DEFINIZIONI

Sia $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una catena di Markov omogenea con spazio degli Stati E e matrice di Transizione $(P_{ij})_{i,j\in E}$

- Siano $i,j \in E$. Si dice che "i comunica con j" $(i \to j)$ se esiste $m \geq 1$ tale che $p_{i,j}^{(n)} > 0$
- Sia $C \subset E$ $(C \neq \emptyset)$. C è detta "classe chiusa" se tutti gli elementi di C non comunicano con quelli di C^c.
- Una classe chiusa C è detta "irriducibile" se tutti gli elementi di C comunicano tra loro.
- Se $C = E \Rightarrow$ la catena è irriducibile
- Se $C = \{i\}$ per qualche $i \in E$, lo stato i è detto stato assorbente (se la catena va in i, rimane in i per sempre).

$$\{\tau_j : j \in E\} \Rightarrow \tau_j(\omega) = \inf\{m \geq 1 : X_n(\omega) = j\}$$

il primo istante in cui la catena raggiunge lo stato j.

Convenzione: $\inf \emptyset = +\infty$

$\Rightarrow \tau_j(\omega) = +\infty \iff$ la catena non visita mai lo stato j (trascurando l'istante iniziale $n=0$)

$\forall n \geq 1$ si ha $\{\tau_j > n\} = \{X_1 \neq j\} \cap \dots \cap \{X_n \neq j\} \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow \{\tau_j \leq n\} \in \mathcal{A}$

$p_{ij} = P(\tau_j < \infty \mid X_0 = i) \quad \forall i, j \in E$

↳ é la probabilitā che "la catena passi per j partendo da i".

-> lo stato $i \in E$ ē detto transitorio se $p_{ii} < 1$
-> lo stato $i \in E$ ē detto ricorrente se $p_{ii} = 1$

$\Rightarrow$ i ē transitorio $\Leftrightarrow \exists\, j \in E : i \to j$ e $j \not\to i$

Sia $\pi = (\pi_i)_{i \in E}$, π ē una distribuzione stazionario se $\pi = \pi P$.

Se $\pi^{(0)} = \pi$ con π stazionara, allora $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} \; \forall n \geq 1$

TEOREMA

Sia E finito. Allora $\exists$ almeno una distribuzione stazionaria.

Risultati:

1) Sia π una distribuzione stazionaria. Allora, se i ē transitorio $\pi_i = 0$

2) Sia E finito. Allora, se la catena ē irriducibile, esiste un' unica distribuzione stazionario.

REGOLE PER GLI ESERCIZI

partizione

Sia E finito con n elementi $\Rightarrow E = \underset{\text{stati transitori}}{T} \cup \underbrace{C_1, \dots, C_k}_{\text{classi chiuse}}$ $\quad 1 \le k \le n$

$\nu_1, \dots, \nu_k$ distribuzioni tali che $\forall\, j \in \{1, \dots, k\}$ ν_j è la distribuzione su E concentrata su C_j e che coincide con l'unica distribuzione stazionaria della catena ristretta sugli stati di C_j.

Allora tutte le distribuzioni stazionarie sono del tipo

$$\pi = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \nu_j \quad \text{per } \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ tali che } \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1.$$

Quindi c'è un unica distribuzione stazionaria se e solo se $k = 1 \Leftrightarrow$ $\exists$ un'unica classe chiusa irriducibile.

Esercizio 1

Sia $\{X_n\}_{n \geq 0}$ una catena di Markov omogenea su $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Trovare le distribuzioni stazionarie.

Soluzione: Si vede che

$3 \to 1$, $3 \to 2$ ma non il viceversa ($C_1 = \{1, 2\}$ è una classe chiusa irriducibile

$4 \to 5$, $4 \to 6$ ma non il viceversa $\Rightarrow C_2 = \{5, 6\}$ è una classe chiusa irriducibile

Allora abbiamo $k = 2$ classi chiuse irriducibili e $T = \{3, 4\}$ stati transitori.

Quindi per ogni distribuzione stazionaria π si ha $\pi_3 = \pi_4 = 0$

Allora le distribuzioni stazionarie sono

$$\pi = \alpha_1(\pi_1, \pi_2, \underline{0}, \underline{0}, 0, 0) + \alpha_2(0, 0, \underline{0}, \underline{0}, \pi_5, \pi_6)$$

dove $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ e $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

(π_1, π_2) unica stazionaria per la catena ristretta a $C_1 = \{1,2\}$
quindi per la matrice di transizione $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

(π_5, π_6) unica stazionaria per la catena ristretta a $C_2 = \{5,6\}$
quindi per la matrice di transizione $\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

- $(\pi_1, \pi_2)\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2) \longrightarrow \begin{cases} \frac{\pi_1}{2} + \frac{\pi_2}{3} = \pi_1 \\ \frac{\pi_1}{2} + \frac{2\pi_2}{3} = \pi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{\pi_1}{2} = \frac{\pi_2}{3} \\ \frac{\pi_1}{2} = \frac{\pi_2}{3} \end{matrix}$

Quindi $\pi_1 = \frac{2}{3}\pi_2$ e, tenendo conto che $\pi_1 + \pi_2 = 1 \Rightarrow (\pi_1 = 1 - \pi_2 \mid \Rightarrow$

$\pi_1 = 1 - \pi_2 \quad \Rightarrow 1 - \pi_2 = \frac{2}{3}\pi_2 \Rightarrow 1 = \frac{5}{3}\pi_2 \Rightarrow \pi_2 = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow \pi_1 = \frac{2}{5}$

- $(\pi_5, \pi_6)\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (\pi_5, \pi_6) \longrightarrow \begin{cases} \frac{\pi_5}{4} + \frac{\pi_6}{2} = \pi_5 \\ \frac{3\pi_5}{4} + \frac{\pi_6}{2} = \pi_6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi_6}{2} = \frac{3}{4}\pi_5 \\ \frac{\pi_6}{2} = \frac{3}{4}\pi_5 \end{cases}$

Quindi $\pi_5 = \frac{2}{3}\pi_6$

$\pi_5 + \pi_6 = 1 \rightarrow \pi_5 = 1 - \pi_6 \quad \Rightarrow 1 - \pi_6 = \frac{2}{3}\pi_6 \Rightarrow 1 = \frac{5}{3}\pi_6 \Rightarrow \pi_6 = \frac{3}{5}$

$\pi_5 = \frac{2}{5}$

In conclusione:

$$\pi = \alpha_1\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0, 0, 0\right) + \alpha_2\left(0, 0, 0, 0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$$ per $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

$$\pi = \alpha\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0, 0, 0\right) + (1-\alpha)\left(0, 0, 0, 0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{5}\alpha, \frac{3}{5}\alpha, 0, 0, 0, 0\right) + \left(0, 0, 0, 0, (1-\alpha)\frac{2}{5}, (1-\alpha)\frac{3}{5}\right)$$

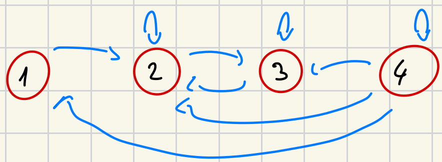
$$= \left(\frac{2}{5}\alpha, \frac{3}{5}\alpha, 0, 0, (1-\alpha)\frac{2}{5}\alpha, (1-\alpha)\frac{3}{5}\right) \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$$

ESERCIZIO 2

Sia $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una catena di Markov omogena su $E = \{1, 2, 3, 4\}$ con matrice

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

Trovare le distribuzioni stazionarie.



$1 \to 2$, ma non viceversa
$1 \to 3$ (2 passi) ma non viceversa
$\Rightarrow C_1 = \{2, 3\}$

$4 \to 2$, $4 \to 3$ ma non il viceversa
$\Rightarrow C_1 = \{2, 3\}$

$K = 1$ con $T = \{1, 4\}$ $\Rightarrow \pi = (\underline{0}, \pi_2, \pi_3, \underline{0})$

(π_2, π_3) stazionaria della matrice $\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$(\pi_2, \pi_3)\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (\pi_2, \pi_3) \to \begin{cases} \frac{\pi_2}{4} + \frac{2\pi_3}{3} = \pi_2 \\ \frac{3}{4}\pi_2 + \frac{\pi_3}{4} = \pi_3 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4}\pi_2 = \frac{2\pi_3}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{4}\pi_2 = \frac{2}{3}\pi_3$$

$+ \; \pi_2 + \pi_3 = 1 \Rightarrow \pi_3 = 1 - \pi_2$ $\qquad \Rightarrow \pi_3 = \frac{9}{8}\pi_2$

$$\Rightarrow 1 - \pi_2 = \frac{9}{8}\pi_2 \Rightarrow 1 = \frac{17}{8}\pi_2 \Rightarrow \pi_2 = \frac{8}{17}, \quad \pi_3 = \frac{9}{17}.$$

ESERCIZIO 3

Trovare le distribuzioni stazionarie per una catena di Markov su $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

Soluzione:

Si ha $E = T \cup C_1 \cup \ldots \cup C_k$

$C_1 = \{1, 2\}$, $C_2 = \{5\}$, $T = \{3,4\}$

le distribuzioni sono del tipo:

$$\pi = \alpha(\pi_1, \pi_2, 0, 0, 0) + (1-\alpha)(0,0,0,0,1)$$

(π_1, π_2) stazionaria di $\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$(\pi_1, \pi_2)\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \doteq (\pi_1, \pi_2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi_1}{4} + \frac{2\pi_2}{3} = \pi_1 \\ \frac{3\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{3} = \pi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{2}{3}\pi_2 = \frac{3}{4}\pi_1 \\ \frac{3}{4}\pi_1 = \frac{2}{3}\pi_2 \end{array}$$

$$\frac{2}{3}\pi_2 = \frac{3}{4}\pi_1 \Rightarrow \pi_2 = \frac{9}{8}\pi_1$$

$$\pi_2 = 1 - \pi_1 \Rightarrow 1 - \pi_1 = \frac{9}{8}\pi_1 \Leftrightarrow 1 = \frac{17}{8}\pi_1 \Leftrightarrow \pi_1 = \frac{8}{17}$$

$$\pi_2 = \frac{9}{17}$$

$$\Rightarrow \pi = \left(\frac{8\alpha}{17}, \frac{9\alpha}{17}, 0, 0, 1-\alpha\right) \text{ per } \alpha \in [0,1]$$

ESERCIZIO 4

Consideriamo una catena di Markov su $E=\{1,2,3,4,5,6\}$

$$P=\begin{array}{c c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6 \end{array}
\end{array}$$

1) Trovare le distribuzioni stazionarie.

Sia $E=T\cup C_1\cup\ldots\cup C_k$

$C_1=\{1,2\}$, $C_2=\{3,4\}$, $C_3=\{5\}$

$C_4=\{6\}$, $T=\emptyset$

$$\pi=\alpha_1(\pi_1,\pi_2,0,0,0,0)+\alpha_2(0,0,\pi_3,\pi_4,0,0)+\alpha_4(0,0,0,0,1,0)$$
$$+\alpha_5(0,0,0,0,0,1)$$

(π_1,π_2) stazionaria di $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow(\pi_1,\pi_2)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=(\pi_1,\pi_2)\Rightarrow\begin{cases}\pi_2=\pi_1\\ \pi_1=\pi_2\end{cases}\qquad \pi_1=1-\pi_2$$

$$\Rightarrow 1-\pi_2=\pi_2=\pi_2=\frac{1}{2}\qquad \pi_1=\frac{1}{2}$$

(π_3,π_4) stazionaria di $\begin{pmatrix}1/2&1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow(\pi_3,\pi_4)\begin{pmatrix}1/2&1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}=(\pi_3,\pi_4)\Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi_3}{2}+\frac{\pi_4}{2}=\pi_3\Rightarrow\frac{\pi_3}{2}=\frac{\pi_4}{2}\\ \frac{\pi_3}{2}+\frac{\pi_4}{2}=\pi_4\Rightarrow\frac{\pi_3}{2}=\frac{\pi_4}{2}\end{cases}$$

$$\pi_3=1-\pi_4\iff 1-\pi_4=\pi_4\iff \pi_4=\frac{1}{2}$$
$$\pi_3=\frac{1}{2}$$

$$\pi = \alpha_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0\right) + \alpha_2\left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right) + \alpha_3\left(0,0,0,0,1,0\right)$$

$$+ \alpha_4\left(0,0,0,0,0,1\right)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \geq 0$ e $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$

2) A partire dallo risposta alla domanda precedente, verificare che la distribuzione uniforme su E è (come deve essere) una distribuzione stazionaria

Si devono scegliere $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ con i vincoli indicati, per cui si ha

$$\pi = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha_1}{2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{3} = \alpha_2$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{6}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1 \text{ Ok}.$$