ESERCIZIO

Siano $q, r, \alpha, \beta \in (0,1)$. Consideriamo una catena di Markov omogenea su $E = \{1,2,3,4\}$

$$P = \begin{pmatrix} \alpha q & 0 & 1-\alpha & \alpha(1-q) \\ \beta r & \beta(1-r) & 1-\beta & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare la probabilità che la catena passi per lo stato 3 sapendo che la catena parte a 1 e da 2.

$S = \{3\}$, $D = \{1,2\}$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1-\alpha + \alpha q \lambda_1 \\ \lambda_2 = 1-\beta + \beta r \lambda_1 + \beta(1-r)\lambda_2 \end{cases} \iff \{ (1-\alpha q)\lambda_1 = 1-\alpha \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1-\alpha}{1-\alpha q}$$

$$(1-\beta(1-r))\lambda_2 = 1-\beta + \beta r \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha q}\right)$$

$$\lambda_2 = \frac{(1-\beta)(1-\alpha q) + \beta r(1-\alpha)}{1-\alpha q} \cdot \frac{1}{1-\beta(1-r)}$$

ESERCIZIO

Consideriamo una catena di Markov omogenea su $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 1-q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-r & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

1) Calcolare la probabilità di passaggio in $\{1,2\}$ partendo da 3 o da 4

2) Calcolare la probabilità di passaggio in $\{5,6\}$ partendo da 3 e da 4.

1) $S = \{1, 2\}$, $D_S = \{3,4\}$

$$\begin{cases} \lambda_3 = q + (1-q)\lambda_4 \\ \lambda_4 = (1-r)\lambda_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = q + (1-q)(1-r)\lambda_3 \\ \lambda_4 = (1-r)\lambda_3 \end{cases} \Rightarrow (1-(1-q)(1-r))\lambda_3 = q \Rightarrow \lambda_3 = \frac{q}{1-(1-q)(1-r)}$$

$$\lambda_4 = \frac{q(1-r)}{1-(1-q)(1-r)}$$

2) Simile a 1

TEMPI MEDI DI PASSAGGIO

T: stati transitori
T^c: stati ricorrenti

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n P(\tau = n | X_0 = i) \quad \forall i \in T \qquad \tau = \inf\{m \geq 0 : X_m \in T^c\}$$

$$= \mathbb{E}[\tau | X_0 = i] \qquad \forall i \in T$$

PROP: I valori $(\mu_i)_{i\in T}$ sono l'unica soluzione del sistema

$$\left\{ \mu_i = 1 + \sum_{j\in T} p_{ij}\mu_j \quad i \in T \right.$$

IMPORTANTE:

Il risultato enunciato può essere presentato anche nel caso in cui si ha
$$\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \in S\}$$
per qualche $S \subset E$ e la catena è irriducibile

Infatti: $S = T^c$ e $S^c = T$.

ESERCIZIO

Consideriamo una catena di Markov omogenea su $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare i tempi medi di assorbimento in $\{3, 4\}$ partendo da 1 e da 2.

Si ha $T = \{1, 2\}$ e quindi

$$\begin{cases} \mu_1 = 1 + \sum_{j=1}^{2} P_{1j}\, \mu_j \\ \mu_2 = 1 + \sum_{j=1}^{2} P_{2j}\, \mu_j \end{cases} \quad \forall i \in T$$

$$= \begin{cases} \mu_1 = 1 + \frac{\mu_1}{4} + \frac{\mu_2}{4} \\ \mu_2 = 1 + \frac{\mu_1}{4} + \frac{\mu_2}{4} \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{4}\mu_1 = 1 + \frac{\mu_2}{4} \\ \frac{3}{4}\mu_2 = 1 + \frac{\mu_1}{4} \end{cases} \iff \begin{matrix} \mu_1 = \mu_2 \\ \mu_1 = \frac{4 + \mu_2}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4 + \mu_2}{3} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \mu_2 = \frac{4 + \mu_2}{3} \iff \frac{2}{3}\mu_2 = \frac{4}{3}$$

$$\iff \mu_2 = 2$$
$$\mu_1 = 2$$

ESERCIZIO

Consideriamo una catena di Markov omogenea su $E = \{1,2,3,4\}$

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/e & 1-\frac{2}{e} & 1/e \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calcolare le probabilità di passagio in 3 partendo da 1 e da 2

2) Calcolare i tempi medi di passaggio in $\{3,4\}$.

1) $S = \{3\}$, $D_S = \{1,2\}$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lambda_1 \\ \lambda_2 = 1-\frac{2}{e} + \frac{1}{e}\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\lambda_1 = \frac{1}{3} \iff \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \frac{e-1}{\cancel{e}}\lambda_2 = \frac{e-2}{\cancel{e}} \iff \lambda_2 = \frac{e-2}{e-1} \end{cases}$$

2) $T = \{1,2\}$ $T^C = \{3,4\}$

$$\begin{cases} \mu_1 = 1 + \sum_{j=1}^{2} P_{1j}\mu_j \\ \mu_2 = 1 + \sum_{j=1}^{2} P_{2j}\mu_j \end{cases} \iff \begin{cases} \mu_1 = 1 + \frac{1}{3}\mu_1 \iff \frac{2}{3}\mu_1 = 1 \iff \mu_1 = \frac{3}{2} \\ \mu_2 = 1 + \frac{1}{e}\mu_2 \iff \frac{e-1}{e}\mu_2 = 1 \iff \mu_2 = \frac{e}{e-1} \end{cases}$$

ESERCIZIO

Consideriamo una catena di Markov omogenea su $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$q \in (0,1)$

1) Calcolare le probabilità di assorbimento partendo da ciascuno degli stati transitori.

$$S = \{6\}, \quad D_S = \{3, 4, 5\}$$

$$\left\{ \lambda_i = \sum_{j \in S} P_{ij} + \sum_{j \in D_S} P_{ij} \lambda_j \quad i \in D_S \right.$$

$$\begin{cases} \lambda_3 = \frac{\lambda_3}{2} + \frac{\lambda_4}{2} \\ \lambda_4 = \frac{\lambda_3}{3} + \frac{\lambda_5}{3} \\ \lambda_5 = q + (1-q)\lambda_4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\lambda_3}{2} = \frac{\lambda_4}{2} \Longleftrightarrow \lambda_3 = \lambda_4 \\ \lambda_4 = \frac{\lambda_4}{3} + \frac{1}{3} \Longleftrightarrow \frac{2}{3}\lambda_4 = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow \lambda_4 = \frac{1}{2} \\ q\lambda_5 = q \Longleftrightarrow \lambda_5 = 1 \end{cases}$$

$$(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = (1/2, 1/2, 1)$$

2) Calcolare i tempi medi di assorbimento nell'insieme degli stati ricorrenti partendo da ciascuno degli stati transitori

$$T = \{3, 4, 5\}, \quad T^c = \{1, 2, 6\}$$

$$\left\{ \mu_i = 1 + \sum_{j \in 3}^{5} P_{ij} \mu_j \quad \forall i \in T \right.$$

$$\begin{cases} \mu_3 = 1 + P_{33}\mu_3 + P_{34}\mu_4 + P_{35}\mu_5 \\ \mu_4 = 1 + P_{43}\mu_3 + P_{44}\mu_4 + P_{45}\mu_5 \\ \mu_5 = 1 + P_{53}\mu_3 + P_{54}\mu_4 + P_{35}\mu_5 \end{cases} = \begin{cases} \mu_3 = 1 + \frac{\mu_3}{2} + \frac{\mu_4}{2} \\ \mu_4 = 1 + \frac{\mu_3}{3} + \frac{\mu_5}{3} \\ \mu_5 = 1 + (1-q)\mu_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_4 = \mu_3 - 2 \\ \mu_4 = 1 + \frac{\mu_3}{3} + \frac{1}{3q} \\ \mu_5 = \frac{1}{q} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu_3 - 2 = 1 + \frac{\mu_3}{3} + \frac{1}{3q}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\mu_3 = 3 + \frac{1}{3q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\mu_3 = \frac{9q+1}{3q} \Rightarrow \begin{cases} \mu_3 = \frac{9q+1}{2q} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2q} \\ \mu_4 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2q} \\ \mu_5 = \frac{1}{q}. \end{cases}$$