

Apuntes de Óptica Física

Artur Carnicer e Ignasi Juvells
Universitat de Barcelona
Departament de Física Aplicada i Òptica

8 de enero de 2003

Índice General

1 Óptica Geométrica	7
1.1 Óptica Geométrica Paraxial	7
1.1.1 Postulados de la Óptica Geométrica	7
1.1.2 Principio de Fermat	7
1.1.3 Conceptos. Convenio de signos	8
1.1.4 El Invariante de Abbe	10
1.1.5 Aumentos. Planos focales y principales	10
1.1.6 Ley de las lentes	11
1.1.7 Sistemas compuestos	12
1.1.8 Lentes	13
1.1.9 Formación de imágenes en una lente	13
1.1.10 Formación de imágenes en un espejo esférico	13
1.1.11 Limitaciones de luz y campo en sistemas ópticos	13
1.2 Instrumentos de proyección	18
1.2.1 Introducción a los instrumentos de proyección	18
1.2.2 El ojo humano	18
1.2.3 La cámara fotográfica	19
1.2.4 Objetivos fotográficos	20
1.2.5 Sistemas de iluminación de proyectores	21
1.3 Telescopios	22
1.3.1 Introducción	22
1.3.2 Anteojo astronómico	23
1.3.3 Anteojo de Galileo	24
1.3.4 Anteojo terrestre	24
1.3.5 Telescopios de espejos	26
1.4 Microscopios	26
1.4.1 La lupa. El objetivo del microscopio	26
1.4.2 El microscopio compuesto	27
2 Óptica Electromagnética	31
2.1 Ondas electromagnéticas	31
2.1.1 Ecuaciones de Maxwell	31
2.1.2 La ecuación de ondas. Soluciones	32
2.1.3 Energía. Vector de Poynting	34
2.2 Polarización	36

2.2.1	La elipse de polarización	36
2.2.2	Polarización: casos particulares	37
2.2.3	Polarizadores	37
2.3	Propagación, reflexión y refracción	39
2.3.1	Deducción de las leyes de la Óptica Geométrica	39
2.3.2	Fórmulas de Fresnel	40
2.3.3	Ánálisis de los coeficientes de transmisión y reflexión	42
2.3.4	Factores de transmisión y reflexión en intensidad	44
2.3.5	Estudio de la Reflexión Total	46
2.4	Óptica de medios conductores	48
2.4.1	Propagación en medios conductores	48
2.5	Óptica de medios anisótropos	50
2.5.1	Nomenclatura	50
2.5.2	Ecuaciones de Maxwell. Soluciones	50
2.5.3	Medios uniaxiales	52
2.5.4	Láminas retardadoras	54
3	Interferencias	57
3.1	Coherencia	57
3.1.1	Coherencia temporal y monocromaticidad	57
3.1.2	Condiciones para obtener imágenes de interferencia estables	58
3.2	Interferencias de Young	60
3.2.1	Descripción del experimento	60
3.2.2	Dispositivos por obtener franjas de Young	62
3.2.3	Coherencia espacial	63
3.3	Dispositivos interferométricos	63
3.3.1	Interferencias en láminas dieléctricas	63
3.3.2	Láminas antirreflejantes	67
3.3.3	El interferómetro de Fabry-Perot	69
3.3.4	Filtros interferenciales	71
3.3.5	Interferómetros de Michelson y de Mach-Zehnder	71
4	Difracción	75
4.1	Teoría escalar	75
4.1.1	Introducción a la Teoría Escalar de la Difracción	75
4.1.2	Ondas escalares. El teorema de Green	75
4.1.3	Teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff	77
4.1.4	Aplicación del teorema de Helmholtz-Kirchhoff a la difracción	77
4.2	Aproximaciones de la Teoría Escalar	80
4.2.1	Fórmula de exacta	80
4.2.2	Difracción de Fresnel	80
4.2.3	Difracción de Fraunhofer	81
4.3	Estudio de casos particulares en aproximación de Fraunhofer	82
4.3.1	Onda plana a través de un objeto rectangular	82
4.3.2	Onda plana a través de un objeto circular	82

4.3.3 Onda plana a través de una estructura periódica unidimensional	84
--	----

Capítulo 1

Óptica Geométrica

1.1 Óptica Geométrica Paraxial

1.1.1 Postulados de la Óptica Geométrica

Definimos el *índice de refracción* de un medio n como el cociente $n = c/v$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío y v es la velocidad de la luz en el medio considerado. Los cinco postulados de la Óptica Geométrica se enuncian así:

1. Las trayectorias en los medios homogéneos e isótropos son rectilíneas.
2. Sea una superficie que separa dos medios de índices n y n' . El rayo incidente, el reflejado, el transmitido o refractado y la dirección normal a la superficie en el punto de incidencia están en el mismo plano (plano de incidencia).
3. Sean ϵ , ϵ' y ϵ'' los ángulos que forman el rayo incidente, el refractado y el reflejado con la normal, respectivamente. El rayo incidente y el transmitido verifican la ley de Snell: $n \sin(\epsilon) = n' \sin(\epsilon')$.
4. El rayo incidente y el reflejado verifican la ley de la reflexión: $\epsilon = \epsilon''$.
5. Las trayectorias de la luz a través de diferentes medios son reversibles.

1.1.2 Principio de Fermat

Sea un medio homogéneo e isótropo de índice n . La luz viaja entre los puntos A y B, siguiendo una trayectoria rectilínea. Definimos el *camino óptico* Δ_{AB} como el producto entre el índice de refracción y la distancia s que recorre la luz entre los dos puntos, $\Delta_{AB} = ns_{AB}$. Si la luz atraviesa diferentes medios, el camino óptico será

$$\Delta = \sum n_i s_i. \quad (1.1)$$

Si el medio es heterogéneo y el índice de refracción varía de punto a punto, la definición de camino óptico se convierte en la siguiente integral

$$\Delta = \int_c n ds \quad (1.2)$$

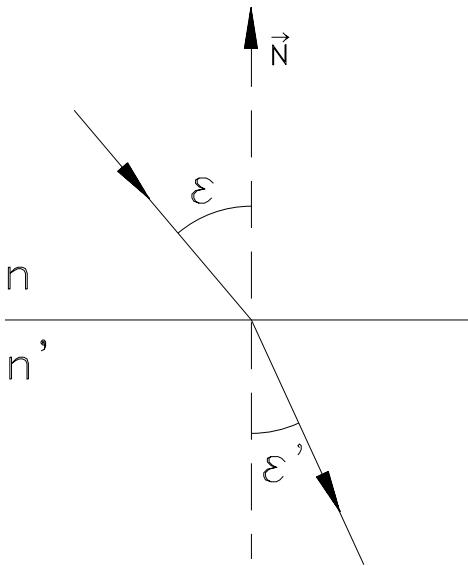


Figura 1.1: Ley de Snell

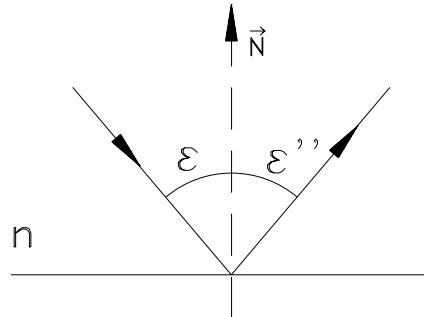


Figura 1.2: Ley de la reflexión

El principio de Fermat dice que para ir de A a B, la luz sigue un camino extremal (es decir, un camino máximo o mínimo):

$$\delta\Delta = \delta \int_c n ds = 0. \quad (1.3)$$

Teorema de Malus-Dupin

Si sobre cada rayo que sale de un foco emisor de luz tomamos caminos ópticos iguales, los puntos que limitan estos caminos generan una superficie que es normal a todos los rayos. Esta superficie se denomina *frente de onda*.

1.1.3 Conceptos. Convenio de signos

Sistema óptico

Denominamos *sistema óptico* a un conjunto de superficies que separan medios con índices de refracción diferentes. Si las superficies son de revolución, y sus centros están alineados, la recta que los une se denomina *eje óptico*. El punto emisor de donde salen los rayos se denomina *objeto*; el punto donde se juntan los rayos, una vez pasado el sistema óptico es la *imagen*. Si los rayos pasan físicamente por un punto se denomina *real*. El punto es *virtual* si llegan o salen las prolongaciones de los rayos. El conjunto de puntos objeto forma el *espacio objeto* mientras que el conjunto de puntos imagen conforma el *espacio imagen*.

Sistema óptico perfecto

Un sistema óptico es perfecto si se puede establecer una relación de semejanza entre todo el espacio objeto y todo el espacio imagen. Se puede demostrar que esta condición no es físicamente viable. Podemos determinar unas nuevas condiciones menos restrictivas (condiciones de Maxwell):

1. A un plano normal en el eje óptico en el espacio objeto le corresponde otro plano normal al eje óptico en el espacio imagen.
2. Todos los rayos que entran en el sistema partiendo de un punto pasan a la salida por otro punto (real o virtual).
3. Toda figura contenida en un plano perpendicular al eje, se representa como una figura semejante contenida también en un plano perpendicular al eje, en el espacio imagen.

Definición de Condición de stigmatismo: Un sistema se comporta stigmáticamente entre dos puntos cuando todos los rayos que salen de un punto objeto van a parar a un punto imagen (real o virtual).

Convenio de signos

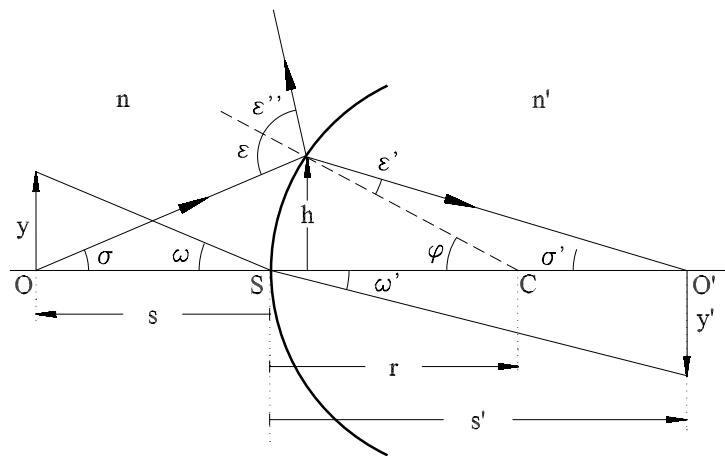


Figura 1.3: Convenio de signos. Variables geométricas

		Valor positivo	Valor negativo
Distancias a lo largo del eje	s, s'	Derecha de la superficie	Izquierda de la superficie
Radios de curvatura	r	Centro a la derecha de la superficie	Centro a la izquierda de la superficie
Distancias normales al eje	y, y', h	Sobre el eje óptico	Bajo el eje óptico
Ángulos de incidencia, refracción y reflexión	$\epsilon, \epsilon', \epsilon'', \omega, \omega'$	Sentido horario (girando hacia la normal)	Sentido antihorario (girando hacia la normal)
Ángulos con el eje	σ, σ', φ	Sentido antihorario (girando hacia el eje óptico)	Sentido horario (girando hacia el eje óptico)

Tabla 1.1: Convenio de signos. Norma europea

Óptica paraxial. Definición

Muchas de las situaciones que se estudian en la Óptica Geométrica presentan como particularidad que los ángulos con los cuales se trabaja son pequeños. Cuando se trabaja en estas condiciones se habla de *Óptica de primer grado* o bien *Óptica Paraxial*. En estos casos, la aproximación del seno o la tangente

del ángulo por su arco es válida: $\sin(\epsilon) \approx \epsilon$, $\tan(\epsilon) \approx \epsilon$. En estas condiciones, la ley de la refracción se escribe $n\epsilon = n'\epsilon'$.

1.1.4 El Invariante de Abbe

El *invariante de Abbe* da la posición de la imagen a partir de la posición de un punto objeto (emisor) cuando se produce una refracción a través de una superficie esférica de radio r que separa dos medios de índices n y n' ; s y s' son las distancias del objeto a la superficie y de esta superficie a la imagen, respectivamente. La fórmula del invariante de Abbe indica que cualquier par de puntos objeto-imagen verifica la relación de stigmatismo. Esta relación es válida en condiciones paraxiales.

$$n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) = n' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right). \quad (1.4)$$

Esta fórmula se puede aplicar repetidamente para varias superficies aplicando la fórmula de paso:

$$s_{i+1} = s'_i - d_{i,i+1}, \quad (1.5)$$

que relaciona las distancias imagen y objeto de superficies consecutivas.

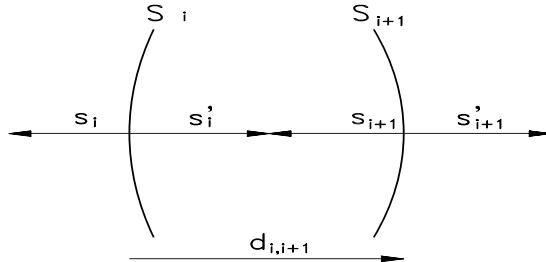


Figura 1.4: Fórmula de paso entre dos superficies

Si la superficie es un espejo, entonces $n' = -n$ y la fórmula se escribe

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}. \quad (1.6)$$

1.1.5 Aumentos. Planos focales y principales

Aumento lateral

Se define el aumento como la relación de tamaño entre la imagen y el objeto: $\beta' = y'/y$. Para un sistema con k superficies que separan $k+1$ medios, el aumento se puede calcular como

$$\beta' = \frac{n_1}{n_{k+1}} \prod_{i=1}^k \frac{s'_i}{s_i} \quad (1.7)$$

donde s_i y s'_i son las distancias objeto e imagen parciales referidas a la superficie i .

Planos focales y planos principales

1. El punto del eje óptico donde se cortan los rayos que provienen del infinito y que son paralelos al eje óptico se denomina *foco imagen*. De forma análoga, el punto del eje óptico que tiene por imagen el infinito se denomina *foco objeto*.
2. El plano perpendicular al eje óptico que contiene el foco o punto focal se denomina *plano focal*. Los rayos que provienen del infinito y que entran en el sistema óptico formando un cierto ángulo con el eje óptico se cruzan en un punto del plano focal.
3. Denominamos *planos principales* a dos planos conjugados perpendiculares al eje con aumento lateral $\beta' = 1$ entre ellos. El punto de intersección entre las prolongaciones del rayo procedente del infinito, y que es paralelo al eje óptico, y del rayo que a la salida va a buscar el foco, marca la posición del plano principal imagen H' . El plano principal objeto H se encuentra de forma análoga, considerando un rayo que pasa por el foco objeto. El conocimiento de los planos principales y focales nos da toda la información necesaria para el estudio de un sistema óptico en primer orden con independencia de su complejidad.
4. La distancia entre los planos principales y focales se denomina *distancia focal* o simplemente *focal*. Las focales objeto y imagen verifican la relación

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}. \quad (1.8)$$

5. En una superficie esférica, los planos principales H y H' se confunden con propia superficie esférica (fijémonos que estamos en aproximación paraxial). Las focales se pueden calcular utilizando el invariante de Abbe:

$$f' = r \frac{n'}{n' - n} \quad f = -r \frac{n}{n' - n} \quad (1.9)$$

6. El inverso de la distancia focal imagen se denomina *potencia* de un sistema óptico $\phi = 1/f'$ y se mide en dioptrías ($1 D = 1 m^{-1}$).

1.1.6 Ley de las lentes

En un sistema óptico definido por las posiciones de los planos principales y focales, se verifican las relaciones siguientes

$$zz' = ff' \quad -\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'}{f'}, \quad (1.10)$$

donde z es la posición del objeto referida al foco objeto y z' es la posición de la imagen referida al foco imagen. Si los índices extremos son iguales, caso habitual en las lentes y los instrumentos ópticos, $f = -f'$,

$$zz' = -f'^2 \quad -\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}. \quad (1.11)$$

En este caso, el aumento lateral es $\beta' = s'/s$.

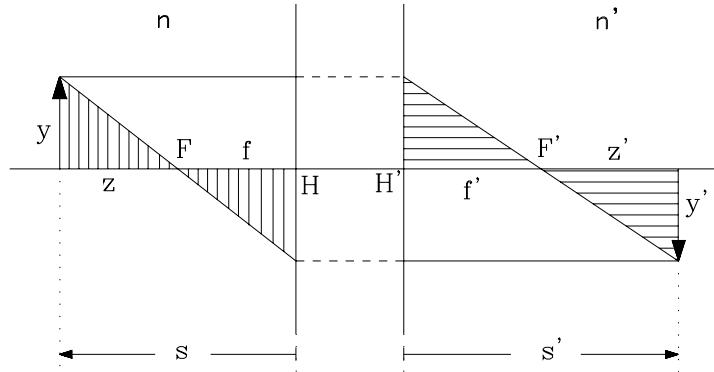


Figura 1.5: Ley de las lentes

1.1.7 Sistemas compuestos

Tenemos dos sistemas ópticos bien definidos por sus planos principales y focales, dispuestos según se indica en la figura 1.6. Se puede demostrar que es posible determinar un único sistema (*sistema compuesto*) de planos principales y focales conjuntos, calculados a partir de los de cada sistema. Por lo general, cualquier sistema óptico, independientemente de su complejidad, puede ser reducido a un único par de planos principales y focales. Esto supone una notable simplificación en el estudio paraxial de sistemas ópticos complejos, es decir, formados por muchas lentes o espejos.

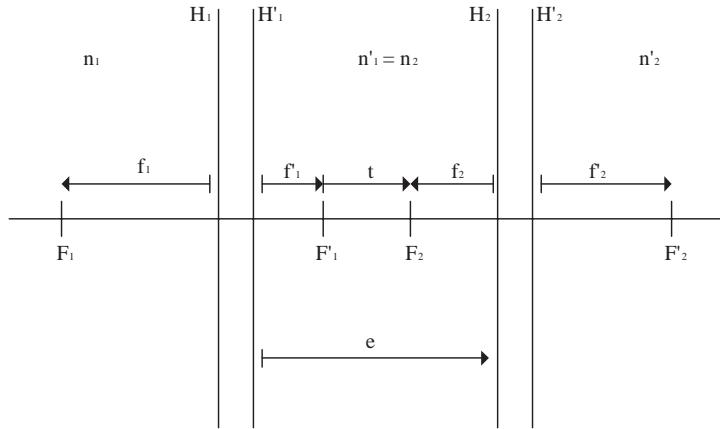


Figura 1.6: Sistemas compuestos

A continuación se indican las fórmulas que permiten obtener la focal conjunta del sistema compuesto, así como las posiciones de sus planos principales y focales:

Caso general, n_1, n_2, n'_2	$n_1 = n_2 = n'_2$
$f' = -\frac{f'_1 f'_2}{e - f'_1 + f_2}$	$f' = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2 - e}$
$H_1 H = \frac{e f_1}{e - f'_1 + f_2}$	$H_1 H = \frac{e f'_1}{f'_1 + f'_2 - e}$
$H'_2 H' = \frac{e f'_2}{e - f'_1 + f_2}$	$H'_2 H' = -\frac{e f'_2}{f'_1 + f'_2 - e}$

Tabla 1.2: Fórmulas de acoplamiento de sistemas

1.1.8 Lentes

Las lentes son la base de los instrumentos ópticos. Están formadas por dos superficies refractivas (que aquí tomaremos esféricas de radios r_1 y r_2), separadas una distancia e , que encierran un medio de índice n . Podemos estudiar su funcionamiento considerándolas como sistemas compuestos, puesto que a cada superficie esférica le podemos asignar sus planos principales y focales asociados. Aplicando las fórmulas de los sistemas compuestos podemos determinar estos valores. Sean n_1 y n'_2 los índices de los medios inicial y final y n , el índice del material del cual está hecha la lente:

Caso general, n_1 , n , n'_2 diferentes	Índices extremos aire $n_1 = n'_2 = 1$
$\frac{1}{f'} = \frac{n-n_1}{n'_2} \frac{1}{r_1} + \frac{n'_2-n}{n'_2} \frac{1}{r_2} + \frac{(n-n_1)(n-n'_2)}{nn'_2} \frac{e}{r_1r_2}$	$\frac{1}{f'} = (n-1) \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] + \frac{(n-1)^2}{n} \frac{e}{r_1r_2}$
$H_1H = -\frac{en_1r_1/(n-n_1)}{e-nr_1/(n-n_1)-nr_2/(n'_2-n)}$	$H_1H = \frac{er_1}{n(r_1-r_2)-e(n-1)}$
$H'_2H' = \frac{en'_2r_2/(n'_2-n)}{e-nr_1/(n-n_1)-nr_2/(n'_2-n)}$	$H'_2H' = \frac{er_2}{n(r_1-r_2)-e(n-1)}$

Tabla 1.3: Fórmulas de diseño de lentes

Lentes delgadas

Si el grosor de la lente es pequeño frente a los radios de curvatura y $n_1 = n'_2 = 1$, se verifica que

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] \quad H_1H = 0 \quad H'_2H' = 0. \quad (1.12)$$

1.1.9 Formación de imágenes en una lente

Fórmula de formación de imágenes en las lentes (índices extremos iguales): $-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}$. Ver figuras 1.7 a 1.14.

1.1.10 Formación de imágenes en un espejo esférico

Fórmula de formación de imágenes en espejos esféricos: $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f'}$. Ver figuras 1.15 a 1.22.

1.1.11 Limitaciones de luz y campo en sistemas ópticos

- *Diafragma de apertura.* Dado un sistema óptico, el elemento que limita la cantidad de luz que atraviesa el sistema (montura de lente, diafragma intercalado, ...) se denomina *diafragma de apertura*. Su imagen en el espacio objeto que indica la medida de la apertura por donde penetra la luz, recibe el nombre de *pupila de entrada*. La imagen del diafragma de apertura en el espacio imagen que indica la medida de la apertura por donde sale la luz, recibe el nombre de *pupila de salida*.
- *Diafragma de campo.* Dado un sistema óptico, el elemento que limita el tamaño del objeto se denomina *diafragma de campo*. Su imagen en el espacio objeto recibe el nombre de *lucarna de entrada*. La imagen del diafragma de campo en el espacio imagen recibe el nombre de *lucarna de salida*.

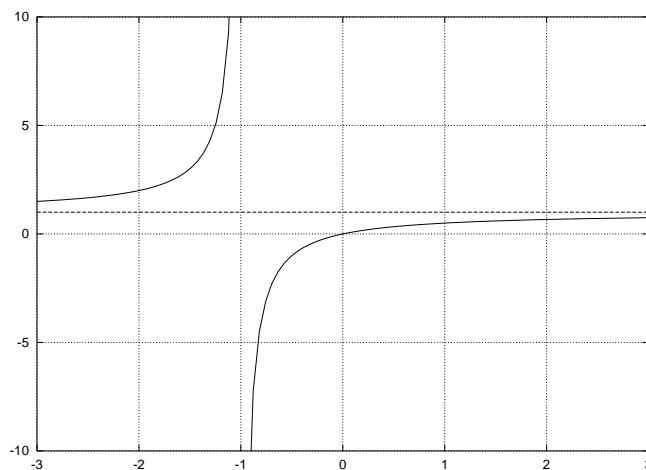
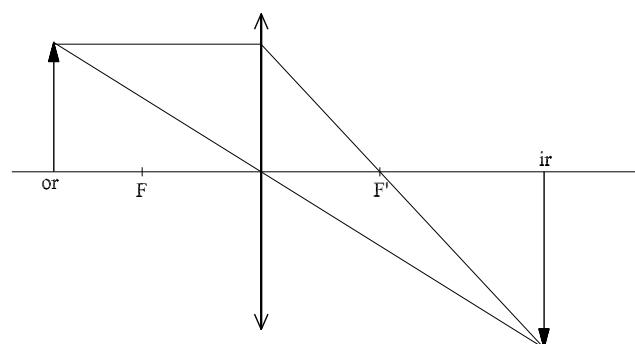
Figura 1.7: Gráfica $s'(s)$ para una lente convergente de $f' = 1$ m

Figura 1.8: Lente convergente. Objeto real e imagen real

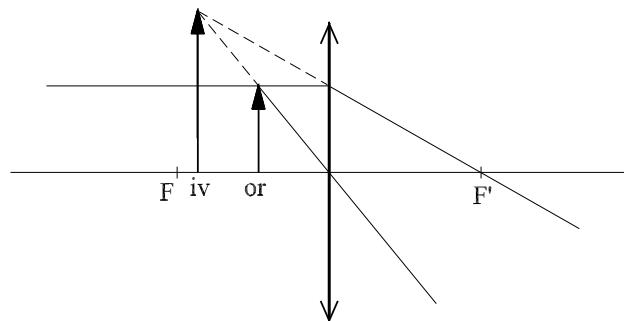


Figura 1.9: Lente convergente. Objeto real e imagen virtual

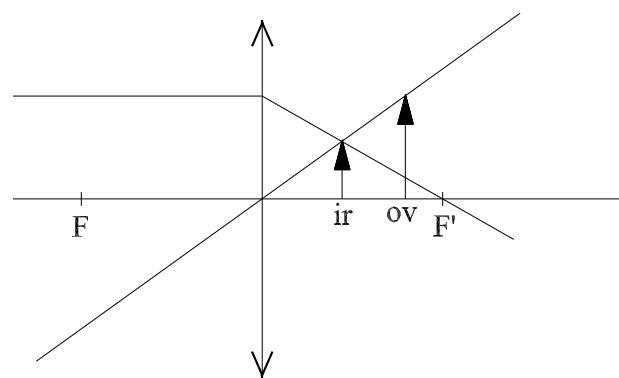


Figura 1.10: Lente convergente. Objeto virtual e imagen real

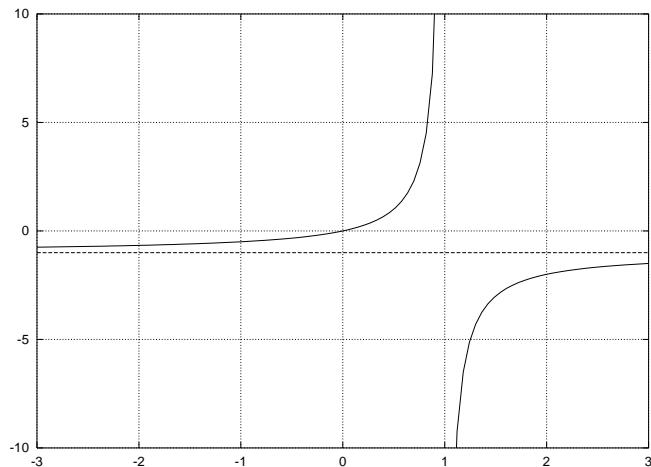
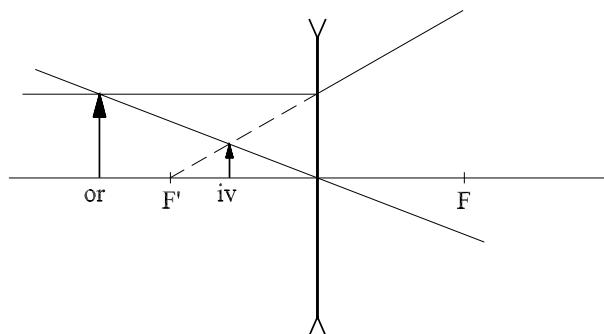
Figura 1.11: Gráfica $s'(s)$ para una lente divergente de $f' = -1$ m

Figura 1.12: Lente divergente. Objeto real e imagen virtual

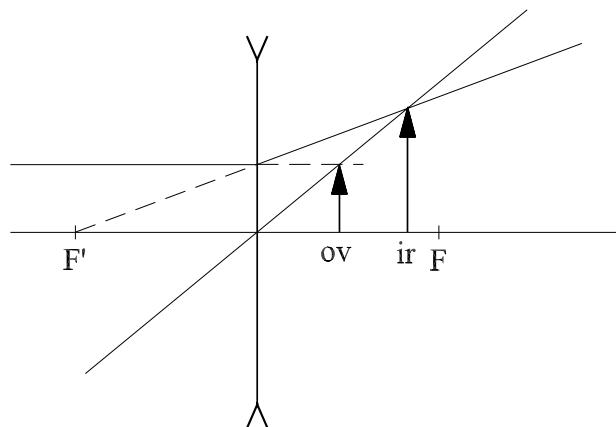


Figura 1.13: Lente divergente. Objeto virtual e imagen real

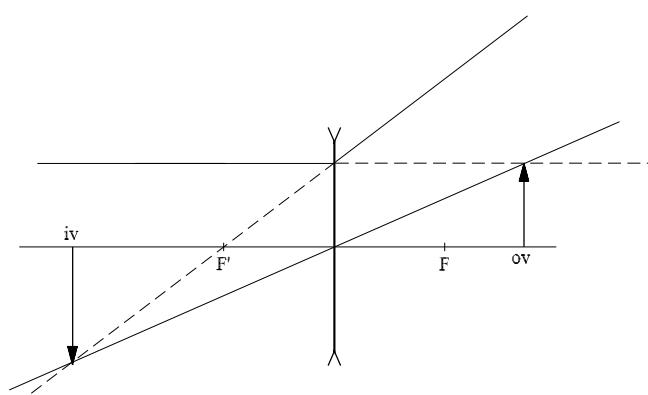


Figura 1.14: Lente divergente. Objeto virtual e imagen virtual

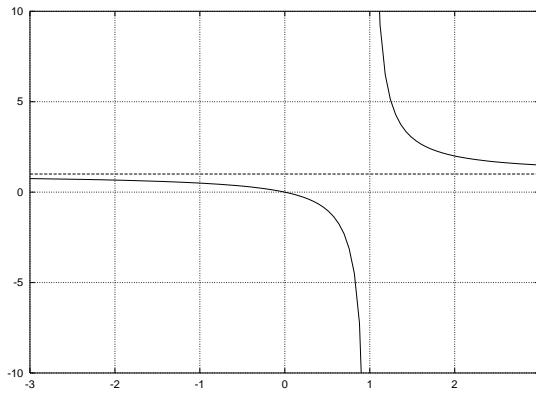


Figura 1.15: Gráfica $s'(s)$ para un espejo esférico convexo de $f' = 1$ m

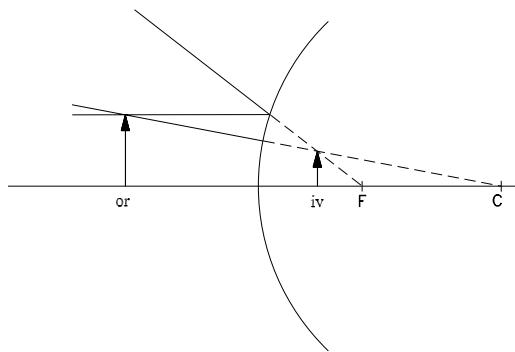


Figura 1.16: Espejo esférico convexo. Objeto real e imagen virtual

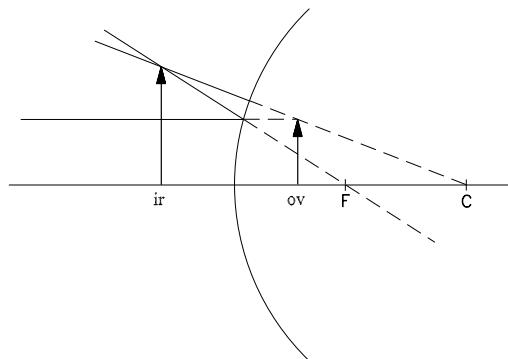


Figura 1.17: Espejo esférico convexo. Objeto virtual e imagen real

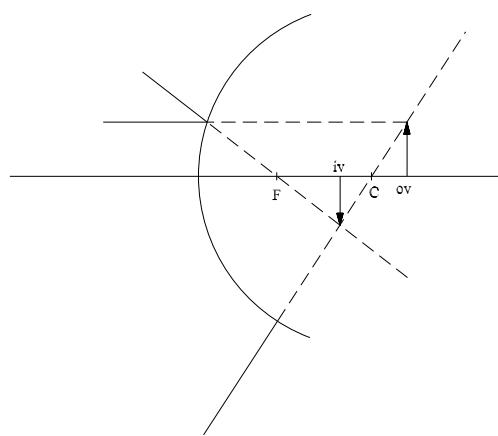


Figura 1.18: Espejo esférico convexo. Objeto virtual e imagen virtual

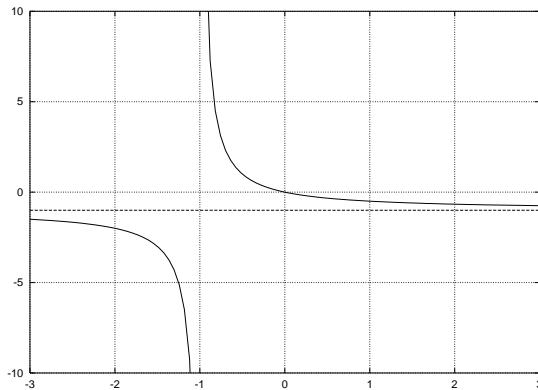
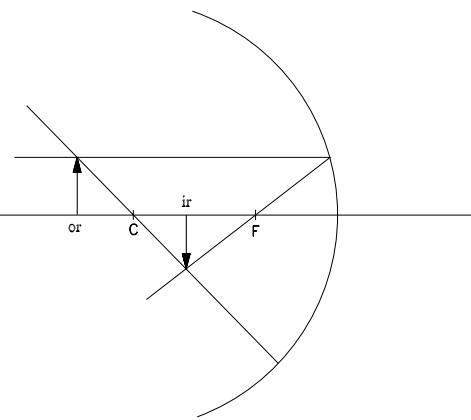
Figura 1.19: Gráfica $s'(s)$ para un espejo esférico cóncavo de $f' = -1$ m

Figura 1.20: Espejo esférico cóncavo. Objeto real e imagen real

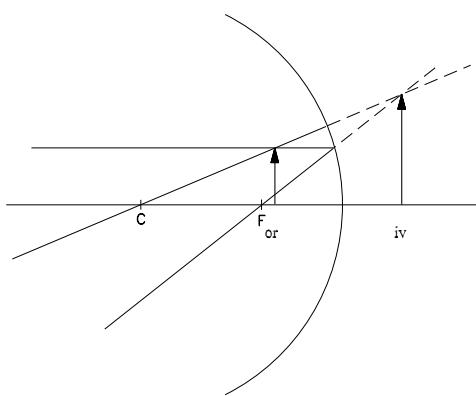


Figura 1.21: Espejo esférico cóncavo. Objeto real e imagen virtual

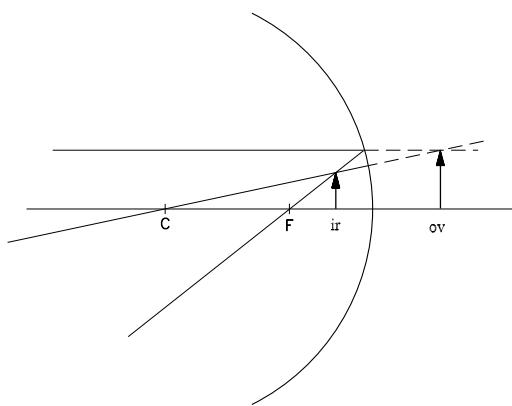


Figura 1.22: Espejo esférico cóncavo. Objeto virtual e imagen real

1.2 Instrumentos de proyección

1.2.1 Introducción a los instrumentos de proyección

Los instrumentos de proyección están diseñados para formar la imagen de un objeto sobre un plano de referencia. Normalmente están constituidos por un sistema convergente, de manera que se obtiene una imagen real a partir de un objeto también real. La física asociada a este problema puede ser explicada a partir de la fórmula de formación de imagen:

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}, \quad (1.13)$$

donde s y s' son las distancias entre el sistema óptico y el objeto y el sistema óptico y la imagen, respectivamente; f' es la distancia focal del sistema. El aumento geométrico β' es la relación entre distancias s' y s :

$$\beta' = \frac{s'}{s}. \quad (1.14)$$

El aumento es negativo en los sistemas proyectores (es decir, la imagen obtenida está invertida). Si $|\beta'| < 1$, la imagen es más pequeña que el objeto mientras que si $|\beta'| > 1$ la imagen es más grande que el objeto. Por ejemplo, habitualmente las cámaras fotográficas proyectan un objeto en una imagen que debe tener las dimensiones del negativo fotográfico. Esto corresponde al caso $|\beta'| < 1$. A diferencia de esto, en un proyector de diapositivas lo que interesa es ver la imagen ampliada de una diapositiva sobre una pantalla, y por lo tanto $|\beta'| > 1$.

1.2.2 El ojo humano

El estudio del ojo humano desde el punto de vista de los instrumentos ópticos tiene un interés doble. Por una parte, se trata de un instrumento de proyección. Por otro lado, el diseño de algunos aparatos, como los telescopios y los microscopios, debe realizarse teniendo en cuenta el funcionamiento del ojo. Destaquemos sus partes más importantes (véase la figura 1.23):

- *El cristalino.* Es una lente convergente de focal variable. La distancia s' está fijada, mientras que el ojo enfoca a diferentes distancias. Recuérdese que debe verificarse la ley de las lentes, $-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}$. Este fenómeno se denomina *acomodación*; una persona puede ver nítidamente desde el infinito hasta un punto próximo situado, por término medio, a 25 cm del ojo.
- *La retina y la fóvea.* La retina es la parte del ojo donde se forma la imagen. La retina está llena de células nerviosas sensibles a la luz que envían la información de la señal luminosa hacia el cerebro. La zona de la retina donde la imagen se forma con mayor nitidez se denomina *fóvea*.
- *El iris.* Se comporta como un diafragma. Se cierra cuando hay un exceso de luz y se abre cuando las condiciones de luz son deficientes.
- Un ojo *miope* es aquel que enfoca la imagen del infinito en un plano situado antes de la retina. Este defecto visual se corrige con el uso de lentes divergentes. Si la imagen del infinito se forma detrás de la retina, el ojo es *hipermétrope*. Para corregir este defecto se utilizan lentes convergentes.

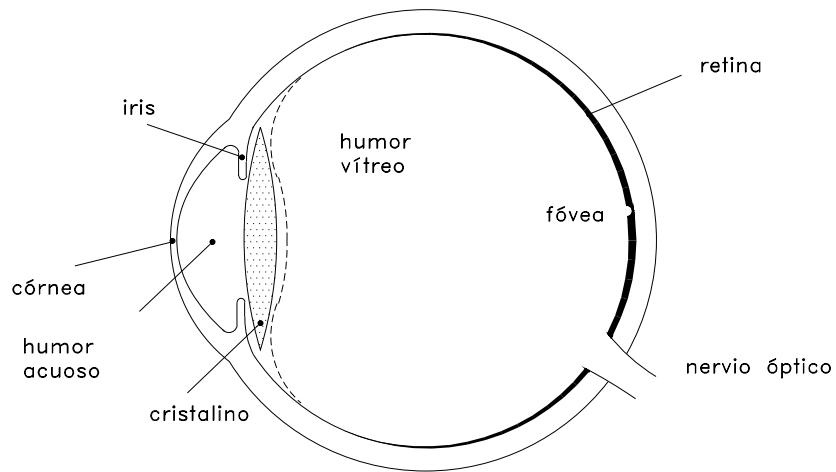


Figura 1.23: Esquema del ojo humano

1.2.3 La cámara fotográfica

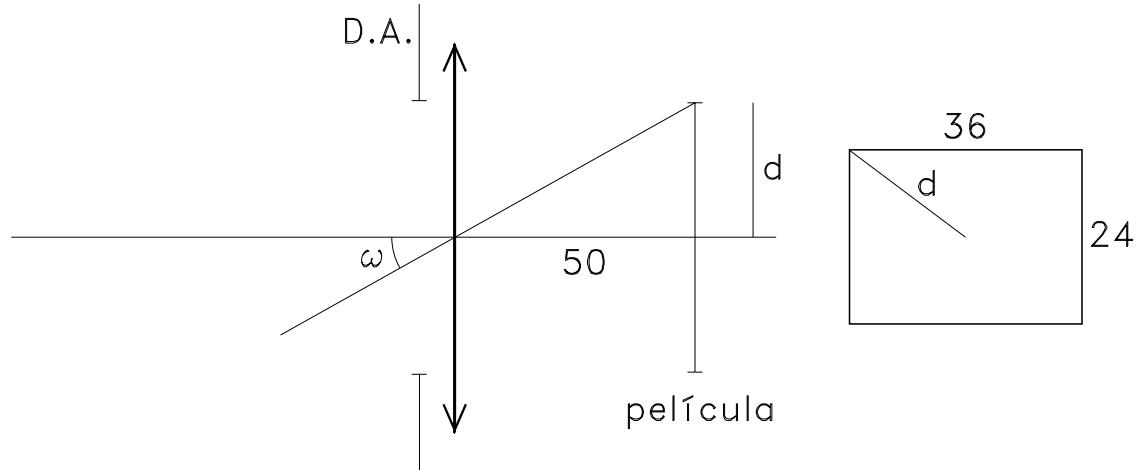


Figura 1.24: Esquema de la cámara fotográfica

Desde el punto de vista óptico, la cámara fotográfica es muy parecido al ojo. Consiste en un sistema móvil de lentes convergentes (objetivo). En el plano donde se forma la imagen, se coloca la película. La posición de este plano está fijada. La cámara enfoca un objeto situado a una cierta distancia s del mismo; modificando la posición de la lente, se modifica la distancia s' , de manera que se verifique la ley de formación de imágenes. $-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$, haciendo coincidir el plano de formación de imagen con la posición del plano que contiene la película.

El objetivo incorpora un diafragma (pupila de entrada) que regula la cantidad de luz que penetra en el sistema. El máximo ángulo de campo ω que puede entrar en el sistema está condicionado por las dimensiones del negativo (24 x 36 mm para película estándar) y por la distancia objetivo-película.

La *apertura relativa* se define como el cociente entre el diámetro de la pupila de entrada y la focal del sistema, y es una medida de la cantidad de luz que llega a la película. Por otra parte, se define el *número*

de diafragma N como el valor inverso de la apertura relativa $N = f'/\phi_{PE}$. Los valores de N están estandarizados (2, 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16, 22). Estos valores siguen una progresión geométrica de razón $\sqrt{2}$. De esta manera, al aumentar N en un valor, la cantidad de luz se reduce a la mitad.

En condiciones paraxiales, la imagen de un punto es un punto. Sin embargo, la película fotográfica está constituida de tal modo que al incidir luz sobre un punto de la película, se registra en el negativo una mancha de dimensiones finitas. Esta zona se denomina *grano de la película*. Las películas más sensibles (es decir, aquellas que necesitan menos luz para grabar una escena) presentan menos definición (el tamaño del grano es más grande). Por otra parte, las películas de más definición requieren buenas condiciones de luz por trabajar adecuadamente. El hecho que las películas presenten una resolución limitada se traduce en los fenómenos de la *profundidad de foco* y la *profundidad de campo*.

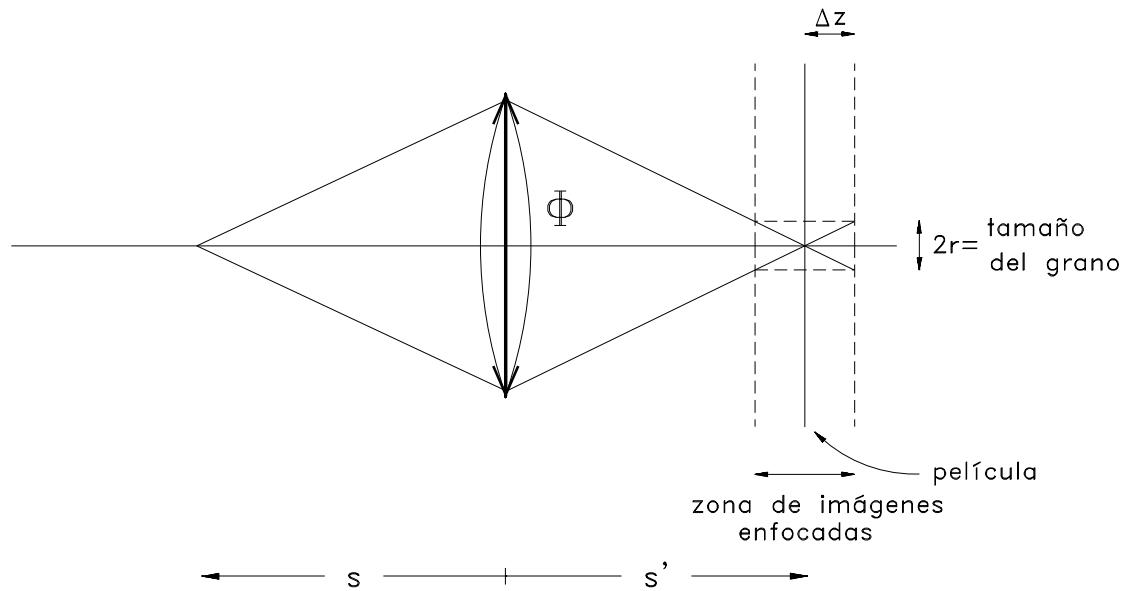


Figura 1.25: Concepto de profundidad de foco

Un objeto situado a distancia s delante de una lente de focal f' forma su imagen a distancia s' . Sea $2r$ el diámetro del grano de la película, supuesto circular. Según resulta de la figura 1.25, el plano de la película podría estar situar en cualquier sitio dentro la ‘zona de imágenes enfocadas’ ($2\Delta z'$). Si enfocamos un objeto al infinito, se verifica $\Delta z' = 2rN$. Por lo tanto, cuanto más cerrado esté el objetivo (N más grande), más aumentará la profundidad de foco.

Este concepto puede ser trasladado al espacio objeto: al fijar la distancia s moviendo el objetivo aseguramos que en el plano a distancia s' de la lente se forma imagen siguiendo la fórmula de las lentes. Ahora bien, todos los planos en un entorno del plano que se encuentra a distancia s de la lente también quedarán enfocados a consecuencia de las dimensiones finitas del grano de la película. Este fenómeno se denomina *profundidad de campo*.

1.2.4 Objetivos fotográficos

De la figura 1.24 se deduce que el ángulo máximo de campo con el que puede penetrar la luz en la cámara fotográfica está condicionado por el tamaño de la película fotográfica y por la distancia imagen s' lente-película. Si interesa fotografiar áreas muy extensas, el ángulo de campo máximo debe ser muy

grande. Para que pase esto, la distancia focal del objetivo tiene que ser pequeña. Estos dispositivos se denominan *gran angulares*, trabajan con ángulos grandes, y por lo tanto, han de estar muy bien corregidos de aberraciones (distorsión, coma, astigmatismo).

Por otra parte, si fotografiamos con detalle un objeto lejano, el ángulo máximo de campo es pequeño. Esto implica que la distancia focal del objetivo tiene que ser grande por poder resolver el objeto. Existen problemas prácticos para utilizar lentes de focales muy grandes. Por ejemplo, utilizar una lente de 500 mm, supone que entre la lente del objetivo y el negativo debe haber una distancia de unos 50 cm.

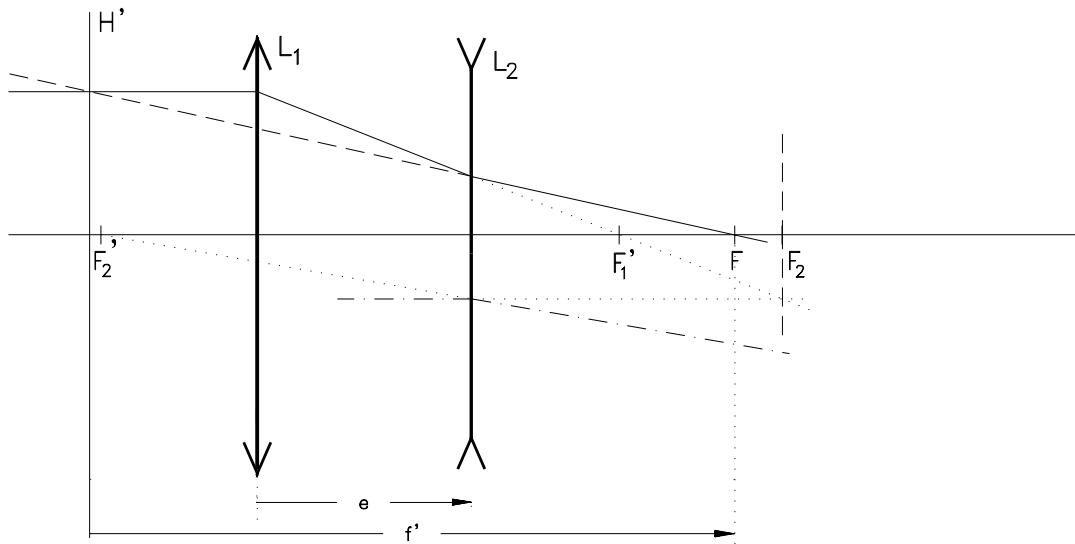


Figura 1.26: Sistema teleobjetivo . Trazado de rayos y posición del plano principal y focal

Para construir sistemas compactos, se utilizan los *teleobjetivos*, que consisten en una lente convergente y otra divergente separadas una distancia e . A partir del trazado de rayos, tal y como se indica en la figura 1.26, se puede ver que el plano principal imagen se aleja y la distancia focal se hace grande. Esto se consigue, con dimensiones razonables de la cámara. Recuérdese que la focal conjunta de un sistema de dos lentes se calcula a partir de la relación

$$f' = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2 - e} \quad (1.15)$$

Por lo tanto, con dos lentes, una convergente y el otra divergente, se puede obtener un rango de focales modificando la distancia e . El *zoom* es un teleobjetivo especial donde la distancia e es ajustable por el usuario. De este modo se consigue una variación continua de la focal y, en consecuencia, el fotógrafo puede encuadrar la escena de la forma más adecuada.

1.2.5 Sistemas de iluminación de proyectores

Los proyectores constan de un objetivo (sistema de lentes convergente), que proyecta una transparencia sobre una pantalla. Normalmente interesa que el aumento lateral sea grande. El problema en los proyectores es conseguir que la transparencia esté uniformemente iluminada.

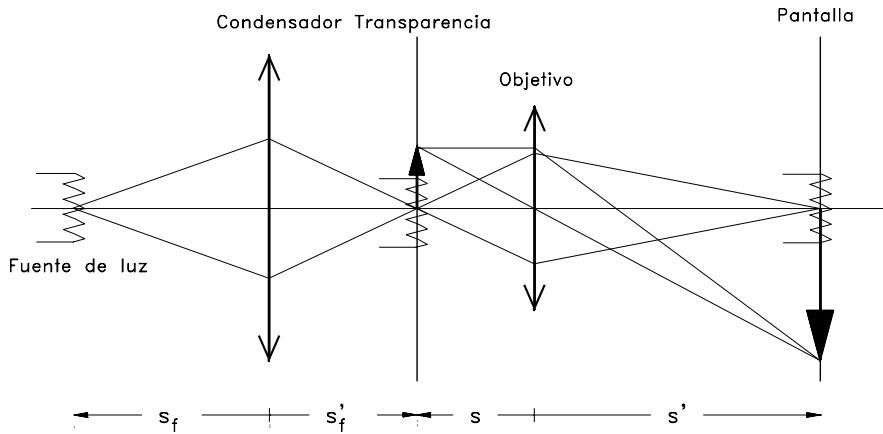


Figura 1.27: Sistema de iluminación crítica

Una posibilidad consiste en utilizar una bombilla y, mediante una lente denominada *condensador*, proyectar el filamento de la bombilla sobre la transparencia. En este sistema de iluminación, denominado *iluminación crítica*, el filamento aparece sobre la pantalla, la iluminación es poco uniforme y las zonas de la transparencia que son iluminadas directamente por la bombilla pueden deteriorarse como consecuencia de la temperatura.

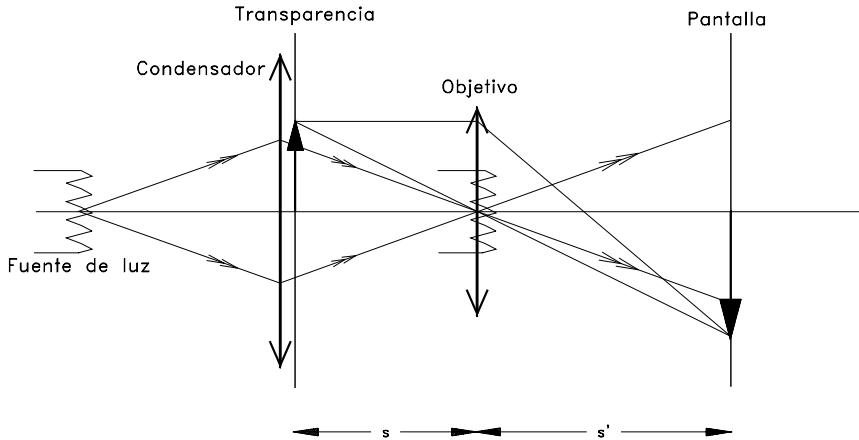


Figura 1.28: Sistema de iluminación Köhler

El sistema de *iluminación Köhler* consiste en formar la imagen del filamento sobre el objetivo con la ayuda de la lente condensadora. La transparencia se coloca junto al condensador. Así, el filamento no se proyecta sobre la pantalla y la transparencia recibe una luz más uniforme.

1.3 Telescopios

1.3.1 Introducción

Los telescopios son instrumentos diseñados por observar objetos muy alejados. Se trata de sistemas afocales. Esto quiere decir que la imagen del infinito a través del telescopio está también en el infinito. De

igual manera que el microscopio, los telescopios se diseñan de forma que los rayos emergentes del instrumento salgan paralelos, es decir, hacia el infinito. De este modo, el ojo puede trabajar sin acomodación, y por lo tanto no se fuerza la vista mientras se utiliza el instrumento. Finalmente, la imagen del infinito se proyecta sobre la retina.

Los telescopios y los microscopios están formados básicamente por dos sistemas ópticos: objetivo y ocular. El ocular del telescopio y del microscopio funcionan de manera análoga. Se trata de un sistema de lentes, que tiene un plano focal objeto donde se forma la imagen producida por el objetivo y, por lo tanto, ésta se proyecta de nuevo hacia el infinito a través del ocular.

1.3.2 Anteojo astronómico

El *anteojo astronómico* es el telescopio más simple. Consiste en dos sistemas de lentes convergentes: el objetivo, de focal f'_{obj} , y el ocular, con focal f'_{oc} . El plano focal imagen del objetivo y el plano focal objeto del ocular son coincidentes. Así, los rayos que provienen del infinito forman una imagen intermedia en el plano focal común. El ocular proyecta de nuevo esta imagen al infinito. La figura 1.29 muestra el trazado de rayos a través de un telescopio astronómico. Los rayos que entran paralelos al eje óptico se cruzan en el punto focal imagen del objetivo; al atravesar el ocular vuelven a salir paralelos al eje óptico. El rayo que entra por el extremo superior del objetivo sale ahora por debajo, indicándonos de forma gráfica que este instrumento tendrá un aumento negativo. Los rayos que entran en el sistema, formando un cierto ángulo ω con el eje óptico, se cruzarán en un cierto punto del plano focal común. Para determinar este punto debe recordarse que el rayo que pasa por el centro de la lente no se desvía. Al pasar los rayos a través del ocular, estos salen paralelos formando un ángulo ω' con el eje óptico. Para determinar la dirección de salida, se ha indicado con línea discontinua un rayo auxiliar que pasa por el punto del plano focal donde se han cruzado los rayos que entran en el sistema formando un ángulo ω con el eje óptico y que pasa sin desviarse por el centro del ocular.

En el plano focal común, se suele colocar el diafragma de campo. El tamaño de la imagen del infinito que se forma en este plano está limitada por las dimensiones de este diafragma. El tamaño de este objeto intermedio es una medida directa del ángulo máximo que puede penetrar en el telescopio. Por otra parte, la limitación sobre la cantidad de luz que penetra en el sistema (diafragma de apertura, DA) se encuentra en el objetivo. Como que no tenemos ningún sistema óptico previo al objetivo, éste se comporta como la pupila de entrada (PE) del sistema. Al calcular la imagen del DA a través del ocular, se obtiene la posición y las dimensiones de la pupila de salida (PS). Este es el plano donde se debe colocar el ojo para observar a través del anteojos (plano de emergencia de pupila). Si nos fijamos en el trazado de rayos en eje, se podría pensar que cualquier plano a partir del ocular sería adecuado para colocar el ojo. Sin embargo, al hacer el trazado en campo puede verse que la única manera de no perder rayos es colocar el ojo en la PS.

En los telescopios, el aumento viene dado por la relación entre lo que se ve a través del instrumento respecto el que se vería a ojo desnudo. El aumento obtenido con este sistema es

$$\Gamma = \frac{\tan(\omega')}{\tan(\omega)} = -\frac{f'_{obj}}{f'_{oc}} = -\frac{\phi_{PE}}{\phi_{PS}} \quad (1.16)$$

Nótese que este aumento es negativo. La fórmula del aumento se puede demostrar fácilmente a partir de equivalencias de triángulos en la figura 1.29.

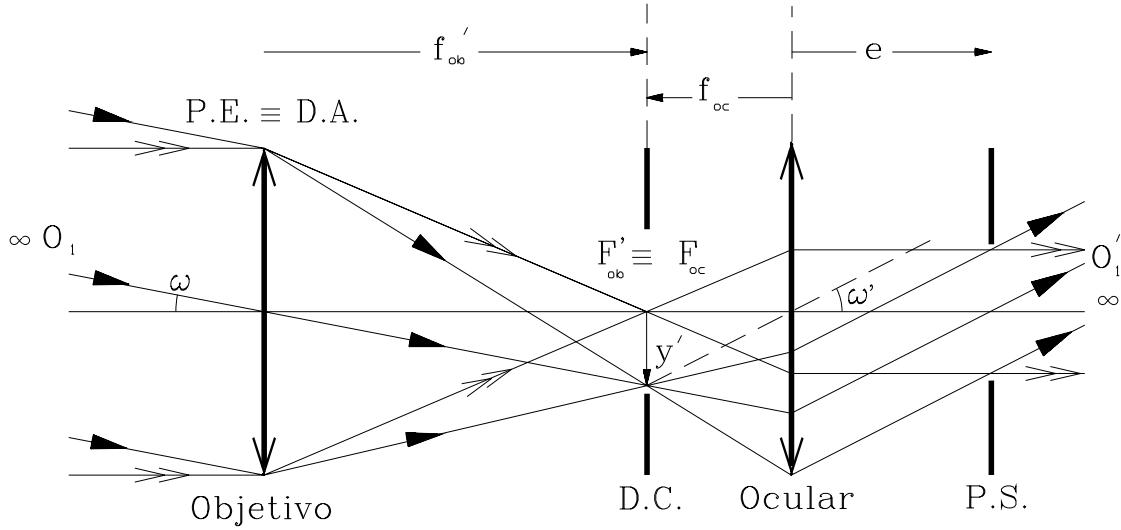


Figura 1.29: Anteojo astronómico

1.3.3 Anteojo de Galileo

El *anteojo de Galileo* es un instrumento con un diseño muy parecido al anteojos astronómica. Este último presenta un aumento negativo y por lo tanto genera un problema de orden práctico al utilizarlo para observar objetos en la Tierra, ya que se ven las cosas invertidas. Para conseguir un aumento positivo, se utiliza una lente o sistema divergente como ocular. El plano focal imagen del objetivo y el plano focal objeto del ocular son también coincidentes. Las figuras 1.30 y 1.31 muestran el trazado de rayos en eje y en campo. Es fácil demostrar que aquí el aumento también se describe por

$$\Gamma = \frac{\tan(\omega')}{\tan(\omega)} = -\frac{f'_{obj}}{f'_{oc}} > 0. \quad (1.17)$$

Como el valor de f'_{oc} es negativo, ya que la lente es divergente, el aumento visual del instrumento es positivo.

Para encontrar la posición de la pupila de salida, se calcula la posición de la imagen de la montura del objetivo a través del ocular. Esta se encuentra en el interior del telescopio, y en consecuencia el objetivo no actúa de diafragma de apertura. El ojo se deberá acercar al máximo al ocular y mirar a través. La imagen del objetivo limitará el campo que verá el ojo, por lo tanto, el objetivo hace de diafragma de campo del conjunto telescopio-objetivo y su imagen, de *lucarna de salida*.

1.3.4 Anteojo terrestre

El *anteojo terrestre* es una alternativa para conseguir telescopios con aumento visual positivo sin que se generen los problemas de viñeteo propios del anteojos de Galileo. Se trata de un anteojos astronómico al que se ha añadido una lente denominada *inversora*. La imagen del infinito se forma en el plano focal imagen del objetivo. Esta imagen se proyecta a través de la lente inversora, formándose una nueva imagen intermedia. El plano de formación de esta imagen es coincidente con el plano focal objeto del ocular, y por lo tanto los rayos salen paralelos del sistema. Puesto que el aumento de la proyección a través de la lente inversora es negativo, el aumento total es positivo.

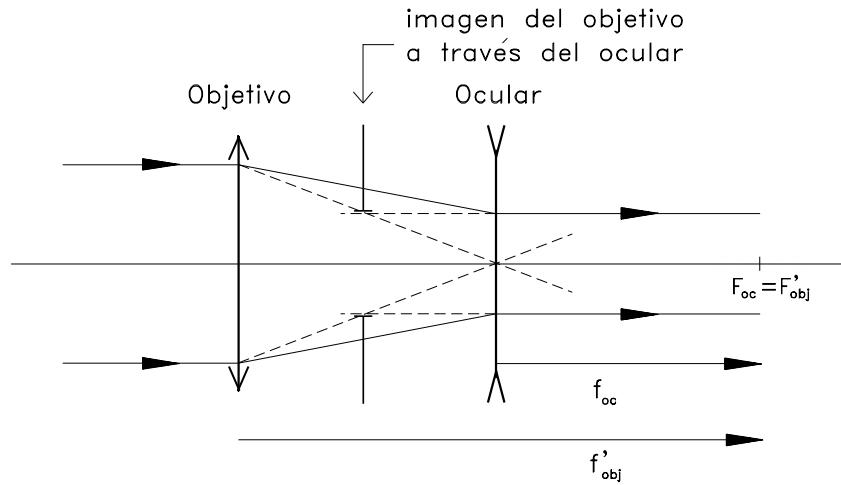


Figura 1.30: Anteojo de Galileo (trazado de rayos en eje)

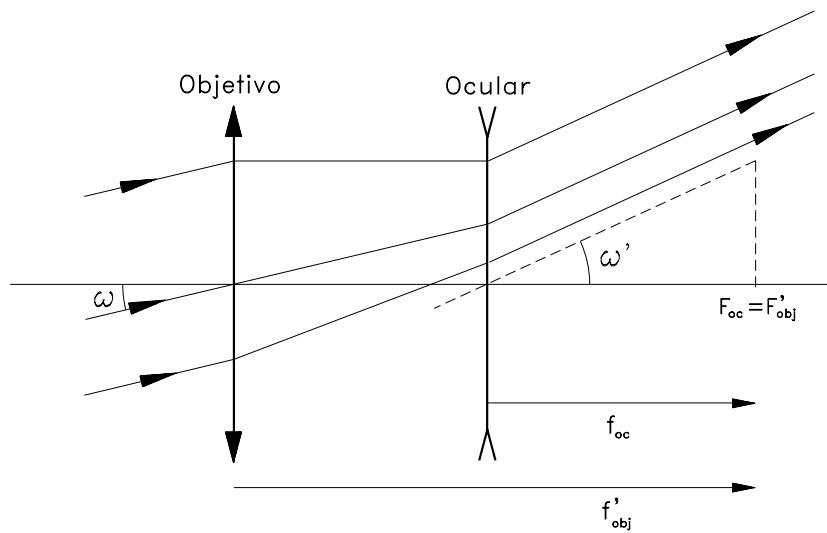


Figura 1.31: Anteojo de Galileo (trazado de rayos en campo)

Se puede demostrar que el anteojos terrestre tiene un aumento visual que es igual a

$$\Gamma_{at} = \frac{\tan(\omega')}{\tan(\omega)} = -\frac{f'_{obj}}{f'_{oc}} \cdot \frac{s'}{s} = \Gamma_{aa} \beta'_{inv} \quad (1.18)$$

El aumento visual en este caso es igual al aumento visual correspondiente al anteojos astronómico Γ_{aa} que podríamos construir sin inversora, multiplicado por el aumento lateral de la proyección de la imagen intermedia a través de la lente inversora. Puesto que ambos aumentos parciales son negativos, el aumento total es positivo.

En este instrumento, el objetivo actúa como pupila de entrada. La posición de la imagen de esta a través de la inversora y el ocular, indica donde se debe poner el ojo. El diafragma de campo en este instrumento se encuentra situado equivalentemente en el plano focal imagen del objetivo o en el plano focal objeto del ocular, aunque normalmente se coloca en el segundo.

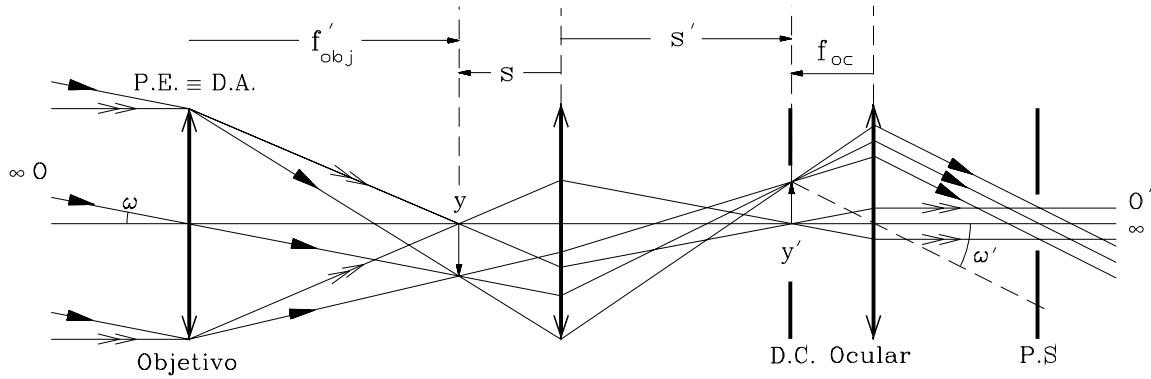


Figura 1.32: Anteojo terrestre

1.3.5 Telescopios de espejos

Basándose en el telescopio astronómico, se pueden diseñar telescopios en los cuales el objetivo es un sistema de espejos en vez de lentes. Estos sistemas pueden presentar valores de f'_{obj} muy grandes, lo que supone grandes aberturas, y por lo tanto el instrumento es muy luminoso. Además, los espejos no presentan aberración cromática. Los grandes telescopios presentan arquitecturas de este tipo. La figura 1.33 muestra un ejemplo de telescopio de espejos: al determinar la posición del plano principal objeto obtenemos que la focal del objetivo es muy grande, lo que supone un valor del aumento muy elevado.

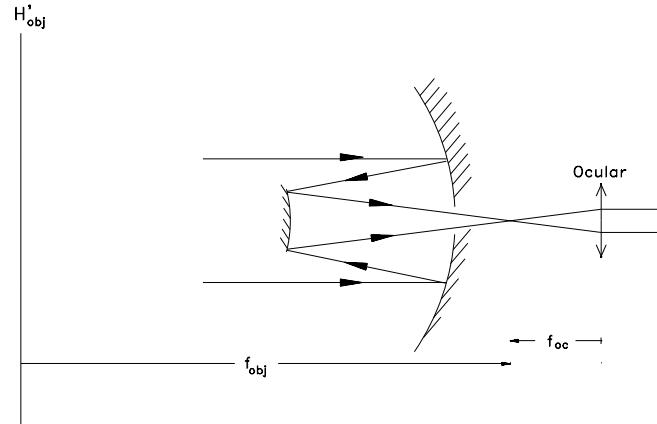


Figura 1.33: Telescopio de Cassegrain

1.4 Microscopios

1.4.1 La lupa. El objetivo del microscopio

Un microscopio es un sistema óptico diseñado para observar objetos pequeños. Si queremos observar un objeto de reducidas dimensiones, lo que haremos será acercarnos a él cuanto sea posible, hasta la distancia mínima en la que ojo sea capaz acomodar. Esta distancia se denomina *distancia del punto próximo* y se toma, en promedio, de 250 mm.

El microscopio está basado en el funcionamiento de la lupa. Al mirar un objeto de altura y_0 a ojo desnudo, situaremos el ojo a 250 mm del objeto. La tangente del ángulo ω (véase figura 1.34) es $\tan(\omega) = -y_0/250$. Si visualizamos ahora el objeto a través de una lente convergente, podemos verlo con un cierto aumento. Colocamos el objeto en el plano focal objeto de esta lente (véase figura 1.35) y observamos. Los rayos saldrán paralelos de atravesar la lente. El rayo que pasa por el centro de la lente y el extremo del objeto formarán un ángulo ω' respecto al eje óptico. La tangente de este ángulo será $\tan(\omega') = y_0/f$. Por lo tanto, el aumento visual será

$$\Gamma = \frac{\tan(\omega')}{\tan(\omega)} = \frac{250}{f'} \quad (\text{la focal se ha de expresar en mm.}) \quad (1.19)$$

Compruébese que este aumento es positivo.

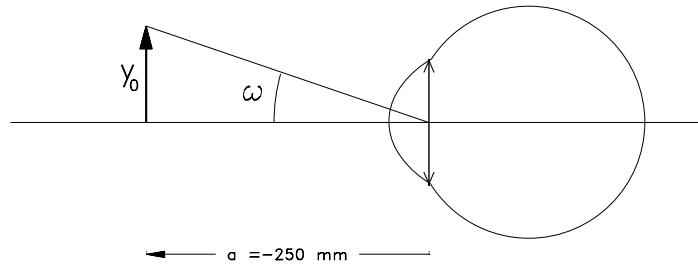


Figura 1.34: Observación de un objeto sin instrumento

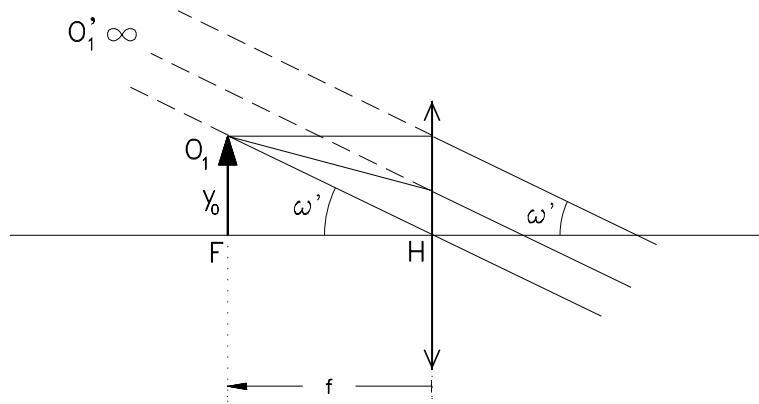


Figura 1.35: Observación de un objeto con lupa

1.4.2 El microscopio compuesto

El microscopio se diseña añadiendo una etapa proyectora (objetivo) previa a la lente que actuará de forma equivalente a una lupa (ocular). El objeto a observar se coloca a distancia s del objetivo. La imagen a través del objetivo se forma a distancia s' de esta lente. El plano donde se forma esta imagen intermedia

es coincidente con el plano focal objeto de la lente que actúa como lupa (ocular). Los rayos salen paralelos después de atravesar el ocular y así el ojo puede observar en condiciones de no acomodación.

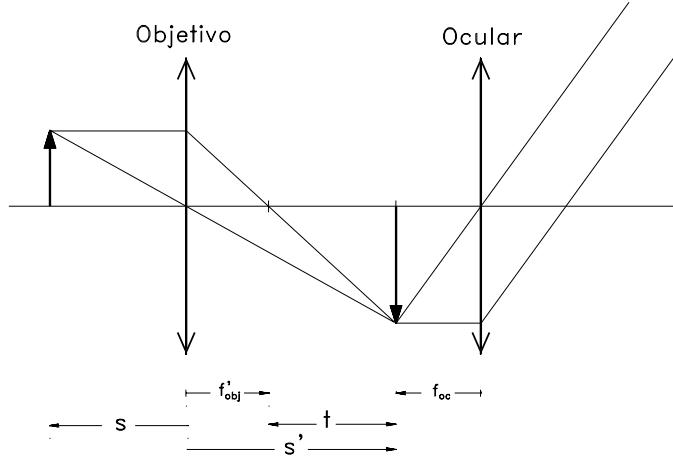


Figura 1.36: Microscopio

Sea t la distancia entre el plano focal imagen del objetivo y el plano focal objeto del ocular. Se puede demostrar que el aumento visual de este instrumento es

$$\Gamma = \frac{\tan(\omega')}{\tan(\omega)} = -\frac{t}{f'_{obj}} \frac{250}{f'_{oc}} = \beta'_{obj} \Gamma_{oc}, \quad (1.20)$$

es a decir, el aumento del instrumento se calcula multiplicando los aumentos del objetivo β'_{obj} por los aumentos del ocular Γ_{oc} . Como en el telescopio, el objetivo hace de diafragma de apertura. La imagen del objetivo a través del ocular es la pupila de salida, donde se coloca el ojo. El diafragma de campo se encuentra situado en el plano focal objeto del ocular.

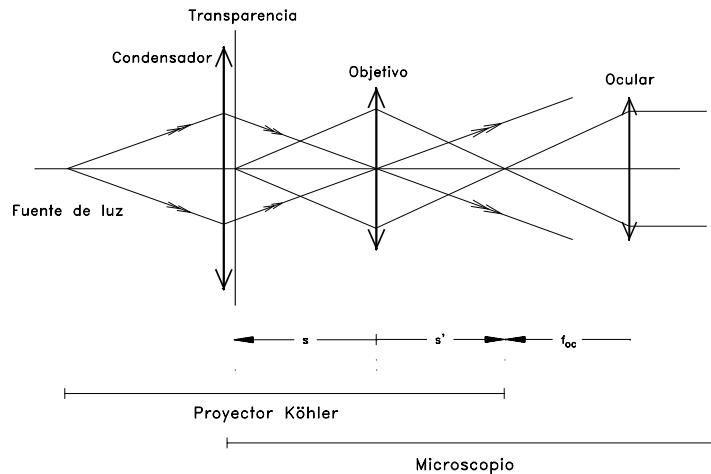


Figura 1.37: Microscopio con iluminación Köhler

Un aspecto importante en el diseño de un microscopio es la iluminación de la muestra. Por ejemplo, se puede utilizar un sistema de iluminación Köhler. La muestra se coloca en contacto con el condensador y

por lo tanto, queda iluminada uniformemente. El esquema de este instrumento se puede observar en la figura 1.37.

Capítulo 2

Óptica Electromagnética

2.1 Ondas electromagnéticas

2.1.1 Ecuaciones de Maxwell

El formalismo básico para describir los fenómenos electromagnéticos relacionados con la óptica ondulatoria son las ecuaciones de Maxwell. En el sistema CGS Gauss se escriben como:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \frac{4\pi\vec{j}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde \vec{H} es el campo magnético, \vec{E} es el campo eléctrico, \vec{D} es el vector desplazamiento, \vec{B} es el vector inducción magnética, \vec{j} es la densidad de corriente, ρ es la densidad de carga y c es una constante de proporcionalidad.

Las ecuaciones de Maxwell se complementen con las denominadas relaciones constitutivas:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E},\tag{2.2}$$

donde ϵ es la constante dieléctrica, μ es la permeabilidad magnética y σ es la conductividad eléctrica. En un medio dieléctrico homogéneo, isótropo y sin carga, $\rho = 0$, $\sigma = 0$, ϵ y μ = constantes. Las ecuaciones se simplifican:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Cuando un campo electromagnético cambia de medio, las componentes normales y tangenciales de éste verifican las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Componentes normales: } & \vec{n}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi\rho_s \quad \vec{n}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \text{Componentes tangenciales: } & \vec{n} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad \vec{n} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_s, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde \vec{n} es el vector normal a la superficie, y ρ_s y \vec{j}_s son las densidades superficiales de carga y de corriente, respectivamente. Los subíndices 1 y 2 hacen referencia a los campos en el medio original y en el medio en el que se transmiten los campos, respectivamente. Si las densidades de carga y corriente son cero, $\rho_s = 0$ y $\vec{j}_s = 0$, entonces se verifican las relaciones de continuidad siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Componentes normales: } & D_2^n = D_1^n \quad B_2^n = B_1^n \\ \text{Componentes tangenciales: } & E_2^t = E_1^t \quad H_2^t = H_1^t. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Los superíndices n y t hacen referencia a las componentes normales o tangenciales.

2.1.2 La ecuación de ondas. Soluciones

En un medio homogéneo e isótropo, al combinar las ecuaciones de Maxwell se obtiene el par de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{H} &= \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \\ \Delta \vec{E} &= \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Estas expresiones son formalmente ecuaciones de ondas. Así, la velocidad de propagación puede relacionarse con los parámetros c , ϵ y μ

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (2.7)$$

En el vacío, $\epsilon = \mu = 1$ y, por lo tanto, $v = c$. Es decir, c es la velocidad de la luz en el vacío. El índice de refracción se puede escribir en función de los parámetros μ y ϵ , $n = c/v = \sqrt{\epsilon\mu}$.

Sean $\vec{r} = (x, y, z)$ el vector posición de un punto y $\vec{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$ el vector unitario ($\|\vec{s}\| = 1$) que indica la dirección de propagación de la onda. Se puede comprobar fácilmente que una función f del tipo $f(vt \pm \vec{r}\vec{s})$ es solución de la ecuación de ondas. Esta solución de la ecuación de ondas se denomina *onda plana*. En el caso unidimensional, escribiremos la ecuación de ondas como

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.8)$$

En este caso particular, $\vec{s} = (1, 0, 0)$, y la solución se escribe como $f(vt + x)$ o $f(vt - x)$.

De las relaciones entre la pulsación ω , el periodo T , $T = 2\pi/\omega$, la longitud de onda λ , el número de onda k , $k = 2\pi/\lambda$, la frecuencia ν y la velocidad, $\lambda\nu = v$, podemos escribir el argumento de la función de onda plana como:

$$vt \pm \vec{r}\vec{s} = \frac{1}{k}(\omega t \pm k\vec{r}\vec{s}). \quad (2.9)$$

Dependiendo del caso que se estudie, la función f puede ser complicada de describir. El *análisis de Fourier* afirma que cualquier función puede ser descrita como una combinación lineal de funciones armónicas. Por esta razón, tomaremos funciones de onda armónicas para describir los campos eléctrico y magnético, por ejemplo:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k\vec{r}\vec{s}) \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - k\vec{r}\vec{s}), \quad (2.10)$$

donde los módulos $\|\vec{E}_0\|$ y $\|\vec{H}_0\|$ son las amplitudes máximas de los campos eléctrico y magnético, respectivamente. El argumento de estas funciones es adimensional. Por comodidad, a la hora de hacer manipulaciones matemáticas, escribiremos los campos en notación compleja, aunque únicamente la parte real (o la imaginaria) tiene sentido físico, es decir:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - k\vec{r}\vec{s})) \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \exp(i(\omega t - k\vec{r}\vec{s})), \quad (2.11)$$

\vec{E}_0 es la amplitud de la onda y $\exp(i(\omega t - k\vec{r}\vec{s}))$ su fase, que también se puede escribir en términos del índice de refracción. Si definimos $p = \omega/c$, tendremos que

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(ip(ct - n\vec{r}\vec{s})) \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \exp(ip(ct - n\vec{r}\vec{s})). \quad (2.12)$$

Definimos el concepto de *frente de onda* como el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma fase, en un momento dado. En el caso de ondas planas, el frente de onda es el plano $k\vec{r}\vec{s} = C$ donde C es una constante. Es posible establecer una relación entre los conceptos de *fase* y *camino óptico* ($\Delta = nl$, donde n es el índice de refracción y l la distancia recorrida por la onda). Sea una onda de pulsación ω y dirección de propagación \vec{s} . La diferencia de fase entre dos planos '1' y '2' del frente de onda, distantes l entre si, es

$$(\omega t - k\vec{r}_2\vec{s}) - (\omega t - k\vec{r}_1\vec{s}) = k(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\vec{s} = kl. \quad (2.13)$$

Si la onda se propaga en un medio de índice n , $kl = (k/n)nl = (k/n)\Delta = \frac{2\pi}{\lambda n}\Delta = \frac{\lambda_0}{n}\Delta$. Este resultado se utilizará más adelante en el estudio de los sistemas interferenciales. Otra solución de la ecuación de onda que presenta un gran interés es aquella en la que el valor de la amplitud de la onda sólo depende de la distancia al punto en que se genera. En este caso (onda esférica), es conveniente escribir la ecuación en coordenadas esféricas y quedarnos solo con la parte radial, es decir, $\vec{E} = \vec{E}(r, t)$:

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r\vec{E}}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.14)$$

Así podemos escribir

$$\frac{\partial^2 r\vec{E}}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.15)$$

Esta última expresión es formalmente idéntica a la ecuación de ondas en una dimensión escrita en coordenadas cartesianas. Por lo tanto, la solución en este caso será del tipo

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}(vt \pm r)}{r}. \quad (2.16)$$

Aquí el frente de ondas es una esfera.

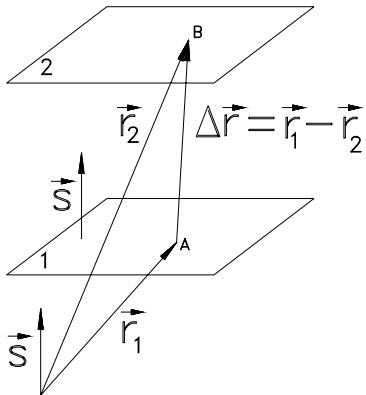


Figura 2.1: Diferencia de fase

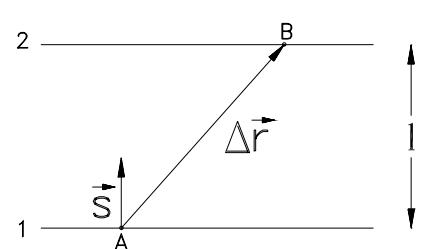


Figura 2.2: Diferencia de fase (esquema transversal)

2.1.3 Energía. Vector de Poynting

Introduciendo las soluciones de la ecuación de ondas para los campos eléctrico y magnético en las ecuaciones de Maxwell, podemos deducir las relaciones siguientes:

$$\vec{s} \wedge \vec{H} = -n\vec{E} \quad \vec{s} \wedge \vec{E} = \frac{\vec{H}}{n}, \quad (2.17)$$

relaciones que indican que los vectores campo eléctrico, campo magnético y el vector \vec{s} son ortogonales entre si. Los vectores campos eléctrico y magnético vibran en un plano que se propaga según la dirección \vec{s} , tal y como se muestra en la figura 2.3. La energía electromagnética almacenada en un diferencial de volumen se escribe

$$du = \left[\frac{1}{8\pi} (\epsilon \|\vec{E}\|^2 + \mu \|\vec{H}\|^2) \right] dv, \quad (2.18)$$

y, por lo tanto, la variación por unidad de tiempo de energía electromagnética almacenada en un volumen V cerrado por una superficie S es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_V \left[\frac{1}{8\pi} (\epsilon \|\vec{E}\|^2 + \mu \|\vec{H}\|^2) \right] \right] dv. \quad (2.19)$$

Consideremos un material dieléctrico ideal ($\sigma = 0$). Utilizando las ecuaciones de Maxwell podemos demostrar que la variación de energía puede expresarse como

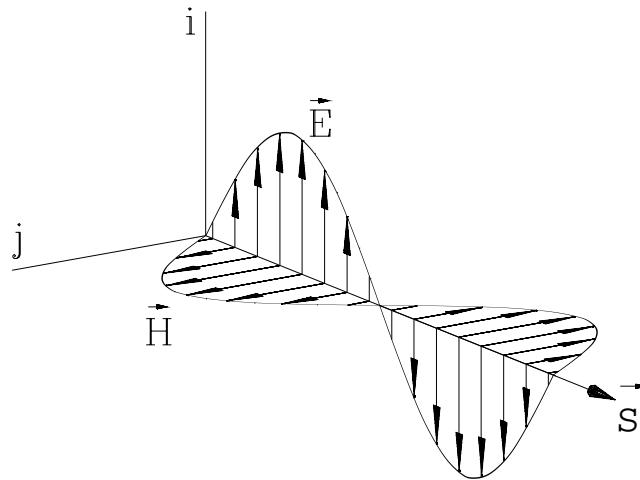


Figura 2.3: Transversalidad de los campos eléctrico y magnético

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c}{4\pi} \int_S \vec{E} \wedge \vec{H} ds. \quad (2.20)$$

Definimos el vector de Poynting como

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{H}. \quad (2.21)$$

El vector de Poynting expresa la variación de energía radiada por unidad de tiempo y de superficie perpendicular a la dirección de propagación. En los medios homogéneos e isótropos el vector de Poynting y el vector \vec{S} tienen la misma dirección. La dirección del rayo (concepto propio de la Óptica Geométrica) y \vec{S} (asociado a la propagación de la energía de la onda) coinciden. Si la longitud de onda corresponde al espectro visible (400-700 nm) el periodo de vibración es del orden de 10^{-14} s. Cuando colocamos un detector (célula fotoeléctrica, cámara de video, ojo, etc.) ante una onda electromagnética, éste no es capaz de seguir las oscilaciones y por lo tanto detecta un promedio temporal de la señal. Así, definimos la *intensidad* del campo eléctrico como la media temporal del vector de Poynting.

$$I = \langle \|\vec{S}\| \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|\vec{S}\| dt. \quad (2.22)$$

Resolviendo la integral anterior, la intensidad detectada, para ondas planas es

$$I = \frac{cn}{8\pi} \|E_0\|^2, \quad (2.23)$$

mientras que para ondas esféricas tenemos

$$I = \frac{cn}{8\pi} \frac{\|E_0\|^2}{r^2}, \quad (2.24)$$

resultado conocido como la *ley del cuadrado de la distancia*.

2.2 Polarización

2.2.1 La elipse de polarización

Consideremos la curva que se genera en $z = 0$, a partir de la composición de dos campos eléctricos de la misma frecuencia y que vibran con un cierto desfase δ entre ellos, que viajan en la misma dirección - se toma por conveniencia $\vec{s} = (0, 0, 1)$ - y cuyas direcciones de vibración son ortogonales, es decir:

$$E_x = A_1 \cos(\omega t) \quad E_y = A_2 \cos(\omega t + \delta). \quad (2.25)$$

al eliminar el parámetro t de las fórmulas anteriores, obtenemos la ecuación cartesiana siguiente

$$\frac{E_x^2}{A_1^2} + \frac{E_y^2}{A_2^2} - 2 \frac{E_x E_y}{A_1 A_2} \cos(\delta) = \sin^2(\delta), \quad (2.26)$$

que corresponde a una elipse con centro en su origen de coordenadas, pero con el eje mayor formando un cierto ángulo ψ con el eje x . Este ángulo se puede encontrar a partir de la expresión

$$\tan(2\psi) = \frac{2A_1 A_2 \cos(\delta)}{A_1^2 - A_2^2}. \quad (2.27)$$

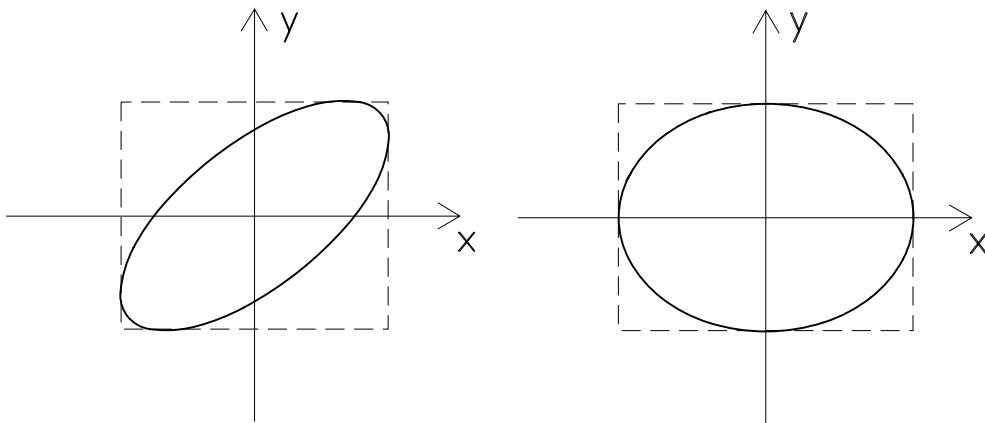


Figura 2.4: Luz polarizada elípticamente. En la figura de la izquierda, los ejes de la elipse presentan una rotación respecto a los ejes de coordenadas. En ambos casos, la elipse se encuentra en el interior de un rectángulo de dimensiones $2A_1 \times 2A_2$

El campo eléctrico combinación de los dos campos anteriores se escribe como

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} A_1 \exp(i(\omega t - kz)) \\ A_2 \exp(i(\omega t - kz + \delta)) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Este campo, al propagarse, genera una espiral de paso elíptico. Esta onda se denomina *luz polarizada elíptica*. El campo magnético tiene un comportamiento equivalente, y se determina a partir de la relación $\vec{H} = n\vec{s} \wedge \vec{E}$.

Si ahora colocamos un detector normal a la dirección de propagación, la intensidad que detectaremos será la media temporal del vector de Poynting. En estas condiciones, como $H_y = nE_x$ y $H_x = -nE_y$, entonces

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{H} \quad \|\vec{S}\| = \frac{cn}{4\pi} (A_1^2 \cos^2(\omega t) + A_2^2 \cos^2(\omega t + \delta)). \quad (2.29)$$

Calculando la media temporal se obtiene

$$I = \frac{cn}{8\pi} (A_1^2 + A_2^2) \quad (2.30)$$

y, por lo tanto, la intensidad es la suma directa de las contribuciones a la intensidad del campo eléctrico según la dirección x y del campo eléctrico según la dirección y .

2.2.2 Polarización: casos particulares

Fijemos ahora, un plano cualquiera $z = z_0$ donde analizar la elipse de polarización. El vector campo eléctrico cambia de dirección en función del tiempo y la figura que genera el extremo de este vector se describe por la ecuación 2.26. Considerando los diferentes valores que puede tomar δ , obtenemos los diferentes casos de polarización (véase la figura 2.5).

Algunos casos de especial interés:

1. Luz polarizada lineal: $\delta = 0$ o bien $\delta = \pi$
2. Ejes de la elipse coincidentes con los ejes de coordenadas: $\delta = \pi/2$ o bien $\delta = 3\pi/2$. La luz será *polarizada circular* si además, $A_1 = A_2$
3. El sentido de giro de la elipse será dextrógiro si $0 < \delta < \pi$, mientras que el sentido de giro será levógiro: si $\pi < \delta < 2\pi$. Esto se puede deducir, analizando la evolución de las componentes del vector \vec{E} en $t = 0$.

2.2.3 Polarizadores

Para la luz natural (monocromática), todos los estados de δ , A_1 y A_2 son equiprobables, es decir que $\langle \cos(\delta) \rangle = 0$, $\langle A_1^2 \rangle = \langle A_2^2 \rangle$. Los *polarizadores* son unos dispositivos que permiten obtener luz polarizada lineal a partir de luz natural. Los polarizadores se caracterizan por la presencia de un eje de polarización, que indica la dirección en que la luz sale linealmente polarizada. Si enviamos luz polarizada lineal tal que el vector campo eléctrico vibre en una dirección que forme un ángulo α con el eje de polarización, la intensidad que se detectará a la salida será $I \propto \|E_0\|^2 \cos^2(\alpha)$, resultado conocido como la *ley de Malus*.

Cualquier dispositivo que modifique activamente el estado de polarización de la luz puede ser descrito por una matriz de 4x4 elementos (matriz de Mueller, M). La luz se describe mediante un vector de cuatro componentes (vector de Stokes, \vec{S}). La luz resultante (\vec{S}') se relaciona con la inicial a partir de la expresión $\vec{S}' = M\vec{S}$. El *vector de Stokes* $\vec{S} = (I, M, C, S)$ se define como

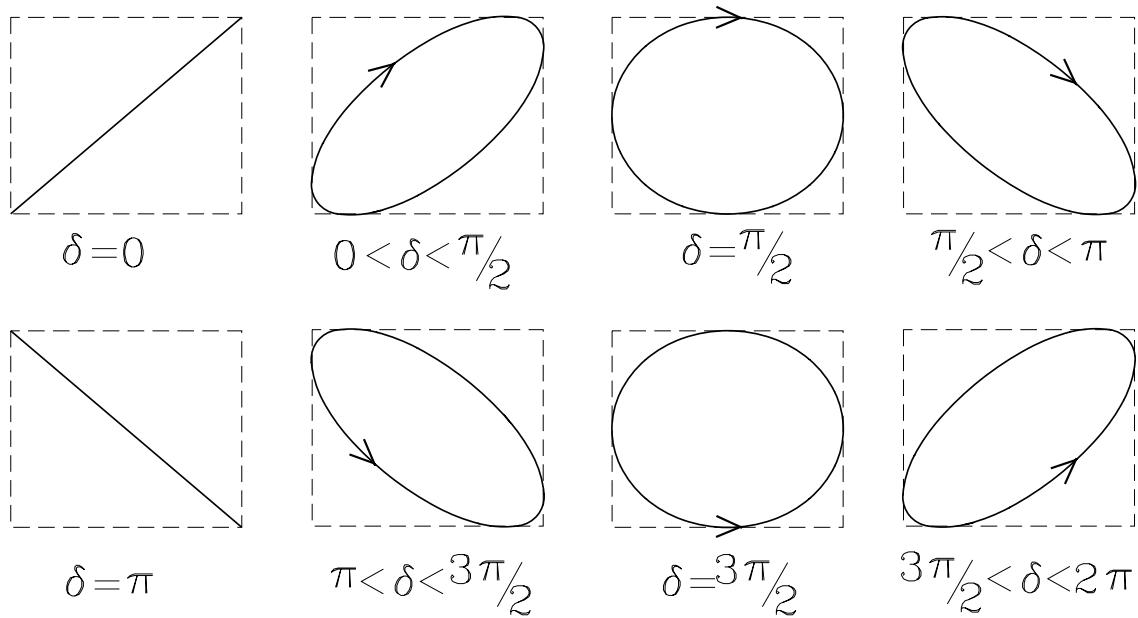


Figura 2.5: Polarización: casos particulares

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} I \\ M \\ C \\ S \end{pmatrix} = \frac{1}{A_1^2 + A_2^2} \begin{pmatrix} A_1^2 + A_2^2 \\ A_1^2 - A_2^2 \\ 2A_1A_2 \cos(\delta) \\ 2A_1A_2 \sin(\delta) \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Algunos ejemplos:

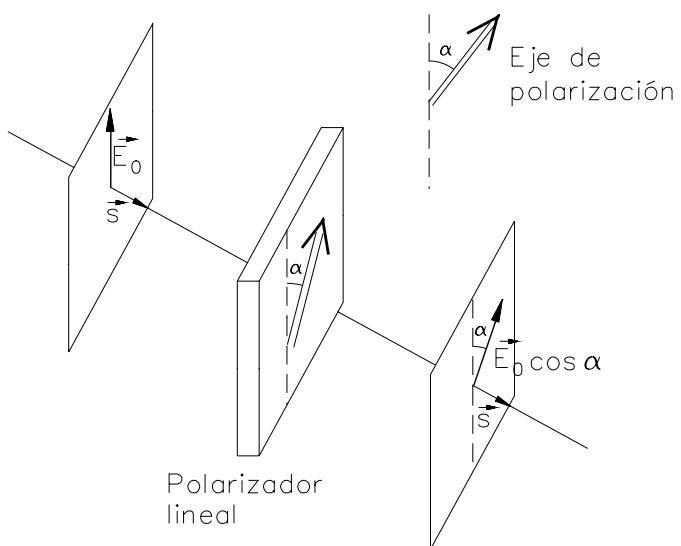


Figura 2.6: Polarización: ley de Malus

1. Luz polarizada lineal según eje x: $(1, 1, 0, 0)$.
2. Luz polarizada lineal según eje y: $(1, -1, 0, 0)$.
3. Luz polarizada circular dextrógira: $(1, 0, 0, 1)$.
4. Luz polarizada circular levógira: $(1, 0, 0, -1)$.
5. Luz natural: $(1, 0, 0, 0)$.

Un polarizador lineal, cuyo eje de polarización forma un ángulo α con el eje y , se describe como

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) & 0 \\ \cos(2\alpha) & \cos^2(2\alpha) & \sin(2\alpha)\cos(2\alpha) & 0 \\ \sin(2\alpha) & \sin(2\alpha)\cos(2\alpha) & \sin^2(2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

2.3 Propagación, reflexión y refracción

2.3.1 Deducción de las leyes de la Óptica Geométrica

Una onda incide sobre una superficie que separa dos medios dieléctricos isótropos de índices n y n' (véase la figura 2.7). Al interaccionar con la superficie de separación, parte de la energía vuelve al primer medio y parte se transmite al segundo medio. Puesto que en la superficie de separación se verifican las condiciones de contorno (ecuación 2.4), y en el caso particular que estamos considerando la densidad superficial de carga y las corrientes superficiales son nulas, podemos escribir la continuidad de las componentes del campo:

$$\text{Componentes normales: } D_2^n = D_1^n \quad B_2^n = B_1^n \quad (2.33)$$

$$\text{Componentes tangenciales: } E_2^t = E_1^t \quad H_2^t = H_1^t. \quad (2.34)$$

Si tomamos, por ejemplo, la continuidad de la componente tangencial y de los campos eléctricos en la superficie de separación de medios (que por comodidad tomaremos en $z = 0$); podremos escribir: $E_y + E_y'' = E_y'$. Desarrollando esta expresión tenemos

$$A_y e^{ip(ct-n(\alpha x+\beta y))} + A_y'' e^{ip''(ct-n(\alpha'' x+\beta'' y))} = A_y' e^{ip'(ct-n'(\alpha' x+\beta' y))}, \quad (2.35)$$

donde A_y , A_y' y A_y'' son las amplitudes tangenciales de los campos incidente, transmitido y reflejado y $p = \omega/c$, $p' = \omega'/c$ y $p'' = \omega''/c$. El punto considerado $(x, y, 0)$ es un punto de la superficie de separación de los medios. Los vectores que indican la dirección de propagación de la fase son $\vec{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{s}' = (\alpha', \beta', \gamma')$, $\vec{s}'' = (\alpha'', \beta'', \gamma'')$.

La expresión de continuidad se debe verificar en cualquier momento y para cualquier punto. Por lo tanto, no puede depender de las variables espaciales o temporales. La única manera de que las variables no estén presentes en la ecuación es que las tres fases sean iguales y, en consecuencia, se puedan cancelar. Esto pasa si se verifica:

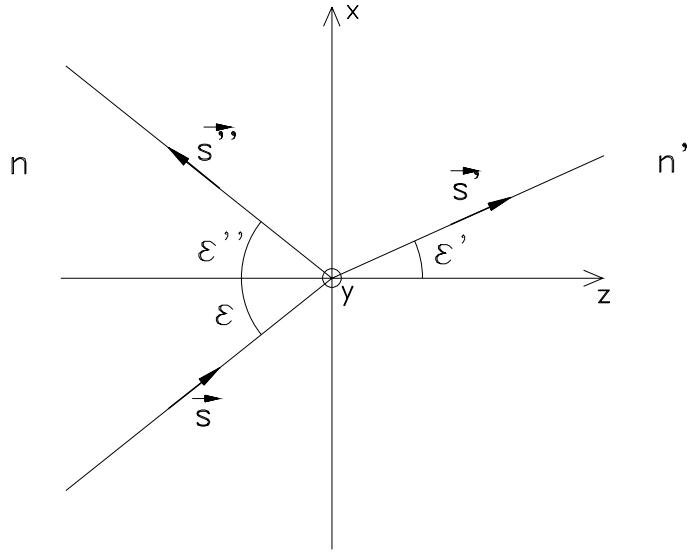


Figura 2.7: Deducción de las leyes de la reflexión y de la refracción

$pc = p'c = p''c$: La frecuencia no cambia al cambiar de medio la onda, ni al producirse una reflexión.

Sin embargo, dado que la velocidad de la luz es dependiente del medio, la longitud de onda cambia, al cambiar de medio. La longitud de onda de un campo propagándose en un medio de índice n se relaciona con la longitud de onda en el vacío (λ_0), mediante la relación $\lambda = \lambda_0/n$.

$n\beta = n'\beta' = n\beta''$: Si se hace una rotación de ejes de manera que $\beta = 0$, esto implica necesariamente que $\beta' = \beta'' = 0$, con lo que se prueba que el rayo incidente, el reflejado y el transmitido están en el mismo plano.

$n\alpha = n'\alpha' = n\alpha''$: Como la luz que se refleja vuelve al primero medio ($n = n''$), obtenemos que $\alpha = \alpha''$.

Proyectando esta componente sobre el eje x , tenemos que $\epsilon = \epsilon''$ (*ley de la reflexión*). Por otra parte, como se verifica que $n\alpha = n'\alpha'$, entonces tenemos que $n\sin(\epsilon) = n'\sin(\epsilon')$ (*ley de la refracción*).

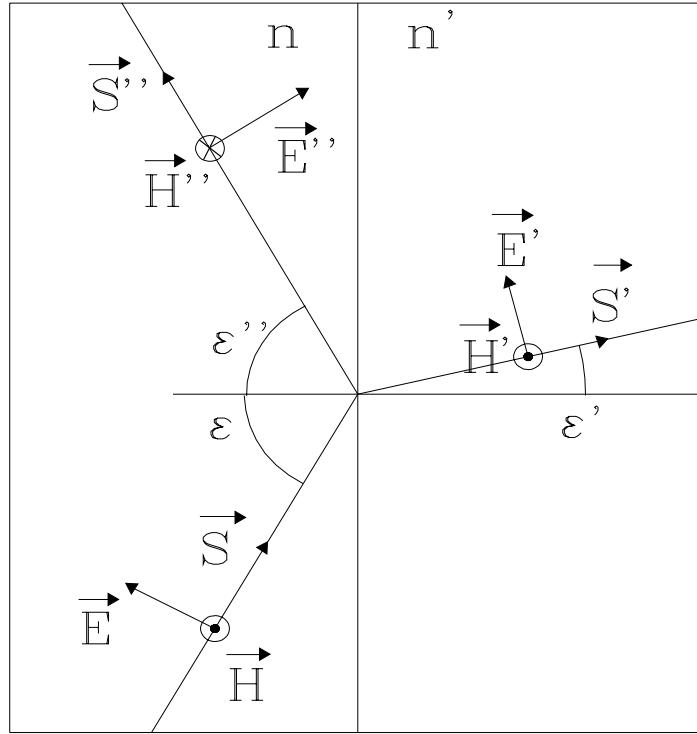
2.3.2 Fórmulas de Fresnel

En esta sección estudiaremos los valores que toma la amplitud del campo al cambiar de medio o reflejarse, en función de la amplitud incidente. Sea un frente de onda que avanza según la dirección \vec{s} . Consideraremos un campo eléctrico polarizado linealmente, que vibra en el plano definido por el frente de onda. Para hacer que el planteamiento del problema sea más claro, proyectaremos el vector campo eléctrico sobre dos ejes: un eje en el plano xz (eje paralelo) y un eje perpendicular al anterior, que es paralelo al eje y (eje perpendicular) y analizaremos cada caso por separado. El plano xz es el plano de incidencia.

Campo E paralelo al plano de incidencia $\vec{E}_{||}$

Consideraremos el primero caso, indicado en la figura 2.8. Tomemos la proyección del campo eléctrico sobre el plano zx . La dirección del campo magnético queda definida por la relación $\vec{H} = n\vec{s} \wedge \vec{E}$. Puesto que no hay otros campos presentes en el problema que puedan modificar la dirección de los campos, las direcciones de éstos son las que se muestran en la figura 2.8. El sentido del campo eléctrico es tal que la componente x sea positiva. Los campos se escriben:

$$\vec{E}_{||} = \vec{A}_{||} \exp(ip(ct - nr\vec{s}))$$

Figura 2.8: Fórmulas de Fresnel. Campo E paralelo al plano de incidencia

$$\begin{aligned}\vec{E}_{||}'' &= \vec{A}_{||}'' \exp(ip''(ct - n''\vec{r}\vec{s}')) \\ \vec{E}_{||}' &= \vec{A}_{||}' \exp(ip'(ct - n'\vec{r}\vec{s}'')).\end{aligned}\quad (2.36)$$

Para simplificar la nomenclatura escribiremos los módulos de la siguiente manera $A_{||} = \|\vec{A}_{||}\|$, $A_{||}' = \|\vec{A}_{||}'\|$ y $A_{||}'' = \|\vec{A}_{||}''\|$. Para deducir la relación entre las amplitudes, operaremos de la manera siguiente:

1. Se proyecta la componente tangencial x del campo eléctrico y se aplica la condición de continuidad.
2. Se proyecta la componente tangencial y del campo magnético y se aplica la condición de continuidad.
3. Se escribe el campo magnético en términos del campo eléctrico. De esta manera se obtiene un sistema de ecuaciones lineal con dos incógnitas ($A_{||}'$ y $A_{||}''$), la solución del cual es

$$A_{||}' = A_{||} \frac{2 \sin(\epsilon') \cos(\epsilon)}{\sin(\epsilon' + \epsilon) \cos(\epsilon' - \epsilon)} \quad (2.37)$$

$$A_{||}'' = A_{||} \frac{\tan(\epsilon' - \epsilon)}{\tan(\epsilon' + \epsilon)}. \quad (2.38)$$

Campo E perpendicular al plano de incidencia \vec{E}_{\perp}

El segundo caso a considerar es análogo al anterior, pero ahora el campo eléctrico es perpendicular al plano zx , según se indica en la figura 2.9. El campo eléctrico se ha tomado en el sentido positivo del

eje y . Operando de la misma forma que en el caso anterior, se obtiene la relación entre la amplitud de los campos eléctricos transmitido y reflejado en función del incidente, para el caso de polarización perpendicular.

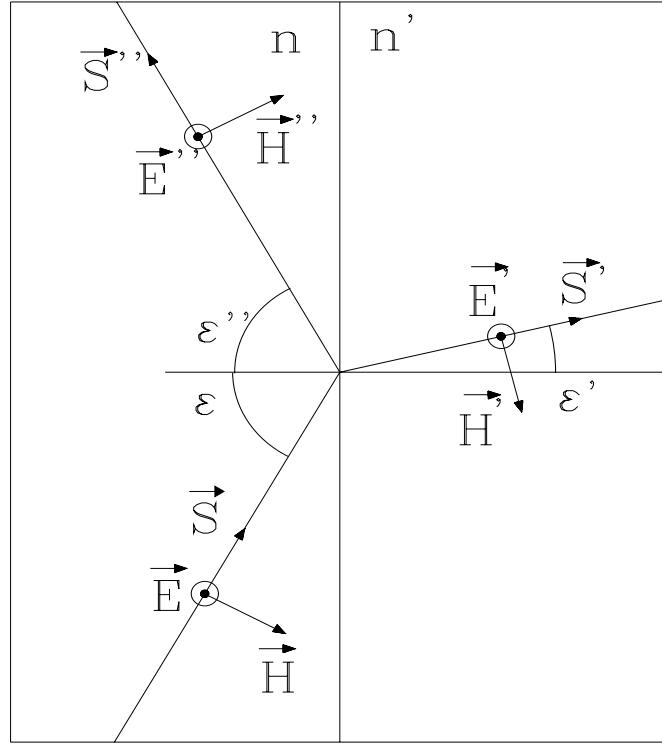


Figura 2.9: Fórmulas de Fresnel. Campo E perpendicular al plano de incidencia

$$A'_\perp = A_\perp \frac{2 \sin(\epsilon') \cos(\epsilon)}{\sin(\epsilon + \epsilon')} \quad (2.39)$$

$$A''_\perp = A_\perp \frac{\sin(\epsilon' - \epsilon)}{\sin(\epsilon + \epsilon')} \quad (2.40)$$

Las ecuaciones 2.37-2.40 reciben el nombre de fórmulas de Fresnel. Habitualmente se trabaja con los coeficientes de reflexión y transmisión, que se definen

$$\begin{aligned} r_{||} &= \frac{A''_{||}}{A_{||}} & t_{||} &= \frac{A'_{||}}{A_{||}} \\ r_\perp &= \frac{A''_\perp}{A_\perp} & t_\perp &= \frac{A'_\perp}{A_\perp}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

2.3.3 Análisis de los coeficientes de transmisión y reflexión

A continuación se muestra la variación de los cuatro coeficientes de Fresnel en función del ángulo de incidencia ϵ . Algunos casos de particular interés son:

- Incidencia normal ($\epsilon = 0$):

$$t_{||} = t_{\perp} = \frac{2n}{n + n'} \quad (2.42)$$

$$r_{||} = r_{\perp} = \frac{n - n'}{n + n'}. \quad (2.43)$$

- *Ángulo de Brewster.* Tenemos incidencia con ángulo de Brewster cuando $A''_{||} = 0$. En este caso, la componente reflejada presenta exclusivamente polarización perpendicular. Esto pasa cuando

$$\tan(\epsilon_B) = \frac{n'}{n} \quad (2.44)$$

- *Ángulo límite.* Ángulo de incidencia para el que $\epsilon' = \pi/2$:

$$\sin(\epsilon_l) = \frac{n'}{n}. \quad (2.45)$$

Este ángulo sólo tiene sentido cuando $n' < n$.

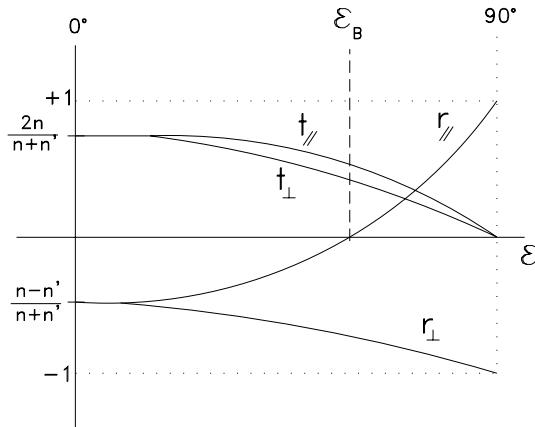


Figura 2.10: Coeficientes de transmisión y reflexión.
Caso $n = 1$ y 1.5

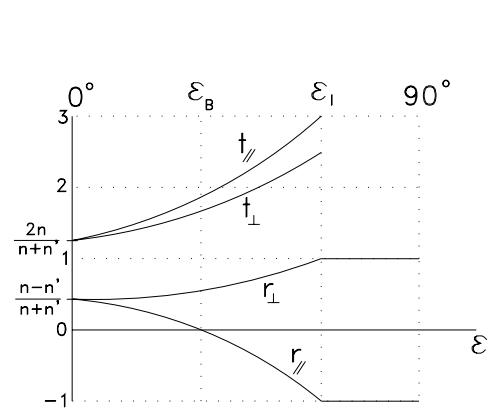


Figura 2.11: Coeficientes de transmisión y reflexión.
Caso $n = 1.5$ y 1

Cuestiones interesantes que podemos extraer del análisis de las figuras:

- En incidencia normal y para valores pequeños del ángulo de incidencia, los coeficientes de reflexión paralelo y perpendicular son iguales. Lo mismo pasa con los coeficientes de transmisión.
- Valores negativos. La presencia de estos valores en los coeficientes indica que el sentido arbitrario que atribuimos a los campos al hacer la deducción de las fórmulas de Fresnel no es apropiado en este caso.
- Para ángulos superiores al límite, no existe onda transmitida.

- La amplitud transmitida puede superar el valor de la incidente. Esto no viola ningún principio de conservación, ya que no debe confundirse la amplitud de la onda con su energía, la cual, obviamente, se conservará.

Además se puede verificar que

$$\begin{aligned} r_{||} &= -r'_{||} & r_{\perp} &= -r'_{\perp} \\ t_{||}t'_{||} &= 1 - r_{||}^2 & t_{\perp}t'_{\perp} &= 1 - r_{\perp}^2, \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde los coeficientes $r_{||}$, $t_{||}$, r_{\perp} y t_{\perp} se calculan pasando la luz del medio de índice n al de n' , mientras que los coeficientes $r'_{||}$, $t'_{||}$, r'_{\perp} y t'_{\perp} se calculan haciendo el paso en sentido inverso, es decir, de n' a n .

Estudio de los casos de incidencia rasante y normal

El estudio de los cambios de signo en el factor de reflexión paralelo debe ser realizado con atención. Analizaremos los casos extremos de incidencia rasante ($\epsilon = \pi/2$) e incidencia normal ($\epsilon = 0$). Es necesario tener presente las figuras 2.8 y 2.9.

- CASO A: $n < n'$:
 - Incidencia normal. Los coeficientes de reflexión paralelo y perpendicular son negativos; el vector campo eléctrico reflejado apunta siempre en sentido contrario al del dibujo (véanse las figuras 2.8 y 2.9). Observamos que entre el campo incidente y el reflejado hay un cambio de fase π para los casos $||$ y \perp .
 - Incidencia rasante. El coeficiente paralelo es positivo; por lo tanto, el sentido del vector es correcto. En el caso perpendicular el sentido no es correcto. Por lo tanto, el campo incidente y el reflejado están siempre en oposición de fase. Si extrapolamos estos argumentos para ángulos de incidencia intermedios, se puede inferir que siempre se tiene un cambio de fase π en la reflexión.
 - Transmisión. Los coeficientes son siempre positivos. No hay ningún cambio en la orientación arbitraria de los vectores y, por lo tanto, podemos asegurar nunca hay cambio de fase π .
- CASO B: $n > n'$: Haciendo el mismo razonamiento que en el caso anterior, podemos asegurar que, en estas condiciones, nunca se produce un salto de fase π , ni en reflexión ni en refracción.

2.3.4 Factores de transmisión y reflexión en intensidad

Definimos los *factores de transmisión* como el cociente entre la intensidad transmitida y la incidente. Es necesario definir un factor para la componente paralela y otro para la perpendicular. Recordemos que la *intensidad* se define como la media temporal de la energía radiada por unidad de tiempo y de superficie. La definición de intensidad exige que la detección se realice con un detector situado normalmente a la dirección de propagación. Recordemos que la intensidad detectada vale $I = \frac{cn}{8\pi} A^2$.

Consideremos la situación de la figura 2.12. Una onda plana incide sobre una superficie de separación de medios con un ángulo ϵ respecto a la normal y se refracta formando un ángulo ϵ' . La comparación entre los vectores de Poynting se hará en la superficie de separación de los medios, aplicando el principio de conservación de la energía. $\|\vec{S}\| \cos(\epsilon)$ es la energía que incide en la superficie de separación por unidad

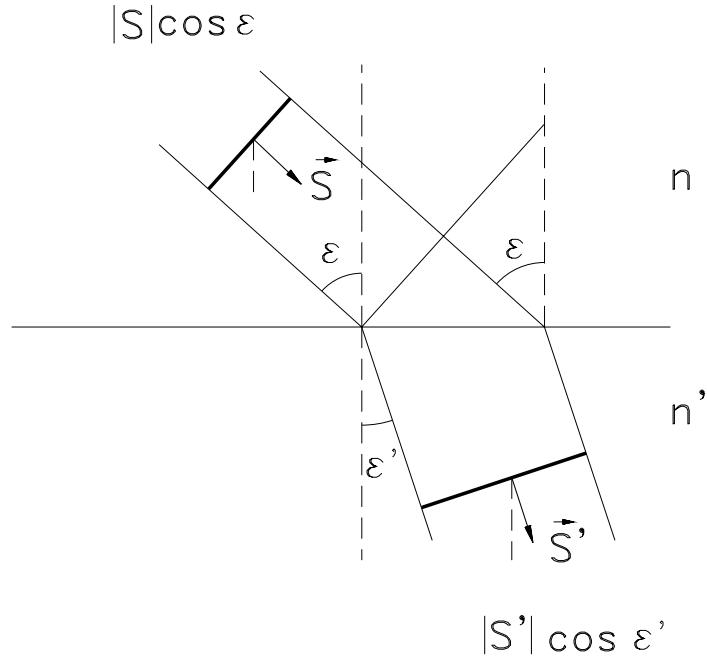


Figura 2.12: Obtención de los factores de transmisión en intensidad

de superficie. Análogamente, $\|\vec{S}'\| \cos(\epsilon')$ es la energía transmitida. Por lo tanto, el factor de transmisión en intensidad de la componente paralela será

$$T_{||} = \frac{I'_{||}}{I_{||}} = \frac{\langle \|S'_{||}\| \rangle \cos(\epsilon')}{\langle \|S_{||}\| \rangle \cos(\epsilon)} = \frac{A''^2 n' \cos(\epsilon')}{A''^2 n \cos(\epsilon)} \quad (2.47)$$

y, para la componente perpendicular,

$$T_{\perp} = \frac{A''^2 n' \cos(\epsilon')}{A''^2 n \cos(\epsilon)}. \quad (2.48)$$

Si consideramos el factor de reflexión, $\epsilon = \epsilon''$ y $n = n'$, y por lo tanto, se puede escribir

$$R_{||} = \frac{A''^2}{A''^2} \quad R_{\perp} = \frac{A''^2}{A''^2}. \quad (2.49)$$

Como es natural, se debe verificar que

$$R_{||} + T_{||} = 1 \quad R_{\perp} + T_{\perp} = 1 \quad (2.50)$$

y, para el caso de incidencia normal,

$$T_{||} = T_{\perp} = \frac{4nn'}{(n+n')^2} \quad R_{||} = R_{\perp} = \left(\frac{n-n'}{n+n'} \right)^2. \quad (2.51)$$

2.3.5 Estudio de la Reflexión Total

Cuando la luz llega a una superficie de separación de medios ($n' < n$) con un ángulo superior al ángulo límite, toda la luz vuelve al primer medio. Recordemos que el ángulo límite se obtiene cuando se verifica que $n \sin(\epsilon_l) = n' \sin(\pi/2)$. Definamos N como, $N = \sin(\epsilon_l) = n'/n$.

La ley de Snell tiene un claro significado geométrico cuando trabajamos con medios dieléctricos y en las condiciones habituales. Podemos hacer la hipótesis siguiente: la ley de la refracción tiene una validez formal más allá de su significado intuitivo. Consideremos una onda plana incidente sobre una superficie de separación de medios con un ángulo $\epsilon > \epsilon_l$ y $n > n'$. Aceptando la validez formal de la ley de Snell podremos escribir $\sin(\epsilon') = \sin(\epsilon)/N$. En el estudio que estamos realizando, $\sin(\epsilon') > 1$, y el valor de $\cos(\epsilon')$ será, por tanto:

$$\cos(\epsilon') = \pm \frac{i}{N} \sqrt{\sin^2(\epsilon) - N^2}, \quad (2.52)$$

donde $\cos(\epsilon')$ es una magnitud imaginaria. Más adelante, por consideraciones de conservación de la energía, se despreciará el signo $+$. Conociendo el valor de $\sin(\epsilon')$ y de $\cos(\epsilon')$ podemos aplicar ahora las fórmulas de Fresnel. Analizando la figura 2.11, puede comprobarse que los factores de reflexión perpendicular y paralelo toman el valor 1 y -1 respectivamente, para ángulos de incidencia superiores al límite. Podemos estudiar con mayor detalle estos valores del ángulo de incidencia: las fórmulas del factor de reflexión para los dos casos de polarización son:

$$r''_{||} = \frac{\tan(\epsilon' - \epsilon)}{\tan(\epsilon' + \epsilon)}$$

$$r''_{\perp} = \frac{\sin(\epsilon' - \epsilon)}{\sin(\epsilon' + \epsilon)}.$$

Puesto que conocemos los valores de $\sin(\epsilon)$, $\cos(\epsilon)$, $\sin(\epsilon')$ y $\cos(\epsilon')$, podemos escribir las fórmulas de Fresnel en términos de valores conocidos. Despues de hacer unas cuántas operaciones obtenemos que

$$r''_{||} = -e^{i\phi(\epsilon, n, n')} \quad r''_{\perp} = e^{i\theta(\epsilon, n, n')}. \quad (2.53)$$

Éste es un resultado interesante: los coeficientes de reflexión son complejos y de módulo 1. El valor de la amplitud no varía pero la onda incidente y reflejada estén desfasadas. La onda reflejada paralela tendrá por ecuación

$$\vec{E}_{||}'' = \vec{A}_{||} r_{||} \exp(ip(ct - n \vec{r} \vec{s}'')) = \vec{A}_{||} \exp(ip(ct - n \vec{r} \vec{s}'') + i\phi), \quad (2.54)$$

mientras que la componente perpendicular será

$$\vec{E}_{\perp}'' = \vec{A}_{\perp} r_{\perp} \exp(ip(ct - n \vec{r} \vec{s}'')) = -\vec{A}_{\perp} \exp(ip(ct - n \vec{r} \vec{s}'') + i\theta). \quad (2.55)$$

La onda reflejada estará polarizada elípticamente y sus componentes estarán desfasadas $\phi - \theta$. Este desfase depende de n y n' y puede variarse en función del ángulo de incidencia ϵ .

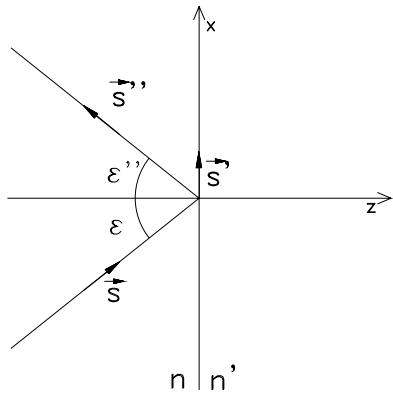


Figura 2.13: Reflexión total

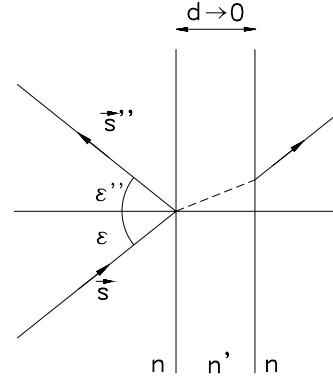


Figura 2.14: Reflexión total frustrada

¿Tiene sentido hablar de luz transmitida? A simple vista, puesto que toda la luz vuelve al primer medio, parece una pregunta sin sentido. No obstante, intentemos escribir la onda en el segundo medio:

$$\vec{E}' = \vec{A}' \exp(ip(ct - \vec{r}\vec{s}')) = \vec{A} \exp(ip(ct - n'(x \sin(\epsilon') + z \cos(\epsilon')))). \quad (2.56)$$

También podemos escribir el valor de $\sin(\epsilon')$ y $\cos(\epsilon')$ en términos del $\sin(\epsilon)$,

$$\vec{E}' = \vec{A} \exp \left(ip \left(ct - n' \left(x \frac{\sin(\epsilon)}{N} + z \left(\frac{\pm i}{N} \sqrt{\sin^2(\epsilon) - N^2} \right) \right) \right) \right) \quad (2.57)$$

y operando,

$$\vec{E}' = \vec{A} \exp \left(\pm \frac{pn'}{N} \sqrt{\sin^2(\epsilon) - N^2} z \right) \exp \left(ip \left(ct - x \frac{\sin(\epsilon)}{N} n' \right) \right). \quad (2.58)$$

La interpretación de esta ecuación es la siguiente:

- El término de amplitud presenta una caída exponencial a medida que se penetra en el segundo medio. Despreciamos el signo $+$ de la exponencial real ya que se trata de una solución sin sentido físico, que daría lugar a una onda que aumentaría indefinidamente su amplitud.
- La dirección del vector de fase es $\vec{s} = (1, 0, 0)$: la onda se propaga en la interfase de los dos medios.

El modelo demuestra la existencia de una onda que penetra unas pocas longitudes de onda en el segundo medio. Esto se corrobora experimentalmente mediante un fenómeno denominado *Reflexión total frustrada* o *Efecto Túnel Óptico*: cuando el segundo medio es una lámina de grosor muy pequeño, y se envía una onda con un ángulo superior al límite, se puede observar que ésta se transmite completamente sin reflejarse. La explicación satisfactoria de este fenómeno debe buscarse en la Física Cuántica, que elimina las inconsistencias de nuestro razonamiento: la onda de la interfase es la misma que después se detecta como reflejada.

2.4 Óptica de medios conductores

2.4.1 Propagación en medios conductores

Consideremos un medio que presenta conductividad $\sigma \neq 0$. Los metales tienen valores de σ muy altos, pero los dieléctricos reales también pueden tener conductividades diferentes de cero. Si este medio es, además, no magnético ($\mu = 1$) y sin densidad volumétrica de carga ($\rho = 0$), las ecuaciones de Maxwell se escriben

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \vec{H} &= 0,\end{aligned}\tag{2.59}$$

donde $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

Podemos ensayar el uso de una onda armónica, $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k\vec{r} \cdot \vec{s})}$, como solución de las ecuaciones de Maxwell en medios con conductividad. La derivada temporal de una onda armónica es proporcional a ella misma,

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k\vec{r} \cdot \vec{s})} = i\omega \vec{E}.\tag{2.60}$$

La primera ecuación de Maxwell se puede escribir como:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \left(-\frac{4\pi\sigma}{\omega} i + \epsilon\right) \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\tag{2.61}$$

que es formalmente idéntica a la ecuación de Maxwell que se aplica en el caso de medios dieléctricos. Es necesario hacer la identificación de la permeabilidad dieléctrica ϵ con una función de la permeabilidad generalizada $\hat{\epsilon} = \epsilon - \frac{4\pi\sigma}{c} i$. Si $\sigma = 0$, obtenemos de nuevo la permeabilidad ordinaria de los medios dieléctricos ideales. Podemos calcular también el índice de refracción generalizado \hat{n} , a partir de la relación $\hat{n}^2 = \hat{\epsilon}$. El índice complejo es $\hat{n} = n - i\kappa$, donde n es el índice de refracción ordinario y κ es el denominado *coeficiente de extinción*. Identificando términos y aislando n y κ podemos escribir

$$\begin{aligned}n &= \left[\frac{\epsilon}{2} + \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \frac{4\pi^2\sigma^2}{\omega^2}} \right]^{1/2} \\ \kappa &= \left[-\frac{\epsilon}{2} + \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \frac{4\pi^2\sigma^2}{\omega^2}} \right]^{1/2}.\end{aligned}\tag{2.62}$$

En el caso particular en que $\sigma/\omega \gg \epsilon$, entonces

$$n \approx \kappa \approx \sqrt{2\pi\sigma/\omega},\tag{2.63}$$

fórmula conocida como la *relación de Drude*.

La solución a la ecuación de ondas en un medio con $\sigma \neq 0$ será

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{ip(ct - \hat{n} \vec{r} \vec{s})} = \vec{E}_0 e^{-\kappa p \vec{r} \vec{s}} e^{ip(ct - n \vec{r} \vec{s})} \quad (2.64)$$

Vemos que es una ecuación similar a la que se obtiene cuando las ondas se propagan libremente en un medio dieléctrico. Sin embargo, la amplitud decae exponencialmente a medida que la onda se propaga. Analicemos como se transmite una onda electromagnética desde un medio dieléctrico a un medio metálico. En esta sección utilizaremos los ángulos θ y θ' para referirnos a los ángulos de incidencia y refracción, para evitar confusiones con la permeabilidad dieléctrica ϵ . Aplicando las condiciones de contorno en un cambio de medio, podríamos deducir de nuevo la fórmula de Snell de la refracción, para este caso. Lo que obtendríamos es una expresión de aspecto familiar,

$$n \sin(\theta) = \hat{n}' \sin(\hat{\theta}'), \quad (2.65)$$

aunque notablemente diferente en cuanto a su interpretación. Ahora, el índice del segundo medio es complejo y $\hat{\theta}'$ es también complejo. El producto $\hat{n}' \sin(\hat{\theta}')$ es real, pero $\hat{n}' \cos(\hat{\theta}') = a - bi$, en general no lo será. La onda en el segundo medio se escribirá

$$\vec{E}' = \vec{E}_0 e^{ip(ct - \hat{n}' \vec{r} \vec{s}')} = \vec{E}_0 \exp(ip(ct - \hat{n}'(x \sin(\hat{\theta}') + z \cos(\hat{\theta}')))), \quad (2.66)$$

y operando obtendremos

$$\vec{E}' = \vec{E}_0 e^{ip(ct - \hat{n}' \vec{r} \vec{s}')} = \vec{E}_0 e^{ip(ct - (x n \sin(\theta) + z a))} e^{-pbz}. \quad (2.67)$$

La onda se amortigua rápidamente a medida que penetra en un medio conductor. Además, la onda se propaga en la dirección $\vec{s}' = (n \sin(\theta), 0, a)$. Por lo tanto, el ángulo de refracción (con sentido físico) es

$$\tan(\theta') = \frac{n \sin(\theta)}{a}. \quad (2.68)$$

Por otra parte, la mayor parte de la luz se refleja. Por ejemplo, si calculamos el factor de reflexión R para incidencia normal desde el aire a un metal, se obtiene

$$R = \left\| \frac{1 - \hat{n}}{1 + \hat{n}} \right\|^2 \approx 1 - \frac{2}{\sqrt{\sigma T}}. \approx 1 \quad (2.69)$$

Esto explica la razón por la que se utilizan recubrimientos metálicos para fabricar espejos.

2.5 Óptica de medios anisótropos

2.5.1 Nomenclatura

Los medios anisótropos se caracterizan por presentar propiedades ópticas diferentes según la dirección considerada. Esto es típico de los materiales cristalinos. En general, el vector campo eléctrico \vec{E} y el vector desplazamiento \vec{D} están relacionados por la relación $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ donde ϵ es un tensor de 3x3 elementos. Es posible demostrar que este tensor es simétrico y, por lo tanto, diagonaliza en una cierta base de vectores ortogonales.

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Podemos definir el tensor de índices,

$$\begin{pmatrix} n_x & 0 & 0 \\ 0 & n_y & 0 \\ 0 & 0 & n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon_x} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\epsilon_y} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\epsilon_z} \end{pmatrix}, \quad (2.71)$$

así como las velocidades principales,

$$v_x = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_x}} \quad v_y = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}} \quad v_z = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_z}}. \quad (2.72)$$

Estas variables contienen información de la física del problema y más adelante serán analizadas con mayor detalle.

2.5.2 Ecuaciones de Maxwell. Soluciones

Consideramos un medio dieléctrico anisótropo, no magnético ($\mu = 1$), sin conductividad ($\sigma = 0$) ni densidad de carga ($\rho = 0$). En estas condiciones, las ecuaciones de Maxwell se escriben:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla} \vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (2.73)$$

La solución de ondas planas armónicas para estas ecuaciones será

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \exp(ip(ct - n\vec{r}\vec{s})) \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 \exp(ip(ct - n\vec{r}\vec{s})) \\ \vec{D} &= \vec{D}_0 \exp(ip(ct - n\vec{r}\vec{s})), \end{aligned} \quad (2.74)$$

donde $n = \frac{c}{v_n}$ es el índice de refracción y v_n es la velocidad de fase. Introduciendo estas soluciones en las ecuaciones de Maxwell, y calculando las derivadas espaciales y temporales correspondientes, obtenemos las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
 n(\vec{H} \wedge \vec{s}) &= \vec{D} \\
 n(\vec{s} \wedge \vec{E}) &= \vec{H} \\
 \vec{H} \vec{s} &= 0 \\
 \vec{D} \vec{s} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

De cada ecuación se deduce una condición:

1. \vec{D} es perpendicular al plano formado por \vec{H} y \vec{s} .
2. \vec{H} es perpendicular al plano formado por \vec{s} y \vec{E} .
3. \vec{H} y \vec{s} son perpendiculares.
4. \vec{D} y \vec{s} son perpendiculares.

Combinando estas cuatro ecuaciones y haciendo desaparecer el campo magnético podemos escribir,

$$\vec{D} = n^2(\vec{E} - \vec{s}(\vec{E} \cdot \vec{s})) \tag{2.76}$$

Manipulando esta ecuación, podemos escribir las componentes del vector \vec{D} ,

$$D_i = \frac{c^2 \vec{E} \cdot \vec{s}}{v_i^2 - v_n^2} s_i, \tag{2.77}$$

de donde se deduce que la dirección del vector \vec{D} es constante, y por lo tanto, que la luz está linealmente polarizada. Multiplicando \vec{D} por \vec{s} se deduce la siguiente relación:

$$\frac{s_x^2}{v_x^2 - v_n^2} + \frac{s_y^2}{v_y^2 - v_n^2} + \frac{s_z^2}{v_z^2 - v_n^2} = 0. \tag{2.78}$$

Como podemos ver a la izquierda de la figura 2.15, los vectores \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{s} y \vec{S} se disponen de la manera que se indica. El vector de Poynting es proporcional al producto vectorial $\vec{E} \wedge \vec{H}$. La dirección del rayo, y por lo tanto, la dirección de la propagación de la energía no coincide con la dirección del vector normal al frente de onda \vec{s} .

La ecuación 2.78 aporta mucha información: $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$ es el vector normal al frente de onda e indica su dirección de propagación. Por otra parte, v_x , v_y y v_z son parámetros que vienen fijados por el medio, puesto que se expresan directamente en términos de las componentes del tensor dieléctrico, y v_n es la velocidad que puede tomar el frente de onda. Fijado el medio y la dirección de propagación \vec{s} , la fórmula 2.78 resulta una ecuación cuya incógnita es v_n . Se puede comprobar que esta ecuación tiene dos soluciones para v_n , que denominaremos v_{n1} y v_{n2} . Por lo tanto, para una posible dirección del frente de onda, se pueden propagar dos ondas que viajan con velocidades diferentes. Se puede comprobar que las polarizaciones de estas ondas (\vec{D}_1 y \vec{D}_2), verifican $\vec{D}_1 \cdot \vec{D}_2 = 0$. Por otra parte, aunque la dirección de propagación de la fase sea común, la dirección del rayo de cada onda es diferente. Estos resultados se muestran gráficamente en la figura 2.15. *Definición:* Las direcciones \vec{s} que verifican que $v_{n1} = v_{n2}$ se denominan **Ejes Ópticos**.

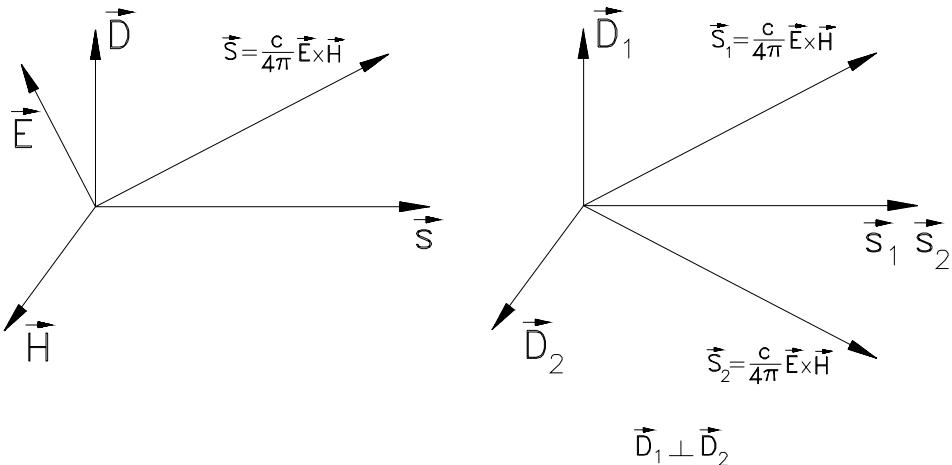


Figura 2.15: Campos propagándose en un medio anisótropo

$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$	Sistema equivalente a un medio homogéneo
$\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$	Sistema uniaxial (un eje óptico)
$\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$	Sistema biaxial (dos ejes ópticos)

Podemos distinguir tres casos:

En el primer caso considerado, los valores de la diagonal del tensor dieléctrico son iguales y, por lo tanto, es como si ϵ fuera un escalar; se puede asimilar este caso a la propagación en un medio homogéneo. Esto es lo que pasa con los materiales que cristalizan en el sistema cúbico. El segundo caso se da en determinados materiales que cristalizan según los sistemas hexagonal, tetragonal o trigonal. Desde el punto de vista óptico presentan la característica de tener un eje óptico. Los cristales que no tienen ninguna dirección de simetría y los tres elementos del tensor dieléctrico son diferentes, tienen dos ejes ópticos.

2.5.3 Medios uniaxiales

Ahora estudiaremos con más detalle los medios uniaxiales. Partimos de la ecuación 2.78. En los medios uniaxiales se verifica que $\epsilon_x = \epsilon_y$ o, lo que es el mismo, $v_x = v_y$. Denominaremos $v_x = v_y = v_o$ (velocidad ordinaria). En los medios uniaxiales la ecuación 2.78 toma la forma

$$(v_o^2 - v_n^2) \left((v_z^2 - v_n^2) \sin^2(\alpha) + (v_o^2 - v_n^2) \cos^2(\alpha) \right) = 0, \quad (2.79)$$

donde hemos escrito el vector \vec{s} en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} s_x &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \\ s_y &= \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ s_z &= \cos(\alpha), \end{aligned} \quad (2.80)$$

α es el ángulo que forma el vector \vec{s} con el eje z y β es el ángulo que forma la proyección del vector \vec{s} en el plano xy con el eje x . Recordemos que la base de vectores que se está utilizando es aquella en la que el tensor dieléctrico diagonaliza. Esta ecuación tiene, como ya comentamos anteriormente, dos soluciones, que en este caso son

$$\begin{aligned} v_{n1} &= v_o \\ v_{n2}^2 &= v_o^2 \cos^2(\alpha) + v_z^2 \sin^2(\alpha). \end{aligned} \quad (2.81)$$

La primera de las soluciones para la velocidad de fase no depende de la dirección \vec{s} considerada y es igual a v_o . Por lo tanto, la velocidad de fase de una de las ondas será siempre v_o (de igual manera que se propagaría una onda en el interior de un dieléctrico homogéneo e isótropo). Como consecuencia de esto, un emisor puntual en el interior de un medio anisótropo uniaxial generaría una onda esférica.

La segunda de las soluciones indica que la onda se propaga con velocidades diferentes según la dirección considerada. v_{n2} es la velocidad extraordinaria. La dirección del eje óptico la encontraremos igualando las dos velocidades de fase obtenidas, $v_{n1} = v_{n2}$. Esta relación se verifica cuando $\alpha = 0$, es decir, cuando el eje óptico coincide con la dirección ‘ z ’ (dirección del vector propio del tensor dieléctrico correspondiente al valor propio ϵ_z).

La solución v_{n2} es la ecuación de una elipse, lo que indica que los frentes de onda asociados son elípticos. Por lo tanto, un emisor puntual en el interior de este medio generaría un frente de onda con forma de elipsoide de revolución.

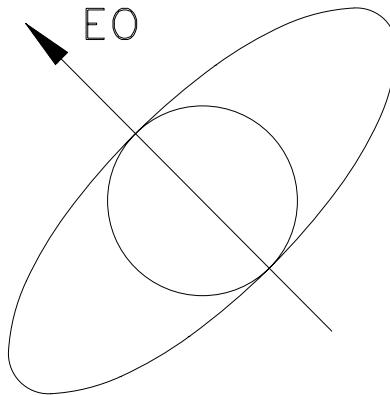


Figura 2.16: Eje óptico y frentes de onda

La figura 2.16 muestra los dos frentes de onda generados. Existe una dirección (eje z) en la que los dos frentes de onda se han propagado a la misma velocidad: es el *eje óptico*. Un problema interesante que podemos estudiar es el comportamiento de una onda plana que incide normalmente sobre una lámina planoparalela de material anisótropo uniaxial, como por ejemplo, la calcita.

La figura 2.17 ilustra el experimento. Una onda plana incide normalmente, y por lo tanto, el vector normal al frente de onda \vec{s} no se desvía al cambiar de medio (ángulo de incidencia, 0^0 , ángulo de refracción 0^0). En el interior del medio uniaxial viajarán dos ondas, las polarizaciones de las cuales serán normales entre si. La dirección de la energía vendrá dada por el vector de Poynting $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{H}$. En un medio uniaxial, una de las ondas se comporta como si se propagara en un medio ordinario, por lo tanto, la dirección del

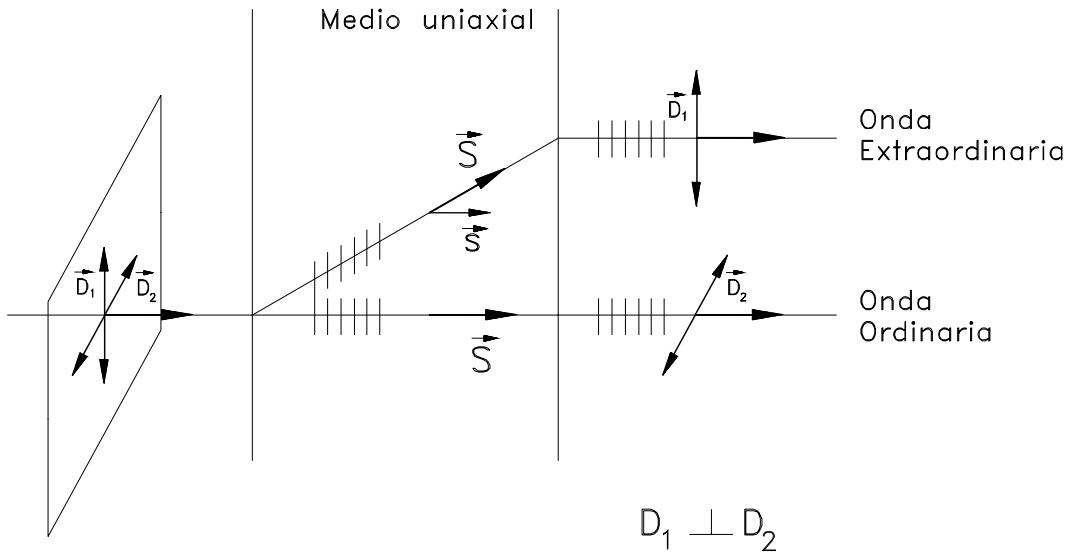


Figura 2.17: Onda ordinaria y extraordinaria en un medio uniaxial

vector de fase \vec{s}' y la del vector de Poynting son coincidentes. En cambio, para la onda extraordinaria estos dos vectores tendrán direcciones diferentes. Además, estas dos ondas se propagan con velocidades de fase v_{n1} y v_{n2} y, por lo tanto existirá un desfase entre ellas.

Cuando los frentes de onda llegan al segundo plano de separación de medios, se producirá una nueva refracción. En el caso de la onda ordinaria, el vector de fase incide normalmente y por lo tanto la onda no se desvía. En cuanto a la onda extraordinaria, la dirección del rayo forma un cierto ángulo con la superficie de separación. En cambio, el vector de fase incide normalmente sobre esta superficie. Como vimos anteriormente, al deducir la ley de la refracción, ésta se aplica sobre la dirección del vector de fase \vec{s}' y no sobre la dirección del rayo \vec{S} (que en el caso de los medios dieléctricos ordinarios son coincidentes). Por lo tanto, se trata también de incidencia normal y, en consecuencia las dos ondas, ordinaria y extraordinaria, salen con direcciones del vector de Poynting paralelas.

Visualmente, si observamos un objeto interponiendo un cristal de calcita con caras planoparalelas, observaremos que la imagen se desdobra. Una imagen aparece justo en la misma posición donde está el objeto (onda ordinaria) y la otra sale desplazada (onda extraordinaria). Utilizando un polarizador verificaríamos que estas dos ondas están polarizadas linealmente y sus direcciones de polarización son normales entre sí.

2.5.4 Láminas retardadoras

Un ejemplo interesante de dispositivo óptico basado en los materiales anisótropos uniaxiales son las láminas retardadoras. Para cualquier dirección de propagación de la fase pueden viajar dos ondas con polarizaciones perpendiculares entre sí. Consideremos una lámina planoparalela de un material uniaxial, de grosor d y cortada de manera que el eje óptico sea paralelo a las caras de la lámina. Al incidir normalmente un haz de luz sobre ésta, en el interior de la lámina se propagarán dos ondas: como se trata de un medio uniaxial, la onda ordinaria viajará sin cambiar de dirección. Sin embargo, como que el eje óptico es paralelo a las caras, el rayo asociado a la onda extraordinaria también se propagará en

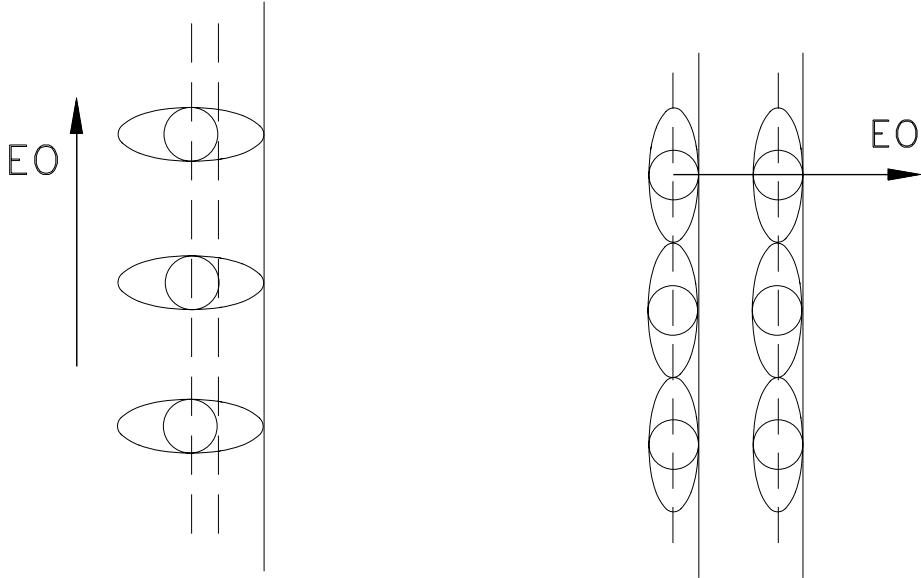


Figura 2.18: Propagación según una dirección normal al eje óptico

Figura 2.19: Propagación según el eje óptico

la misma dirección, según se indica en la figura 2.18. Ahora bien, los dos rayos llegarán desfasados a la segunda cara de la lámina, puesto que el índice de refracción es diferente para cada uno. Por lo tanto, tenemos dos ondas desfasadas con polarizaciones ortogonales entre sí y que viajan en la misma dirección. En general, tendremos luz polarizada elíptica. El desfase entre las dos componentes se calcula haciendo:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} n_e d - \frac{2\pi}{\lambda} n_0 d. \quad (2.82)$$

donde $n_0 = c/v_0$ y $n_e = c/v_e$. Por lo tanto, tomando d de forma apropiada, podemos obtener láminas que generen, por ejemplo, un desfase de $\pi/2$ entre ambas componentes tomando $d = \lambda/4(n_e - n_0)$ (denominadas láminas $\lambda/4$). Las láminas que generan un de desfase π se denominan láminas $\lambda/2$. Con una lámina $\lambda/4$ y polarizadores lineales se puede obtener fácilmente luz polarizada circular.

Un último comentario: si el eje óptico fuese perpendicular a las caras de la lámina, no apreciaríamos ningún desfase entre las dos componentes ya que las dos ondas se propagan a la misma velocidad (véase la figura 2.19).

Capítulo 3

Interferencias

3.1 Coherencia

3.1.1 Coherencia temporal y monocromaticidad

Un *sistema físico aislado* (piénsese en un átomo, por ejemplo), con sus niveles energéticos perfectamente definidos es una idealización que permite explicar la existencia de ondas monocromáticas. Si este sistema se encuentra en el nivel de energía W_2 y pasa a un estado de energía W_1 tal que $W_2 > W_1$, la física cuántica predice que se genera un fotón cuya longitud de onda verifica $\lambda_0 = hc/(W_2 - W_1)$, donde h es la constante de Planck. Si el sistema considerado no es ideal sus niveles energéticos pueden estar degenerados, y los fotones que se emitan tendrán una longitud de onda que fluctuará en el intervalo $[\lambda_0 - \Delta\lambda, \lambda_0 + \Delta\lambda]$. Además, las transiciones energéticas posibles entre la banda de energía 2 y la banda 1 no tienen que ser equiprobables. Podemos definir, por lo tanto, una distribución $P(\lambda)$ que indique la probabilidad de generar un fotón con una cierta longitud de onda. Algunas causas que hacen que los niveles energéticos estén degenerados pueden ser el efecto Doppler como consecuencia de la agitación térmica o bien las colisiones entre las partículas que formen el material. En estos casos, la forma de $P(\lambda)$ es aproximadamente como la que muestra la figura 3.1, mientras que en el caso ideal $P(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0)$.

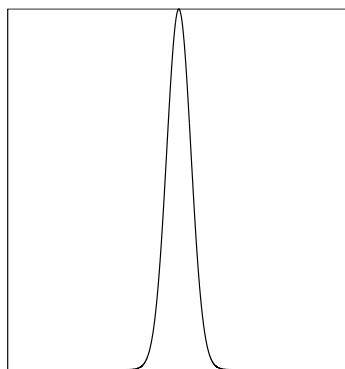


Figura 3.1: Distribución $P(\lambda)$

El campo eléctrico asociado a una onda plana ideal es $\vec{E} = \vec{a} \exp(i(wt - kx))$, donde la amplitud $|\vec{a}|$ será constante, en valor y dirección. En el caso no ideal, la onda que obtendremos se escribirá como superposición (suma) de ondas monocromáticas, es decir:

$$\vec{E} = \sum_{\lambda_0 - \Delta \lambda}^{\lambda_0 + \Delta \lambda} \vec{a}(\lambda) \exp(i(w(\lambda)t - kx)), \quad (3.1)$$

donde $|\vec{a}(\lambda)|$ se relaciona directamente con $P(\lambda)$ y, si la longitud de onda en el sumatorio anterior es una variable continua, la ecuación anterior se convertirá en una integral. Un análisis en profundidad de las matemáticas involucradas en la expresión anterior nos aportará un resultado muy interesante: una onda real, suma de diferentes contribuciones monocromáticas, está limitada en el espacio y constituye lo que se denomina un paquete de ondas. La longitud física del paquete de ondas se denomina *longitud de coherencia*, l_c (véanse las figuras 3.2 y 3.3). Cuando más monocromática es la onda (cuando más estrecha sea la distribución $P(\lambda)$ de la figura 3.1), mayor es l_c : en el límite, una onda plana es perfectamente monocromática y su longitud de coherencia es infinita.

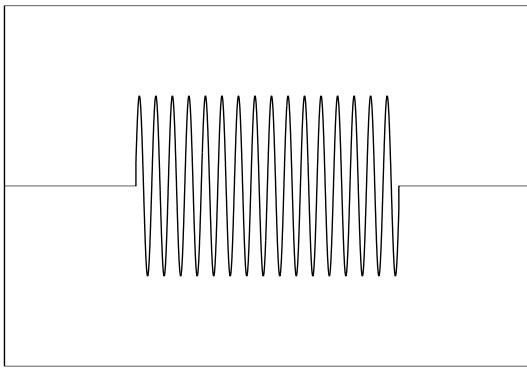


Figura 3.2: Longitud de coherencia finita

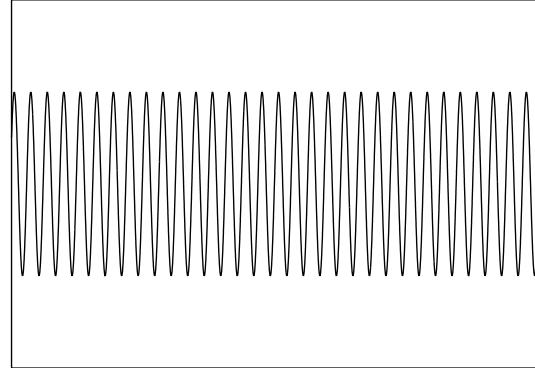


Figura 3.3: Longitud de coherencia infinita: onda plana

Cuando se genera un paquete de ondas, se introduce una fase inicial aleatoria ϕ . Dos paquetes de ondas tendrán fases iniciales diferentes. Es necesario utilizar iluminación láser en los experimentos de interferencias para evitar los problemas derivados de la coherencia. Los láseres presentan una alta monocromatidad, y por lo tanto, sus longitudes de coherencia son muy elevadas.

3.1.2 Condiciones para obtener imágenes de interferencia estables

En general, cuando dos ondas \vec{E}_1 y \vec{E}_2 se encuentran en el espacio, no interactúan de forma apreciable. Ahora bien, si se verifican unas determinadas condiciones, estas ondas pueden generar una distribución de intensidad con zonas donde la energía se potencia y otras en las que la energía disminuye. Las condiciones para obtener imágenes de interferencia estables son cuatro:

1. Las ondas que interfieren deben ser coherentes.
2. Las ondas deben tener la misma frecuencia.
3. Los campos eléctricos deben ser paralelos.
4. Las amplitudes de los campos deben ser iguales.

Tomamos dos ondas planas de polarización, amplitud, frecuencia, fase inicial y dirección de propagación diferentes, que se superponen en un punto del espacio P :

$$\vec{E}_1 = \vec{A}_1 \exp(i(w_1 t - k_1 \vec{r}_P \vec{s}_1 + \phi_1)) \quad \vec{E}_2 = \vec{A}_2 \exp(i(w_2 t - k_2 \vec{r}_P \vec{s}_2 + \phi_2)). \quad (3.2)$$

Si captamos la intensidad en este punto P tendremos

$$I \propto \left| \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right|^2 = \left| \vec{A}_1 \exp(i(w_1 t - k_1 \vec{r}_P \vec{s}_1 + \phi_1)) + \vec{A}_2 \exp(i(w_2 t - k_2 \vec{r}_P \vec{s}_2 + \phi_2)) \right|^2, \quad (3.3)$$

y desarrollando,

$$\begin{aligned} I \propto & \left| \vec{A}_1 \right|^2 + \left| \vec{A}_2 \right|^2 + \left| \vec{A}_1 \right| \left| \vec{A}_2 \right| e^{i(w_1 t - k_1 \vec{r}_P \vec{s}_1 + \phi_1)} e^{-i(w_2 t - k_2 \vec{r}_P \vec{s}_2 + \phi_2)} \cos(\theta_{12}) + \\ & \left| \vec{A}_1 \right| \left| \vec{A}_2 \right| e^{-i(w_1 t - k_1 \vec{r}_P \vec{s}_1 + \phi_1)} e^{i(w_2 t - k_2 \vec{r}_P \vec{s}_2 + \phi_2)} \cos(\theta_{12}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde θ_{12} es el ángulo formado por los dos vectores campo eléctrico. Esta intensidad es función del tiempo. Las variaciones que presenta esta función serán muy rápidas en el rango de las frecuencias ópticas. Por lo tanto, la magnitud que se detectará será la media temporal de la intensidad. Para apreciar fenómenos interferenciales deben cumplirse las condiciones expuestas anteriormente:

Las ondas que interfieren deben ser coherentes entre sí. Si los dos haces de luz que interactúan son incoherentes, las fases iniciales asociadas a cada onda irán cambiando aleatoriamente. Por lo tanto, la diferencia $\phi_1 - \phi_2$ que aparece en los términos cruzados de la ecuación 3.4 variará aleatoriamente. Puesto que la media temporal de una fase que varía al azar es nula, los términos cruzados de la ecuación 3.4 también serán nulos. Este problema se evita cuando la diferencia $\phi_1 - \phi_2$ es constante en el tiempo, es decir, cuando los paquetes de onda son coherentes. Esto se consigue a partir de un único haz de luz, dividiéndolo en dos y haciendo que cada uno acumule un camino óptico diferente. Los dos haces resultantes llegarán con un determinado desfase. Si la diferencia de camino óptico es inferior a la longitud de coherencia, durante una fracción de tiempo se verificará la condición $\phi_1 - \phi_2 = \text{constante}$ y los dos paquetes de onda se superpondrán parcialmente (véase figura 3.4). Los paquetes de onda que vengan a continuación también se superpondrán. Cuanto más largos sean los paquetes de onda y más se superpongan, los fenómenos interferenciales se observarán con mayor facilidad.

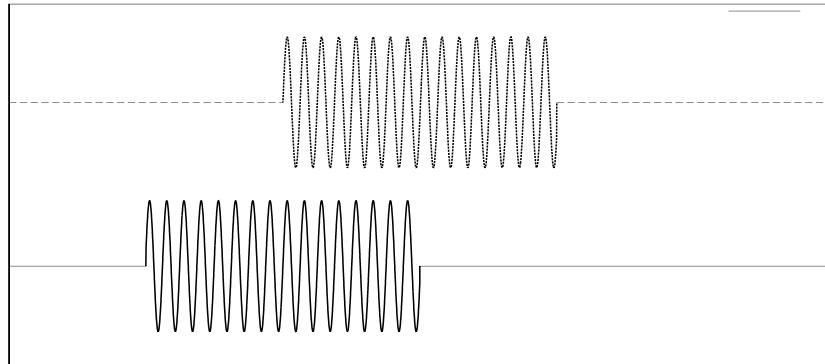


Figura 3.4: Superposición parcial de a dos paquetes de onda

Las ondas deben tener la misma frecuencia. Si w_1 y w_2 son diferentes, la intensidad dependerá del tiempo y, en este caso, la media temporal también será cero.

Los campos eléctricos deben ser paralelos. Si los campos eléctricos no son paralelos, el término $\cos(\theta_{12})$ actuará haciendo que los términos cruzados tengan una importancia menor respecto a los términos constantes $\left| \vec{A}_1 \right|^2 + \left| \vec{A}_2 \right|^2$. En particular, cuando las polarizaciones están en cuadratura,

los términos cruzados desaparecen. Éste es el caso que corresponde al estudio de la luz polarizada. Si $0 < \theta_{12} < \pi/2$, se superpone luz polarizada a las interferencias. La visualización de fenómenos interferenciales se optimiza cuando los campos eléctricos son estrictamente paralelos.

La ecuación 3.4 de la intensidad, se escribe ahora (se verifica la condición de coherencia, la igualdad de frecuencias y el paralelismo de los campos)

$$I \propto A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(k\vec{r}_P(\vec{s}_1 - \vec{s}_2)). \quad (3.5)$$

Se ha prescindido del carácter vectorial de los campos para escribir las amplitudes. Esto es posible ya que se ha impuesto que los campos eléctricos deben tener todos la misma dirección. La polarización es una información que no aporta nada a la física del problema. Los planteamientos en óptica donde la dirección de polarización no es una información relevante conforman una parte de la óptica que se denomina *teoría escalar de la luz*.

Las amplitudes de los campos deben ser iguales. Si, además, la amplitud los campos es la misma, ($A_1 = A_2 = A$), entonces la distribución de intensidad se escribe

$$I \propto 4A^2 \cos^2 \left(\frac{k\vec{r}_P(\vec{s}_1 - \vec{s}_2)}{2} \right). \quad (3.6)$$

Cuando se verifican las dos primeras condiciones, la figura de interferencia es estable. Si además se asegura el paralelismo de los campos, se puede observar claramente el comportamiento interferencial. La distribución de intensidad tiene un contraste óptimo cuando, además, las amplitudes de las dos ondas que interaccionan son iguales.

3.2 Interferencias de Young

3.2.1 Descripción del experimento

Consideremos el experimento siguiente: dos emisores puntuales S_1 y S_2 , coherentes entre sí, emiten ondas esféricas con igual frecuencia y polarización: $a_1/r \exp(ikr - \omega t)$ y $a_2/r \exp(ikr - \omega t)$. Sea d la separación entre las dos fuentes. Sea $z = -D$ el plano que contiene las dos fuentes. Consideramos un punto de observación P situado en $(x, y, 0)$. Supongamos, sin perder generalidad, que el índice del medio es $n = 1$. La intensidad que detectaremos en este punto vendrá dada por la ecuación 3.6. Aunque las distancias S_1P y S_2P son diferentes, si D es lo suficiente grande, las amplitudes de las ondas en el punto P se pueden considerar iguales. Intentemos reescribir esta ecuación de forma que resulte más cómoda de utilizar. El producto escalar $\vec{r}_P(\vec{s}_1 - \vec{s}_2)$ no es más que $d_1 - d_2$, donde d_1 y d_2 son las distancias entre las fuentes S_1 y S_2 respectivamente y el punto de observación P (d_1 , por ejemplo, es la proyección del vector \vec{r}_P según la dirección fijada por la fuente S_1 y el punto P). $d_1 - d_2$ es la diferencia de camino óptico Δ , mientras que $k(d_1 - d_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(d_1 - d_2)$ es la diferencia de fase. Las fuentes S_1 y S_2 se encuentran en los puntos $(-d/2, 0, -D)$ y $(d/2, 0, -D)$, respectivamente. Aplicando la definición de distancia, tenemos que

$$d_1 - d_2 = \sqrt{(x + d/2)^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{(x - d/2)^2 + y^2 + D^2}. \quad (3.7)$$

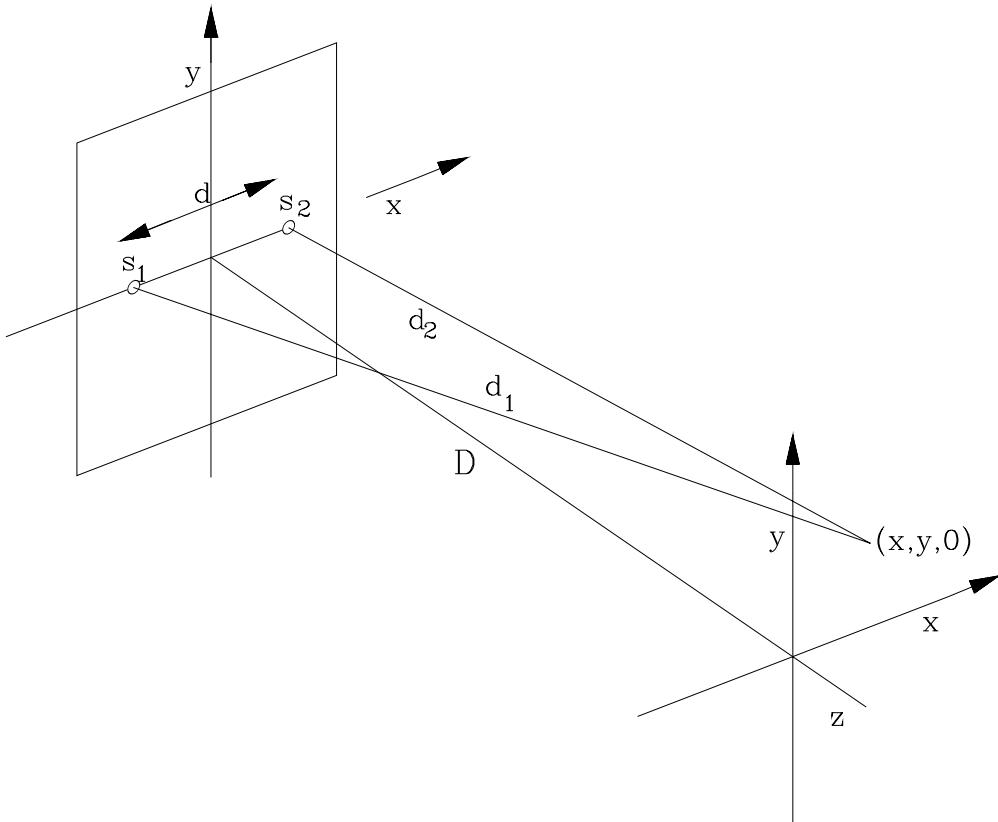


Figura 3.5: Interferencia de dos ondas esféricas

En el experimento de Young se toma la distancia de observación D mucho más grande que la distancia entre las fuentes d . Si se verifica esta condición $d \ll D$, entonces $d_1 + d_2 \approx 2D$ y la diferencia $d_1 - d_2$ puede escribirse

$$d_1 - d_2 = \frac{d_1^2 - d_2^2}{d_1 + d_2} = \frac{2xd}{d_1 + d_2} \approx \frac{xd}{D}. \quad (3.8)$$

y por lo tanto, la ecuación de la intensidad se escribirá

$$I \propto 4A \cos^2 \left(\frac{kxd}{2D} \right) = 4A \cos^2 \left(\frac{\pi xd}{\lambda D} \right), \quad (3.9)$$

donde A es la amplitud en el plano de observación, $A = a_1/d_1 = a_2/d_2$

Análisis de la figura de franjas de Young

- Una vez se ha fijado la geometría (d, D) y la longitud de onda, la intensidad que se registra es sólo una función de la variable x , $I(x)$: por lo tanto, todos los puntos con la misma intensidad estarán en rectas paralelas al eje y .
- El perfil de la intensidad según el eje x varía como un coseno al cuadrado. Se trata de una función que se hace máxima cuando $xd/D = m\lambda$ (m entero), y se hace cero cuando $xd/D = \frac{2m+1}{2}\lambda$. El máximo de orden m se encontrará en la posición

$$x_m = m\lambda \frac{D}{d}, \quad (3.10)$$

y la distancia entre dos máximos (*interfranja*) será

$$x_m - x_{m-1} = \lambda \frac{D}{d}. \quad (3.11)$$

3.2.2 Dispositivos por obtener franjas de Young

Existen algunos dispositivos experimentales que permiten reproducir con facilidad el experimento de Young. Se trata de conseguir que los dos emisores puntuales sean coherentes entre sí, es decir, que la fase aleatoria sea la misma de manera que la diferencia de camino óptico Δ sea inferior a la longitud de coherencia l_c . La única posibilidad para conseguir esto es generar imágenes geométricas de un único foco puntual de luz.

- Por ejemplo, el biprisma de Fresnel consiste en un dispositivo como el que se muestra en la figura 3.6. El ángulo α es muy pequeño. Si colocamos una fuente de luz a distancia a del prisma, se puede demostrar que un observador situado al otro lado del prisma (a su derecha según la figura) verá dos fuentes de luz (coherentes entre sí) correspondientes a las imágenes geométricas de la fuente de luz a través del biprisma.

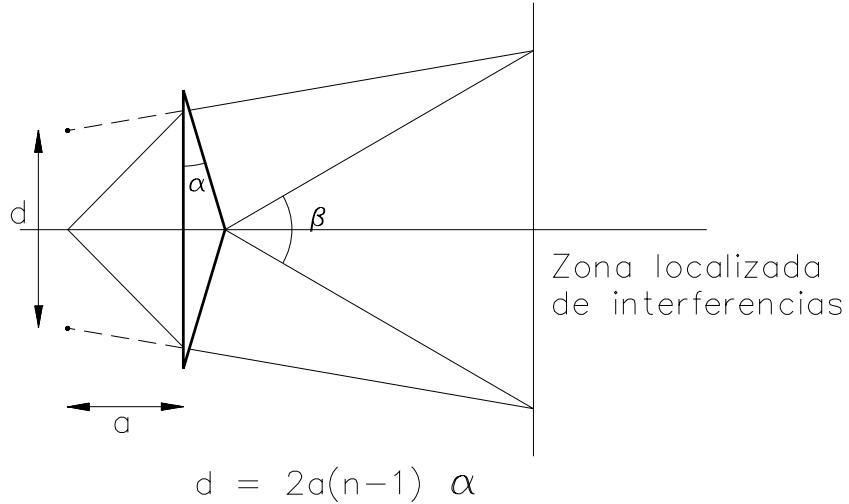


Figura 3.6: Biprisma de Fresnel

- Otra posibilidad es utilizar el espejo de Lloyd. Se trata de colocar una fuente delante de un espejo. La imagen virtual de la fuente a través del espejo actuará como segunda fuente coherente con la primera. Si se trata de un espejo dieléctrico, el rayo reflejado tiene un cambio de fase π adicional. Se puede comprobar que esto implica que la figura de interferencias sea complementaria a la deducida anteriormente: allá donde había máximos tendremos mínimos y viceversa.

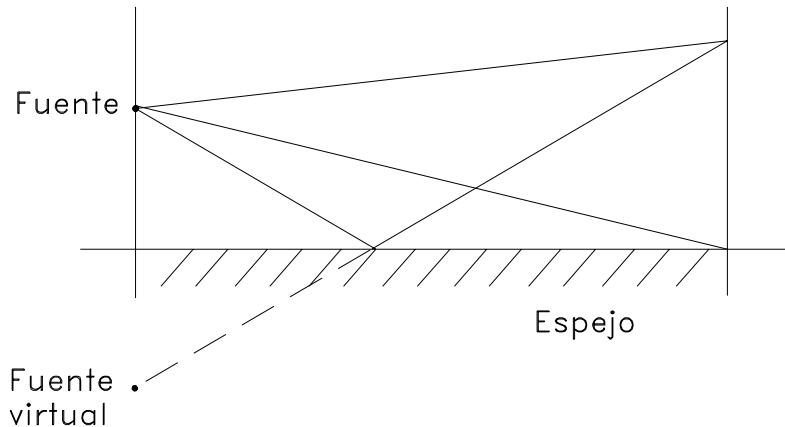


Figura 3.7: Espejo de Lloyd

3.2.3 Coherencia espacial

En el apartado anterior hemos considerado que la fuente de luz original es puntual. En cambio, las fuentes de luz reales tienen unas determinadas dimensiones. Definimos el *contraste de las franjas* (también denominado factor de visibilidad, V) como el cociente

$$V = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m}, \quad (3.12)$$

donde I_M e I_m son las intensidades máxima y mínima en una distribución de interferencias. Para un experimento de Young ideal, $I_m = 0$, y por lo tanto, el contraste de las franjas será siempre óptimo, $V = 1$. En cambio, si las amplitudes de las dos ondas que interfieren son diferentes, $I_m \neq 0$ y, en este caso, $V < 1$. Si no se aprecian interferencias, $I_m = I_M$, entonces $V = 0$.

Si la fuente de luz que ilumina el sistema no es puntual, el factor de visibilidad también puede ser inferior a 1, incluso verificándose estrictamente las cuatro condiciones para obtener imágenes de interferencias estables. El fenómeno de la pérdida de contraste en las franjas a consecuencia de las dimensiones de la fuente está relacionado con el concepto de *Coherencia espacial*. El estudio de este fenómeno se hace considerando que cada punto de la fuente es un emisor puntual que genera su sistema de franjas de interferencia. Se puede demostrar que cada uno de estos emisores elementales genera un sistema de franjas con un origen diferente (posición del máximo $m = 0$). La superposición de los diferentes términos \cos^2 de la ecuación 3.9, con un pequeño desplazamiento entre ellas, provoca la pérdida de contraste.

3.3 Dispositivos interreferométricos

3.3.1 Interferencias en láminas dieléctricas

Consideremos el siguiente problema: sea una lámina dieléctrica planoparalela de grosor d . El índice de refracción del material es n y el medio externo a la lámina tiene un índice $n = 1$. Sobre esta lámina incide una onda electromagnética plana polarizada linealmente y de amplitud a , con la dirección de propagación que forma un ángulo ϵ con la dirección normal a las caras de la lámina. Al llegar a la primera cara de

la lámina, parte de la luz se refleja y parte se transmite. Las amplitudes transmitida y reflejada vienen dadas por at y ar , donde $t = t(n, n', \epsilon)$ y $r = r(n, n', \epsilon)$ son los coeficientes de transmisión calculados a partir de las fórmulas de Fresnel. La luz que se transmite viaja por el medio dieléctrico hasta que se encuentra de nuevo con la superficie de separación de medios. Parte de la luz se refleja internamente y parte se transmite al medio exterior. La luz que se refleja internamente genera, a su vez, nuevos términos que se transmiten y reflejan. La figura 3.8 muestra los diferentes rayos y los valores de la amplitud. El coeficiente de reflexión calculado, cuando la reflexión se produce desde un medio de índice n sobre un material de índice n' o al revés, tiene el mismo valor en módulo, $|r| = |r'|$. Esto no es válido para la transmisión, puesto que $t \neq t'$ (recuérdese que aquí se verifica $tt' = 1 - r^2$).

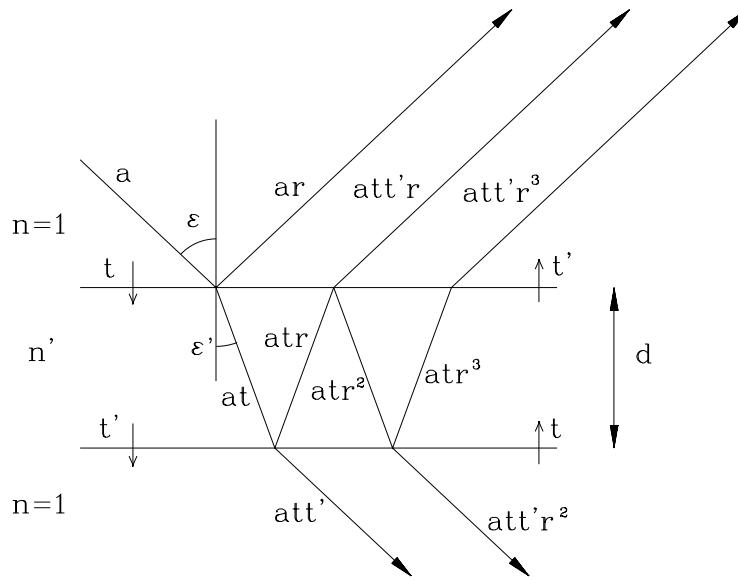


Figura 3.8: Haz de ondas emergiendo de una lámina dieléctrica

El paso siguiente en el estudio de este problema consiste en sumar todas las contribuciones de los rayos que emergen o bien de la primera cara (luz reflejada) o bien de la segunda (luz transmitida). Todos los rayos salen paralelos, y por lo tanto, mediante una lente convergente podemos concentrar todas las contribuciones en un punto del plano focal de la lente. Para poder realizar la suma es necesario conocer el desfase entre ellas y escribir así los términos de la serie. Recordemos que el desfase δ es proporcional a la diferencia de camino óptico Δ , $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$. Nos podemos fijar en la figura 3.9.

El camino óptico del rayo que viaja por el interior de la lámina pasa por los puntos I_1 , I'_1 y I_2 . Por lo tanto, la diferencia de camino óptico entre la onda que pasa por el interior de la lámina y la que se refleja directamente es:

$$\Delta = (I_1 I'_1 + I'_1 I_2) - I_1 E = 2d \cos(\epsilon'). \quad (3.13)$$

Es importante observar que se resta la cantidad $I_1 E$: como se trabaja con ondas planas, a partir del plano definido por los puntos I_2 y E , el camino óptico será idéntico. Finalmente, el desfase es

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} d \cos(\epsilon') \quad (3.14)$$

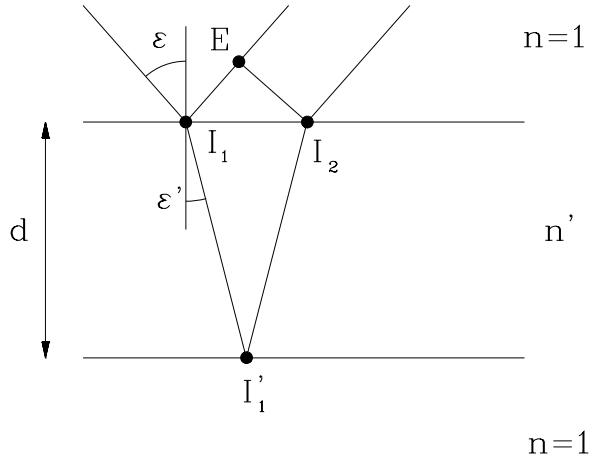


Figura 3.9: Cálculo del camino óptico

Consideremos ahora todas las contribuciones que se han transmitido a través de la lámina. Los campos se escriben de la manera siguiente:

1. $E_1 = att' \exp(i(wt - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0))$
2. $E_2 = att'r^2 \exp(i(wt - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0 + \delta))$
3. $E_3 = att'r^4 \exp(i(wt - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0 + 2\delta))$
4. $E_4 = att'r^6 \exp(i(wt - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0 + 3\delta))$
5. ...
6. $E_{n+1} = att'r^{2n} \exp(i(wt - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0 + n\delta)) = E_1 r^{2n} e^{in\delta}$

δ_0 hace referencia a una cierta fase constante inicial en relación al origen de coordenadas. Las diferentes contribuciones se pueden sumar con facilidad puesto que se trata de una serie geométrica de razón $r^2 e^{i\delta}$. El campo total transmitido será

$$E_T = \sum_i E_i = E_1 \frac{1}{1 - r^2 e^{i\delta}} = att' \exp(i(wt - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0)) \frac{1}{1 - r^2 e^{i\delta}}. \quad (3.15)$$

La intensidad se obtendrá haciendo

$$I_T = \frac{c}{8\pi} E_T E_T^* = \frac{c}{8\pi} \left| att' \frac{1}{1 - r^2 e^{i\delta}} \right|^2. \quad (3.16)$$

Calculando, y recordando que $tt' = 1 - r^2$, se obtiene finalmente que

$$I_T = \frac{c}{8\pi} \frac{a^2}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \sin^2(\delta/2)} \quad (3.17)$$

Por lo que hace referencia a la luz que se refleja en la lámina, no es necesario repetir todo el cálculo. Se debe tener en cuenta que la intensidad total de la luz incidente vale $(c/8\pi)a^2$ y por lo tanto,

$$I_R = \frac{c}{8\pi}a^2 - I_T = \frac{c}{4\pi} \frac{a^2 \sin^2(\delta/2)}{\frac{(1-r^2)^2}{4r^2} + \sin^2(\delta/2)}. \quad (3.18)$$

Las expresiones de la intensidad transmitida y reflejada presentan máximos y mínimos cuando se verifican las condiciones descritas en la tabla siguiente:

Caso	Extremo	Desfase	Valor del extremo
Luz transmitida	Máximo	$\delta = 2\pi m, m$ entero	a^2
Luz transmitida	Mínimo	$\delta = (2m + 1)\pi, m$ entero	$\frac{c}{8\pi} \frac{a^2}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2}}$
Luz reflejada	Máximo	$\delta = (2m + 1)\pi, m$ entero	$\frac{c}{8\pi} \frac{a^2}{1 + \frac{(1-r^2)^2}{4r^2}}$
Luz reflejada	Mínimo	$\delta = 2\pi m, m$ entero	0

Antes de continuar es necesario hacer algunos comentarios sobre como se ha hecho la deducción de la ecuación de la intensidad en función del desfase:

- No se han tenido en cuenta los efectos de la polarización, cuando es conocido que los coeficientes de reflexión y transmisión r y t son diferentes si hacen referencia a la polarización perpendicular o paralela. Para ángulos de incidencia pequeños, $\epsilon \approx 0$, $r_{||} \approx r_{\perp}$. Como veremos más adelante, los dispositivos ópticos basados en interferencias de ondas en láminas dieléctricas trabajan con incidencias casi normales.
- Además, en algunos dispositivos, como el interferómetro de Fabry-Perot, las caras del dieléctrico están semiespejadas, o bien tienen un recubrimiento multicapa. Así se consigue un coeficiente de reflexión próximo a la unidad y prácticamente constante para todos los ángulos de incidencia y longitudes de onda.
- El grueso de la lámina no puede ser arbitrariamente grande. Para que se produzcan interferencias es necesario que la diferencia de caminos ópticos de los rayos que interfieran sea inferior a la longitud de coherencia. Cuando más gruesa sea la lámina, con más dificultad se verificará esta condición.
- En los dispositivos experimentales se suele trabajar con fuente extensa y, por lo tanto, ϵ puede tomar un rango continuo de valores. Como resultado, se observarán anillos de intensidad constante para cada valor de ϵ , puesto que existe simetría de revolución alrededor de la incidencia normal.

En la figura 3.10, podemos ver la dependencia de la intensidad transmitida y reflejada en función de $\delta = 2d \cos(\epsilon')$.

La figura 3.11 muestra un espectro real de transmisión: se trata de un experimento en el cual la incidencia es normal, $\cos(\epsilon') = 1$. En este caso, una lámina dieléctrica es iluminada en el rango de longitudes de onda del visible y se analiza la transmitancia de la misma, es decir, representamos $I(\lambda)$ (en este caso, $n' = n'(\lambda)$, d y r son constantes).

$$I_T(\lambda) \propto \frac{1}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \sin^2\left(\frac{2\pi n(\lambda)d}{\lambda}\right)}. \quad (3.19)$$

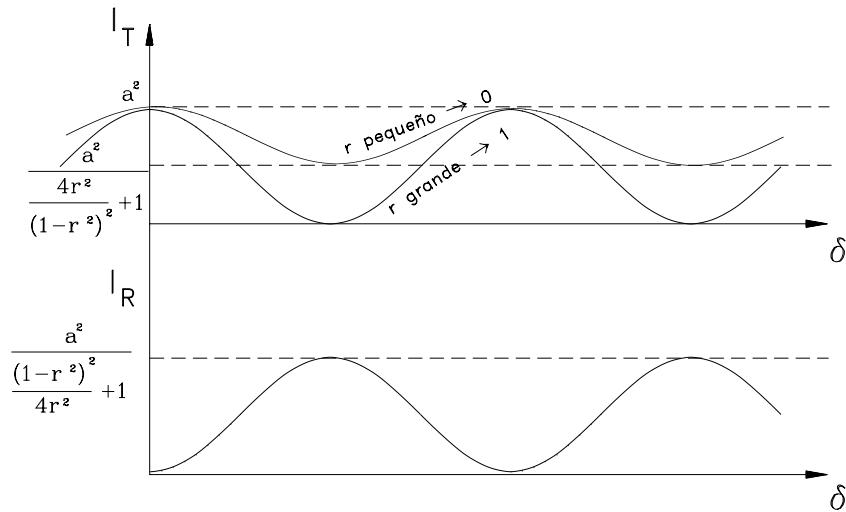


Figura 3.10: Intensidad en función del desfase

En este ejemplo tenemos un dieléctrico real (la conductividad no es nula). Por lo tanto, no todos los máximos tienen la misma altura.

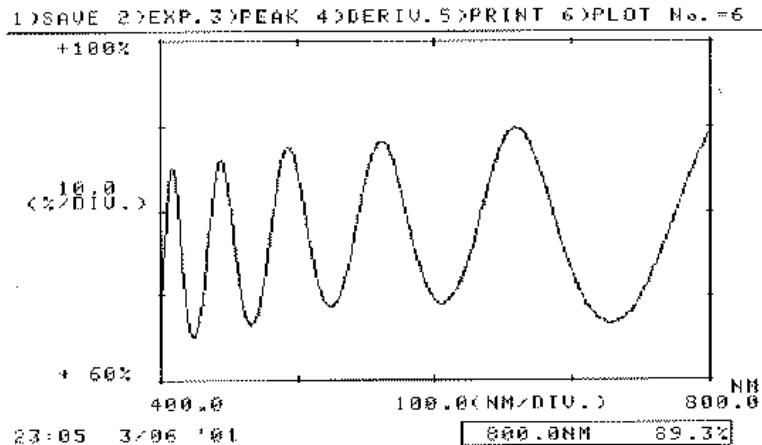


Figura 3.11: Espectro real de transmisión de una lámina dieléctrica

3.3.2 Láminas antirreflejantes

Los recubrimientos antirreflejantes se utilizan para conseguir que la mayor parte de la luz incidente se transmita y no se pierda por reflexión. Por ejemplo, en caso de incidencia normal en una interfase aire-vidrio, el 4% de la energía se refleja. Así, en un sistema óptico formado por muchas lentes, las pérdidas de luz acumuladas pueden hacer que el sistema sea inviable. En esta sección demostraremos que al recubrir el vidrio de una lámina delgada de material dieléctrico y grosor apropiado, la energía que vuelve al primer medio por reflexión se hace cero.

Consideremos un sistema como el que muestra la figura 3.12. Se trata de un material transparente, de

índice de refracción n_v , sobre el que se ha depositado un dieléctrico de grosor d e índice n . Además, impondremos la condición $1 < n < n_v$. Consideremos que la luz incide sobre el sistema con un ángulo muy próximo a cero, $\epsilon \approx 0$. La amplitud inicial de la onda es a , y los coeficientes de reflexión y transmisión en las interfasas se encuentran indicados a la figura 3.12.

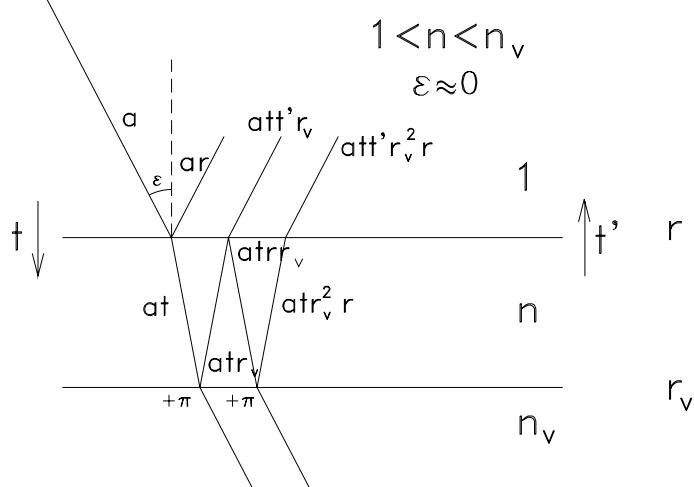


Figura 3.12: Lámina antirreflejante

En las reflexiones en las que el índice del primero medio es menor que el segundo, debe añadirse $+\pi$ a la fase de la onda. Según esto, todos los rayos reflejados, incluyendo el que se refleja directamente desde el aire sobre el medio de índice n , incorporan un factor $+\pi$ a su fase. La luz reflejada será la suma de todas las contribuciones que vuelven al primer medio. Puesto que se desea que la luz no se refleje, la suma de todas estas contribuciones tiene que ser cero. Escribiendo los diferentes términos, igual que lo hicimos a la ecuación 3.15:

1. $E_1 = ar \exp(i(wt - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0 + \pi))$
2. $E_2 = att'r_v \exp(i(wt - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0 + \delta + \pi))$
3. $E_3 = att'r_v^2 r \exp(i(wt - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0 + 2(\delta + \pi)))$
4. $E_4 = att'r_v^3 r^2 \exp(i(wt - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0 + 3(\delta + \pi)))$
5. \dots
6. $E_n = att'r_v^{n-1} r^{n-2} \exp(i(wt - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0 + (n-1)(\delta + \pi))),$

donde δ_0 hace referencia a una cierta fase constante inicial en relación al origen de coordenadas y $\delta = \frac{4\pi}{\lambda}nd$ es la diferencia de fase, tal y como se ha visto a la ecuación 3.14. Si se impone que todas los términos salgan en fase entre sí a partir del segundo rayo, se debe verificar que

$$\frac{4\pi}{\lambda}nd + \pi = 2m\pi. \quad (3.20)$$

lo que nos da una condición para el grosor de la lámina. Si $m = 1$, el grosor es $d = \lambda/4n$. Con este grosor se consigue que todas las contribuciones al campo reflejado a partir de la segunda estén en fase y todas

ellas en oposición de fase con la primera. Para sumar las diferentes contribuciones basta con comprobar que los términos de la suma siguen una progresión geométrica de razón rr_v ,

$$E_R = (-ar + att'r_v(1 + rr_v + r^2r_v^2 + \dots)) \exp(i(wt - k\vec{r}\vec{s} + \delta_0)). \quad (3.21)$$

Esta suma se hace cero cuando $r = r_v$. Recordando que $r = (1 - n)/(1 + n)$ y $r_v = (n - n_v)/(n + n_v)$, se llega a

$$n = \sqrt{n_v}. \quad (3.22)$$

Según esto, con una lámina de grosor $\lambda/4n$ y un material adecuado es posible diseñar una lámina antirreflejante. Sin embargo, este resultado ha sido deducido en condiciones de incidencia muy cercana a la normal y para una única longitud de onda. Se puede hacer un análisis equivalente y más general utilizando sistemas mult capas con diferentes grosores y materiales. Así, se pueden diseñar recubrimientos antirreflejantes utilizables en una banda del espectro más amplio y para diferentes ángulos de incidencia.

3.3.3 El interferómetro de Fabry-Perot

El *interferómetro de Fabry-Perot* es un dispositivo de gran precisión utilizado en espectroscopía. Su principal ventaja es su elevado poder resolutivo (capacidad de discriminar dos longitudes de onda muy próximas). La física que describe este aparato es muy similar al experimento de interferencias en láminas dieléctricas. El esquema del interferómetro es el de la figura 3.13.

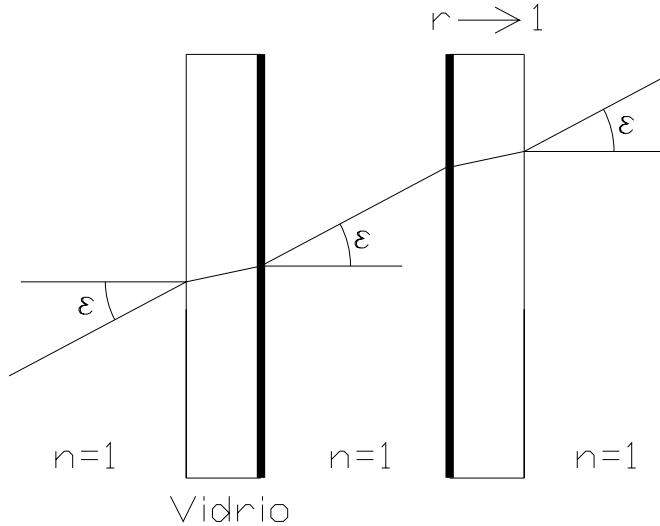


Figura 3.13: El interferómetro de Fabry-Perot

Se trata de dos soportes de vidrio de caras planoparalelas enfrentados entre sí una distancia d (en aire, $n = 1$) que puede ser ajustable. Las caras internas están tratadas de manera que el factor de reflexión sea próximo a la unidad, para así obtener un buen contraste. Un rayo de luz que llegue al sistema, con un ángulo ϵ respecto a la normal de la cara de vidrio, se refractará en la cara anterior y posterior del vidrio e incidirá también con ángulo ϵ sobre la primera cara del segundo vidrio. La luz que salga del sistema por la cara posterior lo hará de nuevo con ángulo ϵ .

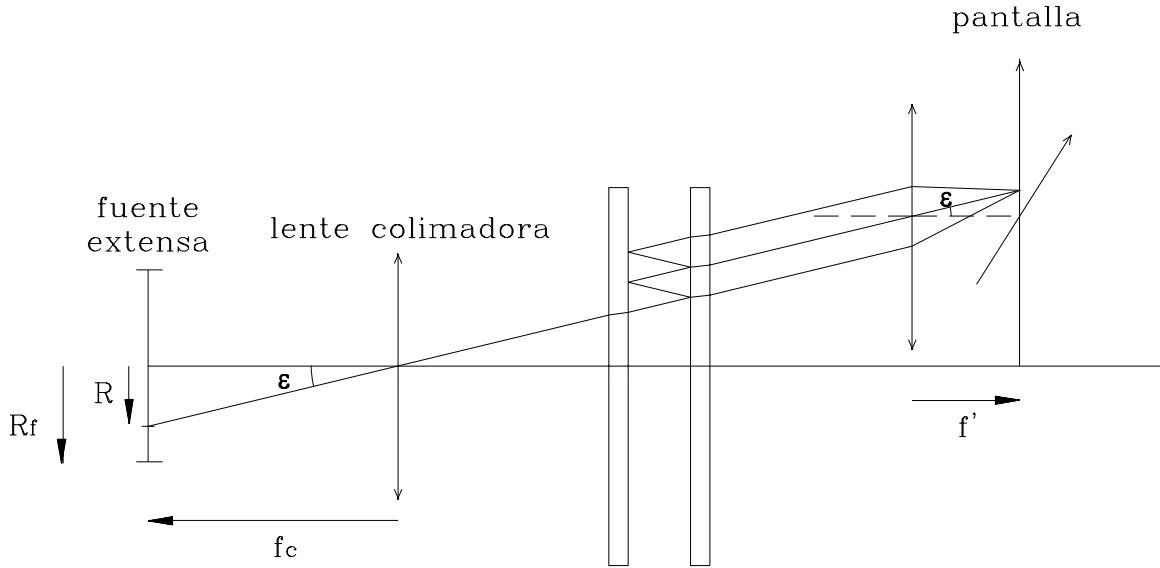


Figura 3.14: Sistema interferencial

El interferómetro funciona de la siguiente manera: utilizamos una fuente extensa de radio R_f . Esta luz emite unas ciertas longitudes de onda que son las que queremos conocer. La fuente se sitúa en el plano focal de una lente colimadora de focal f'_c y, por lo tanto, los rayos salen paralelos con direcciones angulares comprendidas entre $[0, \epsilon_c]$ respecto al eje óptico, donde $\tan(\epsilon_c) = R_f/f'_c$. Los rayos que incidan con un ángulo ϵ se reflejarán múltiplemente en el interior del dispositivo y se irán transmitiendo las diferentes contribuciones. Todos estos rayos transmitidos salen con un ángulo ϵ . Una segunda lente de focal f' los focalizará en un punto de su plan focal. Esto quiere decir que en este punto se hará la suma coherente de todos los rayos. La intensidad que tendremos en este punto, según lo que dedujo en la ecuación 3.17, será

$$I_T(\lambda, \epsilon) \propto \frac{1}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \sin^2\left(\frac{2\pi d \cos(\epsilon)}{\lambda}\right)}. \quad (3.23)$$

Como que el problema presenta simetría de revolución respecto el eje óptico de la segunda lente, todos los puntos del plano focal que se encuentren a una distancia R del eje de colimación ($\tan(\epsilon) = R/f'$) presentarán la misma configuración interferencial y, por lo tanto, su intensidad será la misma. Es decir, en el plano de observación visualizaremos anillos.

Podemos determinar cuando se hace máxima la ecuación anterior. Esto pasa si $\sin^2\left(\frac{2\pi d \cos(\epsilon)}{\lambda}\right) = 0$, o lo que es el mismo, cuando se verifica

$$2d \cos(\epsilon) = m\lambda \quad m \text{ natural.} \quad (3.24)$$

En el centro, el orden interferencial m (m entero) con el que identificamos un anillo concreto, toma su valor máximo ($m = 2d/\lambda$); m es cero para $\epsilon = \pi/2$. Si la fuente de luz tiene radio R_f , existe un ángulo máximo ϵ_c con el que los rayos pueden entrar en el sistema. Por lo tanto, m variará entre un valor máximo en el centro y un valor mínimo en el extremo del campo iluminado.

Poder resolutivo de un interferómetro Fabry-Perot

Una de las aplicaciones más importantes del interferómetro de Fabry-Perot consiste en la determinar las longitudes de onda en las cuales emite una fuente de luz. Además, gracias a la elevada precisión del interferómetro, es posible determinar valores muy próximos de longitud de onda. Puesto que cada λ genera su propio sistema de anillos independiente, se visualizan parcialmente superpuestos.

Consideramos que dos anillos se pueden distinguir (se resuelven), si en el punto medio de la distancia entre dos máximos, el valor de la energía es inferior en mitad de la energía máxima. Tomamos una luz mezcla de dos longitudes de onda, $\lambda_1 = \lambda$ y $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda$. Definimos el poder resolutivo como el cociente $|\lambda/\Delta\lambda|$. Tomando el criterio de resolución anterior se puede demostrar que

$$\left| \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \right| = \frac{\pi mr}{1 - r^2}. \quad (3.25)$$

La capacidad de resolver longitudes de onda muy próximas aumenta cuando observamos el centro de la imagen de interferencia (m grande) y cuando el factor de reflexión r es alto (tendiendo a la unidad).

3.3.4 Filtros interferenciales

El fenómeno de las interferencias en láminas delgadas puede ser utilizado para la construcción de dispositivos de transmitancia muy selectiva con la longitud de onda. La utilización de estos dispositivos permite obtener luz muy monocromática. Consideremos una lámina de grosor d de un material de índice n . Esta lámina se encuentra entre dos vidrios planoparalelos que hacen de soporte. Hacemos incidir normalmente luz blanca, $\epsilon = 0$. En estas condiciones, la ecuación del desfase 3.14 para los máximos se escribe,

$$\frac{4\pi}{\lambda}nd = 2m\pi \quad (3.26)$$

es decir, $2nd = m\lambda$. Si el factor de reflexión interno de las caras r es lo suficiente alto, los máximos de interferencia $I_T(\lambda)$ (véase la figura 3.10 y la ecuación 3.19) se hacen muy estrechos, de manera que sólo pasan las longitudes de onda que verifican la relación $2nd = m\lambda$. Por ejemplo, con un grosor $d = 150$ nm y un índice $n = 1.7$, solamente pasarán las longitudes $\lambda = 510/m$ nm: 510, 255, 170, En la zona del visible se transmite con intensidad máxima una única longitud de onda ($\lambda = 510$ nm).

3.3.5 Interferómetros de Michelson y de Mach-Zehnder

El interferómetro de Michelson

Consideremos un dispositivo óptico como el que se muestra a la figura 3.15, que utiliza una fuente de luz extensa. Por simplicidad, consideraremos que ésta se encuentra en el plano focal objeto de una lente colimadora. Así conseguimos luz con iluminación paralela en todas las direcciones permitidas por las dimensiones de la fuente. Delante del sistema de iluminación se encuentra un sistema divisor de haz (lámina semitransparente): la mitad de la energía atraviesa la lámina y la otra mitad se refleja. Puesto que la lámina forma un ángulo de 45° respecto el plano que contiene la lente colimadora, los dos haces resultantes salen formando entre sí un ángulo de 90° . Estos haces de luz viajan en sus respectivas direcciones hasta llegar a los espejos, cambian de sentido y se reencuentran de nuevo en la lámina semitransparente.

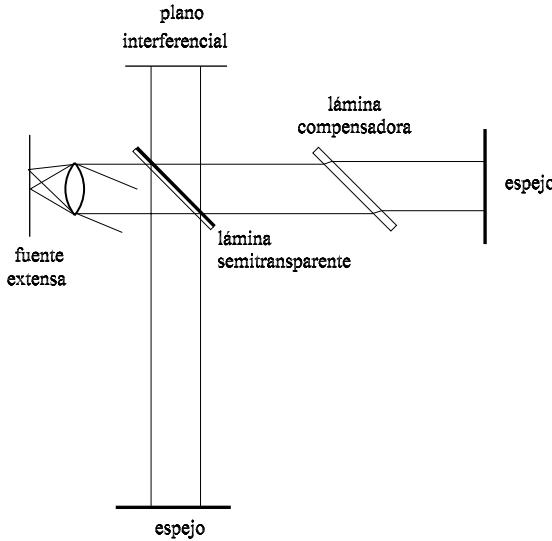


Figura 3.15: El interferómetro de Michelson

Parte de la luz vuelve hacia la fuente y parte se dirige hacia un plano de observación donde se analiza la luz.

Los espejos no tienen porque encontrarse a la misma distancia de la lámina semiespejada. Sea l_a la distancia de la lámina hasta el espejo situado normalmente al brazo horizontal y l_b , la distancia de la lámina hasta el espejo dispuesto normalmente al brazo vertical. La diferencia de camino óptico es $\Delta = 2(l_a - l_b) = 2d$ ($n = 1$, puesto que el dispositivo se encuentra en el aire). Si el haz de luz toma una dirección que forma un ángulo θ con el eje de la lente colimadora, se puede comprobar que, en este caso, la diferencia de camino óptico es $\Delta = 2d \cos(\theta)$. El sistema presenta simetría de revolución respecto a un eje normal al plano de observación y, por lo tanto, en este plano se obtendrán anillos; además, como se trata de la interferencia de dos ondas que recorren caminos ópticos diferentes, la intensidad será proporcional a

$$I \propto \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right); \quad (3.27)$$

y los máximos de interferencia se dispondrán siguiendo la ley siguiente:

$$2d \cos(\theta) = m\lambda, \quad (3.28)$$

con m natural. Si consideramos justo el centro de la figura de interferencia, $\cos(\theta) = 1$ y, en consecuencia, en el centro se verificará $2d = m\lambda$. Esto quiere decir que si la diferencia de caminos ópticos $2d$ no es múltiplo exacto de λ , en el centro no tendremos un máximo de intensidad. Además, si $l_a - l_b = 0$ (diferencia de caminos ópticos es cero), entonces estamos en $m = 0$.

Algunos comentarios más

- Desde el punto de vista histórico es necesario hacer notar que este instrumento fue utilizado en 1887 por Michelson y Morley en su intento de medir la velocidad de la luz respecto de la Tierra.

- En el interferómetro de la figura 3.15 se puede observar un elemento denominado lámina compensadora. Se trata de una lámina de material transparente que tiene exactamente el mismo grosor que la lámina semitransparente (d_{st}). La luz que hace el camino vertical (según la figura 3.15) atraviesa tres veces la lámina semitransparente añadiendo el factor $3n_{st}d_{st}$ al camino óptico (la lámina está semiespejada en el lado derecho de la lámina, según el dibujo), mientras que la luz que toma la otra dirección sólo atraviesa la lámina una vez. Para compensar este efecto y hacer que las diferencias de camino sea atribuibles exclusivamente a la diferencia geométrica de los brazos $2(l_a - l_b) = 2d$, se incluye la lámina compensadora. Así, la luz que sigue el camino horizontal compensa el exceso de camino óptico que se realiza siguiendo el camino vertical.
- Longitud de coherencia. Para que el fenómeno interferencial sea visible, se tiene que verificar que la diferencia de caminos ópticos $2d$ sea inferior a la longitud de coherencia de la luz analizada (l_c). Esto indica un método por determinar experimentalmente l_c : al aumentar la diferencia $2d$, el contraste de los anillos irá disminuyendo hasta que estos desaparezcan.
- Si en vez de trabajar con una fuente extensa lo hacemos con una puntual, la intensidad de la figura de interferencia será constante. Al modificar la diferencia de longitud de los dos brazos $2d$, esta intensidad irá variando pasando por máximos cuando se verifique la relación $2d = m\lambda$. Esta configuración del interferómetro de Michelson se denomina interferómetro de *Twyman-Green*.

El interferómetro de Mach-Zehnder

Existen otros interferómetros de doble haz. Cabe destacar el interferómetro de *Mach-Zehnder*, por su amplia utilización en metrología óptica (ver figura 3.16).

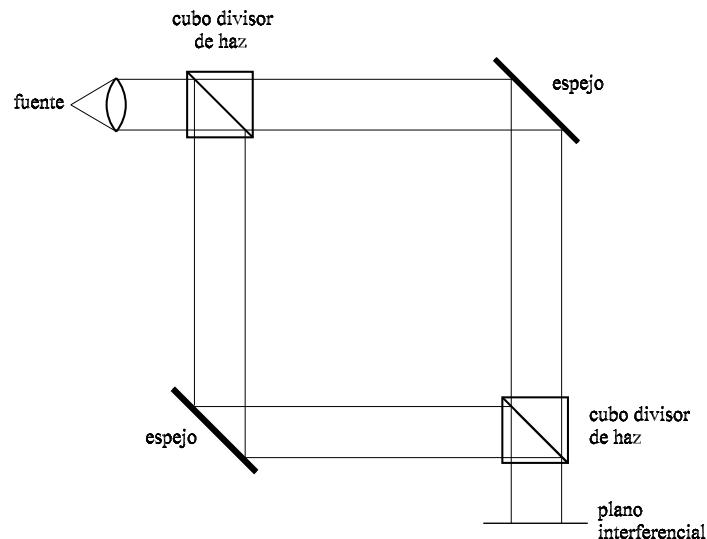


Figura 3.16: El interferómetro de Mach-Zehnder

Consiste en un sistema de iluminación que genera un haz de ondas planas. Un sistema divisor del haz hace que la luz siga dos caminos diferentes. Mediante espejos se consigue que la luz siga una trayectoria como la que se muestra en la figura, y mediante un segundo cubo divisor de haz se suman las dos contribuciones, que, obviamente, han seguido caminos ópticos diferentes. En el plano de observación se analizan los resultados.

Capítulo 4

Difracción

4.1 Teoría escalar

4.1.1 Introducción a la Teoría Escalar de la Difracción

Sommerfeld definió la *difracción* como la propagación no rectilínea de la luz que no se puede interpretar a partir de las leyes de la reflexión y de la refracción. Grimaldi, en el siglo XVII, fue el primero que observó fenómenos difractivos: al hacer pasar un haz de luz a través de una abertura practicada sobre una pantalla observó que, al proyectar el haz sobre otra pantalla, el paso de la zona iluminada a la zona de sombra no era abrupto (como indica la propagación rectilínea). Años después, Fresnel realizó el primer intento serio de explicar los fenómenos de difracción (1818), basándose en unas modificaciones arbitrarias del principio de Huygens. En 1882, Kirchhoff propuso la explicación de los fenómenos de difracción en términos de la teoría escalar. Su teoría tiene inconvenientes formales de orden matemático, que fueron solucionados por Sommerfeld en 1894, introduciendo algunas modificaciones en la teoría anterior.

La teoría escalar es suficientemente rigurosa para explicar la mayor parte de los resultados experimentales macroscópicos. Pese a que se trata de una simplificación que no tiene en cuenta el carácter vectorial de los campos electromagnéticos, la teoría escalar funciona con éxito cuando las aberturas son más grandes que la longitud de onda de la luz y cuando las distancias de observación son suficientemente grandes. En estas condiciones, la polarización del campo electromagnético no es una información relevante y, por lo tanto, se puede prescindir del formalismo vectorial.

4.1.2 Ondas escalares. El teorema de Green

Una onda escalar perfectamente monocromática, $U(\vec{r}, t) = U(\vec{r})e^{-iwt}$ que se propaga en el vacío, verifica la ecuación de ondas:

$$\Delta U(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(\vec{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (4.1)$$

En consecuencia, la amplitud compleja (parte espacial) $U(\vec{r})$ verifica la ecuación de Helmholtz:

$$\Delta U(\vec{r}) = -k^2 U(\vec{r}), \quad (4.2)$$

\vec{r} es el vector de posición, k es el número de onda, $w = 2\pi\nu$, y $k = 2\pi/\lambda$.

La formulación de la teoría escalar de la difracción se basa en el uso del *teorema de Green*: Sean $U(P)$ y $G(P)$ dos funciones que toman valores complejos, continuas y con primera y segunda derivadas continuas en el interior de un recinto V cerrado por la superficie S . En estas condiciones se verifica:

$$\int_V [G\Delta U - U\Delta G] dv = \int_S \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds. \quad (4.3)$$

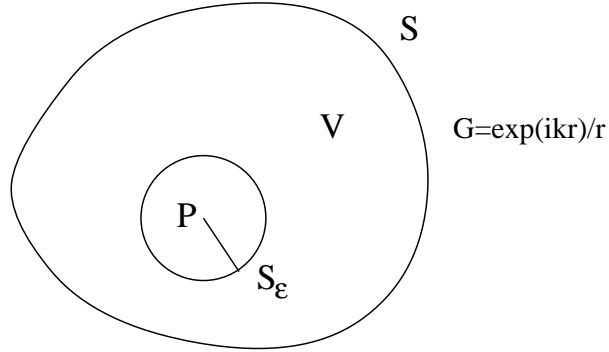


Figura 4.1: Teorema de Green. Geometría

En el problema que abordaremos, U será la parte espacial de la ecuación de ondas, y G , una función auxiliar denominada *función de Green*. La elección de ésta, solamente está condicionada por el propio teorema de Green; no obstante, es necesario escogerla de forma que el problema se pueda abordar con el mínimo de complicaciones matemáticas posible. La notación $\frac{\partial}{\partial n}$ hace referencia a la derivada de G o U según la dirección normal de la superficie S . A partir de ahora, no se tendrá en cuenta la parte temporal de la onda. Sea $P \in V$, el punto donde haremos la observación del campo. Definimos una posible función de Green como

$$G = \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (4.4)$$

En el punto P ($r = 0$) esta función no está definida. Para evitar la discontinuidad en $r = 0$, se excluye el punto P del recinto V definiendo una superficie esférica S_ϵ alrededor de P con un radio ϵ infinitesimal. Así, la nueva superficie de integración S' será $S' = S + S_\epsilon$ y el nuevo volumen V' , $V' = V - V_\epsilon$; V_ϵ es el volumen definido por S_ϵ . La función G es una onda esférica de amplitud unidad y, por lo tanto, verifica también la ecuación de Helmholtz: $\Delta G = -k^2 G$. Aplicando el Teorema de Green al nuevo recinto de integración V' obtenemos

$$\int_{V'} [G\Delta U - U\Delta G] dv = - \int_{V'} [k^2 GU - k^2 UG] dv = 0 \quad (4.5)$$

y, en consecuencia,

$$\int_{S'} \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds = 0; \quad (4.6)$$

además, como $S' = S + S_\epsilon$, entonces

$$-\int_{S_\epsilon} \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds = \int_S \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds. \quad (4.7)$$

4.1.3 Teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff

La evaluación de la integral definida sobre S_ϵ es sencilla. Se trata de calcular el límite siguiente,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds. \quad (4.8)$$

Al ser S_ϵ es una superficie esférica, las derivadas normales de la ecuación anterior pasan a ser derivadas en la dirección radial ϵ . La derivada normal en la superficie S_ϵ apunta hacia P ; por lo tanto, $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \epsilon}$. Puesto que la función G sobre la superficie S_ϵ se puede escribir como $\exp(ik\epsilon)/\epsilon$, la derivada es

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \left[\frac{1}{\epsilon} - ik \right] \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon}. \quad (4.9)$$

El diferencial de superficie es $ds = \epsilon^2 d\Omega$, donde $d\Omega$ es el diferencial de ángulo sólido. Substituyendo en la integral,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left[\frac{\partial U}{\partial n} \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} - U \left[\frac{1}{\epsilon} - ik \right] \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \right] \epsilon^2 d\Omega. \quad (4.10)$$

Las funciones y las derivadas presentes en la integral están acotadas y, por tanto, de los tres términos contenidos en ella, únicamente el segundo será diferente de cero. Considerando, además, la continuidad de U ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \int_{S_\epsilon} U \frac{1}{\epsilon} \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \epsilon^2 d\Omega = -U(P) \int_{S_\epsilon} d\Omega = -4\pi U(P); \quad (4.11)$$

y ahora la ecuación 4.7 se escribirá

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds = U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\partial U}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - U \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \right] \right] ds, \quad (4.12)$$

resultado que se conoce como el *teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff*.

4.1.4 Aplicación del teorema de Helmholtz-Kirchhoff a la difracción

En esta sección, se aplica el teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff al problema de la difracción de una onda escalar a través de una abertura contenida en una superficie plana. Consideramos la superficie S que rodea el punto de observación P . La tomaremos subdividida en dos secciones $S = S_1 + S_2$: S_1 corresponde al plano que contiene la abertura Σ y S_2 es una superficie esférica centrada en P y de radio suficientemente grande. Lo primero que debe hacerse es evaluar la integral 4.12 en la superficie S_2 . Al estar trabajando con iluminación monocromática, y por lo tanto, de longitud de coherencia infinita, una vez la onda se haya propagado a velocidad c hasta S_2 , la contribución de la integral sobre S_2 puede no ser despreciable. Para aclarar este aspecto, calculamos el límite siguiente,

$$U(P) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds. \quad (4.13)$$

La derivada en la dirección normal (radial) de G sobre S_2 vale

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \left[\frac{1}{r} - ik \right] \frac{e^{ikr}}{r} \approx ikG, \quad (4.14)$$

si $r \gg \lambda$. Por lo tanto, la integral anterior vale

$$U(P) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} G \left[\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right] ds = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} e^{ikr} \left[\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right] r^2 d\Omega, \quad (4.15)$$

donde $ds = r^2 d\Omega$. Esta integral tiende a cero si se verifica

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right] = 0. \quad (4.16)$$

Esta condición es cierta si U es una onda esférica, es decir, $U = Ae^{ikr}/r$. Dado que una onda cualquiera puede ser expresada en términos de una combinación lineal de ondas esféricas, en la práctica este resultado se verifica siempre. Por lo tanto, la contribución a $U(P)$ de la integral sobre S_2 puede ser despreciada.

Condiciones de contorno de Kirchhoff

Evaluemos ahora la integral sobre S_1 . Para ello, Kirchhoff impuso las siguientes condiciones para poder realizar el cálculo:

1. El campo U y su derivada normal toman los mismos valores en la abertura Σ , en presencia o no de la superficie S_1 .
2. Sobre la superficie S_1 y fuera de Σ , U y su derivada normal valen cero. Esta condición permite realizar la integral extendida sólo a la geometría de Σ .

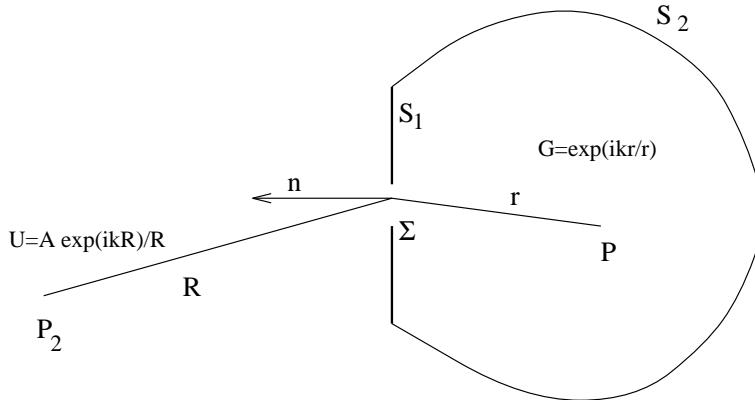


Figura 4.2: Geometría. Fórmula de Fresnel-Kirchhoff

Fórmula de Fresnel-Kirchhoff

Para acabar, consideremos ahora la forma en que se ilumina la abertura. Concentrémonos en el caso en que la abertura está iluminada por una onda esférica que proviene de un punto P_2 : $A \frac{e^{ikR}}{R}$. Las derivadas normales a Σ de G y U valen

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \cos(\vec{n}, \vec{r})(ik - \frac{1}{r}) \frac{\exp(ikr)}{r} \approx ikG \cos(\vec{n}, \vec{r}) \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} \approx ikU \cos(\vec{n}, \vec{R}), \quad (4.18)$$

donde $\cos(\vec{n}, \vec{r})$ y $\cos(\vec{n}, \vec{R})$ son los cosenos de los ángulos formados por el vector normal a Σ y los vectores posición \vec{r} y \vec{R} respectivamente. Por lo tanto la integral de difracción en este caso es

$$U(P) = \frac{A}{2i\lambda} \int_{\Sigma} \frac{\exp(ik(r+R))}{r+R} [\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{R})] ds, \quad (4.19)$$

conocida como la *fórmula de Fresnel-Kirchhoff*. Esta fórmula nos da la expresión del campo escalar difractado a través de una abertura cualquiera iluminada por una onda esférica. Esta fórmula es simétrica respecto a la fuente o el punto de observación (*teorema de reciprocidad*).

Consideraciones finales sobre la Fórmula de Fresnel-Kirchhoff

1. Si la abertura es pequeña frente a las distancias R y r , los factores $\cos(\vec{n}, \vec{r})$ y $\cos(\vec{n}, \vec{R})$ son prácticamente constantes. Se denomina factor de oblicuidad a la semidiferencia $(\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{R}))/2$
2. Si la onda que ilumina la abertura no es esférica, es posible describir cualquier campo en términos de ondas esféricas, pudiéndose aplicar la fórmula deducida.
3. Para ángulos pequeños (distancias axiales mucho mayores que las dimensiones de la abertura), el factor de oblicuidad se hace próximo a la unidad, ya que $\cos(\vec{n}, \vec{r}) \approx 1$ y $\cos(\vec{n}, \vec{R}) \approx -1$.
4. La expresión 4.19 se ha deducido utilizando una onda esférica $\frac{A \exp(ikR)}{R}$ para iluminar la abertura. Si la fuente de luz está en el infinito, la abertura se ilumina con una onda plana de amplitud A' :

$$U(P) = \frac{A'}{i\lambda} \int_{\Sigma} A \frac{\exp(ikr)}{r} ds. \quad (4.20)$$

5. Si el sistema se ilumina con una onda cualquiera, cuya amplitud compleja en el plano de la abertura Σ es $U(\Sigma)$, la expresión puede generalizarse a

$$U(P) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} U(\Sigma) \frac{\exp(ikr)}{r} ds. \quad (4.21)$$

4.2 Aproximaciones de la Teoría Escalar

4.2.1 Fórmula de exacta

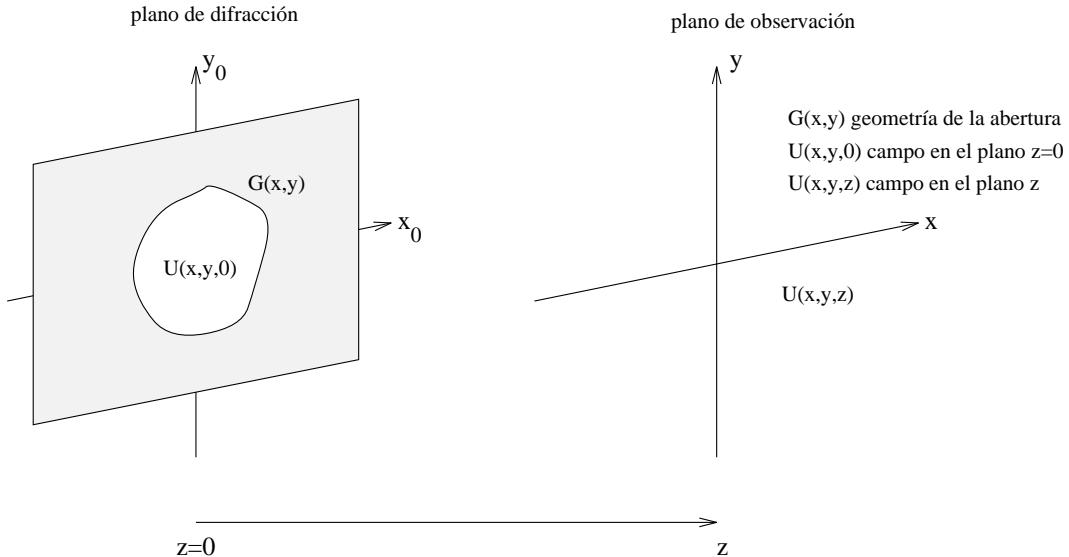


Figura 4.3: Difracción de Fresnel

A partir de ahora fijaremos unos ejes coordenados (x_0, y_0) en la pantalla que contiene la abertura. El eje z es el eje normal al plano de la abertura, que consideraremos en $z = 0$. Los puntos del plano normal al eje z que contiene el punto de observación P tendrán coordenadas (x, y, z) . La distancia de observación z será mucho mayor que las distancias transversales involucradas y , por lo tanto, podemos considerar que el factor de oblicuidad es cercano a la unidad. Escribiendo la fórmula de Fresnel-Kirchhoff en coordenadas cartesianas tenemos

$$\begin{aligned}
 U(P) &= \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} U(\Sigma) \frac{\exp(ikr)}{r} = \\
 &= \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} U(x_0, y_0, 0) \frac{\exp(ik\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2)}}{\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2)}} dx_0 dy_0. \tag{4.22}
 \end{aligned}$$

4.2.2 Difracción de Fresnel

La distancia entre un punto de la abertura $(x_0, y_0, 0)$ y el punto de observación $P (x, y, z)$ es

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2} = z\sqrt{1 + \frac{(x-x_0)^2}{z^2} + \frac{(y-y_0)^2}{z^2}}. \tag{4.23}$$

Si se verifica que $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \ll z^2$, se puede aproximar r por z en el denominador. Sin embargo, el término de la exponencial compleja presente en la integral varía muy rápidamente (debido al factor $2\pi/\lambda$), y por lo tanto un pequeño error en la evaluación de r , puede suponer un error muy grande en la estimación del ángulo. Para simplificar correctamente la expresión del interior de la integral de difracción, desarrollamos r en serie de Taylor,

$$r = z \sqrt{1 + \frac{(x - x_0)^2}{z^2} + \frac{(y - y_0)^2}{z^2}} \approx z \left[1 + \frac{(x - x_0)^2}{2z^2} + \frac{(y - y_0)^2}{2z^2} \right]. \quad (4.24)$$

Esto equivale a aproximar una superficie esférica por una superficie parabólica. La fórmula de difracción toma ahora la forma siguiente (fórmula de difracción de Fresnel):

$$U(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{\Sigma} U(x_0, y_0, 0) \exp\left(\frac{ik}{2z}((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)\right) dx_0 dy_0. \quad (4.25)$$

Los límites de integración corresponden a abertura Σ . Puesto que el campo eléctrico es cero a fuera de la abertura, podemos extender los límites de integración de $-\infty$ a $+\infty$, haciendo que

$$\psi(x, y) = U(x, y, 0)G(x, y), \quad (4.26)$$

donde $G(x, y)$ es la función que describe la geometría de Σ .

4.2.3 Difracción de Fraunhofer

Tomemos la fórmula de difracción de Fresnel:

$$U(x, y, z) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, y_0) \exp\left(\frac{ik}{2z}((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)\right) dx_0 dy_0. \quad (4.27)$$

Desarrollando los binomios $((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$,

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left(\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)} e^{-\frac{ik}{z}(xx_0 + yy_0)} dx_0 dy_0 = \\ &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left(\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, y_0) e^{\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)} e^{-2\pi y(\frac{x}{\lambda z}x_0 + \frac{i}{\lambda z}y_0)} dx_0 dy_0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Cuando la distancia de observación z es muy grande, la exponencial $\exp(\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2))$ en el interior de la integral tiende a la unidad. Es necesario tener en cuenta que las dimensiones de la abertura Σ serán pequeñas en comparación con z , aunque esto no es necesario que se verifique en el plano de observación. Por esta razón el término exponencial cuadrático de fuera de la integral no desaparece. Cuando se verifican estas condiciones, decimos que trabajamos en condiciones de difracción de Fraunhofer. La integral de difracción se escribe ahora

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0, y_0) \exp(-2\pi i(\frac{x}{\lambda z}x_0 + \frac{y}{\lambda z}y_0)) dx_0 dy_0 = \\ &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left(\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right) \mathcal{T}\mathcal{F}_{\lambda z}[\psi(x_0, y_0)], \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde $\mathcal{T}\mathcal{F}$ representa el operador transformada de Fourier. La intensidad que captaría un detector en estas condiciones es

$$I(x, y, z) \propto |\mathcal{T}\mathcal{F}_{\lambda z}[\psi(x_0, y_0)]|^2. \quad (4.30)$$

Es decir, en condiciones de difracción de Fraunhofer, la distribución de intensidad es proporcional a la transformada de Fourier a escala λz del campo eléctrico en el plano que contiene la abertura.

4.3 Estudio de casos particulares en aproximación de Fraunhofer

4.3.1 Onda plana a través de un objeto rectangular

Para calcular la difracción de Fraunhofer de un objeto utilizaremos la siguiente ecuación:

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \mathcal{T}\mathcal{F}_{\lambda z}[\psi(x_0, y_0)]. \quad (4.31)$$

Supongamos que el objeto es iluminado por una onda plana Ae^{ikz} . En $z = 0$, la onda plana es A . Escribiremos la transformada de Fourier de una función $f(x, y)$ como $F(u, v)$, donde (u, v) son las frecuencias espaciales. Es necesario recordar que la Transformada de Fourier de una abertura rectangular de dimensiones $l_x \times l_y$ vale

$$\mathcal{T}\mathcal{F} \left[\text{rect}\left(\frac{x}{l_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{l_y}\right) \right] = l_x l_y \text{sinc}(l_x u) \text{sinc}(l_y v); \quad (4.32)$$

y por lo tanto, el campo eléctrico escalar a distancia z mucho mayor que l_x o l_y se escribe

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= A \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \mathcal{T}\mathcal{F}_{\lambda z} \left[\text{rect}\left(\frac{x}{l_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{l_y}\right) \right] = \\ &= A \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} l_x l_y e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \text{sinc}\left(\frac{l_x x}{\lambda z}\right) \text{sinc}\left(\frac{l_y y}{\lambda z}\right), \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde se han sustituido las variables (u, v) por $\frac{x}{\lambda z}$ y $\frac{y}{\lambda z}$. La intensidad grabada por un detector será el módulo al cuadrado de la expresión anterior,

$$I(x, y, z) = A^2 \frac{l_x^2 l_y^2}{\lambda^2 z^2} \text{sinc}^2\left(\frac{l_x x}{\lambda z}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{l_y y}{\lambda z}\right). \quad (4.34)$$

4.3.2 Onda plana a través de un objeto circular

La fórmula para calcular la difracción de Fraunhofer se puede escribir en coordenadas polares cuando el objeto tiene simetría circular, $\psi(r, \theta) = \psi(r)$:

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z} r^2} \mathcal{T}\mathcal{F}_{\lambda z}[\psi(r_0)]. \quad (4.35)$$

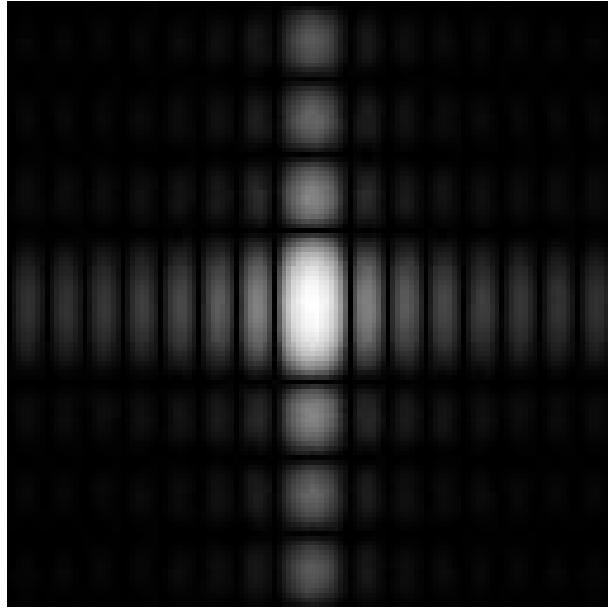


Figura 4.4: Difracción de Fraunhofer de un rectángulo cuyo lado vertical es menor que el horizontal

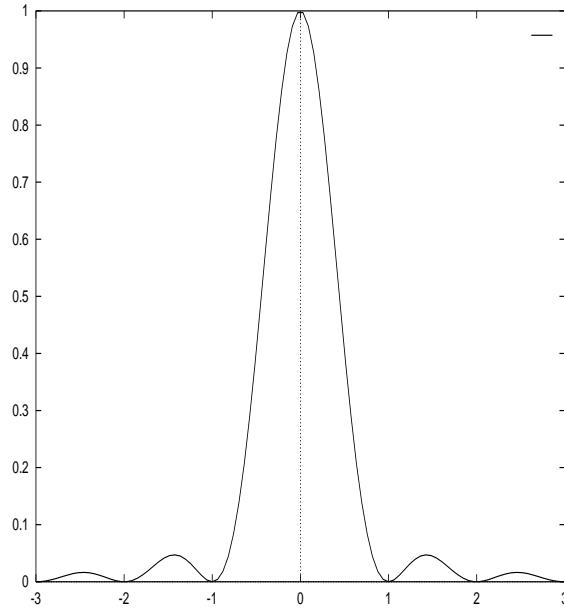


Figura 4.5: Perfil de la función que describe la intensidad de la difracción de Fraunhofer de un rectángulo

La transformada de Fourier de una función con simetría circular es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(xu+yv)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} f(r_0) e^{-2\pi i r r_0 \cos(\theta_0 - \theta)} r_0 dr_0 = F(r, \theta). \quad (4.36)$$

Se ha aplicado el cambio $x = r_0 \cos \theta_0$, $y = r_0 \sin \theta_0$ y $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$. Utilizando la igualdad,

$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ia \cos(\theta - \phi)} d\theta \quad (4.37)$$

se obtiene que

$$F(r) = 2\pi \int_0^\infty f(r_0) J_0(2\pi r r_0) r_0 \, dr_0 \quad (4.38)$$

Para calcular la difracción de Fraunhofer cuando una onda plana Ae^{ikz} atraviesa una abertura circular de radio R , $\text{circ}(\frac{r}{R})$ en $z = 0$, tenemos que calcular la integral anterior ($f(r_0) = 1$ entre 0 y R). Aplicando ahora la relación

$$\frac{R}{a} J_1(aR) = \int_0^R J_0(ar) r \, dr, \quad (4.39)$$

se puede demostrar que

$$\mathcal{T}\mathcal{F} \left[\text{circ} \left(\frac{r_0}{R} \right) \right] = R \frac{J_1(2\pi Rr)}{r}; \quad (4.40)$$

y, por lo tanto, el campo eléctrico escalar vale

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= A \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \mathcal{T}\mathcal{F}_{\lambda z} \left[\text{circ} \left(\frac{r_0}{R} \right) \right] = \\ &= A \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} R e^{\frac{ik}{2z}(r^2)} \frac{J_1 \left(\frac{2\pi Rr}{\lambda z} \right)}{\frac{r}{\lambda z}} = -i A R e^{ikz} e^{\frac{ik}{2z}(r^2)} \frac{J_1 \left(\frac{2\pi Rr}{\lambda z} \right)}{r}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

mientras que la intensidad,

$$I(r) = A^2 \frac{R^2}{r^2} J_1^2 \left(\frac{2\pi Rr}{\lambda z} \right). \quad (4.42)$$

Se conoce como el *radio del disco de Airy* al radio del primero mínimo de la función anterior. La función $\frac{J_1(\pi x)}{\pi x}$ se anula en $x = 1.22$ y, por lo tanto

$$r_A = 1.22 \frac{\lambda z}{2R}. \quad (4.43)$$

4.3.3 Onda plana a través de una estructura periódica unidimensional

Sea un objeto de transmitancia $f(x, y)$ repetido periódicamente N veces, con periodo P . La función matemática que modeliza este objeto se escribe

$$\psi(x, y) = \sum_{m=0}^{N-1} f(x - mP). \quad (4.44)$$

La transformada de Fourier a escala λz de la expresión anterior es

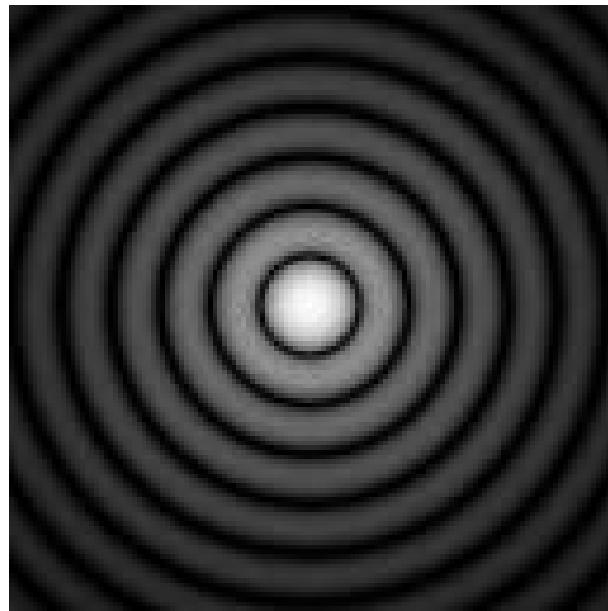
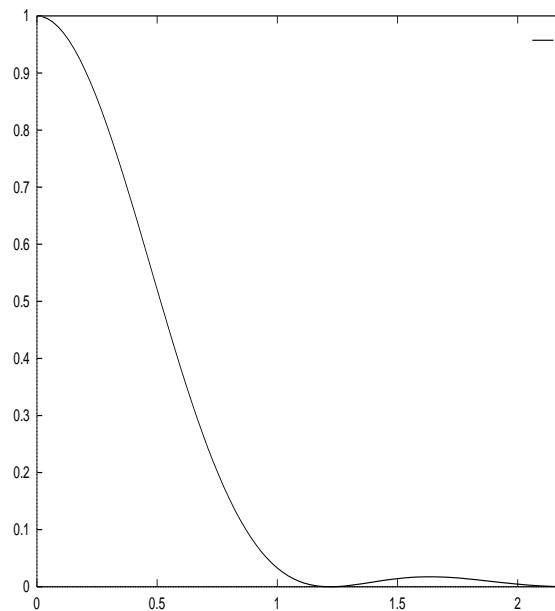


Figura 4.6: Difracción de Fraunhofer de un círculo

Figura 4.7: Perfil de la función que describe la intensidad de la difracción de Fraunhofer de un círculo. El primer cero de la función está en $r=1.22$

$$TF_{\lambda z}[\psi(x_0, y_0)] = F\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right) \left(1 + \exp\left(-\frac{2\pi i x P}{\lambda z}\right) + \exp\left(-\frac{2\pi i x(2P)}{\lambda z}\right) + \dots + \exp\left(-\frac{2\pi i x(n-1)P}{\lambda z}\right) \right); \quad (4.45)$$

y por lo tanto, cuando una onda plana atraviesa este objeto, el campo eléctrico escalar es

$$U(x, y, z) = A \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} F\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right) \sum_{m=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{2\pi i x m P}{\lambda z}\right). \quad (4.46)$$

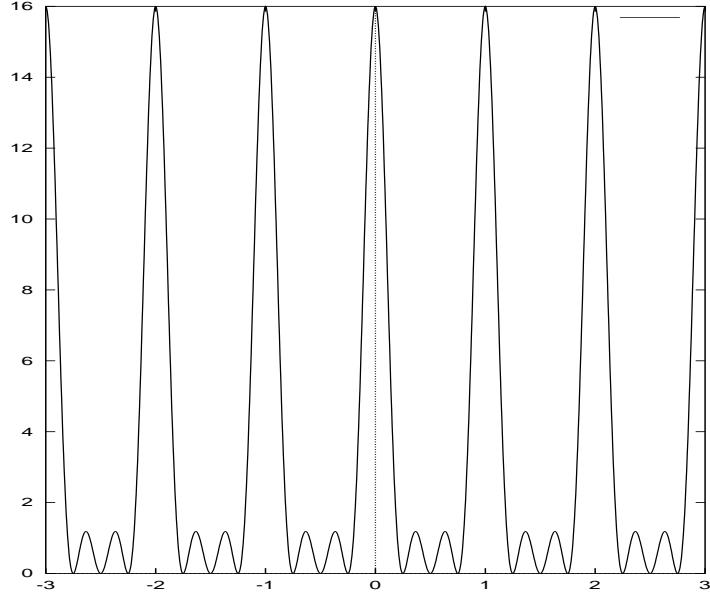


Figura 4.8: Perfil de la función que describe la intensidad de las interferencias para $N=4$

Los términos de la suma de la ecuación anterior siguen una progresión geométrica cuya razón es $r = \exp(-\frac{2\pi ixmP}{\lambda z})$. Puesto que se verifica

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{N-1} = \frac{1 - r^N}{1 - r}, \quad (4.47)$$

entonces,

$$U(x, y, z) = A \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{\lambda z}(x^2 + y^2)} F\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right) \frac{1 - \exp(-\frac{2\pi ix(N-1)P}{\lambda z})}{1 - \exp(-\frac{2\pi ixP}{\lambda z})}. \quad (4.48)$$

Puede comprobarse que

$$\left| \frac{1 - \exp(-\frac{2\pi ix(N-1)P}{\lambda z})}{1 - \exp(-\frac{2\pi ixP}{\lambda z})} \right|^2 = \frac{\sin^2(\pi NPx/\lambda z)}{\sin^2(\pi Px/\lambda z)}; \quad (4.49)$$

y por tanto, la intensidad se escribe como

$$I(x, y, z) \propto A^2 \left| F\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right) \frac{\sin^2(\pi NPx/\lambda z)}{\sin^2(\pi Px/\lambda z)} \right|. \quad (4.50)$$

Algunos comentarios adicionales:

- La expresión de la intensidad nos indica que la distribución de luz que detectaremos es el producto de la difracción del objeto por un término interferencial.

- El numerador del término de interferencial se anula cuando se verifica que $NPx = n\lambda z$ donde n es un natural. Por tanto, cuando $x = n\lambda z/NP$, la intensidad se anula (pasa por un mínimo). Entre dos mínimos tenemos un máximo secundario (véase la figura 4.8).
- El denominador del término de interferencial se anula cuando se verifica que $Px = n\lambda z$ donde n es un natural. Es fácil comprobar que en estos puntos donde el denominador se anula, también lo hace el numerador. Deshaciendo la indeterminación puede comprobarse que el término interferencial vale N^2 (máximo principal) (véase la figura 4.8).
- Si el número de franjas es N , entre dos máximos principales tenemos $N - 1$ mínimos y $N - 2$ máximos secundarios.
- Si $N = 2$, el término interferencial se escribe

$$I(x, y, z) \propto 4 \cos^2\left(\frac{\pi Px}{\lambda z}\right), \quad (4.51)$$

que corresponde a la intensidad de las interferencias generadas por dos fuentes puntuales de luz

(experimento de Young).

- Por ejemplo, la intensidad de la difracción de Fraunhofer que generan dos objetos cuadrados de lado l separados una distancia P se escribe

$$I(x, y, z) \propto 4A^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{lx}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{ly}{\lambda z}\right) \cos^2\left(\frac{\pi Px}{\lambda z}\right). \quad (4.52)$$