Grafi Geometrici aleatori e reti wireless

Nota

- Il materiale di cui trattano queste lezioni è descritto nella dispensa D01GeometricRandomGraphs.
- La dispensa deve essere utilizzata essenzialmente per quanto concerne l'introduzione alle reti wireless ad-hoc ed al problema del minimo raggio di *trasmissione*
  - che nella nostra trattazione dei grafi geometrici casuali diventa minimo raggio di *connessione*
- Le parti tecniche (dimostrazione dei teoremi) sono invece completamente trattate in questi lucidi
- In particolare, la dimostrazione della delimitazione superiore presentata in questi lucidi differisce da quella nella dispensa:
  - la dimostrazione che vediamo insieme è più semplice
  - quella presentata nella dispensa è quella descritta nell'articolo originale
  - per gli interessati ho predisposto una serie di lucidi dal titolo AR-AppendiceGrafiGeometriciAleatori (che non sarà trattata a lezione)

Da rete virtuale a rete fisica

- Abbiamo introdotto due modelli di grafi aleatori – il modello di Erdös-Renyi e un modello rich get richer
- Entrambi i modelli si prestano a generare grafi che corrispondono a reti, per così dire, virtuali
- ossia reti i cui archi sono virtuali - rappresentano relazioni virtuali fra individui
  - relazioni di amicizia, nelle reti sociali
  - oppure collegamenti logici, come gli hyperlink nel web
- ossia, non sono strutture fisiche che devono essere costruite
- Ma quando l'obiettivo è costruire effettivamente una rete fisica
  - ad esempio, una rete di calcolatori, nella quale occorre predisporre fisicamente le connessioni fra i dispositivi (calcolatori, sensori, telefoni,…)
- occorre tenere in considerazione la struttura geometrica dello spazio nel quale i nodi sono inseriti
- e, pertanto, i modelli che abbiamo studiato sono poco significativi

Grafi Geometrici

- Un grafo geometrico consiste in un insieme V di punti in uno spazio metrico, dei quali conosciamo le coordinate, e in un parametro $r > 0$
- Per fissare le idee, assumiamo che lo spazio metrico sia il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$
  - in questo caso, ciascun punto A è individuato da una coppia di coordinate: $A = (x_A, y_A)$
- Gli archi del grafo individuato da V e r sono tutte e sole le coppie di punti la cui distanza euclidea è $\leq$ r:

$$\mathbf{E = \{ (A,B): A \in V \wedge B \in V \wedge \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \leq r \}}$$

- Generalmente, si normalizza rispetto a r, ossia
  - si riportano i punti in scala 1: r (si pone pari ad r l'unità sugli assi coordinati)
  - cosicché due punti sono adiacenti se e solo se la loro distanza è ≤ 1
- in questo caso, quando $r = 1$, il grafo prende il nome di ***Unit Disk Graph***
  - ma noi, in queste lezioni, considereremo il caso non normalizzato

Grafi Geometrici Aleatori

- Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e $r > 0$ (come vedremo, $r \leq \sqrt{2}$)
- scegliamo ***uniformemente a caso*** n punti nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$
- e costruiamo il grafo geometrico $G(n,r)$ corrispondente
  - poiché i punti sono scelti nel quadrato unitario, e la diagonale del quadrato misura $\sqrt{2}$, è sufficiente scegliere $r \leq \sqrt{2}$
  - infatti, con $r = \sqrt{2}$ otteniamo un grafo completo ed è dunque inutile scegliere per r un valore maggiore di $\sqrt{2}$
- Naturalmente, la aleatorietà del grafo $G(n,r)$ dipende dalla scelta dei punti nel quadrato unitario
  - quando $r < \sqrt{2}$ e $r > 0$
  - perché per ogni scelta di n il grafo $G(n, \sqrt{2})$ è un grafo fissato (qualunque sia n, $G(n, \sqrt{2})$ è sempre un grafo completo)
  - e per ogni scelta di n il grafo $G(n, 0)$ è un grafo fissato (qualunque sia n, $G(n, 0)$ è sempre un grafo costituito da soli nodi isolati)

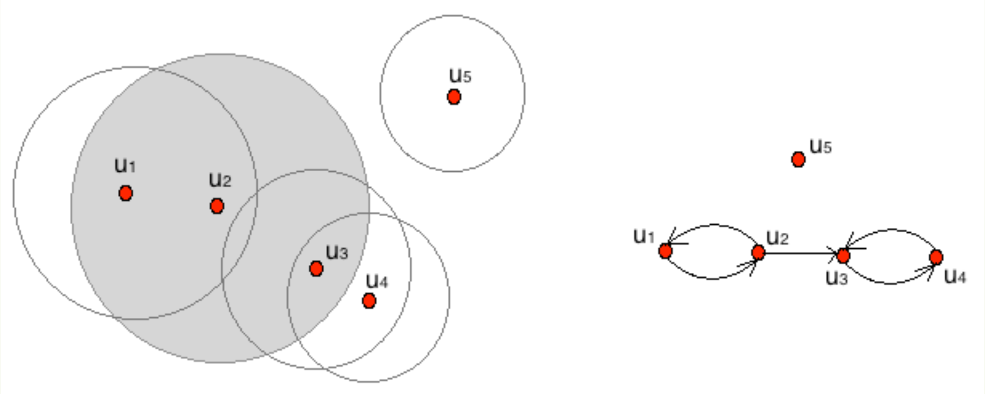
Grafi Geometrici Aleatori: connessione

- Come abbiamo già osservato, scegliendo $r = \sqrt{2}$ otteniamo un grafo completo
- di contro, scegliendo r molto vicino a 0 otteniamo, più o meno, un grafo privo di archi.

- Analogamente al modello di Erdös-Renyi
  - nel quale avevamo scelto il parametro p in funzione di n – ossia, p = p(n)
- ora scegliamo r in funzione di n – ossia, **r = r(n)**
  - infatti, se scegliamo per r un valore costante, otteniamo grafi sempre più densi al crescere di n
- Il problema del quale ci occupiamo è: scegliere il più piccolo valore di r(n) che permette di ottenere un grafo connesso
  - Naturalmente, essendo G(n,r(n)) un evento aleatorio, vogliamo studiarne la connessione in ambito probabilistico
  - ossia, ci interessa che G(n,r(n)) sia connesso *con buona probabilità*
- E vediamo, ora, un ambito di applicazione di questo problema

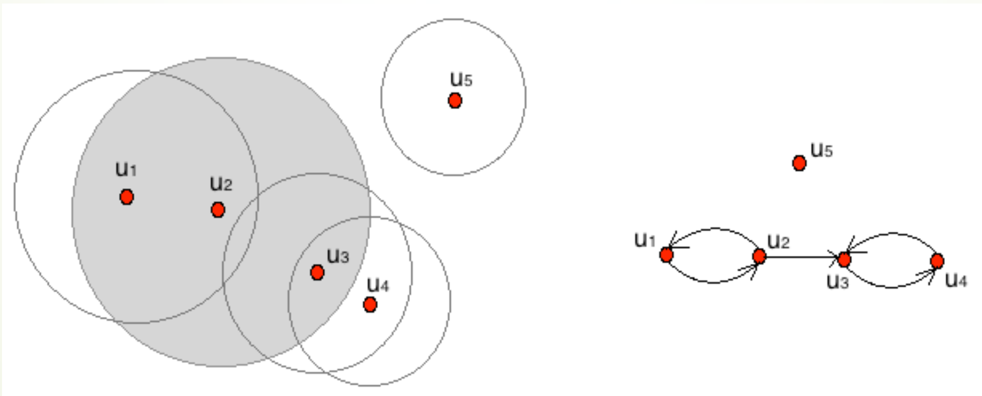
Reti wireless ad-hoc

- Abbiamo un insieme di dispositivi – ad esempio, calcolatori, o sensori – dislocati in un'area
- ciascun dispositivo è dotato di un ricetrasmettitore wireless e di una batteria di capacità limitata
- Il ricetrasmettitore wireless può essere configurato in modo da trasmettere entro un certo raggio – che prende il nome di ***raggio di trasmissione***
  - ossia, se il trasmettitore di un dispositivo x è configurato per trasmettere entro un raggio r_x, quel dispositivo potrà inviare messaggi solo ai dispositivi che distano $\leq r_x$ da esso
- Perciò, rappresentiamo una siffatta rete mediante un grafo diretto
  - (x,y) è un arco diretto del grafo se e solo se la distanza da x a y è $\leq r_x$



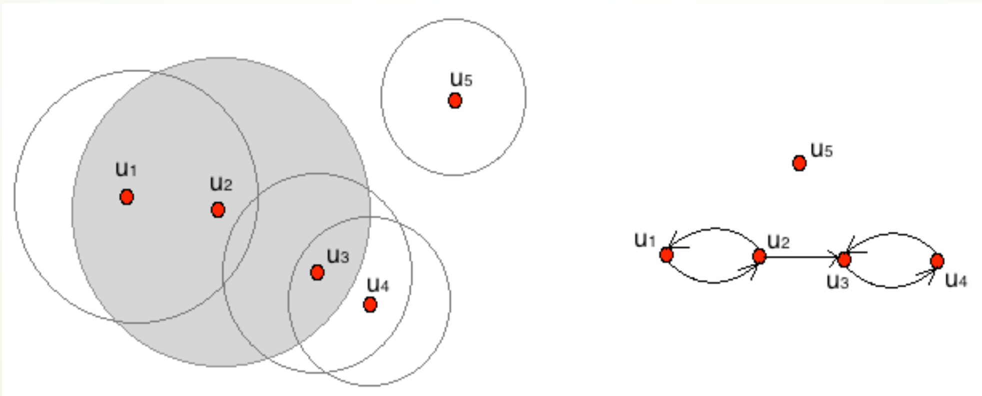
Reti wireless ad-hoc

- Il grafo diretto che rappresenta la rete è chiamato ***grafo di comunicazione***
- E se un nodo vuole trasmettere un messaggio ad un dispositivo più lontano del suo raggio di trasmissione?
  - prova a utilizzare un percorso all'interno del grafo
  - nell'esempio u_1 può inviare un messaggio a u_4 utilizzando il percorso $(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_4)$
- ossia, il nostro modello utilizza comunicazione *multi-hop*



Reti wireless ad-hoc

- Naturalmente, un nodo x può inviare messaggi a un nodo y solo se il grafo di comunicazione contiene un percorso da x a y
  - ad esempio, u_4 non può inviare messaggi a u_2
  - u_5 non può inviare a né ricevere messaggi da alcun nodo
- Perciò, se vogliamo che ciascun nodo possa comunicare con qualunque altro nodo è necessario che il grafo di comunicazione sia ***fortemente connesso***



Reti wireless ad-hoc

- Se vogliamo che ciascun nodo possa comunicare con qualunque altro nodo è necessario che il grafo di comunicazione sia ***fortemente connesso***
- E questo è facile: se configuriamo il trasmettitore di ciascun nodo ad un raggio di trasmissione pari alla distanza di quel nodo dal nodo ad esso più distante
  - ossia, detto V l'insieme dei nodi e indicata con d(u,v) la distanza fra i nodi u e v, per ogni $u \in V$ poniamo $r_u = \max \{ d(u,v) : v \in V - \{u\} \}$
- allora il grafo di comunicazione è un grafo completo
  - in cui ogni nodo può inviare messaggi direttamente al destinatario, senza ricorrere alla comunicazione multi-hop
- Però…
- però, l'energia che occorre ad un nodo per trasmettere i suoi messaggi è tanto maggiore quanto più è grande il raggio di trasmissione di quel nodo
- e i nodi dispongono di batterie a capacità limitata!
- Perciò, dobbiamo assegnare a ciascun nodo un raggio di trasmissione il più piccolo possibile

Reti wireless e grafi geometrici aleatori

- Assumiamo, da ora in avanti, che **tutti i nodi abbiano lo stesso raggio di trasmissione r**
- Assumiamo, inoltre, che gli n nodi siano distribuiti uniformemente a caso in una regione limitata di piano
- senza perdita di generalità, tale regione è il quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$
  - e il raggio di trasmissione, uguale per tutti i nodi, sarà una funzione di n
  - perché, intuitivamente, se r è un valore costante, la rete sarà molto probabilmente connessa quando n è molto molto grande, sarà molto probabilmente non connessa quando n è molto molto piccolo!
- La nostra rete è allora modellata da un grafo geometrico aleatorio!
  - Che, in particolare, è un grafo **non** orientato
  - perché $d(u,v) \leq r(n)$ se e solo se $d(v,u) \leq r(n)$
- Il problema che ci accingiamo a studiare è allora il seguente:

dati n punti distribuiti uniformemente a caso nel quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, calcolare il valore minimo di $r(n)$ affinché $G(n,r(n))$ sia connesso

Connessione di G(n,r(n))

- In queste lezioni dimostreremo che:

  detto r*(n) il minimo valore per r(n) che garantisce,
  con probabilità ragionevole, che G(n,r(n)) è connesso,
  allora r*(n) $\in \Theta\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)$

- Dimostreremo questo risultato in due passi: se n punti sono scelti uniformemente a caso nel quadrato Q = [0, 1] × [0, 1], allora

- **Teorema (Delimitazione superiore al minimo raggio di connessione)**:

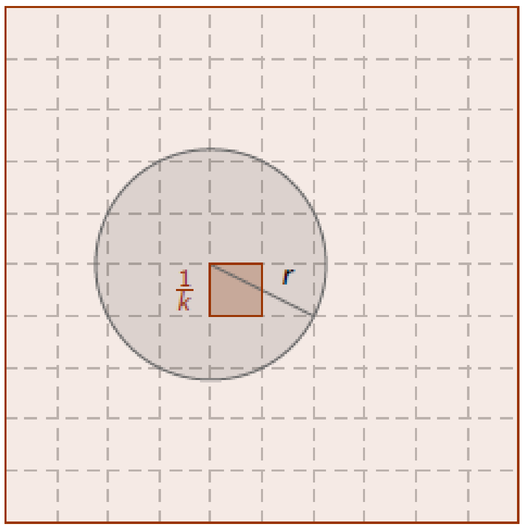
  esiste una costante $\gamma_1 > 0$ tale che se r(n) $\geq \gamma_1 \left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)$ allora G(n,r(n)) è connesso *con alta probabilità*

- **Teorema (Delimitazione inferiore al minimo raggio di connessione)**:

  per ogni costante c > 0, se r(n) $\leq \left(\sqrt{\frac{\ln n + c}{n}}\right)$ allora la probabilità che G(n,r(n)) sia non connesso è > 0 [*informale*]

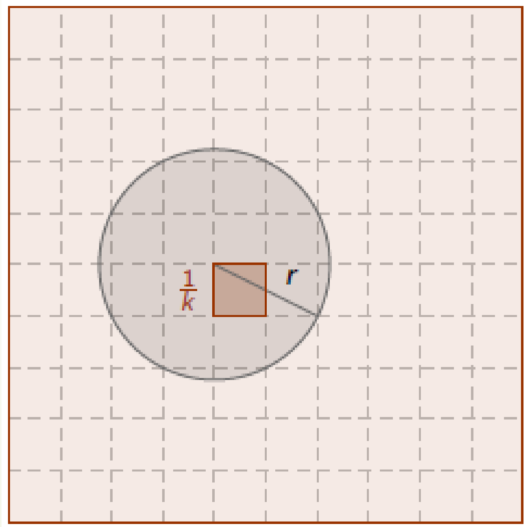
Delimitazione superiore

- **Teorema (Delimitazione superiore)**: esiste una costante $\gamma_1 > 0$ tale che se $r(n) \geq \gamma_1 \left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}} \right)$ allora G(n,r(n)) è connesso *con alta probabilità*
- sia k(n) > 0 un intero
  - dipendente da n
- Partizioniamo $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ in $k^2(n)$ celle, ciascuna di lato 1/k(n)
- e poniamo r(n) pari alla lunghezza della diagonale di una coppia di celle adiacenti
  - due celle sono adiacenti se hanno <u>*un lato*</u> in comune
- ossia, $r(n) = \sqrt{\left(\frac{2}{k(n)}\right)^2 + \left(\frac{1}{k(n)}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{k(n)}$



Delimitazione superiore

- **Teorema (Delimitazione superiore)**: esiste una costante $\gamma_1 > 0$ tale che se $r(n) \geq \gamma_1 \left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}} \right)$ allora G(n,r(n)) è connesso *con alta probabilità*
- poniamo $r(n) = \frac{\sqrt{5}}{k(n)}$, ossia, pari alla lunghezza della diagonale di una coppia di celle adiacenti
- in questo modo, ciascun nodo in una qualsiasi cella è collegato da un arco a tutti i nodi (eventualmente) contenuti in tutte le celle adiacenti
- Perciò, *se riuscissimo a dimostrare* che
  - con alta probabilità
  - ciascuna cella contiene almeno un nodo
- avremmo dimostrato che G(n,r(n)) è connesso con alta probabilità



Delimitazione superiore

- Abbiamo posto r(n) = $\sqrt{\left(\frac{2}{k(n)}\right)^2 + \left(\frac{1}{k(n)}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{k(n)}$
- Dimostriamo, ora, che **è possibile scegliere k(n) in modo tale che, con alta probabilità, nessuna cella è vuota**
- Invece di calcolare direttamente la probabilità di **questo evento**, calcoliamo la probabilità dell'evento complementare, ossia: **esiste almeno una cella vuota**
  - perché è più facile!
  - NB: da qui la prova si discosta da quella presentata nella dispensa
- Sia C una cella: il primo passo sarà trovare una delimitazione superiore a P(C = $\emptyset$)
- per farlo esprimiamo l'evento "C = $\emptyset$ " come intersezione di eventi:
- l'evento "C = $\emptyset$ " coincide con l'evento "1 $\notin$ C e 2 $\notin$ C e ... e n $\notin$ C" che esprimiamo sinteticamente come "$\bigcap_{1 \leq i \leq n}$ (i $\notin$ C)"
- Quindi, P(C = $\emptyset$) = P($\bigcap_{1 \leq i \leq n}$ (i $\notin$ C))

Delimitazione superiore

- Abbiamo posto r(n) = $\sqrt{\left(\frac{2}{k(n)}\right)^2 + \left(\frac{1}{k(n)}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{k(n)}$
- sia C una cella: $P(\, C = \emptyset \,) = P(\bigcap_{1 \leq i \leq n} (i \notin C)\,)$
- poiché i nodi sono posizionati in Q *indipendentemente* gli uni dagli altri,

$$P\,(\bigcap_{1 \leq i \leq n} (i \notin C)\,) = \prod_{1 \leq i \leq n} P(i \notin C)$$

- Sia i un nodo: la probabilità che il nodo i sia scelto all'interno della cella C è pari al rapporto fra l'area di C e l'area del quadrato Q = [0, 1] × [0, 1]
  - e, naturalmente, l'area di Q è pari a 1
- Quindi: $P(i \in C) = \frac{\text{area di C}}{\text{area di Q}} = \frac{1}{k^2(n)}$

  e conseguentemente $P(i \notin C) = 1 - \frac{1}{k^2(n)}$

- allora, $P(\, C = \emptyset \,) = P\,(\bigcap_{1 \leq i \leq n} (i \notin C)\,) = \prod_{1 \leq i \leq n} P(i \notin C) = \left(1 - \frac{1}{k^2(n)}\right)^n$

Delimitazione superiore

- Abbiamo posto r(n) = $\sqrt{\left(\frac{2}{k(n)}\right)^2+\left(\frac{1}{k(n)}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{k(n)}$
- sia C una cella: P(C = ∅) = $\left(1-\frac{1}{k^2(n)}\right)^n$
- A questo punto, P(∃ C: C = ∅) = P($\bigcup_{C \in Q}$ [C = ∅]) ≤ $\sum_{C \in Q}$ P(C = ∅)
  - dove l'ultima disuguaglianza segue dallo Union Bound: la probabilità dell'unione di eventi è minore o uguale della somma delle probabilità dei singoli eventi
- e quindi P(∃ C: C = ∅) ≤ $k^2(n)$ $\left(1-\frac{1}{k^2(n)}\right)^n$
- da cui, sostituendo $\frac{\sqrt{5}}{r(n)}$ a k(n), P(∃ C: C = ∅) ≤ $\frac{5}{r^2(n)}\left(1-\frac{r^2(n)}{5}\right)^n$
- infine, ponendo **r(n) =** $\gamma_1\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)$ otteniamo

$$\mathbf{P(\exists\ C: C = \emptyset) \leq \frac{5\,n}{\gamma_1^2\ \ln n}\left(1-\frac{\gamma_1^2\ \ln n}{5n}\right)^n}$$

Delimitazione superiore

- A questo punto, ci occorre un risultato tecnico
- **<u>Lemma</u>: Per ogni $x \in \mathbb{R}$: $1-x \leq e^{-x}$. Inoltre, se $x \neq 0$ allora $1-x < e^{-x}$.**
- Definiamo la funzione $G(x) = 1-x-e^{-x}$
- Calcoliamo la derivata prima di $G(x)$: $G'(x) = e^{-x} - 1$
- Studiamo il segno di $G'(x)$: $e^{-x} - 1 \geq 0 \rightarrow e^{-x} \geq 1 \rightarrow e^{-x} \geq e^{0} \rightarrow x \leq 0$
- $G'(x) \geq 0$ per $x \leq 0$: allora, $G(x)$ ha un punto di massimo relativo in $x = 0$
- inoltre, essendo l'unico punto in cui la derivata si annulla, $x = 0$ è anche un punto di massimo assoluto
- Poiché $G(0) = 1-0-e^{-0} = 0$, questo implica che
  - $G(x) \leq G(0) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ossia $1-x \leq e^{-x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
  - $G(x) < G(0) = 0$ per ogni $x \neq 0$

Delimitazione superiore

- Abbiamo dimostrato che ponendo **r(n) =** $\boldsymbol{\gamma_1 \left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}} \right)}$ abbiamo

  $$\mathbf{P(\exists\ C:\ C = \emptyset\ ) \le \frac{5\,n}{\gamma_1^2\ \ln n}\left(1 - \frac{\gamma_1^2\ \ln n}{5n}\right)^{n}}$$

- In virtù del Lemma appena dimostrato, poiché $\frac{\gamma_1^2\ \ln n}{5n} \neq 0$ per ogni n ∈ ℕ:

  $$\left(1 - \frac{\gamma_1^2\ \ln n}{5n}\right) < e^{-\frac{\gamma_1^2\ \ln n}{5n}}$$

- Quindi: P(∃ C: C = ∅) $< \frac{5\,n}{\gamma_1^2 \ln n}\, e^{-n\frac{\gamma_1^2\ \ln n}{5n}} = \frac{5\,n}{\gamma_1^2\ \ln n}\, e^{-\frac{\gamma_1^2\ \ln n}{5}}$

  $$< \frac{5\,n}{\gamma_1^2}\, e^{-\frac{\gamma_1^2\ \ln n}{5}} = \frac{5\,n}{\gamma_1^2}\, n^{-\frac{\gamma_1^2}{5}}$$

  $$= \frac{5}{\gamma_1^2}\, n^{1 - \frac{\gamma_1^2}{5}}$$

- Osserviamo che $1 - \frac{\gamma_1^2}{5} < 0$ per $\gamma_1 > \sqrt{5}$

Delimitazione superiore

- Abbiamo dimostrato che ponendo **r(n) =** $\boldsymbol{\gamma_1 \left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}} \right)}$ abbiamo

$$P(\exists\ C: C = \emptyset\ ) < \frac{5}{\gamma_1^2}\, n^{\,1 - \frac{\gamma_1^2}{5}}$$

- Osserviamo, poi, che $1 - \frac{\gamma_1^2}{5} < 0$ per $\gamma_1 > \sqrt{5}$
- In conclusione: scegliendo **r(n) =** $\boldsymbol{\gamma_1 \left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}} \right)}$ con $\boldsymbol{\gamma_1 > \sqrt{5}}$, e ponendo $b = \frac{5}{\gamma_1^2}$ e $c = \frac{\gamma_1^2}{5} - 1$, abbiamo che $P(\exists\ C: C = \emptyset\ ) < \frac{b}{n^c}$ con $c > 0$
- ossia, abbiamo dimostrato che: se **r(n)** $\boldsymbol{\geq \gamma_1 \left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}} \right)}$ esiste $\gamma_1 > 0$ tale che $P(G(n,r(n))$ è connesso$) \geq P(\nexists\ C = \emptyset\ ) = 1 - P(\exists\ C: C = \emptyset\ ) > 1 - \frac{b}{n^c}$
  - ossia, G(n,r(n)) è connesso con alta probabilità

QED

Delimitazione inferiore

- **Teorema (Delimitazione inferiore).** Per ogni costante c > 0,

  se r(n) = $\sqrt{\frac{\ln n + c}{n\,\pi}}$) allora $\lim_{n\to\infty}$ P(G(n,r(n)) è non connesso) > 0

- Per semplicità, nel corso della dimostrazione denoteremo con G il grafo G(n,r(n)) e con r il valore r(n).

- OSSERVAZIONE:

  - se nella prova della delimitazione superiore, ossia, che **r*(n)** $\leq \gamma_1 \left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}} \right)$, abbiamo dovuto cercare una *maggiorazione* della probabilità che G è non connesso (ossia, abbiamo dovuto dimostrare che P(G non connesso) ≤ *qualcosa*),

  - ora, per dimostrare che **r*(n)** $\geq \sqrt{\frac{\ln n + c}{n\,\pi}}$, dobbiamo trovare una *minorazione* della probabilità che G è non connesso (ossia, dobbiamo dimostrare che P(G non connesso) ≥ *qualcosa*)

Delimitazione inferiore

- dobbiamo trovare una *minorazione* di P(G non connesso)
- Per cominciare, introduciamo i seguenti eventi:
  - $\mathcal{E}_{\geq 1}$ = G contiene almeno un nodo isolato
  - $\mathcal{E}_{i_1 i_2 \dots i_h}$ = tutti i nodi $i_1, i_2, \dots, i_h$ sono isolati in G, con $i_1, i_2, \dots, i_h \in [n]$
  - $\mathcal{E}_{i!}$ = i è l'unico nodo isolato in G, con $i \in [n]$
- ed esprimiamo in loro funzione la probabilità che G sia non connesso
  - ovviamente, se G contiene almeno un nodo isolato allora G è non connesso: dunque, **P(G non connesso) ≥ P(** $\mathcal{E}_{\geq 1}$ **)**
  - poi, se accade che 1 è l'unico nodo isolato in G, oppure 2 è l'unico nodo isolato in G, oppure … , oppure n è l'unico nodo isolato in G allora accade anche che G contiene almeno un nodo isolato (ovviamente!). Dunque: **P(** $\mathcal{E}_{\geq 1}$ **) ≥ P(** $\bigcup_{i \in [n]} \mathcal{E}_{i!}$ **)**
  - e poiché $\mathcal{E}_{1!}, \mathcal{E}_{2!}, \dots, \mathcal{E}_{n!}$ sono eventi disgiunti: **P(** $\bigcup_{i \in [n]} \mathcal{E}_{i!}$ **) =** $\sum_{i \in [n]}$ **P(** $\mathcal{E}_{i!}$ **)**
- In conclusione: **P(G non connesso) ≥** $\sum_{i \in [n]}$ **P(** $\mathcal{E}_{i!}$ **)**

Delimitazione inferiore

- dobbiamo trovare una *minorazione* di P(G non connesso)
- **P(G non connesso)** $\geq \sum_{i \in [n]} P(\mathcal{E}_{i!})$
- Non è, però, semplice calcolare direttamente $P(\mathcal{E}_{i!})$: allora, lavoriamo per minorarla con espressioni che sappiamo calcolare
- A questo scopo, osserviamo che:
- i è l'unico nodo isolato in G se e solo se
  - i è un nodo isolato in G e, inoltre,
  - comunque scegliamo un altro nodo j, i e j non sono entrambi isolati in G:
  - dunque, $\mathcal{E}_{i!} = \mathcal{E}_i \cap_{j \in [n]-\{i\}} \mathcal{E}_{ij}{}^C = \mathcal{E}_i - \cup_{j \in [n]-\{i\}} \mathcal{E}_{ij}$
- da cui:

$$P(\mathcal{E}_{i!}) = P(\mathcal{E}_i - \cup_{j \in [n]-\{i\}} \mathcal{E}_{ij}) \geq P(\mathcal{E}_i) - P(\cup_{j \in [n]-\{i\}} \mathcal{E}_{ij}) \geq P(\mathcal{E}_i) - \sum_{j \in [n]-\{i\}} P(\mathcal{E}_{ij})$$

  - dove l'ultima disuguaglianza segue dallo Union Bound

Delimitazione inferiore

- dobbiamo trovare una *minorazione* di P(G non connesso)
- **P(G non connesso)** $\geq \sum_{i \in [n]} P(\mathcal{E}_{i!})$
- e $P(\mathcal{E}_{i!}) \geq P(\mathcal{E}_i) - \sum_{j \in [n]-\{i\}} P(\mathcal{E}_{ij})$

- Non ci resta che trovare **una minorazione per** $P(\mathcal{E}_i)$

  e

  una maggiorazione per $P(\mathcal{E}_{ij})$

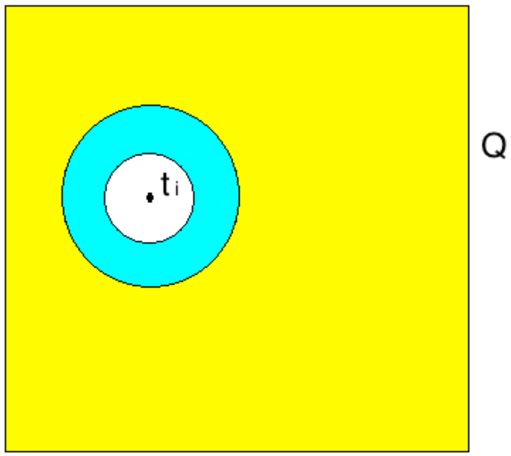
- Prima di procedere, indichiamo
  - per un punto t ∈ Q, $C_r(t)$ è il cerchio di centro t e raggio r
  - per i ∈ [n], t_i ∈Q è il punto del quadrato nel quale è posizionato il nodo i

Delimitazione inferiore

- **Minoriamo P($\mathcal{E}_i$)** :
- si verifica l'evento $\mathcal{E}_i$ se e solo se, una volta fissato t_i, nessun nodo $j \neq i$ è posizionato in $C_r(t_i)$
  - **fissato t_i** e fissato $j \neq i$, $P(t_j \notin C_r(t_i)) = \dfrac{\text{area di } (Q - C_r(t_i))}{\text{area di } Q} \geq 1 - \pi r^2$
    - maggiore o uguale perché $C_r(t_i)$ potrebbe non essere completamente contenuto in Q (se t_i è vicino al bordo di Q)
  - allora, **fissato t_i**, $P(\forall j \neq i\text{: } t_j \notin C_r(t_i)) \geq (1 - \pi r^2)^{n-1}$
- il punto t_i, nel quale posizionare i, è scelto uniformemente a caso in Q
  - che è un insieme continuo
  - e la funzione di densità corrispondente alla scelta uniformemente a caso di un punto in Q è $f(t) = \dfrac{1}{\text{area di } Q} = 1$
- e quindi $\mathbf{P(\mathcal{E}_i) \geq \int_{t_i \in Q} f(t_i)\,(1 - \pi r^2)^{n-1}\,dt_i = \int_{t_i \in Q} (1 - \pi r^2)^{n-1}\,dt_i = (1 - \pi r^2)^{n-1}}$

Delimitazione inferiore

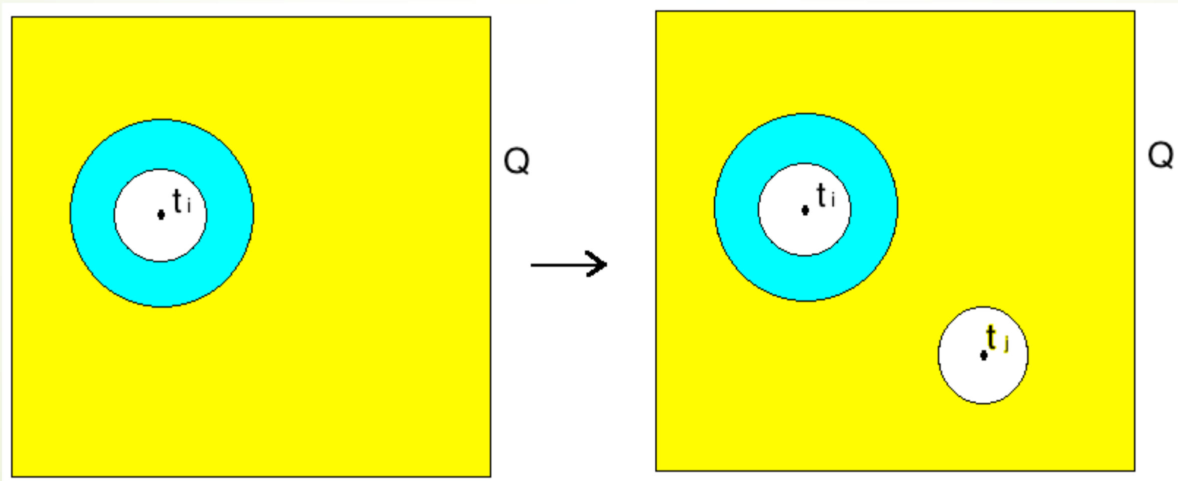
- **Maggioriamo P($\mathcal{E}_{ij}$)**
- si verifica l'evento $\mathcal{E}_{ij}$ se e solo se, una volta fissato t_i, j è posizionato in un nodo $t_j \notin C_r(t_i)$ e nessun nodo $h \in [n] - \{ i, j \}$ è posizionato in $C_r(t_i) \cup C_r(t_j)$
- possiamo esprimere questo evento come unione di due eventi mutuamente esclusivi (ossia, disgiunti):
  - $\mathcal{E}^1_{ij} = t_j \notin C_{2r}(t_i) \wedge \forall \; h \in [n] - \{ i, j \} \; [\; t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j) \;]$
    ossia, t_j è nella regione gialla in figura
  - $\mathcal{E}^2_{ij} = t_j \in C_{2r}(t_i) - C_r(t_i) \wedge \forall \; h \in [n] - \{ i, j \} \; [\; t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j) \;]$
    ossia, t_j è nell'anello azzurro in figura



- Allora: $P(\mathcal{E}_{ij}) = P(\mathcal{E}^1_{ij} \cup \mathcal{E}^2_{ij}) = P(\mathcal{E}^1_{ij}) + P(\mathcal{E}^2_{ij})$

Delimitazione inferiore

- **Maggioriamo P($\mathcal{E}_{ij}$)**
- allora, P($\mathcal{E}_{ij}$) = P($\mathcal{E}^1_{ij}$) + P($\mathcal{E}^2_{ij}$)
  - questa formulazione ci aiuterà con la maggiorazione
- Calcoliamo P($\mathcal{E}^1_{ij}$): fissiamo t_i , fissiamo t_j nella zona gialla e fissiamo h ∈ [n] –{ i, j }
  - la probabilità di scegliere t_h nella regione rimanente (gialla + azzurra nella figura a destra) è pari al rapporto dell'area della regione con l'area del quadrato
  - ossia, essa è $1 - 2\pi r^2$ *- almeno se t_i e t_j non sono troppo vicini al bordo del quadrato*



Delimitazione inferiore

- **Maggioriamo P($\mathcal{E}_{ij}$)**
- allora, P($\mathcal{E}_{ij}$) = P($\mathcal{E}^1_{ij}$) + P($\mathcal{E}^2_{ij}$)
- Calcoliamo P($\mathcal{E}^1_{ij}$): fissiamo t_i , fissiamo t_j nella zona gialla e fissiamo h ∈ [n] –{ i, j }
  - la probabilità di scegliere t_h nella regione rimanente (rosa + azzurra) è pari al rapporto dell'area della regione con l'area del quadrato
  - ossia, essa è $1 - 2\,\pi\, r^2$
  - *almeno, se t_i e t_j non sono troppo vicini al bordo del quadrato*
- Calcoliamo P($\mathcal{E}^1_{ij}$): fissiamo t_i e fissiamo t_j nella zona gialla
  - allora, la probabilità che, **per ogni h ∈ [n] –{ i, j }, $t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j)$** è in questo caso ($t_j$ scelto nella zona gialla) **$(1 - 2\,\pi\, r^2)^{n-2}$**
    - *almeno, se t_i e t_j non sono troppo vicini al bordo del quadrato*
    - In realtà, complicando leggermente la prova, è possibile giungere agli stessi risultati considerando anche gli **effetti ai bordi**.
    - Poiché le tecniche rimangono sostanzialmente invariate, per semplicità studiamo la versione semplificata che non considera gli effetti ai bordi.

Delimitazione inferiore

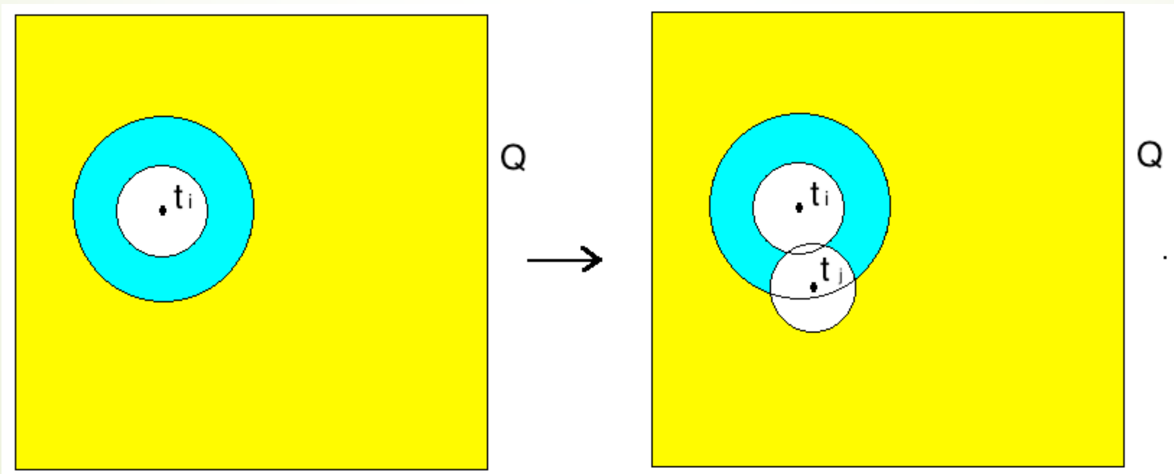
- **Maggioriamo $P(\mathcal{E}_{ij})$**
- allora, $P(\mathcal{E}_{ij}) = P(\mathcal{E}^1_{ij}) + P(\mathcal{E}^2_{ij})$
- Calcoliamo $P(\mathcal{E}^1_{ij})$: fissiamo t_i e fissiamo t_j nella zona gialla
  - allora, la probabilità che, per ogni $h \in [n] -\{ i, j \}$, $t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j)$ è in questo caso (t_j scelto nella zona gialla) $(1- 2\pi r^2)^{n-2}$
  - ***trascurando gli effetti ai bordi***
- *fissato t_i*, la probabilità che, **scegliendo t_j nella zona gialla**, per ogni $h \in [n] -\{ i, j \}$, $t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j)$ è $\int_{t_j \in Q - C_{2r}(t_i)} f(t_j)(1 - 2\pi r^2)^{n-2} dt_j$
- infine, $P(\mathcal{E}^1_{ij}) = \int_{t_i \in Q} f(t_i) \int_{t_j \in Q - C_{2r}(t_i)} f(t_j)(1 - 2\pi r^2)^{n-2} dt_j \, dt_i$

$$= \int_{t_i \in Q} \int_{t_j \in Q - C_{2r}(t_i)} (1 - 2\pi r^2)^{n-2} dt_j \, dt_i$$

$$= \int_{t_i \in Q} (1 - 4\pi r^2)(1 - 2\pi r^2)^{n-2} dt_i = (1 - 4\pi r^2)(1 - 2\pi r^2)^{n-2}$$

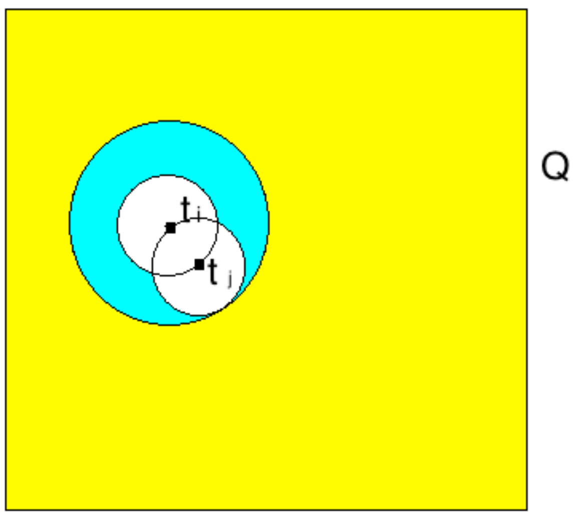
Delimitazione inferiore

- **Maggioriamo P($\mathcal{E}_{ij}$)**
- allora, P($\mathcal{E}_{ij}$) = P($\mathcal{E}^1_{ij}$) + P($\mathcal{E}^2_{ij}$)
- Maggioriamo P($\mathcal{E}^2_{ij}$): fissiamo t_i, fissiamo t_j nella zona azzurra e fissiamo h ∈ [n] –{ i, j }
  - la probabilità di scegliere t_h nella regione rimanente (gialla+ azzurra nella figura a destra) è pari al rapporto dell'area della regione con l'area del quadrato
  - e, questa volta, dipende dalla posizione di t_j nella zona azzurra



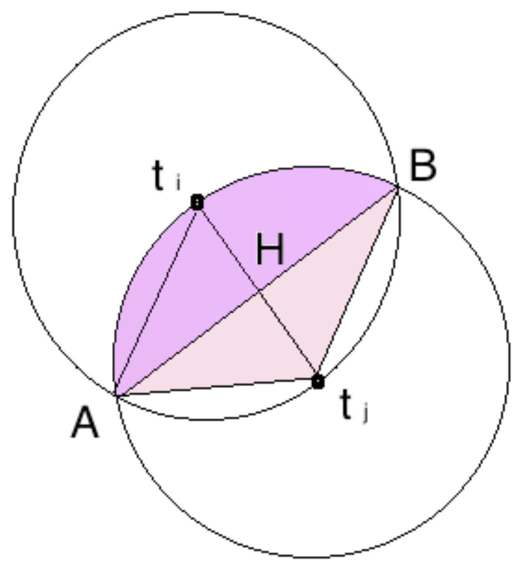
Delimitazione inferiore

- **Maggioriamo P($\mathcal{E}_{ij}$)**
- allora, P($\mathcal{E}_{ij}$) = P($\mathcal{E}^1_{ij}$) + P($\mathcal{E}^2_{ij}$)
- Maggioriamo P($\mathcal{E}^2_{ij}$): fissiamo t_i, fissiamo t_j nella zona azzurra e fissiamo h ∈ [n] – { i, j }
  - la probabilità di scegliere t_h nella regione rimanente (gialla+ azzurra) è massima quando è massima l'intersezione di $C_r(t_i)$ con $C_r(t_j)$ – ossia, quando t_j è sulla circonferenza che delimita $C_r(t_i)$
  - in questo caso area($C_r(t_i) \cup C_r(t_j)$) = $2 \pi r^2$ – area($C_r(t_i) \cap C_r(t_j)$)



Delimitazione inferiore

- **Maggioriamo P($\mathcal{E}_{ij}$)**
- allora, P($\mathcal{E}_{ij}$) = P($\mathcal{E}_{ij}^1$) + P($\mathcal{E}_{ij}^2$)
- Maggioriamo P($\mathcal{E}_{ij}^2$): fissiamo t_i, fissiamo t_j su $C_r(t_i)$ e fissiamo h ∈ [n] –{ i, j }
  - area($C_r(t_i) \cap C_r(t_j)$) = 2 · area colorata viola = 2 · [area colorata (rosa e viola)- area t_jAB]
  - t_jAt_i è un triangolo equilatero di lato r, allora la sua area è $\frac{1}{2}$ r $\frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$

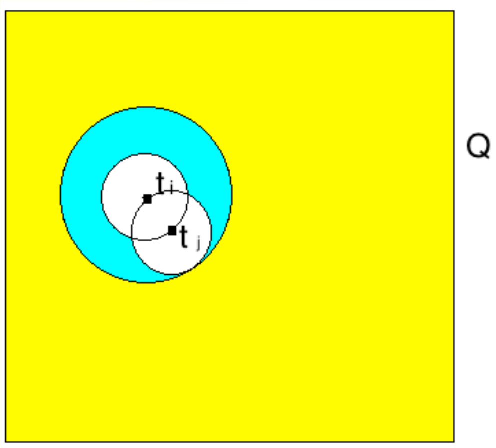


- area triangolo t_jAB = area triangolo t_jAt_i = $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$
- la regione rosa e viola è un settore circolare di $C_r(t_j)$, e il suo angolo al centro At_jB è il doppio di At_jt_i che misura $\frac{\pi}{3}$ (perché t_jAt_i e t_jBt_i sono triangoli equilateri)
- allora, l'area della regione rosa e viola è $\frac{1}{2} r^2 \frac{2\pi}{3} = r^2 \frac{\pi}{3}$
- allora, l'area della regione viola è $r^2 \frac{\pi}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$
- allora, area($C_r(t_i) \cap C_r(t_j)$) = 2 r^2 ($\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$)

Delimitazione inferiore

- **Maggioriamo $P(\mathcal{E}_{ij})$**
- allora, $P(\mathcal{E}_{ij}) = P(\mathcal{E}^1_{ij}) + P(\mathcal{E}^2_{ij})$
- Maggioriamo $P(\mathcal{E}^2_{ij})$: fissiamo t_i, fissiamo t_j nella zona azzurra e fissiamo h ∈ [n] –{ i, j }
  - la probabilità di scegliere t_h nella regione rimanente (gialla+ azzurra) è massima quando è massima l'intersezione di $C_r(t_i)$ con $C_r(t_j)$ – ossia, quando t_j è sulla circonferenza che delimita $C_r(t_i)$
  - in questo caso:

$$\text{area}(C_r(t_i) \cup C_r(t_j)) = 2\pi r^2 - \text{area}(C_r(t_i) \cap C_r(t_j))$$
$$= 2\pi r^2 - 2r^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{4\pi}{3} r^2 + \frac{\sqrt{3}\pi}{2\pi} r^2$$
$$= \pi r^2\left(\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right) > \frac{8}{5}\pi r^2$$



- Ossia, la probabilità di scegliere t_h nella regione gialla+ azzurra è: **$1 - \text{area}(C_r(t_i) \cup C_r(t_j)) < 1 - \frac{8}{5}\pi r^2$**
- e, quindi, la probabilità di scegliere tutti gli n-2 punti t_h nella regione gialla+ azzurra è **$< \left(1 - \frac{8}{5}\pi r^2\right)^{n-2}$**
- *sempre trascurando gli effetti ai bordi*

Delimitazione inferiore

- **Maggioriamo P($\mathcal{E}_{ij}$)**
- allora, P($\mathcal{E}_{ij}$) = P($\mathcal{E}^1_{ij}$) + P($\mathcal{E}^2_{ij}$)
- Maggioriamo P($\mathcal{E}^2_{ij}$): fissiamo t_i, fissiamo t_j nella zona azzurra e fissiamo $h \in [n] - \{ i, j \}$
  - allora, la probabilità che, per ogni $h \in [n] - \{ i, j \}$, $t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j)$ è in questo caso (t_j scelto nella zona azzurra) $< (1 - \frac{8}{5} \pi r^2)^{n-2}$
  - *trascurando gli effetti ai bordi*
- *fissato t_i*, la probabilità che, **scegliendo t_j nella zona azzurra**, per ogni $h \in [n] - \{ i, j \}$, $t_h \notin C_r(t_i) \cup C_r(t_j)$ è $< \int_{t_j \in C_{2r}(t_i) - C_r(t_i)} f(t_j) \left(1 - \frac{8}{5} \pi r^2 \right)^{n-2} dt_j$
- infine, **P($\mathcal{E}^2_{ij}$) <** $\int_{t_i \in Q} \int_{t_j \in C_{2r}(t_i) - C_r(t_i)} f(t_i) f(t_j) \left(1 - \frac{8}{5} \pi r^2 \right)^{n-2} dt_j \, dt_i$

$$= \int_{t_i \in Q} \int_{t_j \in C_{2r}(t_i) - C_r(t_i)} \left(1 - \frac{8}{5} \pi r^2 \right)^{n-2} dt_j \, dt_i$$

$$= \int_{t_i \in Q} (4 \pi r^2 - \pi r^2) \left(1 - \frac{8}{5} \pi r^2 \right)^{n-2} dt_i = \mathbf{3 \pi r^2 \left(1 - \frac{8}{5} \pi r^2 \right)^{n-2}}$$

Delimitazione inferiore

- **Maggioriamo $P(\mathcal{E}_{ij})$:**
- $P(\mathcal{E}_{ij}) = P(\mathcal{E}^1_{ij}) + P(\mathcal{E}^2_{ij}) < (1 - 4\pi r^2)(1 - 2\pi r^2)^{n-2} + 3\pi r^2 \left(1 - \frac{8}{5}\pi r^2\right)^{n-2}$

  $$< (1 - 2\pi r^2)^{n-2} + 3\pi r^2 \left(1 - \frac{8}{5}\pi r^2\right)^{n-2}$$

- Sostituiamo ora $r = \sqrt{\frac{\ln n + c}{n\pi}}$:
- $P(\mathcal{E}_{ij}) < \left(1 - 2\,\frac{\ln n + c}{n}\right)^{n-2} + 3\,\frac{\ln n + c}{n}\left(1 - \frac{8}{5}\,\frac{\ln n + c}{n}\right)^{n-2}$

  $$< e^{-2\frac{\ln n + c}{n}(n-2)} + 3\,\frac{\ln n + c}{n}\, e^{-\frac{8}{5}\frac{\ln n + c}{n}(n-2)}$$

  $$= e^{-2\frac{\ln n + c}{n}(n-2)} + 3\,\frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}}\, n^{\frac{-2}{5}}\, e^{-\frac{8}{5}\frac{\ln n + c}{n}(n-2)}$$

  [… continua …]

Delimitazione inferiore

- [… continua …]
- $P(\mathcal{E}_{ij}) < e^{-2\frac{\ln n + c}{n}(n-2)} + 3\frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}} n^{\frac{-2}{5}} e^{-\frac{8}{5}\frac{\ln n + c}{n}(n-2)}$

$$= e^{-2\frac{n-2}{n}\ln n}\, e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} + 3\frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}}\, \boldsymbol{n^{\frac{-2}{5}}}\, e^{-\frac{8}{5}\frac{(n-2)}{n}\ln n}\, e^{-\frac{8}{5}\frac{c(n-2)}{n}}$$

$$= e^{-2\frac{n-2}{n}\ln n}\, e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} + 3\frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}}\, \boldsymbol{e^{-\frac{2}{5}\ln n}}\, e^{-\frac{8}{5}\frac{(n-2)}{n}\ln n}\, e^{-\frac{8}{5}\frac{c(n-2)}{n}}$$

$$< e^{-2\frac{n-2}{n}\ln n}\, e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} + 3\frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}}\, \boldsymbol{e^{-\frac{2}{5}\frac{(n-2)}{n}\ln n}}\, e^{-\frac{8}{5}\frac{(n-2)}{n}\ln n}\, e^{-\frac{8}{5}\frac{c(n-2)}{n}}$$

$$= n^{-2\frac{n-2}{n}}\, e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} + 3\frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}}\, n^{-2\frac{n-2}{n}}\, e^{-\frac{8}{5}\frac{c(n-2)}{n}}$$

$$= n^{-2\frac{n-2}{n}}\, e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} \left[1 + 3\frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}}\, e^{\frac{2}{5}\frac{c(n-2)}{n}}\right]$$

Delimitazione inferiore

- **Riassumiamo:** P(G non connesso) $\geq \sum_{i \in [n]} P(\mathcal{E}_{i!}) \geq \sum_{i \in [n]} [\, P(\mathcal{E}_i) - \sum_{j \in [n]-\{i\}} P(\mathcal{E}_{ij})\,]$
  - e $P(\mathcal{E}_i) \geq (1 - \pi r^2)^{n-1}$
  - e $P(\mathcal{E}_{ij}) < n^{-2\frac{n-2}{n}} e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} \left[1 + 3\,\frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}}\, e^{\frac{2}{5}\frac{c(n-2)}{n}}\right]$
- quindi,

  P(G non connesso) $> n(1 - \pi r^2)^{n-1} - n(n-1)\, n^{-2\frac{n-2}{n}} e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} \left[1 + 3\,\frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}} e^{\frac{2}{5}\frac{c(n-2)}{n}}\right]$
- osserviamo che $\lim_{n\to\infty} n(n-1)\, n^{-2\frac{n-2}{n}} e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} \left[1 + 3\,\frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}} e^{\frac{2}{5}\frac{c(n-2)}{n}}\right] = e^{-2c}$
- infatti, informalmente:
  - $\lim_{n\to\infty} n(n-1)\, n^{-2\frac{n-2}{n}} = 1$
  - $\lim_{n\to\infty} e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} = e^{-2c}$
  - $\lim_{n\to\infty} 3\,\frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}} e^{\frac{2}{5}\frac{c(n-2)}{n}} = 0$

Delimitazione inferiore

- **Riassumiamo:**

  $$\mathbf{P(G\ non\ connesso) > n(1 - \pi\, r^2)^{n-1} - n(n-1)\, n^{-2\frac{n-2}{n}}\, e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} \left[1 + 3\, \frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}} e^{\frac{2}{5}\frac{c(n-2)}{n}}\right]}$$

- e $\lim\limits_{n\to\infty} n(n\text{-}1)\, n^{-2\frac{n-2}{n}}\, e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} \left[1 + 3\, \frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}} e^{\frac{2}{5}\frac{c(n-2)}{n}}\right] = e^{-2c}$

- ossia: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $n \geq n_\varepsilon$:

  $$n(n\text{-}1)\, n^{-2\frac{n-2}{n}}\, e^{-2\frac{c(n-2)}{n}} \left[1 + 3\, \frac{\ln n + c}{n^{\frac{3}{5}}} e^{\frac{2}{5}\frac{c(n-2)}{n}}\right] < (1 + \varepsilon)\, e^{-2c}$$

- allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $n \geq n_\varepsilon$:

  $$\mathbf{P(G\ non\ connesso) > n\,(1 - \pi\, r^2)^{n-1} - (1 + \varepsilon)\ e^{-2c}}$$

- allora, per dimostrare che $\lim\limits_{n\to\infty}$ P(G non connesso) > 0 è sufficiente dimostrare che, *da un certo n in poi,*

  $$\mathbf{n\,(1 - \pi\, r^2)^{n-1} - (1 + \varepsilon)\, e^{-2c} > 0}$$

Delimitazione inferiore

- dimostriamo che, da un certo n in poi, $\mathbf{n(1 - \pi r^2)^{n-1} > (1+\varepsilon)}\, e^{-2c}$
  - calcoliamo il logaritmo del membro sinistro della disuguaglianza:

    $\ln [n (1 - \pi r^2)^{n-1}] = \ln n + \ln (1 - \pi r^2)^{n-1} = \ln n + (n-1) \ln (1 - \pi r^2)$
  - ricordiamo che, per $x < 1$, $\ln (1 - x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$
  - da cui $\ln [n(1 - \pi r^2)^{n-1}] = \ln n - (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pi r^2)^k}{k}$
  - e poiché $r = \sqrt{\frac{\ln n + c}{n \pi}}$, ossia $\pi r^2 = \frac{\ln n + c}{n}$, allora $\ln [n (1 - \pi r^2)^{n-1}] = \ln n - (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln n + c)^k}{k\, n^k}$
  - a questo punto poniamo $\delta(n) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln n + c)^k}{k\, n^k}$ così che

    $$\ln n(1 - \pi r^2)^{n-1} = \ln n - (n-1) \left[\sum_{k=1}^{2} \frac{(\ln n + c)^k}{k\, n^k} + \delta(n) \right]$$
  - ossia, $\ln [n (1 - \pi r^2)^{n-1}] = \ln n - (n-1) \left[\frac{(\ln n + c)}{n} + \frac{(\ln n + c)^2}{2\, n^2} + \delta(n) \right]$
- a questo punto, non ci resta che maggiorare $\delta(n)$

Delimitazione inferiore

- **P(G non connesso) > $n(1 - \pi r^2)^{n-1} - (1+\varepsilon)\, e^{-2c}$**
  - per ogni $n \geq n_\varepsilon$
- stiamo dimostrando che, da un certo n in poi, $\mathbf{n(1 - \pi r^2)^{n-1} - (1+\varepsilon)\, e^{-2c} > 0}$
- e $\ln[\, n(1-\pi r^2)^{n-1}] = \ln n - (n-1)\left[\frac{(\ln n + c)}{n} + \frac{(\ln n+c)^2}{2\,n^2} + \delta(n) \right]$
- a questo punto, non ci resta che maggiorare $\delta(n)$:
  - $\delta(n) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln n+c)^k}{k\, n^k} \leq \frac{1}{3} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln n+c)^k}{n^k} \leq \frac{1}{3} \int_2^{\infty} \left(\frac{\ln n+c}{n}\right)^x dx$

$$= \lim_{h\to\infty} \frac{1}{3} \int_2^h \left(\frac{\ln n+c}{n}\right)^x dx = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{3} \int_2^h e^{x \ln\left(\frac{\ln n+c}{n}\right)} dx = \lim_{h\to\infty} \left[\frac{1}{3} \frac{1}{\ln\left(\frac{\ln n+c}{n}\right)} e^{x \ln\left(\frac{\ln n+c}{n}\right)} \right]_2^h$$

$$= \lim_{h\to\infty} \left[\frac{1}{3} \frac{1}{\ln\left(\frac{\ln n+c}{n}\right)} \left(\frac{\ln n+c}{n}\right)^x \right]_2^h = -\frac{1}{3} \frac{1}{\ln\left(\frac{\ln n+c}{n}\right)} \frac{(\ln n+c)^2}{n^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{\ln\left(\frac{n}{\ln n+c}\right)} \frac{(\ln n+c)^2}{n^2}$$

  - e poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{n}{\ln n+c}\right)} = 0$, allora $\frac{1}{\ln\left(\frac{n}{\ln n+c}\right)} < 1$ <u>*per n sufficientemente grande*</u>
- in conclusione, $\delta(n) < \frac{1}{3} \frac{(\ln n+c)^2}{n^2}$

Delimitazione inferiore

- **P(G non connesso)** $> \mathbf{n(1 - \pi r^2)^{n-1} - (1 + \varepsilon)}\ e^{-2c}$
- stiamo dimostrando che, da un certo n in poi, $\mathbf{n(1 - \pi r^2)^{n-1} - (1 + \varepsilon)\ e^{-2c} > 0}$
  - e $\ln [\, n\,(1 - \pi r^2)^{n-1}] = \ln n - (n-1) \left[\frac{(\ln n + c)}{n} + \frac{(\ln n+c)^2}{2\, n^2} + \delta(n) \right]$
  - e $\delta(n) < \frac{1}{3}\ \frac{(\ln n+c)^2}{n^2}$
- allora $\ln [\, n\,(1 - \pi r^2)^{n-1}] > \ln n - (n-1) \left[\frac{(\ln n+c)}{n} + \frac{(\ln n+c)^2}{2\, n^2} + \frac{1}{3}\ \frac{(\ln n+c)^2}{n^2} \right]$

$$= \ln n - (n-1) \left[\frac{(\ln n+c)}{n} + \frac{5\,(\ln n+c)^2}{6\, n^2} \right]$$

$$= \ln n - \frac{n-1}{n} (\ln n + c) - \frac{5\,(n-1)\,(\ln n+c)^2}{6\, n^2}$$

$$> \ln n - (\ln n + c) - \frac{5\,(n-1)\,(\ln n+c)^2}{6\, n^2}$$

$$= -c - \frac{5\,(n-1)\,(\ln n+c)^2}{6\, n^2}$$

Delimitazione inferiore

- **P(G non connesso)** > **n (1 - π r^2)$^{n-1}$ - (1 + ε) e^{-2c}**
- stiamo dimostrando che, da un certo n in poi, **n (1 - π r^2)$^{n-1}$ - (1 + ε) e^{-2c} > 0**
- e **ln [n (1 - π r^2)$^{n-1}$] >** – **c** – $\frac{5\,(n-1)\,(\ln n + c)^2}{6\,n^2}$
- poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{5\,(n-1)\,(\ln n+c)^2}{6\,n^2}$ = 0, allora per ogni ω > 0 esiste $n_\omega \geq n_\varepsilon$ tale che
  per ogni n ≥ n_ω : $\frac{5\,(n-1)\,(\ln n+c)^2}{6\,n^2} < \omega$
- allora, per n sufficientemente grande **ln [n(1 − π r^2)$^{n-1}$] > −c − ω**
- e dunque **n (1 - π r^2)$^{n-1}$ > $e^{-c-\omega}$**
- scegliamo ω < c – ln (1 + ε)
- allora, **n (1 - π r^2)$^{n-1}$ > $e^{-c-\omega}$** > $e^{-c-c+\ln(1+\varepsilon)} = e^{-2c}\ e^{\ln(1+\varepsilon)}$ = **(1 + ε) e^{-2c}**
- cioè, per n sufficientemente grande

  P(G non connesso) > n (1 - π r^2)$^{n-1}$ - (1 + ε) e^{-2c} > (1 + ε) e^{-2c} - (1 + ε) e^{-2c} = **0**
- QED