ESERCIZIO 2

Sia $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1,2,3\}$

$$P = \begin{pmatrix} q & 1-q & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1-q & q \end{pmatrix} \quad \text{dove } q \in [0,1]$$

1) Calcolare $P(X_2 = j)$ per ogni $j \in E$ nel caso in cui la catena parte da 3, e dire se esiste un valore di q per cui X_2 ha distribuzione uniforme discreta su E.

Se poniamo $\pi^{(k)} = (P(X_k = 1), P(X_k = 2), P(X_k = 3))$, si ha

$$\pi^{(2)} = \pi^0 P^2 \quad \text{con} \quad \pi^0 = (0,0,1).$$

$$\pi^{(2)} = \underbrace{(0,0,1)\begin{pmatrix} q & 1-q & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1-q & q \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} q & 1-q & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1-q & q \end{pmatrix} = (0, 1-q, q)\begin{pmatrix} q & 1-q & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1-q & q \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1-q}{3}, \frac{1-q}{3} + q(1-q), \frac{1-q}{3} + q^2\right) = \left(\frac{1-q}{3}, \frac{-3q^2+2q+1}{3}, \frac{3q^2-q+1}{3}\right)$$

$1 - q + 3q - 3q^2$

Infine si cerca q (se esite) tale che $P(X_2 = j) = \frac{1}{3}$

- $P(X_2 = 1) = \frac{1-q}{3} = \frac{1}{3} \iff q = 0$
- $P(X_2 = 2) = \frac{-3q^2+2q+1}{3} = \frac{1}{3} \iff -3q^2 + 2q = 0 \iff q(-3q+2) = 0$
  $\iff q = 0 \wedge q = -\frac{2}{3}$
  NO
- $P(X_2 = 3) = \frac{3q^2-q+1}{3} = \frac{1}{3} \iff 3q^2 - q = 0$
  $\iff q(3q-1) = 0 \iff q = 0 \wedge q = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow q = 0$ è il valore cercato.

2) Trovare le distribuzioni stazionarie e verificare che sono reversibili.

Osserviamo che abbiamo 2 casi:

Se $q = 1$; gli stati 1 e 3 sono assorbenti, mentre lo stato 2 è transitorio.
Allora $\pi = \alpha(1,0,0) + (1-\alpha)(0,0,1) = (\alpha, 0, 1-\alpha) \quad \forall \alpha \in [0,1]$

Se $q \neq 1$ abbiamo una catena irriducibile, e quindi un'unica distribuzione stazionaria data dallo soluzione del sistema $\pi = P\pi$, cioè

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} q & 1-q & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1-q & q \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \iff$$

$$\begin{cases} q\pi_1 + \frac{\pi_2}{3} = \pi_1 \\ (1-q)\pi_1 + \frac{\pi_2}{3} + \frac{\pi_3}{3} = \pi_2 \\ (1-q)\pi_2 + q\pi_3 = \pi_3 \end{cases} \iff \begin{cases} (1-q)\pi_1 = \frac{\pi_2}{3} \iff \pi_1 = \frac{1}{3-3q}\pi_2 \\ (1-q)\pi_2 = (1-q)\pi_3 \iff \pi_2 = \pi_3 \end{cases}$$

$$\pi_1 = 1 - \pi_2 - \pi_3 = 1 - 2\pi_2$$

$$1 - 2\pi_2 = \frac{1}{3-3q}\pi_2$$

$$1 = \left(\frac{1}{3-3q} + 2\right)\pi_2 \iff \pi_2 = \frac{3-3q}{7-6q} = \pi_3$$

$$\pi_1 = \frac{1}{7-6q}$$

ESERCIZIO 3

Sia $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una catena di Markov omogenea su $E=\{1,2,3,4\}$

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-q & 0 \\ 0 & 1-q & q & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{100} & \frac{99}{100} \end{pmatrix} \qquad q\in[0,1]$$

1) Classificare gli stati, individuare le classi chiuse irriducibili, e trovare le distribuzioni stazionarie.