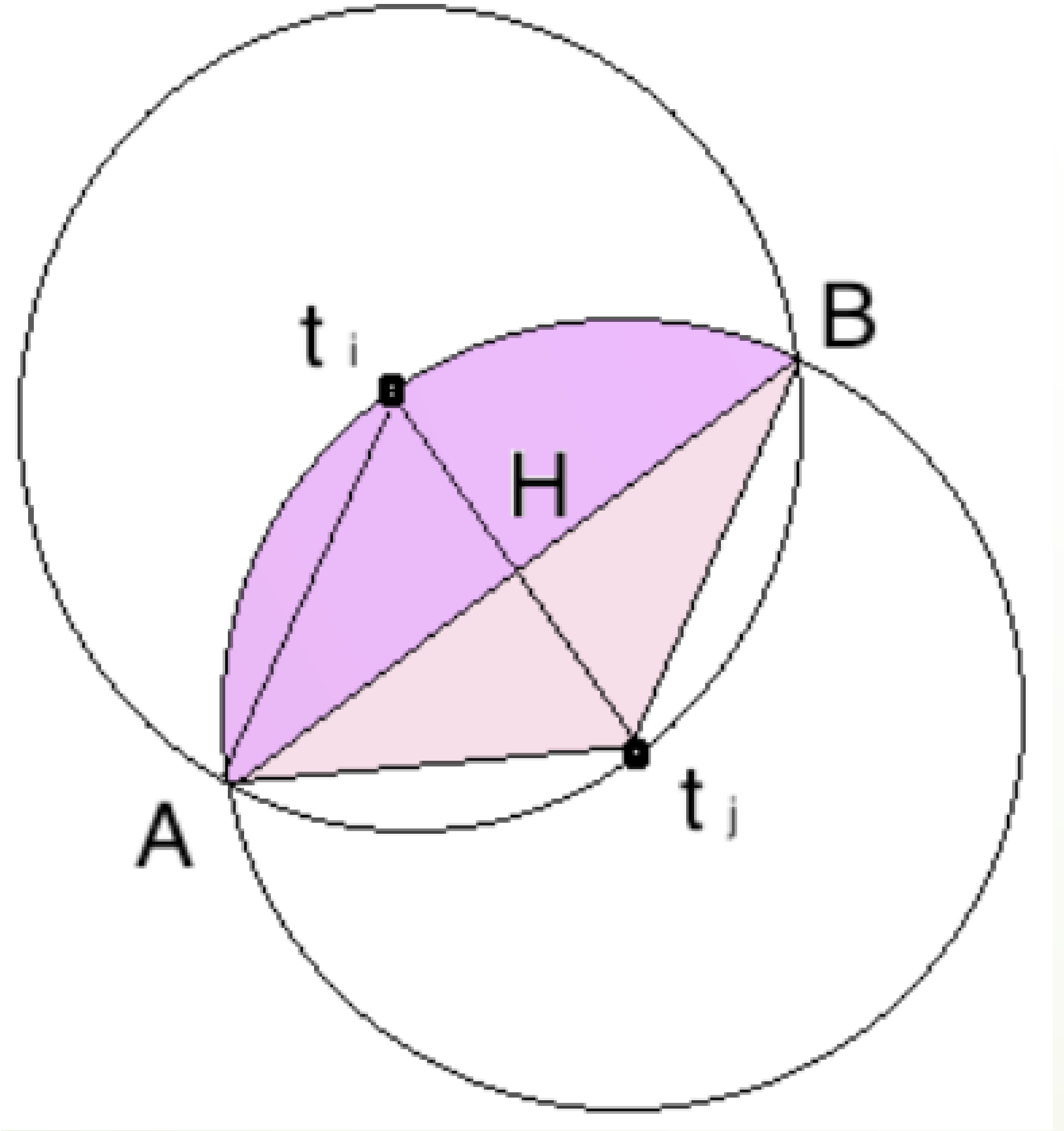
$$\frac{1}{2} r^2 \frac{2\pi}{3} = r^2 \frac{\pi}{3}$$

- allora, l'area della regione viola è

$$r^2 \frac{\pi}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

- allora,

$$\text{area}\left(C_r(t_i) \cap C_r(t_j)\right) = 2r^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

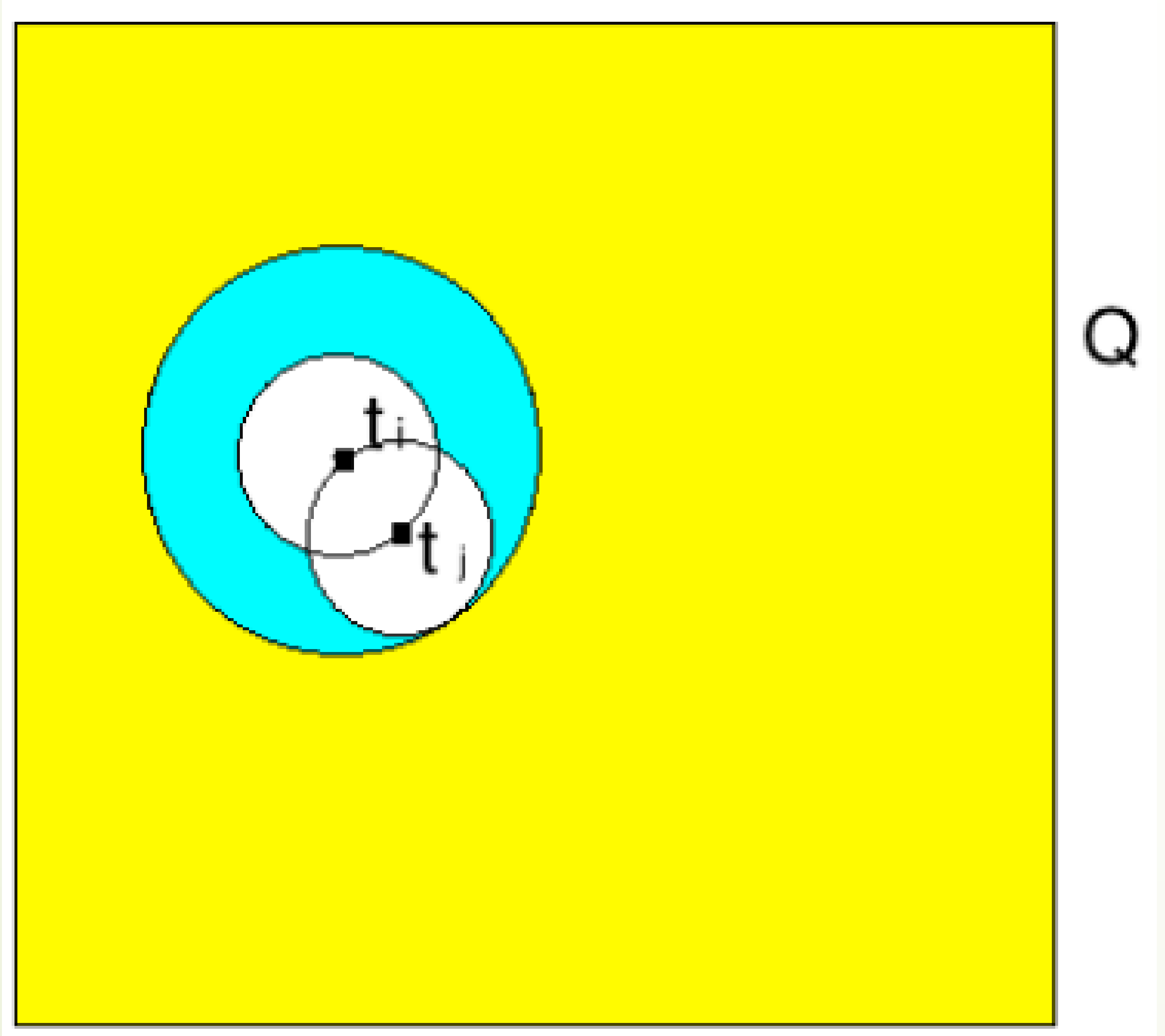


Maggiore $P(\varepsilon_{ij}^2)$: calcolo della probabilità massima

- La probabilità di scegliere t_h nella regione rimanente (gialla + azzurra) è massima quando è massima l'intersezione di $C_r(t_i)$ con $C_r(t_j)$, ossia quando t_j è sulla circonferenza che delimita $C_r(t_i)$.

- In questo caso:

$$\begin{aligned}\text{area}(C_r(t_i) \cup C_r(t_j)) &= 2\pi r^2 - \text{area}(C_r(t_i) \cap C_r(t_j)) \\ &= 2\pi r^2 - 2r^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{4\pi}{3}r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^2 \\ &= \pi r^2\left(\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right) > \frac{8}{5}\pi r^2\end{aligned}$$



- Ossia, la probabilità di scegliere t_h nella regione gialla+azzurra è:

$$1 - \text{area}(C_r(t_i) \cup C_r(t_j)) < 1 - \frac{8}{5}\pi r^2$$

- E quindi, la probabilità di scegliere tutti gli $n-2$ punti t_h nella regione gialla+azzurra è

$$< (1 - \frac{8}{5}\pi r^2)^{n-2}$$

- *sempre trascurando gli effetti ai bordi*

Maggiore $P(\varepsilon_{ij}^2)$: stima finale

- Allora, la probabilità che, per ogni $h \in [n] - \{i, j\}$, $t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j)$ è in questo caso (con t_j nella zona azzurra):

$$< (1 - \frac{8}{5}\pi r^2)^{n-2}$$

- *trascurando gli effetti ai bordi*

- Fissato t_i, la probabilità che, **scegliendo t_j nella zona azzurra**, per ogni $h \in [n] - \{i, j\}$, $t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j)$ è:

$$< \int_{t_j \in C_{2r}(t_i) - C_r(t_i)} f(t_j)(1 - \frac{8}{5}\pi r^2)^{n-2} dt_j$$

Infine,

$$\begin{aligned}
P(\varepsilon_{ij}^2) &< \int_{t_i \in Q} \int_{t_j \in C_{2r}(t_i) - C_r(t_i)} f(t_i) f(t_j)(1 - \frac{8}{5}\pi r^2)^{n-2} dt_j \, dt_i \\
&= \int_{t_i \in Q} \int_{t_j \in C_{2r}(t_i) - C_r(t_i)} (1 - \frac{8}{5}\pi r^2)^{n-2} dt_j \, dt_i \\
&= \int_{t_i \in Q} (4\pi r^2 - \pi r^2)(1 - \frac{8}{5}\pi r^2)^{n-2} dt_i \\
&= \int_{t_i \in Q} 3\pi r^2 (1 - \frac{8}{5}\pi r^2)^{n-2} dt_i = 3\pi r^2 (1 - \frac{8}{5}\pi r^2)^{n-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\varepsilon_{ij}) = P(\varepsilon_{ij}^1) + P(\varepsilon_{ij}^2) &< (1 - 4\pi r^2)(1 - 2\pi r^2)^{n-2} + 3\pi r^2 (1 - \frac{8}{5}\pi r^2)^{n-2} \\
&< (1 - 2\pi r^2)^{n-2} + 3\pi r^2 (1 - \frac{8}{5}\pi r^2)^{n-2}
\end{aligned}$$

Sostituiamo ora $r = \sqrt{\frac{\ln n + c}{n\pi}}$:

$$\begin{aligned}
P(\varepsilon_{ij}) &< \left(1 - 2\frac{\ln n + c}{n}\right)^{n-2} + 3\frac{\ln n + c}{n}\left(1 - \frac{8}{5}\frac{\ln n + c}{n}\right)^{n-2} \\
&< e^{-2\frac{\ln n + c}{n}(n-2)} + 3\frac{\ln n + c}{n} e^{-\frac{8}{5}\frac{\ln n + c}{n}(n-2)} \\
&= e^{-2\frac{\ln n + c}{n}(n-2)} + 3\frac{\ln n + c}{n^{3/5}} n^{-2/5} e^{-\frac{8}{5}\frac{\ln n + c}{n}(n-2)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(\varepsilon_{ij}) &< e^{-2\frac{\ln n+c}{n}(n-2)} + 3\frac{\ln n + c}{n^{3/5}} n^{-2/5} e^{-\frac{8}{5}\frac{\ln n+c}{n}(n-2)} \\
&= e^{-2\frac{n-2}{n}\ln n}\, e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} + 3\frac{\ln n + c}{n^{3/5}} e^{-\frac{2}{5}(n-2)\ln n} e^{-\frac{8}{5}\frac{c(n-2)}{n}} \\
&= e^{-2\frac{n-2}{n}\ln n}\, e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} + 3\frac{\ln n + c}{n^{3/5}} e^{-\frac{2}{5}\ln n^{n-2}}\, e^{-\frac{8}{5}\frac{c(n-2)}{n}} \\
&< e^{-2\frac{n-2}{n}\ln n} e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} + 3\frac{\ln n + c}{n^{3/5}} e^{-\frac{2}{5}(n-2)\ln n} e^{-\frac{8}{5}\frac{c(n-2)}{n}} \\
&= n^{-2\frac{n-2}{n}} e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} + 3\frac{\ln n + c}{n^{3/5}} n^{-\frac{2}{5}(n-2)} e^{-\frac{8}{5}\frac{c(n-2)}{n}} \\
&= n^{-2\frac{n-2}{n}} e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} \left[1 + 3\frac{\ln n + c}{n^{3/5}} e^{\frac{2}{5}(n-2)\ln n - \frac{8}{5}\frac{c(n-2)}{n}}\right]
\end{aligned}
$$

Riassumiamo

$$
P(G \text{ non connesso}) \geq \sum_{i\in[n]} P(\varepsilon_{i!}) \geq \sum_{i\in[n]} \left[P(\varepsilon_i) - \sum_{j\in[n]-\{i\}} P(\varepsilon_{ij})\right]
$$

- $P(\varepsilon_i) \geq (1-\pi r^2)^{n-1}$
- $P(\varepsilon_{ij}) < n^{-2\frac{n-2}{n}} e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} \left[1 + 3\frac{\ln n + c}{n^{3/5}} e^{\frac{2}{5}c(n-2)/n}\right]$

Quindi,

$$
\boxed{P(G \text{ non connesso}) > n(1-\pi r^2)^{n-1} - n(n-1)n^{-2\frac{n-2}{n}} e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} \left[1 + 3\frac{\ln n + c}{n^{3/5}} e^{\frac{2}{5}c(n-2)/n}\right]}
$$

Osserviamo che

$$
\lim_{n\to\infty} n(n-1)n^{-2\frac{n-2}{n}} e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} \left[1 + 3\frac{\ln n + c}{n^{3/5}} e^{\frac{2}{5}c(n-2)/n}\right] = e^{-2c}
$$

Infatti, informalmente:

$$
\lim_{n\to\infty} n(n-1)n^{-2\frac{n-2}{n}} = 1
$$

$$
\lim_{n\to\infty} e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} = e^{-2c}
$$

$$
\lim_{n\to\infty} 3\frac{\ln n + c}{n^{3/5}} e^{\frac{2}{5}c(n-2)/n} = 0
$$

$$
P(G \text{ non connesso}) > n(1-\pi r^2)^{n-1} - n(n-1)n^{-2\frac{n-2}{n}} e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} \left[1 + 3\frac{\ln n + c}{n^{3/5}} e^{\frac{2}{5}c(n-2)/n}\right]
$$

$$
\text{e} \quad \lim_{n\to\infty} n(n-1)n^{-2\frac{n-2}{n}} e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} \left[1 + 3\frac{\ln n + c}{n^{3/5}} e^{\frac{2}{5}c(n-2)/n}\right] = e^{-2c}
$$

- Ossia: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $n \geq n_\varepsilon$:

$$n(n-1)n^{-2\frac{n-2}{n}}e^{-2\frac{c(n-2)}{n}}\left[1+3\frac{\ln n + c}{n^{3/5}}e^{\frac{2}{5}c(n-2)/n}\right] < (1+\varepsilon)e^{-2c}$$

- Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $n \geq n_\varepsilon$:

$$\boxed{P(G\,\text{non connesso}) > n(1-\pi r^2)^{n-1} - (1+\varepsilon)e^{-2c}}$$

Allora, per dimostrare che $\lim\limits_{n\to\infty} P(G\,\text{non connesso}) > 0$ è sufficiente dimostrare che, da un certo n in poi,

$$n(1-\pi r^2)^{n-1} - (1+\varepsilon)e^{-2c} > 0$$

Dimostriamo che, da un certo n in poi,

$$n(1-\pi r^2)^{n-1} > (1+\varepsilon)e^{-2c}$$

Calcoliamo il logaritmo del membro sinistro:

$$\ln\left[n(1-\pi r^2)^{n-1}\right] = \ln n + \ln(1-\pi r^2)^{n-1} = \ln n + (n-1)\ln(1-\pi r^2)$$

Ricordiamo che, per $x < 1$ (logaritmo Taylor),

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$$

Da cui:

$$\ln\left[n(1-\pi r^2)^{n-1}\right] = \ln n - (n-1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\pi r^2)^k}{k}$$

Poiché $r = \sqrt{\frac{\ln n + c}{n\pi}}$, ossia $\pi r^2 = \frac{\ln n + c}{n}$, allora

$$\ln\left[n(1-\pi r^2)^{n-1}\right] = \ln n - (n-1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\ln n + c)^k}{kn^k}$$

A questo punto poniamo

$$\delta(n) = \sum_{k=3}^{\infty}\frac{(\ln n + c)^k}{kn^k}$$

così che:

$$\ln n(1-\pi r^2)^{n-1} = \ln n - (n-1)\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{(\ln n + c)^k}{kn^k} + \delta(n)\right]$$

ossia,

$$\ln\left[n(1-\pi r^2)^{n-1}\right] = \ln n - (n-1)\left[\frac{\ln n + c}{n} + \frac{(\ln n + c)^2}{2n^2} + \delta(n)\right]$$

A questo punto, non ci resta che maggiorare $\delta(n)$.

P(G non connesso) $> n(1-\pi r^2)^{n-1} - (1+\varepsilon)e^{-2c}$ per ogni $n \geq n_\varepsilon$

Stiamo dimostrando che, da un certo n in poi,

$$n(1-\pi r^2)^{n-1}-(1+\varepsilon)e^{-2c}>0$$

e

$$\ln\left[n(1-\pi r^2)^{n-1}\right]=\ln n-(n-1)\left[\frac{\ln n+c}{n}+\frac{(\ln n+c)^2}{2n^2}+\delta(n)\right]$$

a questo punto, non ci resta che maggiorare $\delta(n)$:

$$\delta(n)=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(\ln n+c)^k}{kn^k}\le\frac{1}{3}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(\ln n+c)^k}{n^k}\le\frac{1}{3}\int_2^{\infty}\left(\frac{\ln n+c}{n}\right)^x dx$$

$$=\lim_{h\to\infty}\frac{1}{3}\int_2^h e^{x\ln\left(\frac{\ln n+c}{n}\right)}dx=\lim_{h\to\infty}\frac{1}{3\ln\left(\frac{n}{\ln n+c}\right)}\left[\left(\frac{\ln n+c}{n}\right)^x\right]_2^h$$

$$=-\frac{1}{3\ln\left(\frac{n}{\ln n+c}\right)}\frac{(\ln n+c)^2}{n^2}$$

e poiché $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\left(\frac{n}{\ln n+c}\right)}=0$, allora $\frac{1}{\ln\left(\frac{n}{\ln n+c}\right)}<1$ per n sufficientemente grande

in conclusione,

$$\delta(n)<\frac{1}{3}\frac{(\ln n+c)^2}{n^2}$$

Riscriviamo i termini:

$$\ln\left[n(1-\pi r^2)^{n-1}\right]=\ln n-(n-1)\left[\frac{\ln n+c}{n}+\frac{(\ln n+c)^2}{2n^2}+\delta(n)\right]$$

$$\text{e } \delta(n)<\frac{1}{3}\frac{(\ln n+c)^2}{n^2}$$

allora

$$\ln\left[n(1-\pi r^2)^{n-1}\right]>\ln n-(n-1)\left[\frac{\ln n+c}{n}+\frac{(\ln n+c)^2}{2n^2}+\frac{1}{3}\frac{(\ln n+c)^2}{n^2}\right]$$

$$=\ln n-(n-1)\left[\frac{\ln n+c}{n}+\frac{5(\ln n+c)^2}{6n^2}\right]$$

$$=\ln n-\frac{n-1}{n}(\ln n+c)-\frac{5(n-1)(\ln n+c)^2}{6n^2}$$

$$>\ln n-(\ln n+c)-\frac{5(n-1)(\ln n+c)^2}{6n^2}$$

$$=-c-\frac{5(n-1)(\ln n+c)^2}{6n^2}$$

Chiusura Dimostrazione

P(G non connesso) $> n(1-\pi r^2)^{n-1} - (1+\varepsilon)e^{-2c}$
Stiamo dimostrando che, da un certo n in poi, $n(1-\pi r^2)^{n-1} - (1+\varepsilon)e^{-2c} > 0$

$$\ln\left[n(1-\pi r^2)^{n-1}\right] > -c - \frac{5(n-1)(\ln n + c)^2}{6n^2}$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5(n-1)(\ln n + c)^2}{6n^2} = 0$$

allora per ogni $\omega > 0$ esiste $n_\omega \geq n_\varepsilon$ tale che per ogni $n \geq n_\omega$:

$$\frac{5(n-1)(\ln n + c)^2}{6n^2} < \omega$$

allora, per n sufficientemente grande,

$$\ln\left[n(1-\pi r^2)^{n-1}\right] > -c - \omega$$

e dunque

$$n(1-\pi r^2)^{n-1} > e^{-c-\omega}$$

Scegliamo $\omega < c - \ln(1+\varepsilon)$, allora

$$n(1-\pi r^2)^{n-1} > e^{-c-\omega} > e^{-2c}e^{\ln(1+\varepsilon)} = (1+\varepsilon)e^{-2c}$$

cioè, per n sufficientemente grande

P(G non connesso) $> n(1-\pi r^2)^{n-1} - (1+\varepsilon)e^{-2c} > (1+\varepsilon)e^{-2c} - (1+\varepsilon)e^{-2c} = 0$

QED