Processi di diffusione parte 2

Capitolo 19 del testo

Indice

0.1 Teorema: Limite della Capacità di Cascata

Poiché la soglia di adozione massima è una caratteristica della rete, indicheremo come q_G la soglia di adozione massima di un grafo G.

Teorema: per ogni grafo infinito $G = (V, E)$ i cui nodi hanno grado finito, $q_G \leq \frac{1}{2}$.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che esista un insieme finito di iniziatori V_0 che, con soglia di adozione $q > \frac{1}{2}$, generi una cascata competa (nel grafo G). Al solito, indichiamo con V_t l'insieme dei nodi che adottano A al passo t e sia, per ogni $t \geq 0$, $S_t = \bigcup_{0 \leq i \leq t} V_i$ l'insieme dei nodi che, al passo t, sono nello stato A.

Definiamo l'interfaccia al passo t l'insieme I_t degli archi che, al passo t, hanno un estremo in S_t e l'altro estremo in $V - S_t$:

$$I_t = \{(u, v) \in E \mid u \in S_t \text{ e } v \in V - S_t\}$$

e dimostriamo che, per ogni $t \geq 0$, $|I_t| > |I_{t+1}|$ oppure $I_t = I_{t+1}$.

Per farlo, mostriamo che se $I_t \neq I_{t+1}$ allora $|I_t| > |I_{t+1}|$.

Se $I_t \neq I_{t+1}$ allora esiste un nodo v che adotta A al passo $t + 1$, ossia $V_{t+1} \neq \emptyset$. E perché un nodo v appartenga a V_{t+1} deve esistere $u \in N(v)$ tale che $u \in S_t$. Ossia, per ogni $v \in V_{t+1}$ esiste (almeno) un arco $(u, v) \in I_t$ tale che $u \in S_t$.

Allora, per ogni nodo $v \in V_{t+1}$:

- gli archi incidenti su v il cui altro estremo è in S_t sono in I_t ma non in I_{t+1}
- gli archi incidenti su v il cui altro estremo non è in S_{t+1} sono in I_{t+1} ma non in I_t

Ossia: $I_{t+1} = I_t - [\bigcup_{v \in V_{t+1}} \{(u, v) \in E : u \in S_t\}] \cup [\bigcup_{v \in V_{t+1}} \{(z, v) \in E : z \in V - S_{t+1}\}]$

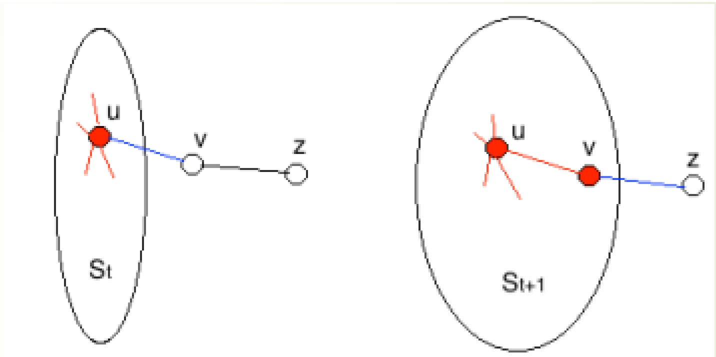


Fig. gli archi di interfaccia sono disegnati blu

E poiché se $v \neq z$ con $v, z \in V_{t+1}$ allora i primi insiemi (archi rimossi) sono disgiunti, e i secondi insiemi (archi aggiunti) sono disgiunti, allora:

$$|I_{t+1}| = |I_t| - \sum_{v \in V_{t+1}} |\{(u, v) \in E : u \in S_t\}| + \sum_{v \in V_{t+1}} |\{(u, v) \in E : u \in V - S_{t+1}\}|$$

Ma $|\{(u, v) \in E : u \in S_t\}| = |N(v) \cap S_t|$ e $|\{(u, v) \in E : u \in V - S_{t+1}\}| = |N(v) - S_{t+1}|$. Ossia:

$$|I_{t+1}| = |I_t| - \sum_{v \in V_{t+1}} |N(v) \cap S_t| + \sum_{v \in V_{t+1}} |N(v) - S_{t+1}|$$

Per ogni $v \in V_{t+1}$ deve essere $\frac{|N(v) \cap S_t|}{|N(v)|} \geq q > \frac{1}{2}$. E, dunque, $|N(v) \cap S_t| > |N(v) - S_t|$. Inoltre, $|N(v) - S_t| \geq |N(v) - S_{t+1}|$ perché $S_t \subset S_{t+1}$. Dunque, $|N(v) \cap S_t| > |N(v) - S_{t+1}|$.

Allora:

$$|I_{t+1}| = |I_t| - \sum_{v \in V_{t+1}} (|N(v) \cap S_t| - |N(v) - S_{t+1}|)$$

E poiché la quantità in parentesi è > 0 per ogni $v \in V_{t+1}$, e $V_{t+1} \neq \emptyset$:

$$|I_{t+1}| < |I_t|$$

Abbiamo dimostrato che, per ogni $t \geq 0$, $|I_t| > |I_{t+1}|$ oppure $I_t = I_{t+1}$. Poiché V_0 è un insieme finito e i nodi di G hanno grado finito, allora l'interfaccia iniziale ha dimensione finita, ossia, $|I_0| = k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$.

Allora l'eventualità $I_t \neq I_{t+1}$ (che implica $|I_t| > |I_{t+1}|$) non può verificarsi per più di k passi, perché la dimensione dell'interfaccia non può essere < 0. Allora, esiste T tale che, per ogni $t \geq T$, $I_t = I_{t+1}$. Ossia, dal passo T la diffusione si interrompe. Ma in un grafo infinito una cascata completa può verificarsi solo in seguito a un processo di diffusione infinito. Allora V_0 non genera una cascata completa. QED.

1 Nodi eterogenei

Il modello di diffusione considerato fino ad ora è un modello uniforme: tutti i nodi associano lo stesso beneficio reciproco nell'adottare A o B (che è, rispettivamente, a o b).

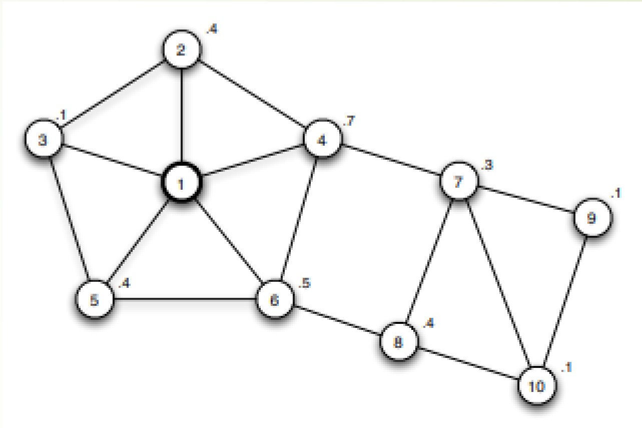
Tuttavia, questo modello è poco realistico: ciascun individuo nella rete ha un proprio beneficio nell'adottare A o B, che può dipendere, ad esempio, dalle sue capacità di adattarsi al nuovo stato. Allora, per ogni nodo u nella rete, a_u e b_u sono il beneficio che u ottiene nel relazionarsi, rispettivamente, con un nodo che adotta A o con un nodo che adotta B. Assumiamo, cioè, che il beneficio reciproco di adottare A o B da parte dei nodi adiacenti u e v sia quello illustrato in tabella:

V \ u	**A**	**B**
A	a_u, a_v	0,0
B	0,0	b_u, b_v

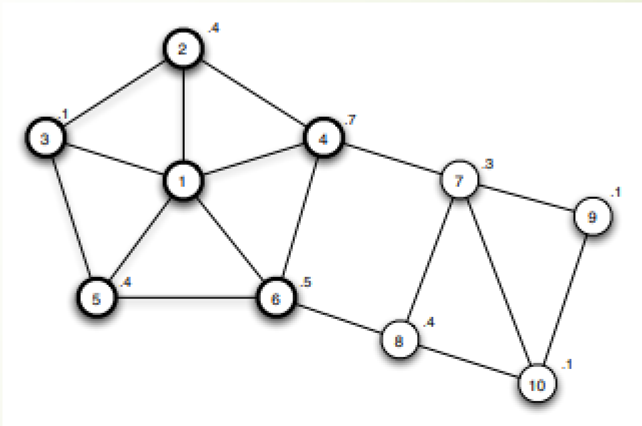
Tabella 1: Beneficio reciproco (nodi eterogenei)

Allora, un nodo $v \in V$ nello stato B passa allo stato A sulla base del valore:

$$q_v = \frac{b_v}{a_v + b_v}$$



(a) *One node is the initial adopter*



(b) *The process ends after four steps*

Osserviamo: anche se il nodo 1 è in posizione centrale, non riuscirebbe a portare nessuno in A se non fosse che $q_3 = 0.1$ è molto piccolo. Allora, non è sufficiente scegliere gli iniziatori in base alla loro centralità nella rete. Occorre anche considerare la loro possibilità di avere accesso a nodi facilmente influenzabili.

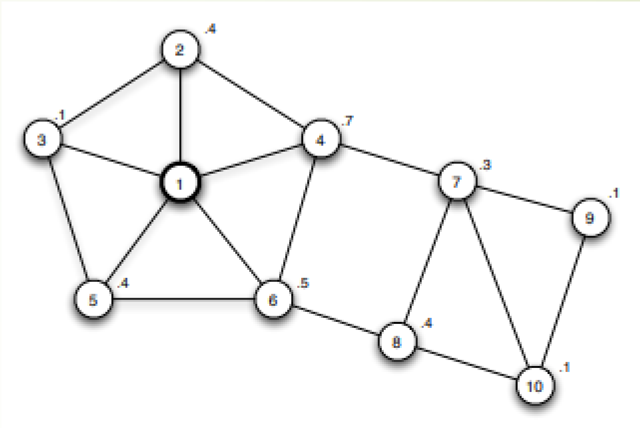
1.1 Blocking cluster

Così, nel caso nodi eterogenei, la struttura che impedisce la generazione di una cascata completa è il **blocking cluster**. $V' \subseteq V$ è un blocking cluster se, per ogni $v \in V'$:

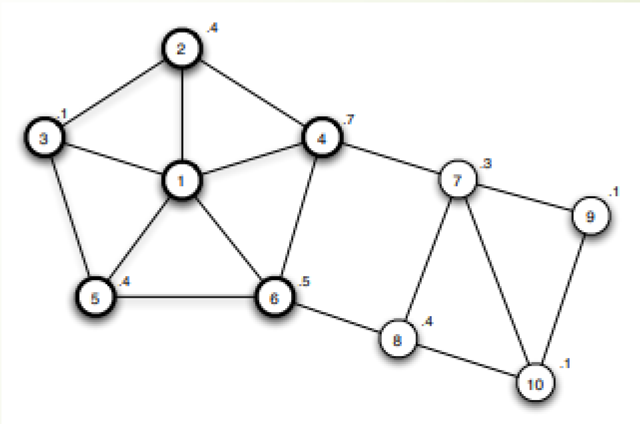
$$\frac{|N(v) \cap V'|}{|N(v)|} \geq 1 - q_v$$

Infatti:

Teorema. sia $G = (V, E)$ un grafo. Nel modello a nodi eterogenei, l'insieme di iniziatori $V_0 \subseteq V$ non genera una cascata completa se e solo se $G - V_0$ contiene un blocking cluster.



(a) *One node is the initial adopter*



(b) *The process ends after four steps*

(dimostrazione per esercizio!)

2 Azione collettiva

Vogliamo, ora, mostrare come modellare mediante processi di diffusione situazioni nelle quali è richiesto che un'azione abbia luogo collettivamente.

Supponiamo che si voglia organizzare una protesta contro un regime dittatoriale e sanguinario! Ciascun individuo, ragionevolmente, decide di aderire alla protesta solo se sa con certezza che un numero sufficientemente elevato di individui aderirà alla protesta; altrimenti, a fronte del rischio di una repressione feroce non si avrebbe neanche la ragionevole speranza di riuscire a cambiare lo stato delle cose.

Poiché l'ambientazione è quella di una dittatura, possiamo ben pensare che la libertà di stampa sia ostacolata e che, in generale, le comunicazioni siano rese difficoltose. Ma perché i regimi totalitari sono, generalmente, così interessati a ostacolare le comunicazioni?!

2.1 Modello

Ogni nodo v sceglie una "soglia di confidenza" k_v: aderirà alla protesta solo se almeno k_v individui aderiranno alla protesta (ossia, se oltre a lui, aderiranno altri $k_v - 1$ individui).

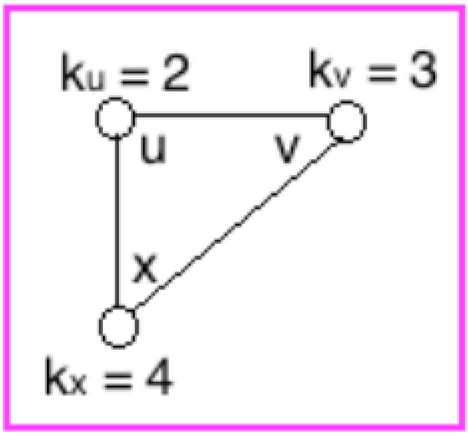
Ma, poiché le comunicazioni circolano con difficoltà nella rete, le uniche informazioni che v può ottenere sono circa l'adesione o meno alla protesta da parte degli individui con i quali ha una relazione personale, ovvero, i suoi vicini nel grafo.

- e, da ciascun nodo u in $N(v)$, v può sapere quale sia la soglia di adesione di u
- e, assumendo che siano strong ties, v sa che i vicini gli comunicano la loro vera soglia di adesione: perché v si fida dei suoi amici!

- ma non può sapere se u ha o meno dei vicini che non siano anche suoi vicini
- e non può neanche sapere se u aderirà alla protesta
- sono informazioni pericolose, e ognuno le tiene per sé!

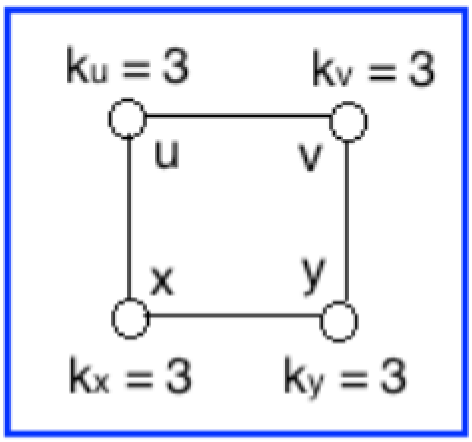
In base a quel che vede, v può solo provare a dedurre cosa faranno i suoi vicini. Vediamo ora, con qualche esempio, in che modo i nodi arrivano a prendere una decisione.

Esempio 1 (Triangolo $k_u = 2, k_v = 3, k_x = 4$)



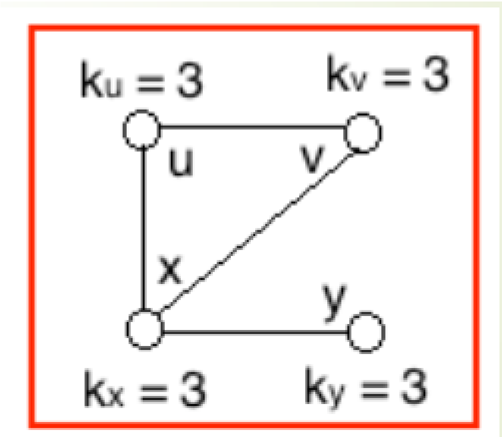
- x non aderisce - non ha abbastanza vicini! (ha 2 vicini, ma $k_x = 4$)
- v ha bisogno di due vicini che aderiscano ($k_v = 3$): ma vede che x vuole che almeno 3 vicini ($k_x = 4$) aderiscano per aderire a sua volta e, poiché v vede di x i soli vicini che hanno in comune (il nodo u), non può sapere se x aderirà o meno e, quindi, v non aderisce.
- ad u sarebbe sufficiente che uno solo dei suoi vicini aderisse ($k_u = 2$). Per lo stesso ragionamento fatto da v, u non può sapere se x aderirà o meno. Inoltre, u sa che v ha bisogno di almeno due vicini che aderiscano per aderire, ma non può sapere se v dispone di informazioni supplementari circa l'adesione di x: perciò, non può dedurre che v parteciperà. Di conseguenza, neanche u aderisce.

Esempio 2 (Quadrato $k = 3$ per tutti)



Questo caso è un po' più complesso. U vede che $k_v = k_x = 3$ e capisce che loro tre (u, v, x) potrebbero aderire. Ma u non vede y, non sa se v ha o meno altri vicini oltre sé stesso e, quindi, non sa se v può dedurre che almeno due dei suoi vicini aderiranno (u e y). E poiché u ha bisogno di certezze, u non aderisce! Poiché il grafo è perfettamente simmetrico, nessuno aderisce alla protesta, anche se, qualora avessero avuto accesso a informazioni complete, la protesta avrebbe avuto luogo!

Esempio 3 (Cliqe $k = 3$ + vicino esterno)



(u, v, x formano un triangolo, tutti con $k = 3$. y è connesso solo a v, $k_y = 3$) u, v, x si vedono l'un l'altro. Così, u sa che v e x, per partecipare, hanno bisogno che altri due partecipino. Ma u sa anche che anche v e x sanno esattamente le stesse cose che sa egli stesso: siamo in una situazione "io so che tu sai che io so"... E, poiché si fidano uno dell'altro, partecipano tutti e tre! Senza aver bisogno di conoscere altro della rete... ossia, indipendentemente da y.

2.2 Conclusioni (Azione collettiva)

In assenza di comunicazioni adeguate che abbiano luogo nella rete, l'azione collettiva si verifica difficilmente. Ecco perché i regimi dittatoriali tendono a favorire l'ignoranza pluralistica, che permette di concludere erroneamente che pochi individui abbiano una certa opinione (come accadeva nell'esempio nel riquadro blu).

Invece, l'esempio nel riquadro rosso permette di osservare l'importanza di disporre di una base di conoscenza comune:

- i giornali, la pubblicità, ecc., non solo diffondono informazioni
- ma permettono che tutti siano coscienti del fatto che un certo messaggio è conosciuto da tutti
- innescando il meccanismo del "io so che tu sai che io so"...

3 Diffusione in presenza di compatibilità

Fino ad ora abbiamo considerato i due stati A e B mutuamente esclusivi: ciascun nodo o è nello stato A o è nello stato B; non può trovarsi, simultaneamente, nello stato A e nello stato B.

Tuttavia, non è infrequente che due stati possano coesistere:

- ad esempio, se installo un nuovo sistema operativo sul mio computer, posso comunque avere un altro computer con il vecchio sistema operativo
- oppure, nelle regioni di confine la popolazione è tipicamente bilingue e, analogamente, i nodi nelle regioni di confine fra due comunità possono adottare entrambi gli stati prevalenti in ciascuna delle due comunità

D'ora in avanti, studieremo i processi di diffusione in presenza di compatibilità: quando un nodo può essere nello stato A, nello stato B o nello stato AB. Nel modello "nodi omogenei":

- i benefici (e, come vedremo, i costi) del trovarsi in un certo stato, dipendono soltanto dallo stato
- sono gli stessi per tutti i nodi

Naturalmente, un nodo adotta lo stato misto (AB) ogniqualvolta ne trae beneficio: se ho due sistemi operativi, A e B, non ho problemi a interfacciarmi sia con i miei amici che hanno A sia con i miei amici che hanno B.

Ma, allora, perché non adottare sempre lo stato misto? Perché ha un costo, adottare sia A che B!

- Ad esempio, devo avere due computer, o almeno devo usare una buona quantità di memoria sul mio (unico) computer per tenerci entrambi i sistemi
- ma, anche, è faticoso ricordare i comandi di entrambi

In ogni caso, mentre i benefici che otteniamo dall'adottare lo stato AB sono proporzionali al numero di vicini con i quali possiamo comunicare (ossia, guadagniamo per ogni vicino che adotta A e per ogni vicino che adotta B), il costo lo paghiamo una volta sola.

3.1 Modello con compatibilità

Sia (u, v) un arco della rete: il beneficio reciproco di adottare A, B o AB sia quello illustrato in tabella:

V \ u	**A**	**B**	**AB**
A	a,a	0,0	a,a
B	0,0	b,b	b,b
AB	a,a	b,b	$\max\{a, b\}, \max\{a, b\}$

Tabella 2: Beneficio reciproco (con compatibilità)

Invece, per ogni nodo u, il costo per u di essere nello stato AB è c.

In definitiva, se V_A, V_B e V_{AB} sono gli insiemi dei nodi che sono, rispettivamente, negli stati A, B e AB (con $V_A \cup V_B \cup V_{AB} = V$), il beneficio per un nodo u di essere nello stato AB è:

$$p_{AB}(u) = \sum_{v \in V_A \cap N(u)} a + \sum_{v \in V_B \cap N(u)} b + \sum_{v \in V_{AB} \cap N(u)} \max\{a, b\} - c$$

E che il beneficio per essere negli stati A e B, rispettivamente, è

$$p_A(u) = \sum_{v \in (V_A \cup V_{AB}) \cap N(u)} a$$

e

$$p_B(u) = \sum_{v \in (V_B \cup V_{AB}) \cap N(u)} b$$

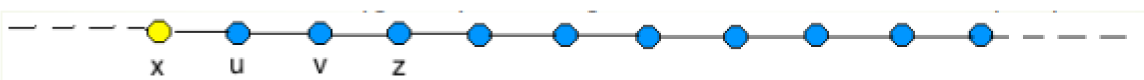
Ci proponiamo di studiare la capacità di cascata di una rete in presenza di compatibilità, e lo faremo solo:

- analizzando un esempio nel caso particolare in cui G è una catena infinita
- descrivendo i risultati di uno studio qualitativo nel caso bidimensionale (G è una griglia infinita)
- dimostrando che, nel caso unidimensionale (G è una catena infinita) l'andamento del processo di diffusione conferma quanto osservato dall'analisi qualitativa

Indicheremo con $p_A(u)$, $p_B(u)$ e $p_{AB}(u)$ il beneficio di un nodo u nell'adottare, rispettivamente, A, B o AB.

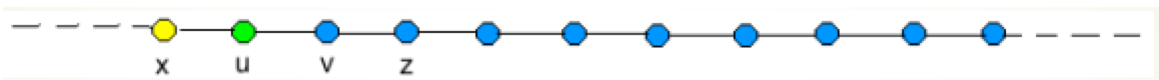
3.2 Esempio: Catena infinita (compatibilità)

G è una catena infinita, $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$. Per simmetria, è sufficiente considerare una catena infinita solo a destra, il cui primo nodo x è nello stato A (giallo) e tutti gli altri sono nello stato B (blu).



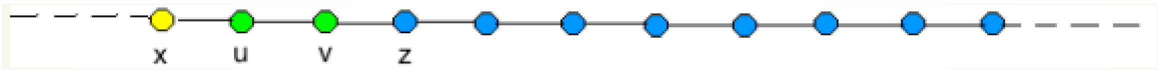
(Configurazione iniziale: A-B-B-B...)

- **Passo 1:** u (vicino a x) adotta AB (verde). Infatti: $p_A(u) = a = 5$. $p_B(u) = b = 3$. $p_{AB}(u) = a + b - c = 5 + 3 - 1 = 7$. (7 è il massimo).



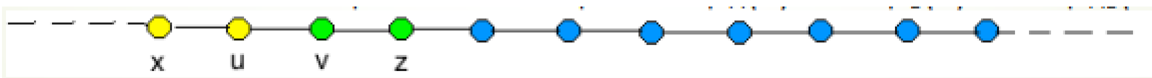
(Configurazione: A-AB-B-B...)

- **Passo 2:** v (vicino a u) adotta AB. Infatti: $p_A(v) = a = 5$. $p_B(v) = b + b = 6$. $p_{AB}(v) = \max\{a,b\} + b - c = 5 + 3 - 1 = 7$. (7 è il massimo).



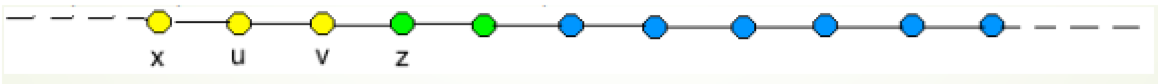
(Configurazione: A-AB-AB-B...)

- **Passo 3:** z (vicino a v) adotta AB (per le stesse ragioni di v). Ma ora u (il primo nodo AB) rivede la sua scelta: $p_A(u) = a + \max\{a,b\} = 5 + 5 = 10$. $p_B(u) = 0$. $p_{AB}(u) = a + \max\{a,b\} - c = 5 + 5 - 1 = 9$. A u conviene abbandonare AB e passare ad A. (10 è il massimo).



(Configurazione: A-A-AB-AB...)

A questo punto, il fenomeno si ripete: ossia, dopo un periodo transitorio durante il quale un nodo adotta lo stato misto, esso passerà ad adottare definitivamente il nuovo stato.



E quindi si genera una cascata completa nella quale il vecchio stato viene completamente soppiantato dal nuovo.

3.3 Analisi dei parametri

Ricordiamo che, nel caso di esclusività fra A e B, la soglia di adozione q è definita come $q = \frac{b}{a+b}$. In effetti, nella definizione di q possiamo dividere numeratore e denominatore per b ottenendo

$$q = \frac{1}{\frac{a}{b} + 1}$$

che evidenzia il ruolo giocato dal rapporto fra il "valore" di A e il "valore" di B. Nel caso di esclusività fra A e B, abbiamo dimostrato che non si può generare una cascata completa (in un grafo infinito) se $q > \frac{1}{2}$, ossia, se il "valore" di A non è almeno pari al "valore" di B.

Cosa possiamo dire nel caso di compatibilità fra A e B? Intanto, osserviamo che l'operazione di dividere per b ha permesso di ridursi a studiare i processi di diffusione in funzione del solo parametro a/b. E questo è equivalente a fissare $b = 1$ e studiare i processi di diffusione in funzione di a.

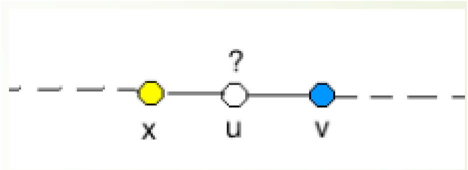
Analogamente, nel caso di compatibilità fra A e B, possiamo fissare $b = 1$ e studiare i processi di diffusione in funzione di a e c.

Uno studio qualitativo [Kleinberg et al., 2007] ha evidenziato uno "strano" comportamento:

- lo stato A si impone quando a è molto grande rispetto a c - e questo è ovvio
- invece, A fa fatica a imporsi quando c è molto grande rispetto ad a - e anche questo è ragionevole
- infine, A fa fatica a imporsi anche quando c non è né troppo grande né troppo piccolo rispetto ad a - e questo è strano!

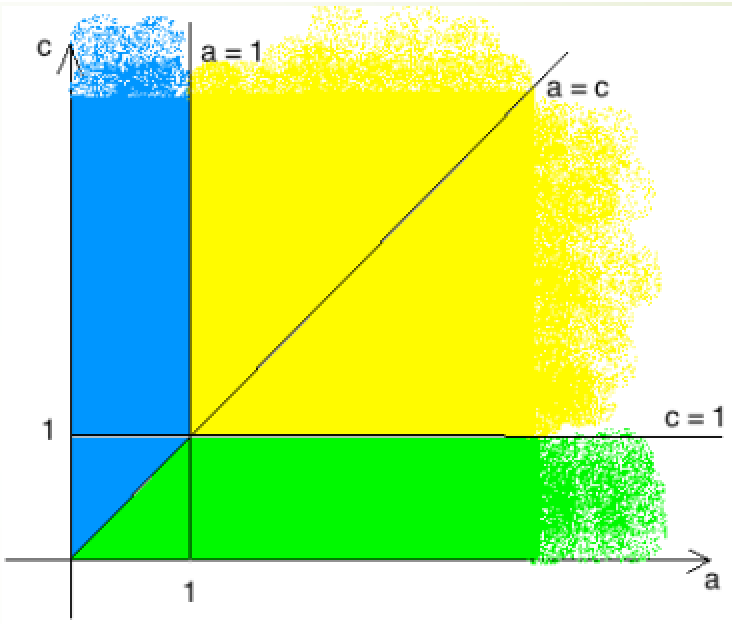
3.4 Analisi della catena (con $b = 1$)

Per capire le ragioni, torniamo a considerare la catena: G è una catena infinita con parametri a e c (e $b = 1$). Se x è nello stato A (giallo) e v nello stato B (blu), al nodo u (in mezzo) quale stato converrà adottare?



Poiché $p_A(u) = a$, $p_B(u) = 1$ e $p_{AB}(u) = a + 1 - c$.

- **Regione Gialla (A):** Se $p_A(u) \geq p_B(u)$ e $p_A(u) \geq p_{AB}(u)$, u adotterà A. Questo accade quando $a \geq 1$ e $a \geq a + 1 - c$, ossia, quando $a \geq 1$ e $c \geq 1$.
- **Regione Blu (B):** Se $p_B(u) > p_A(u)$ e $p_B(u) > p_{AB}(u)$, u rimarrà in B. Questo accade quando $1 > a$ e $1 > a + 1 - c$, ossia, quando $a < 1$ e $c > a$.
- **Regione Verde (AB):** Se $p_{AB}(u) > p_A(u)$ e $p_{AB}(u) \geq p_B(u)$, u adotterà AB. Questo accade quando $a + 1 - c > a$ e $a + 1 - c \geq 1$, ossia, quando $c < 1$ e $a \geq c$.



A questo punto possiamo già trarre qualche conclusione:

- se u è rimasto nello stato B (regione blu), allora la diffusione dello stato A è stata bloccata sul nascere.
- se u è passato allo stato A (regione gialla), allora, al passo successivo il nodo v (adiacente a u) passerà allo stato A, e così via: si è innescato il processo di diffusione di A, che genererà una diffusione completa senza mai passare per lo stato misto AB.

Resta da studiare cosa accade quando i parametri cadono nella regione verde.

Studio della Regione Verde ($c < 1$ e $a \geq c$)

Quando i parametri cadono nella regione verde, u ha adottato AB. Siamo nella situazione A-AB-B-B... Quale stato conviene adottare al nodo v (il primo B)? Ora, $p_A(v) = a$, $p_B(v) = 1 + 1 = 2$ e $p_{AB}(v) = \max\{a, 1\} + 1 - c$.

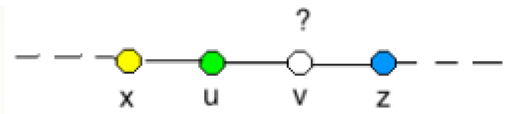
Distinguiamo la regione verde in due parti:

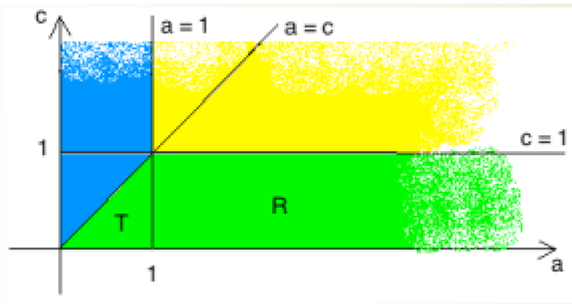
- Triangolo **T**: $a < 1$. Qui $p_{AB}(v) = 1 + 1 - c = 2 - c$.
- Rettangolo **R**: $a \geq 1$. Qui $p_{AB}(v) = a + 1 - c$.

Dunque:

- se (a,c) è nel triangolo **T**: $a < 1$. Quindi $p_A(v) = a < 1 < 2 = p_B(v)$. Inoltre $p_{AB}(v) = 2 - c < 2 = p_B(v)$ (perché $c > 0$). Ossia, v adotta B. **La diffusione si blocca.**

- se (a,c) è nel rettangolo **R**: $a \geq 1$. Analizziamo v: $p_A(v) = a$, $p_B(v) = 2$, $p_{AB}(v) = a + 1 - c$.
  - Se $a > 2$: allora $p_A(v) > p_B(v)$. Confrontiamo p_A e p_{AB}: $a \leq a + 1 - c$ (essendo $c \leq 1$). Quindi $p_{AB}(v) \geq p_A(v)$. v adotta AB.
  - Se $a < 2$: allora $p_B(v) > p_A(v)$. Confrontiamo p_B e p_{AB}: 2 vs $a + 1 - c$. v adotta B se $2 > a + 1 - c$ (ossia $a < c + 1$). v adotta AB se $a + 1 - c \geq 2$ (ossia $a \geq c + 1$).

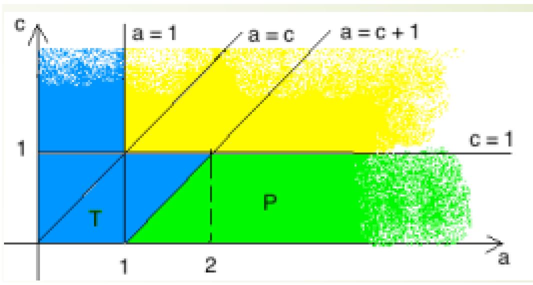


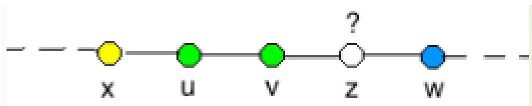


Seconda serie di conclusioni: Se (a,c) è in T, o in R ma con $a < c + 1$, v rimane in B. **La diffusione si blocca al passo 2.** Perciò, le coppie (a, c) che possono dar luogo a una cascata completa sono quelle nella regione **P** (la parte di R dove $a \geq c + 1$).

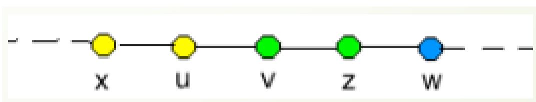
Studio della Regione P ($c < 1$ e $a \geq c + 1$)

Quando $(a, c) \in P$, al passo 2, v adotta AB. La situazione è A-AB-AB-B...



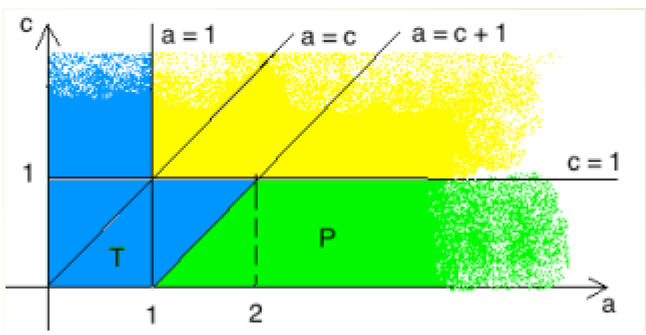


Al passo 3 il nodo z (il prossimo B) adotta AB (per le stesse considerazioni di v). E al passo 3 il nodo u rivede la sua posizione. La situazione è A-AB-AB... Poiché $(a, c) \in P$, allora $a > 1$. $p_A(u) = a + \max\{a, 1\} = a + a = 2a$. $p_B(u) = 0$. $p_{AB}(u) = a + \max\{a, 1\} - c = 2a - c$. Poiché $c > 0$, $p_{AB}(u) = 2a - c < 2a = p_A(u)$. Ossia, u non ha più interesse a continuare ad adottare anche lo stato B, e, quindi, u adotta lo stato A.



(Configurazione: A-A-AB-AB...) Questo è l'inizio del processo che abbiamo visto nell'esempio numerico.

3.5 Conclusioni finali (Compatibilità)



- **Se (a,c) è contenuto nella regione azzurra** (ossia, $a < 1$ e $c > a$, oppure $a \geq 1$ e $c < 1$ e $a < c + 1$) Lo stato A non si diffonde. La sua diffusione si blocca immediatamente o al passo 2.
- **Se (a,c) è contenuto nella regione gialla** (ossia, $a \geq 1$ e $c \geq 1$) Lo stato A si diffonde immediatamente, senza che alcun nodo passi nello stato AB.
- **Se (a,c) è contenuto nella zona verde P** (ossia, $a \geq 1$ e $c < 1$ e $a \geq c + 1$) Dopo una fase transitoria, in cui i nodi adottano lo stato AB, prende piede definitivamente lo stato A.

(NB: per semplicità, non abbiamo analizzato le uguaglianze $a = 1, c = 1, a = c, a = c + 1$)

Riassumendo:

- Lo stato A **non si diffonde** se A è peggiore di B ($a < 1$), oppure se A è migliore di B ma il costo c di AB è "sbagliato" (troppo alto rispetto al beneficio $a - 1$, ma troppo basso per forzare una scelta netta: $a \geq 1$, $c < 1$, $c > a - 1$).
- Lo stato A **si diffonde immediatamente** (senza stato misto) se A è migliore di B e, inoltre, il costo di AB è elevato ($a \geq 1$ e $c \geq 1$).
- Lo stato A **si diffonde tramite lo stato misto** se A è migliore di B e, inoltre, il costo di AB è basso ($a \geq 1$ e $c < 1$ e $c \leq a - 1$).

E questo conferma il risultato dello studio qualitativo in [Kleinberg et al., 2007]: A fatica a imporsi (regione blu) quando c è molto grande (rispetto ad a) ma anche quando c non è né troppo grande né troppo piccolo (la parte bloccante della regione verde).