2 Modalità di convergenza

Gli strumenti fondamentali per studiare procedure e metodi statistici da un punto di vista matematico sono forniti dai teoremi di convergenza asintotica. Prima di poterli enunciare, è molto importante capire quali siano le principali modalità di convergenza per sequenze di varianili aleatorie, e studiare le relazioni che intercorrono tra loro.

Definition 17 *((1): Convergenza in Legge, o Convergenza in Distribuzione) Sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie; diremo che la sequenza converge in legge alla variabile aleatoria* X *(scritto* $X_n \rightarrow_d X$*) se e solo se si ha*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \text{ per ogni } x \text{ punto di continuità di } F_X(.) \; .$$

Remark 18 *Nella definizione precedente non abbiamo specificato né lo spazio di probabilità su cui è definita la sequenza* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *, né quello su cui è definita* X*. Non è stata una dimenticanza: non è infatti necessario che tali spazi siano gli stessi, anzi lo spazio di probabilità può persino essere diverso al variare di* n*, cioè potremmo considerare v.a. definite su sequenze* $\{\Omega_n, \Im_n, \mathbb{P}_n\}$ *.*

Remark 19 *Si potrebbe pensare di introdurre una definizione diversa di convergenza in probabilità, lasciando cadere il requisito che la convergenza avvenga solo nei punti di continuità della funzione di distribuzione* $F_X(.)$*. Si vede facilmnente che questo darebbe adito però ad alcuni gravi paradossi. Si consideri ad esempio la sequenza deterministica* $X_n = \frac{1}{n}$*; considerate come variabili aleatorie, le* X_n *hanno funzione di ripartizione* $F_{X_n}(x) = \mathbb{I}_{[\frac{1}{n},\infty)}(x)$*. Prendiamo adesso la variabile aleatoria identicamente uguale a zero* $X = 0$*, la cui funzione di distribuzione è* $F_X(x) = \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$ *abbiamo che*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(0) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq F_X(0) = 1 \; .$$

Pertanto se richiedessimo la convergenza delle funzioni di continuità in ogni punto dovremmo concludere che la sequenza $\frac{1}{n}$ *non converge in distribuzione a* 0*, quando* $n \to \infty$*.*

Example 20 *Sia* X_n *una sequenza di variabilie binomiali con funzione di probabilità discreta*

$$\Pr\{X_n = k\} = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}, \; k = 0, 1, 2, ..., n \text{ (0 altrimenti)},$$

dove $p_n := \frac{\lambda}{n}$*,* $\lambda > 0$*. Abbiamo che* $X_n \rightarrow_d X$*,* $X \sim Pois(\lambda)$ *. Infatti si verifica* *facilmente che*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \Pr\{X_n = k\} &= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} (1-\frac{\lambda}{n})^n (1-\frac{\lambda}{n})^{-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} (\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k}) (\lim_{n\to\infty} (1-\frac{\lambda}{n})^n) (\lim_{n\to\infty} (1-\frac{\lambda}{n})^{-k}) \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},
\end{aligned}$$

usando limiti notevoli conosciuti dai primi corsi di Analisi.

Definition 21 *((2): Convergenza in Probabilità o Convergenza Debole) Sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie definita sullo spazio di probabilità* $\{\Omega, \Im, \mathbb{P}\}$*; sia inoltre* X, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *una variabile aleatoria definita sullo stesso spazio di probabilità. Diremo che la sequenza converge in probabilità alla variabile aleatoria* X *(scritto* $X_n \to_p X$*) se e solo se si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0 \text{ per ogni } \varepsilon > 0 \ .$$

Lemma 22 *((2) ⇒ (1)) La convergenza in probabilità implica la convergenza in distribuzione, cioè* $\{X_n \to_p X\} \Rightarrow \{X_n \to_d X\}$.

Proof. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
F_{X_n}(x) &= \mathbb{P}\{X_n \le x\} \\
&= \mathbb{P}\{X_n \le x, |X_n - X| > \varepsilon\} + \mathbb{P}\{X_n \le x, |X_n - X| \le \varepsilon\} \\
&\le \mathbb{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} + F_X\{X \le x + \varepsilon\} \ .
\end{aligned}$$

Similmente

$$\begin{aligned}
F_X(x-\varepsilon) &= \mathbb{P}\{X \le x - \varepsilon\} \\
&= \mathbb{P}\{X \le x - \varepsilon, |X_n - X| > \varepsilon\} + \mathbb{P}\{X \le x - \varepsilon, |X_n - X| \le \varepsilon\} \\
&\le \mathbb{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} + F_{X_n}\{X \le x\}
\end{aligned}$$

e dunque

$$F_X(x-\varepsilon) - \mathbb{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} \le F_{X_n}\{X \le x\} \ .$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
F_X(x-\varepsilon) &= \lim\inf_{n\to\infty} [F_X(x-\varepsilon) - \mathbb{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\}] \\
&\le \lim\inf_{n\to\infty} F_{X_n}\{X \le x\} \\
&\le \lim\sup_{n\to\infty} F_{X_n}\{X \le x\} \\
&\le \lim\sup_{n\to\infty} [\mathbb{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} + F_X\{X \le x + \varepsilon\}] \\
&= F_X(x+\varepsilon) \ .
\end{aligned}$$

Dato che ε è arbitrario, la convergenza segue immediatamente per tutti i punti di continuità di $F_X(.)$. ■

Remark 23 *E' immediato verificare che l'implicazione inversa non vale in generale; strettamente parlando, non avrebbe nemmeno senso porre la domanda, visto che (2) richiede che le variabili siano definite tutte sullo stesso spazio di probabilità, mentre (1) no. Comunque a fini esplicativi si possono prendere banali controesempi: sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie Gaussiane standard indipendenti, e sia* X *una altra Gaussiana standard indipendente da questa sequenza: è ovvio che* $X_n \stackrel{d}{=} X$ *e pertanto* $X_n \to_d X$*, mentre invece*

$$\Pr\{|X_n - X| > \varepsilon\} = \Pr\left\{|X| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right\} \nrightarrow 0 \ ,$$

dove abbiamo usato $X_n - X \stackrel{d}{=} N(0,2)$*. Una parziale implicazione inversa esiste però nel caso in cui sia abbia convergenza in distribuzione ad una costante.*

Lemma 24 *Sia* X_n *una successione di variabili aleatorie tali per cui* $X_n \to_d c$*, dove* $c \in \mathbb{R}$ *è una qualsiasi costante. Allora esiste uno spazio di probabilità* $\{\Omega, \Im, \mathbb{P}\}$ *ed una successione di variabili aleatorie* $\{X_n'\}$ *definite su questo spazio tali per cui* $X_n' \stackrel{d}{=} X_n$ *per ogni* n *e* $X_n' \to_p c$*.*

Proof. Notiamo innanzitutto che $F_c(x) = \mathbb{I}_{[c,\infty)}(x)$, da cui

$$\begin{aligned}
\Pr\{|X_n' - c| > \varepsilon\} &= \Pr\{X_n' > c + \varepsilon\} + \Pr\{X_n' < c - \varepsilon\} \\
&= 1 - F_{X_n}(c+\varepsilon) + F_{X_n}(c-\varepsilon) \\
&\to 1 - \mathbb{I}_{[c,\infty)}(c+\varepsilon) + \mathbb{I}_{[c,\infty)}(c-\varepsilon) = 0 \ .
\end{aligned}$$

■

Remark 25 *Intuitivamente, la (1) sta richiedendo che* X_n *e* X *"tendano a dare gli stessi numeri con la stessa probablità", mentre la (2) sta richiedendo che "in una singola estrazione, il valore di* X_n *e* X *tende ad essere vicino". E' quindi naturale che la (2) sia una richiesta più forte della (1).*

Definition 26 *((3): Convergenza in Media r-esima) Sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie definita sullo spazio di probabilità* $\{\Omega, \Im, \mathbb{P}\}$*; sia inoltre* X*,* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *una variabile aleatoria definita sullo stesso spazio di probabilità. Diremo che la sequenza converge in media* $r-$*esima alla variabile aleatoria* X *(scritto* $X_n \to_p X$*) se e solo se si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X|^r = 0 \ .$$

Remark 27 *Affinchè la definizione abbia senso stiamo implicitamente richiedendo che tutte le variabili aleatorie coinvolte abbiano momenti* $r-$*esimi finiti.*

Remark 28 *I casi più importanti sono quelli che corrispondono a $r = 2$ (Convergenza in Media Quadratica) e $r = 1$.*

Lemma 29 *La convergenza in media r-esima implica la convergenza in probabilità, cioè $\{X_n \to_r X\} \Rightarrow \{X_n \to_p X\}$.*

Proof. La dimostrazione è una immediata conseguenza della disuguaglianza di Markov:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{|X_n - X| > \varepsilon\} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[|X_n - X|^r]}{\varepsilon^r} .$$

■

Remark 30 *L'implicazione opposta è falsa in generale - in effetti, la convergenza in probabilità non implica nemmeno l'esistenza di momenti di un ordine qualsiasi $r > 0$. Un controesempio più interessante è fornito dalla seguente sequenza:*

$$X_n = \begin{cases} 0 \text{ con probabilità } 1 - \frac{1}{n} \\ n \text{ con probabilità } \frac{1}{n} \end{cases} .$$

Questa sequenza ha valor medio finito e costante ($\mathbb{E}[X_n] = 1$), ma converge in probabilità alla variabile aleatoria identicamente pari a zero, che ha ovviamente valor medio nullo.

Remark 31 *C'è una parziale freccia inversa tra la convergenza in probabilità e quella in media r-esima. Intutivamente la convergenza in probabilità non implica la convergenza in media r-esima perché può capitare che con probabilità sempre più piccola vengano assunti valori sempre più grandi, come nel contro-esempio precedente; se però imponiamo che le variabili siano limitate, la possibilità di questi contro-esempi cade. In aprticolare, abbiamo il Lemma che segue.*

Lemma 32 *Sia $\{X_n\}$ una successione di variabili aleatorie limitate $|X_n| \leq M \in \mathbb{R}$ definite sullo spazio di probabilità $\{\Omega, \Im, P\}$ e tale per cui $X_n \to_p X$ (X è evidentemente definita sullo stesso spazio di probabilità; si noti che $|X| \leq M$ con probabilità 1). Allora $X_n \to_r X$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.*

Proof. Abbiamo che

$$\begin{aligned} E|X_n - X|^r &= E|X_n - X|^r I_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} + E|X_n - X|^r I_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}} \\ &\leq (2M)^r E[I_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}] + \varepsilon^r = (2M)^r \Pr\{|X_n - X| > \varepsilon\} + \varepsilon^r, \end{aligned}$$

e la dimostrazione è conclusa per l'arbitrarietà di ε e l'ipotesi sulla convergenza in probabilità. ■

Example 33 *(Legge debole dei grandi numeri) Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite definita sullo spazio di probabilità $\{\Omega, \Im, \mathbb{P}\}$, con $\mathbb{E}[X] = \mu$ e $\mathbb{E}\left[(X - \mu)^2\right] = \sigma^2 < \infty$. Allora*

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \to_2 \mu .$$

Infatti

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(\overline{X}_n-\mu)^2\right] &= Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var\left[X_i\right]\\ &= \frac{\sigma^2}{n}\ .\end{aligned}$$

Remark 34 *Le ipotesi della legge debole dei grandi numeri possono essere grandemente generalizzate. Ad esempio, si può sostituire l'indipendenza con l'incorrelazione, e l'identica distribuzione con l'ipotesi che il valor medio sia costante e la varianza uniformemente limitata.*

E' importante ricordare la relazione che esiste tra la convergenza in media di ordini diversi.

Lemma 35 *Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie definita sullo spazio di probabilità $\{\Omega,\Im,\mathbb{P}\}$; sia inoltre X, $X:\Omega\to\mathbb{R}$ una variabile aleatoria definita sullo stesso spazio di probabilità. Allora $\{X_n\to_{r_2}X\}\Rightarrow\{X_n\to_{r_1}X\}$ per ogni $0<r_1<r_2$.*

Proof. Per la dimostrazione, basta considerare la funzione convessa $f(x):=|x|^{r_2/r_1}$ e notare che, per la disuguaglianza di Jensen∩∩

$$f(\mathbb{E}|X_n-X|^{r_1})=(\mathbb{E}|X_n-X|^{r_1})^{r_2/r_1}\leq\mathbb{E}\left[f(|X_n-X|^{r_1})\right]=(\mathbb{E}|X_n-X|^{r_2})$$

e quindi

$$(\mathbb{E}|X_n-X|^{r_1})^{1/r_1}\leq(\mathbb{E}|X_n-X|^{r_2})^{1/r_2},$$

$$\left\{\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_n-X|^{r_2}=0\right\}\Rightarrow\left\{\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_n-X|^{r_1}=0\right\}\ .$$

■

Definition 36 *((4), Convergenza quasi certa) Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie definita sullo spazio di probabilità $\{\Omega,\Im,\mathbb{P}\}$; sia inoltre X, $X:\Omega\to\mathbb{R}$ una variabile aleatoria definita sullo stesso spazio di probabilità. Diciamo che X_n converge quasi certamente a X, scritto $X_n\to_{q.c.}X$, se e solo se*

$$\mathbb{P}\left\{\omega:\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)\right\}=\mathbb{P}\left\{\lim_{n\to\infty}X_n=X\right\}=1\ .$$

Remark 37 *Notiamo che l'evento $\{\omega:\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)\}$ può essere scritto come*

$$\left\{\omega:\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)\right\}=\cap_{k=1}^{\infty}\cup_{n=1}^{\infty}\cap_{m=n}^{\infty}\left\{\omega:|X_m(\omega)-X(\omega)|<\frac{1}{k}\right\},$$

cioè l'insieme di quegli ω tali per cui, per scelto $\frac{1}{k}$ piccolo quanto si vuole, $|X_m(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}$ definitivamente. Possiamo quindi definire la convergenza quasi certa imponendo che il complementare di questo evento abbia probabilità nulla, cioè

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{P}\left(\left[\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{m=n}^{\infty} \left\{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}\right\}\right]^c\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\cup_{k=1}^{\infty} \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=n}^{\infty} \left\{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\right\}\right]\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\cup_{m=n}^{\infty} \left\{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) \text{ , per ogni } k = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Da quest'ultima riga è immediato vedere che la convergenza quasi certa implica la convergenza debole, $(4) \Rightarrow (2)$.

Remark 38 *La convergenza debole al contrario non implica la convergenza quasi certa. Un controesempio può essere costruito come segue: sia U una variabile aleatoria uniforme in $[0, 1]$, definita su uno spazio di probabilità adeguato. Consideriamo la sequenza $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita come*

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{2})}(U) \text{ , } X_2 = \mathbb{I}_{[\frac{1}{2},1]}(U) \\ X_3 &= \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{4})}(U) \text{ , } X_4 = \mathbb{I}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2})}(U) \text{ , } X_5 = \mathbb{I}_{[\frac{2}{4},\frac{3}{4})}(U) \text{ , } X_6 = \mathbb{I}_{[\frac{3}{4},1]}(U) \text{ , ...} \\ X_7 &= \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{8})}(U) \text{ , } X_8 = \mathbb{I}_{[\frac{1}{8},\frac{2}{8})}(U) \text{ , ..., } X_{14} = \mathbb{I}_{[\frac{7}{8},1]}(U) \text{ , } \\ X_{15} &= \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{16})}(U) \text{ , } X_8 = \mathbb{I}_{[\frac{1}{16},\frac{2}{16})}(U) \text{ , ..., } X_{30} = \mathbb{I}_{[\frac{15}{16},1]}(U) \text{ , } \\ &... \\ X_{2^q-1} &= \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{2^q})}(U) \text{ , } X_{2^q} = \mathbb{I}_{[\frac{1}{2^q},\frac{2}{2^q})}(U) \text{ , ...} \end{aligned}$$

Si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{|X_n| > 0\} = 0 \text{ , } \lim_{n\to\infty} \Pr\{\cup_{m=n}^{\infty}|X_m| > 0\} = 1 \text{ ,}$$

quindi la sequenza converge in probabilità a zero, anche se assume infinitamente spesso il valore 1 e pertanto non può convergervi quasi certamente.

Definition 39 *((5), Convergenza completa) Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie definita sullo spazio di probabilità $\{\Omega, \Im, \mathbb{P}\}$; sia inoltre X, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria definita sullo stesso spazio di probabilità. Diciamo che X_n converge completamente a X, scritto $X_n \to_{c.c.} X$, se e solo se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} < \infty \text{ , per ogni } \varepsilon > 0 \text{ .}$$

Remark 40 *La convergenza completa implica quella quasi certa ($(5) \Rightarrow (4)$); infatti, per la subadditività della misura di probabilità abbiamo che*

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\cup_{m=n}^{\infty} \left\{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) \\ \leq \; &\lim_{n\to\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0 \text{ ,} \end{aligned}$$

perchè il resto $n-$esimo di una serie convergente va a zero. Il vice versa non è vero: consideriamo ad esempio una variabile uniforme in $[0,1]$ U, *ed introduciamo la sequenza*

$$X_n := \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n}]}(U) \ .$$

Chiaramente

$$\sum_{n=1}^{N} \Pr\left\{X_n > 0\right\} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \to \infty \textit{ per } N \to \infty \ ;$$

d'altra parte però per ogni ω *tale che* $U(\omega) \neq 0$ *abbiamo* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n}]}(U) = 0$.

Come abbiamo visto, in generale la convergenza in probabilità è molto più debole della convergenza quasi certa, e quindi a maggior ragione di quela completa. E' comunque possibile trovare una parziale controimplicazione, come nel Lemma che segue.

Lemma 41 *Sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie definita sullo spazio di probabilità* $\{\Omega, \Im, \mathbb{P}\}$*; sia inoltre* X, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *una variabile aleatoria definita sullo stesso spazio di probabilità, e si abbia la convergenza in probabilità* $X_n \to_p X$. *Allora esiste una sottosuccessione* X_{n_k} *tale che* $X_{n_k} \to_{c.c.} X$.

Proof. Per la dimostrazione, è sufficiente scegliere la sottosuccessione X_{n_k} tale per cui

$$\Pr\left\{|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\right\} \leq \frac{1}{2^k} \ ,$$

in modo che si abbia, per ogni $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \sum_{n_k=1}^{\infty} \Pr\left\{|X_{n_k} - X| > \varepsilon\right\} \\ \leq \ & \sum_{n_k=1}^{\lceil\frac{1}{\varepsilon}\rceil} \Pr\left\{|X_{n_k} - X| > \varepsilon\right\} + \sum_{n_k=\lceil\frac{1}{\varepsilon}\rceil+1}^{\infty} \Pr\left\{|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\right\} \\ \leq \ & \left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil + \sum_{n_k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty \ . \end{aligned}$$

■

Remark 42 *Si può verificare che non esiste implicazione, né in un senso né nell'altro, tra la convergenza completa e la convergenza in media* r*-esima. Si consideri infatti la sequenza:*

$$X_n = \begin{cases} 0 \textit{ con probabilità } 1 - \frac{1}{n^2} \\ n^2 \textit{ con probabilità } \frac{1}{n^2} \end{cases} .$$

Le X_n *convergono completamente (e quindi quasi certamente) alla variabile aleatoria che vale identicamente zero, ma non convergono nemmeno in media prima; infatti* $\mathbb{E}[X_n] = 1$ *per ogni* n.

Abbiamo quindi stabilito le implicazioni

$$\begin{aligned} (5) \quad &\Rightarrow \quad (4) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1) \ , \\ (3) \quad &\Rightarrow \quad (2) \Rightarrow (1) \ ; \end{aligned}$$

concludiamo mostrando una implicazione tra (1) e (4).

Proposition 43 *(Skorohod) Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie definita sullo spazio di probabilità tale per cui $X_n \to_d X$. Allora esiste uno spazio di probabilità $\{\Omega, \Im, \mathbb{P}\}$ su cui sono definite variabili aleatorie X'_n, X' tali per cui $X_n \overset{d}{=} X'_n$, $X \overset{d}{=} X'$, e*

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{n\to\infty} X'_n = X\right\} = 1 \ .$$

Proof. Per semplicità consideriamo il caso in cui le funzioni di distribuzione $F_{X_n}(.), F_X(.)$ siano crescenti e continue. Prendiamo $\{\Omega, \Im, \mathbb{P}\} = \{[0,1], \mathbb{B}[0,1], Leb\}$ con la variabile aleatoria identità $U(\omega) = \omega$, cioè l'uniforme in $[0,1]$. Definiamo

$$X'_n = F_{X_n}^{-1}(U) \ , \ X' = F_X^{-1}(U) \ ;$$

queste inverse sono ben poste per le ipotesi sulla funzione di ripartizione ed il risultato segue immediatamente perchè

$$\Pr(X'_n \leq x) = \Pr(F_{X_n}^{-1}(U) \leq x) = \Pr(U \leq F_{X_n}(x)) = F_{X_n}(x) \ ,$$

e similmente per X'. La convergenza quasi certa è una conseguenza della convergenza (quasi) ovunque delle funzioni di distribuzione e delle loro inverse. ∎