PROBLEMI DI PASSAGGIO

Sia $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una catena di Markov omogenea con spazio degli stati E. Consideriamo un sottoinsieme di stati $S \subset E$, tale che $\emptyset \neq S \neq E$.

$$\lambda_i = P(\{\exists\, n \geq 0 : X_n \in S\} \mid X_0 = i\} \qquad i \in E$$

$\downarrow$

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in S \\ 0 & \text{se } i \notin S \text{ e, } \forall j \in S \; i \not\to j \\ (*) & \text{se } i \notin S \text{ ed esiste } j \in S : i \to j \end{cases}$$

(*) avremo un valore in $(0,1)$.

$(\lambda_i)_{i \in D_S}$ dove $D_S = \{i \in E : i \notin S \text{ ed esiste } j \in S : i \to j\}$

PROP: Sia E finito allora $(\lambda_i)_{i \in D_S}$ sono l'unica soluzione del sistema

$$\left\{ \lambda_i = \sum_{h \in S} p_{ih} + \sum_{j \in D_S} p_{ij} \lambda_j \qquad i \in D_S \right.$$

Se S = insieme degli stati ricorrenti $\Rightarrow$

$$S = T^c, \quad D_S \subset S^c \Rightarrow D_S \in T \Rightarrow D_S = T$$

$$\lambda_i = \sum_{h \in T^c} p_{ih} + \sum_{j \in T} p_{ij} \lambda_j \qquad \forall i \in T$$

ESERCIZIO 1

Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n\}_{n\geq 0}$ su $E=\{1,2,3,4\}$

$$P=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ con $a_1+a_2+a_3+a_4=1$
$b_1, b_2, b_3 > 0$ con $b_1+b_2+b_3=1$

1) Supponiamo che la catena parta da 1 o da 2. Calcolare la probabilità che, in ciascuno dei due casi, la catena venga assorbita in 3.
2) Rispondere alla stessa domanda per la probabilità di assorbimento in 4.

1)

o vado in 3 — o rimango in 1 — o vado in 2

$$\lambda_1 = a_3 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2$$

prob di assorbimento in 3 se parto da 1

$S=\{3\}$ $D_S=\{1,2\}$
$1\to 3$, $3 \not\to 1$
$2\to 3$, $3\not\to 2$

$$\begin{cases} \lambda_1 = a_3 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 \\ \lambda_2 = b_2 + 0\lambda_1 + b_2\lambda_2 \end{cases} \iff \begin{cases} (1-a_1)\lambda_1 = a_3 + a_2\lambda_2 \\ (1-b_2)\lambda_2 = b_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{a_3+a_2\lambda_2}{1-a_1} \\ \lambda_2 = \dfrac{b_2}{1-b_2} = \dfrac{b_2}{b_2+b_3} \end{cases}$$

$b_1+b_2+b_3=1 \Rightarrow 1-b_1 = b_2+b_3$
$a_1+a_2+a_3+a_3=1 \Rightarrow 1-a_1 = a_2+a_3+a_4$

$$\Rightarrow \lambda_1 = a_3 + a_2\left(\frac{b_2}{b_2+b_3}\right)\cdot\frac{1}{1-a_1} = \frac{a_3(b_2+b_3)+a_2b_2}{b_2+b_3}\cdot\frac{1}{1-a_1}$$

$$\lambda_1 = \frac{a_3b_3+b_2(a_2+a_3)}{(a_2+a_3+a_4)(b_2+b_3)}$$

2 simile a 1

$$\lambda_2 = \frac{b_2}{b_2+b_3}$$

ESERCIZIO 3

Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n\}_{n\geq 0}$ su $E=\{1,2,3,4,5\}$

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 2/3 & 1/2 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Calcolare la probabilità di passaggio per $\{1,3\}$ partendo da 4.

$$E = T \cup C_1 \cup \dots \cup C_k$$

$C_1=\{1,3\}$, $C_2=\{2,5\}$ $T=\{4\}$ $\begin{pmatrix} 4\to 1 & 1\not\to 4 \\ 4\to 5 & 5\not\to 4 \end{pmatrix}$

Vogliamo considerare il sistema per le $(\lambda_i)_{i\in D_S}$ dove $S=C_1$, $D_S=T=\{4\}$

(4 comunica con 1 e 3 e son diversi)

$$\lambda_4 = \underbrace{P_{41}+P_{43}}_{\text{vado direttamente in 1 o 3}} + P_{44}\lambda_4 \leftarrow \text{rimango in 4}$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{4} + 0 + \frac{2}{3}\lambda_4 \iff \frac{1}{3}\lambda_4 = \frac{1}{4} \iff \lambda_4 = \frac{3}{4}$$