MATRICE DI TRANSIZIONE

Nel caso di catena di Markov omogenea con spazio degli stati E abbiamo i valori

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i) \quad \forall i,j \in E \quad \forall n \geq 0.$$

I valori $(P_{ij})_{i,j \in E}$ costituiscono la matrice di transizione.

In generale si ha una matrice quadrata e quando E è finito, ha dimensione alla cardinalità di E.

DENSITÀ CONGIUNTE PER LE V.A

matrice di transizione

$$\pi^{(n)} = (\pi_i^{(n)})_{i \in E} \quad \text{tale che} \quad \pi_i^{(n)} = P(X_n = i) \quad \text{per } i \in E$$

$$\pi_i^{(n)} \geq 0 \quad e \quad \sum_{i \in E} \pi_i^{(n)} = 1 \qquad \pi^{(0)}: \text{distribuzione iniziale}$$

ESERCIZIO 1

Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n\}_{n \geq 0}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1) Trovare la distribuzione di X_1 nel caso in cui la distribuzione iniziale sia uniforme.

distribuzione uniforme, $|E| = 3$

Si ha $\pi^{(1)} = \pi^{(0)} P$, dove $\pi^{(0)} = (1/3, 1/3, 1/3)$

$$\pi^{(1)} = \pi^{(0)} P = (1/3, 1/3, 1/3) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}, \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}, \frac{1}{12} + \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{3}{12}, \frac{6}{12}, \frac{3}{12}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

2) Calcolare $P(X_2 = 3 \mid X_0 = 1)$

Si chiede di calcolare $P_{13}^{(2)}$. Calcoliamo per completezza $P^{(2)}$.

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 5/16 & 7/16 & 4/16 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/16 & 7/16 & 5/16 \end{pmatrix}$$

$\to P_{13}^{(2)}$

3) Calcolare $P(X_2 \neq 2)$ nel caso in cui si abbia $\pi^{(0)} = (q, 0, 1-q)$ per $q \in [0, 1]$.
Inoltre con questa scelta di $\pi^{(0)}$, dire se esiste un valore di q per cui si ha $P(X_2 = 1) = P(X_2 = 3)$.

$$\pi^{(2)} = \pi^{(0)} P^{(2)} = (q, 0, 1-q)\begin{pmatrix} 5/16 & 7/16 & 4/16 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/16 & 7/16 & 5/16 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(q\frac{5}{16} + (1-q)\frac{4}{16},\ q\frac{7}{16} + (1-q)\frac{7}{16},\ q\frac{4}{16} + (1-q)\frac{5}{16} \right) =$$

$$= \left(\frac{4+q}{16}, \frac{7}{16}, \frac{5-q}{16} \right) \Rightarrow \text{Allora } P(X_2 \neq 2) = P(X_2 = 1) + P(X_2 = 3)$$

$P(X_2 = 1)$

somma $= 1 \Rightarrow$ OK.

$P(X_2 = 2)$

$$= \frac{4+q}{16} + \frac{5-q}{16} = \frac{9}{16}$$

Oppure $P(X_2 \neq 2) = 1 - P(X_2 = 2) = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$

$$P(X_2 = 1) = P(X_2 = 3) = \frac{4+q}{16} = \frac{5-q}{16} \iff 2q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2

Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n\}_{n\geq 0}$ con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e con

$$P = \begin{pmatrix} r & 1-r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{per } r \in [0,1]$$

1) Trovare la distribuzione di X_1 nel caso in cui la catena parte dallo stato 4.

Si ha $\pi^{(1)} = \pi^{(0)} P$ nel caso in cui $\pi^{(0)} = (0, 0, 0, 1)$ perché parte dallo stato 4.

$$\pi^{(0)} P = (0, 0, 0, 1) \begin{pmatrix} r & 1-r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \left(0, 0, 1/3, \tfrac{2}{3}\right)$$

2) Calcolare $P(X_2 = 1 \mid X_0 = 1)$ e più in generale $P(X_n = 1 \mid X_0 = 1)$ per $n \geq 1$.

Viene chiesto di calcolare $P_{11}^{(n)}$ per $n = 2$ e poi per n generico

Il caso $n = 2$ si ottiene considerando

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} r & 1-r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 1-r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}^{(2)} = r^2 & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$P^{(n)} = P \cdots P \Rightarrow P_{11}^{(n)} = r^n$$

3) Dire se esiste un valore di r per cui, nel caso in cui $P(X_0=1)=\frac{9}{10}$ e $P(X_0=2)=\frac{1}{10}$ e per cui si ha $P(X_2=2)=\frac{1}{100}$

$$\pi^{(2)}=\pi^{(0)}P^{(2)} \quad \text{con} \quad \pi^{(0)}=\left(\frac{9}{10},\ \frac{1}{10},\ 0,\ 0\right)$$

$$\pi^{(2)}=\left(\frac{9}{10},\ \frac{1}{10},\ 0,0\right)\begin{pmatrix} r & 1-r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & 1-r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{9}{10}r,\ \frac{9}{10}(1-r)+\frac{9}{10},\ 0,0\right)\begin{pmatrix} r & 1-r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}=$$

$$=\left(\frac{9}{10}r^2,\ \frac{9}{10}r(1-r)+\frac{9}{10}(1-r)+\frac{1}{10},\ 0,\ 0\right)=\left(\frac{9}{10}r^2,\ 1-\frac{9}{10}r^2,\ 0,0\right)$$

$$P(X_2=2)=\frac{1}{100} \Rightarrow 1-\frac{9}{10}r^2=\frac{1}{100} \Leftrightarrow -\frac{9}{10}r^2=1-\frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{9}{10}r^2=\frac{99}{100}$$

$$\Leftrightarrow r^2=\frac{11}{10} \Leftrightarrow r=\sqrt{\frac{11}{10}}$$

$\Rightarrow$ Soluzione $\boxed{\text{non accettabile}}$ perché $r=\sqrt{\frac{11}{10}}>1$.

ESERCIZIO 3

Consideriamo una catena di Markov omogenea $\{X_n\}_{n\geq 0}$ con $E=\{0,1,2\}$ e matrice

$$P=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} 0 \\ 1 \rightarrow \in E \\ 2 \end{array}$$

1) Calcolare $P(X_1 X_2 = 4)$ nel caso in cui la catena parte da 1.

Poiché la catena assume valori in $E=\{0,1,2\}$, abbiamo che

$\{X_1 X_2 = 4\} = \{X_1 = 2\} \cap \{X_2 = 2\}$.

Quindi dobbiamo calcolare $P(\{X_1=2\}\cap\{X_2=2\})$ con la distribuzione iniziale.

Per una generica distribuzione iniziale $\pi^{(0)} = (\pi_0^{(0)}, \pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)})$ si avrebbe

$$P(\{X_1=2\}\cap\{X_2=2\}) = \sum_{i=0}^{2} \pi_i^{(0)} \underbrace{P(X_1=2\mid X_0=i)}_{P_{i2}} \underbrace{P(X_2=2\mid X_1=2)}_{P_{22}}$$

Poi nel caso specifico si ha $\pi^{(0)} = (0,1,0)$ e quindi

$$P(\{X_1=2\}\cap\{X_2=2\}) = \underset{i=0}{0} + \underset{i=1}{1\cdot P_{12}\cdot P_{22}} + \underset{i=2}{0} = 1\cdot 1\cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

2) Calcolare $P(X_0 + X_1 = 2)$ nel caso in cui la distribuzione iniziale sia uniforme.

$\pi^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\rightarrow Pr(X_1 = 0 \mid X_0 = 2)\, Pr(X_0 = 2)$

$\{X_0 + X_1 = 2\} = \underbrace{\{X_0 = 0 \wedge X_1 = 2\}}_{E_{02}} \vee \underbrace{\{X_0 = 2 \wedge X_1 = 0\}}_{E_{20}} \vee \underbrace{\{X_0 = 1 \wedge X_1 = 1\}}_{E_{11}}$

$P(\{X_0 + X_1 = 2\}) = P(E_{02}) + P(E_{20}) + P(E_{11})$

Allora

$P(X_1 = 2 \mid X_0 = 0)\, Pr(X_0 = 0)$

$$\begin{cases} P(E_{02}) = \pi^{(0)}_{(0)} P_{02} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \\ P(E_{20}) = \pi^{(0)}_2 P_{20} = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0 \\ P(E_{11}) = \pi^{(0)}_1 P_{11} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{15} = \frac{8}{45}$$

$P(X_1 = 0 \mid X_0 = 2)\, P(X_0 = 2)$

$P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)\, P(X_0 = 1)$

3) Sia $\pi^{(0)} = (r, 0, 1-r)$ per $r \in (0, 1]$. Determinare, se esiste, il valore di r affinché si abbia $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{4}$

$\pi^{(1)} = \pi^{(0)} P$

$$= (r, 0, 1-r) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \left(\frac{r}{3} + \frac{1-r}{5}, \frac{r}{3} + \frac{1-r}{5}, \frac{r}{3} + \frac{3-3r}{5} \right)$$

$$= \left(\frac{5r + 3 - 3r}{15}, \frac{2r+3}{15}, \frac{5r + 9 - 9r}{15} \right) = \left(\frac{2r+3}{15}, \frac{2r+3}{15}, \frac{-4r+9}{15} \right)$$

$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{2r+3}{15} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{2r}{15} = \frac{1}{4} - \frac{3}{15}$

$\Leftrightarrow \frac{2r}{15} = \frac{15 - 12}{60} \Leftrightarrow \frac{2r}{15} = \frac{3}{\cancel{60}_4} \cancel{15}^{2} \Leftrightarrow r = \frac{3}{8}$ ok.