Sistemi di Voto: Il Teorema di Arrow e il Votante Mediano

Trascrizione fedele della presentazione

1 Il Teorema (di impossibilità) di Arrow

Il teorema di Arrow individua l'unico sistema di voto che rispetta i principi **U** (Unanimità) e **IIA** (Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti).

Teorema 1 (Teorema di Arrow). *Se il sistema di voto σ soddisfa i principi U e IIA, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > 2$, esiste $j \in [k]$ (un votante) tale che, per ogni k-upla $\langle r_1, r_2, ..., r_k \rangle$ di ranking per n alternative, il voto collettivo r derivato in accordo a σ corrisponde al ranking del votante j.*

In altre parole:

$$r = r_j$$

Riassumiamo: per ogni insieme $[k]$ di votanti esiste $j \in [k]$ tale che il voto collettivo è identico al voto individuale di j. ***Cioè, l'unico sistema di voto che rispetta U e IIA è la dittatura.***

2 Dimostrazione del Teorema di Arrow

Prima di procedere con la dimostrazione, introduciamo alcune definizioni.

Definizione 1 (Profilo). *Dati un insieme $[n]$ di alternative e un insieme $[k]$ di votanti, un* ***profilo*** *è una k-upla $P = \langle r_1, r_2, ..., r_k \rangle$ di ranking, ciascuno espressione del voto di uno dei votanti per quelle alternative.*

Esempio 1. *Un profilo di 6 votanti $(r_1, ..., r_6)$ su 4 alternative (a, b, c, d):*

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
a	b	c	d	b	a
b	a	d	c	c	d
c	c	b	b	a	c
d	d	a	a	d	b

Definizione 2 (Alternativa Polarizzante). *Dati un insieme $[n]$ di alternative, un insieme $[k]$ di votanti, e un profilo $P = \langle r_1, ..., r_k \rangle$, un'alternativa $x \in [n]$ è* ***polarizzante*** *per P se per ogni $h \in [k]$:*

$$\rho_h(x) = 0 \quad \textit{oppure} \quad \rho_h(x) = n - 1$$

In pratica, per ogni votante, l'alternativa x è o al primo posto o all'ultimo.

r_1	a	b	c	d
r_2	b	d	c	a
r_3	a	c	d	b
r_4	a	c	b	d
r_5	b	c	d	a
r_6	a	d	c	b

2.1 Schema della Dimostrazione

Dimostriamo il teorema in tre passi:

1. Dimostriamo che se x è un'alternativa polarizzante per un profilo P, allora nel ranking collettivo $\rho(x) = 0$ oppure $\rho(x) = n - 1$.

2. Definiamo una successione di $k + 1$ profili in ciascuno dei quali una stessa $x \in [n]$ è polarizzante e, tramite essi, individuiamo un **dittatore potenziale**.

3. Dimostriamo che il dittatore potenziale è, effettivamente, il dittatore cercato.

2.2 Passo 1: Analisi dell'alternativa polarizzante

Sia x un'alternativa polarizzante per $P = \langle r_1, ..., r_k \rangle$. Vogliamo mostrare che $\rho(x) = 0$ oppure $\rho(x) = n - 1$.

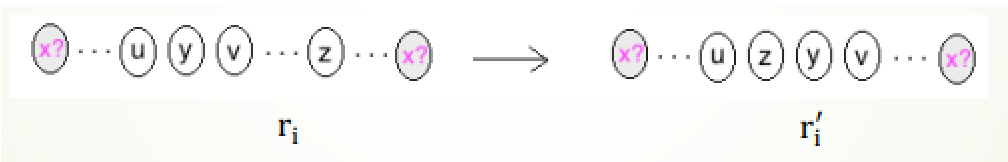
Supponiamo per assurdo che $0 < \rho(x) < n - 1$. Allora esistono due alternative $y, z \in [n]$ tali che:

$$\rho(z) < \rho(x) < \rho(y)$$

Creiamo un nuovo profilo $P' = \langle r'_1, ..., r'_k \rangle$ nel modo seguente:

- Per ogni $i \in [k]$ tale che $\rho_i(y) < \rho_i(z)$, poniamo $r'_i = r_i$.

- Per ogni $i \in [k]$ tale che $\rho_i(y) > \rho_i(z)$, r'_i è ottenuto da r_i spostando z alla sinistra di y, in modo che $\rho'_i(z) = \rho'_i(y) + 1$.



Poiché x non è stata coinvolta negli spostamenti (essendo polarizzante era agli estremi), x è polarizzante anche per P'. Inoltre:

- Per ogni $i \in [k]$, non sono variati gli ordini relativi di (x, y) e di (x, z).

- Per ogni $i \in [k]$, vale $\rho'_i(y) < \rho'_i(z)$.

Applicazione dei principi:

- Poiché gli ordini relativi di (x, z) non sono variati, per **IIA**: $\rho(x) < \rho(z) \leftrightarrow \rho'(x) < \rho'(z)$.
- Poiché gli ordini relativi di (x, y) non sono variati, per **IIA**: $\rho(x) < \rho(y) \leftrightarrow \rho'(x) < \rho'(y)$.

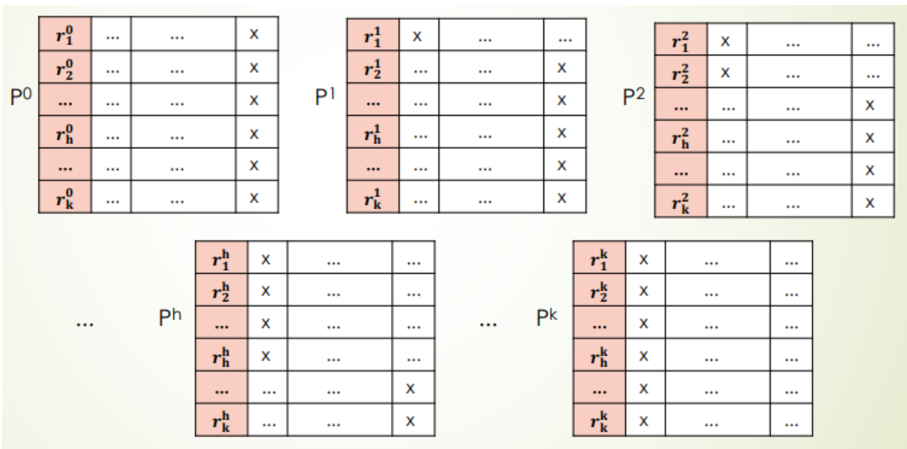
Dalla supposizione iniziale $\rho(z) < \rho(x) < \rho(y)$, deduciamo che $\rho'(z) < \rho'(x)$ e $\rho'(x) < \rho'(y)$. Quindi $\rho'(z) < \rho'(y)$.

Tuttavia, nel profilo modificato P', per ogni votante i, $\rho'_i(y) < \rho'_i(z)$. Per il principio di **Unanimità (U)**, deve essere $\rho'(y) < \rho'(z)$. Otteniamo quindi $\rho'(z) < \rho'(x) < \rho'(y) < \rho'(z)$, un assurdo.

2.3 Passo 2: Individuazione del dittatore potenziale

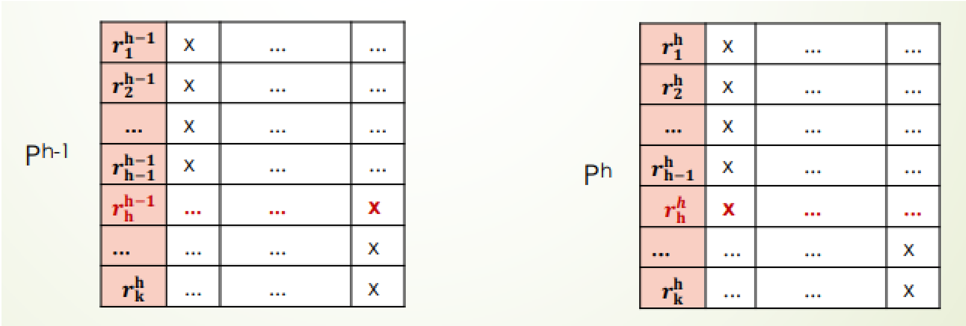
Definiamo una successione di $k + 1$ profili. Scegliamo $x \in [n]$.

- **Profilo P^0:** x è in ultima posizione per tutti i ranking ($\rho_i^0(x) = 0$ per ogni i).
- **Profilo P^1:** x è prima nel ranking r_1^1, ultima in tutti gli altri.
- ...
- **Profilo P^h:** x è in prima posizione nei ranking r_i^h con $i \leq h$, e in ultima posizione per $i > h$.
- ...
- **Profilo P^k:** x è in prima posizione per tutti i votanti.



Consideriamo due profili adiacenti P^{h-1} e P^h. Essi differiscono solo per il voto dell'h-esimo votante:

- In P^{h-1}, l'h-esimo votante giudica x ultima ($\rho_h^{h-1}(x) = 0$).
- In P^h, l'h-esimo votante giudica x prima ($\rho_h^h(x) = n - 1$).



Le posizioni delle altre alternative rimangono invariate.

In virtù del principio **U** (unanimità):

- Per P^0, $\rho^0(x) = 0$ (tutti la odiano).
- Per P^k, $\rho^k(x) = n - 1$ (tutti la amano).

Allora, deve esistere un indice $j \in [k]$ (punto di scatto) tale che:

$$\rho^h(x) = 0 \text{ per ogni } h < j, \quad \text{e} \quad \rho^j(x) > 0$$

Poiché x è polarizzante per P^j (per costruzione), dal Passo 1 sappiamo che il ranking collettivo deve essere o 0 o $n-1$. Dato che $\rho^j(x) > 0$, deve essere $\rho^j(x) = n - 1$.

Il votante j è il dittatore potenziale: ha il potere di far passare x dall'ultima alla prima posizione nel ranking sociale semplicemente cambiando il suo voto.

2.4 Passo 3: Conferma del dittatore

Dobbiamo mostrare che j è effettivamente il dittatore per *qualsiasi* profilo Q. Sia r^Q il ranking collettivo per un generico profilo Q. Dobbiamo mostrare che $r^Q = r_j^Q$.

Questo equivale a mostrare che per ogni coppia $y, z \in [n]$:

$$\rho^Q(y) > \rho^Q(z) \leftrightarrow \rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)$$

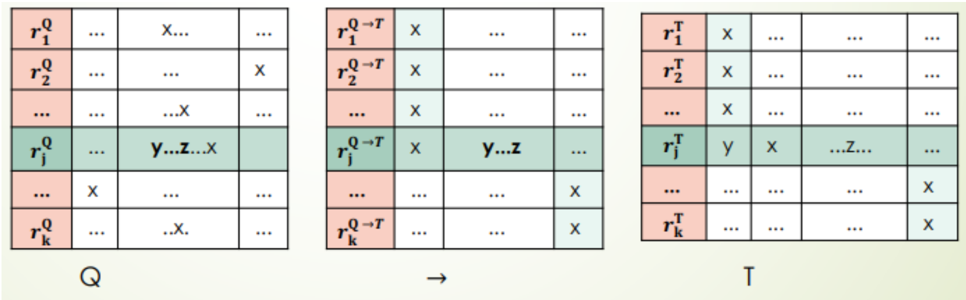
Realizziamo questo in due sottopassi.

2.4.1 Passo 3.1: Caso $y \neq x$ e $z \neq x$

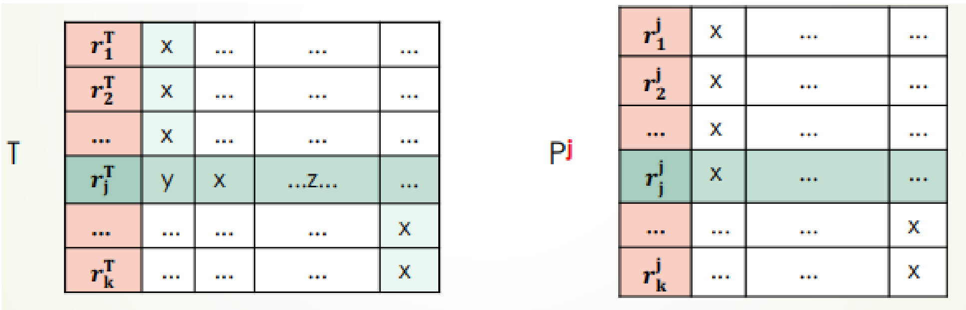
Supponiamo senza perdita di generalità che $\rho_j^Q(y) > \rho_j^Q(z)$. Costruiamo da Q un nuovo profilo T:

- Per ogni $h < j$: poniamo x in testa a r_h^T (il resto invariato come in Q).
- Per ogni $h > j$: poniamo x in coda a r_h^T (il resto invariato come in Q).
- Per il votante j: poniamo y in testa a r_j^T, seguito da x (spostiamo y in testa).

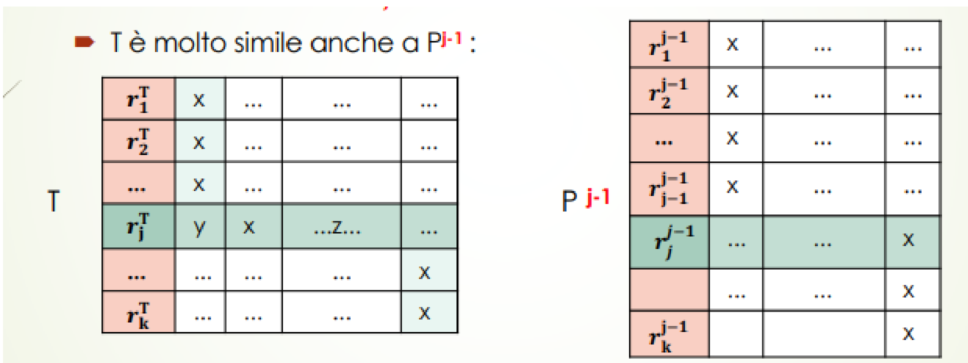
Confrontiamo T con i profili P^j e P^{j-1} definiti al Passo 2.



1. **Confronto con P^j:** L'ordine relativo di (x, z) è lo stesso in P^j e in T per tutti i votanti. Sappiamo che $\rho^j(x) = n - 1$ (x vince su tutto), quindi $\rho^j(x) > \rho^j(z)$. Per IIA, $\rho^T(x) > \rho^T(z)$.



2. **Confronto con P^{j-1}:** L'ordine relativo di (x, y) è lo stesso in P^{j-1} e in T per tutti i votanti. Sappiamo che $\rho^{j-1}(x) = 0$ (x perde contro tutto), quindi $\rho^{j-1}(x) < \rho^{j-1}(y)$. Per IIA, $\rho^T(x) < \rho^T(y)$.



Mettendo insieme i risultati: $\rho^T(z) < \rho^T(x) < \rho^T(y) \implies \rho^T(y) > \rho^T(z)$.

Poiché per tutti i votanti l'ordine relativo di y e z è lo stesso in Q e in T, per IIA concludiamo:

$$\rho^Q(y) > \rho^Q(z)$$

Questo prova la dittatura per coppie che non coinvolgono x.

2.4.2 Passo 3.2: Caso generico ($y \neq x$)

Dobbiamo dimostrare che $\rho^Q(y) > \rho^Q(x) \leftrightarrow \rho^Q_j(y) > \rho^Q_j(x)$. Poiché $n > 2$, esiste un terzo elemento z diverso da x e da y.

Costruiamo una nuova sequenza di profili $T^0, ..., T^k$ usando z come alternativa mobile (esattamente come abbiamo fatto con x al Passo 2). Esisterà un dittatore potenziale $l \in [k]$ per l'alternativa z. Per quanto dimostrato al punto 3.1 (applicato a z), per ogni profilo Q, se $y \neq z$ e $v \neq z$:

$$\rho^Q(y) > \rho^Q(v) \leftrightarrow \rho_l^Q(y) > \rho_l^Q(v)$$

In particolare, poiché $x \neq z$, vale per la coppia (y, x). Resta solo da dimostrare che $l = j$.

Dimostrazione che $l = j$:

- **Non può essere $l < j$:** Consideriamo il profilo P^{j-1} (definito su x). In P^{j-1}, $\rho^{j-1}(x) = 0$ (collettivo). Tuttavia, per ogni $i \leq j-1$, $\rho_i(x) = n-1$. Essendo $l < j$, anche il votante l ha x in testa: $\rho_l^{j-1}(x) = n-1$. Il ranking collettivo dice che x perde, ma il votante l dice che x vince. Quindi l non è dittatore per questo profilo.
- **Non può essere $l > j$:** Consideriamo il profilo P^j (definito su x). In P^j, $\rho^j(x) = n-1$ (collettivo). Per ogni $i > j$, $\rho_i(x) = 0$. Essendo $l > j$, il votante l ha x in coda: $\rho_l^j(x) = 0$. Il ranking collettivo dice che x vince, ma il votante l dice che x perde.

Pertanto, deve essere $l = j$. Q.E.D.

3 Preferenze Single Peaked (Uninominali)

Il teorema di Arrow presenta una prospettiva cupa (la dittatura come unico sistema "perfetto"). Tuttavia, se le preferenze hanno certe caratteristiche strutturali, il risultato può essere aggirato.

Definizione 3 (Single Peaked Preferences)**.** *Supponiamo che le alternative siano un insieme totalmente ordinato $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ con $a_i < a_{i+1}$. Il ranking del votante h, r_h, è **single peaked** se, comunque si scelgano tre alternative $a_i < a_j < a_l$, non accade mai che a_j sia peggiore sia di a_i che di a_l. Formalmente:*

$$\forall a_i, a_j, a_l \in A : a_i < a_j < a_l \implies \neg(\rho_h(a_j) < \rho_h(a_i) \land \rho_h(a_j) < \rho_h(a_l))$$

Graficamente, considerando ρ_h come una funzione sul dominio ordinato delle alternative, la curva non ha minimi relativi (ha un solo picco).

Osservazione 1. *Questa ipotesi è ragionevole in contesti politici (Sinistra $\leftrightarrow$ Destra) o economici (Prezzo Basso $\leftrightarrow$ Prezzo Alto), dove le preferenze tendono a concentrarsi attorno a un punto ideale.*

Supponiamo di avere un profilo P dove ogni ranking è single peaked. Indichiamo con M_h l'alternativa preferita (il picco) del votante h. Possiamo riordinare i votanti in modo tale che:

$$M_1 \leq M_2 \leq ... \leq M_k$$

4 Il Teorema del Votante Mediano

Nel caso di preferenze single peaked, il sistema di voto a maggioranza non incorre nel paradosso di Condorcet.

Teorema 2 (Teorema del Votante Mediano)**.** *Sia* $A = \{a_1, ..., a_n\}$ *un insieme di alternative ordinate e sia* $P = \langle r_1, ..., r_{2k-1} \rangle$ *un profilo di* $2k - 1$ *votanti (numero dispari) con preferenze single peaked, ordinati tale che* $M_1 \leq M_2 \leq ... \leq M_{2k-1}$. *Allora, l'alternativa mediana* M_k *batte ogni altra alternativa* y *nei confronti a coppie.*

$$\forall y \in A - \{M_k\}, \quad |\{h : \rho_h(M_k) > \rho_h(y)\}| > |\{h : \rho_h(y) > \rho_h(M_k)\}|$$

In pratica, l'alternativa preferita dal votante che si trova in posizione centrale (rispetto all'ordinamento dei picchi) vince su tutte le altre.

4.1 Esempio Applicativo

Consideriamo $n = 8$ alternative e $k = 2$ (quindi $2(2) - 1 = 3$ votanti: Blu, Rosa, Verde). Supponiamo i picchi siano ordinati. L'alternativa vincente sarà il picco del votante mediano (il secondo).

Possiamo costruire il ranking collettivo iterativamente:

1. Troviamo il mediano dei picchi attuali $\rightarrow$ Quella è la 1° classificata.
2. Rimuoviamo l'alternativa vincente. Le preferenze rimangono single peaked sulle alternative restanti.
3. Ripetiamo il processo.

(Dalle slide viene mostrato un esempio grafico in cui i picchi si spostano e si ricalcola il mediano per determinare l'ordine: $a_4, a_5, a_3, a_2, a_6, a_7, a_8, a_1$*).*

4.2 Dimostrazione del Teorema del Votante Mediano

Sia $M_k = a_m$ il picco del votante mediano. Dobbiamo mostrare che la maggioranza preferisce a_m a una generica y.

Caso 1: $y = a_t$ **con** $t > m$ **(l'alternativa è a destra del mediano)** Per ogni votante $h < k$ (i votanti a sinistra del mediano), il picco M_h soddisfa $M_h \leq M_k = a_m < a_t$. Essendo le preferenze single peaked e trovandosi a_m tra il picco M_h e a_t, il votante deve preferire a_m ad a_t.

$$\rho_h(a_m) > \rho_h(a_t)$$

Questo vale per tutti gli $h \in \{1, ..., k\}$. Quindi almeno k votanti (la maggioranza di $2k-1$) preferiscono M_k.

Caso 2: $y = a_t$ **con** $t < m$ **(l'alternativa è a sinistra del mediano)** Per ogni votante $h > k$ (i votanti a destra del mediano), il picco M_h soddisfa $a_t < a_m = M_k \leq M_h$. Essendo le preferenze single peaked e trovandosi a_m tra a_t e il picco M_h, il votante deve preferire a_m ad a_t.

$$\rho_h(a_m) > \rho_h(a_t)$$

Anche qui, questo vale per tutti gli $h \in \{k, ..., 2k - 1\}$. Quindi almeno k votanti preferiscono M_k.

In entrambi i casi, M_k ottiene la maggioranza assoluta contro qualsiasi y. Q.E.D.