

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

# *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería: Series de Fourier*

Departamento de Matemáticas

MA3002

## INTRO

Las Series de trigonométricas de Fourier, o simplemente series de Fourier fueron desarrolladas por el matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier (21 de marzo de 1768 en Auxerre - 16 de mayo de 1830 en París).

La idea que subyace en las series de Fourier es la descomposición de una señal periódica en términos de señales periódicas básicas (senos y cosenos) cuyas frecuencias son múltiplos de la señal original.

La idea de descomposición es un proceso fundamental en el área científica en general: la descomposición permite el análisis de las propiedades y la síntesis de los objetos o fenómenos.

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## SERIE DE FOURIER

La **serie de Fourier** de una función periódica  $f(x)$  de período  $T$ , también conocida como señal, definida en un intervalo de longitud  $T$  está dada por:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x))$$

donde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ la frecuencia fundamental}$$

$$a_0 = \frac{1}{T/2} \int_T f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{T/2} \int_T f(x) \cos(n\omega_0 x) dx$$

$$b_n = \frac{1}{T/2} \int_T f(x) \sin(n\omega_0 x) dx$$

## SUMAS PARCIALES

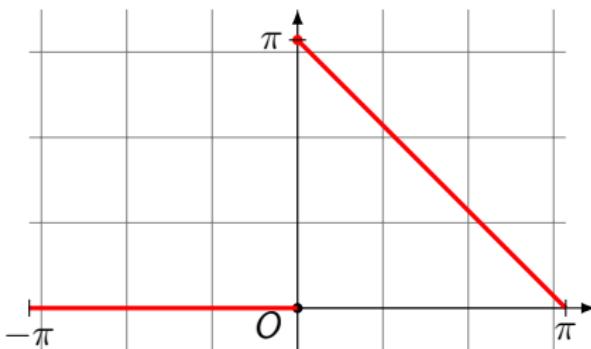
Para la serie de Fourier de una función  $f(x)$  periódica definida en un intervalo de longitud  $T$  la k-ésima suma parcial, representada por  $S_k(x)$  está dada por:

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x))$$

## EJEMPLO 1

Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



Aquí  $\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ .

**Matemáticas  
Avanzadas  
para  
Ingeniería:  
Series de  
Fourier**

**Departamento  
de  
Matemáticas**

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) dx \right)$$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) dx \right) \\&= \frac{1}{\pi} \left[ \pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) dx \right) \\&= \frac{1}{\pi} \left[ \pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} \\a_0 &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) dx \right) \\&= \frac{1}{\pi} \left[ \pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} \\a_0 &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(\omega_0 n x) dx \quad \text{recuerde } \omega_0 = 1$$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) dx \right) \\&= \frac{1}{\pi} \left[ \pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} \\a_0 &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(\omega_0 n x) dx \quad \text{recuerde } \omega_0 = 1 \\&= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(n x) dx \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) dx \right) \\&= \frac{1}{\pi} \left[ \pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} \\a_0 &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(\omega_0 n x) dx \quad \text{recuerde } \omega_0 = 1 \\&= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx \right) \\&= \frac{1}{\pi n^2} [(\pi \sin(nx) - \cos(nx) - nx \sin(nx))]_0^{\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} \\ a_0 &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(\omega_0 n x) dx \quad \text{recuerde } \omega_0 = 1 \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi n^2} [(\pi \sin(nx) - \cos(nx) - nx \sin(nx))]_0^{\pi} \\ a_n &= \frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2} \end{aligned}$$

**Matemáticas  
Avanzadas  
para  
Ingeniería:  
Series de  
Fourier**

**Departamento  
de  
Matemáticas**

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_o$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(\omega_0 n x) dx \quad \text{recuerde } \omega_0 = 1$$

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(\omega_0 n x) dx \quad \text{recuerde } \omega_0 = 1 \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \operatorname{sen}(n x) dx \right) \end{aligned}$$

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_o$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(\omega_0 n x) dx \quad \text{recuerde } \omega_0 = 1 \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \operatorname{sen}(n x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi n^2} [(-\pi n \cos(n x) - \operatorname{sen}(n x) + n x \cos(n x))]_0^\pi \end{aligned}$$

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_o$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(\omega_0 n x) dx \quad \text{recuerde } \omega_0 = 1 \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \operatorname{sen}(n x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi n^2} [(-\pi n \cos(n x) - \operatorname{sen}(n x) + n x \cos(n x))]_0^\pi \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{n}$$

## Algunas sumas parciales:

$$S_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \cos(x) + \sin(x)$$

$$S_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \cos(x) + \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$S_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \cos(x) + \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{2}{9\pi} \cos(3x) + \frac{1}{3} \sin(3x)$$

$$S_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \cos(x) + \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{2}{9\pi} \cos(3x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(4x)$$

$$S_5 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \cos(x) + \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{2}{9\pi} \cos(3x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(4x) + \frac{2}{25\pi} \cos(5x) + \frac{1}{5} \sin(5x),$$

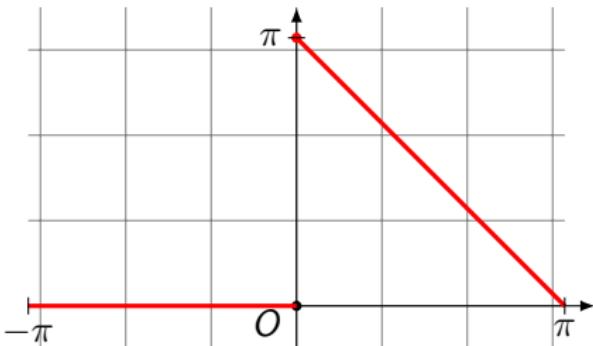
$$S_6 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \cos(x) + \sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{2}{9\pi} \cos(3x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(4x) + \frac{2}{25\pi} \cos(5x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \frac{1}{6} \sin(6x)$$

## EJEMPLO 1

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Las aproximaciones a  $f(x)$  mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Intro

Serie de  
Fourier

$s_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## EJEMPLO 1

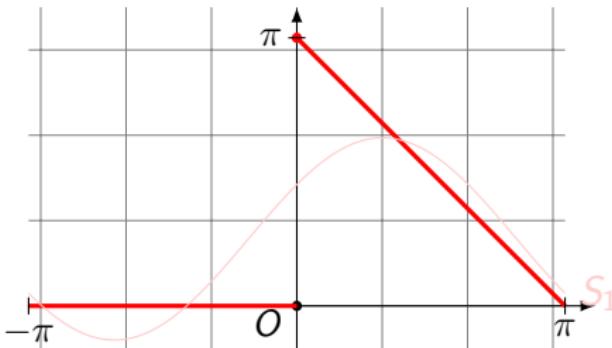
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a  $f(x)$  mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Intro

Serie de  
Fourier

$s_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## EJEMPLO 1

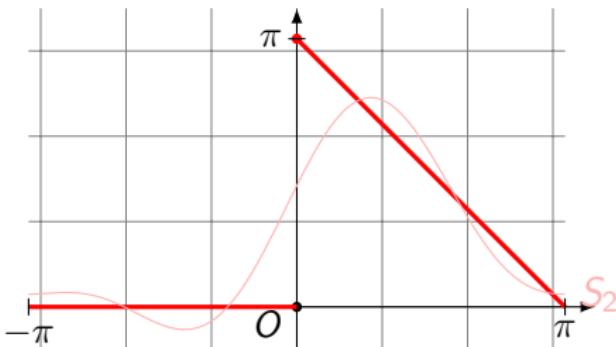
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a  $f(x)$  mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Intro

Serie de  
Fourier

$s_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## EJEMPLO 1

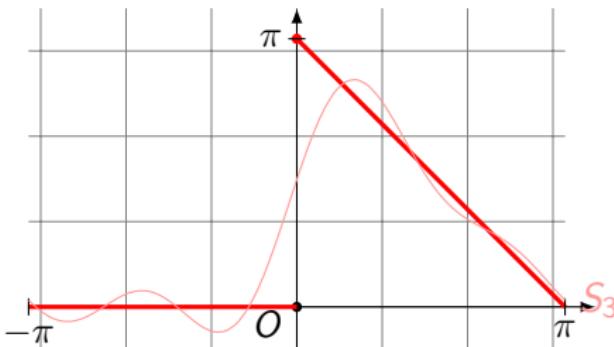
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a  $f(x)$  mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Intro

Serie de  
Fourier

$s_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## EJEMPLO 1

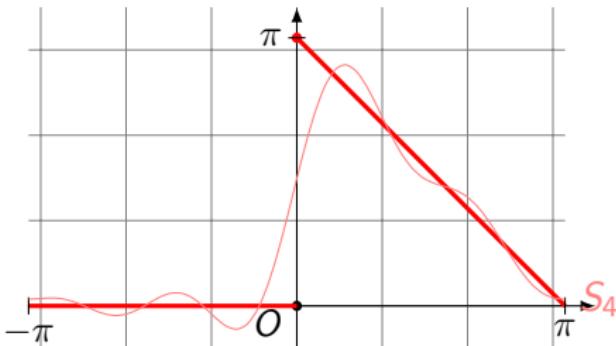
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a  $f(x)$  mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## EJEMPLO 1

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a  $f(x)$  mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## EJEMPLO 1

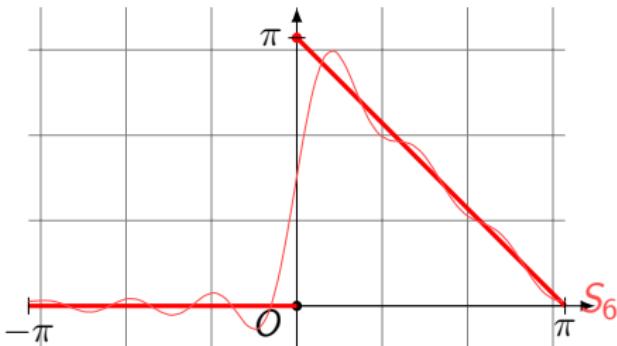
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a  $f(x)$  mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## EJEMPLO 1

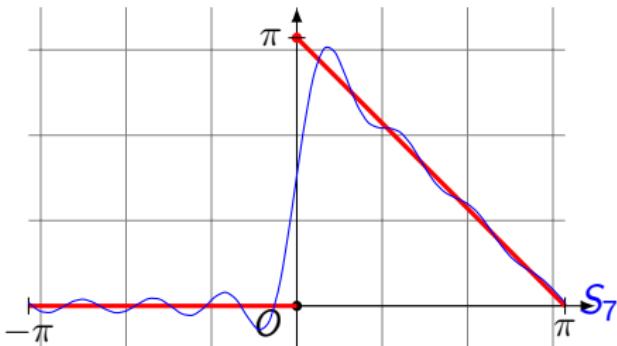
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a  $f(x)$  mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Intro

Serie de  
Fourier

$s_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## EJEMPLO 1

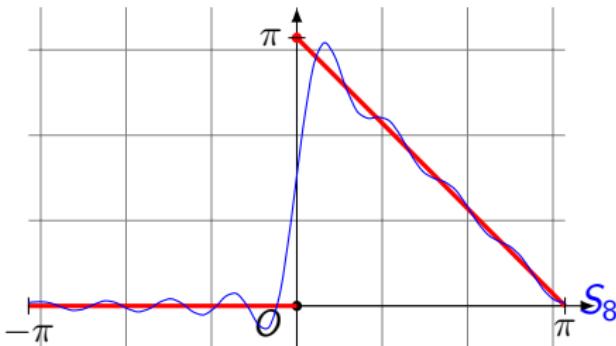
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a  $f(x)$  mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Intro

Serie de  
Fourier

$s_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## EJEMPLO 1

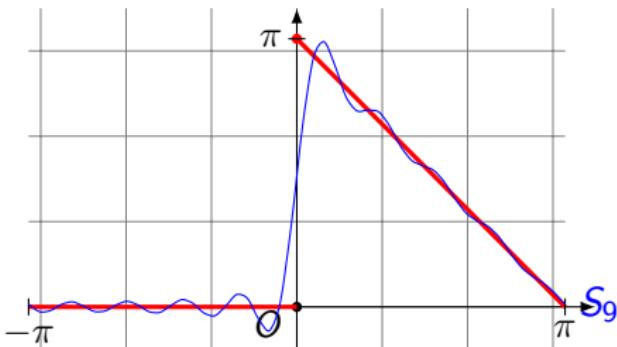
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a  $f(x)$  mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## EJEMPLO 1

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

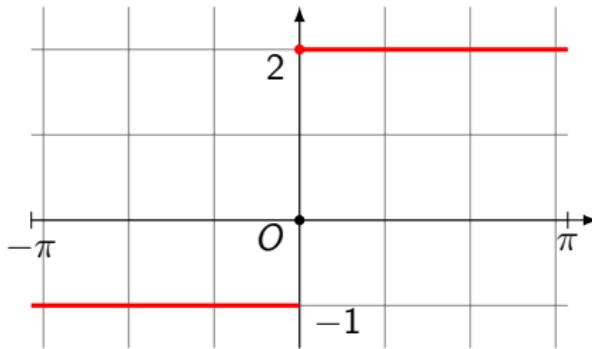
Las aproximaciones a  $f(x)$  mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



## EJEMPLO 2

Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



Aquí  $\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ .

**Matemáticas  
Avanzadas  
para  
Ingeniería:  
Series de  
Fourier**

**Departamento  
de  
Matemáticas**

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -1 dx + \int_0^{\pi} 2 dx \right)$$

**Matemáticas  
Avanzadas  
para  
Ingeniería:  
Series de  
Fourier**

Departamento  
de  
Matemáticas

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -1 dx + \int_0^{\pi} 2 dx \right) \\&= \frac{1}{\pi} \left( [-x]_{-\pi}^0 + [2x]_0^{\pi} \right)\end{aligned}$$

**Matemáticas  
Avanzadas  
para  
Ingeniería:  
Series de  
Fourier**

Departamento  
de  
Matemáticas

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -1 dx + \int_0^{\pi} 2 dx \right) \\&= \frac{1}{\pi} \left( [-x]_{-\pi}^0 + [2x]_0^{\pi} \right) \\a_0 &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -1 dx + \int_0^{\pi} 2 dx \right) \\&= \frac{1}{\pi} \left( [-x]_{-\pi}^0 + [2x]_0^{\pi} \right) \\a_0 &= 1\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(\omega_0 n x) dx \quad \text{recuerde } \omega_0 = 1$$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -1 dx + \int_0^{\pi} 2 dx \right) \\&= \frac{1}{\pi} \left( [-x]_{-\pi}^0 + [2x]_0^{\pi} \right) \\a_0 &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(\omega_0 n x) dx \quad \text{recuerde } \omega_0 = 1 \\&= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -1 \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} 2 \cos(nx) dx \right)\end{aligned}$$

**Matemáticas  
Avanzadas  
para  
Ingeniería:  
Series de  
Fourier**

Departamento  
de  
Matemáticas

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -1 dx + \int_0^{\pi} 2 dx \right) \\&= \frac{1}{\pi} \left( [-x]_{-\pi}^0 + [2x]_0^{\pi} \right) \\a_0 &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(\omega_0 n x) dx \quad \text{recuerde } \omega_0 = 1 \\&= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -1 \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} 2 \cos(nx) dx \right) \\&= \frac{1}{\pi} \left( \left[ -\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^0 + \left[ 2 \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -1 dx + \int_0^{\pi} 2 dx \right) \\&= \frac{1}{\pi} \left( [-x]_{-\pi}^0 + [2x]_0^{\pi} \right) \\a_0 &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(\omega_0 n x) dx \quad \text{recuerde } \omega_0 = 1 \\&= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -1 \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} 2 \cos(nx) dx \right) \\&= \frac{1}{\pi} \left( \left[ -\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^0 + \left[ 2 \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} \right) \\a_n &= 0\end{aligned}$$

**Matemáticas  
Avanzadas  
para  
Ingeniería:  
Series de  
Fourier**

**Departamento  
de  
Matemáticas**

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_o$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(\omega_0 n x) dx \quad \text{recuerde } \omega_0 = 1$$

**Matemáticas  
Avanzadas  
para  
Ingeniería:  
Series de  
Fourier**

**Departamento  
de  
Matemáticas**

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_o$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(\omega_0 n x) dx \quad \text{recuerde } \omega_0 = 1 \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -1 \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} 2 \sin(nx) dx \right) \end{aligned}$$

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_o$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(\omega_0 n x) dx \quad \text{recuerde } \omega_0 = 1 \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -1 \sin(n x) dx + \int_0^{\pi} 2 \sin(n x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \left[ \frac{\cos(n x)}{n} \right]_0^\pi + \left[ -2 \frac{\cos(n x)}{n} \right]_0^\pi \right) \end{aligned}$$

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_o$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(\omega_0 n x) dx \quad \text{recuerde } \omega_0 = 1 \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -1 \sin(n x) dx + \int_0^{\pi} 2 \sin(n x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \left[ \frac{\cos(n x)}{n} \right]_0^\pi + \left[ -2 \frac{\cos(n x)}{n} \right]_0^\pi \right) \\ b_n &= \frac{3(1 - (-1)^n)}{n \pi} \end{aligned}$$

## Algunas sumas parciales:

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \sin(x)$$

$$S_3 = S_4 = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \sin(x) + \frac{2}{\pi} \sin(3x)$$

$$S_5 = S_6 = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \sin(x) + \frac{2}{\pi} \sin(3x) + \frac{6}{5\pi} \sin(5x)$$

$$S_7 = S_8 = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \sin(x) + \frac{2}{\pi} \sin(3x) + \frac{6}{5\pi} \sin(5x) + \frac{6}{7\pi} \sin(7x)$$

$$S_9 = S_{10} = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \sin(x) + \frac{2}{\pi} \sin(3x) + \frac{6}{5\pi} \sin(5x) + \frac{6}{7\pi} \sin(7x) + \frac{2}{3\pi} \sin(9x)$$

$$S_{11} = S_{12} = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \sin(x) + \frac{2}{\pi} \sin(3x) + \frac{6}{5\pi} \sin(5x) + \frac{6}{7\pi} \sin(7x) + \frac{2}{3\pi} \sin(9x) + \frac{6}{11\pi} \sin(11x)$$

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

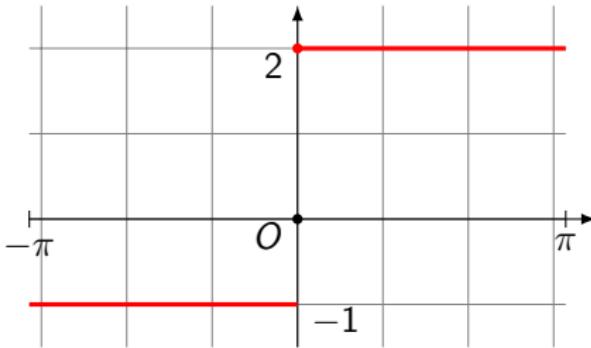
Complejas

TI: $c_n$

## EJEMPLO 2

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



Intro

Serie de  
Fourier

$s_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

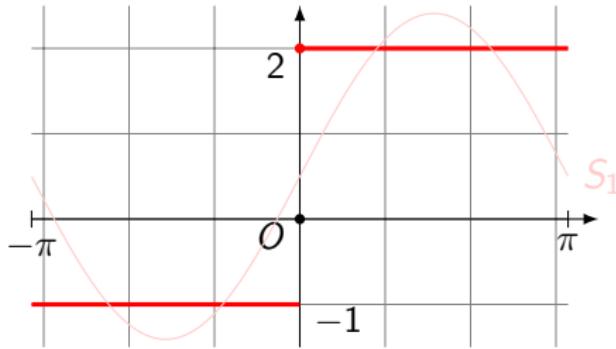
## EJEMPLO 2

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{3(1 - (-1)^n)}{n\pi}$$



Intro

Serie de  
Fourier

$s_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

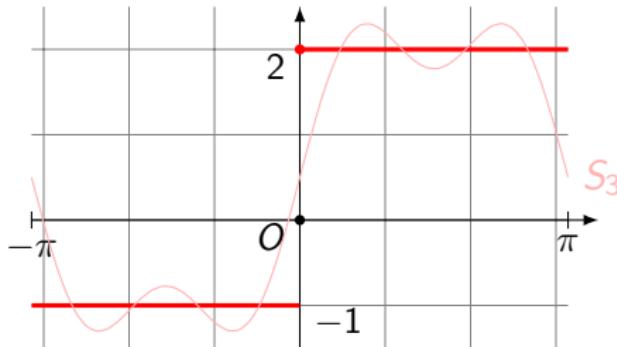
## EJEMPLO 2

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{3(1 - (-1)^n)}{n\pi}$$



Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

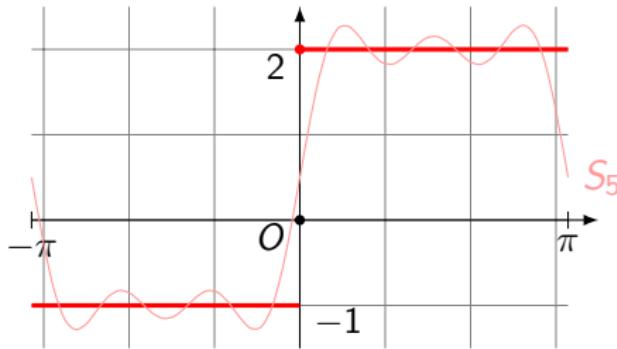
## EJEMPLO 2

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{3(1 - (-1)^n)}{n\pi}$$



Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

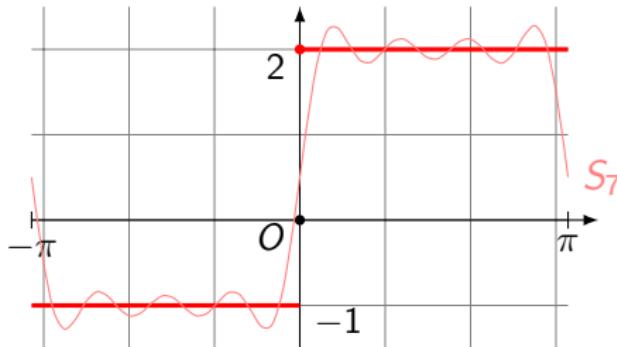
## EJEMPLO 2

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{3(1 - (-1)^n)}{n\pi}$$



Intro

Serie de  
Fourier

$s_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## EJEMPLO 2

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{3(1 - (-1)^n)}{n\pi}$$



Intro

Serie de  
Fourier

$s_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## EJEMPLO 2

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{3(1 - (-1)^n)}{n\pi}$$



Intro

Serie de  
Fourier

$s_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

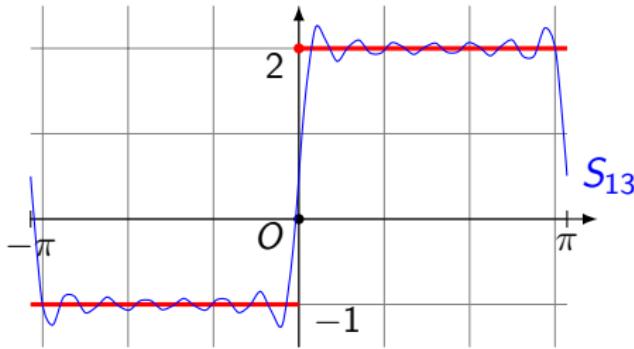
## EJEMPLO 2

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{3(1 - (-1)^n)}{n\pi}$$



Intro

Serie de  
Fourier

$s_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

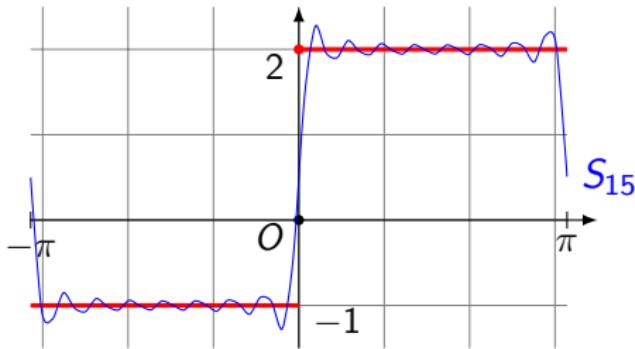
## EJEMPLO 2

Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{3(1 - (-1)^n)}{n\pi}$$



## CONDICIONES DE CONVERGENCIA

Sea  $f(x)$  una función periódica definida en un intervalo de longitud  $T$  continua, excepto posiblemente en un número finito de puntos donde tiene discontinuidades finitas y que posee derivada continua también excepto en número finito de puntos donde tiene discontinuidades finitas. Entones, la serie de Fourier para  $f(x)$  converge a  $f(x)$  en todo punto de continuidad y en los puntos de discontinuidad la serie de Fourier converge a

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

donde  $f(x+)$  representa el límite por la derecha a  $x$  y  $f(x-)$  representa el límite por la izquierda a  $x$ .

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

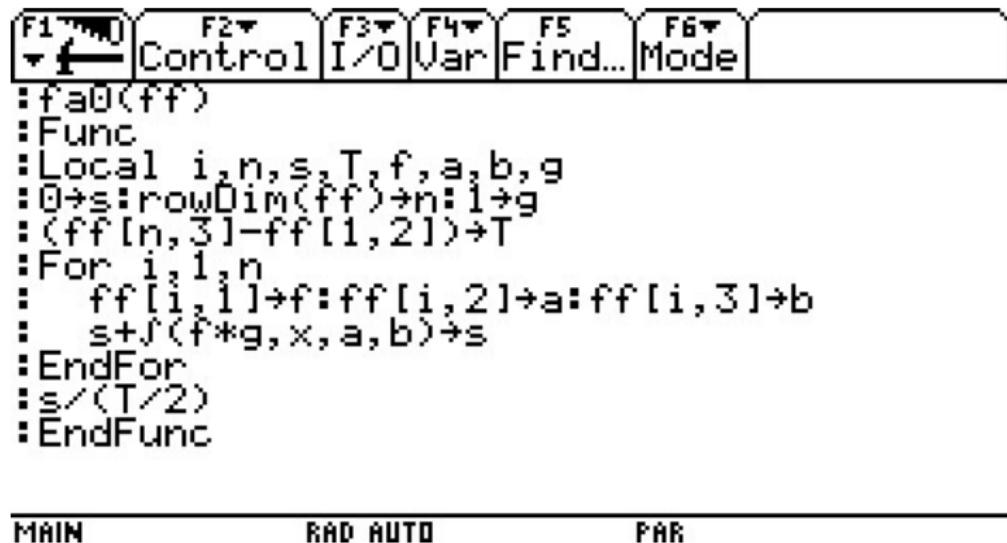
Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## CÓDIGO EN LA TI PARA $a_0$



The image shows the TI-Nspire CX CAS calculator's TI-BASIC menu. The menu bar at the top includes F1 (Home), F2 (Control), F3 (I/O), F4 (Var), F5 (Find...), F6 (Mode), and an empty F7 slot. Below the menu, the code for calculating  $a_0$  is displayed:

```
:f(a0(ff)
:Func
:Local i,n,s,T,f,a,b,g
:0→s:rowDim(ff)→n:1→g
:(ff[n,3]-ff[1,2])→T
:For i,1,n
:  ff[i,1]→f:ff[i,2]→a:ff[i,3]→b
:  s+f(f*g,x,a,b)→s
:EndFor
:s/(T/2)
:EndFunc
```

---

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

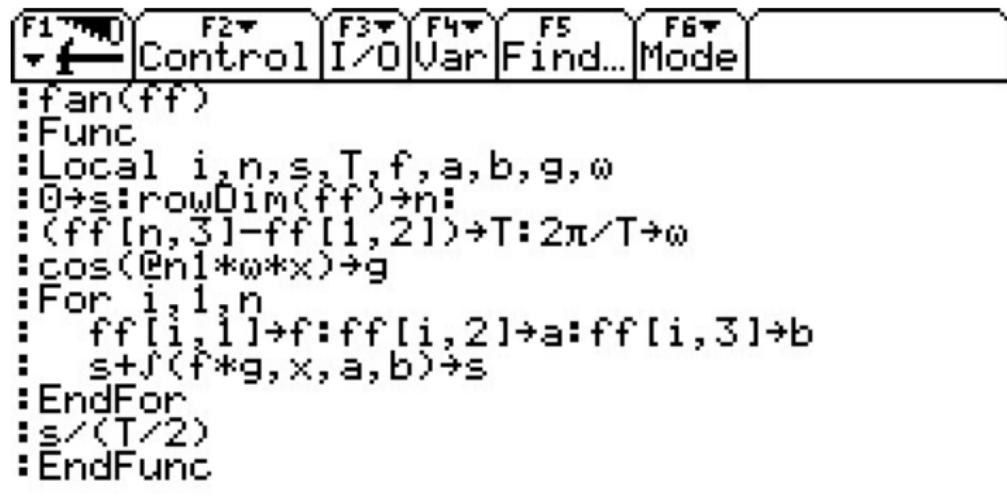
Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## CÓDIGO EN LA TI PARA $a_n$



The image shows a TI-Nspire CX CAS calculator displaying a TI-BASIC program. The screen is divided into several sections: a menu bar at the top with F1 through F6 buttons, a code editor in the center containing the program, and a status bar at the bottom with MAIN, RAD AUTO, and PAR indicators.

```
F1 ▾ F2 ▾ F3 ▾ F4 ▾ F5 ▾ F6 ▾ Control I/O Var Find... Mode
:fan(ffff)
:Func
:Local i,n,s,T,f,a,b,g,@
:@+s:rowDim(ffff)→n:
:(ffff[n,3]-ffff[1,2])→T:2π/T→ω
:cos(@n1*ω*x)→g
:For i,1,n
:    fff[i,1]→f:ffff[i,2]→a:ffff[i,3]→b
:    s+f(f*g,x,a,b)→s
:EndFor
:s/(T/2)
:EndFunc
```

MAIN

RAD AUTO

PAR

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

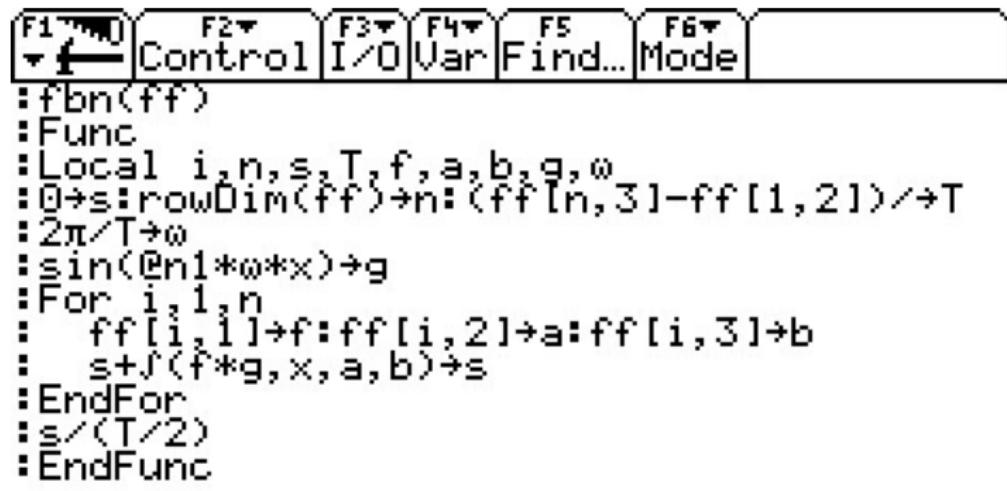
Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## CÓDIGO EN LA TI PARA $b_n$



The image shows a TI-Nspire CX CAS calculator displaying a TI-BASIC program. The screen is divided into several sections: a menu bar at the top with F1 through F6 buttons, a function key area below it, and a large text area for the program code. The function keys include F1 (CATALOG), F2 (Control), F3 (I/O), F4 (Var), F5 (Find...), and F6 (Mode). The program itself is a function named fbn, which takes a matrix ff as input. It initializes variables i, n, s, T, f, a, b, g, and omega. It then calculates omega as 2\*pi/T. It defines a function g as sin(@n1\*omega\*x). A for loop iterates from 1 to n, updating f, a, and b using the formula ff[i,1] → f; ff[i,2] → a; ff[i,3] → b. It also updates s using the formula s + f \* g, x, a, b. After the loop, it divides s by (T/2) and ends the function.

```
:fn(f)
:Func
:Local i,n,s,T,f,a,b,g,@
:@+s:rowDim(f)→n:(f[1,3]-f[1,2])→T
:2π/T→ω
:sin(@n1*ω*x)→g
:For i,1,n
:    f[f,i,1]→f:f[f,i,2]→a:f[f,i,3]→b
:    s+f*g,x,a,b→s
:EndFor
:s/(T/2)
:EndFunc
```

---

MAIN

RAD AUTO

PAR

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## FORMATO PARA LA FUNCIÓN DE ENTRADA



■  $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow ff$

$[0, -2, -1; 1, -1, 1; 0, 1, 2] \rightarrow ff$

MAIN RAD AUTO FUNC 1/30

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## USO DE LAS FUNCIONES



■  $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow ff$

$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

■  $(fa0(ff), fan(ff), fbn(ff))$

$$\left\{ \begin{array}{lll} 1 & \frac{2 \cdot \sin(\theta n_1 \cdot \pi)}{2} & 0 \end{array} \right.$$

**`{fa0(ff), fan(ff), fbn(ff)}`**

MAIN

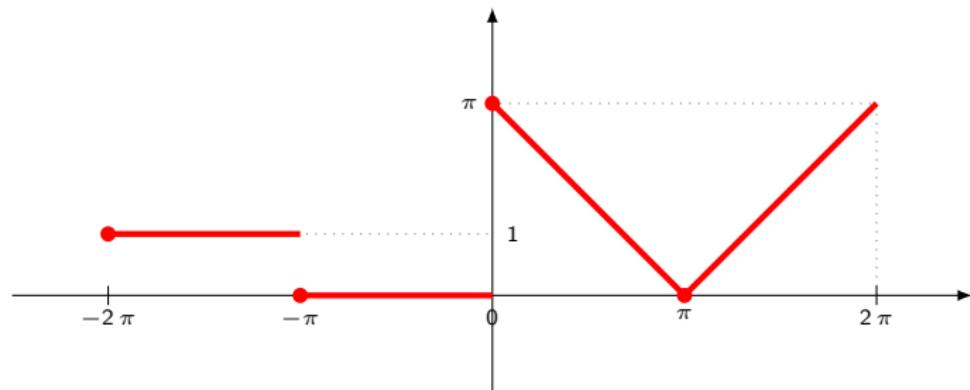
RAD AUTO

FUNC 2/30

## EJEMPLO 3

Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } -2\pi \leq x < -\pi \\ 0 & \text{para } -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & \text{para } 0 \leq x < \pi \\ x - \pi & \text{para } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

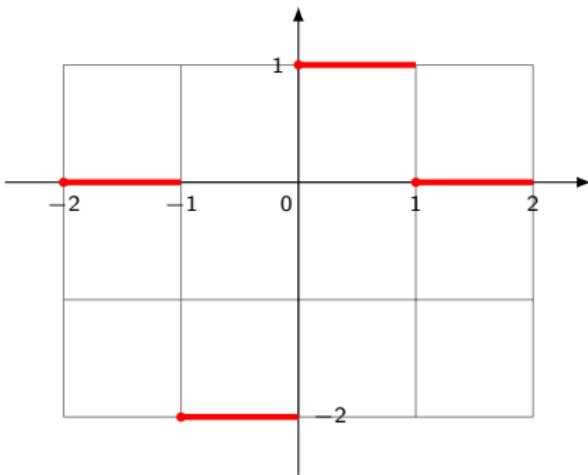


Aquí  $\omega_0 = \frac{2\pi}{4\pi} = 1/2$ .

## EJEMPLO 4

Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -2 \leq x < -1 \\ -2 & \text{para } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{para } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$



Aquí  $\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \pi/2$ .

## COSAS A RECORDAR

- Las funciones  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$  son funciones periódicas con periodo  $2\pi$ .
- Si  $f(x)$  es periódica con periodo  $T$  entonces  $f(ax)$  es periódica con periodo  $S = T/a$ : Pues se necesita que  $f(a(x + S)) = f(ax + aS) = f(ax)$ :  $aS = T$ . En términos de la frecuencia, tenemos que la frecuencia de  $f(ax)$  es  $a$ -veces la frecuencia de  $f(x)$ .
- Si  $f(x)$  es periódica con periodo  $T$  y  $g(x)$  es periódica con periodo  $S$  entonces  $f(x) + g(x)$  será periódica si existen enteros positivos  $n$  y  $m$  tales que  $n \cdot T = m \cdot S$ . Pues se necesita encontrar un cierto número de veces que ambos períodos se repitan.
- Si  $f(x)$  es periódica con periodo  $T$  entonces para cualquier entero positivo  $n$ ,  $f(x) + f(nx)$  es una función periódica con periodo  $T$ .

## FORMA COMPACTA DE LA SERIES FOURIER

La serie de Fourier:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{2\pi n}{T} x \right) + b_n \sin \left( \frac{2\pi n}{T} x \right) \right)$$

se puede escribir en la forma compacta:

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left( \frac{2\pi n}{T} x + \phi_n \right)$$

donde

$$A_0 = a_0/2, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = -\tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right)$$

Es más conveniente calcular:  $\phi_n = -\text{Arg}(a_n + b_n i)$

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

**Compacta**

Hechos 2

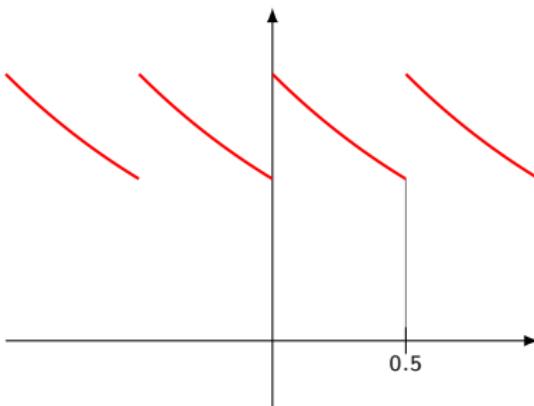
Complejas

TI: $c_n$

## EJEMPLO 5

Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{para } 0 < x < 0.5 \\ 0 & \text{para } x \geq 0.5 \end{cases}$$



Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## Problema anterior realizado mediante la calculadora.

MAIN RAD AUTO FUNC 4/30

$$\begin{cases} 1 & \frac{2 \cdot \sin(\pi \cdot x)}{2} \\ 0 & \end{cases}$$

$$[\text{e}^{-x} \cdot 0 \cdot .5] \rightarrow \text{ff}$$

$$[\text{e}^{-x} \cdot 0 \cdot .5]$$

$$[\text{fa0}(\text{ff}), \text{fan}(\text{ff}), \text{fbn}(\text{ff})] \rightarrow g$$

$$\begin{cases} 1.57388 & \frac{-0.015364 \cdot \cos(6.28319 \cdot \text{en1})}{\text{en1}^2 + .006333} \\ & + \end{cases}$$

$$\text{seq}(\text{cn}[\text{en1} = i, i, 1, 4])$$

MAIN RAD AUTO FUNC 6/30

$$\frac{g_1}{2} \rightarrow c0 .786939$$

$$[g_2^2 + g_3^2] \rightarrow cn$$

$$[-4 \cdot e^{-16} \cdot (10 \cdot (\text{en1}^2 - .0025) \cdot (\cos(6.28319 \cdot \text{en1})))^2] \rightarrow cn$$

MAIN RAD AUTO FUNC 7/30

$$\text{seq}(\text{cn} | \text{en1} = i, i, 1, 4)$$

$$(.12485 \quad .062573 \quad .041734 \quad .031305)$$

$$\text{seq}(\text{cn} | \text{en1} = 1, 1, 1, 4)$$

MAIN RAD AUTO FUNC 9/30

$$[\text{seq}(\text{cn} | \text{en1} = i, i, 1, 4)]$$

$$(.12485 \quad .062573 \quad .041734 \quad .031305)$$

$$-[\tan(\frac{g_3}{g_2}) | \text{en1} = 1]$$

$$-[\tan(\frac{g_3}{g_2}) | \text{en1} = 2]$$

$$-4 * (\frac{g[3]}{\text{en1}=2}) / (\frac{g[2]}{\text{en1}=2})$$

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_o$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

**Compacta**

Hechos 2

Complejas

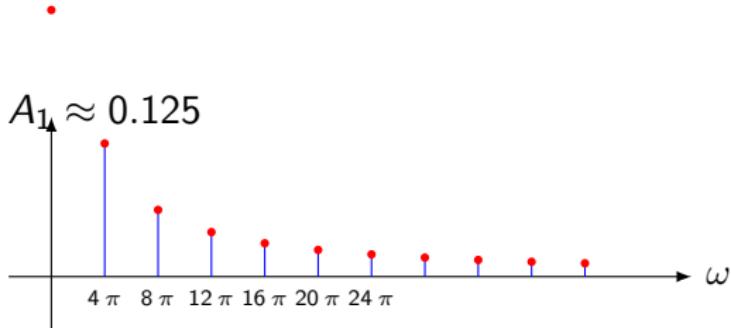
TI: $c_n$

## AMPLITUD Y FASE DEL EJEMPLO 5

$$A_0 \approx 0.787$$

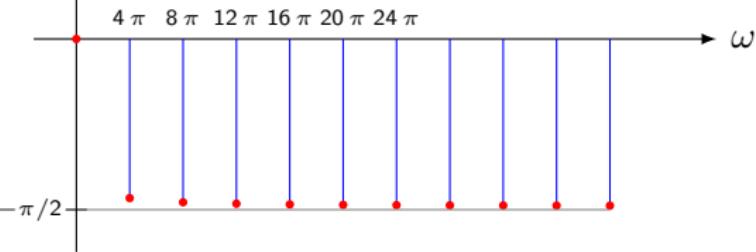
$A_n$

$$A_1 \approx 0.125$$



$\phi_n$

$$4\pi \quad 8\pi \quad 12\pi \quad 16\pi \quad 20\pi \quad 24\pi$$



## IDEAS

Usando la fórmula de Euler  $e^{a\mathbf{i}} = \cos(a) + \operatorname{sen}(a)\mathbf{i}$  y su variante  $e^{-a\mathbf{i}} = \cos(a) - \operatorname{sen}(a)\mathbf{i}$ , tenemos:

$$\cos(a) = \frac{e^{a\mathbf{i}} + e^{-a\mathbf{i}}}{2} \text{ y } \operatorname{sen}(a) = \frac{e^{a\mathbf{i}} - e^{-a\mathbf{i}}}{2\mathbf{i}}$$

por tanto, el término

$$f_k(x) = a_k \cos(k\omega_0 x) + b_k \operatorname{sen}(k\omega_0 x)$$

puede escribirse como

$$\begin{aligned} f_k(x) &= a_k \left( \frac{e^{k\omega_0 x\mathbf{i}} + e^{-k\omega_0 x\mathbf{i}}}{2} \right) + b_k \left( \frac{e^{k\omega_0 x\mathbf{i}} - e^{-k\omega_0 x\mathbf{i}}}{2\mathbf{i}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (a_k - b_k \mathbf{i}) e^{k\omega_0 x\mathbf{i}} + \frac{1}{2} (a_k + b_k \mathbf{i}) e^{-k\omega_0 x\mathbf{i}} \end{aligned}$$

si definimos los coeficientes de las exponenciales  $e^{k\omega_0 x\mathbf{i}}$  y de  $e^{-k\omega_0 x\mathbf{i}}$  como

$$c_k = \frac{1}{2} (a_k - b_k \mathbf{i}) \text{ y } c_{-k} = \frac{1}{2} (a_k + b_k \mathbf{i})$$

Entonces la serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x))$$

podría escribirse como:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n e^{n\omega_0 x i} + c_{-n} e^{-n\omega_0 x i} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{n\omega_0 x i} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-n\omega_0 x i} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{n\omega_0 x i} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{n\omega_0 x i} \end{aligned}$$

## SERIES COMPLEJAS DE FOURIER

La serie compleja de Fourier de una función  $f(x)$  periódica definida en el intervalo de longitud  $T$  está dada por la fórmula

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{n\omega_0 x i}$$

donde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(x) e^{-n\omega_0 x i} dx \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

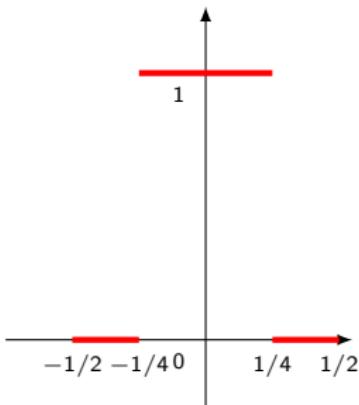
Relación entre la forma compacta y la compleja:

$$A_n = 2 |c_n|, \quad \phi_n = -\tan^{-1} \left( \frac{(c_n - c_{-n}) i}{c_n + c_{-n}} \right)$$

## EJEMPLO 6

Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -1/2 < x < -1/4 \\ 1 & \text{para } -1/4 < x < 1/4 \\ 0 & \text{para } 1/4 < x < 1/2 \end{cases}$$



Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_o$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

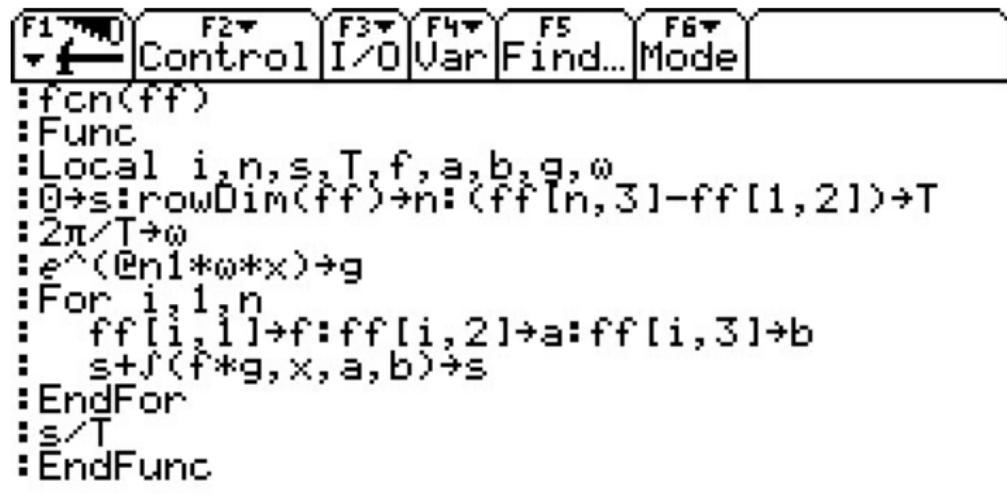
Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## CÓDIGO EN LA TI PARA $c_n$



The image shows a TI-Nspire CX CAS calculator displaying a TI-BASIC program. The screen is divided into several sections: a menu bar at the top with F1 through F6 buttons, a command input area in the center, and status indicators at the bottom.

**Menu Bar:**

- F1:
- F2: Control
- F3: I/O
- F4: Var
- F5: Find...
- F6: Mode

**Code Area:**

```
:fcn(ff)
:Func
:Local i,n,s,T,f,a,b,g,w
:@s:rowDim(ff)→n:(ff[1..n,3]-ff[1,2])→T
:2π/T→w
:e^(@n1*w*x)→g
:For i,1,n
:    ff[i,1]→f:ff[i,2]→a:ff[i,3]→b
:    s+f(f*g,x,a,b)→s
:EndFor
:s/T
:EndFunc
```

**Status Bar:**

MAIN RAD AUTO PAR

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## EJEMPLO PARA $c_n$

The TI-Nspire CX CAS screen displays the following:

- Top menu bar: F1 ▾, F2 ▾, F3 ▾, F4 ▾, F5, F6 ▾, Clean Up.
- Below the menu bar:  $1 \frac{0}{\theta n1 \cdot \pi} 0$ .
- Matrix operation:  $\begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/4 \\ 1 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \rightarrow ff$  resulting in  $\begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/4 \\ 1 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$ .
- Equation:  $\frac{\sin\left(\frac{\theta n1 \cdot \pi}{2}\right)}{\theta n1 \cdot \pi}$ .
- Input field: **fcn(ff) → cn**.
- Bottom status bar: MAIN, RAD AUTO, FUNC 4/30.

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## C<sub>0</sub> MEDIANTE LÍMITES

The TI-Nspire CX CAS screen displays a menu bar at the top with buttons F1 through F6. The F1 button is highlighted. Below the menu is a table with two rows of three columns each. The first row contains the labels 'Algebra', 'Calc', 'Other', 'PrgmIO', 'Clean', and 'Up'. The second row contains numerical values: 0, 1/2, 1/4, 0, 1/2, and 1/4 respectively. Below the table, there are three bullet points:

- $\begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \rightarrow ff$
- $\text{fcn}(ff) \rightarrow cn$
- $\lim_{\theta n_1 \rightarrow 0} cn \rightarrow a_0$

On the right side of the screen, there is a mathematical expression involving sine and a fraction. At the bottom of the screen, the command `limit(cn, @n1, 0) → a0` is entered in the command line. The status bar at the bottom shows "MAIN RAD AUTO FUNC 5/30".

## VARIOS $c_i$

F1 F2 F3 F4 F5 F6  
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up  
 $\sin\left(\frac{\theta n_1 \cdot \pi}{2}\right)$

- $\text{fcn}(\text{ff}) \rightarrow \text{cn}$
- $\lim_{\theta n_1 \rightarrow 0} \text{cn} \rightarrow a_0$
- $\text{seq}(\text{cn} \mid \theta n_1 = i, i, 1, 5)$

$$\left\{ \frac{1}{\pi}, 0, -\frac{1}{3 \cdot \pi}, 0, \frac{1}{5 \cdot \pi} \right\}$$

**seq(cn | n1=i, i, 1, 5)**

MAIN RAD AUTO FUNC 6/30

## POTENCIA MEDIA

La **potencia media** de una señal periódica  $f(x)$  con período  $T$  se define como:

$$P_{\text{media}} \doteq \frac{1}{T} \int_T |f(x)|^2 dx$$

La **relación de Parseval** para las series de Fourier en el caso de la serie de Fourier compleja se expresa como:

$$P_{\text{media}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

y en el caso de la serie de Fourier real:

$$P_{\text{media}} = \frac{1}{2} \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right)$$

Para poder responder la pregunta:

*¿cuántos términos de la serie de Fourier se deben tomar para aproximar razonablemente una función periódica?*

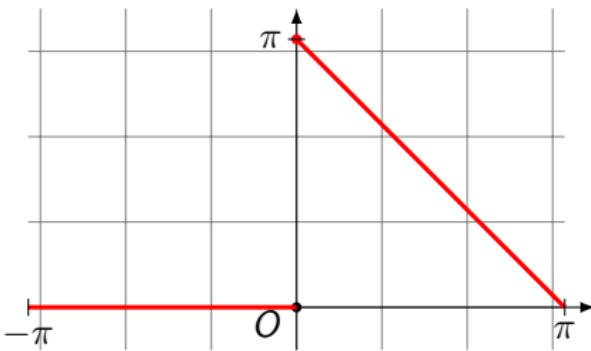
La clave puede estar en la potencia media. Se calcula la potencia media y establece un nivel en el cual se desea aproximarla. Digamos un 95% o un 99%. Con esto se van realizando sumas parciales de la fórmula de Parseval hasta alcanzar el nivel de aproximación deseado. Aunque sería deseable determinar analíticamente para un nivel de aproximación el valor  $n_o$  en el cual se obtiene la aproximación, en general, es muy difícil tener dicho valor.

## EJEMPLO

### Para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

determine el porcentaje de la potencia media que aproxima tomar la 20-ésima suma parcial.



## DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN

Definiremos la función en el formato requerido y aprovecharemos que cuando aplicamos  $f(a)(f^2)$  entrega

$$\frac{1}{T/2} \int_T f(x)^2 dx = 2 \frac{1}{T} \int_T f(x)^2 dx = 2 P_{media}$$



■ DelVar  $x, t, \omega$  Done  
■  $\begin{bmatrix} 0 & -\pi & 0 \\ \pi - x & 0 & \pi \end{bmatrix} \rightarrow f$   $\begin{bmatrix} 0 & -\pi & 0 \\ \pi - x & 0 & \pi \end{bmatrix}$   
■  $\begin{bmatrix} 0^2 & -\pi & 0 \\ (\pi - x)^2 & 0 & \pi \end{bmatrix} \rightarrow f2$   $\begin{bmatrix} 0 & -\pi & 0 \\ (\pi - x)^2 & 0 & \pi \end{bmatrix}$   
**[0^2, -π, 0; (π-x)^2, 0, π] → f2**

MAIN

RAD AUTO

PAR 3/30

## DETERMINACIÓN DE $a_0$ , $a_n$ Y $b_n$



■  $f a 0(f) \rightarrow a_0$   $\frac{\pi}{2}$

■  $f a n(f) \rightarrow a_n$   $\frac{-((-1)^{\Theta n 1} - 1)}{\Theta n 1^2 \cdot \pi}$

■  $f b n(f) \rightarrow b_n$   $\frac{1}{\Theta n 1}$

**f bn(f) → bn**

MAIN

RAD AUTO

PAR 7/30

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

## GENERACIÓN DE $a_1$ A $a_{20}$ Y $b_1$ A $b_{20}$

F1 ▾ F2 ▾ F3 ▾ F4 ▾ F5 F6 ▾ Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up (-1) (-1)

- $\text{fan}(f) \rightarrow a_n$   $\frac{1}{\pi n_1^2}$
- $\text{fbn}(f) \rightarrow b_n$   $\frac{1}{\pi n_1}$
- $\text{seq}(\text{approx}(a_n), n_1, 1, 20) \rightarrow a$   
0.63662 0.070736 0.025465 0.
- $\text{seq}(\text{approx}(b_n), n_1, 1, 20) \rightarrow b$   
0.5 0.333333 0.25 0.2 0.166667

**seq(approx(bn),n1,1,20)→b**

MAIN RAD AUTO PARM 9/30

Intro

Serie de  
Fourier

$S_k$

Convergencia

TI: $a_0$

TI: $a_n$

TI: $b_n$

TI: $f$

TI:Uso

Hechos 1

Compacta

Hechos 2

Complejas

TI: $c_n$

# POTENCIA MEDIA EN $S_{20}$ Y SU COMPARACIÓN CONTRA LA DE $f(x)$ : TENEMOS UNA APROXIMACIÓN DEL 98%

F1	F2	F3	F4	F5	F6	Clean Up
----	----	----	----	----	----	----------

■  $f_{bn}(f) \rightarrow bn$   $\frac{1}{@n1}$

■  $\text{seq}(\text{approx}(an), @n1, 1, 20) \rightarrow a$   
 $(.63662 \quad 0. \quad .070736 \quad 0. \quad .025465 \quad 0.)$

■  $\text{seq}(\text{approx}(bn), @n1, 1, 20) \rightarrow b$   
 $(1. \quad .5 \quad .333333 \quad .25 \quad .2 \quad .166667)$

■  $.5 \cdot \left( \frac{a_0^2}{2} + \text{sum}(a^2 + b^2) \right) \rightarrow pt20 \quad 1.62054$

**.5\*(a0^2/2+sum(a^2+b^2))→pt20**

MAIN	RAD AUTO	PAR 10/30
------	----------	-----------

F1	F2	F3	F4	F5	F6	Clean Up
----	----	----	----	----	----	----------

$[(\pi - x)^2 \quad 0 \quad \pi] \quad [x^2 \quad 0 \quad \pi]$

■  $\frac{\int f(x)(f_2)}{2} \rightarrow potm \quad \frac{\pi^2}{6}$

■  $\frac{potm - pt20}{potm} \quad .014827$

■  $\frac{pt20}{potm} \quad .985173$

**pt20/potm**

MAIN	RAD AUTO	PAR 6/30
------	----------	----------