ESAME DEL 2/02/2024

Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1-q & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 13/40 & 7/40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad q \in [0, 1]$$

D1) Sia $q = 0$. Calcolare $\lim_{n \to \infty} p_{12}^{(n)}$, dopo aver motivato l'esistenza di tale limite.

<u>Soluzione</u>

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 13/40 & 7/40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiche $1 \to 2$ e $2 \to 1$, $\{1, 2\}$ é una classe chiusa e la sottocatena é irriducibile e inoltre é regolare in quanto $p_{11} > 0$, quindi per il teorema di Markov $\lim_{n \to \infty} p_{12}^{(n)} = \pi_2$.

Calcoliamo (π_1, π_2) stazionaria della sottocatena $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$(\pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2) \iff \begin{cases} \frac{\pi_1}{2} + \frac{\pi_2}{2} = \pi_1 \\ \frac{\pi_1}{2} = \pi_2 \end{cases} \iff \pi_1 = 2\pi_2 \quad \text{inoltre } \pi_1 = 1 - \pi_2$$

$$\Rightarrow 1 - \pi_2 = 2\pi_2 \iff 1 = 3\pi_2 \iff \begin{pmatrix} \pi_2 = \frac{1}{3} \\ \pi_1 = \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

In conclusione, $\lim_{n \to \infty} p_{12}^{(n)} = \frac{1}{3}$.

D 12) Sia $q \neq 0$. Calcolare la probabilità di passaggio (assorbimento) nello stato 4 partendo da ciascuno degli stati 1, 2, 3.

Soluzione

$$S = \{4\}, \quad D_S = \{1, 2, 3\} \Rightarrow \forall i \in D_S, \quad \lambda_i = \sum_{j \in S} P_{ij} + \sum_{j \in D_S} P_{ij} \lambda_j$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = P_{14} + P_{11}\lambda_1 + P_{12}\lambda_2 + P_{13}\lambda_3 \\ \lambda_2 = P_{24} + P_{21}\lambda_1 + P_{22}\lambda_2 + P_{23}\lambda_3 \\ \lambda_3 = P_{34} + P_{31}\lambda_1 + P_{32}\lambda_2 + P_{33}\lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2} \Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{2} = \frac{\lambda_2}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_2 = (1-q)\lambda_1 + q\lambda_3 \Leftrightarrow \lambda_2 = (1-q)\lambda_1 + q\frac{13}{12} \Leftrightarrow 1-(1-q)\lambda_2 = q\frac{13}{20} \quad (*) \\ \lambda_3 = \frac{13}{40} + \frac{\lambda_3}{2} \Leftrightarrow \frac{\lambda_3}{2} = \frac{13}{40} \Leftrightarrow \lambda_3 = \frac{13}{20} \end{cases}$$

$$(*) \quad q\lambda_2 = q\frac{13}{20} \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{13}{20}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{13}{20}, \quad \lambda_2 = \frac{13}{20}, \quad \lambda_3 = \frac{13}{20}$$

ESAME DEL 20/02/2024

Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1,2,3,4,5\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 7/10 & \frac{3}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1-q}{4} & \frac{1-q}{4} & q & \frac{1-q}{4} & \frac{1-q}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3q}{4} & \frac{3-3q}{4} & 1/4 \end{pmatrix} \quad q \in [0,2]$$

D1) Sia $q=0$. Giustificare l'esistenza di $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ per $i,j \in \{4,5\}$, e verificare che si ottiene sempre lo stesso valore (per ogni scelta di $i,j \in \{4,5\}$).

Soluzione

$$P = \begin{pmatrix} 7/10 & \frac{3}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1/4 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} p_{44}^{(n)}, \quad \lim_{n\to\infty} p_{45}^{(n)}, \quad \lim_{n\to\infty} p_{54}^{(n)}, \quad \lim_{n\to\infty} p_{55}^{(n)}$$

I stati $\{4,5\}$ costituiscono una classe chiusa, quindi la sottocatena associata è irriducibile e inoltre è regolare in quanto $p_{44} > 0$ ($p_{55} > 0$), quindi per il teorema di Markov

$$\lim_{n\to\infty} p_{i4}^{(n)} = \tilde{\pi}_4 \text{ per } i = 4,5 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} p_{i5}^{(n)} = \pi_5 \text{ per } i = 4,5.$$

Calcoliamo dunque la stazionaria (π_4, π_5) relativa alla sottocatena $\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

$$(\pi_4, \pi_5)\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} = (\pi_4, \pi_5) \iff \begin{cases} \frac{\pi_4}{4} + \frac{3\pi_5}{4} = \pi_4 \\ \frac{3\pi_4}{4} + \frac{\pi_5}{4} = \pi_5 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3}{4}\pi_5 = \frac{3}{4}\pi_4 \iff \pi_4 = \pi_5 \\ \frac{3}{4}\pi_4 = \frac{3}{4}\pi_5 \end{cases}$$

Inoltre vale anche $\pi_4 = 1 - \pi_5 \Rightarrow 1 - \pi_5 = \pi_5 \Leftrightarrow 2\pi_5 = 1 \Leftrightarrow \pi_5 = \frac{1}{2}$

$\pi_4 = \frac{1}{2}$

In conclusione:

$$\lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} \text{ per ogni scelta di } i,j \in \{4,5\}.$$

D22) Sia $q=1$. Calcolare i tempi medi di primo arrivo nello stato 3 partendo da ciascuno degli stati 1, 2, 4, 5.

$$P = \begin{pmatrix} 7/10 & \frac{3}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Soluzione $T = \{1,2,4,5\}$ e $T^c = \{3\}$

$$\mu_i = 1 + \sum_{j \in T} P_{ij}\mu_j \quad \forall i \in T$$

$$\begin{cases} \mu_1 = 1 + P_{11}\mu_1 + P_{12}\mu_2 + P_{14}\mu_4 + P_{15}\mu_5 \\ \mu_2 = 1 + P_{21}\mu_1 + P_{22}\mu_2 + P_{24}\mu_4 + P_{25}\mu_5 \\ \mu_4 = 1 + P_{41}\mu_1 + P_{42}\mu_2 + P_{44}\mu_4 + P_{45}\mu_5 \\ \mu_5 = 1 + P_{51}\mu_1 + P_{52}\mu_2 + P_{54}\mu_4 + P_{55}\mu_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = 1 + \frac{7}{10}\mu_1 + \frac{3}{10}\mu_2 \\ \mu_2 = 1 + \mu_4 \\ \mu_4 = 1 + \frac{1}{4}\mu_4 + \frac{3}{4}\mu_5 \\ \mu_5 = 1 + \frac{1}{4}\mu_5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{4}\mu_5 = 1 \Leftrightarrow \mu_5 = \frac{4}{3}$$

$$\mu_4 = 1 + \frac{1}{4}\mu_4 + 1 \Rightarrow \frac{3}{4}\mu_4 = 2 \Leftrightarrow \mu_4 = \frac{8}{3}$$

$$\mu_2 = 1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\mu_1 = 1 + \frac{7}{10}\mu_1 + \frac{11}{10} \Rightarrow \frac{3}{10}\mu_1 = \frac{21}{10} \Leftrightarrow \mu_1 = 7.$$

ESAME DEL 21/06/2024

Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1,2,3,4,5\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & c^2 & 1-c^2 \end{pmatrix}$$

dove $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c \in (0,1)$ tali che

$a_1 + a_2 + a_3 = 1 \quad b_1 + b_2 + b_3 = 1$

D1) Calcolare $\lim_{n\to\infty} p_{55}^{(n)}$ dopo aver giustificato l'esistenza del limite.

Poiché $\{4,5\}$ è una classe chiusa, quindi la sottocatena relativa a $\{4,5\}$ è irriducibile e $p_{55} > 0$ in quanto $c \neq 1$ per il teorema di Markov $\lim_{n\to\infty} p_{55}^{(n)} = \pi_5$.

Sia (π_4, π_5) la stazionaria relativa a $\begin{pmatrix} c & 1-c \\ c^2 & 1-c^2 \end{pmatrix}$.

$$(\pi_4, \pi_5)\begin{pmatrix} c & 1-c \\ c^2 & 1-c^2 \end{pmatrix} = (\pi_4, \pi_5) \iff \begin{cases} c\pi_4 + c^2\pi_5 = \pi_4 \\ (1-c)\pi_4 + (1-c^2)\pi_5 = \pi_5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1-c)\pi_4 = c^2\pi_5 \\ (1-c)\pi_4 = c^2\pi_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \pi_4 = \dfrac{c^2}{1-c}\pi_5 \\ \pi_4 = 1-\pi_5 \end{matrix} \Rightarrow 1-\pi_5 = \frac{c^2}{1-c}\pi_5$$

e inoltre $\pi_4 = 1 - \pi_5$

$$\iff \left(1 + \frac{c^2}{1-c}\right)\pi_5 = 1 \iff \frac{1-c+c^2}{1-c}\pi_5 = 1 \iff \pi_5 = \frac{1-c}{1-c+c^2}$$

$\pi_4 = \dfrac{c^2}{1-c+c^2}$. In conclusione, $\lim_{n\to\infty} p_{55}^{(n)} = \dfrac{1-c}{1-c+c^2}$.

D12) Verificare che le probabilità di assorbimento in $\{4,5\}$ partendo da 2 e da 3 sono:

$$\lambda_2 = \frac{a_3 b_3}{a_1 b_1 + a_1 b_3 + a_3 b_3} \quad e \quad \lambda_3 = \frac{a_1 b_3 + a_3 b_3}{a_1 b_1 + a_1 b_3 + a_3 b_3}$$

Soluzione

$S = \{4, 5\}, \quad D_S = \{2, 3\}$

$$\forall i \in D_S, \quad \lambda_i = \sum_{j \in S} p_{ij} + \sum_{j \in D_S} p_{ij} \lambda_j \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= P_{24} + P_{25} + P_{22}\lambda_2 + P_{23}\lambda_3 \\ \lambda_3 &= P_{34} + P_{35} + P_{32}\lambda_2 + P_{33}\lambda_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 \\ \lambda_3 = b_3 + b_1\lambda_2 + b_2\lambda_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} (1-a_2)\lambda_2 &= a_3\lambda_3 \\ (1-b_2)\lambda_3 &= b_3 + b_1\lambda_2 \end{aligned}$$

$a_1 + a_2 + a_3 = 1 \Rightarrow 1 - a_2 = a_1 + a_3$
$b_1 + b_2 + b_3 = 1 \Rightarrow 1 - b_2 = b_1 + b_3$

$$\Rightarrow (b_1 + b_3)\lambda_3 = b_3 + \frac{b_1(a_3\lambda_3)}{a_1 + a_3} \Rightarrow (b_1 + b_3)\lambda_3 = b_3 + \frac{a_3 b_1 \lambda_3}{a_1 + a_3}$$

$$\Rightarrow \left(b_1 + b_3 - \frac{a_3 b_1}{a_1 + a_3}\right)\lambda_3 = b_3 \iff \frac{(a_1 + a_3)(b_1 + b_3) - b_1 a_3}{a_1 + a_3}\lambda_3 = b_3$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 b_1 + a_1 b_3 + \cancel{a_3 b_1} + a_3 b_3 - \cancel{b_1 a_3}}{a_1 + a_3}\lambda_3 = b_3$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \frac{a_1 b_3 + a_3 b_3}{a_1 b_1 + a_1 b_3 + a_3 b_3} \qquad \lambda_2 = \frac{a_3 \lambda_3}{a_1 + a_3}$$

$$\lambda_2 = \frac{a_3}{a_1 + a_3} \cdot \frac{a_1 b_3 + a_3 b_3}{a_1 b_1 + a_1 b_3 + a_3 b_3} = \frac{a_3 b_3}{a_1 b_1 + a_1 b_3 + a_3 b_3}$$

ESAME DEL 19/07/2024

Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1, 2, 3\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ q & 0 & 1-q \end{pmatrix} \quad \text{dove } q \in (0,1)$$

D11) Calcolare $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$, per $i, j \in E$ dopo aver giustificato l'esistenza del limite.

Soluzione

La matrice P è irriducibile e poiché $p_{11} > 0 \Rightarrow$ è anche regolare quindi per il teorema di Markov $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall i, j \in E$.

Consideriamo l'unica stazionaria $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ di P : $\pi = \pi P$

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ q & 0 & 1-q \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \iff \begin{cases} \frac{\pi_1}{3} + \frac{\pi_2}{3} + q\pi_3 = \pi_1 \\ \frac{\pi_1}{3} + \frac{\pi_2}{3} = \pi_2 \\ \frac{\pi_1}{3} + \frac{\pi_2}{3} + (1-q)\pi_3 = \pi_3 \end{cases} \text{ più la relazione}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi_1}{3} = \frac{2}{3}\pi_2 \\ q\pi_3 = \frac{\pi_1}{3} + \frac{\pi_2}{3} \\ \pi_1 = 1 - \pi_2 - \pi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 2\pi_2 \Rightarrow \frac{2q}{3q+1} \\ q\pi_3 = \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{\pi_2}{3} = \pi_2 \Rightarrow \pi_3 = \frac{1}{q}\pi_2 = \frac{1}{3q+1} \\ 2\pi_2 = 1 - \pi_2 - \frac{1}{q}\pi_2 \end{cases}$$

$$\left(2 + 1 + \frac{1}{q}\right)\pi_2 = 1 \iff \pi_2 = \frac{q}{3q+1}$$

$$\pi = \left(\frac{2q}{3q+1}, \frac{1}{3q+1}, \frac{q}{3q+1}\right) \Rightarrow \text{In conclusione: } \lim_{n\to\infty} p_{i1}^{(n)} = \frac{2q}{3q+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{i2}^{(n)} = \frac{1}{3q+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{i3}^{(n)} = \frac{q}{3q+1}$$

D12) Calcolare i tempi medi di primo passaggio per lo stato 3 partendo da 1 e da 2 rispettivamente.

$T = \{1,2\}$ e $T^c = \{3\}$

$$\mu_i = 1 + \sum_{j \in T} P_{ij} \mu_j \quad \forall i \in T \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \mu_1 = 1 + \frac{1}{3}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 \\ \mu_2 = 1 + \frac{1}{3}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 \end{cases} \iff \begin{array}{l} \frac{2}{3}\mu_1 = 1 + \frac{1}{3}\mu_2 \\ \frac{2}{3}\mu_2 = 1 + \frac{1}{3}\mu_1 \end{array}$$

$$\mu_1 = \mu_2 \iff 1 + \frac{1}{3}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 = 1 + \frac{1}{3}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2$$

$$\iff \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$\mu_1 = 1 + \frac{1}{3}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_1 \iff \frac{1}{3}\mu_1 = 1 \iff \mu_1 = 3 = \mu_2.$$

ESAME DEL 3/20/2024

Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1,2,3,4,5\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 1-q \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & 1-q^2 \end{pmatrix} \qquad q \in (0,1)$$

D1) Calcolare $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ per $i,j \in \{4,5\}$ dopo aver giustificato l'esistenza del limite.

Soluzione

Gli stati $\{4,5\}$ sono una classe chiusa, perciò la sottocatena associato a $\{4,5\}$ è irriducibile e poiché $q \in (0,1)$, $p_{44} > 0$ quindi è anche regolare, quindi per il teorema di Markov $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ $\forall i,j \in \{4,5\}$

Consideriamo la stazionaria (π_4, π_5) relativa a $\{4,5\}$, allora

$$(\pi_4, \pi_5)\begin{pmatrix} q & 1-q \\ q^2 & 1-q^2 \end{pmatrix} = (\pi_4, \pi_5) \Rightarrow \begin{cases} q\pi_4 + q^2\pi_5 = \pi_4 \\ (1-q)\pi_4 + (1-q^2)\pi_5 = \pi_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1-q)\pi_4 = q^2\pi_5$$

più la relazione $\pi_4 = 1 - \pi_5$ $(\pi_4 + \pi_5 = 1)$

$$(1-q)\pi_4 = q^2\pi_5 \Rightarrow \pi_4 = \frac{q^2}{1-q}\pi_5 \Rightarrow 1 - \pi_5 = \frac{q^2}{1-q}\pi_5 \Rightarrow \left(1 + \frac{q^2}{1-q}\right)\pi_5 = 1$$

$$\Leftrightarrow \pi_5 = \frac{1-q}{1-q+q^2}$$

$$\pi_4 = \frac{q^2}{1-q+q^2}, \quad \pi_5 = \frac{1-q}{1-q+q^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_{j4} = \frac{q^2}{1-q+q^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{j5} = \frac{1-q}{1-q+q^2}$$

per $j \in \{4,3\}$

D12) Calcolare i tempi medi di assorbimento nello stato 1 partendo da 2 e da 3 rispettivamente.

Soluzione

$$\begin{cases} \mu_2 = 1 + P_{22}\mu_2 + P_{23}\mu_3 \\ \mu_3 = 1 + P_{32}\mu_2 + P_{33}\mu_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_2 = 1 + \frac{1}{3}\mu_2 + \frac{1}{3}\mu_3 \\ \mu_3 = 1 + \frac{1}{2}\mu_2 + \frac{1}{2}\mu_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\mu_2 = 1 + \frac{1}{3}\mu_3 \Rightarrow \mu_2 = \left(1 + \frac{1}{3}\mu_3\right)\frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mu_3$$

$$\frac{1}{2}\mu_3 = 1 + \frac{1}{2}\mu_2 \Rightarrow \mu_3 = 2 + \mu_2 = 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mu_3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mu_3 = \frac{7}{2} = \mu_3 = 7$$

$$\Rightarrow \mu_2 = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$(\mu_2, \mu_3) = (5, 7)$.

ESAME DEL 20/09/2024

Sia $\{X_n : n \geq 1\}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1,2,3,4,5\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 & 1/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & r & 1-r \end{pmatrix} \qquad r \in (0,1)$$

D 1.1) Motivare l'esistenza di $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}$ per $i,j \in \{4,5\}$ e dire per quale valore di r questi limiti sono tutti uguali tra loro.

Soluzione

Gli stati $\{2,3\}$ formano una classe chiusa perciò la sottocatena relativa a $\{2,3\}$ è irreducibile e poiche $p_{44} > 0$ è anche regolare quindi per il teorema di Markov $\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \forall i,j \in \{4,5\}$.

Consideriamo l'unica stazionaria (π_4, π_5) di $\{4,5\}$.

$$(\pi_4, \pi_5) \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ r & 1-r \end{pmatrix} = (\pi_4, \pi_5) \iff \begin{cases} \frac{\pi_4}{3} + r\pi_5 = \pi_4 \\ \frac{2}{3}\pi_4 + (1-r)\pi_5 = \pi_5 \end{cases} \iff \begin{matrix} \frac{2}{3}\pi_4 = r\pi_5 \\ \frac{2}{3}\pi_4 = r\pi_5 \end{matrix}$$

Inoltre vale $\pi_4 + \pi_5 = 1 \Rightarrow \pi_4 = 1 - \pi_5$

$$\pi_4 = \frac{3r}{2}\pi_5 \Rightarrow 1 - \pi_5 = \frac{3r}{2}\pi_5$$

$$\iff \frac{2+3r}{2}\pi_5 = 1$$

$$\iff \pi_5 = \frac{2}{2+3r}.$$

$$\pi_4 = \frac{3r}{2+3r}$$

Quindi $\lim_{n\to\infty} P_{i4}^{(n)} = \frac{3r}{2+3r}$

$\lim_{n\to\infty} P_{i5}^{(n)} = \frac{2}{2+3r}$ $\forall i \in \{4, 5\}$

Infine $\frac{3r}{2+3r} = \frac{2}{2+3r} \iff 3r = 2 \iff r = \frac{2}{3}$

D12)

$\lambda_1 = P_{12} + P_{13} + \lambda P_{11} \iff \lambda_1 = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}\lambda_1$

$\iff \frac{6}{7}\lambda_1 = \frac{3}{7} \iff \lambda_1 = \frac{1}{2}$