Logica e Reti Logiche

Esercitazione

Francesco Pasquale

23 marzo 2023

Esercizio 1. Dimostrare per induzione che

1. Per ogni $n \geqslant 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,;$$

2. Per ogni $n \geqslant 1$, $n^3 - n$ è divisibile per 3

Nell'esercizio precedente abbiamo dimostrato che $\frac{n(n+1)}{2}$ è una espressione in forma chiusa della somma $\sum_{k=1}^{n} k$ e che $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ lo è della somma $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Esercizio 2. Trovare una espressione in forma chiusa di $\sum_{k=1}^{n} (k+3)^2$.

Esercizio 3. Si consideri la seguente ricorrenza
$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= 2a_n + 1, \qquad \text{per ogni } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Trovare una espressione in forma chiusa per a_n (ossia scrivere a_n in funzione di n) e dimostrare per induzione che è corretta.

Esercizio 4. Sia $\{a_n\}$ la successione definita dalla seguente ricorrenza
$$\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 2 \\ a_2 &= 3 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \qquad \text{per ogni } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che $a_n \leqslant 2^n$ per ogni $n \geqslant 0$.

Esercizio 5. Sia $\{F_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ la successione dei numeri di Fibonacci,
$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{per } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$, per ogni $n \geqslant 1$.

Esercizio 6. Scrivere le tabelle di verità[1] delle seguenti formule:

1. $(p \to q) \lor \neg p$
2. $(p \to (q \to p)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
3. $(p \to (p \equiv q)) \lor \neg(p \lor q)$
4. $(p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$

Esercizio 7. Scrivere come formule proposizionali le frasi seguenti:

1. Condizione sufficiente affinché x sia dispari è che x sia primo e maggiore di 2;
2. Fiorello va al cinema solo se si sta proiettando una commedia;
3. Condizione necessaria e sufficiente perché uno sceicco sia felice è avere vino, donne e canti;
4. Condizione necessaria affinché una successione s sia convergente è che s sia limitata.

Esercizio 8. Per ognuna delle seguenti tabelle di verità, trovare una formula corrispondente

p	q	r	???
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

p	q	r	???
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

Esercizio 9. Sia X la formula seguente

$$((p \to q) \land (q \to r)) \lor (r \equiv \neg p)$$

Scrivere due formule equivalenti a X, una in forma normale congiuntiva e l'altra in forma normale disgiuntiva.

[1]Ricordiamo le tabelle di verità dei connettivi principali

p	q	$\neg p$	$p \lor q$	$p \land q$	$p \to q$	$p \equiv q$	$p \downarrow q$	$p \mid q$
T	T	F	T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	F	T	T	T	T

Esercizio 10. Per ognuna delle seguenti formule, dire se è una tautologia, una contraddizione, o una contingenza.

1. $(p \to q) \to (q \to p)$
2. $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$
3. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
4. $p \to \neg p$
5. $p \equiv \neg p$
6. $(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$
7. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
8. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$
9. $(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \vee q)$
10. $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
11. $(p \equiv (p \wedge q)) \equiv (q \equiv (p \vee q))$

Esercizio 11. Ridurre le formule seguenti, che contengono le costanti `t` (`True`) e `f` (`False`) a formule che o non contengono né `t` né `f`, oppure sono uguali o a `t` o a `f`:

1. $((\mathtt{t} \to p) \wedge (q \vee \mathtt{f})) \to ((q \to \mathtt{f}) \vee (r \to \mathtt{t}))$
2. $(p \vee \mathtt{t}) \to q$
3. $\neg(p \vee \mathtt{t}) \equiv (\mathtt{f} \to q)$
4. $(\neg(p \vee \mathtt{f}) \wedge (q \equiv \mathtt{t})) \to (r \wedge \mathtt{t})$

Esercizio 12.

1. Definire il connettivo $\wedge$ in termini dei connettivi $\neg$ e $\to$
2. Definire il connettivo $\equiv$ in termini dei connettivi $\wedge$ e $\to$
3. Definire il connettivo $\vee$ in termini del connettivo $\to$
4. Definire il connettivo $\neg$ in termini del connettivo $\to$ e di `f`

Esercizio 13.

1. Definire ognuno dei connettivi $\wedge$, $\to$, $\equiv$, in termini dei connettivi $\vee$ e $\neg$;
2. Definire ognuno dei connettivi $\vee$, $\to$, $\equiv$, in termini dei connettivi $\wedge$ e $\neg$.

Esercizio 14.

1. Definire i connettivi $\vee$ e $\neg$ in termini del connettivo $\downarrow$
2. Definire i connettivi $\wedge$ e $\neg$ in termini del connettivo $|$

Esercizio 15. Scrivere le formule $(p \to \neg q) \vee r$ e $(p \vee q) \wedge (\neg r \to p)$ in notazione polacca.

Esercizio 16. Scrivere le formule dell'Esercizio 6 in notazione polacca.

Esercizio 17. Ad ogni sequenza $\mathcal{F}$ di simboli e lettere possiamo associare un numero in questo modo: contiamo $+1$ per ognuno dei simboli $\to, \wedge, \vee$ e $\equiv$, contiamo 0 per il simbolo $\neg$ e contiamo -1 per ogni lettera; infine associamo a $\mathcal{F}$ la somma dei numeri.

Sia $\mathcal{F}$ una sequenza di lettere e simboli. Dimostrare, per induzione sulla lunghezza di $\mathcal{F}$, che $\mathcal{F}$ è una f.b.f. in notazione polacca se e solo se il numero associato a $\mathcal{F}$ è -1 e la somma dei simboli di ogni segmento iniziale proprio (sottostringa iniziale) è maggiore o uguale a 0.

Soluzioni Esercitazione 1

Indice

1 Esercizio 1: Dimostrazioni per induzione

1. Dimostrazione di $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Sia $P(n)$ la proposizione $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

- **Passo Base ($n = 1$):** Verifichiamo $P(1)$:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1$$

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

  Poiché $1 = 1$, il passo base è verificato.

- **Passo Induttivo:** Assumiamo $P(n)$ vera (Ipotesi Induttiva) e dimostriamo $P(n+1)$ (Tesi).
  - **Ipotesi Induttiva:** $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
  - **Tesi:** $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

  Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \text{(per Ipotesi Induttiva)} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

  Il passo induttivo è verificato. La proposizione è vera per ogni $n \geq 1$.

1.1 2. Dimostrazione di $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Sia $P(n)$ la proposizione $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Passo Base ($n = 1$):**
$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$$
$$\frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$
Il passo base è verificato.

- **Passo Induttivo:** Assumiamo $P(n)$ vera e dimostriamo $P(n+1)$.
  - **Ipotesi Induttiva:** $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  - **Tesi:** $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

  Dimostrazione:
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{(per Ipotesi Induttiva)} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)[2n^2 + n + 6n + 6]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$
  Il passo induttivo è verificato. La proposizione è vera per ogni $n \geq 1$.

1.2 3. Dimostrazione che $n^3 - n$ è divisibile per 3

Sia $P(n)$ la proposizione "$n^3 - n$ è divisibile per 3".

- **Passo Base ($n = 1$):** $1^3 - 1 = 0$. Poiché $0 = 3 \cdot 0$, 0 è divisibile per 3. Il passo base è verificato.

- **Passo Induttivo:** Assumiamo $P(n)$ vera e dimostriamo $P(n+1)$.
  - **Ipotesi Induttiva:** $n^3 - n$ è divisibile per 3 (cioè $n^3 - n = 3m$ per $m \in \mathbb{Z}$).
  - **Tesi:** $(n+1)^3 - (n+1)$ è divisibile per 3.

  Dimostrazione:
$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - (n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n+1) \\
&= n^3 + 3n^2 + 2n \\
&= (n^3 - n) + (3n^2 + 3n) \\
&= (n^3 - n) + 3(n^2 + n)
\end{aligned}$$
  L'espressione è la somma di due termini:

1. $(n^3 - n)$: divisibile per 3 (per Ipotesi Induttiva).
2. $3(n^2 + n)$: divisibile per 3 (è un multiplo di 3).

La somma di due numeri divisibili per 3 è anch'essa divisibile per 3. Il passo induttivo è verificato. La proposizione è vera per ogni $n \geq 1$.

2 Esercizio 2: Trovare una forma chiusa per $\sum_{k=1}^{n}(k+3)^2$

Per trovare la forma chiusa, espandiamo il quadrato e usiamo le proprietà di linearità della sommatoria e le formule note.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(k+3)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(k^2+6k+9) \quad \text{(Espando il quadrato)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} 6k + \sum_{k=1}^{n} 9 \quad \text{(Linearità della sommatoria)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 6\sum_{k=1}^{n} k + 9\sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + 9n \quad \text{(Sostituisco le formule note)} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3n(n+1) + 9n \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 18n(n+1) + 54n}{6} \quad \text{(Denominatore comune)} \\
&= \frac{n}{6}[(n+1)(2n+1) + 18(n+1) + 54] \quad \text{(Raccolgo } \frac{n}{6}\text{)} \\
&= \frac{n}{6}[(2n^2+3n+1) + (18n+18) + 54] \\
&= \frac{n}{6}[2n^2 + (3n+18n) + (1+18+54)] \\
&= \frac{n}{6}[2n^2+21n+73] \\
&= \frac{n(2n^2+21n+73)}{6}
\end{aligned}
$$

La forma chiusa è $\frac{n(2n^2+21n+73)}{6}$.

3 Esercizio 3: Risoluzione della ricorrenza

L'esercizio chiede di trovare una forma chiusa per la ricorrenza $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 2a_n + 1$ (per $n \geq 1$), e di dimostrarla per induzione.

3.1 1. Trovare la forma chiusa

Per trovare un'ipotesi di forma chiusa, calcoliamo i primi termini della successione per identificare uno schema (pattern).

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 2a_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3$
- $a_3 = 2a_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7$

- $a_4 = 2a_3 + 1 = 2(7) + 1 = 15$
- $a_5 = 2a_4 + 1 = 2(15) + 1 = 31$

La sequenza è $1, 3, 7, 15, 31, \dots$. Notiamo che ogni termine è una potenza di 2 meno 1:

- $a_1 = 1 = 2^1 - 1$
- $a_2 = 3 = 2^2 - 1$
- $a_3 = 7 = 2^3 - 1$
- $a_4 = 15 = 2^4 - 1$
- $a_5 = 31 = 2^5 - 1$

La nostra congettura (ipotesi) per la forma chiusa è $a_n = 2^n - 1$.

3.2 2. Dimostrazione per induzione

Ora dimostriamo per induzione che $P(n) : a_n = 2^n - 1$ è vera per ogni $n \geq 1$.

- **Passo Base ($n = 1$):** Dobbiamo verificare $P(1)$. Secondo la nostra formula: $a_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$. Secondo la definizione della ricorrenza: $a_1 = 1$. I valori coincidono. Il passo base è verificato.
- **Passo Induttivo:** Assumiamo $P(n)$ vera (Ipotesi Induttiva) e dimostriamo $P(n + 1)$ (Tesi).
  - **Ipotesi Induttiva:** $a_n = 2^n - 1$.
  - **Tesi:** $a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.

  Dimostrazione: Partiamo dalla definizione di a_{n+1} data dalla ricorrenza e usiamo l'ipotesi induttiva.

  $$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 1 \quad \text{(Definizione della ricorrenza)} \\ &= 2(2^n - 1) + 1 \quad \text{(Applico l'Ipotesi Induttiva)} \\ &= (2 \cdot 2^n - 2 \cdot 1) + 1 \\ &= 2^{n+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

  Questo è esattamente quanto richiesto dalla Tesi. Il passo induttivo è verificato.

Avendo dimostrato il passo base e il passo induttivo, la forma chiusa $a_n = 2^n - 1$ è corretta per ogni $n \geq 1$.

4 Esercizio 4: Dimostrazione per Induzione Forte

Ci viene data la successione definita da:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \quad \text{per ogni } n \geq 3 \end{cases}$$

Dobbiamo dimostrare per induzione che $P(n) : a_n \leq 2^n$ per ogni $n \geq 0$.

Poiché la regola ricorsiva a_n dipende da $n - 1, n - 2$ e $n - 3$, abbiamo bisogno di un'induzione forte e dobbiamo verificare tre casi base ($n = 0, 1, 2$) prima di poter applicare la regola per $n \geq 3$.

- **Passo Base ($n = 0$):** Dobbiamo verificare $P(0) : a_0 \leq 2^0$. $a_0 = 1$ e $2^0 = 1$. L'affermazione $1 \leq 1$ è **vera**.

- **Passo Base ($n = 1$):** Dobbiamo verificare $P(1) : a_1 \le 2^1$. $a_1 = 2$ e $2^1 = 2$. L'affermazione $2 \le 2$ è **vera**.
- **Passo Base ($n = 2$):** Dobbiamo verificare $P(2) : a_2 \le 2^2$. $a_2 = 3$ e $2^2 = 4$. L'affermazione $3 \le 4$ è **vera**.
- **Passo Induttivo (Forte):** Assumiamo $P(k)$ vera per ogni k tale che $0 \le k < n$ (per $n \ge 3$).
  - **Ipotesi Induttiva (IH):** Assumiamo che $a_{n-1} \le 2^{n-1}$, $a_{n-2} \le 2^{n-2}$, e $a_{n-3} \le 2^{n-3}$ siano tutte vere.
  - **Tesi (TH):** Dobbiamo dimostrare $P(n) : a_n \le 2^n$.

  Dimostrazione: Partiamo dalla definizione di a_n per $n \ge 3$ e applichiamo l'Ipotesi Induttiva a ciascun termine:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \quad \text{(Definizione della ricorrenza)} \\
&\le 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} \quad \text{(Applicando l'IH a tutti i termini)} \\
&= 2^{n-3} \cdot (2^2 + 2^1 + 2^0) \quad \text{(Fattorizzando } 2^{n-3}\text{)} \\
&= 2^{n-3} \cdot (4 + 2 + 1) \\
&= 2^{n-3} \cdot 7 \\
&\le 2^{n-3} \cdot 8 \quad \text{(Poiché } 7 \le 8\text{)} \\
&= 2^{n-3} \cdot 2^3 \\
&= 2^{(n-3)+3} \\
&= 2^n
\end{aligned}$$

  Siamo partiti da a_n e abbiamo dimostrato che $a_n \le 2^n$. Il passo induttivo è verificato.

Avendo dimostrato i casi base e il passo induttivo forte, la proposizione $a_n \le 2^n$ è vera per ogni $n \ge 0$.

5 Esercizio 5: Identità sui numeri di Fibonacci

Ci viene data la successione dei numeri di Fibonacci, definita da:

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{per } n \ge 3 \end{cases}$$

Dobbiamo dimostrare per induzione che $P(n) : \sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$, per ogni $n \ge 1$.

- **Passo Base ($n = 1$):** Dobbiamo verificare $P(1)$.
  - Lato sinistro (LHS): $\sum_{i=1}^{1} F_i^2 = F_1^2 = 1^2 = 1$.
  - Lato destro (RHS): $F_1 F_{1+1} = F_1 F_2 = 1 \cdot 1 = 1$.

  Poiché LHS $=$ RHS, il passo base è verificato.
- **Passo Induttivo:** Assumiamo $P(n)$ vera (Ipotesi Induttiva) e dimostriamo $P(n + 1)$ (Tesi).
  - **Ipotesi Induttiva:** $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$.
  - **Tesi:** $\sum_{i=1}^{n+1} F_i^2 = F_{n+1} F_{(n+1)+1} = F_{n+1} F_{n+2}$.

Dimostrazione: Partiamo dal lato sinistro della Tesi, isoliamo l'n-esimo termine e applichiamo l'ipotesi induttiva.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} F_i^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} F_i^2\right) + F_{n+1}^2 \\
&= (F_n F_{n+1}) + F_{n+1}^2 \quad \text{(per Ipotesi Induttiva)} \\
&= F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \quad \text{(Raccogliamo } F_{n+1}\text{)} \\
&= F_{n+1}(F_{n+2}) \quad \text{(per la definizione di ricorrenza } F_n + F_{n+1} = F_{n+2}\text{)}
\end{aligned}
$$

Questo risultato, $F_{n+1}F_{n+2}$, è esattamente il lato destro della nostra Tesi. Il passo induttivo è verificato.

Avendo dimostrato il passo base e il passo induttivo, l'identità è vera per ogni $n \geq 1$.

Spiegazione Dettagliata: L'Induzione e Fibonacci (Esercizio 5)

L'obiettivo è dimostrare che una formula (un'identità) è vera per *tutti* i numeri naturali $n \geq 1$. Il principio di induzione è lo strumento perfetto per questo. Funziona come un effetto domino:

1. **Passo Base:** Dimostri che puoi far cadere il *primo* domino.
2. **Passo Induttivo:** Dimostri che *se* un domino qualsiasi (n) cade, *allora* farà cadere *sicuramente* anche quello successivo ($n + 1$).

Se fai entrambe le cose, hai dimostrato che tutti i domini cadranno.
La nostra formula da dimostrare è $P(n) : \sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$.

---

1. Il Passo Base ($n = 1$)

Dobbiamo far cadere il primo domino, cioè verificare se la formula funziona per $n = 1$.

- **Lato Sinistro (LHS):** $\sum_{i=1}^{1} F_i^2$
  Questo significa "la somma dei quadrati dei numeri di Fibonacci da $i = 1$ fino a $i = 1$". È solo il primo termine: F_1^2. Sappiamo dalla definizione che $F_1 = 1$. Quindi, $F_1^2 = 1^2 = 1$.
- **Lato Destro (RHS):** $F_n F_{n+1}$
  Per $n = 1$, questo diventa $F_1 F_{1+1}$, cioè $F_1 F_2$. Sappiamo dalla definizione che $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$. Quindi, $F_1 F_2 = 1 \cdot 1 = 1$.

Risultato: $1 = 1$. Il lato sinistro è uguale al lato destro. Il primo domino cade. Il passo base è verificato.

---

2. Il Passo Induttivo (L'effetto a catena)

Questa è la parte cruciale. Dobbiamo dimostrare che la caduta del domino n *causa* la caduta del domino $n + 1$.

- **Ipotesi Induttiva (IH):** Assumiamo che la formula sia VERA per n.

$$\text{Assumiamo che: } \sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

(Questo è il nostro domino n che cade. Ora lo trattiamo come un fatto acquisito).

- **Tesi (TH):** Dobbiamo DIMOSTRARE che la formula è VERA anche per $n+1$.

$$\text{Dobbiamo provare che: } \sum_{i=1}^{n+1} F_i^2 = F_{n+1}F_{(n+1)+1} = F_{n+1}F_{n+2}$$

(Questo è il domino $n+1$ che deve cadere).

Dimostrazione: Partiamo dal lato sinistro della Tesi e cerchiamo di arrivare al lato destro, usando la nostra Ipotesi Induttiva. Il trucco è "isolare" il termine n dal termine $n+1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i^2\right) + F_{n+1}^2$$

In parole: "La somma dei primi $n+1$ quadrati è uguale alla somma dei primi n quadrati, più l'$(n+1)$-esimo quadrato".
Ora osserva la parte tra parentesi: $\left(\sum_{i=1}^{n} F_i^2\right)$. Questa è *esattamente* la nostra **Ipotesi Induttiva (IH)**! Possiamo *sostituire* quel pezzo:

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} F_i^2\right)}_{\text{Sostituisco con IH}} + F_{n+1}^2 \longrightarrow \underbrace{(F_nF_{n+1})}_{\text{Dall'IH}} + F_{n+1}^2$$

Ora abbiamo l'espressione: $F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2$. Facciamo un po' di algebra: F_{n+1} è un fattore comune, quindi possiamo raccoglierlo:

$$F_{n+1}(F_n + F_{n+1})$$

Adesso guardiamo il pezzo tra parentesi: $(F_n + F_{n+1})$. Questa è la **definizione stessa dei numeri di Fibonacci**! Per definizione, $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$. Sostituiamo questo risultato:

$$F_{n+1} \underbrace{(F_n + F_{n+1})}_{\text{Definizione di } F_{n+2}} \longrightarrow F_{n+1}F_{n+2}$$

Siamo partiti dal lato sinistro della Tesi e siamo arrivati esattamente al lato destro della Tesi.

Conclusione

Avendo verificato il **Passo Base** (il primo domino cade) e il **Passo Induttivo** (ogni domino fa cadere il successivo), abbiamo dimostrato che la formula è vera per tutti i numeri $n \geq 1$.

6 Esercizio 6: Tabelle di verità

[1]Ricordiamo le tabelle di verità dei connettivi principali

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \to q$	$p \equiv q$	$p \downarrow q$	$p \mid q$
T	T	F	T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	F	T	T	T	T

Per chiarezza, usiamo V per Vero e F per Falso. La colonna finale del risultato è in grassetto.

6.1 1. $(p \to q) \lor \neg p$

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$(p \to q) \lor \neg p$
V	V	F	V	**V**
V	F	F	F	**F**
F	V	V	V	**V**
F	F	V	V	**V**

6.2 2. $(p \to (q \to p)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

Definiamo le sotto-espressioni per semplificare la tabella:

- $A = (q \to p)$
- $B = (p \to A)$
- $C = (p \to q)$
- $D = (p \to r)$
- $E = (C \to D)$
- **Ris.** $= B \to E$

p	q	r	A	B	C	D	E	**Ris.**
V	V	V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	V	V	F	F	**F**
V	F	V	V	V	F	V	V	**V**
V	F	F	V	V	F	F	V	**V**
F	V	V	F	V	V	V	V	**V**
F	V	F	F	V	V	V	V	**V**
F	F	V	V	V	V	V	V	**V**
F	F	F	V	V	V	V	V	**V**

6.3 3. $(p \to (p \equiv q)) \lor \neg(p \lor q)$

Definiamo le sotto-espressioni:

- $A = (p \equiv q)$
- $B = (p \to A)$
- $C = (p \lor q)$
- $D = \neg C$
- **Ris.** $= B \lor D$

p	q	A	B	C	D	**Ris.**
V	V	V	V	V	F	**V**
V	F	F	F	V	F	**F**
F	V	F	V	V	F	**V**
F	F	V	V	F	V	**V**

6.4 4. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Definiamo le sotto-espressioni:

- $A = (p \wedge q)$
- $B = (\neg p \wedge \neg q)$
- **Ris.** $= A \vee B$

(Nota: questa formula è la definizione di $p \equiv q$)

p	q	A	$\neg p$	$\neg q$	B	**Ris.**
V	V	V	F	F	F	**V**
V	F	F	F	V	F	**F**
F	V	F	V	F	F	**F**
F	F	F	V	V	V	**V**

7 Esercizio 7: Traduzione in formule proposizionali

Definiamo le proposizioni atomiche e poi scriviamo la formula corrispondente per ciascuna frase.

1. **Frase:** Condizione sufficiente affinché x sia dispari è che x sia primo e maggiore di 2.

   - p: "x è dispari"
   - q: "x è primo"
   - r: "x è maggiore di 2"

   Logica: "A è condizione sufficiente per B" significa $A \rightarrow B$. Qui, A = "$q \wedge r$" e B = "p".

   $$(q \wedge r) \rightarrow p$$

2. **Frase:** Fiorello va al cinema solo se si sta proiettando una commedia.

   - p: "Fiorello va al cinema"
   - q: "si sta proiettando una commedia"

   Logica: "A solo se B" significa che A può essere vero *solo se* B è vero. Se A è successo, B *deve* essere vero. Questo si traduce in $A \rightarrow B$.

   $$p \rightarrow q$$

3. **Frase:** Condizione necessaria e sufficiente perché uno sceicco sia felice è avere vino, donne e canti.

   - p: "uno sceicco è felice"
   - v: "avere vino"
   - d: "avere donne"
   - c: "avere canti"

   Logica: "Condizione necessaria e sufficiente" è la definizione di bi-implicazione ($\leftrightarrow$).

   $$p \leftrightarrow (v \wedge d \wedge c)$$

4. **Frase:** Condizione necessaria affinché una successione s sia convergente è che s sia limitata.

   - p: "una successione s è convergente"
   - q: "s è limitata"

   Logica: "B è condizione necessaria per A" significa che non puoi avere A senza B. Se A è vero, B *deve* essere vero. Questo si traduce in $A \rightarrow B$.

   $$p \rightarrow q$$

8 Esercizio 8: Dalle tabelle di verità alle formule

Per trovare le formule, usiamo il metodo della **Forma Normale Disgiuntiva (DNF)**. Questo metodo consiste nel creare una somma ($\vee$) di prodotti ($\wedge$) per ogni riga della tabella in cui il risultato è Vero (T). Per ogni riga "Vera", creiamo una clausola $\wedge$: se una variabile è V, la usiamo così com'è; se è F, usiamo la sua negazione ($\neg$).

1. Tabella di sinistra

Identifichiamo le righe dove il risultato è T (Vero):

- Riga 1 (V, V, V): produce la clausola $(p \wedge q \wedge r)$
- Riga 2 (V, V, F): produce la clausola $(p \wedge q \wedge \neg r)$
- Riga 5 (F, V, V): produce la clausola $(\neg p \wedge q \wedge r)$

La formula completa in DNF è la somma di queste clausole:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$

Possiamo semplificare questa espressione:

- Raccogliamo $(p \wedge q)$ dai primi due termini: $(p \wedge q) \wedge (r \vee \neg r) \equiv (p \wedge q)$.
- La formula diventa: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$.
- Raccogliamo q: $q \wedge (p \vee (\neg p \wedge r))$.
- Usiamo la distributività: $q \wedge ((p \vee \neg p) \wedge (p \vee r)) \equiv q \wedge (\mathrm{V} \wedge (p \vee r))$.

La formula finale semplificata è:

$$q \wedge (p \vee r)$$

2. Tabella di destra

Identifichiamo le righe dove il risultato è T (Vero):

- Riga 2 (V, V, F): produce la clausola $(p \wedge q \wedge \neg r)$
- Riga 4 (V, F, F): produce la clausola $(p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
- Riga 5 (F, V, V): produce la clausola $(\neg p \wedge q \wedge r)$
- Riga 6 (F, V, F): produce la clausola $(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$

La formula completa in DNF è:

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

Semplifichiamo raggruppando i termini:

- Termini 1 e 2: $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \equiv (p \wedge \neg r) \wedge (q \vee \neg q) \equiv (p \wedge \neg r)$.
- Termini 3 e 4: $(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \equiv (\neg p \wedge q) \wedge (r \vee \neg r) \equiv (\neg p \wedge q)$.

Unendo i due risultati semplificati, la formula finale è:

$$(p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q)$$

9 Esercizio 9: Forme Normali Congiuntiva e Disgiuntiva

La formula data è $X = ((p \to q) \land (q \to r)) \lor (r \equiv \neg p)$. L'obiettivo è trasformarla in una Forma Normale Disgiuntiva (DNF, una "somma di prodotti") e in una Forma Normale Congiuntiva (CNF, un "prodotto di somme").

9.1 Passo 1: Eliminare i connettivi $\to$ e $\equiv$

Per prima cosa, riscriviamo i connettivi $\to$ e $\equiv$ usando solo $\land, \lor, \neg$.

- $p \to q \equiv \neg p \lor q$
- $q \to r \equiv \neg q \lor r$

Per il connettivo $\equiv$ abbiamo due opzioni, una più utile per la DNF, l'altra per la CNF:

- **Per la DNF:** $A \equiv B \equiv (A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$. Quindi $r \equiv \neg p \equiv (r \land \neg p) \lor (\neg r \land \neg(\neg p)) \equiv (r \land \neg p) \lor (\neg r \land p)$.
- **Per la CNF:** $A \equiv B \equiv (A \to B) \land (B \to A) \equiv (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A)$. Quindi $r \equiv \neg p \equiv (\neg r \lor \neg p) \land (\neg(\neg p) \lor r) \equiv (\neg r \lor \neg p) \land (p \lor r)$.

9.2 Forma Normale Disgiuntiva (DNF)

Usiamo la versione DNF del bi-implicito.

$$X \equiv ((\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r)) \lor ((r \land \neg p) \lor (\neg r \land p))$$

La seconda parte $((r \land \neg p) \lor (\neg r \land p))$ è già in DNF. Dobbiamo convertire la prima parte usando la distributività ($\land$ su $\lor$):

$$\begin{aligned}(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r) &\equiv ((\neg p \lor q) \land \neg q) \lor ((\neg p \lor q) \land r) \\ &\equiv (\neg p \land \neg q) \lor (q \land \neg q) \lor (\neg p \land r) \lor (q \land r) \\ &\equiv (\neg p \land \neg q) \lor F \lor (\neg p \land r) \lor (q \land r) \\ &\equiv (\neg p \land \neg q) \lor (\neg p \land r) \lor (q \land r)\end{aligned}$$

Ora uniamo le due parti con $\lor$:

$$X \equiv [(\neg p \land \neg q) \lor (\neg p \land r) \lor (q \land r)] \lor [(r \land \neg p) \lor (\neg r \land p)]$$

Infine, eliminiamo il termine duplicato ($(\neg p \land r)$ compare due volte) per ottenere la DNF:

$$\textbf{DNF: } (\neg p \land \neg q) \lor (\neg p \land r) \lor (q \land r) \lor (\neg r \land p)$$

9.3 Forma Normale Congiuntiva (CNF)

Usiamo la versione CNF del bi-implicito.

$$X \equiv ((\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r)) \lor ((\neg r \lor \neg p) \land (p \lor r))$$

La formula è nella forma $(A \land B) \lor (C \land D)$. Usiamo la distributività ($\lor$ su $\land$) per convertirla in CNF:

$$(A \land B) \lor (C \land D) \equiv ((A \land B) \lor C) \land ((A \land B) \lor D)$$

Applichiamo la distributività un'altra volta:

$$\equiv (A \lor C) \land (B \lor C) \land (A \lor D) \land (B \lor D)$$

Ora calcoliamo i quattro termini:

- $(A \lor C) = (\neg p \lor q) \lor (\neg r \lor \neg p) \equiv \neg p \lor q \lor \neg r$
- $(B \lor C) = (\neg q \lor r) \lor (\neg r \lor \neg p) \equiv \neg q \lor (r \lor \neg r) \lor \neg p \equiv \neg q \lor T \lor \neg p \equiv T$
- $(A \lor D) = (\neg p \lor q) \lor (p \lor r) \equiv (\neg p \lor p) \lor q \lor r \equiv T \lor q \lor r \equiv T$
- $(B \lor D) = (\neg q \lor r) \lor (p \lor r) \equiv p \lor \neg q \lor r$

Assembliamo i risultati:

$$X \equiv (\neg p \lor q \lor \neg r) \land T \land T \land (p \lor \neg q \lor r)$$

Eliminando i termini T (Tautologie), che sono ininfluenti in una congiunzione $\land$, otteniamo la CNF:

CNF: $(\neg p \lor q \lor \neg r) \land (p \lor \neg q \lor r)$

10 Esercizio 10 Analisi delle Formule

Per ogni formula, costruiamo la tavola di verità per determinare se è una tautologia (sempre Vera), una contraddizione (sempre Falsa), o una contingenza (Vera o Falsa a seconda dei valori di p e q).

10.1 1. $(p \to q) \to (q \to p)$

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \to (q \to p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

La colonna finale contiene sia V che F. **Risultato: Contingenza.**

2. $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg p \to \neg q$	$(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V

La colonna finale contiene sia V che F. **Risultato: Contingenza.**

10.2 3. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

La colonna finale contiene solo V. **Risultato: Tautologia.** (Questa è la legge della contrapposizione)

10.3 4. $p \to \neg p$

p	$\neg p$	$p \to \neg p$
V	F	F
F	V	V

La colonna finale contiene sia V che F. **Risultato: Contingenza.** (La formula è equivalente a $\neg p$)

10.4 5. $p \equiv \neg p$

p	$\neg p$	$p \equiv \neg p$
V	F	F
F	V	F

La colonna finale contiene solo F. **Risultato: Contraddizione.**

10.5 6. $(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \equiv q$	$\neg p \equiv \neg q$	$(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

La colonna finale contiene solo V. **Risultato: Tautologia.**

10.6 7. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V	V

La colonna finale contiene sia V che F. (Versione errata di De Morgan) **Risultato: Contingenza.**

10.7 8. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

La colonna finale contiene solo V. (Legge di De Morgan) **Risultato: Tautologia.**

10.8 9. $(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \vee q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \vee q)$
V	V	F	F	F	V	F	V
V	F	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	V	V

La colonna finale contiene sia V che F. (Versione errata di De Morgan) **Risultato: Contingenza.**

10.9 10. $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V

La colonna finale contiene solo V. (Legge di De Morgan) **Risultato: Tautologia.**

10.10 11. $(p \equiv (p \wedge q)) \equiv (q \equiv (p \vee q))$

Sia $A = (p \equiv (p \wedge q))$ e $B = (q \equiv (p \vee q))$.

p	q	$p \wedge q$	A	$p \vee q$	B	$A \equiv B$
V	V	V	$(V \equiv V) \to V$	V	$(V \equiv V) \to V$	V
V	F	F	$(V \equiv F) \to F$	V	$(F \equiv V) \to F$	V
F	V	F	$(F \equiv F) \to V$	V	$(V \equiv V) \to V$	V
F	F	F	$(F \equiv F) \to V$	F	$(F \equiv F) \to V$	V

La colonna finale contiene solo V. **Risultato: Tautologia.**

11 Esercizio 11: Riduzione delle Formule

Si applicano le regole di identità e annullamento per le costanti $\mathbf{t}$ (True) e $\mathbf{f}$ (False).

1. $((\mathbf{t} \to p) \wedge (q \vee \mathbf{f})) \to ((q \to \mathbf{f}) \vee (r \to \mathbf{t}))$

   Analizziamo le sotto-formule:

   - $(\mathbf{t} \to p) \equiv (\neg\mathbf{t} \vee p) \equiv (\mathbf{f} \vee p) \equiv p$
   - $(q \vee \mathbf{f}) \equiv q$
   - $(q \to \mathbf{f}) \equiv (\neg q \vee \mathbf{f}) \equiv \neg q$
   - $(r \to \mathbf{t}) \equiv (\neg r \vee \mathbf{t}) \equiv \mathbf{t}$

   Sostituendo, la formula diventa:
   $$(p \wedge q) \to (\neg q \vee \mathbf{t})$$
   Poiché $(\neg q \vee \mathbf{t}) \equiv \mathbf{t}$ (Regola dell'annullatore $\vee$):
   $$(p \wedge q) \to \mathbf{t}$$
   E poiché qualsiasi formula $A \to \mathbf{t}$ è sempre vera:
   $$\mathbf{t}$$
   Risultato: $\mathbf{t}$

2. $(p \vee \mathbf{t}) \to q$

   Analizziamo l'antecedente:

   - $(p \vee \mathbf{t}) \equiv \mathbf{t}$

   Sostituendo, la formula diventa:
   $$\mathbf{t} \to q$$
   Che, per definizione di implicazione, è equivalente a:
   $$q$$
   Risultato: q

3. $\neg(p \vee \mathbf{t}) \equiv (\mathbf{f} \to q)$

   Analizziamo i due lati:

   - Lato sinistro: $(p \vee \mathbf{t}) \equiv \mathbf{t}$, quindi $\neg(p \vee \mathbf{t}) \equiv \neg\mathbf{t} \equiv \mathbf{f}$
   - Lato destro: $(\mathbf{f} \to q) \equiv (\neg\mathbf{f} \vee q) \equiv (\mathbf{t} \vee q) \equiv \mathbf{t}$

Sostituendo, la formula diventa:
$$\mathbf{f} \equiv \mathbf{t}$$
Questa equivalenza è sempre falsa. **Risultato:** $\mathbf{f}$

4. $(\neg(p \lor \mathbf{f}) \land (q \equiv \mathbf{t})) \to (r \land \mathbf{t})$

   Analizziamo le sotto-formule:

   - $(p \lor \mathbf{f}) \equiv p$, quindi $\neg(p \lor \mathbf{f}) \equiv \neg p$
   - $(q \equiv \mathbf{t}) \equiv q$
   - $(r \land \mathbf{t}) \equiv r$

   Sostituendo, la formula diventa:
   $$(\neg p \land q) \to r$$
   La formula non contiene più $\mathbf{t}$ o $\mathbf{f}$ e non può essere ulteriormente ridotta. **Risultato:** $(\neg p \land q) \to r$

12 Esercizio 12: Definizione dei Connettivi

1. **Definire $\land$ in termini di $\neg$ e $\to$**

   L'equivalenza si basa su una delle Leggi di De Morgan.
   $$p \land q \equiv \neg(\neg p \lor \neg q)$$
   Poiché $(\neg p \lor \neg q)$ è equivalente a $(p \to \neg q)$, possiamo scrivere:
   $$p \land q \equiv \neg(p \to \neg q)$$

2. **Definire $\equiv$ in termini di $\land$ e $\to$**

   L'equivalenza (o "doppia implicazione") $p \equiv q$ significa che p implica q E q implica p.
   $$p \equiv q \equiv (p \to q) \land (q \to p)$$

3. **Definire $\lor$ in termini di $\to$**

   Questa è la parte più astuta. Si usa l'equivalenza nota come "Legge di Peirce" (anche se qui in forma semplificata).
   $$p \lor q \equiv (p \to q) \to q$$
   Dimostrazione rapida: $(p \to q) \to q \equiv (\neg p \lor q) \to q \equiv \neg(\neg p \lor q) \lor q \equiv (p \land \neg q) \lor q \equiv (p \lor q) \land (\neg q \lor q) \equiv (p \lor q) \land \mathbf{t} \equiv p \lor q$

4. **Definire $\neg$ in termini di $\to$ e di $\mathbf{f}$**

   La negazione di p è vera se e solo se p implica il falso.
   $$\neg p \equiv p \to \mathbf{f}$$
   Dimostrazione rapida: $p \to \mathbf{f} \equiv \neg p \lor \mathbf{f} \equiv \neg p$

13 Esercizio 13: Completezza Funzionale

13.1 1. Definire $\wedge, \rightarrow, \equiv$ in termini di $\vee$ e $\neg$

- **Definire $\wedge$:** Usiamo la Legge di De Morgan.

$$p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$$

- **Definire $\rightarrow$:** Usiamo la definizione standard dell'implicazione.

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

- **Definire $\equiv$:** Partiamo dalla definizione $p \equiv q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$. Sostituiamo i connettivi $\wedge$ usando la prima equivalenza che abbiamo trovato (De Morgan):

$$(p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$(\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg(\neg(\neg p) \vee \neg(\neg q)) \equiv \neg(p \vee q)$$

Ora inseriamo queste due parti nella formula dell'equivalenza:

$$p \equiv q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \vee q)$$

13.2 2. Definire $\vee, \rightarrow, \equiv$ in termini di $\wedge$ e $\neg$

- **Definire $\vee$:** Usiamo l'altra Legge di De Morgan.

$$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

- **Definire $\rightarrow$:** Partiamo da $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$. Sostituiamo il $\vee$ usando l'equivalenza appena trovata:

$$p \rightarrow q \equiv \neg(\neg(\neg p) \wedge \neg q)$$

Semplificando la doppia negazione:

$$p \rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$$

- **Definire $\equiv$:** Partiamo dalla definizione $p \equiv q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Sostituiamo i connettivi $\rightarrow$ usando l'equivalenza trovata al punto precedente:

$$(p \rightarrow q) \equiv \neg(p \wedge \neg q)$$

$$(q \rightarrow p) \equiv \neg(q \wedge \neg p)$$

Ora inseriamo queste due parti nella formula dell'equivalenza (il $\wedge$ principale è già nel set concesso):

$$p \equiv q \equiv \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)$$

14 Esercizio 14: Operatori NOR e NAND

14.1 1. Definire $\vee$ e $\neg$ in termini di $\downarrow$ (NOR)

Si ricorda la definizione del connettivo NOR (Not OR): $p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$.

- **Definire $\neg$:** Per ottenere $\neg p$, si utilizza l'operatore con argomenti identici.

$$\neg p \equiv p \downarrow p$$

Dimostrazione: $p \downarrow p \equiv \neg(p \vee p) \equiv \neg p$

- **Definire $\vee$:** Sappiamo che $p \downarrow q$ è la *negazione* di $p \vee q$. Per ottenere $p \vee q$, è sufficiente negare $p \downarrow q$ usando la definizione di $\neg$ appena trovata.

$$p \vee q \equiv \neg(p \downarrow q) \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

14.2 2. Definire $\wedge$ e $\neg$ in termini di $|$ (NAND)

Si ricorda la definizione del connettivo NAND (Not AND): $p \mid q \equiv \neg(p \wedge q)$.

- **Definire $\neg$:** Come per il NOR, si utilizzano argomenti identici.

  $$\neg p \equiv p \mid p$$

  Dimostrazione: $p \mid p \equiv \neg(p \wedge p) \equiv \neg p$

- **Definire $\wedge$:** Sappiamo che $p \mid q$ è la *negazione* di $p \wedge q$. Per ottenere $p \wedge q$, neghiamo $p \mid q$ usando la definizione di $\neg$ appena trovata.

  $$p \wedge q \equiv \neg(p \mid q) \equiv (p \mid q) \mid (p \mid q)$$

15 Esercizio 15: Notazione Polacca

Per convertire le formule in notazione polacca (prefissa), utilizziamo i seguenti operatori:

- N per $\neg$ (Negazione)
- K per $\wedge$ (Congiunzione, "Koniunkcja")
- A per $\vee$ (Disgiunzione, "Alternatywa")
- C per $\rightarrow$ (Implicazione)
- E per $\equiv$ (Equivalenza)

15.1 Formula 1: $(p \rightarrow \neg q) \vee r$

1. Si parte dalla sottoformula più interna: $\neg q \rightarrow Nq$
2. Si converte l'implicazione: $(p \rightarrow Nq) \rightarrow Cp(Nq) \rightarrow CpNq$
3. Si converte la disgiunzione (operatore principale): $(CpNq) \vee r \rightarrow A(CpNq)r$

Risultato: $ACpNqr$

15.2 Formula 2: $(p \vee q) \wedge (\neg r \rightarrow p)$

1. Si converte il primo argomento del $\wedge$: $(p \vee q) \rightarrow Apq$
2. Si converte la sottoformula del secondo argomento: $\neg r \rightarrow Nr$
3. Si converte il secondo argomento del $\wedge$: $(Nr \rightarrow p) \rightarrow C(Nr)p \rightarrow CNrp$
4. Si converte l'operatore principale $\wedge$: $(Apq) \wedge (CNrp) \rightarrow K(Apq)(CNrp)$

Risultato: $KApqCNrp$

16 Esercizio 16: Notazione Polacca (dall'Esercizio 6)

Utilizziamo la stessa mappatura dell'esercizio precedente: $N = \neg$, $K = \wedge$, $A = \vee$, $C = \rightarrow$, $E = \equiv$.

16.1 Formula 1: $(p \to q) \lor \neg p$

1. Primo argomento $\lor$: $(p \to q) \to Cpq$
2. Secondo argomento $\lor$: $\neg p \to Np$
3. Operatore principale $\lor$: $A(Cpq)(Np)$

Risultato: $ACpqNp$

16.2 Formula 2: $(p \to (q \to p)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

Questa è lunga. La dividiamo in Antecedente (ANT) e Conseguente (CONS).

1. **ANT**: $(p \to (q \to p))$
2. $(q \to p) \to Cqp$
3. $p \to (Cqp) \to CpCqp$
4. **CONS**: $((p \to q) \to (p \to r))$
5. $(p \to q) \to Cpq$
6. $(p \to r) \to Cpr$
7. $(Cpq) \to (Cpr) \to CCpqCpr$
8. **Finale**: $(ANT) \to (CONS)$
9. $C(CpCqp)(CCpqCpr)$

Risultato: $CCpCqpCCpqCpr$

16.3 Formula 3: $(p \to (p \equiv q)) \lor \neg(p \lor q)$

1. Primo argomento $\lor$: $(p \to (p \equiv q))$
2. $(p \equiv q) \to Epq$
3. $p \to (Epq) \to CpEpq$
4. Secondo argomento $\lor$: $\neg(p \lor q)$
5. $(p \lor q) \to Apq$
6. $\neg(Apq) \to NApq$
7. Operatore principale $\lor$: $A(CpEpq)(NApq)$

Risultato: $ACpEpqNApq$

16.4 Formula 4: $(p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$

(Nota: questa è la definizione di $p \equiv q$)

1. Primo argomento $\lor$: $(p \land q) \to Kpq$
2. Secondo argomento $\lor$: $(\neg p \land \neg q)$
3. $\neg p \to Np$
4. $\neg q \to Nq$
5. $(Np \land Nq) \to KNpNq$
6. Operatore principale $\lor$: $A(Kpq)(KNpNq)$

Risultato: $AKpqKNpNq$

17 Esercizio 17: Dimostrazione per Induzione

Sia $S(\mathcal{F})$ la funzione che calcola la somma associata a una sequenza $\mathcal{F}$, come definita nell'esercizio:

- $S(\sigma) = +1$ se $\sigma \in \{\rightarrow, \wedge, \vee, \equiv\}$ (connettivi binari)
- $S(\sigma) = 0$ se $\sigma = \neg$ (connettivo unario)
- $S(\sigma) = -1$ se σ è una lettera (atomo)

Per una sequenza $\mathcal{F} = f_1 \dots f_n$, $S(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{n} S(f_i)$. Sia $P(\mathcal{F})$ la proprietà: **(1)** $S(\mathcal{F}) = -1$ e **(2)** per ogni segmento iniziale proprio $\mathcal{F}_k = f_1 \dots f_k$ (con $k < n$), $S(\mathcal{F}_k) \geq 0$.

Dobbiamo dimostrare che $\mathcal{F}$ è una f.b.f. (formula ben formata) in notazione polacca $\iff P(\mathcal{F})$.

17.1 Parte 1: Necessità ($\Rightarrow$)

Tesi: Se $\mathcal{F}$ è una f.b.f., allora $P(\mathcal{F})$ è vera. Si dimostra per induzione sulla struttura della f.b.f. $\mathcal{F}$.

- **Base:** $\mathcal{F}$ è una formula atomica, $\mathcal{F} = p$.
  1. $S(\mathcal{F}) = S(p) = -1$. (Proprietà 1 verificata)
  2. $\mathcal{F}$ non ha segmenti iniziali propri. La proprietà (2) è vacuamente vera.

  La tesi è vera per la base.

- **Passo Induttivo (Caso Unario):** Assumiamo (Ipotesi Induttiva, IH) che $P(\mathcal{A})$ sia vera per la f.b.f. $\mathcal{A}$. Dimostriamo che $P(\mathcal{F})$ è vera per $\mathcal{F} = N\mathcal{A}$ (usando N per $\neg$).
  1. **Punteggio Totale:** $S(\mathcal{F}) = S(N) + S(\mathcal{A}) = 0 + (-1) = -1$. (Proprietà 1 verificata)
  2. **Segmenti Propri:** I segmenti iniziali propri di $\mathcal{F}$ sono:
     - N. Punteggio: $S(N) = 0$. ≥ 0, verificato.
     - N seguito da un segmento iniziale proprio di $\mathcal{A}$ (sia s_a). Il segmento è Ns_a. Punteggio: $S(Ns_a) = S(N) + S(s_a) = 0 + S(s_a)$. Per IH, $S(s_a) \geq 0$, quindi $S(Ns_a) \geq 0$. Verificato.

  La tesi è vera per il caso unario.

- **Passo Induttivo (Caso Binario):** Assumiamo (IH) che $P(\mathcal{A})$ e $P(\mathcal{B})$ siano vere per le f.b.f. $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Dimostriamo che $P(\mathcal{F})$ è vera per $\mathcal{F} = C\mathcal{A}\mathcal{B}$ (usando C per un connettivo binario).
  1. **Punteggio Totale:** $S(\mathcal{F}) = S(C) + S(\mathcal{A}) + S(\mathcal{B}) = (+1) + (-1) + (-1) = -1$. (Proprietà 1 verificata)
  2. **Segmenti Propri:** I segmenti iniziali propri di $\mathcal{F}$ sono:
     - C. Punteggio: $S(C) = +1$. ≥ 0, verificato.
     - C seguito da un segmento iniziale proprio di $\mathcal{A}$ (s_a). Il segmento è Cs_a. Punteggio: $S(Cs_a) = S(C) + S(s_a) = 1 + S(s_a)$. Per IH, $S(s_a) \geq 0$, quindi $S(Cs_a) \geq 1$. Verificato.
     - $C\mathcal{A}$. Punteggio: $S(C\mathcal{A}) = S(C) + S(\mathcal{A}) = 1 + (-1) = 0$. ≥ 0, verificato.
     - $C\mathcal{A}$ seguito da un segmento iniziale proprio di $\mathcal{B}$ (s_b). Il segmento è $C\mathcal{A}s_b$. Punteggio: $S(C\mathcal{A}s_b) = S(C) + S(\mathcal{A}) + S(s_b) = 1 + (-1) + S(s_b) = S(s_b)$. Per IH, $S(s_b) \geq 0$. Verificato.

  La tesi è vera per il caso binario.

Per induzione, la Parte 1 è dimostrata.

17.2 Parte 2: Sufficienza ($\Leftarrow$)

Tesi: Se $P(\mathcal{F})$ è vera per una sequenza $\mathcal{F}$, allora $\mathcal{F}$ è una f.b.f. Si dimostra per induzione sulla lunghezza n della sequenza $\mathcal{F}$.

- **Base:** $n = 1$. $\mathcal{F}$ ha lunghezza 1. Per $P(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}$ non ha segmenti propri (quindi la (2) è vera). La proprietà (1) dice $S(\mathcal{F}) = -1$. L'unico simbolo con punteggio -1 è una lettera (atomo), es. p. Quindi $\mathcal{F} = p$. p è una f.b.f. La tesi è vera per la base.

- **Passo Induttivo:** Assumiamo (IH) che la tesi sia vera per tutte le sequenze di lunghezza $m < n$. Sia $\mathcal{F} = f_1 \dots f_n$ una sequenza di lunghezza $n > 1$ che soddisfa $P(\mathcal{F})$.

  Analizziamo il primo simbolo f_1:

  - f_1 non può essere una lettera (atomo). Se lo fosse, f_1 sarebbe un segmento iniziale proprio (poiché $n > 1$) e $S(f_1) = -1$, violando la proprietà (2) ($S(f_1) \geq 0$).
  - f_1 deve essere un connettivo.

  Caso A: $f_1 = N$ **(connettivo unario,** $S(N) = 0$**)** $\mathcal{F}$ ha la forma $N\mathcal{A}$, dove $\mathcal{A} = f_2 \dots f_n$ ha lunghezza $n - 1$. Verifichiamo se $P(\mathcal{A})$ è vera:

  1. $S(\mathcal{F}) = S(N) + S(\mathcal{A}) \Rightarrow -1 = 0 + S(\mathcal{A}) \Rightarrow S(\mathcal{A}) = -1$.
  2. Sia s_a un segmento iniziale proprio di $\mathcal{A}$. Il segmento Ns_a è un segmento iniziale proprio di $\mathcal{F}$. Per $P(\mathcal{F})$, $S(Ns_a) \geq 0$. $S(Ns_a) = S(N) + S(s_a) = 0 + S(s_a) = S(s_a)$. Quindi $S(s_a) \geq 0$.

  Poiché $\mathcal{A}$ soddisfa $P(\mathcal{A})$ e ha lunghezza $n - 1 < n$, per l'IH $\mathcal{A}$ è una f.b.f. Se $\mathcal{A}$ è una f.b.f., allora $\mathcal{F} = N\mathcal{A}$ è una f.b.f. per definizione.

  Caso B: $f_1 = C$ **(connettivo binario,** $S(C) = +1$**)** $\mathcal{F}$ ha la forma $C\mathcal{G}$, dove $\mathcal{G} = f_2 \dots f_n$ ha lunghezza $n-1$. Sia $s_k = S(f_2 \dots f_k)$ il punteggio dei segmenti iniziali di $\mathcal{G}$. I segmenti iniziali propri di $\mathcal{F}$ sono C e $C(f_2 \dots f_k)$ per $k < n$. Per $P(\mathcal{F})$, $S(C(f_2 \dots f_k)) \geq 0$. $S(C)+S(f_2 \dots f_k) \geq 0 \Rightarrow 1+s_k \geq 0 \Rightarrow s_k \geq -1$.

  Inoltre, $S(\mathcal{F}) = S(C) + S(\mathcal{G}) \Rightarrow -1 = 1 + S(\mathcal{G}) \Rightarrow S(\mathcal{G}) = -2$.

  Abbiamo una sequenza $\mathcal{G}$ (lunga $n - 1$) tale che:

  - Il suo punteggio totale è -2.
  - Il punteggio di ogni suo segmento iniziale proprio s_k è ≥ -1.

  Poiché il punteggio (partendo da 0) arriva a -2, e ogni passo cambia il punteggio di +1, 0, o -1, deve esistere un primo punto m (con $2 \leq m < n$) in cui il punteggio $S(f_2 \dots f_m)$ vale -1.

  Sia m il primo indice tale che $S(f_2 \dots f_m) = -1$. Questo m divide $\mathcal{G}$ in due sotto-sequenze:

  - $\mathcal{A} = f_2 \dots f_m$
  - $\mathcal{B} = f_{m+1} \dots f_n$

  Verifichiamo $P(\mathcal{A})$:

  1. $S(\mathcal{A}) = -1$ (per costruzione).
  2. Per ogni segmento proprio s_a di $\mathcal{A}$, $S(s_a) \geq 0$, perché m è il *primo* indice che raggiunge -1.

  $P(\mathcal{A})$ è vera. Per l'IH, $\mathcal{A}$ (di lunghezza $< n$) è una f.b.f.

  Verifichiamo $P(\mathcal{B})$:

  1. $S(\mathcal{G}) = S(\mathcal{A}) + S(\mathcal{B}) \Rightarrow -2 = -1 + S(\mathcal{B}) \Rightarrow S(\mathcal{B}) = -1$.
  2. Sia $s_b = f_{m+1} \dots f_j$ un segmento proprio di $\mathcal{B}$. Il punteggio del segmento $f_2 \dots f_j$ in $\mathcal{G}$ è $S(f_2 \dots f_j) = S(\mathcal{A}) + S(s_b) = -1 + S(s_b)$. Sappiamo che ogni punteggio parziale s_k di $\mathcal{G}$ è ≥ -1. Quindi $-1 + S(s_b) \geq -1$, che implica $S(s_b) \geq 0$.

$P(\mathcal{B})$ è vera. Per l'IH, $\mathcal{B}$ (di lunghezza $< n$) è una f.b.f.

Abbiamo dimostrato che se $\mathcal{F}$ inizia con un connettivo binario C e soddisfa $P(\mathcal{F})$, allora può essere decomposta in $C\mathcal{A}\mathcal{B}$ dove $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono f.b.f. Per definizione, $\mathcal{F} = C\mathcal{A}\mathcal{B}$ è una f.b.f.

Per induzione, la Parte 2 è dimostrata.

Avendo dimostrato entrambe le direzioni, l'equivalenza è provata.