# Sistemi di voto

# Reti e informazione

- Il materiale descritto in queste lezioni costituisce il Capitolo 23 del testo.
- In questa serie di lezioni, studiamo in che modo, e con quali esiti, sintetizzare le informazioni in possesso dei singoli individui in una rete al fine di derivare una singola informazione cumulativa
  - che permetterà di prendere una decisione fra una serie di alternative fra le quali scegliere la "migliore"
  - o stilare una graduatoria
- Cominciano questo percorso dal punto in cui eravamo rimasti al termine dello studio dei fenomeni di herding

# La saggezza della folla

- Avevamo concluso la trattazione del fenomeno dell'herding osservando che una cascata imitativa può indurre decisioni sbagliate
  - ossia, non è sempre una buona idea imitare il comportamento della massa...

- Tuttavia, nel libro *The wisdom of crowd* (2004), James Surowiecki sostiene la tesi secondo la quale "il comportamento aggregato di un numero elevato di persone in possesso di informazione molto limitata può produrre risultati molto accurati"
  - l'assunzione alla base di questa affermazione è che gli individui, ciascuno in possesso di un'informazione privata, operano le loro scelte *indipendentemente* gli uni dagli altri – senza che nessuno conosca le scelte operate dagli altri
- Iniziamo la trattazione dei sistemi di voto analizzando proprio questo fenomeno
- ossia, studiando cosa accade quando un insieme di individui devono prendere una decisione di gruppo
  - ricevendo, ciascuno, un segnale privato
  - e prendendo decisioni individuali – senza, cioè osservare il comportamento degli altri individui

# Un nuovo modello di decision making

- Definiamo, ora, un modello di decision making individuale:
  - 1) ogni individuo deve prendere una decisione fra due alternative: X o Y
    - Una delle due è la scelta "giusta", l'altra quella "sbagliata"
      - e lo esprimiamo con il simbolo ">": ad esempio, scriviamo $X > Y$ se X è la scelta giusta
    - le due alternative sono, a priori, equiprobabili: $P(X > Y) = P(Y > X) = \frac{1}{2}$
  - 2) ogni individuo riceve un segnale privato: x o y
    - $P(x \mid X > Y) = P(y \mid Y > X) = q > \frac{1}{2}$
  - 3) ogni individuo sceglie in accordo al proprio segnale privato
  - 4) ciascun individuo opera la propria scelta fra X e Y, la scrive su una scheda che poi introduce in un'urna
  - 5) infine, viene presa una decisione collettiva fra X e Y sulla base delle scelte dei singoli individui
- Come avviene nelle votazioni a scrutinio segreto

# Un nuovo modello di decision making

- Come avviene nelle votazioni a scrutinio segreto
- **Teorema della giuria di Condorcet.** Nel modello di decision making appena definito, se X > Y e il numero di individui coinvolti nella decisione è k allora

quasi sicuramente $\lim_{k\to\infty} \frac{|\{i : 1 \leq i \leq k \wedge r_i = X\}|}{k} = q$ ,

ovvero, $\lim_{k\to\infty} P\left(\frac{|\{i : 1 \leq i \leq k \wedge r_i = X\}|}{k} = q\right) = 1$

dove $r_i$ è la scelta dell'individuo i

- Questo teorema dimostra che, **qualora si dovesse prendere una *decisione collettiva* in favore di X o di Y e si decidesse di decidere in accordo alla scelta della maggioranza degli individui, la decisione collettiva porterebbe a scegliere l'alternativa "giusta"**
- il che mostra come il modello di decision making appena definito sia un esempio nel quale si manifesta "la saggezza della folla" di Surowiecki

# Voto non sincero

- Il **Teorema della giuria di Condorcet** è valido nel modello di decision making che abbiamo definito
  - e questo è quanto descritto nelle ipotesi
- ove è previsto che ***ogni individuo sceglie in accordo al proprio segnale privato*** (punto 3)
  - e questo è perfettamente ragionevole, poiché nel modello si assume che il segnale in favore della scelta "giusta" sia quello più probabile (punto 2)
- Tuttavia, vi sono situazioni nelle quali un individuo può ritenere migliore la scelta in disaccordo al suo segnale privato
  - pur nella ipotesi di cui al punto 2)
- e questo lo abbiamo già visto nel caso dell'herding
  - cioè, nel caso in cui le scelte erano prese anche osservando il comportamento altrui
- Vediamo, ora, come il voto "non sincero" (ossia, una scelta in disaccordo con il proprio segnale privato) abbia senso anche quando si debba prendere una decisione collettiva e *ciascun individuo scelga* ***senza*** *osservare gli altri*
- ossia, casi in cui il voto non sincero di un individuo può massimizzare la probabilità che la scelta collettiva sia quella "giusta"

# Voto non sincero

- ESEMPIO: torniamo al gioco delle due urne
  - questa volta, però, abbiamo:

    un'urna UG contenente 10 palline gialle
    un'urna UV contenente 9 palline verdi e una pallina gialla
  - come nel gioco delle due urne, scegliamo a caso un'urna fra UG e UV

    – ossia P(UG) = P(UV) = $\frac{1}{2}$
  - e le regole del gioco sono un po' diverse:
    - abbiamo 3 giocatori, ciascuno dei quali estrae in segreto una pallina dall'urna scelta (e ve la reinserisce)
    - *dopo* che i 3 giocatori hanno estratto ciascuno una pallina, *simultaneamente* dichiarano ciascuno la propria scelta: UG o UV
    - se la maggioranza ha indovinato di quale urna si tratti, tutti e 3 vincono un premio
    - altrimenti nessuno vince
- Osserviamo: le differenze sostanziali con il gioco delle due urne che abbiamo visto in precedenza sono:
  - le risposte simultanee (invece che sequenziali)
  - e una decisione collettiva (a maggioranza) in cui tutti vincono o tutti perdono

# Voto non sincero

- ESEMPIO: il gioco UG / UV
  - consideriamo la strategia di un giocatore rispetto al suo segnale privato:
    - se estrae una pallina gialla, allora

$$P(UG \mid g) = \frac{P(g|UG) \cdot P(UG)}{P(g|UG) \cdot P(UG) + P(g|UV) \cdot P(UV)} = \frac{\frac{10}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{10}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{10}{11}$$

    - ma, se estrae una pallina verde, allora (senza stare a fare tanti conti) $P(UV \mid v) = 1$
      - ossia, l'urna è *certamente* verde

  - Ora, proviamo a metterci nei panni di uno dei giocatori per capire quale ragionamento possa fare per rispondere in modo da massimizzare la probabilità di vincere:
  - io giocatore so che noi tre giocatori vinciamo se almeno due di noi indovinano.
  - Quindi mi domando: in quale caso la mia risposta è ***davvero influente*** ai fini della vittoria?
  - E la risposta è: quando le risposte degli altri due giocatori sono discordi
    - perché, se sono concordi, allora la mia risposta non modifica la maggioranza, qualunque cosa io risponda.

# Voto non sincero

- ESEMPIO: il gioco UG / UV
  - Io giocatore so che noi tre giocatori vinciamo se almeno due di noi indovinano.
  - E che la mia risposta è influente solo quando le risposte degli altri due giocatori sono discordi
  - Ma se le risposte dei due giocatori sono discordi, allora uno di essi ha risposto UV
  - ossia, *assumendo che gli altri due giocatori rispondano sinceramente*
    ossia *in accordo ai loro segnali privati*
    le risposte degli altri due giocatori sono discordi quando uno di loro estrae una pallina verde
  - ossia, quando l'urna **è** UV
  - Perciò, *assumendo che gli altri due giocatori rispondano sinceramente*, la mia risposta è influente ai fini della vittoria solo quando l'urna è UV
  - e, quindi, qualunque pallina io estragga, mi conviene rispondere UV!

  - E se, invece, *gli altri due giocatori non rispondono sinceramente,* magari ragionando come ho ragionato io? Beh, la strategia di vittoria va a farsi friggere...

# Voto non sincero nelle giurie - unanimità

- Una situazione simile si presenta nelle giurie, durante i processi
  - quando si deve decidere se un imputato è colpevole (C) o innocente (I)
    - e, a priori, $P(C) = P(I) = \frac{1}{2}$
  - ciascun giurato riceve un segnale c o un segnale i: come nel caso dell'herding,
    $$P(c \mid C) = P(i \mid I) = q > \frac{1}{2}$$
  - in questo caso, occorre aggregare i voti dei giurati per giungere a un verdetto di colpevolezza o di innocenza
  - e per condannare un imputato è necessario che l'insieme S dei segnali ricevuti dai giurati siano indice di colpevolezza con probabilità molto alta
    - non è sufficiente che sia $P(C \mid S) > \frac{1}{2}$
    - ma è richiesto che sia $P(C \mid S) >> \frac{1}{2}$
    - *oltre ogni ragionevole dubbio*
  - diciamo che per condannare un imputato è necessario che <u>tutti</u> i giurati votino in favore della condanna
    - ossia, per condannare l'imputato occorre l'unanimità dei giurati

# Voto non sincero nelle giurie - unanimità

- In questo caso, se io sono un giurato: in quale situazione la mia risposta è davvero influente ai fini del verdetto?
  - Se fra gli altri giurati c'è qualcuno che è in favore dell'innocenza, che io voti per la colpevolezza o per l'innocenza non altera il verdetto
  - ma se tutti gli altri giurati sono in favore della colpevolezza, allora è proprio dal mio voto che dipende il verdetto!
- Supponiamo che la giuria consti di k giurati e che tutti (tranne me) votino in accordo ai propri segnali
  - calcoliamo la probabilità $P(C\,|\,ic^{k-1})$ che l'imputato sia colpevole quando un solo giurato riceve un segnale i:

$$P(C\,|\,ic^{k-1}) = \frac{P(ic^{k-1}|C)\cdot P(C)}{P(ic^{k-1}|C)\cdot P(C)+P(ic^{k-1}|I)\cdot P(I)} = \frac{(1-q)\,q^{k-1}\cdot\frac{1}{2}}{(1-q)\,q^{k-1}\cdot\frac{1}{2}+q\,(1-q)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{q^{k-2}}{q^{k-2}+(1-q)^{k-2}}.$$

  - e, dunque, $\lim_{k\to\infty} P(C\,|\,ic^{k-1}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{1-q}{q}\right)^{k-2}} = 1$ **perché $q > \frac{1}{2}$ e, quindi, $\frac{1-q}{q} < 1$**
  - ossia, *al crescere del numero dei giurati, se uno solo di essi riceve il segnale i allora l'imputato è colpevole quasi sicuramente*
- E, allora, è meglio che io voti "colpevole"
  - con buona pace dell' "oltre ogni ragionevole dubbio"...

# Sistemi di voto

- Fino ad ora abbiamo considerato due metodi per ottenere una decisione collettiva a partire da un insieme di decisioni individuali
  - la maggioranza
  - l'unanimità (per una delle due alternative)
- nel caso in cui le alternative fra le quali scegliere fossero due
- In generale, comunque, ci vengono presentate più alternative fra le quali esprimere le nostre preferenze
  - come succede, ad esempio, nel corso delle elezioni politiche
  - o al festival di Sanremo…
- E spesso più che decretare semplicemente il vincitore, viene stilata una classifica
  - ossia, un *ranking*
- E, infine, naturalmente, possono essere considerate numerose *regole per derivare una decisione collettiva a partire da un insieme di decisioni individuali*
  - oltre alle regole della maggioranza e dell'unanimità
- ed esse prendono il nome di **sistemi di voto**

# Voto individuale

- Formalizziamo:
  - $A = \{ a_1, a_2, \dots , a_n\}$ è un insieme di alternative (o, più semplicemente, $A = [n]$ )
  - $V = \{ v_1, v_2, \dots , v_k \}$ è un insieme di votanti (o, più semplicemente, $V = [k]$ )
- Ciascun votante $v_h \in V$ esprime il suo voto in una di due forme possibili:
  - 1) nella forma di una **graduatoria (ranking)** $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hn} \rangle$,
    - ossia come sequenza ordinata delle n alternative
    - nella quale al primo posto si trova l'alternativa preferita fra tutte, al secondo posto la seconda preferita, ecc. ecc.
    - Un ranking è, dunque, un elemento dell'insieme $\Pi(A)$ , ossia, l'insieme delle permutazioni degli elementi di A
  - 2) nella forma di una **relazione binaria completa e transitiva** $>_h$
    - completa: per ogni coppia di alternative a e a', $a >_h a'$ oppure $a' >_h a$
    - transitiva: se $a >_h a'$ e $a' >_h a''$ allora $a >_h a''$, per qualunque terna di alternative a, a', a''
    - dove $a >_h a'$ significa che a è preferito ad a' dal votante h

# Voto individuale

- Le due forme possibili di espressione di un voto sono fra loro equivalenti.
- Derivare una relazione binaria completa e transitiva $>_h$ da un ranking $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hn} \rangle$ è immediato: per ogni indice i ∈ [n] e per ogni indice j ∈ [n] tale che j > i, poniamo $a_{hi} >_h a_{hj}$
- Derivare un ranking $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hn} \rangle$ da una relazione binaria completa e transitiva $>_h$ è, invece, un compito più complesso
  - Allo scopo, procediamo come segue
    - 1) dimostriamo che, poiché $>_h$ è completa e transitiva, allora esiste $\ell \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{\ell\}$, $a_\ell >_h a_j$
      - il Teorema, dimostrato nelle slide successive
    - 2) allora, poniamo $a_{h1} = a_\ell$ e
      - osservando che $>_h$ è completa e transitiva anche sull'insieme $A - \{a_{h1}\}$
    - ripetiamo il ragionamento sull'insieme $A - \{a_{h1}\}$ per individuare $a_{h2}$ , e così via per individuare $a_{h3}$, … , $a_{hn}$
      - ossia, torniamo al passo1 per ottenere $a_{h2}$, e così via fino ad ottenere $a_{hn}$

# Voto individuale

- **Teorema**: se $>_h$ è una relazione binaria completa e transitiva nell'insieme $A = \{ a_1, a_2, \dots , a_n\}$ allora esiste una alternativa $\ell \in [n]$ tale che , per ogni $j \in [n] - \{\ell \}$, $a_\ell >_h a_j$

- Per dimostrare il teorema mostriamo, innanzi tutto, che

  se $>_h$ è una relazione binaria completa e transitiva nell'insieme $A = \{ a_1, a_2, \dots , a_n\}$ allora esiste un'alternativa $\ell \in [n]$ che batte più alternative di ogni altra alternativa

- ossia, dimostriamo innanzi tutto il Lemma seguente

  **Lemma**: se $>_h$ è una relazione binaria completa e transitiva nell'insieme $A = \{ a_1, a_2, \dots , a_n\}$ , allora esiste $\ell \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{ \ell \}$,

  $$|\{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \}| > |\{ i \in [n]: a_j >_h a_i \}|$$

# Voto individuale

- **Lemma**: se $>_h$ è una relazione binaria completa e transitiva nell'insieme

  $A = \{ a_1, a_2, \dots , a_n \}$ , allora esiste $\ell \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{ \ell \}$,

  $$|\{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \}| > |\{ i \in [n]: a_j >_h a_i \}|$$

- Dimostrazione:
  - per ogni alternativa $j \in [n]$, indichiamo con $p_j$ il numero di alternative che j batte nel voto del votante h: $p_j = |\{ i \in [n]: a_j >_h a_i \}|$
  - certamente, esiste $\ell \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{ \ell \}$,

    $$p_\ell = |\{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \}| \geq |\{ i \in [n]: a_j >_h a_i \}| = p_j \quad (*)$$

    - perché $p_1, p_2, \dots , p_n$ sono numeri!
  - supponiamo che esista $m \in [n] - \{ \ell \}$ tale che

    $|\{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \}| = |\{ i \in [n]: a_m >_h a_i \}|$ - ossia, $\mathbf{p_\ell = p_m}$

# Voto individuale

- **Lemma**: se $>_h$ è una relazione binaria completa e transitiva nell'insieme $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n\}$, allora esiste $\ell \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{ \ell \}$,

$$|\{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \}| > |\{ i \in [n]: a_j >_h a_i \}|$$

- Dimostrazione:
  - supponiamo che esista $m \in [n] - \{ \ell \}$ tale che
  $$\mathbf{p_\ell} = |\{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \}| = |\{ i \in [n]: a_m >_h a_i \}| = \mathbf{p_m}$$
  - poiché $>_h$ è completa, allora $a_\ell >_h a_m$ oppure $a_m >_h a_\ell$
  - **1) se $a_m >_h a_\ell$**: poiché $>_h$ è transitiva allora, per ogni j tale che $a_\ell >_h a_j$ si ha che $a_m >_h a_j$
    - ossia $\{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \} \cup \{a_\ell\} \subseteq \{ i \in [n]: a_m >_h a_i \}$
    - e quindi, poiché $a_\ell \notin \{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \}$,
    $$\mathbf{p_m} = |\{ i \in [n]: a_m >_h a_i \}| \geq |\{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \}| + 1 > |\{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \}| = \mathbf{p_\ell}$$
    - un assurdo: $\mathbf{p_\ell = p_m}$ e $\mathbf{p_m > p_\ell}$

# Voto individuale

- **Lemma**: se $>_h$ è una relazione binaria completa e transitiva nell'insieme $A = \{ a_1, a_2, \dots , a_n\}$ , allora esiste $\ell \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{ \ell \}$,
  $$|\{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \}| > |\{ i \in [n]: a_j >_h a_i \}|$$

- Dimostrazione:
  - supponiamo che esista $m \in [n] - \{ \ell \}$ tale che
    $$\mathbf{p_\ell} = |\{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \}| = |\{ i \in [n]: a_m >_h a_i \}| = \mathbf{p_m}$$
  - **2) se $a_\ell >_h a_m$** : poiché $>_h$ è transitiva allora, per ogni j tale che $a_m >_h a_j$ si ha che $a_\ell >_h a_j$
    - ossia $\{ i \in [n]: a_m >_h a_i \} \cup \{ a_m \} \subseteq \{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \}$
    - e quindi, poiché $a_m \notin \{ i \in [n]: a_m >_h a_i \}$,
      $\mathbf{p_\ell} = |\{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \}| \geq |\{ i \in [n]: a_m >_h a_i \} \cup \{ a_m \}| > |\{ i \in [n]: a_m >_h a_i \}| = \mathbf{p_m}$
    - un assurdo: $\mathbf{p_\ell = p_m}$ e $\mathbf{p_\ell > p_m}$
  - In entrambi i casi, $a_m >_h a_\ell$ e $a_m >_h a_\ell$, viene contraddetto quanto supposto circa m
  - e quindi m non esiste e, per ogni $j \in [n] - \{ i \}$, $|\{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \}| > |\{ i \in [n]: a_j >_h a_i \}|$

QED

# Voto individuale

- Possiamo, infine, dimostrare il Teorema
- **TEOREMA**: se $>_h$ è una relazione binaria completa e transitiva nell'insieme $A = \{ a_1, a_2, \dots , a_n\}$ allora esiste $\ell \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{\ell\}$, $a_\ell >_h a_j$
- Dimostrazione:
  - osserviamo che, in virtù del lemma appena dimostrato, esiste $\ell \in [n]$ tale che, per ogni $j \in [n] - \{\ell\}$,
    $$|\{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \}| > |\{ i \in [n]: a_j >_h a_i \}|$$
  - supponiamo che esista esista $m \in [n] - \{ \ell \}$ tale che $a_m >_h a_\ell$
  - allora, per la transitività di $>_h$, per ogni j tale che $a_\ell >_h a_j$ si avrebbe che $a_m >_h a_j$
  - ossia, $\{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \} \cup \{a_\ell\} \subseteq \{ i \in [n]: a_m >_h a_i \}$
  - e quindi, poiché $a_\ell \notin \{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \}$, $|\{ i \in [n]: a_m >_h a_i \}| > |\{ i \in [n]: a_\ell >_h a_i \}|$
  - un assurdo. QED

# Sistemi di voto

- Un sistema di voto è una regola che permette di associare un voto collettivo ad un insieme di voti individuali
- Formalmente:
  - poiché sono irrilevanti i nomi delle alternative e dei votanti, possiamo identificare A con l'insieme [n] e V con l'insieme [k]
  - per fissare le idee, assumiamo che i k votanti esprimano i loro voti mediante ranking
  - un *voto aggregato per n alternative e k votanti* è una funzione $f_{n,k}$: $\Pi([n])^k \rightarrow \Pi([n])$
  - in modo che $f_{n,k}(r_1, r_2, \dots, r_k) = r$ , dove $r_1, r_2, \dots, r_k, r \in \Pi([n])$
- Un ***sistema di voto*** è un predicato $\sigma$ che specifica, per ogni $r_1, r_2, \dots, r_k \in \Pi([n])^k$, le regole che devono essere rispettate dal voto aggregato $f_{n,k}(r_1, r_2, \dots, r_k)$

- <u>ESEMPIO</u>: supponiamo che i voti individuali dei k votanti siano espressi mediante relazioni binarie $>_1, >_2, \dots, >_k$ e indichiamo con $\succ$ la relazione binaria $f_{n,k}(>_1, >_2, \dots, >_k)$

  **(ossia, $\succ$ è il voto collettivo corrispondente a $>_1, >_2, \dots, >_k$)**

  - il **sistema di voto a maggioranza** è descritto dal predicato $\sigma_M$ tale che,

$$\sigma_M(>_1, >_2, \dots, >_k, \succ) \;=\; \forall\, i \in [n]\ \forall\, j \in [n]\ \ [\, i \succ j \leftrightarrow |\{ h \in [k]: i >_h j \}| > |\{ h \in [k]: j >_h i \}|\, ]$$

**nella votazione finale i è preferito a j se e solo se i è preferito a j dalla maggioranza dei votanti**

# Sistema di voto a maggioranza

- Il **sistema di voto a maggioranza** è un sistema di voto semplice e intuitivo
- in particolar modo quando le alternative fra le quali scegliere sono due
- tuttavia, quando le alternative sono più di due…
  - Consideriamo la situazione seguente: tre amici in vacanza, con budget limitato, devono scegliere se acquistare miele, marmellata o cioccolata per la colazione
  - Mario preferisce su tutto la cioccolata, poi la marmellata, e in ultimo il miele:
    cioccolata $>_M$ marmellata $>_M$ miele
  - Paolo preferisce su tutto la marmellata, poi il miele, e in ultimo la cioccolata:
    marmellata $>_P$ miele $>_P$ cioccolata
  - Roberto preferisce su tutto il miele, poi la cioccolata, e in ultimo la marmellata:
    miele $>_R$ cioccolata $>_R$ marmellata
  - tre relazioni binarie complete e transitive!

# Sistema di voto a maggioranza

- Quando le alternative sono più di due...
  - Mario preferisce su tutto la cioccolata, poi la marmellata, e in ultimo il miele:
    cioccolata $>_M$ marmellata $>_M$ miele
  - Paolo preferisce su tutto la marmellata, poi il miele, e in ultimo la cioccolata:
    marmellata $>_P$ miele $>_P$ cioccolata
  - Roberto preferisce su tutto il miele, poi la cioccolata, e in ultimo la marmellata:
    miele $>_R$ cioccolata $>_R$ marmellata
  - tre relazioni binarie complete e transitive!
- Tuttavia, se proviamo a produrre una relazione binaria $\succ$ aggregando secondo la regola della maggioranza le tre relazioni otteniamo:
  cioccolata è preferita a marmellata da due votanti → **cioccolata $\succ$ marmellata**
  marmellata è preferita a miele da due votanti → **marmellata $\succ$ miele**
  miele è preferito a cioccolata da due votanti → **miele $\succ$ cioccolata**
- Ossia, cioccolata $\succ$ marmellata $\succ$ miele $\succ$ cioccolata (!!!!!)
- e, in particolare, anche se cioccolata $\succ$ marmellata e marmellata $\succ$ miele
  **non è vero che cioccolata $\succ$ miele**
- **La relazione $\succ$ non è transitiva!**

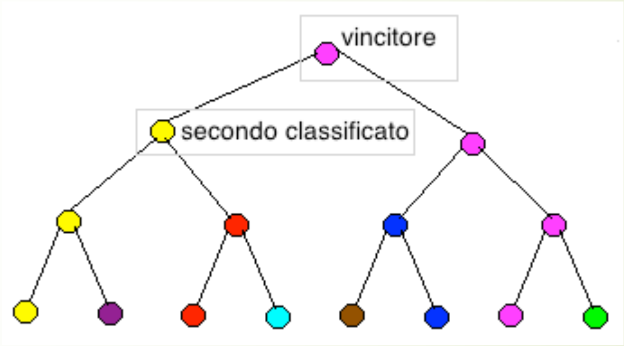
# Sistema di voto a maggioranza

- La situazione appena descritta costituisce **il paradosso di Condorcet**: *anche se le relazioni binarie individuali sono transitive, la relazione binaria collettiva ottenuta dalla loro aggregazione a maggioranza può non essere transitiva*
- Osserviamo che la richiesta di transitività è necessaria affinché l'aggregazione dei voti individuali sia significativa
  - se non è soddisfatta, il voto aggregato non ha significato
  - è il... "minimo sindacale" delle richieste!
- perciò potrebbe essere problematico usare con più di due alternative il **sistema di voto a maggioranza**
  - che soffre del paradosso di Condorcet

- Il sistema di voto a maggioranza può essere utilizzato come punto di partenza per costruire un nuovo sistema di voto che non soffre del paradosso di Condorcet: il torneo
  - che è il sistema di voto utilizzato nelle manifestazioni sportive
- i k votanti esprimono ancora le proprie preferenze mediante relazioni binarie
- tuttavia, la graduatoria finale viene costruita sulla base di una successione di scontri diretti

# Il torneo

- In un torneo i k votanti esprimono ancora le proprie preferenze mediante relazioni binarie: $>_1, >_2, \ldots, >_k$
- e la graduatoria finale viene costruita sulla base di una successione di scontri diretti:
  - **se** si scontrano le due alternative a e a', risulterà $a \succ a'$ se
    $$|\{ i \in [k]: a >_i a' \}| > |\{ i \in [k]: a' >_i a \}|$$
  - Ovviamente, se k è dispari allora per ogni coppia di alternative a e a' si avrà $a \succ a'$ o $a \succ a'$
  - ossia, si riuscirà sempre ad avere un vincitore di uno scontro diretto
- In un torneo non hanno luogo tutti gli scontri possibili, ma solo quelli fissati da un'agenda




  - ossia, prima dell'inizio del torneo vengono fissate le coppie che devono confrontarsi
  - poi si scontreranno i vincitori di ciascuno scontro, e così via, fino a decretare il vincitore e il secondo classificato
  - per comporre il resto della graduatoria saranno necessari altri incontri

# Il torneo

- In un torneo non hanno luogo tutti gli scontri possibili, ma solo quelli fissati da un'agenda
- e, quindi, **l'agenda può avere un ruolo determinante nel decretare il vincitore**
- ESEMPIO: torniamo ai tre amici in vacanza, alle prese con la decisione di cosa acquistare per la colazione – problema che decidono di risolvere con un torneo
  - Mario propone l'agenda secondo la quale il primo scontro è marmellata-miele, e il vincitore si scontrerà con la cioccolata
  - Paolo propone l'agenda secondo la quale il primo scontro è miele-cioccolata, e il vincitore si scontrerà con la marmellata
  - Roberto propone l'agenda secondo la quale il primo scontro è cioccolata-marmellata, e il vincitore si scontrerà con il miele
  - poiché avevamo già osservato che **cioccolata** $\succ$ **marmellata** , **marmellata** $\succ$ **miele** e **miele** $\succ$ **cioccolata**,
    - nell'agenda di Mario vince la cioccolata, nell'agenda di Paolo vince la marmellata e nell'agenda di Roberto vince il miele
    - ossia, ciascun amico ha proposto un'agenda che portasse alla vittoria il proprio prodotto preferito!

- Ossia, il sistema di voto "torneo" è sensibile allo ***strategic agenda setting***

# Sistemi di voto posizionali

- Supponiamo ora che i voti individuali siano espressi mediante ranking
  - così che il voto del votante h è $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hn} \rangle$

- A ciascun ranking $r_h$ possiamo associare una funzione peso che assegna un valore numerico a ciascuna alternativa dipendentemente dalla sua *posizione* nel ranking
  - ad esempio, al ranking $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hn} \rangle$ possiamo associare la funzione $w_h$ tale che $w_h(a_{hi}) = 100 - 10 \cdot i$
  - tipicamente, la funzione peso è decrescente nella posizione
    - il peso assegnato all'alternativa in posizione i è maggiore del peso assegnato all'alternativa in posizione i+1

- In un sistema di voto posizionale,
  - dopo aver associato, per ogni $h \in [k]$, una funzione peso $w_h$ al ranking $r_h$,
- il ranking collettivo r è ottenuto
  - calcolando il peso totale di ciascuna alternativa come somma dei pesi che quella alternativa ha negli h ranking – ossia, per ogni $a \in [n]$, $w(a) = \sum_{1 \le h \le k} w_h(a)$
  - e poi ordinando le alternative secondo il loro peso totale per ottenere il ranking collettivo

# Sistemi di voto posizionali

- In un sistema di voto posizionale,
  - dopo aver associato, per ogni h ∈ [k], una funzione peso $w_h$ al ranking $r_h$,
  - funzione peso decrescente nella posizione in graduatoria
- il ranking collettivo r è ottenuto
  - calcolando il peso totale di ciascuna alternativa come somma dei pesi che quella alternativa ha negli h ranking – ossia, per ogni a ∈ [n], $w(a) = \sum_{1 \leq h \leq k} w_h(a)$
  - e poi ordinando le alternative secondo il loro peso totale per ottenere il ranking collettivo

- Il **Borda Count** è un particolare sistema di voto posizionale nel quale
  - per ogni h ∈ [k], la funzione peso associata al ranking $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hn} \rangle$ è la funzione suriettiva $\rho_h$: A → {0, 1, … , n-1} tale che $\boldsymbol{\rho_h(a_{hi}) = n - i}$ **,**
  - **e le alternative vengono ordinate per peso finale $\rho$ non crescente**

# Sistemi di voto posizionali

- Anche nei sistemi di voto posizionali si manifesta il paradosso di Condorcet, sotto forma di ex *aequo*
- ESEMPIO: consideriamo, ancora i tre amici in vacanza e i tre ranking corrispondenti alle loro relazioni di equivalenza ed applichiamo il Borda Count:
  - $r_{Mario} = \langle$ cioccolata , marmellata , miele $\rangle$ da cui
    $\rho_{Mario}$(cioccolata) = 2, $\rho_{Mario}$(marmellata) = 1, $\rho_{Mario}$(miele) = 0
  - $r_{Paolo} = \langle$ marmellata , miele , cioccolata $\rangle$ da cui
    $\rho_{Paolo}$(cioccolata) = 0, $\rho_{Paolo}$(marmellata) = 2, $\rho_{Paolo}$(miele) = 1
  - $r_{Roberto} = \langle$ miele , cioccolata , marmellata $\rangle$ da cui
    $\rho_{Roberto}$(cioccolata) = 1, $\rho_{Roberto}$(marmellata) = 0, $\rho_{Roberto}$(miele) = 2
  - e, quindi $\rho$(cioccolata) = 3, $\rho$(marmellata) = 3, $\rho$(miele) = 3
- In un sistema di voto posizionale il problema degli ex aequo viene trattato
  - dividendo i premi – nelle competizioni
  - ricorrendo ai ballottaggi – nelle elezioni politiche
  - ricorrendo al lancio di una moneta
  - ...
  - ma non ci occupiamo di queste questioni

# Sistemi di voto posizionali

- Invece, ci occupiamo di un'altra caratteristica indesiderabile dei sistemi di voto posizionali che introduciamo mediante un esempio
- ESEMPIO: cinque critici cinematografici devono scegliere se assegnare un premio cinematografico a uno dei due film "Il padrino" e "Via col vento"
  - tre critici preferiscono "Via col vento" (VV), i rimanenti due "il padrino" (IP)
    - e, quindi, il premio andrebbe a "Via col vento"
  - prima di arrivare alla votazione finale, però, il comitato organizzatore del premio cinematografico decide di inserire fra i candidati anche "Pulp fiction" (PF)
  - ciascuno dei cinque critici ritiene che "Pulp fiction" sia decisamente inadatto alla competizione
  - tuttavia, i due critici che preferiscono "Il padrino" a "Via col vento" si accorgono che possono ricorrere a un espediente:
    - possono, cioè, votare entrambi secondo il seguente ranking: $\langle$ IP , PF , VV $\rangle$
  - mentre i tre critici che preferiscono "Via col vento" votano, onestamente: $\langle$ VV, IP, PF$\rangle$
  - così che $\rho$(VV) = 6, $\rho$(IP) = 7 e $\rho$(PF) = 2
  - e il premio va a "Il padrino"

# Rilevanza delle alternative irrilevanti

- Inserendo in posizione opportuna "Pulp fiction", il film che mai avrebbe vinto, i due critici che preferivano "Il padrino" hanno fatto in modo che esso vincesse
- E, per farlo, hanno classificato l'***alternativa irrilevante*** ai fini della vittoria in posizione intermedia anche se ciò non corrispondeva al loro giudizio
  - mentre, se avessero votato onestamente 〈 IP, VV, PF〉
  - avrebbe vinto "Via col vento"
- Riconsideriamo ora i ranking dei due gruppi di critici: 〈 VV, IP, PF〉 e 〈 IP, PF, VV〉
- Osserviamo che, se ci limitiamo ad osservare le posizioni relative di VV e IP nei due ranking, VV precede IP nella maggioranza dei votanti
- e quindi sarebbe ragionevole aspettarsi che questo ordine venga rispettato nel voto collettivo
  - indipendentemente da come viene posizionato PF
- Invece, il posizionamento opportuno di PF da parte di due votanti ha permesso di modificare le posizioni relative di VV e IP nella graduatoria finale
- e questo è un problema (di cui soffrono i sistemi di voto posizionali)

# Sistemi di voto affidabili

- Fino a questo momento abbiamo incontrato tre sistemi di voto, quello a maggioranza, il torneo e il sistema di voto posizionale, dei quali non possiamo fidarci completamente
  - perché non riescono sempre ad individuare una graduatoria finale
  - perché la graduatoria finale dipende dall'ordinamento iniziale delle alternative
  - perché i votanti possono "barare" per orientare la graduatoria finale
- Ci domandiamo, a questo punto, se sia possibile progettare sistemi di voto affidabili
- Ma *quando* un sistema di voto può essere considerato affidabile?
- Come minimo, per essere considerato affidabile, un sistema di voto dovrebbe garantire
  - di rappresentare le scelte di tutti i votanti nel caso in cui esse siano tutte concordi
  - di non consentire l'utilizzo di alternative irrilevanti per orientare la graduatoria finale

# Sistemi di voto affidabili

- Come minimo, per essere considerato affidabile, un sistema di voto dovrebbe garantire
  - di rappresentare le scelte di tutti i votanti nel caso in cui esse siano tutte concordi
  - di non consentire l'utilizzo di alternative irrilevanti per orientare la graduatoria finale
- E il paradosso di Condorcet? Non ci interessa più garantire che un sistema di voto non soffra di tale anomalia?!
- Sì e no, in effetti...
- Nel senso che **nei sistemi di voto che prenderemo in considerazione il voto aggregato (o collettivo) viene descritto mediante un ranking**
  - e *un ranking corrisponde* ***sempre*** *ad una relazione binaria transitiva*
  - e, per inciso, per poter produrre un ranking potrebbe essere necessario introdurre anche una regola che risolva gli ex aequo
- Pertanto, per così dire, il paradosso di Condorcet viene eliminato alla radice

# Due principi per i sistemi di voto

- Sia $\sigma$ un sistema di voto
  - sia [n] un insieme di alternative e sia [k] un insieme di votanti tali che, per ogni h ∈ [k], il votante h esprime il ranking $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, \ldots, a_{hn} \rangle$ sulle n alternative
  - indichiamo con r il voto collettivo corrispondente ai voti individuali $r_1, r_2, \ldots, r_k$ derivato in accordo a $\sigma$ – ossia, $\sigma(r_1, r_2, \ldots, r_k, r)$ = vero
  - e siano, per ogni h ∈ [k], $\rho_h$ la funzione peso (relativa al Borda Count) associata a $r_h$ e $\rho$ la funzione peso associata a r

- **Principio di Unanimità (U)**: il sistema di voto $\sigma$ soddisfa il principio di unanimità se

$$\forall\, i, j \in [n]\ [\forall\, h \in [k]\ \rho_h(i) > \rho_h(j) \rightarrow \rho(i) > \rho(j)\ ]$$

  - cioè: ogni qualvolta **tutti** i votanti preferiscono un'alternativa i a un'alternativa j, allora i è preferita a j anche nella graduatoria finale

# Due principi per i sistemi di voto

- Sia $\sigma$ un sistema di voto
- **Principio di Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti (IIA)**: il sistema di voto $\sigma$ soddisfa il principio di indipendenza dalle alternative irrilevanti se

$$\forall\, i, j \in [n] \;\; \forall\, (r_1, r_2, \dots, r_k), (r'_1, r'_2, \dots, r'_k) \in \Pi([n])^k$$

$$[\;\; [\forall\, h \in [k]\;\; \rho_h(i) > \rho_h(j) \leftrightarrow \rho'_h(i) > \rho'_h(j)] \rightarrow [\, \rho(i) > \rho(j) \leftrightarrow \rho'(i) > \rho'(j)\, ]\;\; ]$$

  - dove $\rho'$ la funzione peso associata al ranking collettivo corrispondente a $(r'_1, r'_2, \dots, r'_k)$ derivata in accordo a $\sigma$

- cioè: ogni qualvolta si considerino due insiemi di k votanti per i quali due alternative i e j hanno le stesse posizioni relative per **tutte** le coppie di votanti *omologhi*, allora i e j hanno la stessa posizione relativa anche nelle graduatorie finali relative ai due gruppi di votanti
- ovvero: la posizione relativa di due alternative nella graduatoria finale dipende unicamente dalle posizioni relative delle due alternative nelle graduatorie individuali

# Il teorema (di impossibilità) di Arrow

- Il teorema di Arrow individua l'unico sistema di voto che rispetta i principi U e IIA

- **Teorema di Arrow**. Se il sistema di voto $\sigma$ soddisfa i principi U e IIA, allora
  per ogni k ∈ ℕ e per ogni n ∈ ℕ tale che n > 2
  esiste $j = j_\sigma[n, k] \in [k]$ tale che,
  per ogni k-upla $\langle r_1, r_2, \dots, r_k \rangle$ di ranking per n alternative,
  ciascuno dei ranking espressione di voto di uno dei k votanti
  il voto collettivo corrispondente ai voti individuali $r_1, r_2, \dots, r_k$ derivato in accordo a $\sigma$ è $r = r_j$

- Riassumiamo: *per ogni insieme [k] di votanti esiste j ∈ [k] tale che* il voto collettivo corrispondente ai voti individuali $r_1, r_2, \dots, r_k$ dei k votanti derivato in accordo a $\sigma$ è $r = r_j$

- ***per ogni insieme [k] di votanti esiste j ∈ [k] tale che*** $r = r_j$

- cioè, **l'unico sistema di voto che rispetta U e IIA è la dittatura**

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- Prima di procedere con la dimostrazione del teorema di Arrow, abbiamo bisogno di qualche definizione:
  - dati un insieme [n] di alternative e un insieme [k] di votanti, un **profilo** è una k-upla **$P = \langle r_1, r_2, \dots, r_k \rangle$** di ranking – ciascuno espressione del voto di uno dei votanti per quelle alternative
  - ESEMPIO: un profilo di 6 votanti ($r_1, \dots, r_6$) su 4 alternative (a, b, c, d)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $r_1$ | a | b | c | d |
| $r_2$ | b | a | c | d |
| $r_3$ | a | c | d | b |
| $r_4$ | d | c | b | a |
| $r_5$ | b | c | a | d |
| $r_6$ | a | d | c | b |

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- Prima di procedere con la dimostrazione del teorema di Arrow, abbiamo bisogno di qualche definizione:
  - dati un insieme [n] di alternative, un insieme [k] di votanti, e un profilo $P = \langle r_1, r_2, \ldots, r_k \rangle$, una **alternativa polarizzante per P** è un'alternativa $x \in [n]$ tale che, **per ogni $h \in [k]$, $\rho_h(x) = 0$ oppure $\rho_h(x) = n - 1$**
  - ESEMPIO:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $r_1$ | **a** | b | c | d |
| $r_2$ | b | d | c | **a** |
| $r_3$ | **a** | c | d | b |
| $r_4$ | **a** | c | b | d |
| $r_5$ | b | c | d | **a** |
| $r_6$ | **a** | d | c | b |

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- Dimostriamo il teorema di Arrow in tre passi

- 1) dimostriamo che **se x è un'alternativa polarizzante per un profilo $P = \langle r_1, r_2, \dots, r_k \rangle$ allora $\rho(x) = 0$ oppure $\rho(x) = n - 1$**
  - al solito, $\rho$ è la funzione peso associata al voto collettivo r (che soddisfa $\sigma$) corrispondente a P

- 2) definiamo una successione di k+1 profili in ciascuno dei quali una stessa $x \in [n]$ è polarizzante e, tramite essi, individuiamo un dittatore potenziale
  - $\sigma$ è un sistema di voto: allora è in grado di esprimere un voto collettivo per ogni profilo possibile per n alternative e k votanti
  - e, dunque, anche per i k profili nei quali x è polarizzante

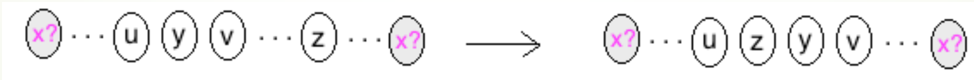
- 3) dimostriamo che il dittatore potenziale è, effettivamente, il dittatore cercato

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- 1) dimostriamo che **se x è un'alternativa polarizzante per un profilo $P = \langle r_1, r_2, \dots, r_k \rangle$ allora $\rho(x) = 0$ oppure $\rho(x) = n - 1$**
  - supponiamo per assurdo che $0 < \rho(x) < n - 1$: allora esistono due alternative $y, z \in [n]$ tali che $\rho(z) < \rho(x) < \rho(y)$
  - creiamo un nuovo profilo $P' = \langle r'_1, r'_2, \dots, r'_k \rangle$ nel modo seguente:

    ⊛ per ogni $i \in [k]$ tale che $\rho_i(y) < \rho_i(z)$, $r'_i = r_i$

    ⊛ per ogni $i \in [k]$ tale che $\rho_i(y) > \rho_i(z)$, $r'_i$ è ottenuto da $r_i$ spostando z alla sinistra di y, in modo che $\rho'_i(z) = \rho'_i(y) + 1$




$r_i$ $\qquad\qquad$ $r'_i$

  - poiché x non è stata in alcun modo coinvolta negli spostamenti, x è un'alternativa polarizzante anche per P'
  - inoltre, per ogni $i \in [k]$, in $r_i$ e $r'_i$ non sono variati gli ordini relativi di x e y e di x e z
  - infine, per ogni $i \in [k]$ $\rho'_i(y) < \rho'_i(z)$

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- 1) dimostriamo che se x è un'alternativa polarizzante per un profilo $P = \langle r_1, r_2, \dots, r_k \rangle$ allora $\rho(x) = 0$ oppure $\rho(x) = n - 1$
  - supponiamo per assurdo che $0 < \rho(x) < n - 1$: allora esistono due alternative $y, z \in [n]$ tali che **$\rho(z) < \rho(x) < \rho(y)$**
  - creiamo un nuovo profilo $P' = \langle r'_1, r'_2, \dots, r'_k \rangle$ tale che:
    - per ogni $i \in [k]$, in $r_i$ e $r'_i$ non sono variati gli ordini relativi di x e y e di x e z
    - e infine, per ogni $i \in [k]$ $\rho'_i(y) < \rho'_i(z)$
  - poiché per ogni $i \in [k]$, in $r_i$ e $r'_i$ non sono variati gli ordini relativi di x e z, allora, per il principio IIA, $\rho(x) < \rho(z) \leftrightarrow \rho'(x) < \rho'(z)$
    - ma abbiamo supposto **$\rho(z) < \rho(x) < \rho(y)$**: allora, **$\rho'(z) < \rho'(x)$**
  - poiché per ogni $i \in [k]$, in $r_i$ e $r'_i$ non sono variati gli ordini relativi di x e y, allora, per il principio IIA, $\rho(x) < \rho(y) \leftrightarrow \rho'(x) < \rho'(y)$
    - ma abbiamo supposto **$\rho(z) < \rho(x) < \rho(y)$**: allora, **$\rho'(x) < \rho'(y)$**
  - inoltre, per ogni $i \in [k]$ $\rho'_i(y) < \rho'_i(z)$: allora, per il principio U deve essere **$\rho'(y) < \rho'(z)$**
  - ossia, **$\rho'(z) < \rho'(x) < \rho'(y) < \rho'(z)$** **- un assurdo**

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- 2) **definiamo una successione di k+1 profili in ciascuno dei quali una stessa x ∈ [n] è polarizzante e, tramite essi, individuiamo un dittatore potenziale**
  - scegliamo x ∈ [n]
  - nel profilo $P^0 = \langle \mathrm{r}_1^0, \mathrm{r}_2^0, \ldots, \mathrm{r}_\mathrm{k}^0 \rangle$ l'alternativa x è in ultima posizione in tutti i ranking: per ogni i ∈ [k], $\rho_i^0(x) = 0$
  - nel profilo $P^1 = \langle \mathrm{r}_1^1, \mathrm{r}_2^1, \ldots, \mathrm{r}_\mathrm{k}^1 \rangle$ l'alternativa x è in prima posizione nel ranking $\mathrm{r}_1^1$, in ultima posizione in tutti gli altri ranking:

    $\rho_1^1(x) = n - 1$

    per ogni i ∈ [k] – {1}, $\rho_i^1(x) = 0$
  - in generale, nel profilo $P^h = \langle \mathrm{r}_1^h, \mathrm{r}_2^h, \ldots, \mathrm{r}_\mathrm{k}^h \rangle$ l'alternativa x è in prima posizione nei ranking $\mathrm{r}_\mathrm{i}^\mathrm{h}$ con i ≤ h, in ultima posizione in tutti gli altri ranking:

    per ogni i ≤ h, $\rho_i^h(x) = n - 1$

    per ogni i > h, $\rho_i^h(x) = 0$
  - per ogni h ∈ {0, … , k}, indichiamo con $r^h$ il ranking collettivo associato a $P^h$, e con $\rho^h$ la funzione peso ad esso associata

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- 2) definiamo una successione di k+1 profili in ciascuno dei quali una stessa x ∈ [n] è polarizzante e, tramite essi, individuiamo un dittatore potenziale

$P^0$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r_1^0$ | … | … | x |
| $r_2^0$ | … | … | x |
| … | … | … | x |
| $r_h^0$ | … | … | x |
| … | … | … | x |
| $r_k^0$ | … | … | x |

$P^1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r_1^1$ | x | … | … |
| $r_2^1$ | … | … | x |
| … | … | … | x |
| $r_h^1$ | … | … | x |
| … | … | … | x |
| $r_k^1$ | … | … | x |

$P^2$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r_1^2$ | x | … | … |
| $r_2^2$ | x | … | … |
| … | … | … | x |
| $r_h^2$ | … | … | x |
| … | … | … | x |
| $r_k^2$ | … | … | x |

…

$P^h$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r_1^h$ | x | … | … |
| $r_2^h$ | x | … | … |
| … | x | … | … |
| $r_h^h$ | x | … | … |
| … | … | … | x |
| $r_k^h$ | … | … | x |

…

$P^k$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r_1^k$ | x | … | … |
| $r_2^k$ | x | … | … |
| … | x | … | … |
| $r_h^k$ | x | … | … |
| … | x | … | … |
| $r_k^k$ | x | … | … |

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- 2) definiamo una successione di k+1 profili in ciascuno dei quali una stessa $x \in [n]$ è polarizzante e, tramite essi, individuiamo un dittatore potenziale
  - in generale, nel profilo $P^h = \langle r_1^h, r_2^h, \ldots, r_k^h \rangle$ l'alternativa x è in prima posizione nei ranking $r_i^h$ con $i \leq h$, in ultima posizione in tutti gli altri ranking:

    per ogni $i \leq h$, $\rho_i^h(x) = n - 1$ e per ogni $i > h$, $\rho_i^h(x) = 0$

    - i due profili $P^{h-1}$ e $P^h$ differiscono solo per il modo in cui l'h-esimo votante giudica x: nel profilo $P^{h-1}$ l'h-esimo votante giudica x ultima ($\rho_h^{h-1}(x) = 0$), mentre nel profilo $P^h$ l'h-esimo votante giudica x prima ($\rho_h^h(x) = n - 1$)
  - e le posizioni relative delle altre alternative rimangono invariate nei due profili

$P^{h-1}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{r_1^{h-1}}$ | x | … | … |
| $\boldsymbol{r_2^{h-1}}$ | x | … | … |
| **…** | x | … | … |
| $\boldsymbol{r_{h-1}^{h-1}}$ | x | … | … |
| $\boldsymbol{r_h^{h-1}}$ | … | … | **x** |
| **…** | … | … | x |
| $\boldsymbol{r_k^h}$ | … | … | x |

$P^h$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{r_1^h}$ | x | … | … |
| $\boldsymbol{r_2^h}$ | x | … | … |
| **…** | x | … | … |
| $\boldsymbol{r_{h-1}^h}$ | x | … | … |
| $\boldsymbol{r_h^h}$ | **x** | … | … |
| **…** | … | … | x |
| $\boldsymbol{r_k^h}$ | … | … | x |

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- 2) definiamo una successione di k+1 profili in ciascuno dei quali una stessa x ∈ [n] è polarizzante e, tramite essi, individuiamo un dittatore potenziale
  - in generale, nel profilo $P^h = \langle r_1^h, r_2^h, \dots, r_k^h \rangle$ l'alternativa x è in prima posizione nei ranking $r_i^h$ con $i \le h$, in ultima posizione in tutti gli altri ranking:

    per ogni $i \le h$, $\rho_i^h(x) = n - 1$ e per ogni $i > h$, $\rho_i^h(x) = 0$
    - i due profili $P^{h-1}$ e $P^h$ differiscono solo per il modo in cui l'h-esimo votante giudica x: nel profilo $P^{h-1}$ l'h-esimo votante giudica x ultima ($\rho_h^{h-1}(x) = 0$), mentre nel profilo $P^h$ l'h-esimo votante giudica x prima ($\rho_h^h(x) = n - 1$)
  - e le posizioni relative delle altre alternative rimangono invariate nei due profili

  - in virtù del principio U (unanimità), $\rho^0(x) = 0$ e $\rho^k(x) = n - 1$
  - allora, **esiste un profilo j ∈ [k] tale che $\rho^h(x) = 0$ per ogni $h < j$, e $\rho^j(x) > 0$**
    - Osserviamo: $j > 0$ (strettamente) perché $\rho^0(x) = 0$
  - e quindi, poiché x è polarizzante per **$P^j$**, e **$\rho^j(x) = n - 1$**
  - Osserviamo che il votante j ha molto potere nel posizionare x nella graduatoria finale: la fa passare dall'ultima alla prima posizione
  - **j è il dittatore potenziale**

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- 3) dimostriamo che j è, effettivamente, il dittatore cercato
  - sia Q = $\langle \mathrm{r}_1^{\mathrm{Q}}, \mathrm{r}_2^{\mathrm{Q}}, \dots, \mathrm{r}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{Q}} \rangle$ un profilo di k votanti per n alternative
  - per ogni h ∈ [k], indichiamo con $\rho_h^Q$ la funzione peso associata a $\mathrm{r}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{Q}}$
  - e indichiamo con $\mathrm{r}^{\mathrm{Q}}$ il ranking collettivo (**che soddisfa $\boldsymbol{\sigma}$**) corrispondente a Q e con $\rho^{\mathrm{Q}}$ la funzione peso associata a $\mathrm{r}^{\mathrm{Q}}$
- dobbiamo mostrare che ***qualunque sia Q***, $\mathrm{r}^{\mathrm{Q}} = \mathrm{r}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{Q}}$
- ossia, che, qualunque sia Q, comunque si scelgano due alternative y, z ∈ [n],

$$\rho^{\mathrm{Q}}(y) > \rho^{\mathrm{Q}}(z) \leftrightarrow \rho_{\mathrm{j}}^{\mathrm{Q}}(y) > \rho_{\mathrm{j}}^{\mathrm{Q}}(z)$$

- realizziamo questo obiettivo in 2 passi:
- 3.1) dimostriamo che se y ≠ x e z ≠ x allora [ $\rho^{\mathrm{Q}}(y) > \rho^{\mathrm{Q}}(z) \leftrightarrow \rho_{\mathrm{j}}^{\mathrm{Q}}(y) > \rho_{\mathrm{j}}^{\mathrm{Q}}(z)$ ]
- 3.2) dimostriamo che se y ≠ x allora [ $\rho^{\mathrm{Q}}(y) > \rho^{\mathrm{Q}}(x) \leftrightarrow \rho_{\mathrm{j}}^{\mathrm{Q}}(y) > \rho_{\mathrm{j}}^{\mathrm{Q}}(x)$ ]

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- 3.1) dimostriamo che se y ≠ x e z ≠ x allora [ $\rho^Q(y) > \rho^Q(z) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)$ ]
  - senza perdita di generalità, supponiamo che sia $\boldsymbol{\rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)}$
  - costruiamo da Q un nuovo profilo T:
    - innanzi tutto, per ogni h ≤ **j**, poniamo x in testa di $r_h^T$ lasciando tutte le altre alternative nello stesso ordine nel quale si trovano in $r_h^Q$
    - poi, per ogni h > **j**, poniamo x in coda di $r_h^T$ lasciando tutte le altre alternative nello stesso ordine nel quale si trovano in $r_h^Q$
    - infine, spostiamo y dalla posizione in cui si trova in $r_j^Q$ ponendola in testa a $r_j^T$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r_1^Q$ | … | x… | … |
| $r_2^Q$ | … | … | x |
| … | … | …x | … |
| $r_j^Q$ | … | **y…z**…x | |
| … | x | … | … |
| $r_k^Q$ | … | ..x. | … |

Q

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r_1^{Q\to T}$ | x | … | … |
| $r_2^{Q\to T}$ | x | … | … |
| … | x | … | … |
| $r_j^{Q\to T}$ | x | **y…z** | … |
| … | … | … | x |
| $r_k^{Q\to T}$ | … | … | x |

→

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $r_1^T$ | x | … | … | … |
| $r_2^T$ | x | … | … | … |
| … | x | … | … | … |
| $r_j^T$ | y | x | …z… | … |
| … | … | … | … | x |
| $r_k^T$ | … | … | … | x |

T

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- 3.1) dimostriamo che se $y \neq x$ e $z \neq x$ allora [ $\rho^Q(y) > \rho^Q(z) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)$ ]
  - senza perdita di generalità, supponiamo che sia $\rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)$
  - abbiamo costruito da Q il nuovo profilo T nel quale x è in testa di $r_h^T$ per $h < j$, y è in testa seguito da x in $r_j^T$ e x è in coda di $r_h^T$ con $h > j$
  - T è molto simile a $P^j$ :

T

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $r_1^T$ | x | … | … | … |
| $r_2^T$ | x | … | … | … |
| … | x | … | … | … |
| $r_j^T$ | y | x | …z… | … |
| … | … | … | … | x |
| $r_k^T$ | … | … | … | x |

$P^j$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r_1^j$ | x | … | … |
| $r_2^j$ | x | … | … |
| … | x | … | … |
| $r_j^j$ | x | … | … |
| … | … | … | x |
| $r_k^j$ | … | … | x |

  - poiché $\rho^j(x) = n - 1$ (come avevamo visto al lucido 43) allora $\rho^j(x) > \rho^j(z)$
  - poiché l'ordine relativo di x e z è lo stesso in $P^j$ e in T, allora, per IIA, $\rho^T(x) > \rho^T(z)$

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- 3.1) dimostriamo che se y ≠ x e y ≠ x allora [ $\rho^Q(y) > \rho^Q(z) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)$ ]
  - senza perdita di generalità, supponiamo che sia $\rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)$
  - abbiamo costruito da Q il nuovo profilo T nel quale x è in testa di $r_h^T$ per h < **j**, y è in testa seguito da x in $r_j^T$ e x è in coda di $r_h^T$ con h > **j**
  - T è molto simile anche a $P^{j-1}$ :

T

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $r_1^T$ | x | … | … | … |
| $r_2^T$ | x | … | … | … |
| … | x | … | … | … |
| $r_j^T$ | y | x | …z… | … |
| … | … | … | … | x |
| $r_k^T$ | … | … | … | x |

$P^{j-1}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r_1^{j-1}$ | x | … | … |
| $r_2^{j-1}$ | x | … | … |
| … | x | … | … |
| $r_{j-1}^{j-1}$ | x | … | … |
| $r_j^{j-1}$ | … | … | x |
| | … | … | x |
| $r_k^{j-1}$ | | | x |

  - poiché $\rho^{j-1}(x) = 0$ (come avevamo visto al lucido 43) allora $\rho^{j-1}(x) < \rho^{j-1}(y)$
  - poiché l'ordine relativo di x e y è lo stesso in $P^{j-1}$ e in T, allora, per IIA, $\rho^T(x) < \rho^T(y)$

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- 3.1) dimostriamo che se y ≠ x e y ≠ x allora **[ $\rho^Q(y) > \rho^Q(z) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)$ ]**
  - senza perdita di generalità, supponiamo che sia **$\rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)$**
  - abbiamo costruito da Q il nuovo profilo T nel quale x è in testa di $r_h^T$ per h < j, y è in testa seguito da x in $r_j^T$ e x è in coda di $r_h^T$ con h > j
  - dalla stessa posizione relativa di x e z in $P^j$ e in T, dal fatto che $\rho^j(x) > \rho^j(z)$, e in virtù del IIA, abbiamo concluso che $\rho^T(x) > \rho^T(z)$
  - dalla stessa posizione relativa di x e y in $P^{j-1}$ e in T, dal fatto che $\rho^j(x) < \rho^j(y)$, e in virtù del IIA, abbiamo concluso che $\rho^T(x) < \rho^T(y)$
  - ossia, $\rho^T(y) > \rho^T(z)$
  - osserviamo che, per tutti i votanti, l'ordine relativo di z e y è lo stesso in Q e in T
  - e, quindi, per IIA, **$\rho^Q(y) > \rho^Q(z)$**

  - e, naturalmente, essendo y e z interscambiabili (variabili mute), questo prova anche che **se $\rho_j^Q(y) < \rho_j^Q(z)$ allora $\rho^Q(y) < \rho^Q(z)$**

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- 3.2) dimostriamo che se $y \neq x$ allora [ $\rho^Q(y) > \rho^Q(x) \leftrightarrow \rho_{\mathbf{j}}^{\mathrm{Q}}(y) > \rho_{\mathbf{j}}^{\mathrm{Q}}(x)$ ]

  - poiché $n > 2$, allora esiste $z \in [n]$ tale che $z \neq x$ e $z \neq y$

  - deriviamo da $P^0, P^1, \dots, P^k$ una nuova sequenza $T^0, T^1, \dots, T^k$ di profili spostando l'alternativa z :
    - indichiamo $T^h = \langle t_1^h, t_2^h, \dots, t_k^h \rangle$ (vedi prossima slide)
    - $T^0$ è ottenuto spostando z in ultima posizione in ciascun ranking del profilo $P^0$
    - per $h > 0$, $T^h$ è ottenuto dal profilo $P^h$ : l'alternativa z viene spostata in prima posizione nei ranking $t_i^h$ con $i \leq h$, in ultima posizione in tutti gli altri ranking, ossia

      per ogni $i \leq h$, $\rho_i^{T^h}(z) = n - 1$

      per ogni $i > h$, $\rho_i^{T^h}(z) = 0$

  - per ogni $h \in \{0, \dots, k\}$, indichiamo con $t^h$ il ranking collettivo associato a $T^h$, e con $\rho^{T_h}$ la funzione peso ad esso associata

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- La nuova sequenza $T^0$, $T^1$, … , $T^k$ di profili

$T^0$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r_1^0$ | … | … | xz |
| $r_2^0$ | … | … | xz |
| … | … | … | xz |
| $r_h^0$ | … | … | xz |
| … | … | … | xz |
| $r_k^0$ | … | … | xz |

$T^1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r_1^1$ | zx | … | … |
| $r_2^1$ | … | … | xz |
| … | … | … | xz |
| $r_h^1$ | … | … | xz |
| … | … | … | xz |
| $r_k^1$ | … | … | xz |

$T^2$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r_1^2$ | zx | … | … |
| $r_2^2$ | zx | … | … |
| … | … | … | xz |
| $r_h^2$ | … | … | xz |
| … | … | … | xz |
| $r_k^2$ | … | … | xz |

…

$T^h$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r_1^h$ | zx | … | … |
| $r_2^h$ | zx | … | … |
| … | zx | … | … |
| $r_h^h$ | zx | … | … |
| … | … | … | xz |
| $r_k^h$ | … | … | xz |

…

$T^k$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r_1^k$ | zx | … | … |
| $r_2^k$ | zx | … | … |
| … | zx | … | … |
| $r_h^k$ | zx | … | … |
| … | zx | … | … |
| $r_k^k$ | zx | … | … |

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- 3.2) dimostriamo che se $y \neq x$ allora [ $\rho^Q(y) > \rho^Q(x) \leftrightarrow \rho_{\mathbf{j}}^{Q}(y) > \rho_{\mathbf{j}}^{Q}(x)$ ]
  - poiché $n > 3$, allora esiste $z \in [n]$ tale che $z \neq x$ e $z \neq y$
  - deriviamo da $P^0, P^1, \dots, P^k$ una nuova sequenza $T^0, T^1, \dots, T^k$ di profili, dove

    per ogni $i \leq h$, $\rho_i^{T^h}(z) = n - 1$

    per ogni $i > h$, $\rho_i^{T^h}(z) = 0$
  - per ogni $h \in \{0, \dots, k\}$, indichiamo con $t^h$ il ranking collettivo associato a $T^h$, e con $\rho^{T^h}$ la funzione peso ad esso associata
  - Esattamente come per i profili $P^0, P^1, \dots, P^k$, **esiste $\ell \in [k]$ tale che $\rho^{T_h}(z) = 0$ per ogni $h < \ell$, e $\rho^{T_\ell}(z) = n - 1$**
  - E, esattamente come abbiamo dimostrato per il dittatore potenziale j al punto 3.1), possiamo dimostrare che, **per ogni profilo Q, se $y \neq z$ e $v \neq z$ allora**

    $$[\ \rho^Q(y) > \rho^Q(v) \leftrightarrow \rho_\ell^Q(y) > \rho_\ell^Q(v)\ ]$$
  - quindi, in particolare, **per ogni profilo Q, se $y \neq z$ e poiché $x \neq z$ allora**

    $$[\ \rho^Q(y) > \rho^Q(x) \leftrightarrow \rho_\ell^Q(y) > \rho_\ell^Q(x)\ ]$$

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- 3.2) dimostriamo che se $y \neq x$ allora [ $\rho^Q(y) > \rho^Q(x) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(x)$ ]
  - sappiamo che **per ogni profilo Q, se $y \neq z$ e $v \neq z$ allora**

    **[ $\rho^Q(y) > \rho^Q(v) \leftrightarrow \rho_\ell^Q(y) > \rho_\ell^Q(v)$ ]**
  - per concludere la dimostrazione del punto 3.2) è allora sufficiente mostrare che $\ell = j$
  - e lo faremo mostrando che
    - non può essere $\ell < j$
    - non può essere $\ell > j$

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- 3.2) dimostriamo che se y ≠ x allora [ $\rho^Q(y) > \rho^Q(x) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(x)$ ]
  - sappiamo che **per ogni profilo Q, se y ≠ z e v ≠ z allora**

    **[ $\rho^Q(y) > \rho^Q(v) \leftrightarrow \rho_\ell^Q(y) > \rho_\ell^Q(v)$ ]**
  - non può essere $\ell < j$:
    - per dimostrarlo, mostriamo che esiste almeno un profilo P tale che $\boldsymbol{\rho}^{\mathbf{P}} \neq \boldsymbol{\rho}_\ell^{\mathbf{P}}$
    - ricordiamo che, poiché abbiamo scelto j tale che $\rho^h(x) = 0$ per ogni h < j e $\rho^j(x) > 0$ ,
    - allora nel profilo $P^{j-1}$ vale che $\rho^{j-1}(x) = 0$ e, quindi,
      **$\rho^{j-1}(x) < \rho^{j-1}(y)$**
    - ma, poiché $\rho_i^h(x) = n - 1$ per ogni i ≤ h, allora $\rho_\ell^{j-1}(x) = n - 1$
    - allora **$\rho_\ell^{j-1}(x) > \rho_\ell^{j-1}(y)$** ossia, $\boldsymbol{\rho}^{j-1} \neq \boldsymbol{\rho}_\ell^{j-1}$
      - ossia, per il profilo P = $P^{j-1}$ vale $\boldsymbol{\rho}^{\mathbf{P}} \neq \boldsymbol{\rho}_\ell^{\mathbf{P}}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r_1^{j-1}$ | x | … | … |
| $r_2^{j-1}$ | x | … | … |
| … | x | … | … |
| $r_\ell^{j-1}$ | x | … | … |
| … | x | … | … |
| $r_{j-1}^{j-1}$ | x | … | … |
| $r_j^{j-1}$ | … | … | x |
| … | … | … | x |
| $r_k^{j-1}$ | … | … | x |

$P^{j-1}$

# Dimostrazione del teorema di Arrow

- 3.2) dimostriamo che se y ≠ x allora [ $\rho^Q(y) > \rho^Q(x) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(x)$ ]
  - sappiamo che **per ogni profilo Q, se y ≠ z e v ≠ z allora**

    $$[\,\rho^Q(y) > \rho^Q(v) \leftrightarrow \rho_\ell^Q(y) > \rho_\ell^Q(v)\,]$$
  - non può essere $\ell > j$:
    - per dimostrarlo, mostriamo che esiste almeno un profilo P tale che $\boldsymbol{\rho}^{\mathbf{P}} \neq \boldsymbol{\rho}_\ell^{\mathbf{P}}$
    - nel profilo $P^j$ vale che $\rho^j(x) = n - 1$ e, quindi,

      $\rho^j(x) > \rho^j(y)$
    - ma, poiché $\rho_i^h(x) = 0$ per ogni $i > h$, allora $\rho_\ell^j(x) = 0$
    - allora $\rho_\ell^j(x) < \rho_\ell^j(y)$ ossia, $\boldsymbol{\rho}^j \neq \boldsymbol{\rho}_\ell^j$
      - ossia, per il profilo $P = P^j$ vale $\boldsymbol{\rho}^{\mathbf{P}} \neq \boldsymbol{\rho}_\ell^{\mathbf{P}}$
  - quindi, $\ell = j$ . QED

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r_1^j$ | x | … | … |
| $r_2^j$ | x | … | … |
| … | x | … | … |
| $r_j^j$ | x | … | … |
| … | … | … | x |
| $r_\ell^j$ | … | … | x |
| … | … | … | x |
| $r_k^j$ | … | … | x |

$P^j$

# Ombre e luci del teorema di Arrow

- Certo che il teorema di Arrow getta un ombra scura sui sistemi di voto
- perché afferma che un sistema di voto,
  - per non essere soggetto a manipolazioni interessate (utilizzando alternative irrilevanti)
  - ed essere in grado di rispecchiare la volontà dell'unanimità
- deve essere una dittatura.
- Che non è una prospettiva proprio rassicurante.
- Tuttavia, se le alternative hanno certe caratteristiche
  - e se i ranking dei votanti soddisfano una certa proprietà
    - (perfettamente plausibile in presenza di quelle caratteristiche delle alternative)
- allora il teorema di Arrow può essere "aggirato"

# Single peaked preferences

- Supponiamo che le alternative siano un insieme totalmente ordinato, ossia:

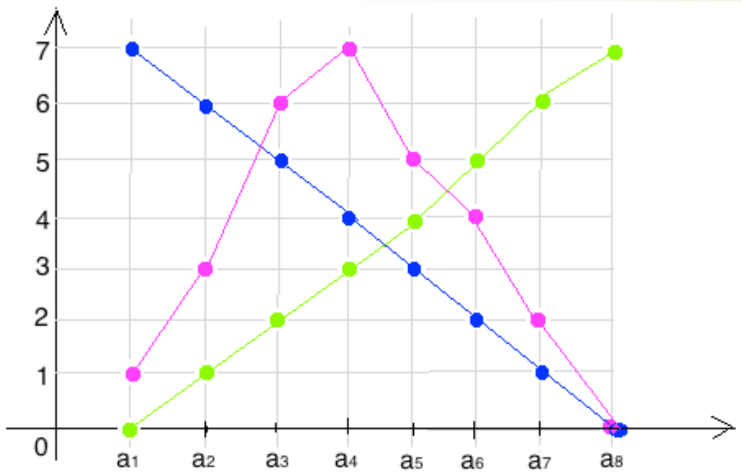
  $A = \{ a_1, a_2, \dots , a_n\}$ con $a_i < a_{i+1}$, per ogni $i = 1, \dots , n-1$
- un ranking single peaked è, in effetti, un'ipotesi del tutto ragionevole in questa situazione
- ESEMPIO 1:
  - possiamo ordinare gli schieramenti politici lungo un asse a partire da quelli di estrema sinistra a quelli di estrema destra
  - e difficilmente un elettore il cui schieramento politico preferito è di estrema sinistra avrà come seconda preferenza uno schieramento di estrema destra e come terza preferenza uno schieramento di centro…
- ESEMPIO 2:
  - tipicamente, il livello di un college statunitense è tanto migliore quanto più elevata è la sua retta
  - un genitore che deve iscrivere il figlio, tipicamente, avrà un range di preferenze concentrate intorno alla retta che può permettersi di pagare…
  - difficilmente avrà come prima preferenza il college più esclusivo, come seconda preferenza quello più popolare e come terza preferenza, di nuovo un college molto costoso

# Single peaked preferences

- Supponiamo che **le alternative siano un insieme totalmente ordinato**, ossia:
  $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ con **$a_i < a_{i+1}$, per ogni $i = 1, \ldots, n-1$**
  - dove con "<" indichiamo una qualche relazione d'ordine
- Il ranking del votante h, $r_h = \langle a_{h1}, a_{h2}, \ldots, a_{hn} \rangle$, è ***single peaked*** se,
  **comunque si scelgano tre alternative $a_i < a_j < a_\ell$, non accade che $\rho_h(a_j) < \rho_h(a_i)$ e $\rho_h(a_j) < \rho_h(a_\ell)$**

  $\forall\, a_i, a_j, a_\ell \in A : a_i < a_j < a_\ell\ [\, \neg(\rho_h(a_j) < \rho_h(a_i)\ \wedge\ \rho_h(a_j) < \rho_h(a_\ell))\, ]$

  - ossia, considerando $\rho_h$ come una funzione definita su un dominio continuo, $\rho_h$ non ha minimi relativi

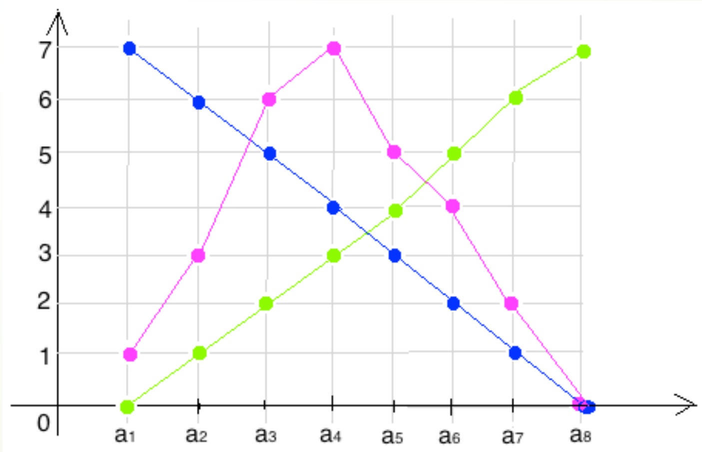



In figura, tre ranking single peaked (rosa, blu e verde)

# Single peaked preferences

- Supponiamo che le alternative siano un insieme totalmente ordinato, ossia:
  $A = \{ a_1, a_2, \dots , a_n\}$ con $a_i < a_{i+1}$, per ogni $i = 1, \dots , n-1$
- e che *ogni votante* esprima un ranking single peaked
- In questo caso, possiamo supporre ***senza perdita di generalità**** che, per ogni $h \in [k]$, il picco del votante h non preceda il picco del votante h-1
  - ossia: sia $P = \langle r_1, r_2, \dots , r_k \rangle$ un profilo nel quale ogni ranking è single peaked
  - per ogni $h \in [k]$, indichiamo con $M_h$ l'alternativa preferita dal votante h, cioè, $M_h \in A$ e $\rho_h(M_h) = n - 1$
  - allora, $M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_k$

In figura, il votante 1 è quello blu
il votante 2 è quello rosa,
il votante 3 è quello verde




****ossia a meno di un riordinamento dei votanti***

# Il teorema del votante mediano

- *Nel caso in cui le alternative sono un insieme totalmente ordinato e i ranking di tutti i votanti sono single peaked è possibile utilizzare il sistema di voto a maggioranza con la certezza di non incorrere nel paradosso di Condorcet*

- Questo è garantito dal seguente

**Teorema del votante mediano.** Sia $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un insieme di alternative tali che $a_1 < a_2 < \ldots a_n$, e sia $P = \langle r_1, r_2, \ldots, r_{2k-1} \rangle$ è un profilo per A nel quale ogni ranking è single peaked e tale che $M_1 \leq M_2 \leq \ldots \leq M_{2k-1}$, allora, per ogni $y \in A - \{M_k\}$

$$|\{ h : \rho_h(M_k) > \rho_h(y) \}| > |\{ h : \rho_h(y) > \rho_h(M_k) \}|$$

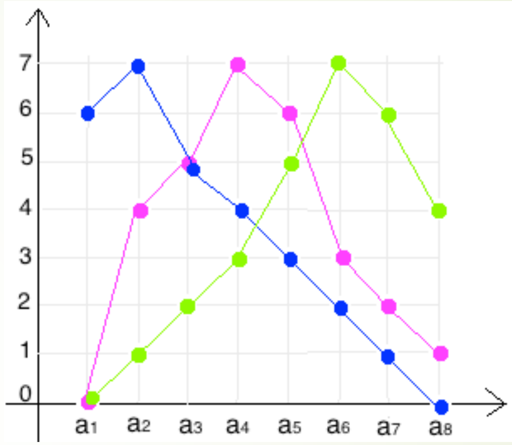
- *Il teorema del votante mediano ci dice che, nelle ipotesi della sua validità, esiste una alternativa che batte qualunque altra alternativa, nei confronti a coppie, per il maggior numero dei votanti*

# Il teorema del votante mediano

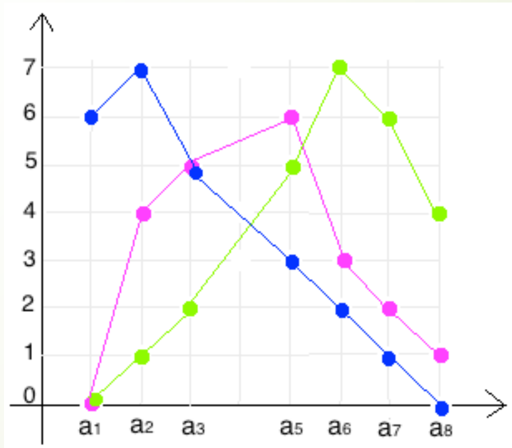
- Il teorema del votante mediano ci dice che, nelle ipotesi della sua validità, esiste una alternativa che batte qualunque altra alternativa, nei confronti a coppie, per il maggior numero dei votanti
  - ed essa è **l'alternativa che corrisponde al picco del votante che si trova in posizione centrale nell'insieme dei picchi ordinati**
  - **nel sistema di voto a maggioranza, essa è l'alternativa prima classificata**
- Poi, osserviamo che: rimuovendo l'alternativa prima classificata dall'insieme di alternative, i 2k – 1 ranking sulle alternative rimanenti sono ancora single peaked
  - allora, possiamo ordinare i votanti per picchi non decrescenti
  - e dedurre, dal teorema del votante mediano, che il picco che occupa la posizione centrale nell'ordinamento non decrescente dei picchi sulle n – 1 alternative corrisponde all'alternativa seconda classificata
- e così via, e così via…
- Ma vediamo un esempio

# Il teorema del votante mediano

- ESEMPIO: $n = 8$, $k = 2$
  - 1) In questo caso,
    $M_1$= **M** =$a_2$, $M_2$= **M** =$a_4$, $M_3$= **M** =$a_6$,
  - quindi, detta $\rho$ la funzione peso associata al ranking collettivo, $\rho(a_4) = 7$

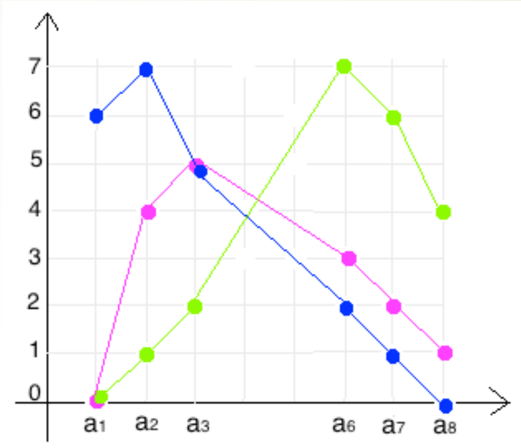



  - 2) ora
    $M_1$= **M** =$a_2$, $M_2$= **M** =$a_5$, $M_3$= **M** =$a_6$,
  - quindi, $\rho(a_5) = 6$
  - ... to be continued

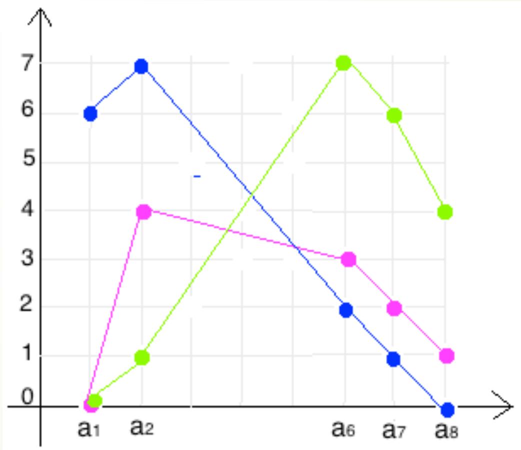


# Il teorema del votante mediano

- ESEMPIO: n = 8, k = 2
  - 3) ora
    $M_1$= **M** =$a_2$, $M_2$= **M** =$a_3$, $M_3$= **M** =$a_6$,
  - quindi, $\rho(a_3) = 5$



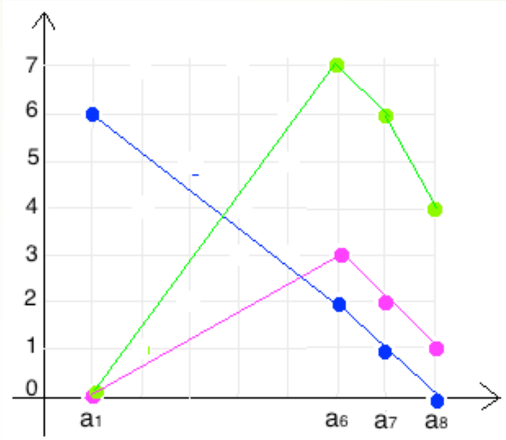

  - 4) ora
    $M_1$= **M** =$a_2$, $M_2$= **M** =$a_2$, $M_3$= **M** =$a_6$,
    oppure, equivalentemente,
    $M_1$= **M** =$a_2$, $M_2$= **M** =$a_2$, $M_3$= **M** =$a_6$,
  - quindi, $\rho(a_2) = 4$

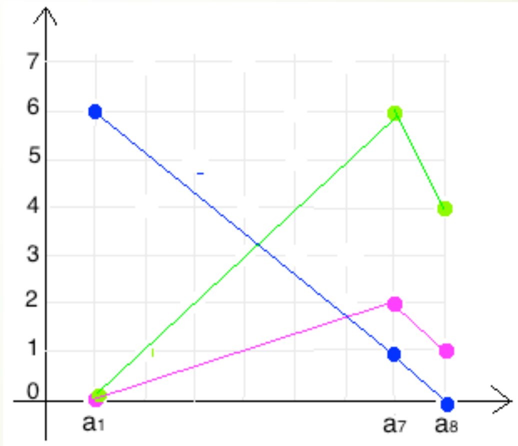



  - ... to be continued

# Il teorema del votante mediano

- ESEMPIO: $n = 8$, $k = 2$
  - 5) ora
    $M_1$= **M** =$a_1$, $M_2$= **M** =$a_6$, $M_3$= **M** =$a_6$,
    oppure, equivalentemente,
    $M_1$= **M** =$a_2$, $M_2$= **M** =$a_6$, $M_3$= **M** =$a_6$,
  - quindi, $\rho(a_6) = 3$

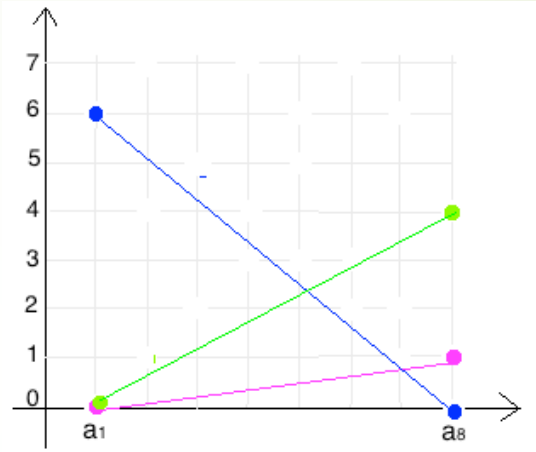



  - 6) ora
    $M_1$= **M** =$a_2$, $M_2$= **M** =$a_7$, $M_3$= **M** =$a_7$,
    oppure, equivalentemente,
    $M_1$= **M** =$a_2$, $M_2$= **M** =$a_7$, $M_3$= **M** =$a_7$,
  - quindi, $\rho(a_7) = 2$
  - ... to be continued

# Il teorema del votante mediano

- ESEMPIO: $n = 8$, $k = 2$
  - 7) ora
    $M_1 = \mathbf{M} = a_2$, $M_2 = \mathbf{M} = a_8$, $M_3 = \mathbf{M} = a_8$,
    oppure, equivalentemente,
    $M_1 = \mathbf{M} = a_2$, $M_2 = \mathbf{M} = a_8$, $M_3 = \mathbf{M} = a_8$,
  - quindi, $\rho(a_8) = 1$




  - 8) infine, $\rho(a_1) = 0$
  - in conclusione, il ranking collettivo corrispondente ai voti individuali **blu**, **rosa** e **verde** derivato in accordo al sistema di voto a maggioranza è

$$r = \langle a_4, a_5, a_3, a_2, a_6, a_7, a_8, a_1 \rangle$$

  - non resta che dimostrare il teorema del votante mediano

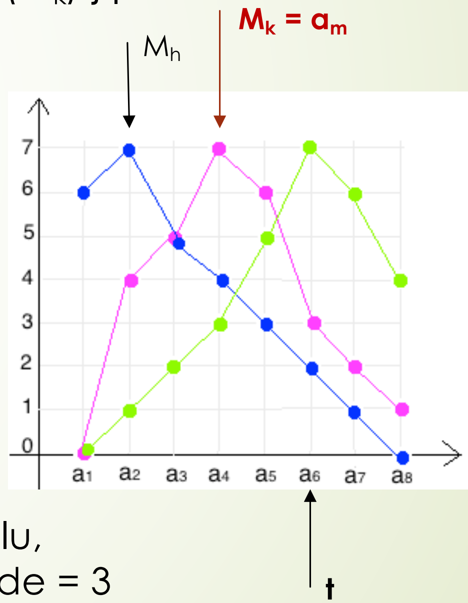
# Il teorema del votante mediano

- **Teorema del votante mediano**. Sia $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un insieme di alternative tali che $a_1 < a_2 < \ldots a_n$, e sia $P = \langle r_1, r_2, \ldots, r_{2k-1} \rangle$ un profilo per A nel quale ogni ranking è single peaked e tale che $M_1 \leq M_2 \leq \ldots \leq M_{2k-1}$, allora, per ogni $y \in A - \{M_k\}$

$$|\{ h : \rho_h(M_k) > \rho_h(y) \}| > |\{ h : \rho_h(y) > \rho_h(M_k) \}|$$

- Dimostrazione. Sia $\mathbf{M_k = a_m}$, ossia $\rho_k(\mathbf{a_m}) = n - 1$. Allora
  - 1) consideriamo un'alternativa $\mathbf{y = a_t}$ con $\mathbf{t > m}$
    - per ogni $h < k$, poiché $M_h \leq \mathbf{M_k = a_m} < \mathbf{a_t}$, e poiché $r_h$ è single peaked allora

      $\rho_h(\mathbf{a_m}) > \rho_h(\mathbf{a_t})$




    - nell'esempio in figura, k = rosa, m = 4, t = 6 e h = blu, dove abbiamo assunto blu = 1, rosa = 2 e verde = 3

# Il teorema del votante mediano

- **Teorema del votante mediano.** Sia $A = \{a_1 , a_2 , \ldots , a_n\}$ un insieme di alternative tali che $a_1 < a_2 < \ldots a_n$ , e sia $P = \langle r_1, r_2, \ldots , r_{2k-1} \rangle$ un profilo per A nel quale ogni ranking è single peaked e tale che $M_1 \leq M_2 \leq \ \ldots \leq M_{2k-1}$ , allora, per ogni $y \in A - \{M_k\}$

$$|\{ h : \rho_h(M_k) > \rho_h(y) \}| > |\{ h : \rho_h(y) > \rho_h (M_k) \}|$$

- Dimostrazione. Sia $\mathbf{M_k = a_m}$, ossia $\rho_k(\mathbf{a_m}) = n - 1$. Allora
  - 1) consideriamo un'alternativa $\mathbf{y = a_t}$ con $\mathbf{t > m}$
    - per ogni $h < k$, poichè $M_h \leq \mathbf{M_k = a_m} < \mathbf{a_t}$, e poiché $r_h$ è single peaked allora $\rho_h(\mathbf{a_m}) > \rho_h(\mathbf{a_t})$
    - ossia, tutti i votanti di indice $h < k$ preferiscono $\mathbf{a_m}$ ad $\mathbf{a_t}$
    - allora, i votanti che preferiscono $\mathbf{a_t}$ ad $\mathbf{a_m}$ possono essere solo quelli di indice $h > k$:

$$\{ h \in [2k-1]: \rho_h(\mathbf{a_t}) > \rho_h(\mathbf{a_m}) \} \subseteq \{ h \in [2k-1]: h > k \}$$

    - e quindi $|\{ h \in [2k-1]: \rho_h(\mathbf{a_t}) > \rho_h(\mathbf{a_m}) \}| \leq (2k-1) - k = k - 1$
    - cioè, per ogni $\mathbf{y} > \mathbf{M_k}$:

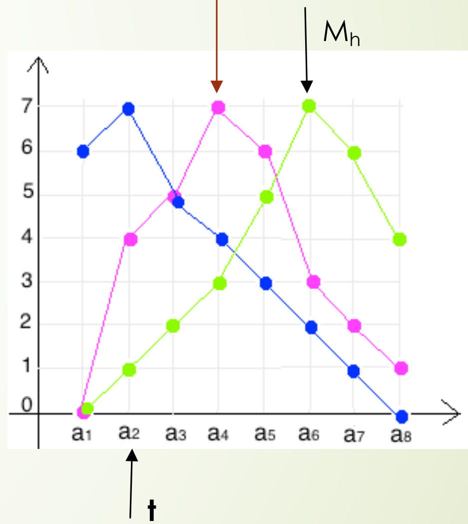
$$|\{ h \in [2k-1]: \rho_h(\mathbf{M_k}) > \rho_h(\mathbf{y}) \}| > |\{ h \in [2k-1]: \rho_h(\mathbf{y}) > \rho_h(\mathbf{M_k}) \}|$$

# Il teorema del votante mediano

- **Teorema del votante mediano.** Sia $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un insieme di alternative tali che $a_1 < a_2 < \dots a_n$, e sia $P = \langle r_1, r_2, \dots, r_{2k-1} \rangle$ un profilo per A nel quale ogni ranking è single peaked e tale che $M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_{2k-1}$, allora, per ogni $y \in A - \{M_k\}$

$$|\{ h : \rho_h(M_k) > \rho_h(y) \}| > |\{ h : \rho_h(y) > \rho_h(M_k) \}|$$

**$M_k = a_m$**




- Dimostrazione. Sia **$M_k = a_m$**, ossia $\rho_h(a_m) = n - 1$. Allora
  - 2) consideriamo un'alternativa **$y = a_t$** con **$t < m$**
    - per ogni $h > k$, poichè $a_t < a_m = M_k \leq M_h$, e poiché $r_h$ è single peaked allora

$$\rho_h(a_m) > \rho_h(a_t)$$

    - nell'esempio in figura, k = rosa, m = 4, t = 2 e h = verde, dove abbiamo assunto blu = 1, rosa = 2 e verde = 3

# Il teorema del votante mediano

- **Teorema del votante mediano.** Sia $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un insieme di alternative tali che $a_1 < a_2 < \ldots a_n$, e sia $P = \langle r_1, r_2, \ldots, r_{2k-1} \rangle$ un profilo per A nel quale ogni ranking è single peaked e tale che $M_1 \leq M_2 \leq \ldots \leq M_{2k-1}$, allora, per ogni $y \in A - \{M_k\}$

$$|\{ h : \rho_h(M_k) > \rho_h(y) \}| > |\{ h : \rho_h(y) > \rho_h(M_k) \}|$$

- Dimostrazione. Sia $\mathbf{M_k = a_m}$, ossia $\rho_h(\mathbf{a_m}) = n - 1$. Allora
  - 2) consideriamo un'alternativa $\mathbf{y = a_t}$ con $\mathbf{t < m}$
    - per ogni $h > k$, poichè $\mathbf{a_t} < \mathbf{a_m} = \mathbf{M_k} \leq M_h$, e poiché $r_h$ è single peaked allora $\rho_h(\mathbf{a_m}) > \rho_h(\mathbf{a_t})$
    - ossia, i votanti di indice $h > k$ preferiscono $\mathbf{a_m}$ ad $\mathbf{a_t}$
    - allora, i votanti che preferiscono $\mathbf{a_t}$ ad $\mathbf{a_m}$ possono essere solo quelli di indice $h < k$:

$$\{ h \in [2k-1]: \rho_h(\mathbf{a_t}) > \rho_h(\mathbf{a_m}) \} \subseteq \{ h \in [2k-1]: h < k \}$$

    - e quindi $|\{ h \in [2k-1]: \rho_h(\mathbf{a_t}) > r\, \rho_h(\mathbf{a_m}) \}| \leq (2k-1) - k = k - 1$
    - cioè, per ogni $\mathbf{y} > \mathbf{M_k}$:

$$|\{ h \in [2k-1]: \rho_h(\mathbf{M_k}) > \rho_h(\mathbf{y}) \}| > |\{ h \in [2k-1]: \rho_h(\mathbf{y}) > \rho_h(\mathbf{M_k}) \}|$$

# Il teorema del votante mediano

- **Teorema del votante mediano.** Sia $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un insieme di alternative tali che $a_1 < a_2 < \ldots a_n$, e sia $P = \langle r_1, r_2, \ldots, r_{2k-1} \rangle$ un profilo per A nel quale ogni ranking è single peaked e tale che $M_1 \leq M_2 \leq \ldots \leq M_{2k-1}$, allora, per ogni $y \in A - \{M_k\}$

$$|\{ h : \rho_h(M_k) > \rho_h(y) \}| > |\{ h : \rho_h(y) > \rho_h(M_k) \}|$$

- Dimostrazione. Sia $\mathbf{M_k = a_m}$, ossia $\rho_h(\mathbf{a_m}) = n - 1$. Allora
  - 1) per ogni alternativa $\mathbf{y = a_t}$ con $\mathbf{t > m}$:
    - $|\{ h \in [2k-1]: r_h(\mathbf{M_k}) > r_h(\mathbf{y}) \}| > |\{ h \in [2k-1]: r_h(\mathbf{y}) > r_h(\mathbf{M_k}) \}|$
  - 2) per ogni alternativa $\mathbf{y = a_t}$ con $\mathbf{t < m}$
    - $|\{ h \in [2k-1]: r_h(\mathbf{M_k}) > r_h(\mathbf{y}) \}| > |\{ h \in [2k-1]: r_h(\mathbf{y}) > r_h(\mathbf{M_k}) \}|$
  - ossia, per ogni alternativa $\mathbf{y} \in A - \{\mathbf{M_k}\}$

$$|\{ h \in [2k-1]: r_h(\mathbf{M_k}) > r_h(\mathbf{y}) \}| > |\{ h \in [2k-1]: r_h(\mathbf{y}) > r_h(\mathbf{M_k}) \}|$$

QED