DEF: Una catena di Markov omogenea a valori in E, con matrice di transizione $(P_{ij})_{i,j\in E}$ è REGOLARE se $\exists\, n \geq 1$ tale che $p_{ij}^{(n)} > 0 \ \forall\, i,j \in E$

$$\begin{pmatrix} REG \Rightarrow IRR \\ IRR \not\Rightarrow REG \end{pmatrix}$$

TEOREMA DI MARKOV

Sia $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una catena di Markov regolare a valori in E, con E finito e con matrice di transizione $(p_{ij})_{i,j\in E}$. Allora esiste un'unica distribuzione stazionaria

$\Pi = (\pi_i)_{i\in E}$; inoltre si ha $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \Pi_j \quad \forall\, i,j \in E$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in E} j\, P(X_n = j) = \sum_{j\in E} j \cdot \pi_j$$

$\rightarrow \sum_{j\in E} j\pi_j$ è un valore approssimato di $\mathbb{E}[X_n]$ per n grande

Condizione sufficiente per avere IRR $\Rightarrow$ REG

Supponiamo che E sia finito e che valga (IRR). Allora, se esiste $h \in E$ tale che $p_{hh} > 0$, vale (REG).

ESERCIZIO 1

Sia $\{X_n\}$ una catena di Markov omogenea su $E=\{1,2,3\}$ con matrice di transizione

$$P=\begin{pmatrix} 0 & q & 1-q \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{per } q\in[0,1]$$

1) Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \quad \forall i,j\in E$

Soluzione: La catena è ovviamente irriducibile. Inoltre è regolare per perché $p_{33}>0$. Allora i limiti esistono per il teorema di Markov, e vengono espressi con l'unica distribuzione stazionaria. Si ha

$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3)\begin{pmatrix} 0 & q & 1-q \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3) \iff \begin{cases} \frac{\pi_2}{2}+\frac{\pi_3}{3}=\pi_1 \\ q\pi_1+\frac{\pi_3}{3}=\pi_2 \\ (1-q)\pi_1+\frac{\pi_2}{2}+\frac{\pi_3}{3}=\pi_3 \end{cases}$$

$$\iff q\left(\frac{\pi_2}{2}+\frac{\pi_3}{3}\right)+\frac{\pi_3}{3}=\pi_2 \iff \frac{(1+q)\pi_3}{3}=\left(1-\frac{q}{2}\right)\pi_2 \iff \pi_3=\left(\frac{3}{1+q}\right)\left(1-\frac{q}{2}\right)\pi_2$$

$$\pi_1=\left(\frac{1}{2}+\frac{2-q}{2(1+q)}\right)\pi_2$$

$$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \implies$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2-q}{2(1+q)}\right)\pi_2+\pi_2\left(\frac{3}{1+q}\right)\overset{\frac{2-q}{2}}{\left(1-\frac{q}{2}\right)}\pi_2=1$$

$$\implies \frac{1+\cancel{q}+2-\cancel{q}}{2(1+q)}\pi_2+\pi_2\,\frac{6-3q}{2(1+q)}\pi_2=1 \implies \frac{3+2+2q+6-3q}{2(1+q)}\pi_2=1$$

sostituendo

$$\implies \frac{11-q}{2(1+q)}\pi_2=1 \iff \pi_2=\frac{2(1+q)}{11-q}, \quad \pi_1=\frac{3}{11-q}, \quad \pi_3=\frac{6-3q}{11-q}$$

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = \left(\frac{3}{11-q}, \frac{2+2q}{11-q}, \frac{6-3q}{11-q} \right)$$

In conclusione, possiamo dire che

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{3}{11-q} & \text{per } j=1 \\ \frac{2+2q}{11-q} & \text{per } j=2 \\ \frac{6-3q}{11-q} & \text{per } j=3 \end{cases}$$

2) Trovare se esiste il valore di q per cui si ha

$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 3) = \frac{5}{11}$ qualunque sia la distribuzione iniziale della catena.

$$\pi_3 = \frac{6-3q}{11-q} = \frac{5}{11} \iff 6-3q = \frac{55-5q}{11} \iff 66-33q = 55-5q$$

$$\iff 66-55 = (33-5)q \iff 11 = 28q$$

$$\iff q = \frac{11}{28}$$

ESERCIZIO 2

Sia $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1,2,3\}$ con

$$P = \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 3 & \\ & \begin{pmatrix} 99/100 & 1/100 & 0 \\ 0 & r & 1-r \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} & & & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array} \qquad r \in [0,1]$$

1) $E = T \cup C_1 \cup, \dots, \cup C_k$

$\forall r \in [0,1]$, si ha che $\{2,3\}$ è una classe chiusa.

In particolare $1 \to 2$ e $2 \to 1$ $\Rightarrow$ 1 è Transitorio

Per $r=1$ $3 \to 2$ e $2 \not\to 3$ $\Rightarrow$ 2 è assorbente
Per $r \neq 1$ $\{2,3\}$ è irriducibile, Quindi

1.A) Per $r=1$ l'unica distribuzione stazionaria è $(0,1,0)$

1.B) Per $r \neq 1$ l'unica distribuzione stazionaria è $(0, \pi_2, \pi_3)$ dove

$$(\pi_2, \pi_3)\begin{pmatrix} r & 1-r \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (\pi_2, \pi_3) \Rightarrow \begin{cases} r\pi_2 + \frac{\pi_3}{2} = \pi_2 \\ (1-r)\pi_2 + \frac{\pi_3}{2} = \pi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\pi_3}{2} = (1-r)\pi_2 \\ \frac{\pi_3}{2} = (1-r)\pi_2 \Rightarrow \pi_3 = (2-2r)\pi_2 \end{array}$$

$$\pi_3 = 1 - \pi_2$$

$$\Rightarrow (2-2r)\pi_2 = 1 - \pi_2 \iff (3-2r)\pi_2 = 1 \iff \pi_2 = \frac{1}{3-2r}$$

$$\pi_3 = \frac{2-2r}{3-2r}$$

$$\pi = \left(0, \frac{1}{3-2r}, \frac{2-2r}{3-2r}\right)$$

2) Supponiamo che $0 \leq r < 1$, cioè $r \neq 1$, Calcolare $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ $\forall i,j \in \{2,3\}$

La classe $\{2,3\}$ è una classe chiusa. Per $r \neq 1$ si ha una classe chiusa irriducibile. Inoltre la catena ristretta $\{2,3\}$ è regolare. Infatti $p_{33} > 0$. Quindi possiamo concludere per il teorema di Markov alla catena ristretta $\{2,3\}$ e, per la distribuzione stazionaria calcolata prima, si ha

- $\lim_{n\to\infty} p_{i2}^{(n)} = \frac{1}{3-2r}$ $\quad \forall i \in \{2,3\}$
- $\lim_{n\to\infty} p_{i3}^{(n)} = \frac{2-2r}{3-2r}$

ESERCIZIO 3

Sia $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una catena di Markov omogenea su $E=\{1,2,3,4\}$

$$P=\begin{pmatrix} q & 1-q & 0 & 0 \\ 1-q^2 & q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1-r \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{per } q,r\in[0,1]$$

1) Sia $P(X_0=3)=1$. Calcolare $P(X_{1000}=3)$ eventualmente in maniera approssimata.

Le classi $\{1,2\}$ e $\{3,4\}$ sono classi chiuse.

Per l'ipotesi $P(X_0=3)=1$ si ha $P(X_{1000}=3)=P_{33}^{(1000)}$

1.A) Per $r=1 \Rightarrow 3 \leftarrow 4$ ma non $3\to 4 \Rightarrow 3$ è assorbente e quindi $P_{33}^{(n)}=1 \quad \forall\, n\geq 1 \Rightarrow P_{33}^{(1000)}=1$.

1.B) Per $r\neq 1$ possiamo considerare la catena ristretta alla classe chiusa $\{3,4\}$ che è irriducibile. Inoltre la catena ristretta è irriducibile perché $p_{44}>0 \Rightarrow$ Per il teorema di Markov abbiamo che:

Consideriamo la distribuzione stazionaria (π_3,π_4) per $\{3,4\}$.

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\pi_j \quad \forall\, i,j\in\{3,4\}$$

$$(\pi_3,\pi_4)\begin{pmatrix} r & 1-r \\ 1/3 & 2/3\end{pmatrix}=(\pi_3,\pi_4)\Rightarrow \begin{cases} r\pi_3+\frac{\pi_4}{3}=\pi_3 \\ (1-r)\pi_3+\frac{2\pi_4}{3}=\pi_4\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}(1-r)\pi_3=\frac{\pi_4}{3} \\ (1-r)\pi_3=\frac{\pi_4}{3}\end{cases}$$

$$\pi_3+\pi_4=1$$

$$\pi_3=1-\pi_4$$

$$\pi_3=\frac{\pi_4}{3(1-r)}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi_4}{3(1-r)} = 1-\pi_4 \iff \frac{3-3r+1}{3-3r}\pi_4 = 1 \iff \pi_4 = \frac{3-3r}{4-3r}$$

$$\pi_3 = 1-\frac{3-3r}{2-3r} = \frac{4-3r-3+3r}{4-3r} = \frac{1}{4-3r}$$

$$(\pi_3, \pi_4) = \left(\frac{1}{4-3r}, \frac{3-3r}{4-3r}\right)$$

In conclusione, quando $n = 1000$ grande, si ha $P_{33}^{(1000)} \cong \pi_3 = \frac{1}{4-3r}$

2) Sia $P(X_0 \in \{1,2\}) = 1$ e $q \in (0,1)$. Dire se esistono valori di q per cui si ha

$$\lim_{n\to\infty} P_{11}^{(n)} = \frac{3}{4} \quad e \quad \lim_{n\to\infty} P_{11}^{(n)} = 1/4$$

Poiché $q \in (0,1)$ la catena $\{1,2\}$ risulta irriducibile e di conseguenza regolare perciò, per il teorema di Markov

$$\lim_{n\to\infty} P_{11}^{(n)} = \pi_1$$

Consideriamo la distribuzione stazionario (π_1, π_2) di $\{1, 2\}$

$$(\pi_1, \pi_2)\begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-q^2 & q^2 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2) \iff \begin{cases} q\pi_1 + (1-q^2)\pi_2 = \pi_1 \\ (1-q)\pi_1 + q^2\pi_2 = \pi_2 \end{cases} \iff \begin{matrix} (1-q)\pi_1 = (1-q^2)\pi_2 \\ (1-q)\pi_1 = (1-q^2)\pi_2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} (1-x^2)\alpha_2 = (1-x)\alpha_1 \\ (1-x)\alpha_1 = (1-x^2)\alpha_2 \end{cases}$$