



DEF: Una distribuzione $\pi = (\pi_i)_{i \in E}$ è REVERSIBILE se

$$\forall i, j \in E \quad \pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$$

PROP: Sia π una distribuzione reversibile. Allora π è una distribuzione stazionaria.

NOTA: Si ha una catena irriducibile se e solo se il grafo è connesso in tal caso c'è un'unica distribuzione stazionaria. Se il grafo non è connesso, le classi chiuse irriducibili corrispondono alle componenti connesse del grafo.

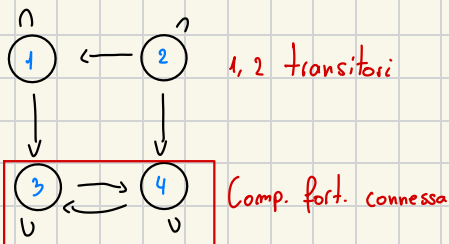
PROP: Sia $\pi = (\pi_i)_{i \in E}$ una distribuzione stazionaria. Allora, se $j \in E$ è uno stato transitorio, si ha $\pi_j = 0$.

ESERCIZIO

Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n\}_{n \geq 0}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Trovare le distribuzioni stazionarie



$$\Rightarrow E = T \cup C_1 \cup \dots \cup C_k \quad \text{con } k=1 \text{ e } T = \{1, 2\} \text{ e } C_1 = \{3, 4\}$$

Poiché 1 e 2 sono transitori $\Rightarrow \pi_1 = \pi_2 = 0$ è l'unica distribuzione della catena risulta a $C_1 = \{3, 4\}$, quindi

$$(\pi_3, \pi_4) \begin{pmatrix} 1|4 & 3|4 \\ 1|2 & 1|2 \end{pmatrix} = (\pi_3, \pi_4) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_4 = \pi_3 \\ \frac{3}{4}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_4 = \pi_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}\pi_3 = \frac{1}{2}\pi_4 \\ \frac{3}{4}\pi_3 = \frac{1}{2}\pi_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_4 = \frac{3}{2}\pi_3 \\ \pi_4 = 1 - \pi_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \pi_3 = \frac{3}{2}\pi_3 \Leftrightarrow \frac{5}{2}\pi_3 = 1 \Leftrightarrow \pi_3 = \frac{2}{5}$$

$$\pi_4 = \frac{3}{5}$$

$$\pi = \left(0, 0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$$