Grafi Geometrici Aleatori e Reti Wireless
Delimitazione Superiore

Introduzione e Modelli

Queste slide affrontano il tema dei grafi geometrici aleatori e delle loro applicazioni alle reti wireless. Si parte dal confronto con i classici modelli di grafi aleatori come Erdős-Rényi e i modelli “rich-get-richer”. Questi ultimi descrivono reti virtuali, dove gli archi rappresentano relazioni non fisiche (ad esempio amicizie, hyperlink ecc.)

Quando si passa a implementare reti fisiche (ad esempio sensori o calcolatori distribuiti in uno spazio), è essenziale considerare la struttura geometrica dello spazio.

Definizione di Grafo Geometrico

Un **grafo geometrico** $G(V, r)$ è costituito da:

- Un insieme V di punti in uno spazio metrico (es: piano cartesiano $\mathbb{R}^2$), con coordinate conosciute.
- Un parametro $r > 0$ che definisce la soglia oltre cui viene creato un arco.

Gli archi si formano tra tutte le coppie di punti (A, B) tale che la distanza euclidea $d(A, B) \leq r$.

Ciascun punto A è individuato da una coppia di coordinate: $A = (xA, yA)$

Gli archi del grafo individuato da V e r sono tutte e sole le coppie di punti la cui distanza euclidea è $\leq r$:

$$E = \{(A, B) : A \in V \wedge B \in V \wedge \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \leq r\}$$

Unit Disk Graph: Si ottiene normalizzando $r = 1$. Nel nostro caso si lavora con la versione non normalizzata.

Grafi Geometrici Aleatori

- Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e $r > 0$ (come vedremo, $r \leq \sqrt{2}$)
- scegliamo ***uniformemente a caso*** n punti nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$
- e costruiamo il grafo geometrico $G(n, r)$ corrispondente

  - poiché i punti sono scelti nel quadrato unitario, e la diagonale del quadrato misura $\sqrt{2}$, è sufficiente scegliere $r \leq \sqrt{2}$
  - infatti, con $r = \sqrt{2}$ otteniamo un grafo completo ed è dunque inutile scegliere per r un valore maggiore di $\sqrt{2}$

- Naturalmente, la aleatorietà del grafo $G(n, r)$ dipende dalla scelta dei punti nel quadrato unitario
  - quando $r < \sqrt{2}$ e $r > 0$
  - perché per ogni scelta di n il grafo $G(n, \sqrt{2})$ è un grafo fissato (qualunque sia n, $G(n, \sqrt{2})$ è sempre un grafo completo)
  - e per ogni scelta di n il grafo $G(n, 0)$ è un grafo fissato (qualunque sia n, $G(n, 0)$ è sempre un grafo costituito da soli nodi isolati)

Probabilità di Connessione

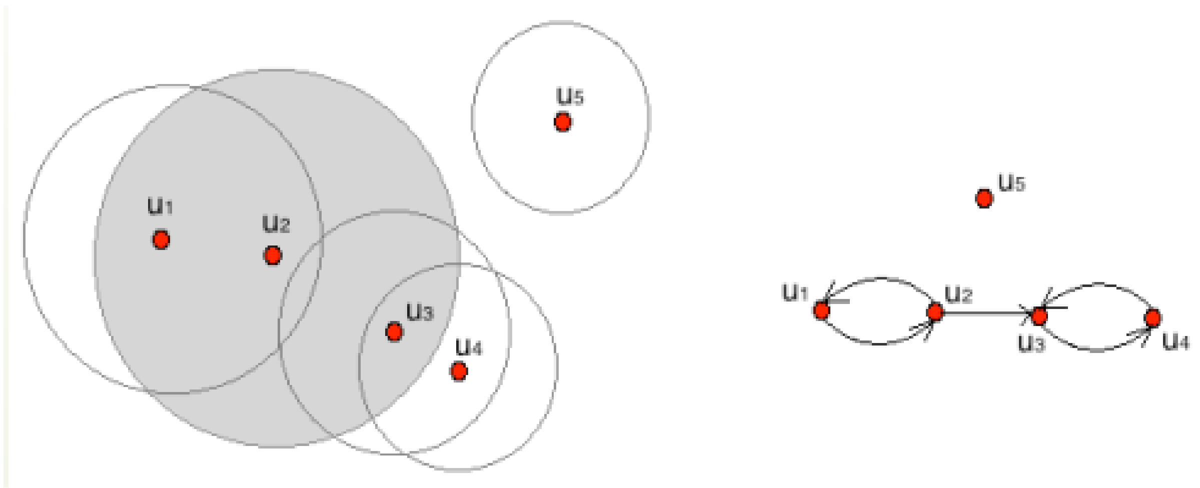
Per uno studio probabilistico sulla connessione del grafo $G_{n,r}$:

- Analogamente al modello di Erdős-Rényi dove la probabilità di arco $p = p(n)$, qui si pone $r = r(n)$.
- Il problema: trovare il valore minimo di $r(n)$ che garantisce con alta probabilità che il grafo sia connesso.
- Applicazione: reti wireless ad-hoc, con dispositivi dotati di trasmettitori con raggio limitato.

Modello di Rete Wireless

Ogni device ha un ricetrasmettitore (configurato per un certo raggio r_x). Il grafo di comunicazione è diretto: c'è un arco da x verso y se $d(x, y) \leq r_x$.

La comunicazione multi-hop consente di raggiungere dispositivi fuori dal raggio diretto tramite un cammino nel grafo.



- Il grafo diretto che rappresenta la rete è chiamato ***grafo di comunicazione***

- E se un nodo vuole trasmettere un messaggio ad un dispositivo più lontano del suo raggio di trasmissione?
  - prova a utilizzare un percorso all'interno del grafo
  - nell'esempio u_1 può inviare un messaggio a u_4 utilizzando il percorso (u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_4)

Condizioni di Connessione

Affinché ogni nodo possa comunicare con qualunque altro, il grafo dev'essere fortemente connesso. Basta impostare ogni raggio uguale alla massima distanza possibile, ma questo è inefficiente dal punto di vista energetico.

- E questo è facile: se configuriamo il trasmettitore di ciascun nodo ad un raggio di trasmissione pari alla distanza di quel nodo dal nodo ad esso più distante
  - ossia, detto V l'insieme dei nodi e indicata con $d(u, v)$ la distanza fra i nodi u e v, per ogni $u \in V$ poniamo $r_u = \max\{d(u, v) : v \in V - \{u\}\}$

Formalizzazione Algebrica

Supponiamo che tutti i nodi abbiano lo stesso raggio r e siano distribuiti uniformemente. La rete si modella come grafo geometrico aleatorio.

Problema: Trovare il valore minimo di r_n affinché G_{n,r_n} sia connesso.

dati n punti distribuiti uniformemente a caso nel quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, calcolare il valore minimo di $r(n)$ affinché $G(n, r(n))$ sia connesso

Teoremi Fondamentali

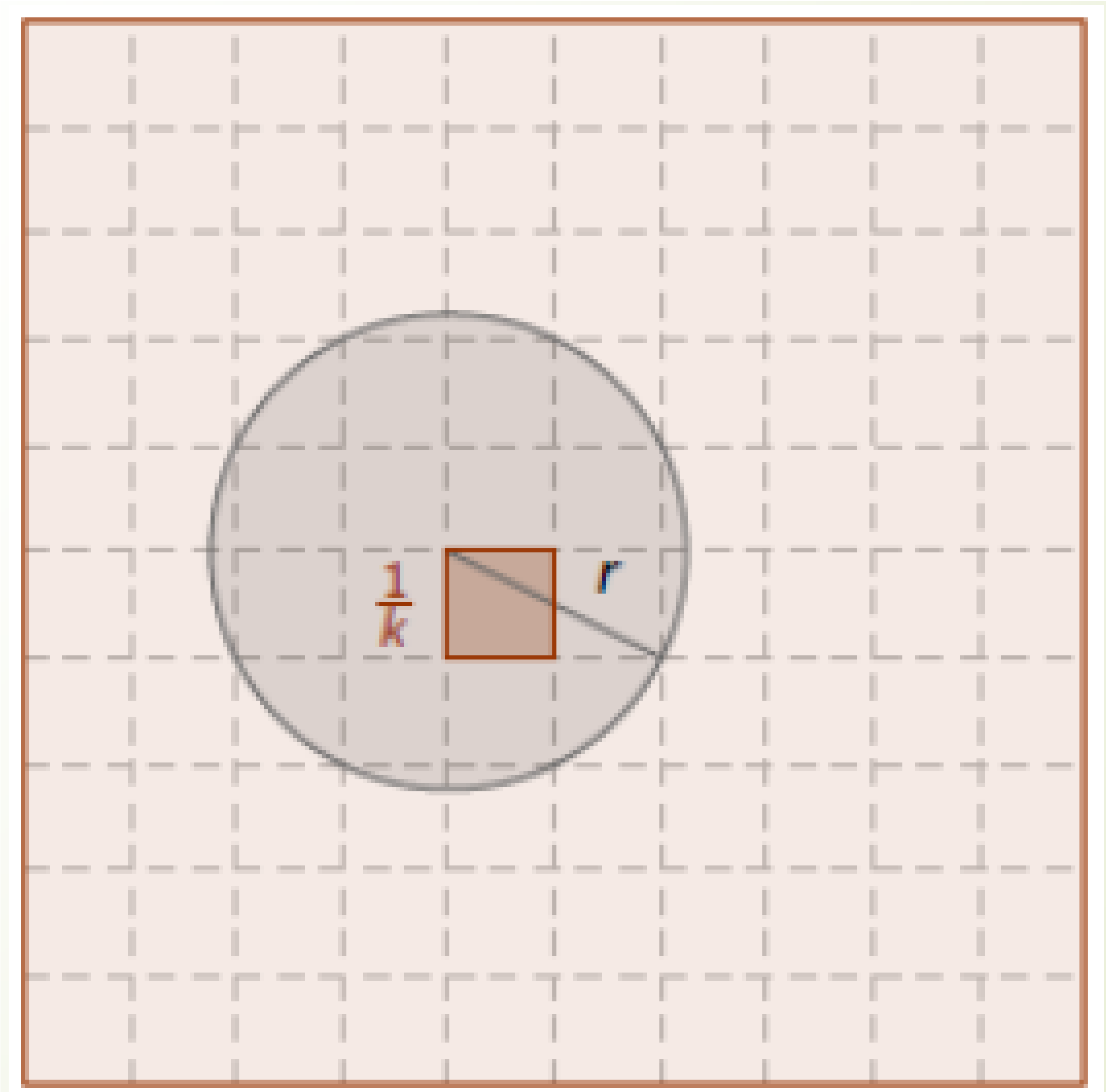
Delimitazione Superiore

Teorema: Esiste una costante $\lambda_1 > 0$ tale che se

$$r(n) \geq \lambda_1 \sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

allora G_{n,r_n} è connesso con alta probabilità.

Dimostrazione sintetica:



- sia $k(n) > 0$ un intero dipendente da n
- Si suddivide il quadrato Q in k_n^2 celle di lato $1/k_n$ (con k_n intero dipendente da n).
- e poniamo $r(n)$ pari alla lunghezza della diagonale di una coppia di celle adiacenti
  - due celle sono adiacenti se hanno *un lato* in comune
  - ossia, $r(n) = \sqrt{\left(\frac{2}{k(n)}\right)^2 + \left(\frac{1}{k(n)}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{k(n)}$
- poniamo $r(n) = \frac{\sqrt{5}}{k(n)}$, ossia, pari alla lunghezza della diagonale di una coppia di celle adiacenti
  In questo modo, ciascun nodo in una qualsiasi cella è collegato da un arco a tutti i nodi (eventualmente) contenuti in tutte le celle adiacenti
  Perciò, *se riuscissimo a dimostrare* che
  - con alta probabilità

- ciascuna cella contiene almeno un nodo

avremmo dimostrato che $G(n, r(n))$ è connesso con alta probabilità

- Dimostriamo, ora, che **è possibile scegliere $k(n)$ in modo tale che, con alta probabilità, nessuna cella è vuota**
  Invece di calcolare direttamente la probabilità di **questo evento**, calcoliamo la probabilità dell'evento complementare, ossia: **esiste almeno una cella vuota**

- Sia C una cella: il primo passo sarà trovare una delimitazione superiore a $P(C = \varnothing)$
- per farlo esprimiamo l'evento "$C = \varnothing$" come intersezione di eventi:
- l'evento "$C = \varnothing$" coincide con l'evento "$1 \notin C$ e $2 \notin C$ e $\ldots$ e $n \notin C$", che esprimiamo sinteticamente come "$\bigcap_{1 \leq i \leq n} (i \notin C)$"
- Quindi, $P(C = \varnothing) = P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} (i \notin C)\right)$
- Abbiamo posto $r(n) = \sqrt{\left(\frac{2}{k(n)}\right)^2 + \left(\frac{1}{k(n)}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{k(n)}$
- sia C una cella: $P(C = \varnothing) = P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} (i \notin C)\right)$
- poiché i nodi sono posizionati in Q *indipendentemente* gli uni dagli altri,

$$P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} (i \notin C)\right) = \prod_{1 \leq i \leq n} P(i \notin C)$$

- Sia i un nodo: la probabilità che il nodo i sia scelto all'interno della cella C è pari al rapporto fra l'area di C e l'area del quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$
  - e, naturalmente, l'area di Q è pari a 1

  Quindi: $P(i \in C) = \frac{\text{area di } C}{\text{area di } Q} = \frac{1}{k^2(n)}$
  e conseguentemente $P(i \notin C) = 1 - \frac{1}{k^2(n)}$
- allora,

$$\begin{aligned} P(C = \varnothing) &= P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} (i \notin C)\right) \\ &= \prod_{1 \leq i \leq n} P(i \notin C) \\ &= \left(1 - \frac{1}{k^2(n)}\right)^n \end{aligned}$$

- Abbiamo posto $r(n) = \sqrt{\left(\frac{2}{k(n)}\right)^2 + \left(\frac{1}{k(n)}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{k(n)}$
- sia C una cella: $P(C = \varnothing) = \left(1 - \frac{1}{k^2(n)}\right)^n$

- A questo punto, $P(\exists\, C : C = \varnothing) = P\left(\bigcup_{C \in Q}[C = \varnothing]\right) \leq \sum_{C \in Q} P(C = \varnothing)$
  - dove l'ultima disuguaglianza segue dallo Union Bound: la probabilità dell'unione di eventi è minore o uguale alla somma delle probabilità dei singoli eventi
- e quindi $P(\exists\, C : C = \varnothing) \leq k^2(n)\left(1 - \frac{1}{k^2(n)}\right)^n$
- da cui, sostituendo $\frac{\sqrt{5}}{r(n)}$ a $k(n)$,

$$P(\exists\, C : C = \varnothing) \leq \frac{5}{r^2(n)}\left(1 - \frac{r^2(n)}{5}\right)^n$$

- infine, ponendo $\mathbf{r(n)} = \gamma_{\mathbf{1}}\sqrt{\frac{\ln \mathbf{n}}{\mathbf{n}}}$ otteniamo

$$\boxed{P(\exists\, C : C = \varnothing) \leq \frac{5}{\gamma_1^2 \ln n}\left(1 - \frac{\gamma_1^2 \ln n}{5n}\right)^n}$$

Lemma Tecnico

<u>Lemma</u>: Per ogni $x \in \mathbb{R}$: $1 - x \leq e^{-x}$. Inoltre, se $x \neq 0$ allora $1 - x < e^{-x}$.

- Definiamo la funzione $G(x) = 1 - x - e^{-x}$
- Calcoliamo la derivata prima di $G(x)$: $G'(x) = e^{-x} - 1$
- Studiamo il segno di $G'(x)$: $e^{-x} - 1 \geq 0 \implies e^{-x} \geq 1 \implies e^{-x} \geq e^0 \implies x \leq 0$
- $G'(x) \geq 0$ per $x \leq 0$: allora, $G(x)$ ha un punto di massimo relativo in $x = 0$
- inoltre, essendo l'unico punto in cui la derivata si annulla, $x = 0$ è anche un punto di massimo assoluto
- Poiché $G(0) = 1 - 0 - e^{-0} = 0$, questo implica che
  - $G(x) \leq G(0) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ossia $1 - x \leq e^{-x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
  - $G(x) < G(0) = 0$ per ogni $x \neq 0$

Conclusione della Delimitazione Superiore

Si dimostra che, fissando correttamente r_n, la probabilità che il grafo non sia connesso è trascurabile.