DEF: Una matrice $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ è detta BISTOCASTICA se $\sum_{i \in E} p_{ij} = 1 \quad \forall j \in E$

PROP: Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n\}_{n \geq 0}$ su E finito e con $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ bistocastica. Allora la distribuzione uniforme $\pi = (\pi_i)_{i \in E}$, cioè la distribuzione definita come $\pi_i = \frac{1}{\# E} \ \forall i \in E$ è stazionaria.

ESERCIZIO 3

Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n\}_{n\geq 0}$, $E=\{1,2,3,4\}$

$$P = \begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1 \\ & 0 & q & 1-q & 0 & 2 \\ & 0 & 1-q & q & 0 & 3 \\ & 0 & 1/100 & 1/100 & 98/100 & 4 \end{array}$$

$q \in [0,1]$

1) Classificare gli stati

2) Trovare le distribuzioni stazionarie

3) Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} p_{23}^{(n)}$ se esiste

1) Si ha $1 \to 2$ e $2 \not\to 1$ $\to$ 1 è transitorio
Si ha $4 \to 3$ e $3 \not\to 4$ $\to$ 4 è transitorio
Gli stati 2, 3 sono riccorenti $\Rightarrow$ per $q \neq 1$ sono una classe chiusa
$\Rightarrow$ per $q = 1$ sono assorbenti
$1 \to 2$ e la catena si ferma in 2
$4 \to 3$ e la catena si ferma in 3

2) Per $q \neq 1$ $\{2,3\}$ sono una classe chiusa e la catena relativa è bistocastica, si ha:

$$\pi = \left(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0\right)$$

Per $q=1$, le distribuzioni stazionarie sono $\alpha(0,1,0,0)+(1-\alpha)(0,0,1,0)$
$=(0,\alpha,1-\alpha,0)$ $\forall \alpha\in[0,1]$.

3) Se $q=1$ lo stato 2 è assorbente; quindi $p_{23}^{(n)} = 1 - \underbrace{p_{22}^{(n)}}_{=1\,\forall n\geq 1} = 1-1=0$

da cui segue $\lim\limits_{n\to\infty} p_{23}^{(n)} = 0$

Se $q\in(0,1)$ si può applicare il teorema di Markov alla catena ristretta a $\{2,3\}$ (perché la matrice ad un passo è tutta positiva, e quindi c'è irriducibilità e regolarità)

Allora $\lim_{n\to\infty} p_{23}^{(n)} = \pi_3 = \frac{1}{2}$.

Se $q=0$ la matrice della catena ristretta è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e

$\nexists \lim_{n\to\infty} p_{23}^{(n)}$ perché $p_{23}^{(n)}=1$ per n dispari e $p_{23}^{(n)}=0$ per n pari.

ESERCIZIO 4

Sia $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una catena di Markov omogenea su

$E=\{1,2,3,4,5,6\}$

$$P=\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-q & q/2 & q/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

$q\in(0,1]$

1) Classificare gli stati

2) Studiare l'esistenza dei limiti di $p_{23}^{(n)}$ e $p_{44}^{(n)}$ per $n\to\infty$

1) Le classi $\{2,3\}$ e $\{4,5,6\}$ sono classi chiuse

$\Rightarrow$ sono stati riccorenti

1.A) Se $q=0 \Rightarrow 1$ é uno stato assorbente

1.B) Se $q\neq 0 \Rightarrow 1\to 2$ ma $2\not\to 1$, $3\not\to 1$

$\Rightarrow 1$ é transitorio

2) 2.A) $\{2,3\}$ è una classe chiusa, irriducibile e dunque regolare $\Rightarrow$

Possiamo applicare il teorema di Markov per cui $\lim_{n\to\infty} P_{23}^{(n)} = \pi_3$. Consideriamo (π_2, π_3) la stazionaria della catena ristretta a $\{2,3\}$

$$(\pi_2, \pi_3)\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (\pi_2, \pi_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi_2}{4} + \frac{\pi_3}{2} = \pi_2 \\ \frac{3\pi_2}{4} + \frac{\pi_3}{2} = \pi_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi_3}{2} = \frac{3}{4}\pi_2 \\ \frac{\pi_3}{2} = \frac{3}{4}\pi_2 \end{cases} \Rightarrow \pi_3 = \frac{3}{2}\pi_2$$

$$\Rightarrow 1 - \pi_2 = \frac{3}{2}\pi_2$$

$$\pi_2 + \pi_3 = 1 \Rightarrow \pi_3 = 1 - \pi_2 \qquad \Rightarrow \frac{5}{2}\pi_2 = 1 \Leftrightarrow \pi_2 = \frac{2}{5}$$

$$\pi_3 = \frac{3}{5}, \quad \pi_2 = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_{23}^{(n)} = \frac{3}{5}$$

2.B) Se la catena parte da 4, allora compie le seguenti "transizioni deterministiche":

$4 \to 6 \to 5 \to 4 \to 6 \to 5 \to 4 \to 6 \to 5 \to \dots \to$

Quindi $P_{44}^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è un multiplo di } 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

In conclusione $\nexists \lim_{n\to\infty} P_{44}^{(n)}$.

Se consideriamo la matrice Q della catena ristretta a $\{4,5,6\}$, si verifica che

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q^{(3)} = I, \; Q^{(4)} = Q \dots$$

E quindi non vale la condizione di regolarità

ESERCIZIO 5

Consideriamo una catena di Markov omogenea su $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

1) Classificare gli stati

2) Trovare distribuzioni stazionarie

3) Calcolare $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}_{65}$ se esiste

4) Calcolare $P^{(n)}_{11}$ $\forall n \geq 1$

5) Calcolare $P(X_1 = j)$ per $j \in E$ nel caso in cui $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = 1/2$

1) $1 \to 5$, $5 \not\to 1$ $\to$ 1 è transitorio
$2 \to 4$, $4 \not\to 2$ $\to$ 2 è transitorio
$3 \to 2$, $2 \not\to 3$ $\to$ 3 è transitorio

$\{4, 5, 6\}$ è una classe chiusa irriducibile $\Rightarrow$ sono stati riccorenti.

2) $E = T \cup \{4, 5, 6\}$ con $T = \{1, 2, 3\} \Rightarrow$ l'unica distribuzione stazionaria è:

$\Pi = (0, 0, 0, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6)$ con

(Π_4, Π_5, Π_6) relativa alla sotto catena $\{4, 5, 6\}$

$$(\pi_4, \pi_5, \pi_6)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (\pi_4, \pi_5, \pi_6) \iff \begin{cases} \frac{\pi_5}{3} = \pi_4 \iff \pi_5 = 3\pi_4 \\ \frac{\pi_6}{2} = \pi_5 \iff \pi_6 = 2\pi_5 = 6\pi_4 \\ \cancel{\pi_4 + \frac{2\pi_5}{3} + \frac{\pi_6}{2} = \pi_6} \end{cases}$$

$$\pi_4 + \pi_6 + \pi_5 = 1 \iff \pi_4 = 1 - \pi_5 - \pi_6 = 1 - 3\pi_4 - 6\pi_4 = 1 - 9\pi_4$$

$$\iff 10\pi_4 = 1 \iff \pi_4 = \frac{1}{10}$$
$$\pi_5 = \frac{3}{10}$$
$$\pi_6 = \frac{6}{10}$$

$$(\pi_4, \pi_5, \pi_6) = \left(\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{6}{10}\right) \Rightarrow$$

$$\pi = \left(0, 0, 0, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{6}{10}\right).$$

3) Poiché $\{4,5,6\}$ é irriducibile e $p_{66} > 0 \Rightarrow$ la sotto catena relativa a $\{4,5,6\}$ é regolare, quindi per il teorema di Markov

$$\lim_{n \to \infty} p_{65}^{(n)} = \pi_5 = \frac{3}{10}.$$

4) Se la catena lascia lo stato 1 non ci torna più,

(va in 5 e poi rimane in $\{4,5,6\}$), Allora

$$p_{11}^{(n)} = P(\{X_n = 1\} \cap \{X_{n-1} = 1\} \cap \dots \cap \{X_1 = 1\} \mid X_0 = 1\} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

5) Poniamo $\pi^{(1)} = \{\pi^{(1)}_j\}_{j \in E}$ con $\pi^{(1)}_j = P(\{X_1 = j\})$

$$\pi^{(1)} = \pi^{(0)} P$$

$$\pi^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{6}\right)$$