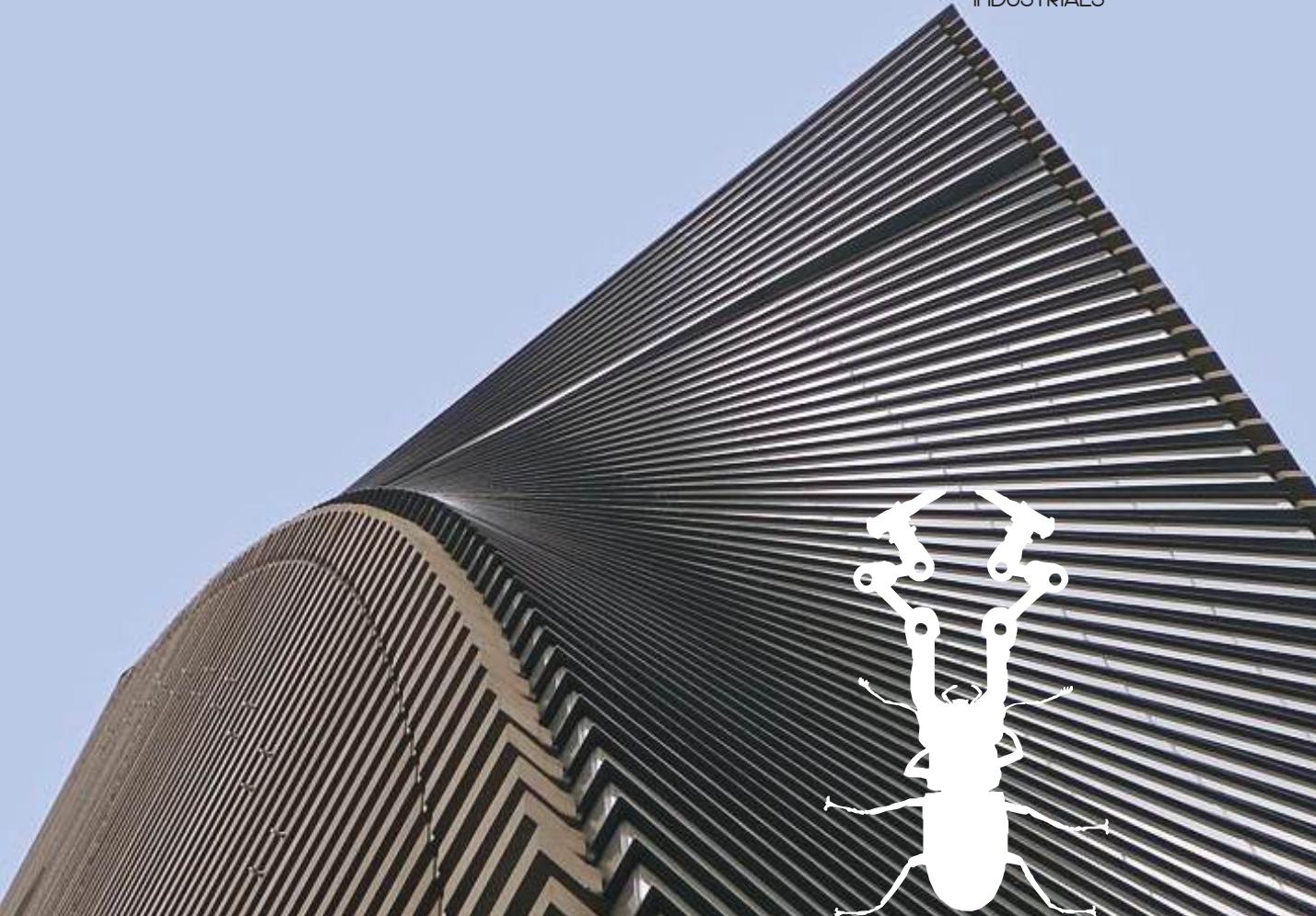




5

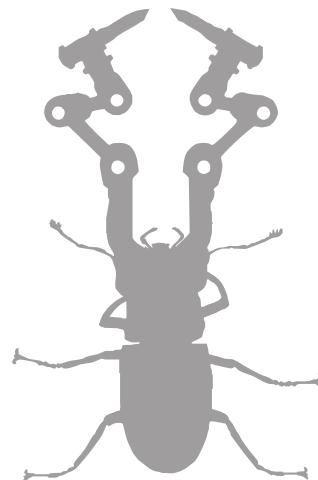
ENGINYERIES  
INDUSTRIALSUNIVERSITAT POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA  
BARCELONATECH→ **UPCGRAU****Cálculo de elementos estructurales →**David Sánchez Molina  
Ramón González Drigo





5

ENGINYERIES  
INDUSTRIALS



UNIVERSITAT POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA  
BARCELONATECH



iniciativa  
digital políècnica  
Publicacions Acadèmiques UPC

→ **UPCGRAU**

Cálculo de elementos estructurales →

**David Sánchez Molina  
Ramón González Drigo**

Amb el suport de la Factoria de Recursos Docents de la UPC



Primera edición: septiembre de 2011

Los autores, 2011



Iniciativa Digital Politècnica, 2011  
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC  
Jordi Girona Salgado 31,  
Edifici Torre Girona, D-203, 08034 Barcelona  
Tel.: 934 015 885 Fax: 934 054 101  
[www.upc.edu/idp](http://www.upc.edu/idp)  
E-mail: [info.idp@upc.edu](mailto:info.idp@upc.edu)

Imagen de cubierta: Edificio en construcción en Ginza, distrito de Chu-o, Tokyo. Autor: Tanakawho (Flickr)  
Diseño y dibujo de la cubierta: Jordi Soldevila  
Diseño maqueta interior: Jordi Soldevila

Depósito legal: B-33169-2011  
ISBN: 978-84-7653-729-9

Esta obra está bajo una Licencia de Creative Commons Reconocimiento-No comercial-Sin obras derivadas 3.0.  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>



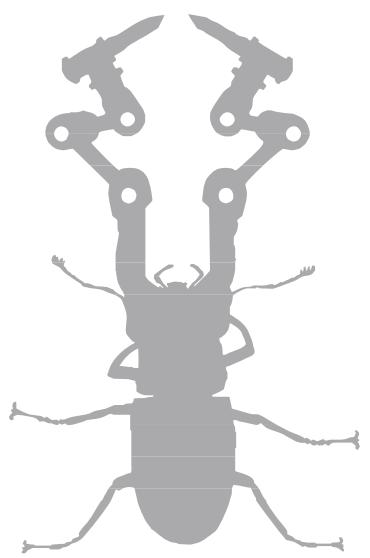
## Prefacio

Este libro está pensado como guía para la materia de estructuras en estudios de grado en Ingeniería, cubriendo gran parte del temario habitual de una asignatura de ese tipo. El libro está centrado en los métodos de cálculo y en la generalización de los conocimientos adquiridos tras una primera asignatura de Resistencia de Materiales.

Los temas escogidos introducen a los estudiantes al cálculo de elementos estructurales, que van más allá de la teoría convencional de vigas de Navier-Bernoulli (en 1D), y otros modelos simples unidimensionales para elementos aislados. Entre los tipos de elementos estructurales tratados hay ejemplos de estructuras con elementos 1D que forman (lineales y no-lineales), elementos 2D (placas, láminas y membranas) y elementos 3D en el capítulo dedicado a cimentaciones. Además de las complejidades de elementos bidimensionales y tridimensionales, este libro trata el cálculo dinámico de estructuras y el diseño sismico, así como la no-linealidad de algunos tipos de elementos estructurales.

El primer capítulo introduce las estructuras complejas que pueden ser representadas como conjuntos no alineados de barras elásticas, exponiendo con cierto detalle el método matricial de la rigidez. Posteriormente, gran parte del enfoque del último capítulo del método matricial se aplica al diseño sismico, que aquí se aborda por métodos matriciales dinámicos. El segundo capítulo examina casos de linealidad geométrica en pilares y piezas unidimensionales y se hace una introducción simple a fenómenos de no linealidad más complejos, como la abolladura y pandeo de piezas de sección no constante. El tercer capítulo trata de elementos bidimensionales: placas, láminas y membranas, que en esencia, son los análogos bidimensionales de las vigas rectas, los arcos y las catenarias. Los capítulos cuatro y cinco tratan de elementos de cimentación. El capítulo cuatro está centrado especialmente en elementos de cimentación basal para edificios, mientras que el capítulo cinco se centra en la acción del terreno sobre estructuras de contención.

Barcelona, octubre de 2010  
Los autores





# índice

Prefacio .....	5
Índice .....	7
<b>1.Método matricial de la rigidez.....</b>	<b>11</b>
1.1. Estructuras hiperestáticas .....	11
1.2. Fundamentos del método matricial .....	13
1.3. Matrices de rigidez elementales .....	14
1.3.1. Rigideces de una barra elástica.....	14
1.3.2. Matriz de rigidez de una barra recta (caso 2D).....	18
1.3.3. Matriz de rigidez de una barra recta (caso 3D).....	22
1.3.4. Matriz de rigidez de barras curvas.....	26
1.3.5. Matriz de rigidez de barras de sección variable.....	26
1.3.6. Matriz de rigidez de barras con nudos articulados.....	28
1.4. Fuerzas nodales equivalentes .....	29
1.4.1. Cargas puntuales.....	30
1.4.2. Cargas continuas rectangulares.....	32
1.4.3. Cargas continuas triangulares .....	33
1.5. Matrices de rigidez global .....	33
1.5.1. Ensamblaje (caso sin cambio de base).....	34
1.5.2. Ensamblaje (caso con cambio de base).....	36
1.5.3. Matriz de rigidez global de equilibrio.....	38
1.5.4. Simetría de la matriz y orden de aplicación de las cargas.....	39
1.5.5. Ejemplos convencionales.....	42
1.6. Cálculo no lineal de estructuras.....	50
1.6.1. Rigidez reducida de un soporte por flexión .....	50
1.6.2. Planteamiento del problema para estructuras no lineales .....	51
<b>2.No-linealidad geométrica (pandeo, inestabilidad elástica).....</b>	<b>57</b>
2.1. Curvatura bajo cargas axiales. Ecuación de la elástica y forma curva.....	58
2.2. Cálculo de cargas críticas .....	60
2.2.1. Barra biarticulada .....	60
2.2.2. Barra empotrada por un extremo y libre en el otro .....	63



2.2.3.	Barra biempotrada.....	64
2.2.4.	Barra empotrada-articulada.....	65
2.2.5.	Barra elástica en el caso general .....	66
2.2.6.	Piezas de sección no constante.....	68
2.2.7.	Longitud de pandeo en normas: MV-103, EA, CTE y Eurocódigo ..	70
2.3.	Cálculo de tensiones según el Eurocódigo y el CTE .....	72
2.3.1.	Cálculo del pandeo flexional.....	73
2.3.2.	Cálculo del pandeo torsional o lateral .....	77
2.4.	Fórmula de Engesser.....	78
2.5.	Pandeo lateral y abolladura.....	78
2.5.1.	Pandeo en perfiles abiertos de pared delgada.....	78
2.5.2.	Inestabilidad local y abolladura .....	80
2.5.3.	Pandeo local y abolladura en perfiles.....	80
2.6.	Cálculo no lineal de estructuras .....	85
2.6.1.	Rigidez reducida de un soporte por flexión .....	86
2.6.2.	Planteamiento del problema para estructuras no lineales .....	88
2.7.	No linealidad geométrica global: pandeo global de cúpulas y arcos .....	93
2.7.1.	Un modelo simple con pandeo global .....	93
<b>3. Placas, láminas y membranas .....</b>	<b>99</b>	
3.1.	Definiciones.....	99
3.2.	Métodos de cálculo para placas delgadas .....	100
3.3.	Métodos clásicos.....	101
3.3.1.	Método de Kirchhoff.....	104
3.3.2.	Método de las diferencias finitas.....	111
3.4.	Predimensionado por el método de Marcus .....	114
3.5.	Soluciones analíticas para placas circulares.....	117
3.5.1.	Placa simplemente apoyada y uniformemente cargada.....	117
3.5.2.	Placa simplemente apoyada cargada en el centro .....	118
3.5.3.	Placa simplemente apoyada y cargada puntual en el centro.....	119
3.6.	Membranas y paredes de depósitos.....	119
3.6.1.	Depósitos de gas bajo presión uniforme .....	120
3.6.2.	Depósitos para líquidos .....	120
3.7.	Teoría general de láminas .....	121
<b>4. Cimentaciones basales superficiales y profundas.....</b>	<b>125</b>	
4.1.	Introducción.....	125
4.1.1.	Tipos básicos de cimentación.....	125
4.1.2.	Mecanismo de fallo .....	126
4.1.3.	Datos del terreno necesarios para la cimentación .....	126
4.1.4.	Capacidad portante del terreno.....	128
4.2.	Cálculo de zapatas aisladas.....	130
4.2.1.	Zapatas rígidas ( <i>ZR</i> ) .....	132
4.2.2.	Zapatas flexibles ( <i>ZF</i> ) .....	135
4.2.3.	Zapatas de Hormigón en Masa ( <i>ZHM</i> ).....	137
4.3.	Comprobaciones adicionales en zapatas aisladas .....	138
4.3.1.	Comprobación del vuelco y el deslizamiento .....	138
4.3.2.	Comprobación del punzonamiento .....	139
4.3.3.	Comprobación del cortante .....	142
4.4.	Cálculo de zapatas corridas.....	142
4.4.1.	Zapatas corridas bajo cargas centradas e idénticas .....	145

4.5.	Cálculo de losas.....	146
4.5.1.	Método de los rectángulos .....	147
4.6.	Cálculo de pilotajes .....	148
4.6.1.	Cálculo del pilotaje.....	149
4.6.2.	Cálculo del pilote.....	150
4.6.3.	Cálculo de encepados .....	150
4.7.	Cálculo de bases de unión pilar-cimentación .....	153
4.7.1.	Cálculo de uniones pilar-cimentación.....	154
4.7.2.	Comprobación de la compresión en el hormigón .....	155
4.7.3.	Comprobación de la placa de apoyo .....	156
4.7.4.	Comprobación de los pernos .....	156
<b>5.</b>	<b>Cimentaciones extendidas y estructuras de contención .....</b>	<b>159</b>
5.1.	Definiciones .....	159
5.2.	Tipos de estructuras de contención.....	161
5.3.	El empuje del terreno .....	163
5.4.	Empuje activo.....	165
5.4.1.	Teoría de Coulomb para suelos granulares.....	165
5.4.2.	Cálculo del empuje activo utilizando la teoría de Rankine.....	170
5.4.3.	Presencia de agua en el terreno. Influencia del nivel freático.....	170
5.5.	Empuje pasivo .....	171
5.6.	Proyecto y construcción de estructuras de contención rígidas .....	173
5.6.1.	Formas de agotamiento.....	173
5.6.2.	Seguridad.....	174
5.7.	Estructuras flexibles .....	176
5.7.1.	Cálculo de estructuras flexibles (pantallas) .....	176
<b>6.</b>	<b>Diseño sismico de estructuras .....</b>	<b>181</b>
6.1.	Definiciones .....	181
6.2.	Análisis modal de edificios de cortante .....	183
6.2.1.	Estructuras elásticas y ecuaciones de movimiento .....	183
6.2.2.	Análisis modal: modos de vibración propios y frecuencias naturales..	185
6.3.	Especetros de respuesta del terreno y respuestas máximas modales .....	189
6.3.1.	Pseudo-espectros y espectros de diseño.....	189
6.3.2.	Respuestas máximas modales.....	190
6.4.	Aplicación de la norma NCSE-02 .....	192
6.4.1.	Determinación de la aceleración espectral.....	192
6.4.2.	Tablas resumen de la norma sismorresistente.....	195
6.5.	Edificios de torsión y cortante y efectos de segundo orden.....	195
6.6.	Recomendaciones constructivas .....	199
<b>7.</b>	<b>Apéndice I. Ecuación de la curva elástica .....</b>	<b>203</b>
7.1.	A.1. Deducción de la ecuación de la curva elástica.....	203
7.2.	A.2. Resolución de la curva elástica.....	206
7.3.	A.3. Inestabilidad elástica .....	206
<b>8.</b>	<b>Bibliografía .....</b>	<b>209</b>
8.1.	Artículos .....	209
8.2.	Normas .....	209
8.3.	Bibliografía convencional .....	209
<b>9.</b>	<b>Índice analítico.....</b>	<b>211</b>

→ 1

---



# Método matricial de la rigidez

El método matricial de la rigidez es uno de los métodos más utilizados en el cálculo estructural debido a su generalidad, que lo hace aplicable sin complicaciones adicionales a estructuras hiperestáticas. Además el método matricial de la rigidez tiene una implementación algorítmica sencilla y se puede programar con facilidad, por lo que actualmente existe una gran cantidad de software comercial basado en este método .

El método matricial de la rigidez es una generalización o sistematización del método de la rigidez en su versión no matricial. La versión no matricial permite hallar las reacciones de un gran número de **estructuras hiperestáticas** sencillas complementando las ecuaciones de la estática con algunas ecuaciones adicionales, llamadas **ecuaciones de compatibilidad**. Estas ecuaciones adicionales permiten formar un sistema con el mismo número de ecuaciones e incógnitas. La subsiguiente resolución de ese sistema permite a su vez una completa resolución de las reacciones y los esfuerzos. La algoritmia del método matricial de la rigidez introduce de manera automática las ecuaciones de compatibilidad requeridas para resolver cualquier problema hiperestático; por esa razón el método resulta fácilmente programable.

## 1.1. Estructuras hiperestáticas

Una estructura fija es un conjunto de sólidos resistentes vinculados tanto entre ellos como a un sistema de referencia llamado suelo de tal manera que no es posible que la estructura o conjunto de sólidos tenga un movimiento relativo respecto al sistema de referencia suelo, a menos que sufra deformaciones ostensibles. Así, las estructuras elásticas lineales que sufren pequeñas deformaciones<sup>1</sup> se consideran a efectos prácticos inmóviles respecto al sistema de referencia suelo. Su único movimiento posible sería algún tipo de vibración alrededor de un punto de equilibrio.

Matemáticamente una estructura hiperestática no puede resolverse completamente sólo mediante la aplicación de las ecuaciones de la estática. Para explicar esto conviene introducir el concepto de **grados de libertad** para un sólido libre y para una estructura completa. Dado un sólido tridimensional libre, el número de coordenadas o grados de



libertad<sup>2</sup> para describir su movimiento de sólido rígido es seis: tres coordenadas de posición para situar un punto (por ejemplo, su centro de masa o cualquier otro punto) y los tres ángulos para especificar su orientación (por ejemplo, los tres ángulos de Euler). Si el movimiento del sólido está restringido a un plano, el número de grados de libertad es tres (dos coordenadas de posición y un ángulo de giro respecto a un punto fijo). Para un conjunto de sólidos vinculados entre sí el número de grados de libertad totales se obtiene restando las restricciones de los vínculos entre ellos:

$$GL_{estr} = n_s GL_1 - \sum_i vinc_i \quad [1.1]$$

Donde  $n_s$  es el número de sólidos,  $GL_1 = 6$  para un problema tridimensional y  $GL_1 = 3$  para un problema plano. Y  $vinc_i$  dependerá del tipo de vínculo existente. Por ejemplo:

- a) En un problema plano, una articulación elimina dos grados de libertad de traslación, ya que impide que los dos sólidos se separen en el punto de unión articulado, pero permite el giro libre alrededor de la articulación de un sólido respecto al otro.
- b) En un problema plano, una soldadura perimetral o un empotramiento eliminan tres grados de libertad, ya que obligan a cada sólido a ser solidario en la sección soldada o empotramiento.
- c) En un problema tridimensional, una articulación cilíndrica elimina cinco grados de libertad (tres de traslación y dos de giro).
- d) En un problema tridimensional, una rótula esférica elimina tres grados de libertad (todas las traslaciones, permitiendo así la libre orientación de un sólido respecto al otro).

La suma algebraica [1.1] implica que los conjuntos de sólidos resistentes pueden clasificarse en tres clases disjuntas:

$$\begin{aligned} GL_T > 0 &\text{ mecanismos} \\ GL_T = 0 &\text{ estructuras isostáticas} \\ GL_T \leq 0 &\text{ estructuras hiperestáticas} \end{aligned}$$

Para los dos últimos casos puede probarse que:

$$GL_T = n.º \text{ ecuaciones de la estática linealmente independientes} - n.º \text{ reacciones incógnita}$$

Esta última igualdad aclara que las estructuras hiperestáticas presentan un mayor número de incógnitas que las que pueden hallarse empleando las ecuaciones de la estática que están aparte de la misma. En general una estructura hiperestática sólo puede ser resuelta si se toman en consideración las deformaciones ocasionadas por las fuerzas, de tal manera que los desplazamientos calculables a partir de dichas deformaciones sean compatibles con los vínculos existentes entre los sólidos. Una condición adicional que expresa la igualdad de desplazamiento de dos partes de la estructura se denomina **ecuación de compatibilidad**. Si consideramos un número suficientemente grande de ecuaciones de compatibilidad, cualquier problema hiperestático se vuelve resoluble. Es importante señalar que está garantizado que el número disponible de ecuaciones de compatibilidad para una estructura hiperestática es



siempre al menos  $|GL_T|$ , por lo que ecuaciones adicionales permitirán siempre construir un sistema con el mismo número de incógnitas que de ecuaciones.

## 1.2. Fundamentos del método matricial

En este capítulo nos centraremos esencialmente en estructuras de barras, es decir, en conjuntos de sólidos resistentes vinculados entre sí en los que cada uno de ellos es esencialmente un prisma mecánico alargado cuyos desplazamientos y deformaciones pueden ser tratados mediante un modelo 1D basado en la teoría de Navier-Bernoulli ampliada con la teoría de la torsión de Saint-Venant.

La idea básica del método matricial de la rigidez aplicado a estructuras de barras es que a cada barra o elemento lineal se puede describir mediante una matriz de rigidez elemental que relaciona las fuerzas sobre la misma con sus desplazamientos; y a la estructura o conjunto de barras le corresponde también una matriz de rigidez global que relaciona los desplazamientos con las fuerzas aplicadas. Esta matriz global tendrá incorporadas las relaciones de compatibilidad necesarias y permitirá formar un sistema con el mismo número de incógnitas y ecuaciones. Las incógnitas incluirán tanto desplazamientos como reacciones incógnitas; una vez calculados los desplazamientos será posible calcular todas las reacciones de un modo similar a como se hacen con la versión no matricial del método de la rigidez.

Lo interesante de las ideas anteriores es que para cada tipo de elemento (barra recta de sección constante, tramo de arco, barra de sección variable) es posible calcular la matriz de rigidez elemental a partir de la teoría de Navier-Bernoulli y los resultados derivables de ella como los teoremas de Mohr. En este capítulo nos limitaremos a deducir las matrices de rigidez de barras rectas de sección transversal constante (tanto en el caso 2D como en el caso 3D). Además, una vez conocidas las matrices de rigidez elementales de cada una de las barras que conforman la estructura, la matriz de rigidez global para la estructura completa es construible a partir de las matrices elementales y dependerá sólo de la topología o modo en que las barras están conectadas entre sí. La operación de ensamblaje o construcción de la matriz de rigidez global a partir de las matrices de rigidez elementales es tan sencilla que puede programarse fácilmente sin necesidad de resolver ningún sistema, simplemente deben copiarse los componentes desde las matrices de rigidez elementales hasta la matriz de rigidez global. Antes de detallar cómo es la matriz de rigidez elemental de una barra, describir la operación de ensamblaje y explicar el tratamiento de las fuerzas exteriores sobre la estructura, vamos a explicitar las hipótesis o limitaciones en las que se basa el método:

- H1) *Pequeñez de las deformaciones ( $|\varepsilon_{ij}| \leq 10^{-2}$ )*. Como se ha anticipado, consideraremos pequeñas deformaciones, lo cual equivale a una relación lineal entre desplazamientos y componentes del tensor deformación. Esto es una condición necesaria para emplear la teoría de la flexión de Navier-Bernoulli, y la ecuación de la elástica (o equivalentemente los teoremas de Mohr) para calcular aproximadamente las rigideces de las barras.<sup>3</sup>



H2) *Comportamiento elástico lineal de la estructura y los materiales.* Esta condición permitirá emplear relaciones lineales entre tensiones y deformaciones. De hecho, todos los materiales elásticos isótropos para pequeñas deformaciones pueden ser aproximados por un modelo elástico lineal, por lo que en cierto modo para materiales isótropos la hipótesis H2 no es independiente de la hipótesis H1.

H3) *Se desprecia los cambios de rigidez.* Ciertos fenómenos hacen que la rigidez de un elemento no pueda considerarse constante, por ejemplo, cuando una barra recta se curva ostensiblemente su rigidez axial queda afectada; esto es particularmente importante en pilares con fuertes esfuerzos de compresión<sup>4</sup> (en esos casos se requiere una rigidez axial dependiente de la curvatura, tal como se observa en el ejemplo de cálculo no lineal del capítulo de no linealidad geométrica más adelante). También la ocurrencia de fenómenos, excluidos a su vez por H2, como la ocurrencia de plastificaciones, requerirían matrices de rigidez dependientes de las deformaciones. Aunque H3 es probablemente una de las limitaciones más serias, el tratamiento de estructuras con rigidez dependiente de los desplazamientos da lugar a sistemas de ecuaciones no lineales computacionalmente complejos, que por simplificar aquí ignoraremos.

### 1.3. Matrices de rigidez elementales

En esta sección se deduce la matriz de rigidez elemental de una barra recta de sección constante, y nudos rígidos, tanto en 2D como en 3D. También se resumen los resultados para barras con extremos articulados, barras de sección constante, barras de directriz curva y barras de sección variable, aunque en estos casos no se deducen explícitamente las matrices.

Una matriz de rigidez elemental relaciona los desplazamientos generalizados (traslaciones y giros) en las dos secciones extremas de un elemento o barra con las fuerzas necesarias para producir las deformaciones que dan lugar a dichos desplazamientos. Matemáticamente, una matriz de rigidez elemental  $[K^{(e)}]$  es una relación entre el vector de fuerzas generalizadas (fuerzas y momentos) en las secciones extremas y el vector de desplazamientos generalizados (traslaciones y giros).

Las matrices de rigidez sólo dependen de las magnitudes geométricas de las barras y de los materiales de los que están hechas, pero no de las fuerzas. Esto significa que si se consideran dos hipótesis de carga sobre una estructura, los dos cálculos pueden realizarse con las mismas matrices de rigidez aunque las fuerzas sean diferentes.

#### 1.3.1. Rigideces de una barra elástica

Las componentes de la matriz de rigidez de una barra están formadas por diferentes rigideces o coeficientes de rigidez  $K_m$  asociados a diferentes modos de deformación (extensión, cortadura, flexión, torsión, etc.). Por ello, antes de poder dar la forma explícita de la matriz de rigidez de una barra elástica es necesario definir los diferentes

tipos rigidez que caracterizan el comportamiento de dicha barra. Las rigideces básicas para una barra recta son: la rigidez axial, la rigidez flexional, la rigidez frente a cortadura, la rigidez torsional y la rigidez mixta cortante-flexión. Para barras con secciones asimétricas en las que los modos de flexión y torsión están acoplados son necesarias rigideces adicionales. Como se verá a continuación, las rigideces tienen siempre la forma genérica:

$$K_m = \frac{F_m}{\Delta_m} = \alpha_m \frac{ES_m}{L^{\beta_m}} \quad [1.2]$$

donde  $F_m$  es una fuerza generalizada (fuerza o momento) y  $\Delta_m$  un desplazamiento generalizado (traslación o giro),  $\alpha_m$  es un coeficiente de proporcionalidad,  $E$  es el módulo de elasticidad transversal,  $S_m$  es una medida o magnitud extensiva relacionada con la sección (área, momento de inercia, momento torsional, módulo de alabeo seccional, etc.),  $L$  es la longitud de la barra y  $\beta_m$  es un exponente entero dependiendo del tipo de rigidez de que se trate.

Empezamos con la **rigidez axial**. Para una barra elástica recta y de sección constante la rigidez axial  $K_{ax}$  se define simplemente como la relación  $F_{ax}/\Delta_{ax}$  entre la fuerza horizontal  $F_{ax}$  y el desplazamiento horizontal  $\Delta_{ax}$  del mismo extremo en el siguiente esquema de cálculo:



FIG. 1.1  
Disposición para medir la rigidez axial.

Para calcular  $\Delta_{ax}$  necesitamos encontrar los diagramas de esfuerzos para calcular las deformaciones y desplazamientos. Los diagramas de esfuerzos y el desplazamiento calculados son:

$$\begin{cases} \text{axiles} & \begin{cases} \text{cortantes} \\ T_y(x) = 0 \quad T_z(x) = 0 \end{cases} \\ N_x(x) = +F_{ax} & \\ \text{torsores} & \begin{cases} \text{flectores} \\ M_x(x) = 0 \quad M_y(x) = 0 \quad M_z(x) = 0 \end{cases} \\ M_x(x) = 0 & \end{cases} \quad [1.3]$$

Ahora calculamos  $\Delta_{ax}$  en función de esos esfuerzos y obtenemos fácilmente  $K_{ax}$ :

$$\Delta_{ax} = \int_0^L \frac{N_x(x)}{EA} dx = \frac{F_{ax}L}{EA} \Rightarrow K_{ax} = \frac{F_{ax}}{\Delta_{ax}} = \frac{F_{ax}L}{F_{ax}L/EA} = \frac{EA}{L} \quad [1.4]$$

La **rigidez flexional**  $K_{flex}$  de una barra elástica se define simplemente como la relación  $M_f/\theta_f$  entre el momento extremo  $M_f$  y el giro de la sección  $\theta_f$  del mismo extremo en el siguiente esquema de cálculo:



FIG. 1.2.  
Disposición para medir  
la rigidez flexional.



Para encontrar los diagramas de esfuerzos necesitamos previamente encontrar las reacciones verticales ( $R_A, R_B$ ) y el momento de empotramiento ( $M_A$ ). Como el problema anterior es hiperestático, además de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas verticales y momentos necesitamos una ecuación de compatibilidad (relación que involucra los desplazamientos). Un posible sistema mediante el uso del desplazamiento vertical  $v_B$  sería, por ejemplo:

$$\begin{cases} R_A + R_B = 0 \\ M_A + M_f + R_B L = 0 \\ v_B(R_A, R_B, M_A) = 0 \end{cases} \quad [1.5]$$

Para calcular el desplazamiento vertical  $v_B$  podemos usar la ecuación de la elástica<sup>5</sup> más dos ecuaciones de condiciones de contorno:

$$\begin{cases} \frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_z} = \frac{M_A + R_A x}{EI_z} \\ v_A(R_A, R_B, M_A) = v(x=0) = 0 \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2EI_z} \left( M_A x^2 + \frac{R_A x^3}{3} \right) \\ v'_A(R_A, R_B, M_A) = \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad [1.6]$$

A partir de la condición de compatibilidad  $v_B = v(L) = 0$  y de las ecuaciones de equilibrio tenemos que:

$$v_B(R_A, R_B, M_A) = 0 \Rightarrow R_A = -\frac{3M_A}{L} \Rightarrow \begin{cases} R_A = 3M_f/2L \\ R_B = -3M_f/2L \\ M_A = -M_f/2 \end{cases} \quad [1.7]$$

Podemos calcular  $\theta_f$  en función de los diagramas o, más sencillamente, usando la forma de la elástica, ya que  $\theta_f = v'(L)$ , con lo que así tenemos sencillamente:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L} &= \frac{1}{EI_z} \left( M_A L + \frac{R_A L^2}{2} \right) = \frac{1}{EI_z} \left( \frac{-M_f L}{2} + \frac{3M_f L}{4} \right) = \frac{M_f L}{4EI_z} \Rightarrow \\ K_{flex} &= \frac{M_f}{\theta} = \frac{M_f}{M_f L / 4EI_z} = \frac{4EI_z}{L} \end{aligned} \quad [1.8]$$

La **rigidez a cortante**  $K_{cort}$  de una barra elástica se define simplemente como la relación  $T_c/\delta_c$  entre la fuerza vertical  $T_c$  aplicada en un extremo y el desplazamiento subsiguiente  $\delta_c$  del mismo extremo en el siguiente esquema de cálculo:



FIG. 1.3  
Disposición para medir la rigidez a cortante.

Para encontrar los diagramas de esfuerzos necesitamos previamente encontrar la reacción vertical ( $R_A$ ) y los momentos de empotramiento ( $M_A, M_B$ ). Como el problema de nuevo es hiperestático, además de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas verticales y momentos, necesitamos una ecuación de compatibilidad (relación que involucra los desplazamientos). Un posible sistema es usar que en B la barra horizontal sería imponer que  $v'_B = 0$ :

$$\begin{cases} R_A + T_c = 0 \\ M_A + M_B + T_c L = 0 \\ v'_B(R_A, M_A, M_B) = 0 \end{cases} \quad [1.9]$$

Para calcular el desplazamiento vertical  $v_B$  podemos utilizar la ecuación de la elástica, más dos ecuaciones de condiciones de contorno:

$$\begin{cases} \frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_z} = -\frac{M_A}{EI_z} + \frac{(M_B + M_A)}{EI_z} \frac{x}{L} \\ v_A(R_A, R_B, M_A) = v(x=0) = 0 \Rightarrow \\ v'_A(R_A, R_B, M_A) = \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \\ v(x) = \frac{1}{2EI_z} \left( \frac{(M_B + M_A)x^3}{3L} - M_A x^2 \right) \end{cases} \quad [1.10]$$

De la condición de compatibilidad  $v'_B = v'(L) = 0$  y de las ecuaciones de equilibrio, tenemos que:

$$\frac{dv_B}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \Rightarrow M_A = +M_B \Rightarrow \begin{cases} R_A = -T_c \\ M_A = -T_c L/2 \\ M_B = -T_c L/2 \end{cases} \quad [1.11]$$

Podemos calcular  $\delta_c$  en función de los diagramas o, más sencillamente, usando la forma de la elástica, ya que  $\delta_c = v(L)$ , con lo que así tenemos sencillamente:



$$v(L) = \frac{L^2}{2EI_z} \left( \frac{(M_A + M_B)}{3} - M_A \right) = \frac{L^2}{EI_z} \left( \frac{T_c L}{3} - \frac{T_c L}{2} \right) = \frac{T_c L^3}{12EI_z} \Rightarrow$$

$$K_{cort} = \frac{T_c}{\delta_c} = \frac{T_c}{T_c L^3 / 12EI_z} = \frac{12EI_z}{L^3} \quad [1.12]$$

La **rigidez mixta de cortante-flexión**  $K_{cf}$  de una barra elástica se define también a partir del ejemplo anterior, relación  $M_E/\delta$  entre el momento de empotramiento  $M_E$  cuando se aplica una fuerza vertical  $T$  en el extremo que produzca un desplazamiento  $\delta$  de dicho extremo. A partir de los cálculos de la sección anterior, y puesto que  $M_E = M_A$ , tenemos que:

$$K_{cf} = \frac{M_E}{\delta_c} = \frac{T_c L / 2}{T_c L^3 / 12EI_z} = \frac{6EI_z}{L^2} \quad [1.13]$$

Una precaución importante que hay que tener en cuenta es que las expresiones anteriores las hemos obtenido a partir de la ecuación de la elástica sin contabilizar la deformación por cortante (a idéntico resultado se llega si se usan los teoremas de Mohr para deducir las rigideces). Si se consideran las deformaciones por cortante, se llega a expresiones ligeramente diferentes:

$$K_{flex} = \frac{M_f}{\theta} = \frac{4 + \alpha}{1 + \alpha} \frac{EI_z}{L} \approx \frac{4EI_z}{L} \quad [1.14]$$

$$K_{cort} = \frac{T_c}{\delta_c} = \frac{12}{1 + \alpha} \frac{EI_z}{L^3} \approx 12 \frac{EI_z}{L^3} \quad [1.15]$$

$$K_{cf} = \frac{M_E}{\delta_c} = \frac{6}{1 + \alpha} \frac{EI_z}{L^2} \approx \frac{6EI_z}{L^2} \quad [1.16]$$

donde:

$$\alpha_z = \frac{12EI_z}{\kappa_z G A L^2} \quad [1.17]$$

$$\kappa_z = \frac{A_{Qz}}{A} = \frac{I_z^2}{A} \left[ \int_A \left( \frac{S_z}{b_y} \right)^2 dA \right]^{-1} \quad [1.18]$$

siendo  $G$  el módulo de elasticidad transversal,  $A_{Qz}$  el área de cortante reducida, calculable a partir del primer momento de área parcial  $S_z(y)$ , y  $b_y$  el ancho existente a la altura  $y$ .

### 1.3.2. Matriz de rigidez de una barra recta (caso 2D)

Para el caso de una barra cuyo movimiento está restringido a un plano, cada sección extrema de dicha barra tiene tres grados de libertad (dos traslaciones y un giro), y habiendo dos secciones extremas en cada barra, la matriz de rigidez elemental en ese caso es una matriz de  $6 \times 6$ , de la forma:<sup>6</sup>

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix} \quad [1.19]$$

donde  $F_i$  son las fuerzas resultantes en las secciones extremas,  $M_i$  los momentos resultantes,  $\delta_i$  los desplazamientos de traslación y  $\theta_i$  los giros de las mismas secciones extremas. La numeración de los diferentes grados de libertad es siempre la misma y se muestra en la siguiente figura:

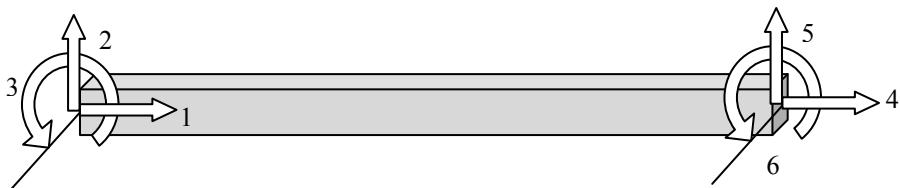


FIG. 1.4.  
Numeración estándar  
de los grados de  
libertad de una barra en  
2D.

Ahora nos planteamos hallar las componentes  $k_{ij}$  que describen adecuadamente una barra elástica que satisface la teoría de la flexión de Navier-Bernoulli. Como la relación [1.19] se cumple para cualquier combinación de desplazamientos, en particular también se cumplirá para algunos casos particulares, como por ejemplo:

- 1)  $\{\delta\}^T = \{0, 0, 0; \delta_{ax}, 0, 0\}$  que representa un caso de tracción en que se produce un desplazamiento  $\delta_{ax}$  en el grado de libertad 4, lo cual corresponde a un caso de tracción simple. Este problema es idéntico al caso estudiado para deducir la rigidez axial [1.13] y, por lo tanto, se puede concluir que:

$$\begin{Bmatrix} -F_{ax} \\ 0 \\ 0 \\ F_{ax} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_{ax} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [1.20a]$$

De estas relaciones se deduce que  $k_{24} = k_{34} = k_{54} = k_{64} = 0$ , y  $k_{14} = -k_{44}$ , y de la definición de rigidez axial [1.4] se deduce además que  $k_{44} = K_{ax} = EA/L$ .

- 2)  $\{\delta\}^T = \{0, 0, 0; 0, \delta_c, 0\}$  que representa un caso de flexión y cortante en que se produce un desplazamiento  $\delta_c$  en el grado de libertad 5. Este problema es idéntico al caso estudiado para deducir la rigidez frente a cortante [1.11] y, por lo tanto, se puede concluir que:



$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -T_c \\ -T_c L/2 \\ 0 \\ T_c \\ -T_c L/2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_c \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [1.20b]$$

De estas relaciones se deduce que  $k_{15} = k_{45} = 0$ , y de la definición de rigidez frente a cortante [1.12] se deduce además que  $k_{55} = K_{cort} = 12EI/L^3$ , y además  $k_{25} = -K_{cort}$ ,  $k_{35} = k_{55} = -K_{cort}L/2$ .

- 3)  $\{\delta\}^T = \{0, 0, 0; 0, 0, \theta_f\}$  que representa un caso de flexión y cortante en que se produce un giro  $\theta_{flex}$  en el grado de libertad 6. Este problema es idéntico al caso estudiado para deducir la rigidez flexional [1.5] y, por lo tanto, se puede concluir que:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -T_c \\ -T_c L/2 \\ 0 \\ T_c \\ -T_c L/2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_f \end{Bmatrix} \quad [1.20c]$$

De estas relaciones se deduce que  $k_{16} = k_{46} = 0$ , y de la definición de rigidez frente a cortante [1.8] se deduce además que  $k_{26} = K_{cf} = 6EI/L^2$  y  $k_{66} = K_{flex} = 4EI/L$  y además  $k_{56} = -K_{cf}$  y  $k_{36} = K_{flex}/2$ .

- 4) Usando otros esfuerzos reducibles por simetría a los casos anteriores, como  $\{\delta\}^T = \{-\delta_{ax}, 0, 0; 0, 0, 0\}$ ,  $\{\delta\}^T = \{0, \delta_c, 0; 0, 0, 0\}$  y  $\{\delta\}^T = \{0, 0, \theta_f; 0, 0, 0\}$  se encuentran las componentes de las columnas 1, 2 y 3.

Mediante los resultados para todas las componentes obtenidos en los casos particulares de 1, 2, 3 y 4 se llega a que la matriz de rigidez elemental de una barra elástica recta y de sección constante viene dada por:



$$\left[ K^{(e)} \right] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{L^3} & +\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & +\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & +\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & +\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad [1.21a]$$

Sacando factor común, esta matriz se puede escribir como:

$$\left[ K^{(e)} \right] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & +6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad [1.21b]$$

donde se ha usado la abreviación  $\lambda = L/i$  para la esbeltez natural (longitud natural de la barra entre radio de giro  $i^2 = I/A$ ). También puede usarse una notación todavía abreviada consistente en usar las cuatro primeras letras del alfabeto para las rigideces axial, cortante, flexional y mixta de la siguiente manera:

$$\left[ K^{(e)} \right] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & B & D & 0 & -B & +D \\ 0 & D & C & 0 & -D & C/2 \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -B & -D & 0 & B & -D \\ 0 & D & C/2 & 0 & -D & C \end{bmatrix} \quad [1.21c]$$

donde obviamente  $A = EA/L$ ,<sup>7</sup>  $B = 12EI/L^3$ ,  $C = 4EI/L$  y  $D = 6EI/L^2$  o, equivalentemente si se pretenden incluir las correcciones de la flecha vertical debida al cortante, las correspondientes rigideces para B, C y D dadas por [1.14], [1.15] y [1.16]. La matriz de rigidez elemental de la forma [1.21] es válida para cualquier barra elástica recta de sección constante que no sufra alabeo seccional apreciable, siempre y cuando su movimiento esté limitado a un plano y la matriz de rigidez se exprese en un sistema de ejes cartesianos como los de la FIG. 1.4.



### 1.3.3. Matriz de rigidez de una barra recta (caso 3D)

Para el caso de una barra elástica en tres dimensiones cada sección extrema tiene seis grados de libertad (tres traslaciones y tres ángulos de orientación), por lo que al considerar las dos secciones extremas de cada barra, la matriz de rigidez elemental tiene, en una matriz de  $12 \times 12$  ( $= 2 \cdot 6 \times 2 \cdot 6$ ), la forma:

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} A & & & -A & & & & & & & & \delta_1 \\ & B_y & & D_y & -B_y & & & & & & & \delta_2 \\ & & B_z & D_z & & -B_z & D_z & & & & & \delta_3 \\ & & & E & & & -E & & & & & \theta_4 \\ & & & & D_z & C_y & -D_z & C_y/2 & & & & \theta_5 \\ & & & & & C_z & -D_y & & C_z/2 & & & \theta_6 \\ & & D_y & & & & A & & & & & \theta_7 \\ -A & & & & & & & & & & & \delta_8 \\ -B_y & & & -D_y & B_y & & -D_y & & & & & \delta_9 \\ -B_z & & -D_z & & B_z & -D_z & & & & & \theta_{10} \\ -E & & & & & E & & & & & \theta_{11} \\ D_z & & C_y/2 & & -D_z & C_y & & & & & \theta_{12} \\ D_y & & C_z/2 & -D_y & & C_y & & & & & \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{array} \right\}$$

[1.22]

donde  $F_i$  son las fuerzas resultantes en la secciones extremas,  $M_i$  los momentos resultantes,  $\delta_i$  los desplazamientos de traslación y  $\theta_i$  los giros de las mismas secciones extremas. La numeración de los diferentes grados de libertad es similar a la del caso bidimensional. Los desplazamientos  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  y  $\delta_3$  se refieren a los desplazamientos de la sección extrema izquierda en dirección axial y en las dos direcciones perpendiculares al eje de la viga (se toman usualmente según las direcciones principales de inercia). Los ángulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  se refieren a los giros en torno a las mismas direcciones anteriores.

De forma similar, los desplazamientos y giros  $\delta_4$ ,  $\delta_5$ ,  $\delta_6$ ,  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  y  $\theta_6$  son semejantes a los anteriores pero referidos a la sección extrema derecha.

Como puede verse a partir de [1.22], el caso de una barra recta tridimensional es similar al anterior, sólo que en éste existen dos rigideces a cortante  $B_y$  y  $B_z$  (en lugar de una como antes), una para cada una de las dos direcciones perpendiculares al eje, dos rigideces flexionales  $C_y$  y  $C_z$ , dos rigideces mixtas  $D_y$  y  $D_z$ , y también una rigidez torsional  $E$  ( $= GJ/L$ ). Así que, en total, la barra está caracterizada por ocho constantes de rigidez en lugar de cuatro como sucedía en el caso bidimensional. Eso siempre y cuando sea válida la teoría de la torsión de Saint-Venant.

En perfiles de escasa rigidez torsional, además de la rigidez dada por el módulo de elasticidad transversal  $G$  y el momento torsional  $J$ , es necesario considerar el alabeo producido en la sección transversal, que se calcula a partir del módulo de alabeo  $I_o$ , aunque en este caso es necesario considerar un grado de libertad adicional llamado alabeo unitario  $\varphi$ . Para simplificar la discusión se considerará una barra recta que sea un prisma de directriz recta con un plano de simetría  $\Pi = \{(x,y,z) | y = 0\}$  con siete grados de libertad en cada sección extrema (tres de traslación, tres de giro y uno de

alabeo):  $\mathbf{u}(x) = \{u_x, u_y, u_z, \varphi, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}$ . Su matriz de rigidez viene dada por cuatro submatrices de  $7 \times 7$ :

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{12}^T] & [K_{22}] \end{bmatrix} \quad [1.23]$$

En el caso general de la torsión mixta (que combina la torsión pura de Saint-Venant y la torsión alabeada) los bloques anteriores vienen dados por las siguientes fórmulas:

$$[K_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\Phi_{11}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^3} & 0 & \frac{12\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L} & \frac{24\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{6\Phi_{11}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12}{1+\alpha_z} \frac{EI_y}{L^3} & 0 & 0 & \frac{-6}{1+\alpha_z} \frac{EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{12\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L} & 0 & \Psi_{11} GJL & \Psi_{12} GJ & 0 & \frac{6\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{24\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} & 0 & \Psi_{12} GJ & \Psi_{22} \frac{GJ}{L} & 0 & \frac{12\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{1+\alpha_z} \frac{EI_y}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4+\alpha_z}{1+\alpha_z} \frac{EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{6\Phi_{11}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} & 0 & \frac{6\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L} & \frac{12\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L} & 0 & \frac{4+\alpha_z}{1+\alpha_z} \Phi_{22} \frac{EI_z}{L^2} \end{bmatrix} \quad [1.24a]$$

$$[K_{12}] = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\Phi_{11}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{12\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L} & -\frac{24\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} & 0 & \frac{6\Phi_{11}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{-12}{1+\alpha_z} \frac{EI_y}{L^3} & 0 & 0 & \frac{-6}{1+\alpha_z} \frac{EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & -\frac{12\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L} & 0 & \bar{\Psi}_{11} GJL & \Psi_{12} GJ & 0 & \frac{6\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & -\frac{24\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} & 0 & \Psi_{12} GJ & \Psi_{22} \frac{GJ}{L} & 0 & \frac{12\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{6}{1+\alpha_z} \frac{EI_y}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2-\alpha_z}{1+\alpha_z} \frac{EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & -\frac{6\Phi_{11}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} & 0 & \frac{6\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L} & -\frac{12\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L} & 0 & \frac{2-\alpha_z}{1+\alpha_z} \bar{\Phi}_{22} \frac{EI_z}{L^2} \end{bmatrix} \quad [1.24b]$$



$$[K_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\Phi_{11}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{12\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L} & \frac{24\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{6\Phi_{11}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12}{1+\alpha_z} \frac{EI_y}{L^3} & 0 & 0 & \frac{-6}{1+\alpha_z} \frac{EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & -\frac{12\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L} & 0 & \Psi_{11} GJL & -\Psi_{12} GJ & 0 & \frac{6\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{24\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} & 0 & -\Psi_{12} GJ & \Psi_{22} \frac{GJ}{L} & 0 & -\frac{12\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{6}{1+\alpha_z} \frac{EI_y}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4+\alpha_z}{1+\alpha_z} \frac{EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & -\frac{6\Phi_{11}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} & 0 & \frac{6\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L} & -\frac{12\Phi_{12}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L} & 0 & \frac{4+\alpha_z}{1+\alpha_z} \frac{\Phi_{22}}{L^2} \frac{EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

[1.24c]

En ellas se han introducido las siguientes abreviaciones adicionales:

a) Funciones auxiliares para la flexión y el cortante:

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= \frac{F_0}{F_0 + \zeta_C^2 G_0} & \Phi_{12} &= \frac{z_C}{L} \frac{(1-\kappa_0)(\cosh \lambda_0 - 1)}{F_0 + \zeta_C^2 G_0} \\ \Phi_{22} &= \frac{F_0 + v \zeta_C^2 G_0}{F_0 + \zeta_C^2 G_0} & \bar{\Phi}_{22} &= \frac{F_0 - \bar{v} \zeta_C^2 G_0}{F_0 + \zeta_C^2 G_0} \end{aligned} \quad [1.25]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \frac{1+\alpha_z}{4+\alpha_z} \quad F_0 = \lambda_0 \sinh \lambda_0 + 2\kappa_0 (1 - \cosh \lambda_0) \\ \bar{v} = \frac{1+\alpha_z}{2-\alpha_z} \quad G_0 = \lambda_0 \sinh \lambda_0 + 2(1 - \cosh \lambda_0) \\ \zeta_C^2 = z_C^2 \frac{1-\kappa_0}{\kappa_0} \frac{\alpha_z}{1+\alpha_z} \frac{\kappa_z A}{J} \end{array} \right. \quad [1.26]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_y = \frac{12EI_z}{\kappa_y GAL^2} \quad \kappa_y = \frac{A_{Qy}}{A} = \frac{I_y^2}{A} \left[ \int_A \left( \frac{S_y}{b_z} \right)^2 dA \right]^{-1} \quad \kappa_0 = 1 - \frac{J}{I_y + I_z} \\ \alpha_z = \frac{12EI_z}{\kappa_z GAL^2} \quad \kappa_z = \frac{A_{Qz}}{A} = \frac{I_z^2}{A} \left[ \int_A \left( \frac{S_z}{b_y} \right)^2 dA \right]^{-1} \quad \lambda_0 = L \sqrt{\kappa_0 \frac{GJ}{EI_0}} \end{array} \right. \quad [1.27]$$

b) Funciones auxiliares para la torsión:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{11} = \frac{\kappa_0}{\lambda_0} \frac{\lambda_0 \cosh \lambda_0 - \kappa_0 \sinh \lambda_0 + \zeta_c^2 (\lambda_0 \cosh \lambda_0 - \sinh \lambda_0)}{F_0 + \zeta_c^2 G_0} \\ \Psi_{12} = \kappa_0 (1 + \zeta_c^2) \frac{\cosh \lambda_0 - 1}{F_0 + \zeta_c^2 G_0} \\ \Psi_{22} = \frac{\lambda_0 \sinh \lambda_0 + \zeta_c^2 [\lambda_0 \sinh \lambda_0 + 2(1 - \kappa_0)(1 - \cosh \lambda_0)]}{F_0 + \zeta_c^2 G_0} \\ \bar{\Psi}_{11} = \frac{\kappa_0}{\lambda_0} \frac{\kappa_0 \sinh \lambda_0 - \lambda_0 + \zeta_c^2 (\sinh \lambda_0 - \lambda_0)}{F_0 + \zeta_c^2 G_0} \end{array} \right. \quad [1.28]$$

El caso anterior que se refiere a la interacción más general entre la torsión y flexión es bastante complicado, como puede verse por el elevado número de funciones auxiliares necesarias para definirlo exactamente. Conviene pues, considerar algunos casos particulares de interés práctico que puedan ser descritos más sencillamente:

- Si  $\zeta_c = 0$  (cosa que sucede cuando  $\zeta_c = 0$ ,  $\alpha_z = 0$  o  $\kappa_0 = 1$ ), entonces  $\Phi_{11} = \Phi_{22} = \bar{\Phi}_{22} = 1$  y  $\Phi_{12} = 0$ , y por lo tanto hay desacoplamiento entre las componentes de la flexión y la torsión; en ese caso además los coeficientes  $\Psi_{11}$ ,  $\bar{\Psi}_{11}$ ,  $\Psi_{12}$  y  $\Psi_{22}$ , coinciden con los que se pueden encontrar en un problema elemental de torsión.
- *Torsión alabeada pura.* Si el módulo de torsión  $J$  tiene un valor pequeño, podemos considerar el límite  $J \rightarrow 0$ , lo que implica que  $\kappa_0 \rightarrow 0$  y  $\lambda_0 \rightarrow 0$ , y a su vez lleva a que:  $\Phi_{11} = \Phi_{22} = \bar{\Phi}_{22} = 1$  y  $\Phi_{12} = 0$ , y además  $GJL\Psi_{11} \rightarrow 4EI_\omega/L$ ,  $GJL\bar{\Psi}_{11} \rightarrow 2EI_\omega/L$ ,  $GJ\Psi_{12} \rightarrow 6EI_\omega/L^2$  y  $GJ/L\Psi_{22} \rightarrow 12EI_\omega/L^3$ . Todos esos límites implican que la matriz  $[\mathbf{K}_{11}]$  quede simplemente:

$$[\mathbf{K}_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12}{1+\alpha_y} \frac{EI_y}{L^3} & 0 & 0 & \frac{-6}{1+\alpha_y} \frac{EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_\omega}{L} & \frac{6EI_\omega}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_\omega}{L^2} & \frac{12EI_\omega}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6}{1+\alpha_y} \frac{EI_y}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4+\alpha_y}{1+\alpha_y} \frac{EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4+\alpha_z}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad [1.29]$$



- *Torsión de Saint-Venant pura.* Si el módulo de torsión  $J$  tiene un valor muy grande y apenas existe alabeo, podemos considerar el límite  $J \rightarrow \infty$ , lo que implica que  $\lambda_0 \rightarrow \infty$ , y a su vez lleva a que:  $\Psi_{11} = \bar{\Psi}_{11} = \Psi_{12} = 0$  y  $\Psi_{22} = 1$ , y además  $\Phi_{11} \rightarrow 1/(1 + \zeta_C^2)$ ,  $\Phi_{22} \rightarrow 1 - [3\zeta_C^2/(4 + \alpha_z)(1 + \zeta_C^2)]$ ,  $\bar{\Phi}_{22} \rightarrow 1 - [3\zeta_C^2/(2 - \alpha_z)(1 + \zeta_C^2)]$  y  $\Phi_{12} \rightarrow 0$ . Además en este caso desaparece el grado de libertad de alabeo y las submatrices de rigidez son de  $6 \times 6$ :

$$[K_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\Phi_{11}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6\Phi_{11}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12}{1+\alpha_y} \frac{EI_y}{L^3} & 0 & \frac{-6}{1+\alpha_y} \frac{EI_z}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6}{1+\alpha_y} \frac{EI_z}{L^2} & 0 & \frac{4+\alpha_y}{1+\alpha_y} \frac{EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6\Phi_{11}}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4+\alpha_z}{1+\alpha_z} \frac{EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad [1.30]$$

Si además el centro de cortante coincide con el centro de gravedad  $\zeta_C = 0$  y se ignora la deformación por cortante  $\alpha_z = \alpha_y = 0$ , se recupera la matriz de rigidez convencional [1.22] para una barra recta que apenas sufre alabeo y que es larga en comparación con su longitud.

#### 1.3.4. Matriz de rigidez de barras curvas

Los arcos son piezas, generalmente con plano medio. Cuando la sección es maciza puede ignorarse el alabeo y se obtiene una matriz de  $6 \times 6$ . Para un arco, los grados de libertad axiales y de cortante no son independientes de los de cortante, debido a la curvatura (eso significa que los términos  $k_{12}, k_{21}, k_{24}, k_{42}, k_{15}, k_{51}, k_{45}$  y  $k_{54}$  son diferentes de cero a diferencia de lo que pasa en el caso de una barra recta).

Otro caso diferente es el de una viga balcón, una barra cuya directriz es un curva plana en la que las cargas son perpendiculares al plano de curvatura. Este caso sólo puede ser tratado en 3D, ya que necesariamente los desplazamientos de una barra curva con esas cargas no pueden estar contenidos en un plano. En ese tipo de elementos la curvatura naturalmente hace que los grados de libertad flexional y los grados de libertad torsional estén acoplados. Lo cual vuelve a implicar que algunas componentes nulas para una barra recta en este caso no lo sean.

#### 1.3.5. Matriz de rigidez de barras de sección variable

En los casos anteriores sólo se han considerado barras con sección transversal constante. Además de la generalización a piezas de directriz curva y piezas cuya torsión no puede ser descrita simplemente por la teoría de la torsión de Saint-Venant

pura, las fórmulas anteriores pueden generalizarse a piezas de sección variable. Naturalmente, al igual que en las generalizaciones anteriores, las fórmulas de las rigideces se complican notablemente cuando se consideran casos que no son de barra recta. Así que, sólo por dar una idea general, consideraremos únicamente un caso particular: el de una barra recta en 2D con sección variable en que el canto útil sigue una ley parabólica, siendo máxima en el centro y mínimo en los extremos, de tal manera que las magnitudes de la sección varían como:

$$\begin{cases} A(x) = A_1 + (A_0 - A_1) \left(1 - \frac{2x}{L}\right)^2 & A_1 = A\left(x = \frac{L}{2}\right) \wedge A_0 = A(x=0) \\ I_y(x) = I_1 + (I_0 - I_1) \left(1 - \frac{2x}{L}\right)^2 & I_1 = I_y\left(x = \frac{L}{2}\right) \wedge A_0 = I_y(x=0) \\ z_G(x) = z_0 \left(1 - \frac{2x}{L}\right)^2 & 0 \leq x \leq L \end{cases} [1.31]$$

En este caso la matriz de rigidez elemental de la barra puede expresarse mediante tres bloques o submatrices:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{12}^T] & [K_{22}] \end{bmatrix} [1.32]$$

donde cada uno de ellos viene dado por:

$$[K_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{33}}{\beta_{11}\beta_{33} - \hat{\beta}_{13}^2} \frac{EA_0}{L} & 0 & \frac{\rho_0\beta_{13}}{\beta_{11}\beta_{33} - \hat{\beta}_{13}^2} EA_0 \\ 0 & \frac{12}{\beta_{22} + 3\beta_{33}} \frac{EI_0}{L^3} & \frac{-6}{\beta_{22} + 3\beta_{33}} \frac{EI_0}{L^2} \\ \frac{\rho_0\beta_{13}}{\beta_{11}\beta_{33} - \hat{\beta}_{13}^2} EA_0 & \frac{-6}{\beta_{22} + 3\beta_{33}} \frac{EI_0}{L^2} & \frac{\beta_{11}(\beta_{22} + 6\beta_{33}) - 3\hat{\beta}_{13}^2}{(\beta_{11}\beta_{33} - \hat{\beta}_{13}^2)(\beta_{22} + 3\beta_{33})} \frac{EI_0}{L} \end{bmatrix} [1.33a]$$

$$[K_{12}] = \begin{bmatrix} \frac{-\beta_{33}}{\beta_{11}\beta_{33} - \hat{\beta}_{13}^2} \frac{EA_0}{L} & 0 & \frac{-\rho_0\beta_{13}}{\beta_{11}\beta_{33} - \hat{\beta}_{13}^2} EA_0 \\ 0 & \frac{-12}{\beta_{22} + 3\beta_{33}} \frac{EI_0}{L^3} & \frac{-6}{\beta_{22} + 3\beta_{33}} \frac{EI_0}{L^2} \\ \frac{-\rho_0\beta_{13}}{\beta_{11}\beta_{33} - \hat{\beta}_{13}^2} EA_0 & \frac{6}{\beta_{22} + 3\beta_{33}} \frac{EI_0}{L^2} & \frac{-(\beta_{11}\beta_{22} + 3\hat{\beta}_{13}^2) - 3\hat{\beta}_{13}^2}{(\beta_{11}\beta_{33} - \hat{\beta}_{13}^2)(\beta_{22} + 3\beta_{33})} \frac{EI_0}{L} \end{bmatrix} [1.33b]$$



$$[K_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{33}}{\beta_{11}\beta_{33} - \hat{\beta}_{13}^2} \frac{EA_0}{L} & 0 & \frac{\rho_0\beta_{13}}{\beta_{11}\beta_{33} - \hat{\beta}_{13}^2} EA_0 \\ 0 & \frac{12}{\beta_{22} + 3\beta_{33}} \frac{EI_0}{L^3} & \frac{6}{\beta_{22} + 3\beta_{33}} \frac{EI_0}{L^2} \\ \frac{\rho_0\beta_{13}}{\beta_{11}\beta_{33} - \hat{\beta}_{13}^2} EA_0 & \frac{6}{\beta_{22} + 3\beta_{33}} \frac{EI_0}{L^2} & \frac{\beta_{11}(\beta_{22} + 6\beta_{33}) - 3\hat{\beta}_{13}^2}{(\beta_{11}\beta_{33} - \hat{\beta}_{13}^2)(\beta_{22} + 3\beta_{33})} \frac{EI_0}{L} \end{bmatrix} \quad [1.33c]$$

donde además:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \Lambda_\sigma - \frac{\eta\kappa_0}{1-\eta} \frac{1-\eta\Lambda_\eta}{1-\eta} & \beta_{22} &= \alpha\Lambda_\sigma + 3 \frac{1-\Lambda_\eta}{1-\eta} & \beta_{33} &= \Lambda_\eta \\ \beta_{13} &= \frac{1-\eta\Lambda_\eta}{1-\eta} & \hat{\beta}_{13} &= \kappa_0\beta_{13} \end{aligned} \quad [1.33d]$$

y donde los parámetros anteriores vienen dados por:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{I_1}{I_0} & \Lambda_\eta &= \frac{1}{\sqrt{\eta(1-\eta)}} \arctg \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}} & \alpha &= \frac{12EI_j}{\kappa GA_j L^2} \\ \sigma &= \frac{A_1}{A_0} & \Lambda_\sigma &= \frac{1}{\sqrt{\sigma(1-\sigma)}} \arctg \sqrt{\frac{1-\sigma}{\sigma}} & \kappa &= \frac{A_{\Omega_j}}{A_j} \end{aligned} \quad [1.33e]$$

De este modo, se comprueba fácilmente que los coeficientes de rigidez coinciden con los convencionales para una viga bidimensional de sección constante cuando  $\rho_0 = z_0/L = 0$ ,  $\beta_{22} = \alpha - 2$  y  $\beta_{11} = \beta_{33} = 1$ .

### 1.3.6. Matriz de rigidez de barras con nudos articulados

Cuando una barra recta tiene al menos uno de sus extremos articulados, un giro en el nudo articulado no implica la aparición de un momento, lo cual a su vez implica que una de las componentes  $k_{ii}$ , que para una barra de nudos rígidos nunca es nula, entonces sería  $k_{ii} = 0$  para el  $i$  correspondiente al grado de libertad asociado a alguno de los giros en la articulación. Restringiendo nuestra atención a una barra elástica recta de sección constante en 2D y con plano de simetría medio, se tienen tres grados de libertad por cada sección extrema (dos de traslación y uno de giro):  $\mathbf{u}(x) = \{u_x, u_y, \theta_z\}$ . La matriz de rigidez en este caso viene dada por una matriz de  $6 \times 6$ :

a) si el nudo articulado es el segundo nudo de la barra (nudo de la derecha),

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3L & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3L & 3L^2 & 0 & -3L & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3L & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [1.34a]$$

- b) si el nudo articulado es el primer nudo de la barra (nudo de la izquierda),

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & -3L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & -3L \\ 0 & -3L & 0 & 0 & -3L & 3L^2 \end{bmatrix} \quad [1.34b]$$

- c) si ambos nudos están articulados sólo existirá rigidez axial, con lo que resulta como matriz de rigidez:

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [1.35]$$

#### 1.4. Fuerzas nodales equivalentes

Un problema estructural mecánico queda completamente definido cuando se especifican la geometría del problema, las leyes de comportamiento de los materiales de qué está fabricada y de estos, y finalmente las fuerzas que intervienen. Hasta hemos comprobado que la rigidez de la estructura sólo depende de las magnitudes geométricas y de los materiales, pero no de las fuerzas. En esta sección consideraremos cómo tratar las fuerzas.

Para poder relacionar las fuerzas exteriores a una estructura con los desplazamientos y giros de las secciones extremas de las barras se necesita considerar el efecto de esas fuerzas sobre las secciones extremas. Para explicar el cálculo, primero debe introducirse la noción de **equivalencia estática**. Dados dos sistemas de fuerzas y momentos  $S = \{F_1, F_2, \dots, F_{m1}, M_1, \dots, M_{m2}\}$  y  $S' = \{F'_1, F'_2, \dots, F'_{n1}, M'_1, \dots, M'_{n2}\}$ , se dice que ambos son estáticamente equivalentes sólo si la fuerza resultante y el momento resultante es idéntico para ambos sistemas. Un par de ejemplos sencillos ilustran este punto. El primer ejemplo ilustra que un sistema formado por dos de fuerzas paralelas puede ser equivalente a un sistema formado por una fuerza y un momento:

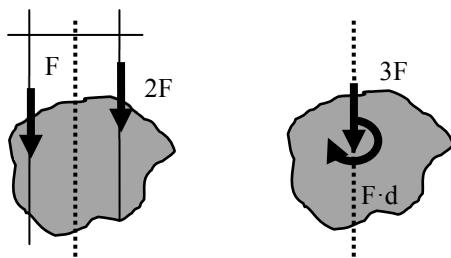
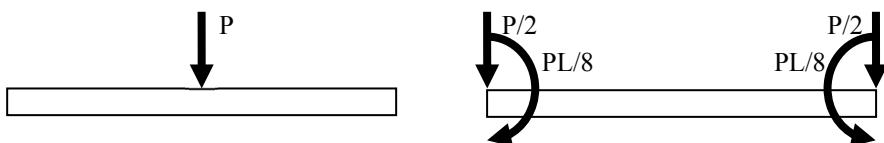


Fig. 1.5.  
Dos sistemas de fuerza equivalentes sobre el mismo cuerpo.



El siguiente ejemplo presenta más analogías con los sistemas de fuerzas nodales equivalentes que usaremos. En él se muestra que una fuerza en el centro de una barra elástica es estáticamente equivalente a un conjunto de dos fuerzas y dos momentos aplicados en las secciones extremas de la misma.

FIG. 1.6.  
Dos sistemas de fuerza  
equivalentes sobre una  
barra recta.

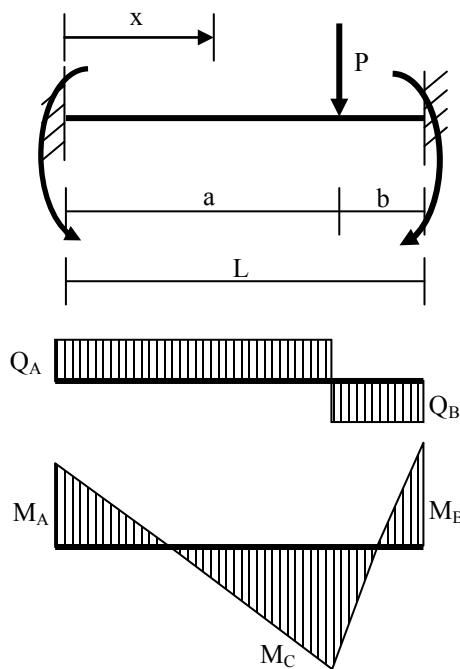


El método matricial usa un sistema de fuerzas nodales estáticamente equivalente al original aplicado sobre cada barra de la estructura, y que además correspondería a un conjunto de fuerzas aplicadas en las secciones extremas de la estructura en el caso de que no existieran desplazamientos o giros, es decir, como si las secciones extremas estuvieran empotradas. Esto permite separar el efecto directo de las acciones exteriores del de las fuerzas del efecto, debido a que las acciones deforman las barras y producen fuerzas internas de una parte de la estructura sobre otras.

#### 1.4.1. Cargas puntuales

En esta sección se dan las fuerzas nodales equivalentes, obtenidas como fuerzas de empotramiento perfecto de las secciones extremas, para una barra elástica recta sometida a una fuerza puntual perpendicular al eje de la misma. En las fórmulas que siguen las reacciones dan hacia arriba y los momentos en el sentido de las flechas curvas indicadas. En el caso general se tienen las siguientes relaciones:

FIG. 1.7.  
Barra biempotrada con  
carga puntual.



a) Reacciones:

$$\begin{aligned}
 R_A &= \frac{Pb^2}{L^3}(L+2a) = \frac{Pb^2}{L^2}\left(3-2\frac{b}{L}\right) = P\left(1-\frac{a}{L}\right)^2\left(1+2\frac{a}{L}\right) \\
 R_B &= \frac{Pa^2}{L^3}(L+2b) = \frac{Pa^2}{L^2}\left(3-2\frac{a}{L}\right) = P\left(1-\frac{b}{L}\right)^2\left(1+2\frac{b}{L}\right) \\
 M_A &= +\frac{Pab^2}{L^2} = +\frac{Pb^2}{L}\left(1-\frac{b}{L}\right) = +Pa\left(1-\frac{a}{L}\right)^2 \\
 M_B &= +\frac{Pba^2}{L^2} = +\frac{Pa^2}{L}\left(1-\frac{a}{L}\right) = +Pb\left(1-\frac{b}{L}\right)^2
 \end{aligned} \quad [1.36]$$

b) Momentos flectores:

$$M_z(x) = \begin{cases} \frac{Pb^2}{L^3}(Lx+2ax-aL) & 0 \leq x \leq a \\ \frac{Pa^2}{L^3}(Lb+L^2-Lx-2bx) & a < x \leq L \end{cases} \quad [1.37]$$

$$M_C = \frac{2Pa^2b^2}{L^3}$$

c) Ecuación de la elástica:

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \begin{cases} \frac{Pb^2}{6EI_z}\left(3a-x-\frac{2ax}{L}\right)\frac{x^2}{L^2} & 0 \leq x \leq a \\ \frac{Pa^2}{6EI_z}\left(3b-(L-x)-\frac{2b(L-x)}{L}\right)\frac{(L-x)^2}{L^2} & a < x \leq L \end{cases} \\
 f_C &= \frac{Pa^3b^3}{3EI_zL^3} \quad f_{\max} = f\left(\frac{2aL}{L+2a}\right) = \frac{2Pa^3b^2}{3EI_z(L+2a)^2}
 \end{aligned} \quad [1.38]$$

Además conviene señalar explícitamente un par de casos particulares:

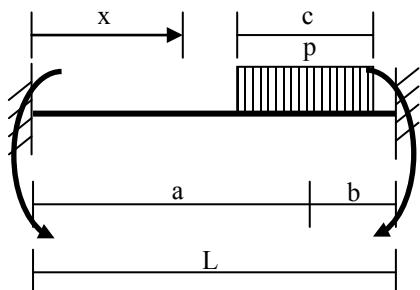
- 1) Si la carga está aplicada directamente sobre uno de los extremos de una barra, supongamos que es el de la izquierda, entonces  $a = 0$  y  $b = L$ , y se obtiene:  $R_A = P$ ,  $R_B = 0$  y  $M_A = M_B = 0$  (si fuera el nudo de la derecha, entonces  $a = L$  y  $b = 0$ , siendo  $R_A = 0$ ,  $R_B = P$  y  $M_A = M_B = 0$ ).
- 2) Si la carga está centrada en la mitad de la barra, entonces  $a = b = L/2$  y, en ese caso,  $R_A = R_B = P/2$  y además  $M_A = M_B = PL/8$ .



### 1.4.2. Cargas continuas rectangulares

En esta sección se muestra cómo obtener las fuerzas nodales equivalentes de empotramiento perfecto para cargas distribuidas y uniformes sobre una determinada barra. En el caso general se tiene:

Fig. 1.8.  
Barra biempotrada con  
carga continua  
rectangular.



a) Reacciones:

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{pbc}{L} - \frac{M_A - M_B}{L} = \frac{pc}{L^3} \left( bL^2 + (b-a) \left( ab - \frac{c^2}{4} \right) \right) \\ R_B &= \frac{pac}{L} + \frac{M_A - M_B}{L} = \frac{pc}{L^3} \left( aL^2 + (a-b) \left( ab - \frac{c^2}{4} \right) \right) \\ M_A &= -\frac{pc^3}{12L^2} \left( L - 3b + \frac{12ab^2}{c^2} \right) \\ M_B &= -\frac{pc^3}{12L^2} \left( L - 3a + \frac{12ba^2}{c^2} \right) \end{aligned} \quad [1.39]$$

b) Momentos flectores:

$$M_z(x) = \begin{cases} R_A x + M_A & 0 \leq x \leq a - \frac{c}{2} \\ R_A x + M_A - \frac{p}{2} \left( x - a + \frac{c}{2} \right)^2 & a - \frac{c}{2} \leq x \leq a + \frac{c}{2} \\ R_B (L-x) + M_B & a + \frac{c}{2} \leq x \leq L \end{cases} \quad [1.40]$$

$$M_{\max} = R_A \left( a - \frac{c}{2} \right) + M_A + \frac{R_A^2}{2p}$$

c) Ecuación de la elástica:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{6EI_z} (-3M_A - R_A x) & 0 \leq x \leq a - \frac{c}{2} \\ \frac{1}{24EI_z} \left[ p \left( x - a + \frac{c}{2} \right)^4 - 4R_A x^3 - 12M_A x^2 \right] & a - \frac{c}{2} \leq x \leq a + \frac{c}{2} \\ \frac{1}{6EI_z} \left[ R_B x^3 - 3(M_B + R_B L)x^2 + 3(2M_A + R_B L)Lx - (3M_A + R_B L)L^2 \right] & a + \frac{c}{2} \leq x \leq L \end{cases} \quad [1.41]$$

Algunos casos particulares que se dan muy frecuentemente son:

- 1) Carga uniforme centrada  $p$ ,  $a = b = L/2$  para la cual se obtiene si la longitud sobre la que se aplica es  $c$ :  $R_A = R_B = pc/2$ , y  $M_A = M_B = pc(3L^2 - c^2)/24L$ .
- 2) Si además de estar centrada la carga, ésta ocupa toda la longitud de la barra, además de  $a = b = L/2$ , se tendrá también que  $c = L$  y, por lo tanto,  $R_A = R_B = pc/2$ , y  $M_A = M_B = pL^2/12$ .

### 1.4.3. Cargas continuas triangulares

En esta sección se proporcionan las reacciones y los momentos de empotramiento perfecto para cargas continuas triangulares como las mostradas en la figura:

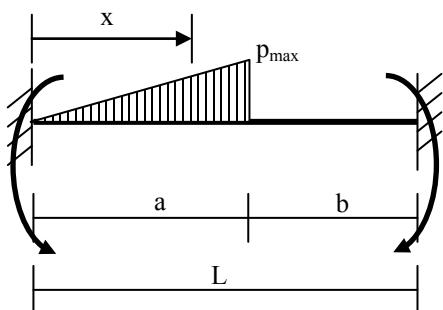


FIG. 1.9.  
Barra biempotrada con  
carga continua  
triangular.

Reacciones:

$$\begin{aligned}
 R_A &= \frac{p_{\max} a}{20} \left[ 10 - \frac{a^2}{L^2} \left( 15 - 8 \frac{a}{L} \right) \right] \\
 R_B &= \frac{p_{\max} a}{20} \left[ \frac{a^2}{L^2} \left( 15 - 8 \frac{a}{L} \right) \right] \\
 M_A &= \frac{p_{\max} a^2}{30} \left[ 10 - \frac{a}{L} \left( 15 - 6 \frac{a}{L} \right) \right] \\
 M_B &= \frac{p_{\max} a^2}{20} \left[ \frac{a}{L} \left( 5 - 4 \frac{a}{L} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

## 1.5. Matrices de rigidez global

La matriz de rigidez global funcionalmente es similar a las matrices de rigidez elemental, ya que relaciona fuerzas nodales equivalentes con desplazamientos nodales. La diferencia es que la matriz global caracteriza el comportamiento no ya de un único elemento 1D, sino de la estructura completa. Al igual que las matrices elementales, depende de las características geométricas de las barras y de las propiedades de la sección transversal de cada elemento (y en su caso, de su curvatura o variación de la sección transversal, si la barra no fuera recta o de sección constante). Además la matriz de rigidez global también dependerá de la incidencia relativa de las barras. Así, si el nudo M y el nudo N de la estructura no están unidos directamente por alguna barra, en general todas las componentes del bloque o submatriz  $K_{MN}$  serán nulas.



El interés computacional del método matricial de la rigidez frente a otros métodos en parte reside en lo sencillo que es construir algorítmicamente la matriz de rigidez global a partir de las matrices de rigidez elementales. El procedimiento por el cual se puede obtener la matriz de rigidez global a partir de las matrices de rigidez elementales se conoce como ensamblaje. Si las barras están todas orientadas en la misma dirección (como en una viga continua con varios apoyos), el ensamblaje se puede hacer directamente, pero en una estructura general antes de proceder al ensamblaje, éste requiere que previamente se haya hecho un cambio de base en que todas las matrices y los vectores estén expresados en la misma base vectorial.

### 1.5.1. Ensamblaje (caso sin cambio de base)

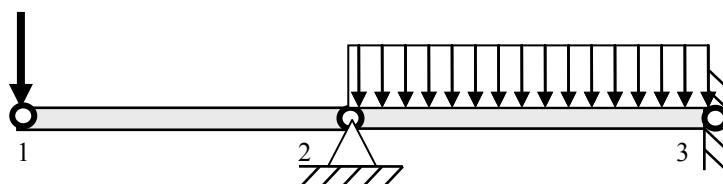
Para aclarar la operación de ensamblaje conviene definir el concepto de bloque o submatriz. Un bloque viene dado por un conjunto de componentes de una matriz de rigidez elemental. Usualmente las matrices de rigidez elementales tienen cuatro bloques: si llamamos  $I$  (izquierda) a la sección extrema situada más la izquierda y  $D$  (derecha) a la sección situada más a la derecha la matriz de rigidez de un elemento lineal, puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} K^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{II}^{(e)}] & [K_{ID}^{(e)}] \\ [K_{DI}^{(e)}] & [K_{DD}^{(e)}] \end{bmatrix} \quad [1.43]$$

Análogamente se pueden definir bloques para la matriz de rigidez global a partir de la numeración global usada para numerar los nudos. Para una barra elástica recta de sección constante sin alabeo en 2D cada bloque es una submatriz de  $3 \times 3$ , mientras que para una barra recta de sección constante sin alabeo en 3D cada bloque es una submatriz de  $6 \times 6$ . La operación de ensamblaje consiste en formar una matriz de  $N \times N$  bloques obtenidos copiando los bloques de las matrices de rigidez elemental y considerando sumas matriciales de los bloques cuando un nudo es común a varias barras.

Para ver esto en detalle pensemos que el nudo izquierdo de una barra cualquiera tendrá una numeración global  $\alpha$  y el nudo derecho de la barra tendrá una numeración global  $\beta$ , lo cual significa que el bloque  $[K_{\alpha\alpha}^G]$  será el bloque  $[K_{II}^e]$  (o una suma de bloques de ese tipo si  $\alpha$  es común a varias barras), el bloque  $[K_{\beta\beta}^G]$  será el bloque  $[K_{DD}^e]$  (o una suma de bloques de ese tipo si  $\beta$  es común a varias barras) y análogamente sucede con los bloques  $[K_{\alpha\beta}^G]$  y  $[K_{\beta\alpha}^G]$ . Esto se puede ilustrar de manera simple con un ejemplo. Consideremos la siguiente estructura con dos barras idénticas de longitud  $L$ :

FIG. 1.10.  
Ejemplo de estructura  
formada por dos barras  
idénticas.



Las matrices de rigidez, por tratarse de un problema plano y ser barras rectas de sección constante, vienen dadas por cualquiera de las relaciones [1.21]:



$$\begin{bmatrix} K^{(1)} \\ K^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & B & D & 0 & -B & +D \\ 0 & D & C & 0 & -D & C/2 \\ \hline -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -B & -D & 0 & B & -D \\ 0 & D & C/2 & 0 & -D & C \end{bmatrix} \quad [1.44]$$

donde  $[K^{(1)}]$  se refiere a la matriz de rigidez elemental de la primera barra y  $[K^{(2)}]$  a la matriz de rigidez elemental de la segunda barra. En este caso las dos matrices son idénticas y como cada una de ellas tiene cuatro bloques se tienen ocho bloques a partir de los cuales debe formarse la matriz de rigidez global. La matriz de rigidez global tiene  $3 \times 3 = 9$  bloques, ya que existen tres nudos. Naturalmente varios de los bloques de la matriz de rigidez serán nulos, ya que, por ejemplo,  $[K_{13}]$  y  $[K_{31}]$  son nulos al no estar directamente conectados los nudos 1 y 3. Comparando qué bloques están a la izquierda y a la derecha de cada barra y viendo qué numeración global tienen, obtenemos la siguiente construcción de bloques:

$$\begin{aligned} [K_{11}^G] &= [K_{II}^{(1)}] & [K_{12}^G] &= [K_{ID}^{(1)}] & [K_{13}^G] &= [0] \\ [K_{21}^G] &= [K_{DI}^{(1)}] & [K_{22}^G] &= [K_{DD}^{(1)}] + [K_{II}^{(2)}] & [K_{23}^G] &= [K_{ID}^{(2)}] \\ [K_{31}^G] &= [0] & [K_{32}^G] &= [K_{DI}^{(2)}] & [K_{33}^G] &= [K_{DD}^{(2)}] \end{aligned} \quad [1.45]$$

Recopilando los bloques a partir de [1.44], la matriz global es:

$$[K_G]_G = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & & & & & \\ 0 & B & +D & 0 & -B & +D & & & \\ 0 & +D & C & 0 & -D & C/2 & & & \\ \hline -A & 0 & 0 & 2A & 0 & 0 & -A & & \\ -B & -D & & 0 & 2B & 0 & 0 & -B & +D \\ +D & C/2 & & 0 & 0 & 2C & 0 & -D & C/2 \\ \hline & & & -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ & & & & -B & -D & 0 & B & -D \\ & & & & +D & C/2 & 0 & -D & C \end{bmatrix} \quad [1.46]$$

(Las posiciones en blanco corresponden a componentes 0 que no se han escrito.)

La regla de sumar bloques procedentes de matrices de rigidez elementales de barras distintas cuando éstas comparten un nudo puede probarse rigurosamente teniendo en cuenta que en una estructura de nudos rígidos los desplazamientos de un nudo compartido por varias barras se reparten proporcionalmente entre las barras concurrentes. Además la intuición nos sugiere que, cuando en un nudo o concurrencia de barras inciden más barras, será tanto más difícil provocar desplazamientos en él, ya que habrá que vencer las rigideces de todas las barras a deformarse para lograr desplazarlo.



### 1.5.2. Ensamblaje (caso con cambio de base)

En esta sección consideramos el caso general de estructuras de barras. Antes de poder construir o calcular la matriz de rigidez global, necesitamos practicar cambios de base, ya que las matrices de rigidez elementales son entes matemáticos objetos cuyas coordenadas dependen del sistema de referencia o de la base vectorial elegida para expresarlos (de manera análoga a como sucede con los vectores y a diferencia de los escalares, que son magnitudes invariantes respecto a cambios de referencia). Cuando intervienen barras de orientación diferente es muy importante definir  $b$  sistemas de ejes locales (o bases vectoriales) para cada barra. Para barras rectas se usan naturalmente sistemas de coordenadas cartesianas con el eje X alineado a lo largo de la barra y los ejes Y y Z alineados con las direcciones principales de inercia de la misma (en el caso de barras curvas es necesario usar coordenadas curvilíneas a lo largo de la barra, con la consiguiente complicación).

En lugar de deducir cuidadosamente las matrices de cambio de base para el caso de bases ortogonales en 2D y 3D, nos conformaremos con dar las fórmulas finales para barras elásticas de sección en las cuales el alabeo puede ignorarse y, por tanto, tienen matrices de rigidez de  $6 \times 6$  y  $12 \times 12$  respectivamente. Empezamos con el caso bidimensional. Aquí, la fórmula del cambio de base para vectores de fuerzas nodales es:

$$\{F\}_G = [C_{L \rightarrow G}] \{F\}_L \Rightarrow \begin{Bmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \\ \tilde{M}_3 \\ \tilde{F}_4 \\ \tilde{F}_5 \\ \tilde{M}_6 \end{Bmatrix}_G = \begin{array}{c|ccc|ccc} \tilde{F}_1 & c_\alpha & s_\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{F}_2 & -s_\alpha & c_\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \hline \tilde{M}_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{F}_4 & 0 & 0 & 0 & c_\alpha & s_\alpha & 0 \\ \tilde{F}_5 & 0 & 0 & 0 & -s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ \hline \tilde{M}_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ M_6 \end{Bmatrix}_L \quad [1.47]$$

donde  $c_\alpha = \cos \alpha$ ,  $s_\alpha = \sin \alpha$  y el ángulo  $\alpha = \alpha_{LG}$  se define como el ángulo de giro que es necesario aplicar al sistema de ejes local ( $_L$ ) para que coincida con el sistema de ejes global ( $_G$ ).

De la última expresión se aprecia que para los (pseudo)vectores de fuerzas nodales, las dos componentes de fuerza de cada sección extrema se comportan como un vector bidimensional genuino y los momentos son iguales en cualquier base. Lo mismo habría sucedido si tratáramos de expresar en otra base los (pseudo)vectores de desplazamiento: en ese caso sería necesario considerar una rotación las dos componentes de traslación, mientras que los ángulos girados serían invariantes, ya que tienen el mismo valor en todos los sistemas de referencia. Para las matrices el cambio de base es ligeramente más complicado.<sup>8</sup>

$$[K^{(e)}]_G = [C_{L \rightarrow G}] [K^{(e)}]_L [C_{G \rightarrow L}] = [C_{L \rightarrow G}] [K^{(e)}]_L [C_{L \rightarrow G}]^T \quad [1.48]$$

donde el superíndice  $T$  indica trasposición de matrices.

Si se aplica la expresión [1.48] a la matriz de rigidez elemental [1.21] de una barra elástica recta de sección constante bidimensional, se obtiene:

$$\left[ K^{(e)} \right]_G = \begin{bmatrix} c_a^2 A + s_a^2 B & c_a s_a (B - A) & s_a D & -c_a^2 A - s_a^2 B & c_a s_a (A - B) & s_a D \\ c_a s_a (B - A) & s_a^2 A + c_a^2 B & c_a D & c_a s_a (A - B) & -s_a^2 A - c_a^2 B & c_a D \\ s_a D & c_a D & C & -s_a D & -c_a D & C/2 \\ -c_a^2 A - s_a^2 B & c_a s_a (A - B) & -s_a D & c_a^2 A + s_a^2 B & c_a s_a (B - A) & -s_a D \\ c_a s_a (A - B) & -s_a^2 A - c_a^2 B & -c_a D & c_a s_a (B - A) & s_a^2 A + c_a^2 B & -c_a D \\ s_a D & c_a D & C/2 & -s_a D & -c_a D & C \end{bmatrix} \quad [1.49]$$

Para clarificar tanto el cambio de base como el ensamblaje en el caso de dos barras idénticas que forman ángulo de 90° consideraremos el siguiente ejemplo simple

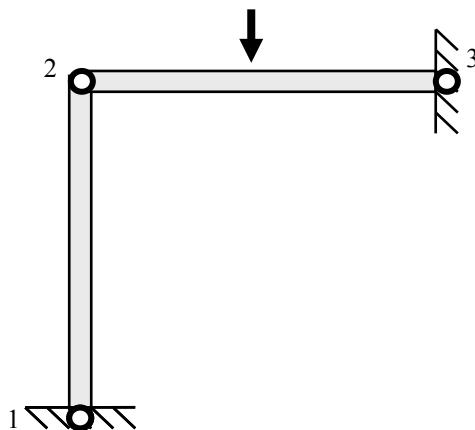


FIG. 1.11.  
Semipórtico modelo.

En este caso, las matrices de rigidez elementales de la barra 1 (dirección 1-2) y la barra 2 (dirección 2-3) vienen dadas por:

$$\left[ K^{(1)} \right]_{L1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & B & D & 0 & -B & +D \\ 0 & D & C & 0 & -D & C/2 \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -B & -D & 0 & B & -D \\ 0 & D & C/2 & 0 & -D & C \end{bmatrix} \quad [1.50a]$$

$$\left[ K^{(2)} \right]_{L2} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & B & D & 0 & -B & +D \\ 0 & D & C & 0 & -D & C/2 \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -B & -D & 0 & B & -D \\ 0 & D & C/2 & 0 & -D & C \end{bmatrix} \quad [1.50b]$$

Como ejes globales consideraremos unos en que el eje  $X_G$  sea horizontal e  $Y_G$  vertical, que son ejes básicamente coincidentes con los de la barra 2-3 (es decir,  $G = L2$ ). La barra 1-2 es vertical y, si consideramos que su eje  $X_{L1}$  va de 1 a 2 el ángulo necesario



para emparejar la dirección 1-2 con el eje  $X_G$  es  $\alpha = \alpha_{LG} = -90^\circ$ . Al realizar los cambios de base se obtiene:

$$\left[ K^{(1)} \right]_G = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & B & D & 0 & -B & +D \\ 0 & D & C & 0 & -D & C/2 \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -B & -D & 0 & B & -D \\ 0 & D & C/2 & 0 & -D & C \end{bmatrix} \quad [1.51a]$$

$$\left[ K^{(2)} \right]_G = \begin{bmatrix} B & 0 & D & -B & 0 & D \\ 0 & A & 0 & 0 & -A & 0 \\ 0 & 0 & C & -D & 0 & C/2 \\ -B & 0 & -D & B & 0 & -D \\ 0 & -A & 0 & 0 & A & 0 \\ D & 0 & C/2 & -D & 0 & C \end{bmatrix} \quad [1.51b]$$

Y si ensamblamos las dos matrices anteriores:

$$\left[ K^G \right]_G = \begin{bmatrix} B & 0 & D & -B & 0 & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -D & 0 & C/2 & 0 & 0 & 0 \\ -B & 0 & -D & B+A & 0 & -D & -A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & A+B & D & 0 & -B & D \\ D & 0 & C/2 & -D & D & C+C & 0 & -D & C/2 \\ 0 & 0 & 0 & -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -B & -D & 0 & B & -D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D & C/2 & 0 & -D & C \end{bmatrix} \quad [1.52]$$

### 1.5.3. Matriz de rigidez global de equilibrio

Las matrices de rigidez dan las fuerzas nodales en las secciones extremas necesarias inducidas por un conjunto de desplazamientos cualquiera, ya que siempre habrá un conjunto de fuerzas y momentos que esté en equilibrio y que sea compatible con un conjunto de desplazamientos arbitrarios. Sin embargo, las matrices de rigidez no son general invertibles, ya que existen modos de desplazamiento que son movimientos de sólido rígido en que toda la barra se desplaza globalmente sin que haya deformación alguna y, por tanto, con tensiones y fuerzas nulas. Matemáticamente eso se refleja en que el determinante de una matriz de rigidez elemental o de la matriz de rigidez del problema siempre es nulo (ya que la matriz no es invertible).

Más aún, dado que las matrices de rigidez son simétricas siempre es posible calcular tantos valores propios (contando multiplicidad) como grados de libertad tenga la barra.



Como el determinante es nulo se deduce que existen valores propios nulos. De hecho, se puede demostrar que el número de valores propios nulos coincide con el número de movimientos de sólido rígido posibles.

Eso implica que para una estructura plana de nudos rígidos y barras elásticas rectas de sección constante el número de valores propios nulos es tres (dos modos de traslación y uno de giro), para una estructura de nudos rígidos tridimensional con barras rectas sin alabeo el número de valores propios nulos será en general seis (tres de traslación y tres de giro). Si la estructura tiene nudos articulados entonces el número de valores propios nulos puede ser aún mayor.

Para ilustrar este punto damos los valores propios y vectores propios para la barra recta de sección constante en 2D y 3D. Para el caso 2D, si se buscan los valores propios de [1.21] se obtiene la siguiente colección de valores y vectores propios:

0	$\{\delta\}^T = \{1, 0, 0; 1, 0, 0\}$	(traslación en X)
0	$\{\delta\}^T = \{0, 1, 0; 0, 1, 0\}$	(traslación en Y)
0	$\{\delta\}^T = \{0, -1, 1/L; 0, 0, 1/L\}$	(giro alrededor de un extremo)
$2EA/L$	$\{\delta\}^T = \{-1, 0, 0; 1, 0, 0\}$	(extensión simple)
$2EI/L$	$\{\delta\}^T = \{0, 0, -1; 0, 0, 1\}$	(flexión simple)
$6EI/L+24EI/L^3$	$\{\delta\}^T = \{0, 2/L, 1; 0, -2/L, 1\}$	(cortadura)

Para el caso 3D, se obtienen los siguientes valores propios:

0	$\{\delta\}^T = \{1, 0, 0; 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 0, 0\}$	(traslación en X)
0	$\{\delta\}^T = \{0, 1, 0; 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 0\}$	(traslación en Y)
0	$\{\delta\}^T = \{0, 0, 1; 0, 0, 0; 0, 0, 1; 0, 0, 0\}$	(traslación en Z)
0	$\{\delta\}^T = \{0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 0, 0; 1, 0, 0\}$	(giro en X)
0	$\{\delta\}^T = \{0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 0; L, 0, 1, 0\}$	(giro en Y)
0	$\{\delta\}^T = \{0, 0, 0; 0, 0, 1; 0, L, 0; 0, 0, 1\}$	(giro en Z)
$2EA/L$	$\{\delta\}^T = \{-1, 0, 0; 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 0, 0\}$	(extensión simple)
$2EI_y/L$	$\{\delta\}^T = \{0, 0, 0; 0, -1, 0; 0, 0, 0; 0, 1, 0\}$	(flexión simple en eje Y)
$2EI_z/L$	$\{\delta\}^T = \{0, 0, 0; 0, 0, -1; 0, 0, 0; 0, 0, 1\}$	(flexión simple en eje Z)
$2GJ/L$	$\{\delta\}^T = \{-1, 0, 0; 0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 0, 0\}$	(torsión)
$6EI_y/L+24EI_y/L^3$		(cortadura en eje Y)
$6EI_z/L+24EI_z/L^3$		(cortadura en eje Z)

Más adelante veremos que, cuando se introducen las uniones con el suelo, se suprime los posibles movimientos de sólido rígido. Por tanto, la matriz de rigidez de equilibrio o matriz de rigidez reducida, que sólo tienen en consideración las filas y columnas correspondientes a grados de libertad compatibles con los enlaces, es una matriz invertible con determinante no nulo.

#### 1.5.4. Simetría de la matriz y orden de aplicación de las cargas

En teoría de estructuras generalmente no se presta demasiada atención al modo de aplicación de las cargas ni al orden en que éstas se van aplicando una tras otra sobre la estructura hasta alcanzar una posición de equilibrio. Un análisis cuidadoso de la



cuestión permite demostrar que para estructuras de comportamiento lineal<sup>9</sup> hay independencia del orden de aplicación de las cargas si y sólo si la matriz de rigidez  $K = [k_{ij}]$  es simétrica:  $k_{ij} = k_{ji}$ . La siguiente demostración prueba el resultado:

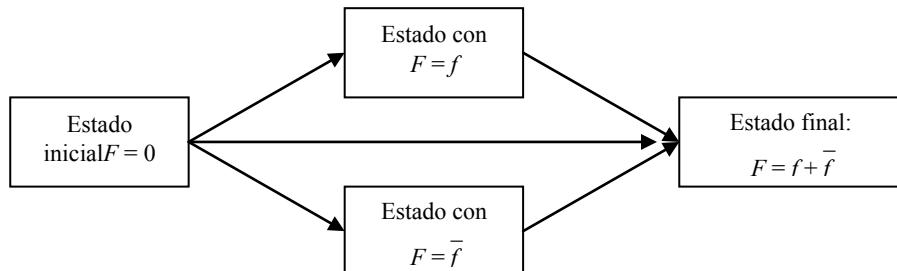
**TEOREMA.** *Dada una estructura E con comportamiento lineal, si los desplazamientos del punto de equilibrio no dependen del orden de aplicación de las cargas, entonces su matriz de rigidez  $K_E$  es simétrica [más aún: la matriz de rigidez es simétrica si y sólo si los desplazamientos en equilibrio no dependen del orden de aplicación de las cargas].*

◊ Puesto que se trata de una estructura lineal, los desplazamientos en el punto de equilibrio  $\delta^{(e)}$  se relacionan con las fuerzas exteriores  $F^{(\text{ext})}$  a través de la matriz de rigidez, es decir,  $\delta^{(e)} = K_E^{-1} \cdot F^{(\text{ext})}$ . A partir de esta expresión podemos calcular el trabajo realizado en forma de energía elástica acumulada por las fuerzas exteriores. Si consideramos una aplicación cuasiestática<sup>10</sup> de las cargas tenemos que:

$$\begin{aligned} W_{\text{elast}} &= \int_0^{\delta^{(e)}} \vec{F}(\delta) \cdot d\vec{\delta} = \int_0^{\delta^{(e)}} \vec{F}(\delta) \cdot d(K_E^{-1} \cdot \vec{F}) = \\ &= \int_0^{F^{(\text{ext})}} \vec{F} \cdot K_E^{-1} d(\vec{F}) = \int_0^{F^{(\text{ext})}} [F]^T [K_E^{-1}] [dF] \end{aligned} \quad [1.53]$$

$$W_{\text{elast}} = \frac{1}{2} [F]^T [K_E^{-1}] [F] \quad [*]$$

Ahora imaginemos dos sistemas de fuerzas diferentes modelizados por dos vectores de fuerzas nodales  $f$  y  $\bar{f}$  y consideremos varias posibilidades en su orden de aplicación, ilustradas en el siguiente esquema:



El camino superior consiste en aplicar  $f$  y luego  $\bar{f}$ ; el camino inferior consiste en aplicar primero  $\bar{f}$  y luego  $f$ , y por último el camino central consiste en la aplicación cuasiestática y simultánea de  $f$  y  $\bar{f}$ . Puesto que la estructura tiene un comportamiento lineal, todas las ecuaciones que rigen su comportamiento son lineales, por lo que podemos usar los teoremas de existencia y unicidad para justificar que el estado final alcanzado es siempre el mismo con independencia del camino seguido (lo contrario contradiría la unicidad de la solución con  $F = f + \bar{f}$ ). De la unicidad del estado final podemos deducir que la energía elástica acumulada, que coincide con el trabajo realizado por las fuerzas exteriores es independiente del camino.

[ $\Rightarrow$ ] Veamos qué condiciones impone sobre la matriz  $K_E$  la independencia del orden de aplicación de  $f$  y  $\bar{f}$ . Para ello calcularemos a partir de la expresión [\*] la energía final elástica para cada uno de los tres caminos:

1) Camino superior: aplicar primero  $f$  y luego  $\bar{f}$ :

$$W_{elast}^{(1)} = \underbrace{\frac{1}{2}[f]^T [K_E^{-1}][f]}_{\text{primera etapa}} + \underbrace{[\bar{f}]^T [K_E^{-1}][f] + \frac{1}{2}[\bar{f}]^T [K_E^{-1}][\bar{f}]}_{\text{segunda etapa}} \quad [1.54]$$

El segundo término con tiene el factor  $1/2$  debido a que, cuando empezamos a aplicar las fuerzas  $\bar{f}$ , las fuerzas  $f$  ya están aplicadas y permanecen constantes a medida que se van aplicando las  $\bar{f}$  (así, si planteamos una expresión como [\*], el término  $[K_E^{-1}][f]$  permanece constante y “sale” de la integral sin más).

2) Camino inferior: aplicar primero  $\bar{f}$  y luego  $f$ :

$$W_{elast}^{(2)} = \underbrace{\frac{1}{2}[\bar{f}]^T [K_E^{-1}][\bar{f}]}_{\text{primera etapa}} + \underbrace{[f]^T [K_E^{-1}][\bar{f}] + \frac{1}{2}[f]^T [K_E^{-1}][f]}_{\text{segunda etapa}} \quad [1.55]$$

Puede verse que la condición  $W_{elast}^{(1)} = W_{elast}^{(2)}$ , que es un escalar, equivale a:

$$\begin{aligned} [\bar{f}]^T [K_E^{-1}][f] &= [f]^T [K_E^{-1}][\bar{f}] = ([f]^T [K_E^{-1}][\bar{f}])^T = \\ &= [\bar{f}]^T [K_E^{-1}]^T [f]^{TT} \Rightarrow [\bar{f}]^T ([K_E^{-1}] - [K_E^{-1}]^T)[f] = 0 \Rightarrow \\ &[K_E^{-1}] = [K_E^{-1}]^T \end{aligned} \quad [1.56]$$

donde hemos usado que la energía es un escalar (matriz  $1 \times 1$ ) —y, por lo tanto,  $W_{elast} = (W_{elast})^T$ — y la última igualdad se sigue del hecho de que  $f$  y  $\bar{f}$  son arbitrarios —y por lo tanto la expresión debe cumplirse con independencia de quienes sean  $f$  y  $\bar{f}$ —. Hemos probado de este modo que si el orden de aplicación de las cargas es irrelevante, entonces la matriz de rigidez debe ser simétrica.

[ $\Leftarrow$ ] Ahora deberíamos probar que la simetría de la matriz implica que el orden de las fuerzas es irrelevante. La demostración en este otro sentido es puramente mecánica aunque algo técnica. En primer lugar hay que ver que la energía a lo largo del camino central consistente en aplicar ambas cargas conjuntamente, y llegamos a:

$$\begin{aligned} W_{elast}^{(3)} &= \frac{1}{2}[\bar{f} + f]^T [K_E^{-1}][\bar{f} + f] = \\ &\frac{1}{2}[\bar{f}]^T [K_E^{-1}][\bar{f}] + \frac{1}{2}[\bar{f}]^T [K_E^{-1}][f] + \frac{1}{2}[f]^T [K_E^{-1}][\bar{f}] + \frac{1}{2}[f]^T [K_E^{-1}][f] \end{aligned}$$



Es trivial comprobar que, si la matriz de rigidez es simétrica, sucede también que  $W^{(3)}_{elast} = W^{(1)}_{elast} = W^{(2)}_{elast}$ . Para ofrecer la demostración completa tendríamos que probar que si tenemos un sistema  $n$  de fuerzas y  $W^{[n]}(f^{(1)}, \dots, f^{(n)})$  es la energía obtenida al colocar sucesivamente  $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots$  hasta  $f^{(n)}$ , entonces para todo conjunto de fuerzas  $\{f^{(i)} | 1 \leq i \leq n\}$  y para toda permutación de  $n$  elementos  $\sigma \in \text{Sym}(n)$  se tiene que:

$$W^{[n]}(f^{(1)}, \dots, f^{(n)}) = W^{[n]}(f^{\sigma(1)}, \dots, f^{\sigma(n)}) \quad (\text{si } K_E \text{ es simétrica}) \quad [**]$$

Acabamos de probar el resultado para  $n = 2$ . Para  $n > 2$  tenemos que:

$$\begin{aligned} W^{[n+1]}(f^{(1)}, \dots, f^{(n+1)}) &= W^{[n]}(f^{(1)}, \dots, f^{(n)}) + [f^{(n+1)}]^T [K_E^{-1}] [f^{(1)} + \dots + f^{(n)}] + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2} [f^{(n+1)}]^T [K_E^{-1}] [f^{(n+1)}] \end{aligned}$$

Puede verse, por inducción, que de la simetría de  $K_E$  se sigue que:

$$W^{[n]}(f^{(1)}, \dots, f^{(n)}) = \frac{1}{2} \cdot [f^{(1)} + \dots + f^{(n)}]^T [K_E^{-1}] [f^{(1)} + \dots + f^{(n)}]$$

Esta forma funcional de  $W^{[n]}$  obviamente satisface [\*\*].

Q. E. D.

Nótese que en la demostración anterior se ha supuesto que la aplicación de las cargas era siempre cuasiestática, lo cual es una condición idealizada. En el proceso de carga, en general se da  $F(\delta) > F_{ce}(\delta)$ , mientras que en el proceso de descarga se da  $F(\delta) < F_{ce}(\delta)$ . Eso provoca que una estructura elástica antes de llegar a quedarse en el estado de equilibrio realice oscilaciones alrededor del mismo.<sup>11</sup> Sin embargo, como en toda estructura real, hay rozamiento interno, por lo que dichas oscilaciones se amortiguan y finalmente, para un tiempo suficientemente grande:  $\delta(t) \approx \delta^{(\text{equil})}$  y  $F \approx F_{ce}$ .

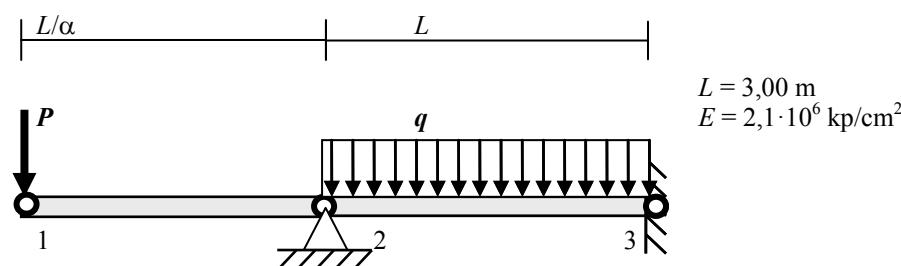
Por esta razón en una estructura real sometida a esfuerzos estáticos los resultados anteriores deducidos bajo la hipótesis de aplicación de las fuerzas cuasiestáticas (puesta en carga cuasiestática) son igualmente aplicables, aunque las fuerzas no sean inicialmente aplicadas de modo cuasiestático.

### 1.5.5. Ejemplos convencionales

A continuación se presentan dos ejemplos de cálculo matricial completo, uno inicial más sencillo que no involucra cambios de base y otro que sí los involucra.

#### Ejemplo numérico 1

La figura representa una viga continua de acero de sección rectangular hueca de  $\square 200 \times 200 \times 20$ . Usando la discretización de dos barras y tres nudos mostrada en la figura:



y tomando inicialmente  $\alpha = 1$ :

- 1) Calcular el vector de fuerzas nodales asociadas a P y q.
- 2)Calcular la matriz de rigidez global y su ancho de banda  $A_b$ .
- 3) Calcular los desplazamientos del nudo 1, con  $P = 15 \text{ kN}$  y  $q = 10 \text{ kN/m}$ .
- 4) Calcular las reacciones con los mismos valores de P y q.
- 5)Suponiendo ahora que  $\alpha \neq 1$ ,calcular el valor de  $\alpha$  para que, con los mismos valores de fuerzas anteriores, resulte que  $\delta_{V1} = 0$ .

1) En la barra 1 sólo se tiene la fuerza  $P$ , que está directamente aplicada en un nudo y, por tanto, ya es directamente una fuerza nodal:

$$\{F_G^{(1)}\}_G^T = \{0 \ -P \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}$$

Para la barra 2 sólo se tiene  $q$ , así que, a partir de las tablas de la sección 1.4.1.:

$$\{F_G^{(2)}\}_G^T = \left\{ 0 \ -\frac{qL}{2} \ -\frac{qL^2}{12} \ 0 \ -\frac{qL}{2} \ +\frac{qL^2}{12} \right\}$$

El vector de fuerzas nodales, dado que los ejes locales de las barras coinciden, es:

$$\{F_G\}_G^T = \left\{ 0 \ -P \ 0 \ 0 \ -\frac{qL}{2} \ -\frac{qL^2}{12} \ 0 \ -\frac{qL}{2} \ +\frac{qL^2}{12} \right\}$$

$$\{F_G\}_G^T = \{0, -15 \text{ kN}, 0; 0, -15 \text{ kN}, -7,5 \text{ kN}; 0, -15 \text{ kN}, +7,5 \text{ kN}\}$$

(Las reacciones se tendrán en cuenta más adelante a la hora de construir el sistema de ecuaciones.)

2) Puesto que las dos barras tienen la misma orientación y la misma longitud, si  $\alpha = 1$ , la matriz de rigidez no requiere el cálculo de cambios de base y es simplemente:

$$[K_G]_G = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \lambda_m^2 & 0 & 0 & -\lambda_m^2 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\lambda_m^2 & 0 & 0 & 2\lambda_m^2 & 0 & 0 & -\lambda_m^2 \\ -12 & -6L & 0 & 24 & 0 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 0 & 8L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\lambda_m^2 & 0 & 0 & \lambda_m^2 & 0 & 0 \\ & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

donde hemos usado la expresión de una esbeltez mecánica del tipo  $\lambda_m := [AL^2/I]^{1/2}$  para simplificar la escritura. El ancho de banda de  $[K_G]_G$  para esta matriz es  $A_b = 4$  (ya que todos los elementos no nulos  $K_{ij}$  cumplen que  $|i-j| \leq 4$ ).

3) El sistema completo de ecuaciones introduciendo también las reacciones es:



$$\{R+F\}_G = [K^e]_G \{\delta\}_G \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ R_{H2} \\ R_{V2} - qL/2 \\ -qL^2/12 \\ R_{H3} \\ R_{V3} - qL/2 \\ M_3 + qL^2/12 \end{bmatrix} = K_G \begin{bmatrix} \delta_{H1} \\ \delta_{V1} \\ \theta_1 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \lambda_m^2 \delta_{H1} \\ 12\delta_{V1} + 6L\theta_1 + 6L\theta_2 \\ 6L\delta_{V1} + 4L^2\theta_1 + 2L^2\theta_2 \\ -\lambda_m^2 \delta_{H1} \\ -12\delta_{V1} - 6L\theta_1 \\ 6L\delta_{V1} + 2L^2\theta_1 + 8L^2\theta_2 \\ 0 \\ -6L\theta_2 \\ 2L^2\theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

El sistema anterior tiene cuatro desplazamientos incógnita y cinco reacciones. De la primera, tomando las ecuaciones primera, segunda, tercera y sexta se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 0 = \lambda_m^2 \delta_{H1} \\ -\bar{P} = 12\delta_{H1} + 6\bar{\theta}_1 + 6\bar{\theta}_2 \\ \bar{P} = PL^3/EI \\ \bar{\theta}_1 = L\theta_1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 6\delta_{H1} + 4\bar{\theta}_1 + 2\bar{\theta}_2 \\ \bar{q}/12 = 6\delta_{H1} + 2\bar{\theta}_1 + 8\bar{\theta}_2 \\ \bar{q} = qL^4/EI \\ \bar{\theta}_2 = L\theta_2 \end{cases}$$

De la primera ecuación se obtiene trivialmente que  $\delta_{H1} = 0$ ; de las otras tres fácilmente se llega a que:

$$\delta_{V1} = \frac{\bar{q} - 28\bar{P}}{48} = -\frac{(28P - qL)L^3}{48EI} = -13,5 \text{ mm}$$

$$\bar{\theta}_1 = \frac{36\bar{P} - \bar{q}}{48} \Rightarrow \theta_1 = \frac{(36P - qL)L^2}{48EI} \quad \bar{\theta}_2 = \frac{12\bar{P} - \bar{q}}{48} \Rightarrow \theta_2 = \frac{(12P - qL)L^2}{48EI}$$

Numéricamente:

$$\delta_{H1} = 0 \quad \delta_{V1} = -0,0135 \text{ m} \quad \theta_1 = +3,38^\circ$$

4) Las reacciones son rutinarias. Por la misma consideración de las simetrías del problema se tiene que:

$$\begin{cases} R_{V2} = \frac{qL}{2} - \frac{EI}{L^3}(12\delta_{H1} + 6L\theta_1) = \frac{3qL}{8} + \frac{5P}{2} = +48,75 \text{ kN} \\ R_{V3} = \frac{qL}{2} - \frac{EI}{L^3}(6L\theta_2) = \frac{5qL}{8} - \frac{3P}{2} = -3,75 \text{ kN} \\ M_3 = -\frac{qL^2}{8} + \frac{PL}{2} = 11,25 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{cases} \quad \begin{cases} R_{H2} = -\lambda_m^2 \delta_{H1} = 0 \\ R_{H3} = 0 \end{cases}$$

Numéricamente:

$$\begin{array}{lll} R_{H2} = 0 & R_{V2} = +48,75 \text{ kN} & \\ R_{H3} = 0 & R_{V3} = -3,75 \text{ kN} & M_3 = -11,25 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{array}$$

Puesto que ahora las barras son de longitud diferente, y por tanto las dos barras tendrán matrices de rigidez diferentes, al aumentar  $\alpha$  también aumenta la rigidez de la primera barra. El hecho de que las rigideces relativas varíen requiere el recálculo de la matriz de rigidez global y el de la matriz global reducida.

5) En el último caso es necesario rehacer la matriz de rigidez, ya que ahora las dos barras son diferentes, y por tanto, cada una de ellas tiene un comportamiento diferente. La matriz de rigidez global resulta ser ahora:

$$[K_G]_G = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \lambda_m^2 \alpha & 0 & 0 & -\lambda_m^2 \alpha & & & & & \\ 0 & 12\alpha^3 & 6L\alpha^2 & 0 & -12\alpha^3 & 6L\alpha^2 & & & \\ 0 & 6L\alpha^2 & 4L^2\alpha & 0 & -6L\alpha^2 & 2L^2\alpha & & & \\ -\lambda_m^2 \alpha & 0 & 0 & \lambda_m^2(1+\alpha) & 0 & 0 & -\lambda_m^2 & & \\ & -12\alpha^3 & -6L\alpha^2 & 0 & 12(1+\alpha^3) & 6L(1-\alpha^2) & 0 & -12 & 6L \\ & 6L\alpha^2 & 2L^2\alpha & 0 & 6L(1-\alpha^2) & 4L^2(1+\alpha) & 0 & -6L & 2L^2 \\ & & & -\lambda_m^2 & 0 & 0 & \lambda_m^2 \alpha & 0 & 0 \\ & & & & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ & & & & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Si prescindimos ahora de las filas y columnas 4, 5, 7, 8 y 9, se llega a la matriz de rigidez reducida:

$$[K_{EG}]_G = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \lambda_m^2 \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12\alpha^3 & 6L\alpha^2 & 6L\alpha^2 \\ 0 & 6L\alpha^2 & 4L^2\alpha & 2L^2\alpha \\ 0 & 6L\alpha^2 & 2L^2\alpha & 4L^2(1+\alpha) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ -qL^2/12 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{EG} \\ \delta_{H1} \\ \delta_{V1} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema anterior es simplemente:

$$\begin{aligned} \delta_{H1} &= 0 & \delta_{V1} &= -\frac{L^3}{48EI\alpha^3} [(16+12\alpha)P - q\alpha^2 L] \\ \theta_1 &= \frac{L^2}{48EI\alpha^2} [(24+\alpha)P - \alpha^2 qL] & \theta_2 &= \frac{L^2}{48EI\alpha} [12P - \alpha qL] \end{aligned}$$

El único valor positivo de  $\alpha$  que hace que  $\delta_{V1} = 0$  viene dado por:

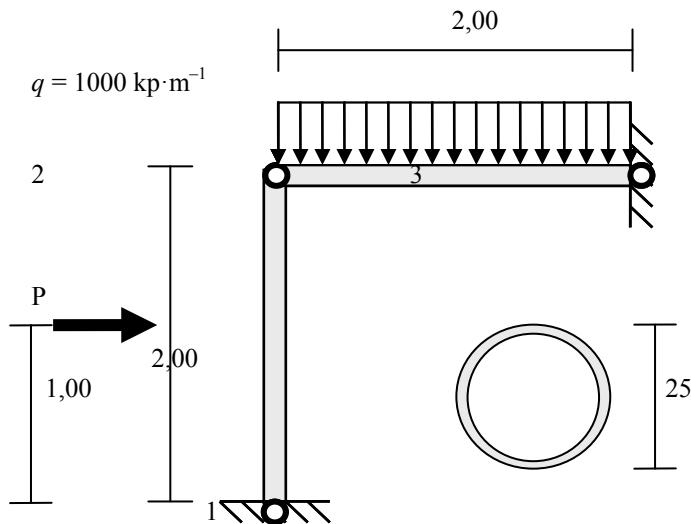
$$\alpha = 2 \frac{3 + \sqrt{9 + 4\eta}}{\eta} = 7,123 \quad \eta := \frac{qL}{P} = \frac{30 \text{ kN}}{15 \text{ kN}} = 2 \quad L_1 = \frac{L}{\alpha} = 0,421 \text{ m}$$

(Obviamente existen otras soluciones triviales, como  $\alpha = \infty$ , que correspondería al caso en que el voladizo no existiese; o incluso una solución con  $\alpha < 0$ , que no representa ninguna solución físicamente realizable.)



### Ejemplo numérico 2

La figura representa una estructura hiperestática, formada por dos perfiles metálicos de sección circular hueca de  $\varnothing 25 \times 2$ , empotrados en sus extremos.



Para  $P = 0$  y  $q = 1000 \text{ kp/m}$ :

- 1) Calcular el vector de fuerzas nodales globales (sin reacciones).
- 2) Calcular los desplazamientos del nudo 2.
- 3) Calcular las reacciones en los dos empotramientos.

Para  $P \neq 0$  y  $q = 0$ :

- 4) Calcular la fuerza  $P$  necesaria para girar  $0.5^\circ$  en el nudo 2.

1) Para el cálculo de las fuerzas nodales hay que calcular cuál sería el efecto de una carga continua sobre una viga empotrada de longitud  $L$ , obtener sus reacciones y cambiar el signo para que las fuerzas nodales así obtenidas sean estáticamente equivalentes a las fuerzas iniciales distribuidas sobre la barra. Es sencillo obtener estas fuerzas para cada una de las barras como:

$$\begin{aligned}\left\{F^{(1)}\right\}_{L1}^T &= \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} \\ \left\{F^{(2)}\right\}_{L2}^T &= \left\{0 \ -\frac{qL}{2} \ -\frac{qL^2}{12} \ 0 \ -\frac{qL}{2} \ +\frac{qL^2}{12}\right\}\end{aligned}$$

(Las reacciones se tendrán en cuenta más adelante, a la hora de construir el sistema de ecuaciones.)

Teniendo en cuenta que  $\{F^{(1)}\}_G = 0$ , puesto que  $\{F^{(1)}\}_{L1} = 0$  y que  $\{F^{(2)}\}_G = \{F^{(2)}\}_{L2}$  el ensamblaje de fuerzas es trivial:

$$\left\{F_G\right\}_G^T = \left\{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\frac{qL}{2} \ -\frac{qL^2}{12} \ 0 \ -\frac{qL}{2} \ +\frac{qL^2}{12}\right\}$$

$$\{F_G\}^T_G = \{0, 0, 0; 0, -1000 \text{ kp}, -333 \text{ kp}\cdot\text{m}; 0, -1000 \text{ kp}, +333 \text{ kp}\cdot\text{m}\}$$

2) Las matrices de rigidez de ambas barras son idénticas por tener dichas barras la misma longitud e idéntica sección transversal, y al ser barras rectas de sección constante su matriz de rigidez en ejes locales viene dada por:

$$[K^e]_{Li} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Basta tener en cuenta que  $[K^{(1)}]_{L1}$  contiene información de los nudos 1 y 2, mientras que  $[K^{(2)}]_{L2}$  contiene información referente a los nudos 2 y 3. Además, en este caso, puesto que las dos barras no tienen la misma orientación, debemos escoger un sistema de coordenadas globales al que referir todas las magnitudes. Tomaremos como sistema de ejes globales uno que coincida con la barra ②. Por tanto el sistema de coordenadas local de la barra ①,, cuyo eje OX<sup>+</sup> tiene la dirección que une los nudos 1 y 2, es necesario girarlo  $\alpha = -90^\circ$  para hacerlo coincidir con los ejes globales. La matriz cambio de base de ejes locales de la barra ① (vieja base) a ejes globales es por tanto (nueva base):

$$[L] = [C_{G \leftarrow L1}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & & & \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & & & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & & & \\ +1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & -1 & 0 \\ & & & +1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

siendo  $\alpha = -90^\circ$  el ángulo de giro necesario para hacer coincidir los ejes globales con los ejes locales de la barra ①. Usamos ahora el cambio de base  $[K^{(1)}]_G = [C_{G \leftarrow L1}] [K^{(1)}]_{L1} [C_{L1 \leftarrow G}] = [L] [K^{(1)}]_{L1} [L^T]$  (una comprobación del orden de las matrices fácil de recordar es que  $[K^{(1)}]_G$  toma vectores desplazamiento de la base global y los transforma en fuerzas de la base global). Si examinamos la secuencia  $[C_{G \leftarrow L1}] [K^{(1)}]_{L1} [C_{L1 \leftarrow G}]$  observamos que la matriz de la derecha  $[C_{L1 \leftarrow G}]$  hace que desplazamientos en la base



global se transformen en desplazamientos en la base local; la siguiente  $[K^{(1)}]_{L1}$  transforma estos desplazamientos en la local en fuerzas en la base local, y finalmente  $[C_{G \leftarrow L1}]$  transforma fuerzas en la base local en fuerzas en la base global. Puede verse que en cada paso de la secuencia el tipo de vector y la base en que está expresada son los correctos. Este razonamiento puede ser utilizado para comprobar si la ordenación de matrices es correcta). Si realizamos las operaciones  $[L][K^{(1)}]_{L1}[L^T]$ , la matriz  $[K^{(1)}]_G$  es igual a:

$$\left[ K^{(1)} \right]_G = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & -12 & 0 & -6L \\ 0 & \lambda_m^2 & 0 & 0 & -\lambda_m^2 & 0 \\ -6L & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 6L & 12 & 0 & 6L \\ 0 & -\lambda_m^2 & 0 & 0 & \lambda_m^2 & 0 \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \lambda_m = \frac{L}{i_c} = \sqrt{\frac{AL^2}{I}}$$

donde hemos usado la expresión de una esbeltez mecánica  $\lambda_m$  para simplificar la escritura. La matriz de rigidez global obtenida por ensamblaje de  $[K^{(1)}]_G$  y  $[K^{(2)}]_{L2}$  ( $= [K^{(2)}]_G$ ) es:

$$\left[ K_G \right] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & -12 & 0 & -6L \\ 0 & \lambda_m^2 & 0 & 0 & -\lambda_m^2 & 0 \\ -6L & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 6L & 12 + \lambda_m^2 & 0 & 6L \\ 0 & -\lambda_m^2 & 0 & 0 & 12 + \lambda_m^2 & 6L \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 6L & 8L^2 \\ & & & -\lambda_m^2 & 0 & 0 \\ & & & & -12 & -6L \\ & & & & 6L & 2L^2 \end{bmatrix}$$

Por tanto, el ancho de banda es  $A_b = 5$ , es decir, todos los elementos no nulos  $K_{ij}$  cumplen que  $|i-j| \leq 5$ . Para calcular los desplazamientos del nudo 2 introducimos las restricciones de movimiento a los nudos 1 y 3, es decir, tenemos en cuenta que  $\delta_{H,i} = \delta_{V,i} = 0$  y  $\theta_{i,i} = 0$ , donde  $i \in \{1,3\}$ . Esto nos permite considerar un sistema reducido de la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -qL/2 \\ -qL^2/12 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 + \lambda_m^2 & 0 & 6L \\ 0 & 12 + \lambda_m^2 & 6L \\ 6L & 6L & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{H2} \\ \delta_{v2} \\ \theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta_{H2} = +\frac{\lambda_m^2 - 24}{16(3 + \lambda_m^2)(12 + \lambda_m^2)} \frac{qL^4}{EI} \\ \delta_{V2} = -\frac{7\lambda_m^2 + 48}{16(3 + \lambda_m^2)(12 + \lambda_m^2)} \frac{qL^4}{EI} \\ \theta_2 = -\frac{\lambda_m^2 - 24}{96(3 + \lambda_m^2)} \frac{qL^3}{EI} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_{H2} = +0,08 \text{ mm} \\ \delta_{V2} = -0,57 \text{ mm} \\ \theta_2 = -0,41 \approx -23^\circ \end{cases}$$

- 3) Las reacciones son rutinarias y pueden estimarse fácilmente mediante la matriz global substituyendo los desplazamientos anteriores en la matriz de rigidez global:

$$\{F^{(1)}\}_L^T = \left\{ 0 \quad -\frac{qL}{2} + R_v \quad -\frac{qL^2}{12} + M_e \quad 0 \quad -\frac{qL}{2} \quad +\frac{qL^2}{12} \right\}$$

$$[F]_G = [K^e]_G [\delta]_G \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} R_{H1} \\ R_{V1} \\ M_1 \\ 0 \\ -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ +R_{H3} \\ -qL/2 + R_{V3} \\ qL^2/12 + M_3 \end{bmatrix} = K_G \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_{H2} \\ \delta_{V2} \\ \theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -12\delta_{H2} - 6L\theta_2 \\ -\lambda_m^2 \delta_{V2} \\ 6L\delta_{H2} + 2L^2\theta_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ -\lambda_m^2 \delta_{H2} \\ -12\delta_{V2} - 6L\theta_2 \\ 6L\delta_{V2} + 2L^2\theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Al despejar las seis ecuaciones que contienen a  $R_{H1}$ ,  $R_{V1}$ ,  $M_1$ ,  $R_{H3}$ ,  $R_{V3}$  y  $M_3$ , se obtiene:

$$\begin{array}{ll} R_{H1} = qL/16 \approx +125 \text{ kp} & R_{H3} = -qL/16 \approx -125 \text{ kp} \\ R_{V1} = 7qL/16 \approx +875 \text{ kp} & R_{V3} = 9qL/16 \approx +1125 \text{ kp} \\ M_1 = -2qL^2/96 \approx -83,33 \text{ kp}\cdot\text{m} & M_3 = -10qL^2/96 \approx -416,67 \text{ kp}\cdot\text{m} \end{array}$$

Si ahora tenemos que  $P \neq 0$  y  $q = 0$ , es necesario recalcular las fuerzas nodales en ejes globales (sin reacciones), que son simplemente:

$$F_G^e = \left[ R_{H1} + \frac{P}{2}, \quad R_{V1}, \quad M_1 - \frac{PL}{8}, \quad +\frac{P}{2}, \quad 0, \quad +\frac{PL}{8}, \quad R_{H3}, \quad R_{V3}, \quad M_3 \right]$$

Volvemos a calcular los nuevos desplazamientos con estas fuerzas nodales:



$$\begin{bmatrix} P/2 \\ 0 \\ PL/8 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 + \lambda_m^2 & 0 & 6L \\ 0 & 12 + \lambda_m^2 & 6L \\ 6L & 6L & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_H \\ \delta_v \\ \theta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \delta_{H2} = +\frac{13\lambda_m^2 + 84}{32(3 + \lambda_m^2)(12 + \lambda_m^2)} \frac{PL^3}{EI} \\ \delta_{V2} = -\frac{3(\lambda_m^2 - 12)}{32(3 + \lambda_m^2)(12 + \lambda_m^2)} \frac{PL^3}{EI} \\ \theta_2 = +\frac{\lambda_m^2 - 12}{64(3 + \lambda_m^2)} \frac{PL^2}{EI} \end{cases}$$

De esta última ecuación se sigue el valor de  $P$  buscado:

$$P = \frac{64(3 + \lambda_m^2)}{\lambda_m^2 - 12} \frac{EI}{L^2} \theta_2 = \frac{64(60036)}{60021} \frac{2,1 \cdot 10^6}{200^2} 0,9628 \cdot 0,5^\circ \cdot \frac{3,1416}{180^\circ} \approx 28 \text{ kp}$$

## 1.6. Cálculo no lineal de estructuras

Entre las hipótesis en las que se basa el método matricial figura la de que la **variación de la rigidez con la deformación** es despreciable. Sin embargo, para barras comprimidas sometidas a compresión importante, esto ya no es estrictamente cierto porque en la configuración deformada provocada por la flexión la rigidez axial es menor debido a que la barra pierde su forma recta. Cuando la rigidez de algún elemento varía con la deformación, la estructura tiene un **comportamiento no lineal**.

Una estructura de barras esbeltas con comportamiento lineal puede ser caracterizada por una matriz de rigidez global, de cocientes constantes como se ha comprobado en las secciones anteriores. Para una estructura elástica no lineal aún puede definirse la matriz de rigidez, aunque en este caso la matriz no tendrá coeficientes constantes:

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} k_{11}(\delta_i) & \cdots & k_{1n}(\delta_i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1}(\delta_i) & \cdots & k_{nn}(\delta_i) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{array} \right\} \quad [1.57]$$

### 1.6.1. Rigidez reducida de un soporte por flexión

Como puede verse en la FIG. 1.7, al someter a un esfuerzo axial vertical  $P$  un soporte que ha flectado un cierto ángulo y ha perdido la forma recta, la rigidez axial se ve afectada.

Si bien una barra recta de sección constante, que mantiene en gran medida la forma recta, puede ser modelizada de manera adecuada por una matriz de rigidez elemental cuya rigidez axial viene dada por  $K_{ax} = EA/L$ , de la figura se deduce fácilmente que bajo una combinación de esfuerzo axial y momento flector la rigidez de la barra para ángulos considerables debe verse sensiblemente afectada y debe llegar a ser menos rígida (puesto que es más sencillo comprimir un arco que una barra recta). En la sección 2.6 se estudiará con más detalle este caso hasta llegar al punto en que la rigidez axial debe ser corregida de acuerdo con la curvatura o el ángulo girado. En la sección 2.6.1 se demostrará mediante métodos energéticos de manera bastante elemental que la



rigidez axial para una barra con movimiento restringido al plano debe ser corregida como:

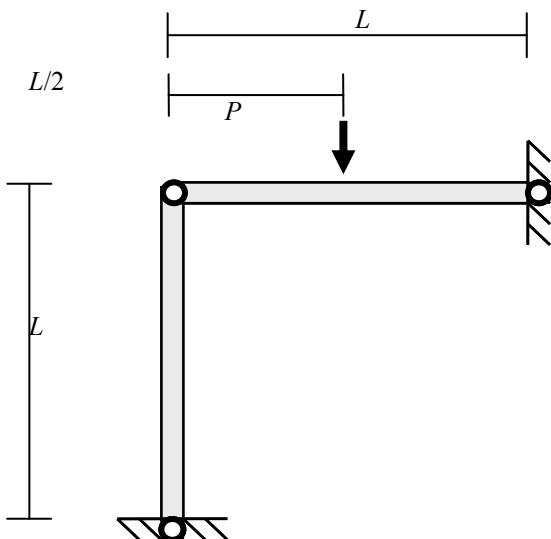
$$K_{ax}^*(\theta) = \frac{EA}{L} \left[ \frac{105}{105 + \lambda_m^2 \tan^2 \theta} \right] \approx \frac{EA}{L} \left[ 1 - \frac{\lambda_m^2 \theta^2}{105} \right] \quad [1.58]$$

donde se aprecia que, al crecer el ángulo girado en cualquiera de los dos sentidos, la rigidez cae.

FIG. 1.12

### 1.6.2. Planteamiento del problema para estructuras no lineales

El carácter no lineal del sistema de ecuaciones [1.57] hace que frecuentemente sea necesario usar métodos numéricos para encontrar la solución. A continuación se compara un ejemplo de estructura calculado en primer orden como estructura lineal y también contabilizando el efecto de la pérdida de rigidez por flexión de un pilar.


 FIG. 1.13.  
Semipórtico modelo.



Para este problema la matriz de rigidez global  $[K_G]$  que relaciona fuerzas nodales con desplazamientos viene dada (en el caso lineal) por:

$$[K_G] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & -12 & 0 & -6L \\ 0 & \lambda_m^2 & 0 & 0 & -\lambda_m^2 & 0 \\ -6L & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 6L & 12 + \lambda_m^2 & 0 & 6L \\ 0 & -\lambda_m^2 & 0 & 0 & 12 + \lambda_m^2 & 6L \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 6L & 8L^2 \\ & & & -\lambda_m^2 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \lambda_m^2 \\ & & & & -12 & 0 \\ & & & & 6L & 2L^2 \end{bmatrix} [1.59]$$

Puesto que los nudos 1 y 3 están empotrados, la matriz de rigidez reducida de equilibrio  $[K_{EG}]$  sólo involucra los desplazamientos del nudo 2, el único nudo libre, así  $[K_{EG}]$  es simplemente (en el caso lineal):

$$\{F(P)\} = [K_{EG}]\{\delta\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ -P/2 \\ -PL/8 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 + \lambda_m^2 & 0 & 6L \\ 0 & 12 + \lambda_m^2 & 6L \\ 6L & 6L & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_H \\ \delta_v \\ \theta \end{Bmatrix} [1.60]$$

donde  $\lambda_m = L(A/I_z)^{1/2}$ , y cuya solución viene dada por:

$$\begin{cases} \delta_{H,0} = +\frac{3(\lambda_m^2 - 12)}{32(3 + \lambda_m^2)(12 + \lambda_m^2)} \frac{PL^3}{EI} \\ \delta_{v,0} = -\frac{13\lambda_m^2 + 84}{32(3 + \lambda_m^2)(12 + \lambda_m^2)} \frac{PL^3}{EI} \\ \theta_0 = -\frac{\lambda_m^2 - 12}{64(3 + \lambda_m^2)} \frac{PL^2}{EI} \end{cases} [1.61]$$

Para el caso no lineal substituiremos  $K_{ax}$  por  $K_{ax}^*$  y supondremos que el resto de rigideces no se ven apreciablemente afectadas por la deformación, lo cual es una aproximación pero está justificada para lo que aquí se pretende ilustrar:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -P/2 \\ -PL/8 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 + \frac{105 \cdot \lambda_m^2}{105 + \lambda_m^2 \theta^2} & 0 & 6L \\ 0 & 12 + \frac{105 \cdot \lambda_m^2}{105 + \lambda_m^2 \theta^2} & 6L \\ 6L & 6L & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_H \\ \delta_v \\ \theta \end{Bmatrix} [1.62]$$

La solución de este sistema mediante el algoritmo de Newton-Raphson se detalla en la sección 2.6.1, que converge muy rápidamente. El siguiente cuadro compara el valor de los desplazamientos vertical y horizontal y el del ángulo girado por el nudo 2 para el caso lineal y para el caso no lineal.

Desplazamientos del nudo 2	caso lineal	caso no lineal
$\delta_H$	+0,07 mm	+0,45 mm
$\delta_V$	-0,32 mm	-1,96 mm
$\delta_\theta$	-7,95°	-7,93°

Si repetimos el mismo valor para diferentes valores de  $P$ :

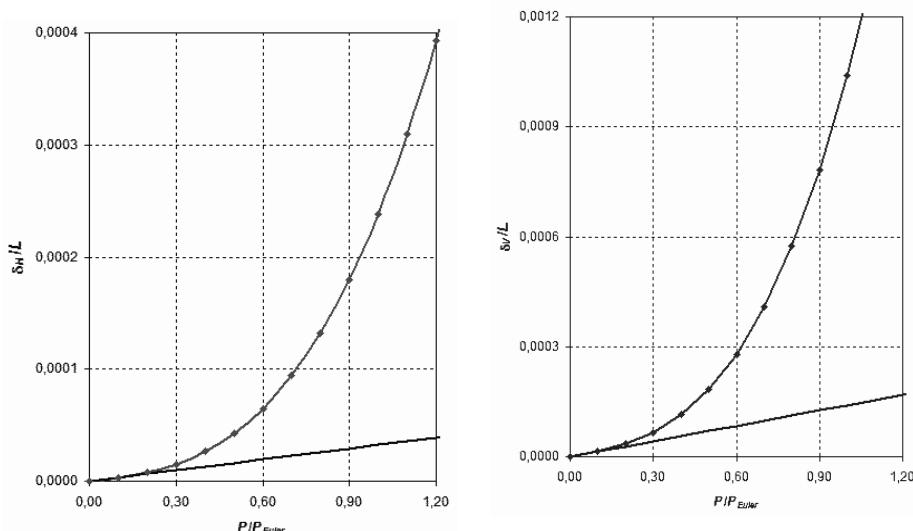


FIG. 1.14.  
Desplazamientos horizontales y verticales en el modelo lineal y en el no lineal.

Se aprecia claramente que para valores pequeños de la carga  $P$  comparados con la carga crítica de Euler  $P_{Euler}$  no hay diferencias, y para valores mayores la curva crece aproximadamente como  $(P/P_{Euler})^2$  en consonancia con lo prescripto por el método omega ( $\omega$ ) o el método  $\chi$  del Código Técnico de la edificación (CTE).

<sup>1</sup> El error cometido al aproximar las deformaciones de una estructura elástica real por una teoría elástica lineal es del orden de la mayor componente del tensor deformación. Es decir, en un problema en el que todas las componentes del tensor material de Cauchy-Green son  $|\varepsilon_{ij}| \leq 10^{-2}$ , el error cometido al aproximar dichas componentes por el tensor infinitesimal de Cauchy de la teoría lineal es del orden de 0,01. En las estructuras convencionales de hormigón y acero, las deformaciones son del orden de  $|\varepsilon_{ij}| \approx 10^{-3}$ , por lo que la teoría elástica lineal resulta suficientemente aproximada para ellas.

<sup>2</sup> Nótese que aquí nos referimos a grados de libertad como coordenadas necesarias para especificar la posición, que es su definición más usual en ingeniería de grados de libertad. En problemas dinámicos y en física el concepto de grado de libertad comprende tanto las coordenadas en el espacio de fase del sistema,



---

es decir, el número de coordenadas necesarias para especificar la posición, como las velocidades instantáneas para especificar el estado de movimiento. Para un mecanismo, si el número de grados de libertad en el primer sentido es  $N$  en el segundo sentido será  $2N$ .

<sup>3</sup> Tal como se anticipó en la nota 1, para la mayoría de las estructuras convencionales las deformaciones son inferiores a 0,01, por lo que esta limitación supone una aproximación razonable que introduce errores en general inferiores al 1 %.

<sup>4</sup> Eso implica, por ejemplo, que los cálculos según el método matricial convencional sólo no serán válidos cuando los esfuerzos axiles sobre los pilares estén cercanos a la carga crítica de pandeo de los mismos.

<sup>5</sup> En esta sección usamos la ecuación de elástica para relacionar momento flector y desplazamiento vertical, ignorando la deformación por cortante que también existe, aunque en general es pequeña. Si se tiene en el desplazamiento vertical debido al cortante, las expresiones de las rigideces frente a cortante, tanto la flexional como la mixta, incluirían un factor  $\alpha$  asociado al incremento de la flecha vertical por culpa del cortante.

<sup>6</sup> En este y los siguientes capítulos, por razones didácticas, los vectores (y  $n$ -tuplas) se representan con una letra o un conjunto de letras o números entre llaves,  $\{\cdot\}$ , mientras que las matrices se escriben como una letra o un conjunto de letras o números entre corchetes,  $[\cdot]$ .

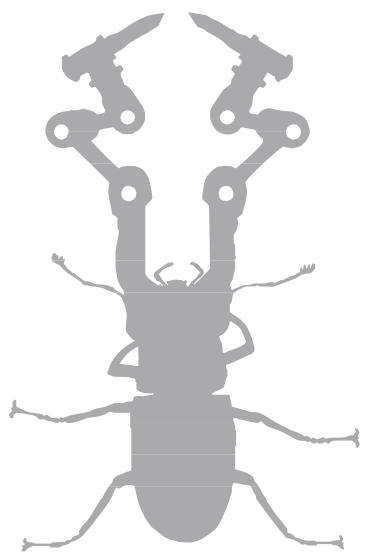
<sup>7</sup> Obsérvese que aquí se está distinguiendo la  $A$  en redonda (sin cursiva) de la  $A$  cursiva que designa el área.

<sup>8</sup> Las matrices representan las componentes de tensores de segundo orden, por lo que requieren dos productos en los que intervenga la matriz de cambio de base, ya que sus componentes  $m_{ij}$  tienen dos índices. Los vectores al tener sólo un índice  $v_i$  requieren un producto con la matriz de cambio. Los escalares al carecer de índices no requieren multiplicación alguna como se refleja en el hecho de que son invariantes. Un tensor de orden superior  $n > 2$  requerirá por tanto  $n$  productos en los que intervenga la matriz de cambio.

<sup>9</sup> Una estructura de comportamiento lineal es aquella en que los desplazamientos totales en la posición de equilibrio son funciones lineales de las fuerzas sobre la misma. Eso nos lleva a que dichas estructuras pueden ser caracterizadas por una matriz (matriz de rigidez). Si nos concentramos en los desplazamientos  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$  asociados de una serie de puntos (nudos) y consideramos sistemas de cargas en que todas las cargas  $P = (P_1, \dots, P_n)$ , el comportamiento lineal lleva a una ecuación del estilo:  $P_i = k_{i1} \delta_1 + \dots + k_{in} \delta_n = k_{ij} \cdot \delta_j$  (con convenio de sumación de Einstein). La matriz  $K = [k_{ij}]$  se llama matriz de rigidez.

<sup>10</sup> Puede probarse que los puntos de equilibrio no dependen del modo de aplicación de las cargas; las magnitudes  $\delta^{(e)}$  son funciones de estado que dependen de las fuerzas exteriores. En toda esta prueba consideraremos que las cargas se aplican cuasiestáticamente.

<sup>11</sup> En el proceso de carga,  $F(\delta) > F_{ce}(\delta)$  significa que al llegar a la posición de equilibrio se habrá realizado un trabajo mayor del estrictamente necesario para alcanzarla. Dicho exceso se presentará en forma de energía cinética, por lo que la estructura aún seguirá deformándose un poco más, hasta un punto en que las fuerzas internas superarán a las fuerzas aplicadas y, por lo tanto, habrá aceleración neta en sentido contrario, que llevará la estructura de nuevo hacia la posición de equilibrio; pero como al pasar por la posición de equilibrio la velocidad no será nula, este punto será sobrepasado de nuevo ... La repetición de este ciclo dará lugar a oscilaciones alrededor del punto de equilibrio. Un proceso similar ocurre en el punto de descarga (en principio la energía en exceso se acabará consumiendo por disipación).



→2

---



## No-linealidad geométrica (pandeo, inestabilidad elástica)

En un sólido elástico lineal, las tensiones  $\sigma_{ij}$  son proporcionales a las cargas aplicadas  $F_k$  (a causa de la forma de las ecuaciones de equilibrio) y las deformaciones  $\varepsilon_{ij}$  son proporcionales a las tensiones. Además para deformaciones pequeñas ( $|\varepsilon_{ij}| < 10^{-2}$ ), los desplazamientos ( $d_i$ ) obtenidos son también (cuasi-)proporcionales a las deformaciones. Es decir, que se tiene la siguiente serie de proporcionalidades:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(F_k, L_r) = \sum_k \alpha_{ij,k}(L_r) F_k \\ \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\sigma_{mn}) = \sum_{m,n} C_{ijmn} \sigma_{mn} \\ d_i = \sum_k \beta_{i,k}(L_r) F_k \end{cases}$$

Por tanto, en un material elástico lineal en régimen de pequeñas deformaciones los desplazamientos son una función lineal de las fuerzas. En materiales que presentan plasticidad o comportamientos reológicos<sup>12</sup> más complicados, las deformaciones no son una función lineal de las tensiones. Esta situación se denomina **no-linealidad material**. Además de esta no-linealidad material, existe la llamada no-linealidad geométrica, que describiremos a continuación.

La no-linealidad geométrica se da en situaciones de grandes deformaciones. En dichas situaciones los desplazamientos ya no serán proporcionales a las deformaciones. Además en esos casos puede pasar que el punto de aplicación de las cargas se desplace ostensiblemente bajo la acción de las fuerzas, por lo que puede que se induzcan nuevas deformaciones debidas al desplazamiento de los puntos de aplicación de las cargas. Esos nuevos desplazamientos de segundo orden, requieren recalcular los esfuerzos bajo la nueva configuración de cargas.



En general, la teoría lineal de la elasticidad desprecia esos desplazamientos secundarios o efectos de **segundo orden**; sin embargo, en ciertas situaciones con deformaciones medianas o grandes, es decir, cuando alguna de las deformaciones  $\varepsilon_{ij} \gg 10^{-2}$ , despreciar los efectos de segundo orden conduce a errores importantes en la determinación de esfuerzos. Un ejemplo de esto es el caso de piezas esbeltas que sufren pandeo. Cuando los desplazamientos secundarios y efectos de segundo orden son grandes se requiere un recálculo. A su vez, ese recálculo dará una nueva corrección para los puntos de aplicación de las cargas, y así sucesivamente. Si el proceso anterior de deformaciones de orden superior al primero es convergente, el sistema será elásticamente estable; sin embargo, en ciertas situaciones el proceso no será convergente, lo que implica que el sistema será elásticamente inestable.

Como primer ejemplo ilustrativo de no linealidad analizamos en primer lugar el pandeo de piezas prismáticas esbeltas comprimidas según su eje longitudinal, situación en la que esos efectos de segundo orden no pueden ser despreciados, a la hora de calcular las tensiones.

## 2.1. Curvatura bajo cargas axiales. Ecuación de la elástica y forma curva

En piezas prismáticas rectas, bajo la acción de fuerzas tales que sobre el eje tengamos compresiones  $\sigma_{eje} = \mathbf{n}_{eje} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{n}_{eje}) < 0$ , pueden existir fenómenos importantes de **no linealidad geométrica**. Esta no-linealidad se debe a que bajo la acción de las fuerzas el punto de aplicación de las cargas se mueve, por lo que pueden inducirse nuevas deformaciones debidas al desplazamiento de los puntos de aplicación de las cargas. En general, en la teoría lineal de la elasticidad, esos desplazamientos secundarios o efectos de **segundo orden** se desprecian, pero en ciertas situaciones —como en la situación de pandeo que describimos a continuación— esos efectos de segundo orden no pueden ser despreciados.

En tanto en cuanto  $0 > \sigma_{eje} > \sigma_0 = -P_{crit}/A$  la barra conserva la forma recta siendo su equilibrio, estable. Pero para valores de tensión tales que  $\sigma_{eje} < \sigma_0$  el equilibrio se vuelve inestable y aparece un punto de bifurcación, de tal manera que la forma de la barra adoptada pasa de la posición recta (equilibrio inestable) a otra situación en la que adopta forma curva (que sí es una posición de equilibrio estable).

Sin embargo, en esta nueva posición de equilibrio estable las tensiones crecen rápidamente y la pieza puede rebasar su límite de rotura sólo con pequeños incrementos de carga. Es por eso que la situación a partir de  $|\sigma_{eje}| > P_{crit}/A$  (donde  $P_{crit}$  es cierta carga crítica, que se estimará más adelante) puede ser muy peligrosa y pequeños incrementos de la carga pueden rebasar la resistencia del material, por lo que se daría una situación de inestabilidad elástica (que no de inestabilidad mecánica).

Una vez la pieza adopta la forma curvada a partir del punto  $|\sigma_{eje}| > P_{crit}/A$ , dicha pieza está en un estado elástico de flexión compuesta ( $N_x \neq 0, M_x \neq 0$ ), siendo el esfuerzo axial  $N_x \approx P_{crit}$  y el esfuerzo de flexión o momento flector  $M(x) \approx P_{crit}y(x)$ , dado por el esfuerzo axial multiplicado por la excentricidad o desplazamiento  $y(x)$  de cada punto de la barra respecto a la posición recta:

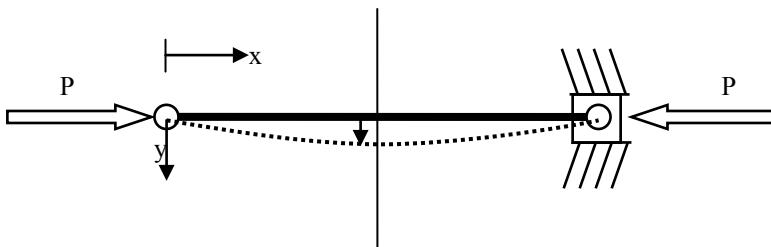


FIG. 2.1.  
Barra biarticulada  
sometida a compresión.

Si llamamos  $y(x)$  al desplazamiento respecto a la forma recta, para una barra con los enlaces exteriores como los de la figura resulta que el desplazamiento máximo se da en el centro de la misma:  $y_{\max} = y(L/2)$ . El momento máximo y la tensión que adquiere la barra en la configuración deformada vienen dadas por:

$$\begin{aligned} M_f &= P_{\text{crit}} \cdot y_{\max} \\ \sigma_{xx} &\approx \frac{P_{\text{crit}}}{A} + \frac{P_{\text{crit}} y_{\max}}{W_x} \end{aligned} \quad [2.1]$$

En la teoría de la elasticidad lineal se usa como ecuación de la elástica, es decir, como ecuación que relaciona el desplazamiento del eje de una pieza prismática recta con el momento flector, la siguiente:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_f}{EI_f} \approx \frac{d^2 y}{dx^2} \quad [2.2a]$$

Esta ecuación da una aproximación muy buena para situaciones en que  $y(x)$  es muy pequeña comparada con la longitud de la barra, es decir, cuando  $y_{\max}/L \approx 10^{-3} \ll 1$ . Sin embargo, cuando  $y_{\max}/L > 10^{-2}$ , la aproximación ya no es tan buena y en muchos casos es necesario tener en cuenta los efectos de segundo orden.

Para tener en cuenta los mencionados efectos de segundo orden deberíamos considerar, en lugar de las aproximaciones lineales de la teoría de la elasticidad lineal, las ecuaciones que relacionan las fuerzas exteriores y la deformación del eje sin despreciar ningún término. La ecuación de la elástica exacta en este caso viene dada por:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} = \frac{1}{\rho} = \frac{M_f}{EI_f} \quad [2.2b]$$

Obsérvese que la ecuación aproximada [2.2a] es una ecuación diferencial lineal y, por lo tanto, fácilmente resoluble; mientras que la ecuación exacta [2.2b] es no lineal y, por tanto, su solución no es fácil de encontrar analíticamente. Esta última es una de las razones por las cuales en general se usa [2.2a] en lugar de [2.2b] cuando ello es posible. Otro punto importante que hay que tener en cuenta es que una ecuación diferencial debe usarse junto con las condiciones de contorno adecuadas, para encontrar una solución particular.



## 2.2. Cálculo de cargas críticas

La carga crítica de pandeo es la carga por debajo de la cual la pieza prismática alcanza el equilibrio de fuerzas elásticas y fuerzas interiores, por lo que puede considerarse un valor seguro para el diseño. Por encima de la carga crítica el comportamiento es inestable y la rotura se produce con levísimos incrementos de la carga (véase el anterior ejemplo numérico 1). En esta sección examinamos barras bajo diferentes condiciones de enlace y calculamos mediante la ecuación de la elástica la carga crítica de pandeo. Los ejemplos se han ordenado por dificultad creciente.

### 2.2.1. Barra biarticulada

Las condiciones de contorno para la ecuación [2.2a] se obtienen de los enlaces con el exterior. Por ejemplo, para una barra biarticulada de sección constante en ambos extremos como la de la FIG. 2.1 las condiciones de enlace con el exterior imponen  $y(x=0) = 0$  y  $y(x=L) = 0$ , ya que en ambos extremos el desplazamiento vertical de la barra es nulo. Además, en este caso,  $M_f(x) = -Py(x)$ . Podemos ver que una solución de la ecuación [2.2a], con ese momento flector y esas condiciones de contorno, es:

$$y(x) = A \cdot \sin\left(x \sqrt{\frac{P}{EI_f}}\right) \quad [2.3]$$

Las condiciones de contorno no son idóneas,<sup>13</sup> así que la forma anterior sólo garantiza que  $y(0) = 0$ ; para que además se satisfaga que  $y(L) = 0$  debe escogerse  $P$  adecuadamente. La condición  $y(L) = 0$  sólo se satisface de manera no trivial si el argumento de la función senoidal es igual a  $n\pi$  [con  $n \in \mathbb{Z}$ ].<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} y(L) &= A \cdot \sin\left(L \sqrt{\frac{P}{EI_f}}\right) = 0 \Rightarrow \\ L \sqrt{\frac{P}{EI_f}} &= n\pi \Rightarrow P_n = \frac{n^2 \pi^2 EI_f}{L^2} \end{aligned} \quad [2.4]$$

El caso con  $n = 0$  conduce a la solución nula (barra recta), por lo que sólo merecen consideración valores con  $n^2 > 0$ . Las soluciones con  $n$  negativo son la imagen especular de las soluciones con  $n$  positivo, por lo que podemos limitarnos a valores con  $n > 0$ . Para el valor  $n = 1$  se obtiene  $P_1 = \pi^2 EI_f / L^2$ , que se llama **carga crítica de Euler** y puede probarse que corresponde a la carga a partir de la cual la forma recta es una solución inestable, así como los valores con  $n > 1$  conducen a valores de  $P$  muy por encima de esta carga crítica y, de hecho, no son físicamente alcanzables.

Hasta el momento hemos determinado que la carga crítica de una barra biarticulada de sección constante es  $P_{crit} = \pi^2 EI_f / L^2$ . Pero la solución de la ecuación aproximada [2.2a] no nos proporciona información sobre cuánto se aleja la barra de la posición recta; para eso deberíamos estudiar el comportamiento con la ecuación exacta dada por [2.2b]. La solución de esa ecuación para las condiciones de contorno  $y(0) = 0$  y  $y'(L/2) = 0$  es bastante compleja de obtener, y requiere ser expresada mediante funciones elípticas de primera especie  $F_k(\cdot)$  y segunda especie  $E_k(\cdot)$ :



$$-\frac{2\tau^2}{\sqrt{4\tau^2 - \delta^2}} F_k\left(\frac{y(x)}{\delta}\right) + \sqrt{4\tau^2 - \delta^2} E_k\left(\frac{y(x)}{\delta}\right) = x \quad [2.5a]$$

siendo:

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{EI}{P} & \delta &= y\left(\frac{L}{2}\right) & k &= \sqrt{\frac{\delta^2}{\delta^2 - 4\tau^2}} \\ F_k(\eta) &= \int_0^n \frac{du}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-k^2u^2}} & E_k(\eta) &= \int_0^n \frac{\sqrt{1-k^2u^2}}{\sqrt{1-u^2}} du \end{aligned} \quad [2.5b]$$

La solución anterior debida a Lagrange es complicada, y para las aplicaciones basta con usar el desarrollo debido a Schneider para el desplazamiento máximo  $y_{max} = y(L/2)$ , válido para cargas  $P > P_{crit}$ :

$$y_{max} = \delta = 4\sqrt{\frac{EI_f}{P}} \sqrt{\left[ \sqrt{\frac{P}{P_{crit}}} - 1 \right] - \frac{9}{4} \left[ \sqrt{\frac{P}{P_{crit}}} - 1 \right]^2 + \frac{31}{8} \left[ \sqrt{\frac{P}{P_{crit}}} - 1 \right]^3} \dots \quad [2.6a]$$

Para los cálculos que necesitamos realizar podemos usar una aproximación de la serie de potencias anterior. Si efectuamos  $P = P_{crit} + \Delta P$ , obtenemos hasta primer orden que:

$$y_{max} \approx \frac{4}{\pi} L \sqrt{\frac{\Delta P}{2P_{crit}}} \approx 0,9 \cdot L \sqrt{\frac{\Delta P}{P_{crit}}} \quad [2.6b]$$

### Ejemplo numérico 1

En este ejemplo consideraremos qué sucede con las tensiones justo después de que la carga  $P$  supere a  $P_{crit}$ . Veremos cómo un incremento insignificante de un 0,02 % por encima de la carga crítica tiene un efecto dramático en las tensiones.

Se considera un perfil normalizado HEB-140 con las siguientes características:

$$\begin{aligned} A &= 42,96 \text{ cm}^2 & I_z &= 1509 \text{ cm}^4 & I_y &= 549,7 \text{ cm}^4 & E &= 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 \\ L_{pan} &= 300 \text{ cm} & W_z &= 215,6 \text{ cm}^3 & W_y &= 78,52 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

La carga crítica  $P_{crit}$  y el incremento  $\Delta P = 0,02 \% \cdot P_{crit}$  son:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_y}{L_{pan}^2} = \frac{9,87 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 549,7}{90000} = 126591 \text{ kp} \quad P_{crit} = 0,0002 \cdot P_{crit} = 25 \text{ kp}$$

Con este valor puede calcularse sencillamente el desplazamiento máximo dado por la fórmula del desarrollo de Schneider-Lagrange, con lo que se obtiene:

$$y_{max} \approx 0,9 \cdot L \sqrt{\frac{\Delta P}{P_{crit}}} = 0,9 \cdot 300 \sqrt{0,00002} \approx 3,8 \text{ cm}$$



La fórmula [2.6b] da un resultado muy similar, pero es computacionalmente más pesada. El cálculo del momento flector inducido por el pandeo y el cálculo de la tensión máxima es:

$$\begin{aligned} M_{\max} &= P \cdot y_{\max} = 126616 \cdot 3,8 = 4811 \text{ kp}\cdot\text{m} \\ \sigma_{\max} &\approx \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{126616}{42,96} + \frac{481100}{78,52} \approx 9075 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \end{aligned}$$

Obviamente el perfil HEB-140 se habrá roto bastante antes de alcanzar dicha tensión. Aun así, podemos establecer una comparación.

### Ejemplo numérico 2

Dimensionado según el método omega ( $\omega$ ) de un pilar compuesto de acero A-37b (o S 235 JR según EN-UNE-10025/94 con  $\sigma_{adm} = 2400 \text{ kp}\cdot\text{cm}^{-2}$ ) para soportar una carga  $P_d = 150000 \text{ kp}$ , con una altura de pandeo de 6,00 m. Para la sección transversal se eligen dos perfiles en U en disposición de cajón.

En el método omega la tensión  $\sigma$  de una pieza prismática sometida a un axil  $P_d$  de compresión se corrige en un factor multiplicativo  $\omega$ , es decir,  $\sigma = \omega \cdot N/A$ , en la que este parámetro  $\omega$  es a su vez función de  $\lambda$ : esbeltez  $= (I_{min}/A)^{1/2}$ , donde  $I_{min}$  es el momento de inercia mínimo de la sección y  $A$  el área de la sección. Así, el valor de  $\omega$  no es conocido hasta conocer un valor de  $A$ , ni el valor de  $A$  es conocido hasta conocer un valor de  $\omega$ . Esta circularidad se resuelve mediante el predimensionando: se da un valor tentativo a  $A$ , y a continuación se hacen iteraciones para ajustar los valores de  $\omega$  y de  $A$ .

0) Empecemos tomando por ejemplo 2 UPN 220 soldados por las alas. Esto nos da las siguientes características mecánicas:

$$\begin{array}{llll} A = 74,80 \text{ cm}^2 & I_z = 5380 \text{ cm}^4 & i_z = 8,48 \text{ cm} & W_z = 490 \text{ cm}^3 \\ L_{pan} = 600 \text{ cm} & I_y = 2960 \text{ cm}^4 & i_y = 6,29 \text{ cm} & W_y = 370 \text{ cm}^3 \end{array}$$

Por tanto,  $i_{min} = i_y = 6,29 \text{ cm}$  lo que da un valor de la esbeltez  $\lambda = 600/6,29 \approx 95$ , que para un acero A-37b, conduce a una  $\omega = 1,78$ .<sup>15</sup> Esto da una tensión:

$$\sigma_{\max} = \omega \frac{P}{A} = 1,78 \frac{150000}{74,80} \approx 3569 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} > \sigma_{adm}$$

1) Puesto que  $\sigma_{\max} > \sigma_{adm}$ , es necesario ensayar con otra sección mayor. Por ejemplo, tomando 2 UPN 280 se tiene:

$$\begin{array}{llll} A = 107 \text{ cm}^2 & I_z = 12560 \text{ cm}^4 & i_z = 10,9 \text{ cm} & W_z = 896 \text{ cm}^3 \\ L_{pan} = 600 \text{ cm} & I_y = 5980 \text{ cm}^4 & i_y = 7,49 \text{ cm} & W_y = 629 \text{ cm}^3 \end{array}$$

Por tanto,  $i_{min} = i_y = 7,49 \text{ cm}$  lo que da un valor de la esbeltez  $\lambda = 600/7,49 \approx 80$  y un coeficiente  $\omega = 1,45$ . La tensión queda como:



$$\sigma_{\max} = \omega \frac{P}{A} = 1,45 \frac{150000}{107} \approx 2032 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} < \sigma_{adm}$$

2) Como ahora que  $\sigma_{\max} < \sigma_{adm}$  podríamos ensayar con algún perfil menor para tratar de optimizar la cantidad de acero, no es difícil ver que la sección óptima con perfiles UPN en cajón está formada por 2 UPN 260, lo cual da una tensión  $\sigma_{\max} = 2391 \text{ kp/cm}^2$ .

### 2.2.2. Barra empotrada por un extremo y libre en el otro

Las condiciones de contorno adecuadas para la ecuación [2.2] en el caso de una barra empotrada por un extremo y libre en el otro son las siguientes:



$$\begin{aligned} y(0) &= 0 & y'(0) &= 0 \\ y(L) &= -\delta & y'(L) &= -\theta \end{aligned}$$

Fig. 2.2.  
Deformada de barra  
empotrada-libre.

Además, debido al desplazamiento de la carga, aparece un momento de empotramiento adicional debido a dicha excentricidad  $M_f = -P \cdot \delta$ . Tomando dos de las condiciones de desplazamiento la ecuación de la elástica es de hecho una ecuación lineal inhomogénea:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py}{EI_f} = -\frac{P\delta}{EI_f} \quad \begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(L) = -\delta \end{cases} \quad [2.7]$$

Con las condiciones de contorno impuestas, la ecuación [2.6] tiene una solución del tipo:

$$y(x) = \delta + A \cdot \cos\left(x \sqrt{\frac{P}{EI_f}}\right) + B \cdot \sin\left(x \sqrt{\frac{P}{EI_f}}\right) \quad [2.8]$$

Si se impone la primera de las condiciones  $y'(0) = 0$ , se llega a que  $B = 0$ . Para encontrar la relación entre el desplazamiento vertical  $\delta$  y  $A$  se necesita una condición adicional, por ejemplo la condición no usada  $y(0) = 0$ :

$$y(0) = \delta + A \cdot \cos\left(0 \sqrt{\frac{P}{EI_f}}\right) = 0 \Rightarrow y(x) = \delta \left[ \cos\left(x \sqrt{\frac{P}{EI_f}}\right) - 1 \right] \quad [2.9]$$

Las condiciones de contorno son degeneradas, así que la forma anterior sólo garantiza que  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$ . Para que además se satisfaga que  $y(L) = -\delta$  debe escogerse  $P$  adecuadamente. La condición de que  $y(L) = 0$  sólo se satisface si el argumento de la función senoidal es igual a  $n\pi$  [ $n \in \mathbb{Z}$ ]:



$$y(L) = \delta \left[ \cos \left( L \sqrt{\frac{P}{EI_f}} \right) - 1 \right] = -\delta \Rightarrow \cos \left( L \sqrt{\frac{P}{EI_f}} \right) = 0 \Rightarrow [2.10]$$

$$L \sqrt{\frac{P}{EI_f}} = (2n-1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2 EI_f}{(2L)^2}$$

Por las mismas razones que se daban en la sección anterior las soluciones con  $n$  negativo no tienen que ser consideradas, mientras que las soluciones con  $n = 0$  y  $n = 1$  son de hecho una imagen especular de la otra y conducen a la misma carga crítica. Con  $n = 1$ , que da el menor valor positivo, se obtiene la carga crítica  $P_{crit} = \pi^2 EI_f / (2L)^2$  (nuevamente los valores con  $n > 1$  no son soluciones alcanzables). Puede verse que la carga crítica coincide ahora con la de una barra biarticulada de idéntico momento de inercia pero longitud doble.

Es por eso que para barras de sección constante definimos un parámetro llamado longitud de pandeo  $L_p$ . La **longitud de pandeo** para una barra de sección constante es la longitud hipotética ( $L_p$ ) que tendría que tener una barra biarticulada de idéntica sección ( $I_f$ ) y mismo material ( $E$ ) que la original y que tuviera una carga crítica ( $P_{crit}$ ) del mismo valor que la barra original,<sup>16</sup> es decir,  $L_p = (\pi EI_f / P_{crit})^2$ . Como acabamos de ver, una barra empotrada en un extremo y con el otro libre tiene una longitud de pandeo  $L_p = 2L$ , donde  $L$  es la longitud de natural de la barra.

### 2.2.3. Barra biempotrada

En este caso el problema del momento flector viene dado por la función de la flecha  $y(x)$  y el momento de empotramiento  $M_{emp}$ , por  $M_z(x) = -Py + M_{emp}$ , que unido a las condiciones de empotramiento en los extremos nos da:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py}{EI_f} = M_{emp} \quad \begin{cases} y'(x=0) = 0 \\ y'(x=L) = 0 \end{cases} [2.11]$$

La solución del anterior sistema es del tipo:

$$y(x) = \frac{M_{emp}}{P} + A \cdot \cos \left( x \sqrt{\frac{P}{EI_f}} \right) + B \cdot \sin \left( x \sqrt{\frac{P}{EI_f}} \right) [2.12]$$

Si se imponen la condición  $y'(0) = 0$  y la condición suplementaria  $y(0) = 0$ , se tiene una solución como la del caso anterior:

$$y(x) = \frac{M_{emp}}{P} \left[ \cos \left( x \sqrt{\frac{P}{EI_f}} \right) - 1 \right] [2.13]$$

Nuevamente la última condición  $y'(L) = 0$  sólo se cumple para algunos valores de  $P$ :

$$y'(L) = -\frac{M_{emp}}{P} \sin\left(L \sqrt{\frac{P}{EI_f}}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(L \sqrt{\frac{P}{EI_f}}\right) = 0 \Rightarrow [2.14]$$

$$L \sqrt{\frac{P}{EI_f}} = 2n\pi \Rightarrow P_n = \frac{(2n)^2 \pi^2 EI_f}{L^2} = \frac{n^2 \pi^2 EI_f}{(L/2)^2}$$

Por las mismas razones que antes, la solución con carga crítica mínima que reproduce las condiciones buscadas se encuentra con  $n = 1$ , para la que se obtiene la carga crítica  $P_{crit} = \pi^2 EI_f / (L/2)^2$  (nuevamente los valores con  $n > 1$  no son soluciones alcanzables). Puede verse que la carga crítica ahora corresponde a la de una barra biarticulada de idéntico momento de inercia pero de una longitud que es la mitad, por eso  $L_p = L/2$ .

#### 2.2.4. Barra empotrada-articulada

Éste es el más complicado de los casos elementales, debido a la existencia de reacciones hiperestáticas de valor desconocido. En el empotramiento existe un momento  $M_e$  y una reacción perpendicular a la viga  $R_e$  de valor desconocido; sin embargo, debido a que existe equilibrio de momentos, guardan la relación:

$$-R_e L + M_e = 0 \quad [2.15]$$

donde  $L$  es la longitud total de la barra. La figura FIG. 2.3 muestra un esquema de las fuerzas involucradas. El diagrama de momentos flectores viene dado por  $M_z(x) = M_e - R_e x = R_e(L-x)$ , con lo cual la ecuación diferencial que debe integrarse es:

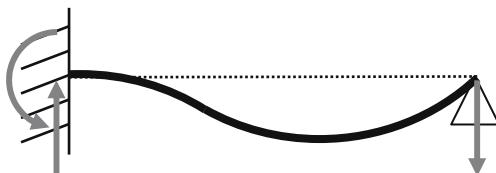


FIG. 2.3.  
Deformada de barra  
empotrada-articulada.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{Py}{EI_f} = \frac{R_e}{EI_f}(L-x) \quad [2.16]$$

$$y(0) = 0 \quad [C_1] \quad y'(0) = 0 \quad [C_2] \quad y(L) = 0$$

La solución de esta ecuación diferencial con las condiciones  $[C_1] - [C_2]$  viene dada por:

$$y(x) = \frac{R_e}{P} \left[ \left( \frac{EI_f}{P} \right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(x \sqrt{\frac{P}{EI_f}}\right) - L \cos\left(x \sqrt{\frac{P}{EI_f}}\right) + (L-x) \right] \quad [2.17]$$

Si utilizamos ahora la condición  $y(L) = 0$ , se llega a una ecuación trascendente cuya solución sólo puede calcularse numéricamente. Usando la abreviación  $\omega^2 = P/EI_f$ , la ecuación que debe resolverse numéricamente tiene la forma:

$$y(L) = \frac{R_e L}{P} \left[ \frac{\sin(\omega L)}{\omega L} - \cos(\omega L) \right] = 0 \quad \left( \text{con } \omega^2 = \frac{P}{EI_f} \right) \Rightarrow \tan(\omega L) = \omega L \quad [2.18]$$



Las soluciones no triviales de la anterior ecuación son:

$$\omega L = \pm 4,493409, \pm 7,725252, \pm 10,90412 \dots$$

De la menor de todas ellas se deduce la carga crítica:

$$P_1 = 4,4934^2 \frac{EI_f}{L^2} = \frac{\pi^2 EI_f}{(0,69915L)^2} \quad [2.19]$$

A efectos prácticos la longitud de pandeo se toma como  $L_p \approx 0,70 \cdot L$ .

### 2.2.5. Barra elástica en el caso general

En el caso general de pandeo intraslacional de una barra recta de sección constante, no se tienen empotramientos perfectos ( $\theta_i = 0$ ) ni articulaciones perfectas ( $M_i = 0$ ), sino que cada extremo de la barra está unido a otras barras con cierta flexibilidad. Esto equivale a que en cada extremo supongamos existente un apoyo elástico caracterizado por un coeficiente de empotramiento  $k_i$ , que aunque permite el giro no permitirá los desplazamientos, de tal manera que se cumplirá que el giro  $\theta_i$  y el momento  $M_i$  estarán relacionados por  $M_i = k_i\theta_i$ . En los extremos en general aparecerán tanto momentos de empotramiento como reacciones. El equilibrio de momentos y fuerzas requerirá:

$$\begin{aligned} -R_B L + M_A + M_B &= -RL + k_A q_A + k_B q_B = 0 \\ R_B &= R, \quad R_A = -R \end{aligned} \quad [2.20]$$

En estas condiciones la ecuación para determinar la carga crítica de una barra de longitud  $L$  y con coeficientes de empotramiento en los extremos  $k_A$  y  $k_B$  vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P_{cr}y}{EI_f} &= \frac{k_A\theta_A - Rx}{EI_f} \Rightarrow \\ \begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = \left[ \kappa_A + \rho \frac{x}{L} \right] \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = \theta_A \end{cases} & \quad [2.21] \end{aligned}$$

donde se han introducido las siguientes notaciones:

$$\omega^2 = \frac{P_{cr}}{EI}, \quad \kappa_A = \frac{k_A}{EI_f}, \quad \rho = \frac{RL}{EI_f} \quad [2.22]$$

La solución de la ecuación [2.21] teniendo en cuenta los resultados de [2.20] es simplemente:

$$y(x) = \frac{\theta_A \omega^2 L + \kappa_A \theta_A + \kappa_B \theta_B}{\omega^3 L} \sin(\omega x) - \frac{\kappa_A \theta_A}{\omega^2} \cos(\omega x) + \frac{\kappa_A \theta_A L - (\kappa_A \theta_A + \kappa_B \theta_B)x}{\omega^2 L} \quad [2.23]$$



Ahora imponemos  $y'(L) = \theta_B$ , lo cual permite expresar el desplazamiento como función de un único parámetro, el giro  $\theta_A$ :

$$\theta_B = \frac{\theta_A}{\omega^2 L + \kappa_B (1 - \cos(\omega L))} \left[ \kappa_A \omega L \sin(\omega x) + (\kappa_A + \omega^2 L) \cos(\omega x) - \kappa_A \right] \quad [2.24]$$

Si sustituimos este resultado en [2.23], imponemos que  $y(L) = 0$ , hacemos el cambio  $\eta := \omega L$  y reordenamos, llegamos a la ecuación:

$$(\kappa_A + \kappa_B - \kappa_A \kappa_B + \eta^2) \eta \sin \eta + ((\kappa_A + \kappa_B) \eta^2 - 2\kappa_A \kappa_B) \cos \eta + 2\kappa_A \kappa_B = 0 \quad [2.25]$$

donde se ha introducido el parámetro  $\eta = \omega L$ . Esta última es una ecuación que, una vez conocidos los coeficientes de empotramiento  $\kappa_A$  y  $\kappa_B$ , puede resolverse numéricamente.

Obviamente la solución  $\eta = 0$ , que corresponde a  $P = 0$  representa la forma recta antes del pandeo, y la menor de las raíces positivas de la ecuación anterior  $\eta = \eta_0$  permite encontrar la longitud de pandeo ( $L_p$ ) y la carga crítica ( $P_{crit}$ ):

$$L_p = \frac{\pi}{\eta_0} L, \quad P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_f}{L_p^2} = \frac{\eta_0^2 EI_f}{L^2} \quad [2.26]$$

A continuación pasamos a explicar el cálculo de coeficientes de empotramiento. Puede hacerse, por ejemplo, si se ha realizado algún tipo de cálculo elástico lineal que involucre a la barra cuyo pandeo quiere calcularse. Frecuentemente en el cálculo por ordenador se presenta el caso de la longitud de pandeo de una barra entre los nudos A y B para la cual se conocen:

- los momentos flectores en los extremos  $M_A$  y  $M_B$  en el plano de pandeo
- los giros  $\theta_A$  y  $\theta_B$  en el plano de pandeo
- los desplazamientos perpendiculares al eje original de la barra  $\delta_A$  y  $\delta_B$
- la longitud  $L$  de la barra y su momento de inercia  $I_f$  en el plano de pandeo y el módulo de Young del material  $E$ .

A partir de todos esos datos los coeficientes de empotramiento adimensionales pueden calcularse simplemente mediante las siguientes fórmulas:

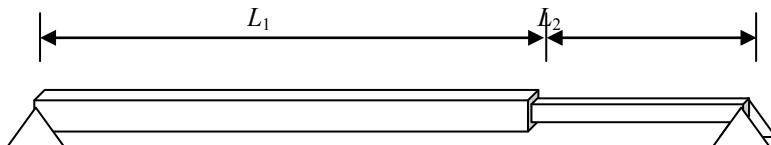
$$\begin{cases} \kappa_A = \frac{1}{\theta_A} \left( \frac{M_A L}{EI_f} - 4\theta_A - 2\theta_B - 6 \frac{\delta_A - \delta_B}{L} \right) \\ \kappa_B = \frac{1}{\theta_B} \left( \frac{M_B L}{EI_f} - 4\theta_B - 2\theta_A - 6 \frac{\delta_A - \delta_B}{L} \right) \end{cases} \quad [2.27]$$



### 2.2.6. Piezas de sección no constante

Evaluaremos el ejemplo numérico de una pieza de sección no constante como la de la figura:

FIG. 2.4.  
Barra biarticulada de  
sección no constante



Si consideramos la barra anterior articulada en ambos extremos se convierte en una barra biarticulada por ambos extremos. En estas condiciones podemos plantear el problema de Euler similar al problema [2.2a] con condiciones de contorno adecuadas:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py}{EI(x)} = 0 \quad I(x) = \begin{cases} I_1 & 0 \leq x \leq L_1 \\ I_2 & L_1 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 & [C.1] \\ y(L) = 0 & [C.2] \\ y(L^-) = y(L^+) & [C.3] \\ \frac{dy(L^-)}{dx} = \frac{dy(L^+)}{dx} & [C.4] \end{cases} \quad [2.28]$$

Las condiciones [C.3] y [C.4] son nuevas y su interpretación física es que bajo las deformaciones el eje de la barra se deforma en una curva continua y diferenciable (*i. e.*, la ecuación de la elástica es diferenciable). La solución no es difícil de obtener si se calcula tramo a tramo la solución y se escogen las constantes de integración para garantizar [C.3] y [C.4]. La solución de este sistema es del tipo:

$$y(x) = \begin{cases} C_1 \sin(\omega_1 x) + C_2 \cos(\omega_1 x) & 0 \leq x \leq L_1 \\ C_3 \sin(\omega_2 x) + C_4 \cos(\omega_2 x) & L_1 \leq x \leq L \end{cases} \quad [2.29]$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{P}{EI_1}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{P}{EI_2}}$$

Si imponemos previamente a las soluciones del tipo anterior [C.1] y [C.2] obtenemos fácilmente que:

$$\begin{aligned} [C.1] \Rightarrow C_2 &= 0 \\ [C.2] \Rightarrow C_3 \sin(\omega_2 L) + C_4 \cos(\omega_2 L) &= 0 \\ \Rightarrow C_4 &= -C_3 \operatorname{tg}(\omega_2 L) \end{aligned} \quad [2.30a]$$

Si ahora aplicamos las condiciones de continuidad [C.3] y [C.4] de la deformada en el punto en que la barra cambia de sección, llegamos al siguiente sistema y substituimos el resultado de [C.1] y [C.2]:



$$[C.3] \Rightarrow \frac{C_1}{C_3} \sin(\omega_1 L_1) = \sin(\omega_2 L_1) - \tan(\omega_2 L) \cos(\omega_2 L_1) \quad [2.30b]$$

$$[C.4] \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{C_1}{C_3} \cos(\omega_1 L_1) = \cos(\omega_2 L_1) + \tan(\omega_2 L) \sin(\omega_2 L_1)$$

Al dividir la primera de estas ecuaciones entre la segunda y dividir también numerador y denominador del segundo miembro por  $\cos(\omega_2 L_1)$  se llega a que:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \tan(\omega_1 L_1) = \frac{\tan(\omega_2 L_1) - \tan(\omega_2 L)}{1 + \tan(\omega_2 L) \tan(\omega_2 L_1)} \Rightarrow \frac{\tan(\omega_1 L_1)}{\omega_1} = -\frac{\tan(\omega_2 L_2)}{\omega_2} \quad [2.31]$$

Dado que  $\omega_1 = (P/EI_1)^{1/2}$  y  $\omega_2 = (P/EI_2)^{1/2}$  los valores de  $P$  que hacen que se satisfaga la ecuación anterior son los que garantizan la continuidad; de todos los valores de  $P$  el menor de ellos es el que proporciona la **carga crítica** de la barra  $P_{2,cri}< P^*(L_1, L_2) < P_{1,cri}$ .

### Ejemplo numérico 3

Calcular la carga crítica de una barra con dos tramos de sección diferente a partir de los siguientes datos:

$$\begin{array}{lll} L_1 = 3,00 \text{ m} & a_1 = 4,0 \text{ cm} & I_1 = 21,33 \text{ cm}^4 \\ L_2 = 1,00 \text{ m} & a_2 = 2,0 \text{ cm} & I_2 = 1,33 \text{ cm}^4 \end{array} \quad E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp}$$

Puesto que la ecuación para la carga crítica  $\tan(\omega_1(P^*)L_1)/\omega_1(P^*) = -\tan(\omega_2(P^*)L_2)/\omega_2(P^*)$  no se puede calcular analíticamente, podemos estimar numéricamente la solución con suficiente precisión. En la siguiente gráfica se representan ambas funciones y se muestra el punto de corte:

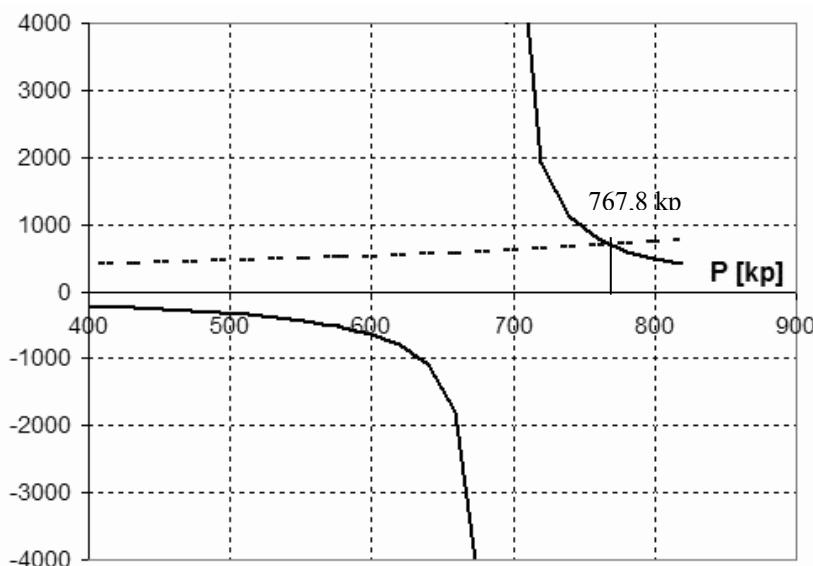


FIG. 2.5.  
Representación gráfica  
para encontrar la carga  
crítica.



Numéricamente es sencillo calcular que la carga crítica, que coincide con el valor en que ambas curvas intersectan es  $P_{crit} = 767,76$  kp.

Esta carga crítica es intermedia entre la carga crítica de Euler  $P_{1,crit}$  de una sección con la misma longitud total pero momento de inercia uniforme  $I = I_1$ ; la carga crítica  $P_{2,crit}$  de una sección con la misma longitud total pero momento de inercia uniforme  $I = I_2$ , y la carga de otras dos piezas de sección uniforme (una en que su momento de inercia es el promedio aritmético y otra en que se toma la media geométrica de los momentos de inercia):

TABLA 2.1.  
Comparación de diversas vigas de sección constante.

Tipo de sección cuadrada	Carga crítica	Lado de la sección cuadrada equivalente
Sección uniforme con $I = 21,33 \text{ cm}^4$	2736 kp	4,00 cm
Sección uniforme con $I = (I_1 L_1 + I_2 L_2) / (L_1 + L_2)$	2116 kp	3,74 cm
Sección uniforme con $I = (I_1^{L_1} I_2^{L_2})^{1/(L_1+L_2)}$	1382 kp	3,36 cm
Sección no uniforme estudiada	768 kp	variable
Sección uniforme con $I = (I_1 I_2)^{1/2}$	690 kp	2,82 cm
Sección uniforme con $I = 1,33 \text{ cm}^4$	172 kp	2,00 cm

Para averiguar qué inercia debería tener una pieza de sección uniforme con idéntica carga crítica que la pieza estudiada:  $\pi^2 E I_{eq}/L^2 = 768$  kp, que nos da  $I_{eq} = 5,93 \text{ cm}^4$  (es decir, una sección cuadrada de lado  $a = 2,9$  cm).

### 2.2.7. Longitud de pandeo en normas: MV-103, EA, CTE y Eurocódigo

En una estructura de pórticos ortogonales, como por ejemplo una nave industrial típica, existe un método aproximado para calcular la longitud de pandeo a partir de los coeficientes de empotramiento o sujeción de cada tramo vertical de pilar. El coeficiente de empotramiento en un extremo de un pilar se determina a partir de las rigideces de flexión de los elementos lineales (vigas y pilares) que concurren en dicho extremo. Éste es el método que se seguía en la antigua NBE-EA-95<sup>17</sup> y en el CTE<sup>18</sup> actualmente está en vigor.

a) La norma MV-103/1972<sup>19</sup> y posteriormente la fórmula la NBE-EA-95 contenían fórmulas de cálculo aproximado para longitudes de pandeo de pilares en estructuras porticadas. Estas normas a su vez se basaban en la Instrucción Francesa. Para usarlas se calculan longitudes de pandeo para cada plano de pandeo posible; una vez fijado ese plano se determina el grado de empotramiento  $k_i$  para cada uno de los dos extremos del pilar mediante las siguientes fórmulas, que involucran las rigideces flexionales  $K_j$ :



$$k_i = \frac{(K_{V,izq}) + (K_{V,der})}{K_p + (K_{P,s/i}) + (K_{V,izq}) + (K_{V,der})} = \frac{\left(\frac{I_{V,izq}}{L_{V,izq}}\right) + \left(\frac{I_{V,der}}{L_{V,der}}\right)}{\frac{I_p}{L_p} + \left(\frac{I_{P,s/i}}{L_{P,s/i}}\right) + \left(\frac{I_{V,izq}}{L_{V,izq}}\right) + \left(\frac{I_{V,der}}{L_{V,der}}\right)} \leq 1 \quad [2.32a]$$

donde un término entre paréntesis puede o no aparecer y el resto de símbolos son:

- |                        |   |
|------------------------|---|
| $I_p, L_p$             | Es el momento y la longitud del pilar cuya longitud de pandeo se quiere calcular.   |
| $I_{V,izq}, L_{V,izq}$ | Es el momento y la longitud de la viga (si existe) situada a la izquierda si está unida rígidamente.                        |
| $I_{V,der}, L_{V,der}$ | Es el momento y la longitud de la viga (si existe) situada a la derecha si está unida rígidamente.                          |
| $I_{P,s/i}, L_{P,s/i}$ | Es el momento y la longitud del pilar (si existe) situado por encima o por debajo del nudo calculado si la unión es rígida. |

Una vez calculado un coeficiente para el extremo superior ( $k_1$ ) y otro para extremo inferior ( $k_2$ ), a partir de ellos se evalúa el coeficiente  $\beta$  que da la relación con la longitud de pandeo:

$$\beta(k_1, k_2) = \begin{cases} \frac{3 - 1,6(k_1 + k_2) + 0,84k_1k_2}{3 - (k_1 + k_2) + 0,28k_1k_2} & \text{(intraslacional)} \\ \sqrt{\frac{1,6 + 2,4(k_1 + k_2) + 1,1k_1k_2}{(k_1 + k_2) + 5,5k_1k_2}} & \text{(traslacional)} \end{cases} \quad [2.32b]$$

Si los nudos no son rígidos, entonces se toma simplemente  $\beta = 1$ ; si en un nudo  $i$  existe un empotramiento, entonces  $k_i = 1$ . En una estructura intraslacional de nudos rígidos resulta para todos los nudos  $\beta \leq 1$ , mientras que en una estructura translacional resulta  $\beta \geq 1$ .

b) El CTE propone unas fórmulas similares, aunque usa el grado de empotramiento complementario ( $\eta_i = 1 - k_i$ ), es decir:

$$\eta_i = \frac{K_p + (K_{P,s/i})}{K_p + (K_{P,s/i}) + (K_{V,izq}) + (K_{V,der})} = \frac{\frac{I_p}{L_p} + \left(\frac{I_{P,s/i}}{L_{P,s/i}}\right)}{\frac{I_p}{L_p} + \left(\frac{I_{P,s/i}}{L_{P,s/i}}\right) + \left(\frac{I_{V,izq}}{L_{V,izq}}\right) + \left(\frac{I_{V,der}}{L_{V,der}}\right)} \leq 1 \quad [2.33a]$$

donde las magnitudes se definen del mismo modo que en las fórmulas anteriores de la NBE EA-95. Debe tenerse en cuenta además que si nudo  $i$  es empotrado entonces  $\eta_i = 0$ . A partir de estos valores y en consonancia con el cambio en la definición de los coeficientes de empotramiento básicos, se usan para el coeficiente  $\beta$  las siguientes definiciones:



$$\beta(\eta_1, \eta_2) = \begin{cases} \frac{1 - 0,145(\eta_1 + \eta_2) - 0,265\eta_1\eta_2}{2 - 0,364(\eta_1 + \eta_2) - 0,247\eta_1\eta_2} \leq 1 & \text{(intraslacional)} \\ \sqrt{\frac{1 - 0,2(\eta_1 + \eta_2) - 0,12\eta_1\eta_2}{1 - 0,8(\eta_1 + \eta_2) + 0,6\eta_1\eta_2}} \geq 1 & \text{(traslacional)} \end{cases} \quad [2.33b]$$

### 2.3. Cálculo de tensiones según el Eurocódigo y el CTE

La existencia de pandeo reduce el axil máximo resistido,<sup>20</sup>  $N_{b,Rd}$ , por una barra recta a un valor inferior al de la resistencia plástica bruta,  $N_{pl,Rd}$  (dados por el área bruta y la tensión,  $N_{pl,Rd} = Af_y$ ). De acuerdo con el método de cálculo del Eurocódigo y el CTE el axil resistido realmente y el axil teóricamente resistible en ausencia de pandeo están relacionados por el coeficiente  $\chi$ .<sup>21</sup>

$$N_{b,Rd} = \begin{cases} \chi Af_{yd} & \text{[ST de clases 1, 2 o 3]} \\ \chi A_{eff} f_{yd} & \text{[ST de clase 4]} \end{cases} \quad [2.34]$$

donde  $f_{yd} = f_y/\gamma_{M1}$  (CTE SE-A, 2.3.3) y el coeficiente  $\chi$  corresponde a una de las curvas ECCS (tipos  $a_0, a, b, c, d$ ) originalmente basadas en resultados estadísticos sobre la base de más de mil ensayos sobre piezas de esbeltez mecánica comprendida entre 55 y 160 y diferentes formas de la sección. Finalmente la clase de la sección transversal (ST) viene dada en la TABLA 5.1 (véase CTE SE-A, 5.2.4) en función de las características de ésta:

- *Clase 1. Plástica.* Permite la formación de la rótula plástica con la capacidad de rotación suficiente para la redistribución de momentos.
- *Clase 2. Compacta.* Permite el desarrollo del momento plástico con una capacidad de rotación limitada.
- *Clase 3. Semicompacta o elástica.* En la fibra más comprimida se puede alcanzar el límite elástico del acero, pero la abolladura impide el desarrollo del momento plástico.
- *Clase 4. Esbelta.* Los elementos total o parcialmente comprimidos de las secciones esbeltas se abullan antes de alcanzar el límite elástico en la fibra más comprimida.

Los perfiles laminados generalmente pertenecen a las clases 1, 2 o 3, y el afinamiento concreto se lleva a cabo examinando el fallo de abolladura bajo cargas concentradas sobre el alma o las alas.

Desde el punto de vista teórico los resultados estadísticos pueden explicarse a partir de las fórmulas de Engesser (véase sección 2.4), que parten de la base de que cerca del límite resistente el lado más comprimido del perfil sufre un reblandecimiento anelástico (*softening*) redistribuyéndose los esfuerzos hacia el lado no reblandecido. El reblandecimiento equivale a una disminución de la resistencia de la sección transversal. El fallo por *softening* se conoce como *pandeo inelástico*. Para piezas muy esbeltas los



fenómenos de *softening* pueden despreciarse y el fallo queda explicado mediante la teoría de Euler, también llamada *pandeo elástico*. Pueden establecerse varios límites:

- *Fallo plástico por exceso de compresión de la sección transversal*, se presenta en piezas de pequeña esbeltez que no superan la esbeltez límite:<sup>22</sup>  $\lambda < \lambda_1$ .
- *Pandeo inelástico*, se presenta para piezas de esbeltez media:<sup>23</sup>  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_{in}$ .
- *Pandeo elástico*, se presenta para piezas de gran esbeltez, donde  $\lambda > \lambda_{in}$ .

### 2.3.1. Cálculo del pandeo flexional

El pandeo convencional o pandeo flexional se produce en barras esbeltas sometidas a compresión. Además de compresión se desarrolla, de acuerdo con la teoría de Euler, una flexión (de ahí el nombre de pandeo flexional) que aumenta la tensión sobre la sección transversal. El Eurocódigo y el CTE proponen un método basado en el cálculo de esbelteces flexionales a partir de las cuales puede encontrarse el coeficiente de reducción  $\chi$ . Los pasos que hay que seguir son:

- 1) Se procede al cálculo de la esbeltez mecánica flexional  $\lambda_b$  y la esbeltez reducida  $\bar{\lambda}$  dadas ambas por:<sup>24</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_b = \frac{L_k}{i_m} \\ \bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A_d f_y}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{A_d f_y}{(\pi/L_k)^2 EI_m}} = \frac{L_k/i_m}{\pi\sqrt{E/f_y}} = \frac{\lambda_b}{\lambda_1} = \frac{f_{yb}}{\sigma_{cr}} \end{array} \right. \quad [2.35]$$

donde  $A_d$  es  $A$  o  $A_{eff}$  según la clase de la sección transversal (véase la sección anterior),  $f_y$  el límite elástico del acero,  $L_k$  la longitud de pandeo,  $E$  el módulo de Young del acero,  $I_m$  e  $i_m$  el momento y radio de giro mínimos y  $\lambda_1$  la esbeltez límite (en la norma EAE se llama  $\lambda_E$ ).

- 2) Se determina el coeficiente de imperfección  $\alpha$  dado por la curva ECSS de pandeo ( $a_0$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  o  $d$ ) según el tipo de sección de acuerdo con el CTE. La curva de pandeo correspondiente a cada perfil viene dada en la tabla 6.2 del CTE (véase CTE SE-A, 6.3.2.1). De acuerdo con dicha tabla el parámetro  $\alpha$  depende de si se trata de un perfil armado, laminado o compuesto y, en algunos casos, de los espesores de las piezas. Los valores de  $\alpha$  son:

TABLA 2.2.  
Coeficientes de  
imperfección según el  
CTE.

	<b>a<sub>0</sub></b>	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>
Coeficiente imperfección ( $\alpha$ )	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

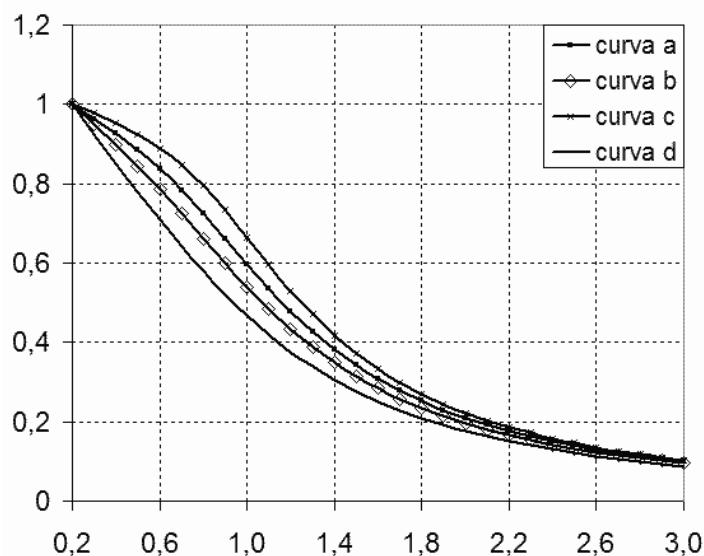
- 3) Se determinan el parámetro  $\phi$  y el parámetro de reducción<sup>25</sup>  $\chi$  mediante:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right] \\ \chi &= \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \end{aligned} \quad [2.36]$$



Las curvas ECSS de pandeo para los diferentes valores de  $\alpha$  son:

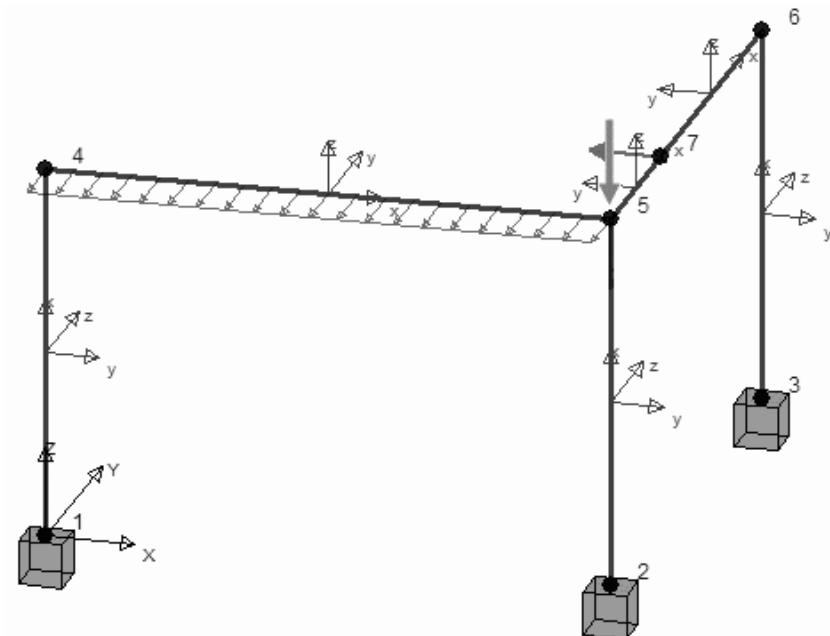
Fig. 2.6.  
Curvas ECSS de  
pandeo de acuerdo con  
el CTE.



#### Ejemplo numérico 4

Comprobación de un pilar según el CTE. Un pilar esquinero de sección HEB-100 está sobre la línea donde se encuentran dos pórticos rectangulares idénticos formados por dos vigas horizontales IPE-100 de longitud  $L_v = 4,50$  m. La altura de todos los pilares es de  $L_p = 3,0$  m, y las cargas mostradas en la figura son:

Fig. 2.7.  
Esquema de la  
estructura de ejemplo.





$$\begin{aligned} I_p &= 167 \text{ cm}^4 & I_v &= 171 \text{ cm}^4 \\ F_h &= 1 \text{ kN (nudo 7)} & F_v &= 60 \text{ kN (nudo 5)} & q_{hd} &= 225 \text{ N/m (4-5)} \end{aligned}$$

- 0) *Determinación de la longitud de pandeo.* Para determinarla se examinarán las fórmulas aproximadas de pórticos (recogidas por ejemplo en MV-103/1972), las fórmulas EA-95 y las fórmulas CTE.

a) *Fórmulas de pórticos MV-103/1972.* Se calculan las magnitudes  $m$ ,  $c$  y  $s$  (que deben estar dentro de un rango de valores dado por  $m \leq 1$ ,  $c \leq 10$ ,  $s \leq 0,2$  para poder usar fórmulas), que vienen dadas por:

$$m = \frac{P_1}{P} = 0 \quad c = \frac{K_p}{K_v} = \frac{4EI_p/L_p}{4EI_v/L_v} = 1,465 \quad s = \frac{4}{L_v^2} \left( \frac{I_p}{A_p} \right) = 1,27 \cdot 10^{-4}$$

A partir de esos valores, se determina el coeficiente  $\beta$  que da la longitud de pandeo:

$$\beta = \sqrt{0,5(1+m)} \cdot \sqrt{1+0,35(c+6s)-0,017(c+6s)^2} \approx 0,86 \quad L_{pan} = \beta L_p \approx 2,58 \text{ m}$$

b) *Fórmulas EA-95.* Se calculan los coeficientes de empotramiento  $k_1$  y  $k_2$ . En este caso al estar dados por el extremo inferior empotrado y existir en el superior una sola viga en el posible plano de pandeo se tiene:

$$k_2 = 1 \quad k_1 = \frac{I_v/L_v}{I_p/L_p + I_v/L_v} \approx 0,406 \Rightarrow \begin{cases} \beta_{in} = \frac{3 - 1,6(k_1 + k_2) + 0,84k_1k_2}{3 - (k_1 + k_2) + 0,28k_1k_2} = 0,639 \\ \beta_{tras} = \sqrt{\frac{1,6 + 2,4(k_1 + k_2) + 1,1k_1k_2}{(k_1 + k_2) + 5,5k_1k_2}} = 1,22 \end{cases}$$

donde se ha examinado la longitud correspondiente a los casos translacional e intraslacional; si no se proveen medios de arriostramiento la estructura deberá considerarse translacional. Es interesante observar qué cálculo de la MV-103 da un valor intermedio entre ambos, por lo que considerarla directamente translacional supone considerar a efectos de cálculo un caso algo más desfavorable que la realidad.

c) *Fórmulas CTE.* Se calculan los coeficientes de empotramiento  $\eta_1$  y  $\eta_2$  con las mismas consideraciones usadas en b y se tiene:

$$\eta_2 = 0 \quad \eta_1 = \frac{I_p/L_p}{I_p/L_p + I_v/L_v} \approx 0,594 \Rightarrow \begin{cases} \beta_{in} = \frac{1 - 0,145(\eta_1 + \eta_2) - 0,265\eta_1\eta_2}{2 - 0,364(\eta_1 + \eta_2) - 0,247\eta_1\eta_2} = 0,512 \\ \beta_{tras} = \sqrt{\frac{1 - 0,2(\eta_1 + \eta_2) - 0,12\eta_1\eta_2}{1 - 0,8(\eta_1 + \eta_2) + 0,6\eta_1\eta_2}} = 1,296 \end{cases}$$



Estos valores son similares a los obtenidos mediante la EA-95. A efectos de cálculo, Consideraremos como valor más exacto, dado que se trata de un pórtico, por las fórmulas de pórticos del caso a)  $L_{\text{pan}} = 2,58 \text{ m}$ .

- 1) *Cálculo de esfuerzos.* Ahora mediante el método matricial calcularemos los esfuerzos axiles ( $N_x$ ), los esfuerzos cortantes ( $T_y, T_z$ ), los momentos flectores ( $M_y, M_z$ ) y el momento torsor ( $M_x$ ) sobre el pilar de intersección de los dos pórticos. La sección más crítica coincide con el empotramiento inferior del pilar. Ahí tenemos:

$$\begin{aligned} N_x &= 60 \text{ kN} & T_y &= 350 \text{ N} & T_z &= 235 \text{ N} \\ M_x &= 11 \text{ N}\cdot\text{m} & M_y &= 310 \text{ N}\cdot\text{m} & M_z &= 520 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

- 2) *Cálculo del coeficiente reductor por pandeo.* El coeficiente de imperfección es  $\alpha = 0,49$  porque tenemos un perfil laminado de acero S 275 JR con  $h/b = 1$  y pandeado en el plano asociado a su mejor eje de inercia (véase tabla 6.2 del CTE SE-A, dado que el material es S 275 JR). Calculamos ahora la esbeltez reducida  $\bar{\lambda}$ , el parámetro  $\phi$  y el coeficiente de reducción  $\chi$ :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \sqrt{\frac{A_d f_y}{(\pi/L_k)^2 EI_m}} = \sqrt{\frac{2600 \text{ mm}^2 \cdot 275 \text{ MPa}}{(\pi/3890 \text{ mm})^2 (210 \cdot 10^3 \text{ MPa}) \cdot (167 \cdot 10^4 \text{ mm}^4)}} \approx 2,07 \\ \phi &= \frac{1}{2} [1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2] \approx 3,117 & \chi &= \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \approx 0,183 \end{aligned}$$

El esfuerzo máximo que puede ser resistido en compresión simple por este pilar vendría dado por:

$$N_{b,Rd} = \chi A f_{yd} = 0,183 \cdot 2600 \text{ mm}^2 \cdot 250 \text{ N/mm}^2 \approx 119 \text{ kN}$$

Sin embargo, como el pilar está sometido a compresión compuesta y torsión, su resistencia máxima es sustancialmente menor, como se mostrará a continuación.

- 3) *Cálculo de tensiones.* A partir de los momentos anteriores se pueden calcular las tensiones sobre cualquier sección mediante las fórmulas de Navier para los esfuerzos normales y sumando las tensiones máximas de Collignon y la torsión,<sup>26</sup> con lo que se obtiene:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{\chi A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \approx 126,1 \text{ MPa} \quad \tau_y^2 + \tau_z^2 \leq \left[ \frac{T_y}{A_y} + \frac{T_z}{A_z} + \frac{M_x}{W_t} \right]^2 = 5,11 \text{ MPa}^2$$

Las características geométricas vienen dadas por:

$A$ :	área total del pilar	$= 26,0 \text{ cm}^2$
$W_y$ :	momento resistente de flexión en $y$	$= 34,2 \text{ cm}^3$
$W_z$ :	momento resistente de flexión en $z$	$= 5,79 \text{ cm}^3$
$A_y$ :	área de cortante del pilar en $y$ ( $\approx 2b_w e_w$ )	$\approx 10,0 \text{ cm}^2$
$A_z$ :	área de cortante del pilar en $z$ ( $\approx h_a e_a$ )	$\approx 6,0 \text{ cm}^2$
$W_t$ :	momento resistente de torsión ( $\approx [2b_w e_w^3 + h_a e_a^3]/3e_w$ )	$\approx 7,24 \text{ cm}^3$



En función de estas componentes el tensor de tensiones y las tensiones principales vienen dadas por:

$$[T]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_y & \tau_z \\ \tau_y & 0 & 0 \\ \tau_z & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \left[ \sigma_x + \sqrt{\sigma_x^2 + 4(\tau_y^2 + \tau_z^2)} \right] / 2 > 0 \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = \left[ \sigma_x - \sqrt{\sigma_x^2 + 4(\tau_y^2 + \tau_z^2)} \right] / 2 < 0 \end{cases}$$

En este caso las tensiones principales resultan ser:

$$\sigma_1 = 126,4 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = 0 \text{ MPa} \quad \sigma_3 = -0,207 \text{ MPa}$$

La tensión equivalente de Von Mises o tensión combinada viene dada por:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3(\tau_y^2 + \tau_z^2)} \leq 126,5 \text{ MPa}$$

Dado que esta tensión es menor que  $f_{yd} = f_y/\gamma_{M1} = 275/1,1 = 250 \text{ MPa}$ , podemos concluir que el pórtico resiste adecuadamente las cargas.

### 2.3.2. Cálculo del pandeo torsional o lateral

El pandeo torsional o lateral se presenta fundamentalmente en barras de sección transversal de pared delgada abierta (I, H, L, U...). Descriptivamente el fenómeno es similar al pandeo flexional: cuando el momento torsor  $M_T$  sobrepasa un cierto valor crítico el eje adopta una forma curva de manera abrupta. A efectos de cálculo el momento torsor resistido cuando existe pandeo torsional viene dado, según el CTE, por:

$$M_{b,Rd} = \begin{cases} \chi_{LT} W_{pl,y} f_{yd} & [\text{ST de clase 1 o 2}] \\ \chi_{LT} W_{el,y} f_{yd} & [\text{ST de clase 3}] \\ \chi_{LT} W_{ef,y} f_{yd} & [\text{ST de clase 4}] \end{cases} \quad [2.37]$$

Para el cálculo se necesita computar magnitudes análogas al caso del pandeo flexional:

- 1) Se procede al cálculo de la esbeltez mecánica torsional  $\lambda_T$  y la esbeltez reducida  $\bar{\lambda}_{LT}$  dadas ambas (véase CTE SE-A, 6.3.3.2) por:

$$\begin{cases} \lambda_T = \frac{L_c}{i_{f,z}} & M_{cr}^2 = M_{LTv}^2 + M_{LTw}^2 = C_1^2 \frac{\pi^2 G I_T E I_z}{L_c^2} + C_1^2 \left( \frac{\pi^2 E W_y}{\lambda_T} \right)^2 \\ \bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y f_y}{M_{cr}}} \end{cases} \quad [2.38]$$



- 2) Se determina el parámetro  $\alpha$  dado por la curva ECSS de pandeo mediante la tabla 6.2 del CTE (véase CTE SE-A, 6.3.3.2). De acuerdo con dicha tabla el parámetro de calidad depende de si se trata de un perfil armado, laminado o compuesto y, en algunos casos, de los espesores de las piezas.
- 3) Se determinan el parámetro  $\phi_{LT}$  y el parámetro de reducción  $\chi_{LT}$  mediante:

$$\begin{aligned}\phi_{LT} &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right] \\ \chi_{LT} &= \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}}\end{aligned}\quad [2.39]$$

## 2.4. Fórmula de Engesser

Engesser estudió en 1892 el comportamiento teórico de piezas comprimidas de acero en las que aparecía pandeo flexional. Como el lado más comprimido sobrepasa el límite de fluencia antes de que lo haga el lado menos comprimido, existe una asimetría entre ambos lados. La mayoría de los tipos de acero presentan cierto endurecimiento además de plastificación por encima del límite de fluencia. Engesser propuso una fórmula corregida que tuviera en cuenta dicho efecto. Sus resultados fueron corroborados experimentalmente por Von Kármán en 1910. Debe tenerse presente que en el cálculo de la carga crítica real resulta conveniente examinar los resultados de Engesser.

## 2.5. Pandeo lateral y abolladura

La **abolladura** es un fenómeno de inestabilidad que afecta a elementos estructurales bidimensionales esbeltos. Cuando dichos elementos se someten a esfuerzos de compresión alineados con su plano medio pueden sufrir desviaciones notorias del mismo como resultado de imperfecciones o excentricidades accidentales de la carga. En esta sección se estudiará más concretamente la abolladura local en partes de elementos estructurales tales como el alma comprimida de una viga, sus alas etc. Si las cargas son puntuales o suficientemente concentradas dichas partes de una viga sufren deformaciones notorias que no pueden ser adecuadamente tratadas mediante la teoría de la flexión de Euler-Bernoulli y es necesario examinar la posibilidad de modos de deformación de abolladura.

### 2.5.1. Pandeo en perfiles abiertos de pared delgada

En secciones abiertas (perfiles I, H, L o T) de pared delgada conviene corregir el valor típico de la esbeltez, ya que en ellas el pandeo puede ocasionar torsión además de flexión. La conveniencia de corregirlo depende de si la esbeltez corregida  $\lambda_{cT}$  es o no superior a la esbeltez convencional  $\lambda$ . La esbeltez corregida viene dada en términos de las características torsionales y de alabeo:

$$\lambda_{cT} = \frac{L_p}{l_{\min}} \frac{i_0}{i_T} \quad [2.40]$$



siendo  $i_0 = (I_y + I_z)/A$  el radio de giro polar e  $i_T$  el radio de giro de torsión alabeada definido mediante la expresión:

$$i_T = \sqrt{\frac{I_A}{I_T} \left( \frac{L_p}{\beta_0 d_0} \right)^2 + 0,039 L_p^2 \frac{I_T}{I_{\min}}} \quad [2.41]$$

donde:

- $I_A$ : momento de alabeo seccional [LONG<sup>4</sup>]
- $I_T$ : momento o módulo de torsión [LONG<sup>4</sup>]
- $I_{\min}$ : momento de inercia mínimo [LONG<sup>4</sup>]
- $L_p$ : longitud de pandeo [LONG]
- $d_0$ : distancia entre los extremos [LONG]
- $\beta_0$ : coeficiente de coacción de alabeo en los extremos ( $0,5 \leq \beta_0 \leq 1,0$ ).<sup>27</sup>

Si resulta que  $i_0 < i_T$  entonces  $\lambda_{cT} < \lambda$  y la comprobación convencional de pandeo es suficiente. En cambio, cuando  $i_0 > i_T$ , es necesario comprobar el pandeo mediante la esbeltez corregida  $\lambda_{cT}$ , debiéndose distinguir tres casos:

- 1) *Secciones con dos planos de simetría* (perfles I, H) o *dos simetrías puntuales* (perfles Z). En este caso basta con comprobar el pandeo según el plano perpendicular al eje con menor momento de inercia.
- 2) *Sección con un solo plano de simetría* (perfles T). En este caso deben corregirse las esbelteces según ambos planos y comprobar cuál de los dos conlleva una menor carga crítica. Las correcciones para el eje con mayor y menor inercia son:

$$\lambda_{cT,z} = \frac{L_p}{i_z} \frac{i_0}{i_T} \quad \lambda_{cT,y} = \frac{L_p}{i_y} K \quad [2.42]$$

donde el factor  $K$  se determina mediante la expresión auxiliar:

$$K = \sqrt{\frac{i_T^2 + i_A^2}{2i_T^2} \left[ 1 + \sqrt{1 - 4 \frac{i_T^2}{(i_T + i_A)^2} \left( i_0^2 + 0,093 \left( \frac{\beta^2}{\beta_0^2} - 1 \right) y_0^2 \right)} \right]} \quad [2.43]$$

donde  $i_A^2 = I_A/A$ ,  $y_0$  es la distancia entre el centro de cortante y el centro de gravedad de la sección, y  $\beta_0 = L_p/L_0$ .

- 3) *Sección asimétrica sin simetrías* (perfles L). El pandeo puede ocurrir según cualquier plano, excepto según el que contiene el centro de gravedad y el centro de cortantes; basta con considerar el radio de giro mínimo posible y calcular como en el caso anterior la longitud de pandeo corregida con factor  $K$ . A pesar de ello, no es conveniente, ni frecuente, el empleo de secciones asimétricas como elementos estructurales, aunque a veces los perfles L o LD se emplean como barras de poca importancia.



### 2.5.2. Inestabilidad local y abolladura

Cuando aparecen cargas puntuales muy concentradas sobre determinadas partes de perfiles metálicos, la deformación de dichos perfiles no satisface las hipótesis cinemáticas habituales de vigas sometidas a flexión<sup>28</sup> y pueden sufrir abolladuras o inestabilidades que afectan inicialmente a una reducida área del elemento y no pueden ser estudiados mediante los métodos expuestos anteriormente.

Una vez se produce una inestabilidad local, el comportamiento del elemento queda alterado global y drásticamente, con lo que compromete la integridad del mismo. La verificación de los estados límites últimos (ELU) de inestabilidad local es por tanto muy importante.

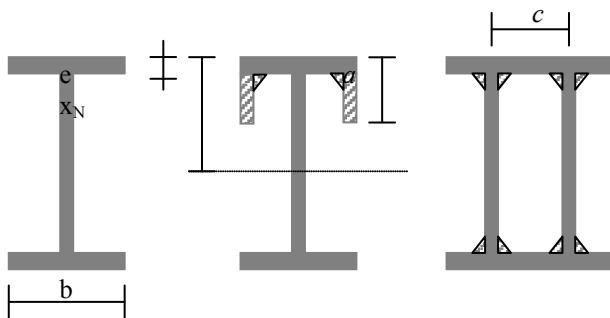
### 2.5.3. Pandeo local y abolladura en perfiles

En perfiles T y doble T (perfiles I o H), es importante comprobar además del pandeo global del elemento los siguientes modos de fallo local:

- Abolladura o pandeo local por abolladura del ala comprimida.
- Abolladura o pandeo local del ala entre soldaduras (sólo en perfiles compuestos).
- Abolladura o pandeo local por abolladura del alma bajo cargas comprimidas.

1) *Abolladura del ala continua*. Un perfil sometido a compresión o la parte comprimida de un perfil sometido a flexión pueden sufrir abolladura si las tensiones en el ala sobrepasan un cierto límite. Para evitar la abolladura basta con no rebasar los siguientes límites:

Fig. 2.8.  
Sección doble T  
normal, sección doble T  
con alas y sección



- 1a) *Borde libre*. En este caso, que es el más común en vigas, el espesor debe ir acorde con el ancho del ala. La abolladura no se produce si:

$$\frac{b}{2e} \leq 15 \sqrt{\frac{240 \text{ MPa}}{\sigma_{adm}}} \quad [2.44]$$

- 1b) *Borde rigidizado*. Cuando existe un rigidizador del ala de altura  $a$  y la línea neutra está a una distancia  $x_N$  de la parte superior, el rigidizador contribuye a la expresión anterior, no produciéndose abolladura si se cumple:

$$\frac{b}{2e} \leq 15 \left( 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{x_N}} \right) \sqrt{\frac{240 \text{ MPa}}{\sigma_{adm}}} \quad [2.45]$$



- 1c) *Ala intermedia.* En este caso si la separación entre las almas del perfil compuesto es  $c$ , basta con que se cumpla la siguiente relación para garantizar que el tramo central del ala no sufre abolladura:

$$\frac{c}{e} \leq 45 \sqrt{\frac{240 \text{ MPa}}{\sigma_{adm}}} \quad [2.46]$$

2) *Abolladura del ala entre soldaduras.* En perfiles T o doble T compuestos, el ala comprimida suele estar soldada al alma mediante soldaduras discontinuas. La longitud de los cordones debe cumplir  $L_s \geq 40$  mm. En el espacio entre soldaduras, el alma puede pandear si la separación entre soldaduras es grande. Para estimar la carga total de pandeo sobre el ala con soldadura discontinua puede emplearse la fórmula de Euler. No habrá riesgo de pandeo local del ala si se cumple la siguiente desigualdad:

$$P_{cr,alas} = \frac{\pi^2 EI_{alas}}{(d_s/2)^2} = \pi^2 E \frac{be_{al}^3}{3d_s^2} \geq \frac{N_d}{2} + \frac{M_d}{h_i} \quad [2.47a]$$

donde:

- $E$ : módulo de Young del material de las alas
- $b$ : ancho efectivo de las alas
- $d$ : distancia entre los centros de cordones de soldadura
- $e_{al}$ : espesor de las alas
- $N_d$ : esfuerzo axial total sobre la sección analizada
- $M_d$ : momento fletor total sobre la sección analizada
- $h_i$ : altura total del perfil [=  $h_w + 2e_{al}$ ]

Además de esta comprobación será necesario comprobar el pandeo flexional según el plano del ala. Por lo que  $d$  debe cumplir además:

$$d_s \leq 40i_{z,w} = 40\sqrt{\frac{e_{ala}b^3/12}{e_{ala}b}} = \frac{20}{\sqrt{3}}b \quad [2.47b]$$

3) *Abolladura del alma.* En perfiles T o doble T, a partir del ancho del alma ( $e_w$ ) y la altura del alma ( $h_w$ ) se define el espesor relativo ( $\eta_g$ ). Este espesor relativo se compara con el espesor relativo mínimo ( $\eta_{g,min}$ ) y el espesor de abolladura ( $\eta_{g,ab}$ ):<sup>29</sup>

$$\eta_g = \frac{e_w}{h_w} \quad \eta_{g,min} = 0,006 \quad \eta_{g,ab} = \begin{cases} 0,013 & \text{A37 / S235JR} \\ 0,014 & \text{A42 / S275JR} \\ 0,016 & \text{A52 / S325JR} \end{cases} \quad [2.48]$$

Y se distinguen tres casos:

- I)  $\eta_g < \eta_{g,min}$ : se aumenta espesor hasta que se cumpla dicha condición.
- II)  $\eta_{g,min} < \eta_g < \eta_{g,ab}$ : se necesitan colocar rigidizadores para evitar abolladura.
- III)  $\eta_{g,ab} < \eta_g$ : resulta innecesario comprobar la abolladura.

Las comprobaciones necesarias en el caso II son las siguientes:



- 1a) *Cargas concentradas.* Cuando existe alguna carga puntual  $P_d$  transversal a la viga, ésta debe ser absorbida por el alma de la misma, que es podría abollarse (con  $A_{w,e} = b_w e_w$  y  $b_w = 20e_w$ ). No se producirá abolladura sino rebasa la carga crítica del alma que viene dada por:

$$P_d \leq P_{cr,w} = \frac{\pi^2 EI_{w,e}}{h_w^2} = \frac{5\pi^2 E e_w^4}{3 h_w^2} \quad [2.49]$$

- 1b) *Resto de cargas.* Para evitar otros tipos de abolladuras deben colarse rigidizadores transversales. Una vez colocados dichos rigidizadores transversales a distancias  $d_{rig} = \alpha h_w$  es necesario asegurarse de que no habrá abolladura del recuadro comprendido entre el espacio que hay cada dos rigidizadores; para ello basta con comprobar que se cumple la siguiente inecuación:

$$\sigma_{co} < \sigma_{co,ab} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + 3\tau_{max}^2}}{1 + \psi \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_{cr}} \right) + \sqrt{\left( \frac{3 - \psi}{4} \frac{\sigma_1}{\sigma_{cr}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{max}}{\tau_{cr}} \right)^2}} \leq \sigma_{adm} \quad [2.50a]$$

La anterior tensión  $\sigma_{co,ab}$  se llama *tensión de abolladura ideal* y es válida siempre y cuando esa tensión esté en dominio elástico. Si dicha supera el dominio elástico, entonces puede hacerse un cálculo plástico consistente en comprobar que:<sup>30</sup>

$$\sigma_{co} < \sigma_{co,ab,pl} < \sqrt{k_r} \sigma_{co,ab} < \sigma_{co,ab} \leq \sigma_u \quad [2.50b]$$

Las tensiones que intervienen en las ecuaciones anteriores se calculan a partir de la máxima tensión de compresión ( $\sigma_c \leq 0$ ), la máxima tensión de tracción ( $\sigma_t \geq 0$ ) y la tensión de abolladura ( $\sigma_{ab}$ ), de acuerdo con las ecuaciones:

$$\sigma_1 = \sigma_{max} \frac{h_w}{h_w + 2e_{ala}} \quad \psi = \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \quad \begin{cases} \sigma_c = \min(\sigma) & (\text{máx. comp.}) \\ \sigma_t = \max(\sigma) & (\text{máx. trac.}) \end{cases} \quad [2.51]$$

$$\sigma_{ab} = \frac{\pi^2 E_s}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{e_w}{h_w} \right)^2 = 186 \cdot 10^3 \text{ MPa} \left( \frac{e_w}{h_w} \right)^2 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{cr} = K_\sigma \sigma_{ab} \\ \tau_{cr} = K_\tau \sigma_{ab} \end{cases} \quad [2.52]$$

y donde los coeficientes  $K_\sigma$  y  $K_\tau$  se determinan a partir de la distancia entre rigidizadores ( $d_{rig}$ ) y la altura del alma ( $h_w$ ), con las siguientes expresiones:

$$K_\tau = K_\tau(\alpha) = \begin{cases} 6,68 + \frac{5,0}{\alpha^2} & \alpha = d_{rig}/h_w \geq 1 \\ 5,0 + \frac{6,68}{\alpha^2} & \alpha = d_{rig}/h_w < 1 \end{cases} \quad [2.53]$$



$$K_\sigma = K_\sigma(\alpha, \psi) = \begin{cases} \frac{10,5}{\psi + 1,1} & 0 \leq \psi \leq 1 \wedge \alpha \geq 1 \\ \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 \frac{2,63}{\psi + 1,1} & 0 \leq \psi \leq 1 \wedge \alpha < 1 \\ (1 + \psi)K_\sigma(0) - \psi K_\sigma(-1) + 12,5\psi(1 + \psi) & -1 < \psi < 0 \\ 29,9 & \psi = -1 \wedge \alpha \geq \frac{2}{3} \\ 19,84 + 10,75\alpha^2 + \frac{2,34}{\alpha^2} & \psi = -1 \wedge \alpha < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Cuando  $\psi < -1$  las tracciones superan a las compresiones y no es necesario comprobar la abolladura del recuadro entre rigidizadores.

- 1c) *Espesor de los rigidizadores.* Las comprobaciones anteriores fijan las distancias a las que deben colocarse los rigidizadores a partir de las dimensiones del recuadro comprendido entre ellos y las alas de la viga. Los espesores mínimos que deben tener los rigidizadores se obtienen a partir de:

$$I_r \geq \begin{cases} \frac{3}{2} \left( \frac{h_w}{50} \right)^4 & (\text{rig. transversales}) \\ h_r e_r^3 (2,4\alpha^2 - 0,13) & (\text{rig. longitudinales}) \end{cases} \quad [2.54a]$$

La inercia mínima procede de la expresión de pandeo de una placa corregida, en la que se introduce  $v = 0,3$  y el valor de  $\gamma$  recomendado por Timoshenko para un rigidizador ultrarrígido.<sup>31</sup>

$$I_r = \gamma \frac{d_{rig} e_w^3}{12(1-v^2)} \approx \left[ 1,875 \left( \frac{h_w}{d_{rig}} \right)^4 \right] \frac{d_{rig} e_w^3}{10,92} = 0,172 h_w^4 \left( \frac{e_w}{h_w} \frac{h_w}{d_{rig}} \right)^3 \quad [2.54b]$$

Considerando para una viga de alma gruesa los valores recomendados de  $e_w/h_w \approx 0,014$  y  $d_{rig}/h_w \approx 1,5$  y para una viga de alma delgada  $e_w/h_w \approx 0,006$  y  $d_{rig}/h_w \approx 0,60$  se obtiene el resultado de [2.40].

### Ejemplo numérico 5

Diseño de una viga compuesta. Se requiere diseñar una viga simplemente apoyada en sus extremos con una luz  $L = 6,0$  m cargada con una carga continua  $q_d = 2000$  kp/m y una carga puntual centrada  $P_d = 50 \cdot 10^3$  kp. La tensión admisible es  $\sigma_{adm} = 260$  MPa, la tensión última  $\sigma_u = 325$  MPa y la flecha admisible es  $f_{adm} = L/250$ .

- 0) En primer lugar se calculan los esfuerzos máximos para la sección crítica:

$$M_d = \frac{P_d L}{4} + \frac{q_d L^2}{8} = 84 \cdot 10^3 \text{ kp} \cdot \text{m} \quad V_d = \frac{P_d}{2} = 25 \cdot 10^3 \text{ kp}$$



1) El siguiente paso es ensayar un prediseño. Deberían escogerse un canto total y unas alas tales que el momento resistente sea  $W_f \geq M_d / \sigma_{adm} = 3231 \text{ cm}^3$ . Un posible diseño que cumple esa condición está formado por dos alas simétricas de sección  $b \times e_1 = 200 \times 10 [\text{mm}]$  y un alma de sección  $h_w \times e_w = 1000 \times 8 [\text{mm}]$ , ya que con esos valores se obtiene, calculado el momento de inercia combinado por el teorema de Steiner, que  $I_f = 168700 \text{ cm}^4$  y  $W_f = 3310 \text{ cm}^3$  (estos valores se han obtenido por tanteo; si no resultaran correctos. deberíamos aumentar algunos valores y recalcular).

2) La comprobación del pandeo local del ala es satisfactoria, ya que:

$$\frac{b}{2e_1} = 10 \leq 12,9 = 15 \sqrt{\frac{240}{\sigma_u}} \quad \checkmark$$

3) La comprobación del pandeo lateral es satisfactoria si se tiene en cuenta la distancia máxima  $d_s$  entre puntos inmovilizados por soldadura:

$$d_s \leq 40i_{ycc} = 40\sqrt{\frac{e_1 b^3}{12}} = 40 \frac{b}{\sqrt{12}} \Rightarrow d_s \leq 40 \cdot 5,773 = 230,94 \text{ cm} \quad \checkmark$$

Por tanto, podemos seleccionar por ejemplo  $d_s = 200 \text{ cm}$ , que también verifica que:

$$P_{cr,alas} = \pi^2 E_s \frac{be_{al}^3}{3d_s^2} = 345 \cdot 10^3 \text{ kp} \geq 84 \cdot 10^3 \text{ kp} = \frac{N_d}{2} + \frac{M_d}{h_w} \quad \checkmark$$

4) Una vez fijados los parámetros anteriores, debemos realizar la comprobación crítica para ver si cumplen tanto las tensiones máximas como las flechas máximas:

$$\begin{cases} \sigma_{max} = \frac{M_d}{W_z} = \frac{84 \cdot 10^5}{3310} \approx 2538 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \\ \tau_{max} \approx \frac{V_d}{A_w} = \frac{2500}{0,8 \cdot 100} = 312,5 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \\ \sigma_{co,max} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\tau_{max}^2} \approx 2595 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} < \sigma_u \end{cases} \quad (\text{tensiones}) \quad \checkmark$$

$$\left\{ f_{max} = \frac{P_d L^3}{48EI_z} + \frac{5q_d L^4}{384EI_z} \approx 0,53 \text{ cm} < \frac{L}{250} = 2,4 \text{ cm} \text{ (flecha)} \right. \quad \checkmark$$

5) Abolladura del alma. En primer lugar calculamos si el espesor relativo del alma es suficiente mediante la relación:

$$\eta_g = e_w/h_w = 8/1000 = 0,008 > 0,006 \quad \checkmark$$

Con ello, sabemos que el espesor relativo del alma es correcto, aunque en general requerirá el uso de rigidizadores. De hecho, en los puntos con cargas puntuales



importantes, ya sean estas reacciones de apoyo o cargas exteriores, conviene situar rigidizadores. Para evaluar si cierto número de rigidizadores es correcto, debe comprobarse que la tensión combinada de abolladura  $\sigma_{co,ab}$  no supera la tensión última. Para ello previamente necesitamos calcular las tensiones  $\sigma_1$ ,  $\sigma_{ab}$ ,  $\sigma_{cr}$  y  $\tau_{cr}$ :

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} \frac{h_w}{h_w + 2e_{ala}} \approx 2538 \frac{1000}{1000 + 2 \cdot 10} \approx 2488 \text{ kp/cm}^2$$

$$\sigma_{ab} = 189,4 \cdot 10^4 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \left( \frac{e_w}{h_w} \right)^2 = 121,5 \text{ kp/cm}^2$$

$$\begin{cases} \tau_{cr} = K_\tau \sigma_{ab} = 7,23 \cdot 121,5 = 878,4 \text{ kp/cm}^2 \\ \sigma_{cr} = K_\sigma \sigma_{ab} = 29,9 \cdot 121,5 = 3632,8 \text{ kp/cm}^2 \end{cases}$$

donde los coeficientes  $K_\sigma$  y  $K_\tau$  se han determinado como sigue: si colocamos tres rigidizadores (dos extremos y uno central bajo la carga  $P_d$ ), tenemos una distancia entre rigidizadores  $d_{rig} = L/2 = \alpha h_w$ ; siendo  $L = 6,0$  m y  $h_w = 1,0$  m, se tiene que  $\alpha = 3 > 3/2$ . Por otro lado, la viga está sometida a flexión simple, por lo que  $\sigma_t = -\sigma_c = \sigma_{\max}$  y, por tanto,  $\psi = -1$ . De estos dos valores:

$$K_\tau = K_\tau(\alpha = 3) = 6,68 + \frac{5,0}{\alpha^2} = 7,23 \quad K_\sigma = 29,9$$

Esto da una tensión de abolladura de  $\sigma_{co,ab} < \sigma_u = 325$  MPa:

$$\sigma_{co,ab} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + 3\tau_{max}^2}}{\frac{1+\psi}{4} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_{cr}} \right) + \sqrt{\left( \frac{3-\psi}{4} \frac{\sigma_1}{\sigma_{cr}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{max}}{\tau_{cr}} \right)^2}} \approx 3294 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \approx 322,8 \text{ MPa} \quad \checkmark$$

Por tanto, un sistema formado por tres rigidizadores resulta correcto. Si esto no hubiera funcionado sería necesario aumentar el número de rigidizadores o incluir rigidizadores horizontales.

## 2.6. Cálculo no lineal de estructuras

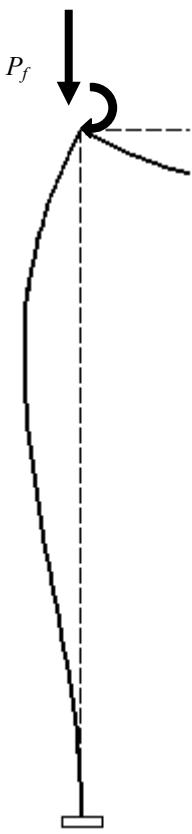
Entre las hipótesis en las que se basa el método matricial, figura la hipótesis de que la **variación de la rigidez con la deformación** es despreciable. Sin embargo, para barras comprimidas sometidas a compresiones de consideración, esto ya no es estrictamente cierto porque en la configuración deformada provocada por la flexión la rigidez axial es menor, debido a que la barra pierde la forma recta. Cuando la rigidez de algún elemento varía con la deformación, la estructura tiene un **comportamiento no lineal**.



### 2.6.1. Rigidez reducida de un soporte por flexión

Como puede verse en la FIG. 2.9, al someter a un esfuerzo axial  $P$  un soporte que ha flectado un cierto ángulo y ha perdido la forma recta, la rigidez axial se ve afectada.

FIG 2.9



Podemos computar la nueva rigidez igualando el trabajo externo ( $W_{ext}$ ) realizado por la fuerza  $P_f$  a la energía potencial elástica ( $W_{elas}$ ). Por la conservación de la energía, el trabajo externo realizado por la fuerza  $P_f$  será igual a la energía interna o energía potencial elástica acumulada en la barra deformada.

Puesto que la energía interna es una variable de estado, podremos calcular la energía interna imaginando un proceso cuasiestático en que incrementamos la carga  $P_f$  de modo cuasiestático desde 0 hasta su valor final, siendo el resultado independiente de cómo haya sido el proceso de carga real de la barra.

Para mostrarlo de forma más didáctica, calcularemos primero la rigidez axial por este método en el caso lineal (forma recta) y luego, en el caso no-lineal, cuando el soporte está curvado y al rigidez depende de esta curvatura.

#### Caso lineal (barra recta)

El trabajo cuasi-estático se obtiene teniendo en cuenta que en todo momento  $\delta_P$  es proporcional a  $P$ , es decir,  $\delta_P = a \cdot P = (\delta_f / P_f) \cdot P$ :

$$W_{ext} = \int_0^{P_f} \delta_P dP = \int_0^{P_f} \frac{\delta_f}{P_f} P \cdot dP = \frac{1}{2} P_f \delta_f$$

$$W_{elast} = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{N_x^2}{EA} dx = \frac{1}{2} \frac{P_f^2 L}{EA} \quad \Rightarrow$$

$$K_{ax} = \frac{P_f}{\delta_f} = \frac{P_f}{P_f L / EA} = \frac{EA}{L} \quad [2.55]$$

que es el resultado clásico conocido.

#### Caso no-lineal: rigidez reducida por la curvatura

El cálculo exacto de la rigidez para cualquier deformación curvada es complicado. Sin embargo, suponiendo que el trabajo cuasi-estático sigue siendo aproximadamente  $W_{ext} \approx P_f \delta_f / 2$ , se puede obtener un valor razonable de la rigidez. Basta con observar que debido a la curvatura no todos los puntos caen sobre el eje de la pieza, por lo que esto provoca todas las secciones un momento flector que viene dado por  $M_z(x) = P_f y(x)$ , siendo  $P_f$  el esfuerzo axial de compresión y  $y(x)$  la solución de la elástica, es decir, la desviación respecto a la forma recta. Así pues, necesitamos calcular: 1) la forma aproximada de la elástica, y 2) la energía elástica interna.



1) *Cálculo aproximado de la elástica.* Puesto que la curvatura está provocada en primera aproximación por un diagrama de momentos lineal  $M_{0z}(x) = mx + n$  y teniendo en cuenta además la forma de la deformada en primer orden y las condiciones de contorno:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2y(x)}{dx^2} &\approx \frac{M_{0z}}{EI_z} \approx \frac{mx+n}{EI_z} \\ \begin{cases} y(0)=0 & y'(0)=0 \\ y(L)=0 & y'(L)=\tan \theta \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y(x) = \frac{mx^3}{6} + \frac{nx^2}{2} + px + q \quad [2.56]$$

Al imponer sucesivamente sobre  $m$ ,  $n$ ,  $p$  y  $q$  que se cumplan las condiciones de contorno, se llega a que  $y(x) = \tan(\theta)L \cdot [(x/L)^3 - (x/L)^2]$ .

2) Cálculo aproximado de la energía elástica interna. Ahora podemos calcular  $W_{elast}$ :

$$\frac{P_f \delta_f}{2} \approx W_{elast} = \int_0^L \frac{1}{2} \left[ \frac{P_f^2}{EA} + \frac{P_f^2 y^2(x)}{EI_z} \right] dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_f^2 L}{EA} + \frac{P_f^2 \tan^2 \theta L^3}{EI_z} \frac{1}{105} \right] \Rightarrow$$

$$K^{*}_{ax}(\theta) = \frac{P_f}{\delta_f} = \frac{EA}{L} \left[ 1 - \frac{AL^2 \tan^2 \theta}{105I_z + AL^2 \tan^2 \theta} \right] \leq \frac{EA}{L} = K_{ax} \quad [2.57a]$$

Introduciendo la esbeltez tipo de una barra como  $\lambda_m = (L^2 A/I_z)^{1/2}$ , la expresión para  $K^{*}_{ax}$  se puede escribir simplemente como:

$$K^{*}_{ax}(\theta) = \frac{EA}{L} \left[ \frac{105}{105 + \lambda_m^2 \tan^2 \theta} \right] \approx \frac{EA}{L} \left[ \frac{105}{105 + \lambda_m^2 \theta^2} \right] \approx \frac{EA}{L} \left[ 1 - \frac{\lambda_m^2 \theta^2}{105} \right] \quad [2.57b]$$

### Caso no-lineal: rigidez reducida por la curvatura general y desplazamiento

Similarmente al caso anterior podemos hacer un cálculo más general que tome en consideración los dos desplazamientos y los dos giros en los extremos:

1) Cálculo aproximado de la elástica:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2y(x)}{dx^2} &\approx \frac{M_{0z}}{EI_z} \approx \frac{mx+n}{EI_z} \\ \begin{cases} y(0)=\delta_1 & y'(0)=\tan \theta_1 \\ y(L)=\delta_2 & y'(L)=\tan \theta_2 \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$y(x) = Lt \tan \theta_2 \left( \frac{x^3}{L^3} - \frac{x^2}{L^2} \right) + Lt \tan \theta_1 \left( \frac{x^3}{L^3} - 2 \frac{x^2}{L^2} + \frac{x}{L} \right) + \dots$$

$$\dots + (\delta_2 - \delta_1) \left( -2 \frac{x^3}{L^3} + 3 \frac{x^2}{L^2} \right) \quad [2.58]$$



2) Cálculo aproximado de la energía elástica interna. Ahora podemos calcular  $W_{elast}$ :

$$\frac{P_f \delta_f}{2} \approx W_{elast} = \int_0^L \frac{1}{2} \left[ \frac{P_f^2}{EA} + \frac{P_f^2 y^2(x)}{EI_z} \right] dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{P_f^2 L}{EA} + \frac{P_f^2 L^3}{EI_z} g\left(\theta_1, \theta_2, \frac{\delta_2 - \delta_1}{L}\right) \right] \Rightarrow$$

$$K *_{ax} (\theta) = \frac{P_f}{\delta_f} = \frac{EA}{L} \left[ \frac{1}{1 + \lambda^2 g(\theta_1, \theta_2, \varepsilon)} \right] \leq \frac{EA}{L} = K_{ax} \quad [2.59]$$

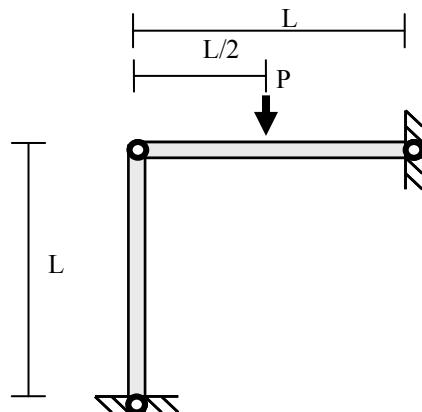
donde  $\varepsilon = (\delta_2 - \delta_1)/L$  y  $g(\theta_1, \theta_2, \varepsilon)$  tiene una forma complicada, para ángulos pequeños puede aproximarse por:

$$g(\theta_1, \theta_2, \varepsilon) = \frac{1}{105} \left[ \theta_1^2 + \theta_2^2 - \frac{3}{2} \theta_1 \theta_2 + 13\varepsilon \left( 3\varepsilon + \frac{\theta_1}{2} \right) - 11\varepsilon \theta_2 \right] \quad [2.60]$$

### 2.6.2. Planteamiento del problema para estructuras no lineales

Para ilustrar el efecto de esta no linealidad examinaremos el siguiente ejemplo (y calcularemos los efectos asociados a la disminución de rigidez del pilar mediante [2.57b]):

FIG. 2.10.  
Semipórtico modelo.



Para este problema, la matriz de rigidez global  $[K_G]$ , que relaciona fuerzas nodales con desplazamientos, viene dada (en el caso lineal) por:

$$[K_G] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & -12 & 0 & -6L \\ 0 & \lambda_m^2 & 0 & 0 & -\lambda_m^2 & 0 \\ -6L & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 6L & 12 + \lambda_m^2 & 0 & 6L & -\lambda_m^2 \\ 0 & -\lambda_m^2 & 0 & 0 & 12 + \lambda_m^2 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ -6L & 0 & 2L^2 & 6L & 6L & 8L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ & & & -\lambda_m^2 & 0 & 0 & \lambda_m^2 & 0 & 0 \\ & & & & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ & & & & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$



Puesto que los nudos 1 y 3 están empotrados, la matriz de rigidez reducida de equilibrio  $[K_{EG}]$  sólo involucra los desplazamientos del nudo 2, el único nudo libre, así que  $[K_{EG}]$  es simplemente (en el caso lineal):

$$\{F(P)\} = [K_{EG}]\{\delta\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ -P/2 \\ -PL/8 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 + \lambda_m^2 & 0 & 6L \\ 0 & 12 + \lambda_m^2 & 6L \\ 6L & 6L & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_H \\ \delta_v \\ \theta \end{Bmatrix} \quad [2.61]$$

donde  $\lambda_m = L(A/I_z)^{1/2}$  y cuya solución viene dada por:

$$\begin{cases} \delta_{H,0} = +\frac{3(\lambda_m^2 - 12)}{32(3 + \lambda_m^2)(12 + \lambda_m^2)} \frac{PL^3}{EI} \\ \delta_{v,0} = -\frac{13\lambda_m^2 + 84}{32(3 + \lambda_m^2)(12 + \lambda_m^2)} \frac{PL^3}{EI} \\ \theta_0 = -\frac{\lambda_m^2 - 12}{64(3 + \lambda_m^2)} \frac{PL^2}{EI} \end{cases}$$

Sin embargo, si tenemos en cuenta que al girar el extremo superior del soporte un ángulo  $\theta$  y estar empotrado en su parte inferior, entonces se pierde la forma recta, por lo que, frente a esfuerzos axiales, la rigidez ya no será exactamente  $K_{ax} = EA/L$  sino algo menor. Llamaremos a la rigidez del soporte, teniendo en cuenta los efectos de la deformación,  $K_{ax}^*(\theta)$  y obviamente tenderemos que  $K_{ax}^*(\theta) < K_{ax}$  para  $\theta > 0$ . A continuación, explicaremos cómo estimar esta rigidez axial reducida  $K_{ax}^*(\theta)$ . Realizaremos el cálculo no-lineal teniendo en cuenta que la rigidez axial es  $K_{ax}^*$  en lugar de  $K_{ax}$ . La matriz  $[K_{EG}]$  que aparece en [2.47], incluyendo los términos no lineales, es:

$$[K_{EG}(\theta)] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 + \frac{105 \cdot \lambda_m^2}{105 + \lambda_m^2 \theta^2} & 0 & 6L \\ 0 & 12 + \frac{105 \cdot \lambda_m^2}{105 + \lambda_m^2 \theta^2} & 6L \\ 6L & 6L & 8L^2 \end{bmatrix}$$

Ahora el problema lineal original [2.61] se transforma en un problema no-lineal [2.62a] que debe resolverse numéricamente:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -P/2 \\ -PL/8 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 + f_\lambda(\theta) & 0 & 6L \\ 0 & 12 + f_\lambda(\theta) & 6L \\ 6L & 6L & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_H \\ \delta_v \\ \theta \end{Bmatrix} \quad [2.62a]$$

donde  $f_\lambda$  se define como:  $f_\lambda(\theta) = [1/(\theta\lambda_m)^2 + 1/105]^{-1}$ .



Podemos resolver este sistema numéricamente mediante el método iterativo de Newton-Raphson (que tiene rápida convergencia). Recordemos la base del método: construimos una función residuo  $R(\cdot)$  tal que uno de sus ceros sea la solución del sistema no lineal [2.62a]. Antes de construirla, y con el fin de mejorar la convergencia numérica, convertiremos el sistema [2.62a] en un sistema adimensional [2.62b] mediante dos cambios de variable:  $\chi = \delta_H/L$  y  $\psi = \delta_V/L$ . Así nos queda:

$$\frac{PL^2}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 + f_\lambda(\theta) & 0 & 6 \\ 0 & 12 + f_\lambda(\theta) & 6 \\ 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi \\ \psi \\ \theta \end{Bmatrix} \quad [2.62b]$$

A continuación, como función residuo  $R(\cdot)$  consideraremos una en la que  $R(\chi_s, \psi_s, \theta_s) = 0$ , siendo  $(\chi_s, \psi_s, \theta_s)$  la solución que buscamos para el sistema no-lineal. Una buena candidata para la función  $R(\cdot): \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  es la función residuo dada por:

$$R(\chi, \psi, \theta) \equiv \begin{Bmatrix} R_H(\chi, \psi, \theta) \\ R_V(\chi, \psi, \theta) \\ R_0(\chi, \psi, \theta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 + f_\lambda(\theta) & 0 & 6 \\ 0 & 12 + f_\lambda(\theta) & 6 \\ 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi \\ \psi \\ \theta \end{Bmatrix} + \frac{L^2}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/8 \end{Bmatrix} \quad [2.63]$$

$$R(\delta_{H,s}/L, \delta_{V,s}/L, \theta_s) = 0$$

Consideremos ahora una solución aproximada  $(\delta_{H,0}, \delta_{V,0}, \delta_{\theta,0}) = L(\chi_0, \psi_0, \theta_0)$  como, por ejemplo, la dada solución del sistema [2.61] calculada anteriormente y que está próxima a la solución no lineal buscada  $(\delta_{H,s}, \delta_{V,s}, \theta_s)$ . De acuerdo con el método de Newton-Raphson, desarrollamos en serie de Taylor hasta el primer orden la función  $R(\chi, \psi, \theta)$  alrededor de un punto  $\eta_n = (\chi_n, \psi_n, \theta_n)$  y obtenemos que:

$$R_{n+1} = R_n + [DR]_n \cdot (\eta_{n+1} - \eta_n) \in \mathbf{R}^3$$

$$[DR]_n \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial R_H}{\partial \chi} & \frac{\partial R_H}{\partial \psi} & \frac{\partial R_H}{\partial \theta} \\ \frac{\partial R_V}{\partial \chi} & \frac{\partial R_V}{\partial \psi} & \frac{\partial R_V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial R_0}{\partial \chi} & \frac{\partial R_0}{\partial \psi} & \frac{\partial R_0}{\partial \theta} \end{bmatrix}_n \quad [2.64a]$$

$$\begin{cases} R_{n+1} \equiv R(\chi_{n+1}, \psi_{n+1}, \theta_{n+1}) \\ R_n \equiv R(\chi_n, \psi_n, \theta_n) \end{cases}$$

Si hacemos la aproximación que  $R_{n+1} \approx 0$  anterior se obtiene que:

$$\eta_{n+1} = \eta_n - [DR]_n^{-1} \cdot R_n \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \chi_{n+1} \\ \psi_{n+1} \\ \theta_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \chi_n \\ \psi_n \\ \theta_n \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial R_H}{\partial \chi} & \frac{\partial R_H}{\partial \psi} & \frac{\partial R_H}{\partial \theta} \\ \frac{\partial R_V}{\partial \chi} & \frac{\partial R_V}{\partial \psi} & \frac{\partial R_V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial R_0}{\partial \chi} & \frac{\partial R_0}{\partial \psi} & \frac{\partial R_0}{\partial \theta} \end{bmatrix}_n^{-1} \begin{Bmatrix} R_{H,n} \\ R_{V,n} \\ R_{0,n} \end{Bmatrix} \quad [2.64b]$$



Si sustituimos la función residuo  $R(\chi, \psi, \theta)$  de [2.63] en la ecuación general [2.64b]:

$$\begin{Bmatrix} \chi_{n+1} \\ \Psi_{n+1} \\ \theta_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \chi_n \\ \Psi_n \\ \theta_n \end{Bmatrix} - \left[ \begin{array}{ccc} 12 + f_\lambda & 0 & 6 + \chi_n f'_\lambda \\ 0 & 12 + f_\lambda & 6 + \Psi_n f'_\lambda \\ 6 & 6 & 8 \end{array} \right]_n^{-1} \begin{Bmatrix} R_{H,n} \\ R_{V,n} \\ R_{\theta,n} \end{Bmatrix}$$

$$R_{n+1}(\chi, \psi, \theta) \equiv \begin{Bmatrix} R_{H,n+1}(\chi, \psi, \theta) \\ R_{V,n+1}(\chi, \psi, \theta) \\ R_{\theta,n+1}(\chi, \psi, \theta) \end{Bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc} 12 + f_\lambda(\theta_n) & 0 & 6 \\ 0 & 12 + f_\lambda(\theta_n) & 6 \\ 6 & 6 & 8 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \chi_n \\ \Psi_n \\ \theta_n \end{Bmatrix} + \frac{L^2}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/8 \end{Bmatrix}$$

### Ejemplo numérico 6 (efectos de la curvatura)

Como ilustración de lo anterior, examinar las deformaciones obtenidas para una estructura como la de la FIG. 2.10, con  $L = 2,50$  m, una sección  $\square 40 \times 40 \times 3$  ( $I_z = 90100 \text{ mm}^4$ ), en acero laminado (módulo de Young  $E_s = 205,8 \text{ GPa}$ ) y donde la carga  $P = 0,9 \cdot P_{\text{Euler}}$  con  $P_{\text{Euler}} = \pi^2 E_s I_z / L^2$ . Y usando sólo la matriz de rigidez corregida sólo con efectos de curvatura:

$$\left[ K_{EG}(\theta) \right] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 + \frac{105 \cdot \lambda_m^2}{105 + \lambda_m^2 \theta^2} & 0 & 6L \\ 0 & 12 + \frac{105 \cdot \lambda_m^2}{105 + \lambda_m^2 \theta^2} & 6L \\ 6L & 6L & 8L^2 \end{bmatrix}$$

Para los valores adoptados y  $f_\lambda(\theta) = [1/(0\lambda_m)^2 + 1/105]^{-1}$ , el esquema iterativo de Newton-Raphson converge rápidamente como muestra la siguiente tabla:

Iteración	$\chi_n = \delta_{H,n}/L$ [10 <sup>4</sup> ]	$\Psi_n = \delta_{V,n}/L$ [10 <sup>4</sup> ]	$\theta_n$	$R_H$ [10 <sup>4</sup> ]	$R_V$ [10 <sup>4</sup> ]	$R_\theta$ [10 <sup>4</sup> ]
(lineal) 0	0,291572	-1,264297	-0,138718	—	—	—
1	1,800961	-7,862431	-0,138336	-6984,02	30283,680	-0,00001
2	1,799095	-7,827264	-0,138339	9,16175	-163,0504	0,00000
3	1,799062	-7,827295	-0,138339	0,15012	0,144920	0,00001
4	1,799062	-7,827295	-0,138339	-0,00028	-0,000300	-0,00001
5	1,799062	-7,827295	-0,138339	-0,00001	0,000000	0,00001
6	1,799062	-7,827295	-0,138339	0,00001	0,000000	0,00000

TABLA 2.3.  
Tabla comparada de las iteraciones por método de Newton-Raphson.

El ángulo girado no varía demasiado con respecto al caso lineal, a diferencia de  $\delta_H$  y  $\delta_V$  que sí varían notablemente. Al sustituir valores se obtiene la siguiente comparación:

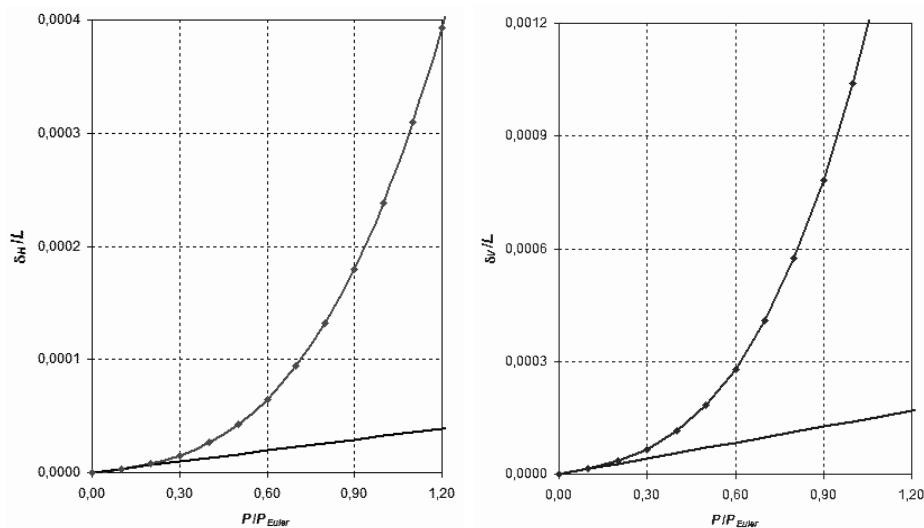


TABLA 2.4. Comparación de la aproximación lineal con la no lineal.

Desplazamientos	Caso lineal	Caso no lineal
$\delta_H = \chi L$	+0,07 mm	+0,45 mm
$\delta_V = \psi L$	-0,32 mm	-1,96 mm
$\delta_\theta = \Theta L$	-7,95°	-7,93°

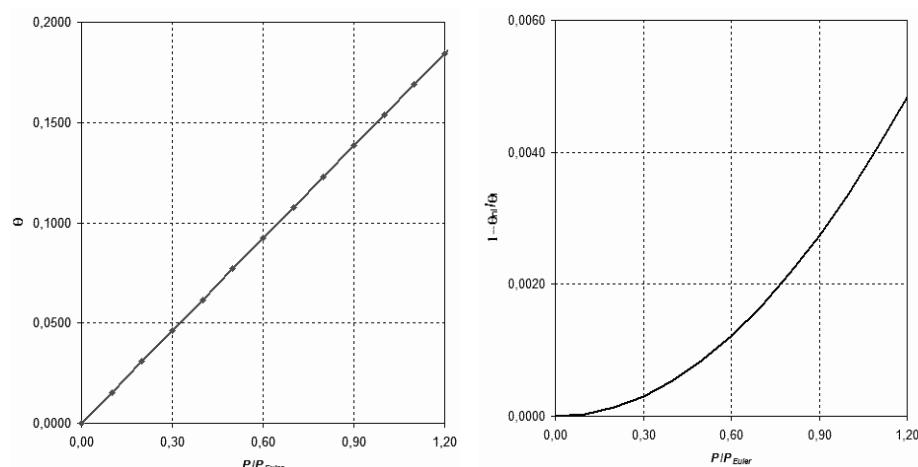
Podemos representar gráficamente la comparación entre el cálculo lineal y el no lineal para diferentes valores de la carga  $P$ :

Fig. 2.11. Desplazamientos horizontales y verticales en el modelo lineal y en el no lineal.



En cambio, el ángulo girado por la esquina libre del pórtico se comporta de modo bastante lineal con respecto a la carga. La gráfica de la izquierda muestra la variación angular absoluta  $\theta_{NL}$ . En cambio, la gráfica de la derecha muestra  $(\theta_L - \theta_{NL})/\theta_L [= 1 - \theta_{NL}/\theta_L]$ , es decir, la diferencia relativa entre el cálculo lineal y el no lineal:

Fig. 2.12. Ángulo girado en ambos modelos (izquierda) y diferencia relativa entre ambos (derecha).





## 2.7. No linealidad geométrica global: pandeo global de cúpulas y arcos

Además del caso de piezas esbeltas sometidas a esfuerzos importantes de compresión, hay otros dos casos interesantes de sistemas estructurales que presentan puntos de bifurcación. Es decir, sistemas tales que sus ecuaciones de gobierno no lineales presentan más de una solución para un determinado valor de carga. Estos dos casos son los **arcos planos** y las **cúpulas monocapa** de barras. Ambos presentan un tipo de inestabilidad elástica debida a no linealidades geométricas conocido como *snap through*. En el caso de los arcos resistentes de una sola pieza hablaremos de *snap through* local, mientras que en el caso de las cúpulas hablaremos mejor de **pandeo global**.

En general estos casos se deben a la no unicidad del campo de desplazamientos para ciertos valores de las cargas. Así, sucede que para un determinado valor de las cargas existen dos posibles estados de equilibrio compatibles con las cargas. Si llamamos  $P = (P_1, \dots, P_n)$  al vector de cargas y  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$  al vector de desplazamientos asociados a  $P$ , entonces la falta de unicidad puede darse en un punto con un máximo relativo, donde se cumple que el determinante de la matriz jacobiana es nulo:

$$\det \left[ \frac{\partial(P_1, \dots, P_n)}{\partial(\delta_1, \dots, \delta_n)} \right] = 0 \quad [2.65]$$

El criterio anterior es, de hecho, equivalente al criterio de Trefftz de inestabilidad elástica, que dice que cuando la matriz hessiana de energía potencial elástica tiene algún valor propio igual a 0 la estructura es inestable.

Si tomamos un arco o una cúpula monocapa y aumentamos progresivamente la carga, se llega a un punto donde la condición anterior se cumple.

### 2.7.1. Un modelo simple con pandeo global

Consideraremos el tipo más sencillo de estructura posible que puede sufrir pandeo global (del tipo *snap through*). Esta estructura se muestra en la figura FIG. 2.13 y está formada por dos barras rectas de la misma longitud, articuladas en su apoyo inferior formando un ángulo  $\theta$  con la horizontal y articuladas entre ellas en la parte superior.

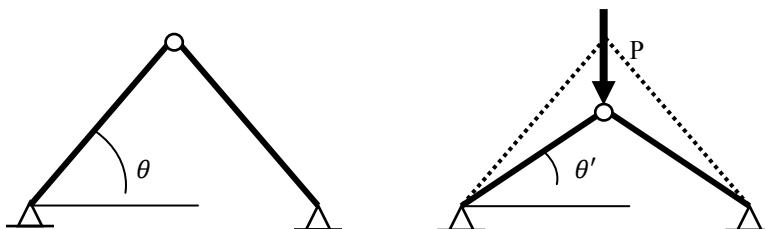


FIG. 2.13.  
Configuración de  
deformada y deformada  
de pórtico articulado.

Si aplicamos las ecuaciones de equilibrio a la configuración deformada, obtenemos la relación entre  $P$  y el esfuerzo axil  $N$  de cada una de las barras:

$$P = 2N \cdot \sin \theta' \quad [2.66]$$



Si aceptamos que en la configuración deformada el material se sigue comportando elásticamente, la relación entre  $N$  y el acortamiento  $\Delta L$  viene dada por la relación lineal  $N = EA(\Delta L/L)$  que, sustituida en la expresión anterior, nos lleva a:

$$P = 2EA \frac{\Delta L}{L} \sin \theta' \quad [2.67]$$

Si llamamos  $H$  a la distancia horizontal entre apoyos, la relación geométrica entre el acortamiento y las longitudes iniciales y finales es:

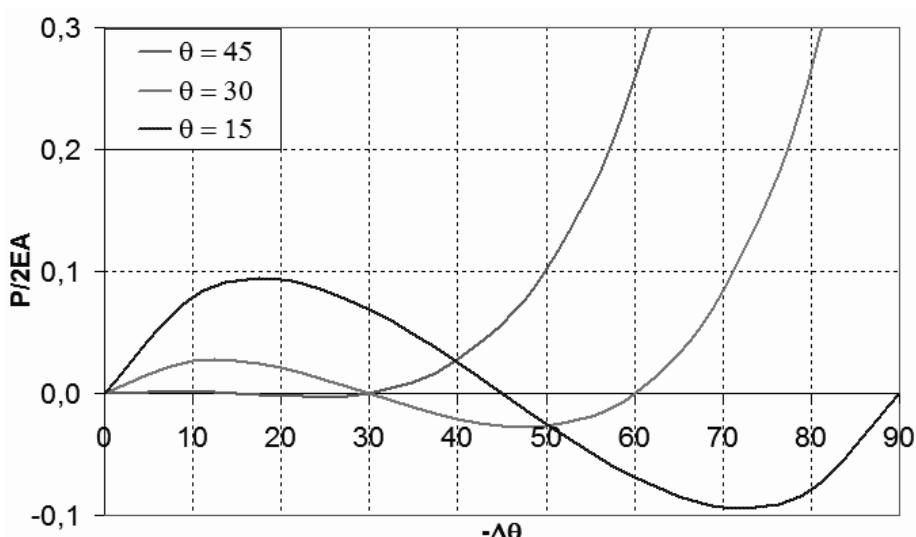
$$H/2 = L \cdot \cos \theta = (L - \Delta L) \cdot \cos \theta' \quad [2.68]$$

Si despejamos de esa ecuación el acortamiento  $\Delta L = L \cdot (1 - \cos \theta/\cos \theta')$ , llegamos finalmente a la siguiente relación no lineal entre la carga aplicada y la deformación angular  $\Delta\theta$ :

$$P = 2EA \left( 1 - \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} \right) \sin \theta' = 2EA \left( 1 - \frac{\cos \theta}{\cos(\theta + \Delta\theta)} \right) \sin(\theta + \Delta\theta) \quad [2.69]$$

La siguiente gráfica ilustra la relación entre  $P/2EA$  y la variación angular  $\Delta\theta$ :

FIG. 2.14.  
Variación de la fuerza  
aplicada con la  
deformación angular  
obtenida.



Todas ellas presentan una característica curiosa: inicialmente la fuerza necesaria para aumentar la deformación ( $\Delta\theta$ ) aumenta, pero a partir de un cierto punto, según el ángulo inicial de apuntamiento ( $\theta$ ), la fuerza empieza a decrecer. Eso implica, de hecho, que si consideramos la fuerza necesaria  $P(\Delta\theta)$  se cumple  $dP(\Delta\theta_G)/d(\Delta\theta_G) = 0$  para un valor  $\Delta\theta_G$  de la deformación angular, dado por:



$$\frac{dP(\Delta\theta_G)}{d(\Delta\theta_G)} = \frac{2EA}{\cos^2(\theta + \Delta\theta_G)} (\cos^3(\theta + \Delta\theta_G) - \cos(\theta)) = 0 \quad [2.70a]$$

Si definimos  $\theta'_G = \theta + \Delta\theta_G$ , el valor del ángulo total para el cual se produce pandeo global viene dado, en función del apuntamiento inicial ( $\theta$ ), por:

$$\cos\theta_G = (\cos\theta)^{\frac{1}{3}} \quad [2.70b]$$


---

<sup>12</sup> Como por ejemplo, viscoelasticidad, viscoplasticidad, relajación de tensiones, endurecimiento, etc.

<sup>13</sup> Las condiciones de contorno no afectan a la derivada, como en un problema de Cauchy o de Sturm-Liouville regular.

<sup>14</sup> Una ecuación como  $A \cdot \sin(B) = 0$ , sólo puede cumplirse si  $A = 0$ , o bien,  $\sin(B) = 0$ . De esta última posibilidad se deduce que  $B = n\pi$  (o el caso trivial  $A = 0$ ).

<sup>15</sup> El método omega sigue el enfoque de Dutheil del pandeo, con lo que resulta que dicho coeficiente puede

$$\text{tomarse como: } \omega = \frac{1}{2} \left[ 1 + (1 + \delta_r) \frac{\sigma_u}{\sigma_e} \right] + \sqrt{\frac{1}{4} \left[ 1 + (1 + \delta_r) \frac{\sigma_u}{\sigma_e} \right]^2 - \frac{\sigma_u}{\sigma_e}}, \text{ tomándose } \delta_r = 0,3.$$

<sup>16</sup> Se apreciará que esta definición no es práctica. Si se desconoce la carga crítica de una barra, ésta no se puede definir.

<sup>17</sup> NBE-EA-95: Norma Básica de la Edificación: Estructuras de Acero, 1995.

<sup>18</sup> CTE: Código Técnico de la Edificación, 2006.

<sup>19</sup> MV-103/1972, Norma del Ministerio de la Vivienda.

<sup>20</sup> Aquí el subíndice  $\square_b$  se refiere al inglés *buckling* "pandeo", mientras que el subíndice  $\square_{pl}$  se refiere al *plastic* "plástico".

<sup>21</sup>  $\chi$ , letra griega pronunciada habitualmente "ji" (a veces transcrita también como *chi* o *khi*).

<sup>22</sup> La esbeltez límite es  $\lambda_1 = L_{Fe} \cdot \varepsilon$ , donde  $\varepsilon = (235 \text{ MPa}/f_y)^{0.5}$ ,  $L_{Fe} = 93,9$  para un acero de tipo Fe430 y  $L_{Fe} = 76,4$  para un acero de tipo Fe510. La norma de acero estructural EAE simplifica esta elección y considera  $L_{Fe} = 93,9$  en todos los casos.

<sup>23</sup> Esta esbeltez intermedia depende del tipo de curva de pandeo. Para la curva  $a_0$  se tiene  $\lambda_{in} \approx 1,07$ ; para  $a\lambda_{in} \approx 1,02$ ; para  $b\lambda_{in} \approx 0,93$ ; para  $c\lambda_{in} \approx 0,79$ , etc.

<sup>24</sup> El Eurocódigo introduce un factor multiplicativo adicional  $\beta_A^{1/2}$ .

<sup>25</sup> Este coeficiente es aproximadamente el inverso del coeficiente  $\omega$ .

<sup>26</sup> Aquí consideraremos que la torsión puede tratarse como torsión pura no alabeada, lo que comporta un error considerable en el cálculo de las tensiones asociadas a la torsión. Sin embargo debido a la pequeñez del momento torsor el cálculo de la parte debida a la torsión es poco importante.

<sup>27</sup> Una sección empotrada tiene el alabeo totalmente impedido y  $\beta_0 = 0,5$ , una sección sin coacción al alabeo, tiene  $\beta_0 = 1,0$ .



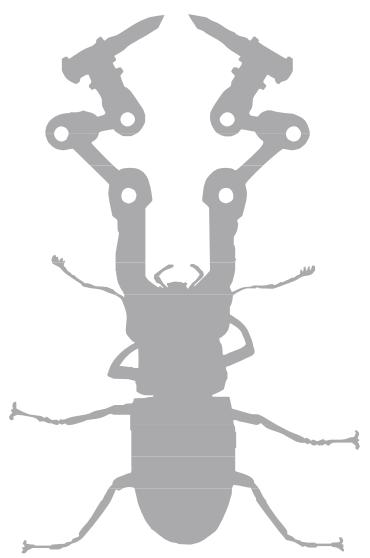
---

<sup>28</sup> Es decir, no se satisface la hipótesis de Navier-Bernoulli, ni la hipótesis de Timoshenko de la flexión, por lo que el mecanismo de fallo difiere del fallo habitual por flexión.

<sup>29</sup> Los valores de  $\eta_{g,ab}$  dados en esta fórmula, provienen de considerar  $\psi = 0,5$  y, por tanto,  $K_\sigma = 6,65$ , con lo cual la condición de que la tensión máxima esté por debajo de la última  $\sigma_{max} = K_\sigma \sigma_{ab} = 6,65 \cdot (186 \text{ MPa}) \cdot (e_w/h_w)^2 \leq \sigma_u$  implica esos valores.

<sup>30</sup> El valor del coeficiente  $k_r$  para el cálculo plástico está dado en la sección 6.3.3.3 del CTE SE-A (pág. 44). El código técnico lo llama  $k_t$ .

<sup>31</sup> S. Timoshenko y J. Gere (1961): *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Companies, 2.<sup>a</sup> edición.



→3



# Placas, láminas y membranas

## 3.1. Definiciones

Una placa es un elemento estructural que trabaja predominantemente a flexión y que puede ser modelizado adecuadamente por un modelo de cálculo bidimensional. Para que el modelo bidimensional que se expone en este capítulo sea adecuado, deben satisfacerse ciertas condiciones tanto geométricas como del tipo de solicitación que soporta. Las dos siguientes condiciones son:

[G] Estructura superficial plana, limitada por planos paralelos, cuya distancia  $h$  al plano medio es pequeña comparada con las otras dimensiones de la placa ( $h/2 \cdot A^{1/2} \ll 1$ ), limitadas por una superficie lateral perpendicular a los dos planos extremos (básicamente esta condición establece que se calculan como elementos 2D).

[C] Además, para poder tratar un elemento como placa [delgada] bajo la acción de cargas transversales y esfuerzos de borde la placa, se deforma con pequeñas flechas, es decir, si la placa está en el plano XY, debe cumplirse que  $u_z(x,y)/h \ll 1$ .

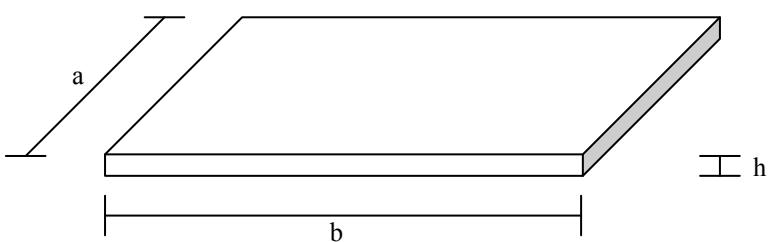


FIG. 3.1.  
Dimensiones generales  
de una placa  
rectangular.

Más en general, podemos definir otro tipo de estructuras superficiales más complejas:

En la norma UNE las condiciones [G] y [C] se establecen cuantitativamente de la siguiente manera:

[G] luz mínima / espesor medio =  $a / h_{med} > 5$

[C] flecha máxima / espesor medio =  $w_{max} / h_{med} < 1/5$



**TABLA 3.1.**  
Clasificación de los  
elementos estructurales  
bidimensionales.

<b>Elementos 2D</b>	Placas	placas delgadas ( $h/a < 1/5$ )	Losas. Placas delgadas propiamente dichas.	
		placas delgadas ( $h/a > 1/5$ )	Estado triaxial de tensiones.	
<b>Elementos 3D</b>		Cumplen [G] pero no [C].		
<b>Elementos 3D</b>	Láminas	En la naturaleza: conchas de los moluscos, cáscaras de huevo.		
	Membranas	En la construcción: cúpulas, depósitos cilíndricos, torres refrigeración de forma de hiperboloide, chimeneas centrales térmicas. <sup>32</sup>		
		No cumplen ni [G] ni [C]. El cálculo de membranas delgadas guarda analogías con la torsión de perfiles no circulares (Prandtl, 1903).		

En cuanto a la tipología de las placas, encontramos otros parámetros: rectangular/circular, macizas/huecas. Y en cuanto al tipo de apoyo en los bordes de la placa tenemos, contornos empotrados ( $w_{cont} = 0$ ,  $dw_{cont}/dx = 0$ ) contornos simplemente apoyados ( $w_{cont} = 0$ ,  $dw_{cont}/dx \neq 0$ ) y contornos en voladizo ( $w_{cont} \neq 0$ ,  $dw_{cont}/dx \neq 0$ ).

### 3.2. Métodos de cálculo para placas delgadas

**TABLA 3.2.**  
Métodos de cálculo  
usuales para elementos  
bidimensionales.

<b>Métodos clásicos (basados en el sólido elástico, permiten obtener esfuerzos de servicio)</b>	Métodos exactos	Método analítico de Kirchhoff	Desarrollo en serie, que da muy buenos resultados.
	Métodos numéricos	Método de las diferencias finitas (MDF)	Fácilmente programable da resultados razonables.
<b>Métodos en rotura (basados en el sólido rígido-plástico, permiten obtener cargas de rotura y el mecanismo por el que se producen)</b>		Método de los elementos finitos (MEF)	Más complejo que el anterior.
	Métodos simplificados	Marcus	Erros grandes sólo se usa como predimensionado.
		Ancho eficaz	
		Método de las líneas de rotura	Para placas de hormigón.



### 3.3. Métodos clásicos

Todos los métodos clásicos, excepto el método de Marcus,<sup>33</sup> se basan en el modelo elástico lineal, y en la siguiente ecuación de gobierno de placas o ecuación de Lagrange:

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad [3.1]$$

A continuación damos un repaso rápido a la deducción de la ecuación [3.1]. El punto de partida es apreciar que una placa sometida a las condiciones [G] y [C] tendrá un estado de tensión plana, y hacer una hipótesis razonable (hipótesis de Love-Kirchhoff) sobre los desplazamientos (hipótesis cinemática) que nos permita calcular las deformaciones.

En el estudio de placas y láminas se distingue entre dos modelos, la hipótesis de Mindlin-Reissner y la hipótesis de Love-Kirchhoff. La primera de estas hipótesis conduce a un modelo análogo a la viga de Timoshenko (en el que la derivada de la elástica no necesariamente iguala el ángulo girado por la sección), mientras que la segunda de estas hipótesis conduce a un modelo análogo a la viga de Bernoulli, en que  $u'(x) = \theta(x)$ , al despreciarse el efecto de los cortantes en la deformación.

El modelo de Reissner-Mindlin puede descomponerse en cuatro hipótesis:

- H1) Hipótesis de linealidad. Los segmentos situados sobre las normales al plano medio se deforman linealmente y sus deformadas siguen siendo segmentos rectos.
- H2) Los desplazamientos en dirección Z no dependen de la coordenada z.
- H3) Los puntos en el plano medio sólo sufren desplazamiento en z y giro.
- H4) La componente de tensión  $\sigma_{zz}$  es nula.

Las hipótesis H2 y H3 pueden escribirse en forma de hipótesis cinemática:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \\ u_x(x, y, 0) = u_y(x, y, 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x(x, y, z) = -z\theta_x(x, y) \\ u_y(x, y, z) = -z\theta_y(x, y) \\ u_z(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad [3.2a]$$

El modelo de Love-Kirchhoff es un caso particular del de Reissner-Mindlin obtenido añadiendo una hipótesis adicional:

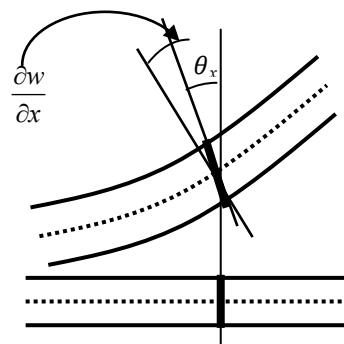


FIG. 3.2.  
Hipótesis de Love-Kirchhoff.



H5) Los vectores inicialmente normales al plano medio siguen siendo normales al plano medio deformado.

Esta condición sólo puede cumplirse si la derivada de la flecha en cada dirección coincide con los giros, lo que lleva a:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad [3.2b]$$

Por lo que todos los desplazamientos pueden ser expresados en función de  $w$  y sus derivadas primeras:

$$\begin{aligned} u_x &= -z \frac{\partial w}{\partial x} & \hat{\varepsilon}_{xx} &= -z \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ u_y &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \wedge \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \Rightarrow \hat{\varepsilon}_{yy} &= -z \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ u_z &= w(x, y) & \hat{\varepsilon}_{xy} &= -z \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \end{aligned} \quad [3.3a]$$

A continuación usamos las ecuaciones de Lamé-Hooke (relación entre deformaciones y tensiones), teniendo en cuenta que una placa en las condiciones [C] y [G] tiene un estado de **tensión plana** respecto a los planos perpendiculares al eje Z.<sup>34</sup>

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - v \sigma_{yy}) & \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-v^2} (\hat{\varepsilon}_{xx} + v \hat{\varepsilon}_{yy}) \\ \hat{\varepsilon}_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - v \sigma_{xx}) & \Rightarrow \quad \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-v^2} (\hat{\varepsilon}_{yy} + v \hat{\varepsilon}_{xx}) \\ \hat{\varepsilon}_{xy} &= \frac{(1+v)}{E} \sigma_{xy} & \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+v} \hat{\varepsilon}_{xy} \end{aligned} \quad [3.3b]$$

Sustituyendo los resultados de [3.2a] y [3.3a] en [3.3b] se llega fácilmente a que las tensiones en la placa vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{-zE}{1-v^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] & \sigma_{xy} &= \frac{-zE}{1+v} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{-zE}{1-v^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] & \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad [3.3c]$$

Con estas expresiones de la tensión pueden calcularse sin problemas los esfuerzos por unidad de ancho de placa:



$$\begin{aligned}
 m_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \sigma_{xx} dz = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] & v_x &= \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\
 m_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \sigma_{yy} dz = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] & v_y &= \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] [3.4] \\
 m_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \sigma_{xy} dz = -D(1-v) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] & D &\equiv \frac{Eh^3}{12(1-v^2)}
 \end{aligned}$$

dondem<sub>x</sub> y m<sub>y</sub> son los momentos flectores por unidad de ancho en X e Y, m<sub>xy</sub>, el momento torsor en Z por unidad de ancho, y v<sub>x</sub> y v<sub>y</sub> son los esfuerzos cortantes por unidad de ancho. El coeficiente D se llama rigidez a flexión de placas. Esta rigidez depende de h<sup>3</sup> lo cual significa que dadas dos placas del mismo material e idénticas superficies y cargas, pero una el doble de gruesa que la otra, la placa más gruesa tendrá deformaciones 2<sup>3</sup> = 8 veces menor que la más delgada.

Finalmente la ecuación [3.1] se obtiene planteando el equilibrio local de fuerzas verticales, que conduce a la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + q(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} [3.5]$$

donde para obtener la ecuación [3.1] no hay más que sustituir las expresiones [3.4] en la ecuación de equilibrio local [3.5].

Para especificar completamente el comportamiento de una placa, la ecuación [3.1] necesita ser complementada con las condiciones de contorno pertinentes para el borde de la placa. En general un tramo del borde de la placa puede encontrarse en alguna de estas tres situaciones:

a) Borde empotrado:

$$w(x, y)|_{borde} = 0 \quad (n \cdot \nabla) w|_{borde} = 0 [3.6a]$$

b) Borde simplemente apoyado:

$$w(x, y)|_{borde} = 0 \quad (n \cdot m)|_{borde} = 0 [3.6b]$$

c) Borde libre:

$$v - t \cdot \nabla m_{xy}|_{borde} = 0 \quad (n \cdot m)|_{borde} = 0 [3.6c]$$

donden es un vector perpendicular al borde y t es un vector tangente a dicho borde. Dada una geometría bidimensional  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  en el plano y unas cargas  $q(x, y)$  por unidad de superficie, la ecuación [3.1] más las condiciones de borde [3.5] determinan el desplazamiento vertical  $w(x, y)$  y, por lo tanto, todas las tensiones, las deformaciones y los desplazamientos en cualquier punto de la placa.



En general, para una forma geométrica  $\Omega$  complicada<sup>35</sup> no es posible encontrar la solución analítica del sistema [3.1] + [3.6]. Por eso se recurre a métodos numéricos aproximados.

### 3.3.1. Método de Kirchhoff

El método de Kirchhoff es un caso particular de separación de variables, en el que buscamos una soluciones del tipo  $f_i(x,y) = X_i(x) \cdot Y_i(y)$  y construimos una solución general sumando varias de dichas funciones. En particular, para una placa rectangular de dimensiones  $L_x \times L_y$  simplemente apoyada, la flecha puede expresarse con funciones de la forma:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad [3.7]$$

Si sustituimos esta forma en la ecuación de gobierno [3.1], podemos relacionar los coeficientes  $w_{mn}$  con la forma funcional de la carga. Para ello desarrollamos primero la carga en serie de Fourier:

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \\ q_{mn} &\equiv \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} q(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy \end{aligned} \quad [3.8]$$

Si ahora sustituimos [3.7] y [3.8] en la ecuación de gobierno [3.1], se llega fácilmente a la siguiente relación de la flecha en función de las cargas:

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{D\pi^4} \left( \left( \frac{m}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{n}{L_y} \right)^2 \right)^{-2} \quad [3.9]$$

Si usamos las fórmulas en [3.4], también podemos calcular los momentos por unidad de ancho a partir de los coeficientes  $w_{mn}$ :

$$\begin{aligned} m_x &= \pi^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{m^2}{L_x^2} \right) + v \left( \frac{n^2}{L_y^2} \right) \right] w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \\ m_y &= \pi^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ v \left( \frac{m^2}{L_x^2} \right) + \left( \frac{n^2}{L_y^2} \right) \right] w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \\ m_{xy} &= \pi^2 D (1-v) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{mn}{L_x L_y} \right] w_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \end{aligned} \quad [3.10]$$

Las tensiones se obtienen sustituyendo estas fórmulas en [3.3c] y el resultado es:



$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{12z}{h^3} m_x(x, y) & \sigma_{xy} = \frac{12z}{h^3} m_x(x, y) \\ \sigma_{yy} = \frac{12z}{h^3} m_x(x, y) & \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \end{cases} \quad [3.11a]$$

Y la tensión combinada de Von Mises es:

$$\sigma_{co} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\sigma_{xy}^2} = \frac{12z}{h^3} \sqrt{m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3m_{xy}^2} \quad [3.11b]$$

### Ejemplo numérico 1

Considerar una placa de  $2,00 \times 1,50$  [m] con una carga uniforme de  $200 \text{ kg/m}^2$  y estimar la flecha máxima a partir de la fórmula de Kirchhoff [3.10] en función del módulo de rigidez D.

El cálculo de los coeficientes de Fourier para la carga uniforme es muy sencillo:

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_y} q_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy = \\ &= q_{mn} \equiv \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} q_0 \underbrace{\left( \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) dx \right)}_{r_m(L_x)} \cdot \underbrace{\left( \frac{2}{L_y} \int_0^{L_y} \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy \right)}_{r_n(L_y)} \end{aligned}$$

Es decir,  $q_{mn} = r_m(L_x) \cdot r_n(L_y)$ . El cálculo de  $r_k(L_j)$  es muy fácil:

$$r_k(L) = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{\pi m} [1 - \cos(m\pi)] \Rightarrow q_{mn} = \begin{cases} \frac{16q_0}{\pi^2 mn} & m \text{ y } n \text{ impares} \\ 0 & m \text{ o } n \text{ par} \end{cases}$$

A partir de ahí tenemos que  $w(x, y)$  para cargas uniformes en toda la placa es simplemente:

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn} \left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^{-2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

Puesto que la flecha máxima  $w_{max}$  se da en el centro de la placa, es decir,  $w_{max} = w(L_x/2, L_y/2)$ , con lo cual la fórmula anterior se simplifica como:

$$w_{max} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}+1}}{mn} \left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^{-2} \quad [3.12]$$



Puesto que la serie en [3.10] es rápidamente decreciente, a medida que aumentan  $m$  y  $n$  bastará simplemente con calcular unos pocos términos para obtener una aproximación suficiente:

$$w_{\max} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \left[ \begin{aligned} & \frac{1}{1} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2,25} \right)^{-2} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{4} + \frac{9}{2,25} \right)^{-2} - \frac{1}{3} \left( \frac{9}{4} + \frac{1}{2,25} \right)^{-2} + \dots \\ & \dots + \frac{1}{9} \left( \frac{9}{4} + \frac{9}{2,25} \right)^{-2} + \frac{1}{5} \left( \frac{1}{4} + \frac{25}{2,25} \right)^{-2} + \frac{1}{5} \left( \frac{25}{4} + \frac{1}{2,25} \right)^{-2} \end{aligned} \right] = \dots \\ \dots &= \frac{16q_0}{\pi^6 D} [2,0736 - 0,0185 - 0,0459 + 0,0028 + 0,0015 + 0,0045] = \frac{16q}{\pi^6 D} \cdot 2,0181 \end{math>$$

El valor exacto es, de hecho,  $w_{\max} = 16q_0/\pi^6 D \cdot 2,0164 \text{ m}^4 = 66,31 [\text{kp} \cdot \text{m}^2]/D$  por lo que el error tomando sólo seis términos es del 0,08 %.

### Ejemplo numérico 2

Dimensionar la placa simplemente apoyada del ejemplo anterior de  $2,00 \times 1,50$  [m] con la carga uniforme de  $200 \text{ kg/m}^2$ , también del ejemplo anterior, considerando que está hecha de acero [ $E_s = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y  $\sigma_{\text{adm}} = 2400 \text{ kp/cm}^2$ ].

En primer lugar, debemos calcular los esfuerzos. Los máximos momentos flectores se dan precisamente en el centro de la placa y vienen dados por:

$$m_{x,\max} = \frac{16q_0}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}+1}}{mn} \left[ \left( \frac{m^2}{L_x^2} \right) + v \left( \frac{n^2}{L_y^2} \right) \right] \left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^{-2} \quad [3.13]$$

$$m_{y,\max} = \frac{16q_0}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}+1}}{mn} \left[ v \left( \frac{m^2}{L_x^2} \right) + \left( \frac{n^2}{L_y^2} \right) \right] \left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^{-2}$$

En cambio, el momento torsor máximo se da en las esquinas de la placa ( $x = L_x$ ,  $y = L_y$ ) y su valor en máximo en ese punto es:

$$m_{xy,\max} = \frac{16q_0}{\pi^4} \frac{(1-v)}{L_x L_y} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^{-2} \quad [3.14]$$

Los valores de los momentos, tomando respectivamente los seis primeros términos, los diez primeros términos y el valor exacto, son respectivamente:

	Seis términos [m <sup>2</sup> ]	Diez términos [m <sup>2</sup> ]	Valor exacto [m <sup>2</sup> ]
$m_{x,\max} \cdot (\pi^4/16q_0)$	0,6596 [102,0 %]	0,6405 [99,0 %]	0,6470
$m_{y,\max} \cdot (\pi^4/16q_0)$	0,9692 [101,2 %]	0,9518 [99,4 %]	0,9577
$m_{xy,\max} \cdot (\pi^4/16q_0)$	0,5806 [97,5 %]	0,5864 [98,5 %]	0,5954



A partir de estos momentos flectores, procedemos a calcular las tensiones mediante la fórmula de Navier. La tensión máxima se da en el centro de la placa. Atendiendo al criterio de tensión máxima de Rankine y al valor de la tensión admisible  $\sigma_{adm} = 2400 \text{ kp/cm}^2$ , el espesor mínimo resulta ser:

$$\begin{aligned}\sigma_{adm} &\geq \sigma_{max} \approx \frac{\max(m_x, m_y) h}{h^3/12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{16}{\pi^4/6} \cdot 200 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2} \cdot 0,9577 \text{ m}^2 \frac{1}{h^2} \Rightarrow \\ 2400 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} &\geq \frac{188,8 \text{ kp}}{h^2} \Rightarrow h = 0,28 \text{ cm}\end{aligned}$$

El criterio de la máxima energía de distorsión es más adecuado para materiales dúctiles, aunque en este caso no resulta más desfavorable que el criterio de Rankine:

$$\left. \begin{aligned}\sigma_{xx} &\approx \frac{m_x}{h^3/12} \frac{h}{2} = \frac{16q_0}{\pi^4} \cdot \frac{6 \cdot 0,6470 \text{ m}^2}{h^2} \\ \sigma_{yy} &\approx \frac{m_y}{h^3/12} \frac{h}{2} = \frac{16q_0}{\pi^4} \cdot \frac{6 \cdot 0,9577 \text{ m}^2}{h^2} \\ \sigma_{xy} &\approx 0\end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned}\sigma_{co} &= \frac{16q_0}{\pi^4} \frac{6}{h^2} 0,8463 \text{ m}^2 \leq \sigma_{adm} \Rightarrow \\ h &\geq 0,26 \text{ cm}\end{aligned} \right\}$$

Adoptaremos  $h = 0,30 \text{ cm}$  y calcularemos la flecha vertical según las ecuaciones del ejemplo numérico 1:

$$\begin{aligned}D &= \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot 0,027 \text{ cm}^3}{12 \cdot 0,93} = 5080,6 \text{ kp} \cdot \text{cm} \\ w_{max} &= \frac{16q}{\pi^6 D} \cdot 2,0164 \text{ m}^2 = \frac{6452 \text{ kp} \cdot \text{m}^2}{961,450,80 \text{ kp} \cdot \text{m}} = 0,13 \text{ m}\end{aligned}$$

Para lograr  $w_{max} < L/250$  se requiere  $h > 0,76 \text{ cm}$ .

### Ejemplo numérico 3

Dimensionar la altura de una placa simplemente apoyada como la del ejemplo anterior, considerando que está fabricada con TRAMEX® con láminas de espesor 2mm separadas cada 18 mm [ $E_s = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y  $\sigma_{adm} = 2400 \text{ kp/cm}^2$ ].

a) *Criterio de resistencia.* El momento máximo no cambia, pero tenemos que recalcular el momento resistente por unidad de ancho. En  $b = 1000 \text{ mm}$  de ancho tenemos 50 láminas, donde el número de láminas  $n$ , el momento de inercia y el momento resistente por unidad de ancho vienen dados por:

$$\begin{aligned}n &= \frac{b}{s_L + e_L} = \frac{1000 \text{ mm}}{(18+2) \text{ mm}} = 50 & I_L &= \frac{e_L h_L^3}{12} \\ I_b &= \frac{I_L}{b} = n \left( \frac{e_L}{b} \right) \frac{h_L^3}{12} & w_b &= \frac{I_b}{h/2} = n \left( \frac{e_L}{b} \right) \frac{h_L^2}{6} = 0,10 \frac{h_L^2}{6} \quad [3.15]\end{aligned}$$



El cálculo de la altura se hace imponiendo como antes que la tensión no sobrepase la de límite admisible:

$$\sigma_{adm} \geq \sigma_{max} \approx \frac{\max(m_x, m_y) h}{I_b} \frac{1}{2} = 31,46 \text{ kp} \frac{1}{0,10 \cdot h_L^2} \Rightarrow$$

$$2400 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \geq \frac{314,6 \text{ kp}}{h^2} \Rightarrow h = 0,362 \text{ cm}$$

b) *Criterio de rigidez.* Dimensionaremos la placa para que se cumpla el criterio habitual  $w_{max}/L_x < 1/200$ . Para eso necesitaremos evaluar la rigidez flexional contabilizando el porcentaje de huecos:

$$D_{tram} = \frac{E_s h_L^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{e_L}{e_L + s_L} \right] = \frac{e_L}{e_L + s_L} D_{max} \quad [3.16]$$

El cálculo de la altura se hace imponiendo que la flecha no sobrepase el límite admisible:

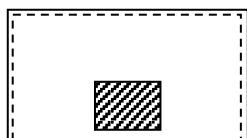
$$\frac{1}{200} \geq \frac{w_{max}}{L_x} = \frac{16q_0}{\pi^6 D_{tram}} \frac{2,0181 \text{ m}^4}{L_x} = \frac{3315 \text{ kp} \cdot \text{cm}}{D_{tram}} \Rightarrow h^3 \geq 35,52 \text{ cm}^3 \Rightarrow h \approx 3,30 \text{ cm}$$

Nota: en un TRAMEX® con un tanto por uno de huecos  $\eta$ , y una resistencia igual que una placa maciza se obtiene:

$$h_{tram} = \frac{h_{max}}{\sqrt{1-\eta}} \quad w_{tram} = w_{max} \sqrt{1-\eta}$$

#### Ejemplo numérico 4

Considerar una placa simplemente apoyada de 2,00 m × 1,60 m con una carga uniforme en un rectángulo central de 0,50 × 0,40 de 200 kg/m<sup>2</sup> y estimar la flecha máxima a partir de las fórmulas [3.7]-[3.10] en función del módulo de rigidez D.



En primer lugar, necesitamos calcular los coeficientes de Fourier para la carga uniforme del rectángulo central para obtener una fórmula general definamos  $2\alpha \times 2\beta = 0,50 \times 0,40$ :

$$q_{mn} \equiv \frac{4}{L_x L_y} \int_{\frac{L_x - 2\alpha}{2}}^{\frac{L_x + 2\alpha}{2}} \int_{\frac{L_y - 2\beta}{2}}^{\frac{L_y + 2\beta}{2}} q_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy$$

Puede verse que  $q_{mn} = q_0 \cdot r_m \cdot s_n$  y que los valores de  $r_m$  con  $m$  par y los de  $s_n$  con  $n$  par son 0. El resto de coeficientes pares son sencillos de calcular:



$$r_m = \begin{cases} \frac{4(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\pi m} \sin\left(\frac{m\pi\alpha}{L_x}\right) & m \text{ impar} \\ 0 & m \text{ par} \end{cases} \quad s_n = \begin{cases} \frac{4(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi\beta}{L_y}\right) & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases} \quad [3.17]$$

Con estos valores calculados y sustituyendo el valor de los coeficientes  $q_{mn}$  en la expresión [3.8], el valor calculado para la flecha es simplemente:

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n-1}{2}}}{mn} \frac{\sin\left(\frac{m\pi\alpha}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi\beta}{L_y}\right)}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

En particular, la flecha máxima vendrá dada por:

$$w_{\max} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn} \left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^{-2} \sin\left(\frac{m\pi\alpha}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi\beta}{L_y}\right) \quad [3.18a]$$

El valor de la flecha tomando respectivamente los seis primeros términos, los diez primeros términos y el valor exacto son respectivamente:

	Seis términos [m <sup>4</sup> ]	Diez términos [m <sup>4</sup> ]	Valor exacto [m <sup>4</sup> ]
$w_{\max} \cdot (\pi^6 D / 16q_0)$	0,387212 [99,69 %]	0,388390 [99,99 %]	0,388427

a) *Criterio de rigidez.* Al imponer que se cumpla que la flecha entre la luz esté acotada por cierto valor, se obtiene el espesor mínimo necesario:

$$w_{\max} \left( \frac{\pi^6 D}{16q_0} \right) = 0,3506 \text{ m}^4 \leq \frac{L_y}{200} \left( \frac{\pi^6}{16q_0} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \right) \Rightarrow h \geq 4,4 \text{ mm}$$

b) *Criterio de resistencia.* En cuanto al cálculo de los momentos:

$$m_{x,\max} = \frac{16q_0}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn} \left( \frac{m^2}{L_x^2} + \nu \frac{n^2}{L_y^2} \right) \left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^{-2} \sin\left(\frac{m\pi\alpha}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi\beta}{L_y}\right) \quad [3.18b]$$

$$m_{y,\max} = \frac{16q_0}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn} \left( \nu \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right) \left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^{-2} \sin\left(\frac{m\pi\alpha}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi\beta}{L_y}\right) \quad [3.18c]$$

	6 términos [m <sup>2</sup> ]	10 términos [m <sup>2</sup> ]	Valor exacto [m <sup>2</sup> ]
$m_{x,\max} \cdot (\pi^4 / 16q_0)$	0,19740 [94,99%]	0,20751 [99,85%]	0,20781
$m_{y,\max} \cdot (\pi^4 / 16q_0)$	0,22923 [96,88%]	0,23786 [100,05%]	0,23661



Buscando el espesor mínimo para que la tensión máxima esté por debajo de la tensión admisible ( $\sigma_{adm} = 2400 \text{ kp/cm}^2$ ) se obtiene el espesor mínimo necesario:

$$\sigma_{max} = \frac{6m_{max}}{h^2} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow h \geq 1,4 \text{ mm}$$

### Ejemplo numérico 5

Considerar una placa simplemente apoyada de  $2,00 \text{ m} \times 1,60 \text{ m}$  con una carga puntual centrada  $P = 40 \text{ kp}$  y estimar la flecha máxima en función del módulo de rigidez  $D$  usando los resultados del apartado anterior.

Podemos considerar este caso como el límite de una carga rectangular distribuida en un espacio muy pequeño. Si hacemos  $\alpha = \beta$  en la ecuación [3.18a] y tomamos  $q_0 = P/4\alpha^2$  y pasando al límite cuando  $\alpha \rightarrow 0$  tenemos el resultado buscado:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} w_{max}(\alpha) = \frac{4P}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn} \left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^{-2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(m\pi\alpha/L_x)}{\alpha} \frac{\sin(n\pi\alpha/L_y)}{\alpha}$$

Y puesto que:

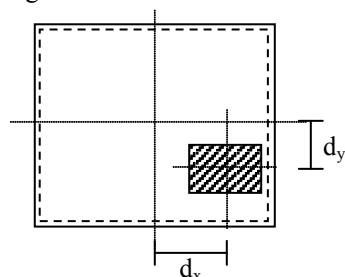
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha c)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{c \cdot \cos(\alpha c)}{1} = c$$

se tiene finalmente que:

$$w_{max} = \frac{4}{\pi^4 D} \left( \frac{P}{L_x L_y} \right) \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^{-2} \quad [3.19]$$

### Ejemplo numérico 6

Considerar una placa simplemente apoyada de  $2,00 \text{ m} \times 1,60 \text{ m}$  con una carga uniforme  $q_0 = 200 \text{ kg/m}^2$  sobre un rectángulo de  $2\alpha \times 2\beta = 0,50 \times 0,40$  cuyo centro está a distancias  $d_x = 0,60 \text{ m}$  y  $d_y = 0,40 \text{ m}$  respecto al centro (tal como indica la figura). Con estos datos calcular la flecha máxima a partir de las fórmulas [3.7]-[3.10] en función del módulo de rigidez  $D$ .



Como siempre, necesitamos calcular los coeficientes de Fourier para el tipo de carga, en este caso carga uniforme descentrada:

$$q_{mn} \equiv \frac{4}{L_x L_y} \int_{\frac{L_x}{2} + d_x - \alpha}^{\frac{L_x}{2} + d_x + \alpha} \int_{\frac{L_y}{2} + d_y - \beta}^{\frac{L_y}{2} + d_y + \beta} q_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy$$



Se tiene nuevamente que  $q_{mn} = q_0 \cdot s_m \cdot t_n$ , donde  $s_m = r_m(L_x, d_x, \alpha)$  y  $t_n = r_n(L_y, d_y, \beta)$  donde la función  $r_k(L, d, \mu)$  resulta ser igual:

$$r_k(L, d, \mu) = \frac{2}{L} \int_{\frac{L}{2}+d-\mu}^{\frac{L}{2}+d+\mu} \sin\left(\frac{n\pi s}{L}\right) ds = 4 \cdot \sin\left(\frac{k\pi\mu}{L}\right) \sin\left(k\pi\left[\frac{1}{2} + \frac{d}{L}\right]\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{4(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\pi k} \sin\left(\frac{k\pi\mu}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi d}{L}\right) & k \text{ impar} \\ \frac{4(-1)^{\frac{k}{2}}}{\pi k} \sin\left(\frac{k\pi\mu}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi d}{L}\right) & k \text{ par} \end{cases}$$

Con los valores calculados  $s_m$  y  $t_n$  y sustituyendo el valor de los coeficientes  $q_{mn} = q_0 \cdot s_m \cdot t_n$  en la expresión [3.8], el valor calculado para la flecha es simplemente:

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi\alpha}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi\beta}{L_y}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)}{mn\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} \cdot \sin\left(m\pi\left[\frac{1}{2} + \frac{d_x}{L_x}\right]\right) \sin\left(n\pi\left[\frac{1}{2} + \frac{d_y}{L_y}\right]\right). \quad [3.20]$$

### 3.3.2. Método de las diferencias finitas

Este método consiste en encontrar una solución aproximada de la ecuación diferencial [3.1] basada en plantear un sistema algebraico. Para ello se substituyen las derivadas por diferencias incrementales. La idea básica es sencilla, si tenemos en cuenta la definición de derivada como límite de un cociente de diferencias finitas:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h/2, y) - f(x-h/2, y)}{h} \approx \frac{1}{h} (f_{+h} - f_{-h}) \quad f_{m-h} \equiv f(x + \frac{1}{2}m \cdot h)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{\partial f(x+h/2, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x-h/2, y)}{\partial x} \right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{h} \left[ \frac{f_{+2h} - f_0}{h} - \frac{f_0 - f_{-2h}}{h} \right] = \frac{f_{+2h} - 2f_0 + f_{-2h}}{h^2}$$

Para una placa podemos construir un emparrillado o retículo bidimensional y aproximar la solución exacta  $w(x, y)$  mediante los desplazamientos verticales de los puntos de dicho retículo. Antes de pasar a los ejemplos numéricos, desarrollemos una notación cómoda para plantear el esquema de diferencias finitas (véase FIG. 3.3):

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_e - w_w}{2h} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w_n - w_s}{2h} \quad [3.21]$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_e - 2w_0 + w_w}{h^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{w_{nw} - w_{ne} + w_{se} - w_{sw}}{4h^2}$$



$$\Delta w = \frac{w_w + w_e + w_n + w_s - 4w_0}{h^2} \quad [3.22]$$

$$\Delta\Delta w = \frac{1}{h^4} \left( (w_{nn} + w_{ss} + w_{ww} + w_{ee}) + 2(w_{nw} + w_{ne} + w_{sw} + w_{se}) + \dots - 8(w_n + w_s + w_w + w_e) - 20w_0 \right)$$

donde el significado de las componentes  $w_n$ ,  $w_s$ ,  $w_w$ ,  $w_e$ ,  $w_{nn}$ ,  $w_{nw}$ ,  $w_{ne}$ ,  $w_{ss}$ ,  $w_{sw}$ ,  $w_{se}$ ,  $w_{ww}$  y  $w_{ee}$  son las posiciones relativas a un punto del retículo  $w_0$  tal como indica la figura:

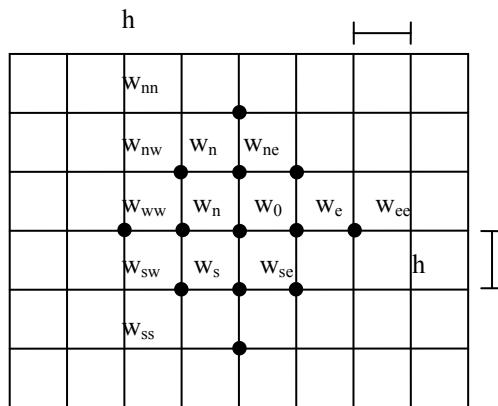


FIG. 3.3.  
Posiciones relativas de los nudos para el MDF en dos dimensiones.

En cuanto a las condiciones de contorno, existe una manera simple de modelizarlas incluyendo nudos correspondientes a los enlaces. Así para un nudo frente a un enlace exterior en dirección  $i \in \{n, s, e, w\}$  se definen  $w_i$  y  $w_{ii}$  según el tipo de enlace:

- a) nudo empotrado:  $w_i = 0$   $w_{ii} = +w_0$   
b) nudo apoyado:  $w_i = 0$   $w_{ii} = -w_0$

### Ejemplo numérico 7

Placa cuadrada de lado L simplemente apoyada en todos sus extremos.

Tomando  $h = L/8$  se llega a un emparrillado (retículo como el siguiente):

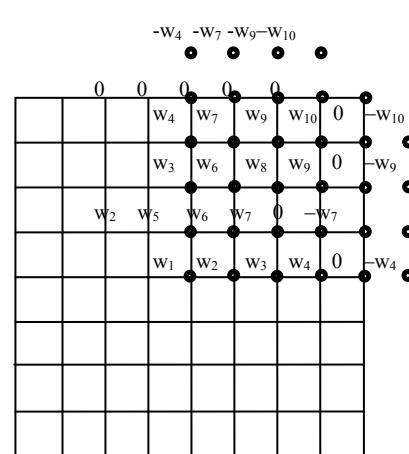
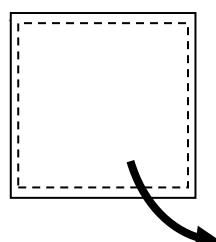


FIG. 3.4.  
Numeración de los nudos del ejemplo 1.



Si a continuación escribimos la ecuación [3.22] tomando sucesivamente  $w_0$  como  $w_1, w_2, \dots, w_{10}$  obtenemos un sistema de diez ecuaciones y diez incógnitas. Como el siguiente:

$$\begin{aligned} w_1 = w_0 &\Rightarrow h^{-4}[(4w_3) + 2(4w_5) - 8(4w_2) - 20w_1] = q/D \\ w_2 = w_0 &\Rightarrow h^{-4}[(w_4 + w_2 + 2w_6) + 2(2w_6 + 2w_2) - 8(w_3 + w_1 + 2w_5) - 20w_2] = q/D \\ w_3 = w_0 &\Rightarrow h^{-4}[(0 + w_1 + 2w_8) + 2(2w_7 + 2w_5) - 8(w_2 + w_4 + 2w_6) - 20w_3] = q/D \\ w_4 = w_0 &\Rightarrow h^{-4}[(-w_4 + w_2 + 2w_9) + 2(0 + 2w_6) - 8(0 + w_3 + 2w_7) - 20w_4] = q/D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_5 = w_0 &\Rightarrow h^{-4}[(2w_5 + 2w_7) + 2(2w_3 + w_8 + w_1) - 8(2w_6 + 2w_2) - 20w_5] = q/D \\ w_6 = w_0 &\Rightarrow h^{-4}[(w_2 + w_6 + w_9) + 2(w_9 + w_4 + w_2 + w_6) - 8(w_7 + w_5 + w_8 + w_3) - 20w_6] = q/D \\ w_7 = w_0 &\Rightarrow h^{-4}[(w_5 + w_{10}) + 2(0 + w_3 + w_8) - 8(0 + w_4 + w_9 + w_6) - 20w_7] = q/D \\ w_8 = w_0 &\Rightarrow h^{-4}[(0 + 2w_3) + 2(w_5 + w_{10} + 2w_7) - 8(2w_6 + 2w_9) - 20w_8] = q/D \\ w_9 = w_0 &\Rightarrow h^{-4}[(-w_9 + w_6 + w_4) + 2(w_6 + w_9) - 8(w_7 + w_8 + w_{10}) - 20w_9] = q/D \\ w_{10} = w_0 &\Rightarrow h^{-4}[(-2w_{10} + 2w_7) + 2(w_8) - 8(2w_9) - 20w_{10}] = q/D \end{aligned}$$

Este sistema de diez ecuaciones con diez incógnitas puede escribirse en forma matricial, con una matriz de sistema de  $10 \times 10$ :

$$\left[ \begin{array}{cccccccccc} -20 & -32 & 4 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -15 & -8 & 1 & -16 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & -20 & -8 & 4 & -16 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -21 & 0 & 4 & -16 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -16 & 4 & 0 & -18 & -16 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 2 & -8 & -17 & -8 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 1 & -8 & -20 & 2 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -16 & 4 & -20 & -16 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -8 & -8 & -19 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -16 & -22 \end{array} \right] \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \end{matrix} = \frac{qh^4}{D} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

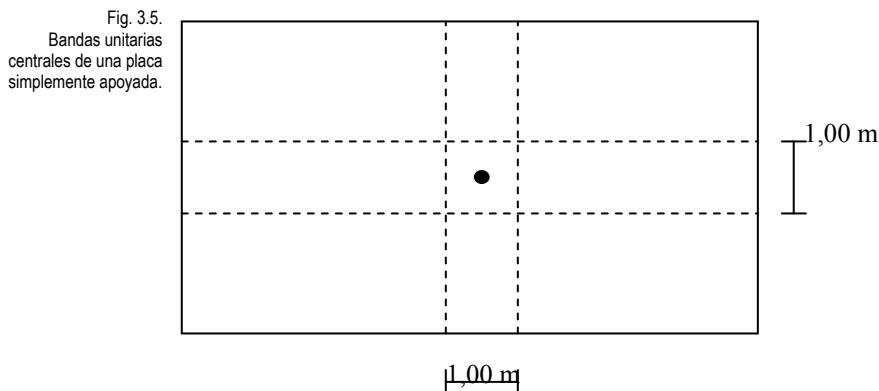
La solución de este sistema de ecuaciones se calcula numéricamente mediante algún programa de cálculo adecuado (el tamaño del sistema hace totalmente engorroso un cálculo manual):

$$\begin{aligned} w_1 &= -1,48 \cdot 10^{-6} \cdot (qL^4/D) & w_6 &= -9,28 \cdot 10^{-6} \cdot (qL^4/D) \\ w_2 &= -8,35 \cdot 10^{-6} \cdot (qL^4/D) & w_7 &= -14,94 \cdot 10^{-6} \cdot (qL^4/D) \\ w_3 &= -7,10 \cdot 10^{-6} \cdot (qL^4/D) & w_8 &= -15,99 \cdot 10^{-6} \cdot (qL^4/D) \\ w_4 &= +0,93 \cdot 10^{-6} \cdot (qL^4/D) & w_9 &= +6,64 \cdot 10^{-6} \cdot (qL^4/D) \\ w_5 &= -3,08 \cdot 10^{-6} \cdot (qL^4/D) & w_{10} &= -18,75 \cdot 10^{-6} \cdot (qL^4/D) \end{aligned}$$



### 3.4. Predimensionado por el método de Marcus

Un método que proporciona resultados aproximados razonables para placas rectangulares es el que se conoce como método de Marcus. La idea básica de este método es calcular la placa como una combinación de dos elementos bidimensionales acoplados de tipo vigas. Para ello se recurre a la ficción de repartir la carga total  $q$  en dos partes, cada una de ellas aplicada sobre una banda de una unidad de ancho:



El método de Marcus, admite que cada una de las bandas de la figura de arriba se comporta como una viga (elemento lineal horizontal). A la banda en dirección X se le atribuye una carga  $q_x$  [kp/m<sup>2</sup>] y a la dirección Y se le asigna una carga  $q_y$  [kp/m<sup>2</sup>]. Como en la placa real las dos bandas perpendiculares se moverían solidariamente, es necesario imponer que en el centro de ambas bandas los desplazamientos horizontales o flechas sea iguales, es decir, que se cumplan conjuntamente las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} q_x + q_y &= q \\ f_1(q_x, L_x) &= f_2(q_y, L_y) \end{aligned} \quad [3.23]$$

El sistema anterior constituye un sistema lineal de ecuaciones que permite calcular la flecha máxima  $w_{max}$  y los momentos flectores  $m_x$  y  $m_y$  por unidad de ancho. Por ejemplo, para una placa simplemente apoyada con carga continua:

$$\begin{aligned} w_{max} &= \frac{5}{384} \frac{(q_x \cdot 1 \text{ m}) L_x^4}{EI} = \frac{5}{384} \frac{(q_y \cdot 1 \text{ m}) L_y^4}{EI} \\ m_x &= \frac{1}{8} q_x L_x^2 \quad m_y = \frac{1}{8} q_y L_y^2 \end{aligned} \quad [3.24]$$

#### Ejemplo numérico 8

Estimar por el método de Marcus la flecha máxima y las tensiones para una placa rectangular de acero simplemente apoyada de 2,00×1,50 [m] con una carga uniforme de 400 kg/m<sup>2</sup> como la del ejemplo anterior [ $E_s = 2,1 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup> y  $\sigma_{adm} = 2400$  kp/cm<sup>2</sup>].



Llamaremos  $\lambda = L_x/L_y = 4/3$ . Al resolver el sistema [3.13] con flechas dadas por  $f(q_j, L_j) = (5/384) \cdot q_j L_j^4 / EI$  se llega a que  $q_x = q/(1+\lambda^4) = 96 \text{ kp/m}^2$  y  $q_y = q\lambda^4/(1+\lambda^4) = 304 \text{ kp/m}^2$  (obsérvese que la banda del lado corto siempre es la que “sufre” prácticamente todo el esfuerzo).

a) *Cálculo de la rigidez.* Se reduce básicamente a calcular el espesor necesario para que  $w_{max}/L_y < 1/200$ . Con los valores obtenidos anteriormente tenemos:

$$\frac{w_{max}}{L_y} = \frac{5}{384} \frac{\lambda^4}{1+\lambda^4} \frac{qL_y^3}{EI} = 1,3 \cdot 10^{-2} \cdot 0,76 \frac{400 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2} \cdot 3,38 \text{ m}^3}{2,1 \cdot 10^{10} \frac{\text{kp}}{\text{m}^2} \left(\frac{e^3}{12}\right)} \leq \frac{1}{200} \Rightarrow \\ 1,53 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \leq e^3 \Rightarrow e = 1,15 \text{ cm}$$

De acuerdo con el cálculo exacto del ejemplo 2, el espesor requerido era de 7,6 mm.

b) *Cálculo resistente.* Se reduce a comprobar mediante la fórmula de Navier la tensión máxima:

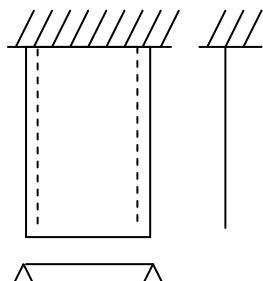
$$m_x = \frac{1}{8} \frac{qL_x^2}{1+\lambda^4} = \frac{400 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2} \cdot 4\text{m}^2}{33,28} = 48,07 \text{ kp} \quad m_y = \frac{1}{8} \frac{\lambda^4 qL_y^2}{1+\lambda^4} = \frac{400 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2} \cdot 2,25\text{m}^2}{10,53} = 85,47 \text{ kp} \\ \sigma_{max} \approx \frac{\max(m_x, m_y)}{e^3/12} \frac{e}{2} = \frac{6 \max(m_x, m_y)}{e^2} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow e \approx 0,19 \text{ cm}$$

De acuerdo con cálculo exacto del ejemplo numérico 2, el espesor requerido para satisfacer este criterio era de 2,8 mm.

Con el método de Marcus volvemos a comprobar que, de los dos criterios, el más restrictivo es claramente el de rigidez. Sin embargo también observamos que se cometen errores apreciables usando este método. El método de Marcus en este caso subestima las tensiones (un 32 % menos del valor exacto), y por otro lado sobreestima la flecha (un 51 % más del valor exacto).

### Ejemplo numérico 9

Estimar por el método de Marcus la flecha máxima y las tensiones para una placa rectangular de acero  $3,00 \text{ m} \times 1,00 \text{ m}$  con una carga uniforme de  $400 \text{ kg/m}^2$  y sujeción con la de la figura del ejemplo anterior [ $E_s = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y  $\sigma_{adm} = 2400 \text{ kp/cm}^2$ ].



Ahora  $\lambda = L_x/L_y = 3$ . Al resolver el sistema [3.23] con flechas dadas por:

$$f_1(q_x, L_x) = (1/8) \cdot q_x L_x^4 / EI \\ f_2(q_y, L_y) = (5/384) \cdot q_y L_y^4 / EI$$

se llega a que:



$$q_x = \frac{q}{1 + \frac{5}{48} \lambda^4} \quad q_y = \frac{\frac{5}{48} \lambda^4 q}{1 + \frac{5}{48} \lambda^4}$$

Obsérvese nuevamente que la banda del lado corto es la que “sufre” prácticamente todo el esfuerzo.

a) *Cálculo de la rigidez*. Similarmente a lo anterior, tenemos:

$$\frac{w_{\max}}{L_y} = \frac{5}{384} \frac{\frac{5}{48} \lambda^4}{1 + \frac{5}{48} \lambda^4} \frac{q L_y^3}{EI} = 1,30 \cdot 10^{-2} \cdot 0,999 \frac{400 \frac{\text{kP}}{\text{m}^2} \cdot 1,00 \text{ m}^3}{2,1 \cdot 10^{10} \frac{\text{kP}}{\text{m}^2} \cdot \left(\frac{e^3}{12}\right)} \leq \frac{1}{200} \Rightarrow$$

$$0,593 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \leq e^3 \Rightarrow e = 0,84 \text{ cm}$$

b) *Cálculo resistente*. Se reduce a comprobar mediante la fórmula de Navier, la tensión máxima:

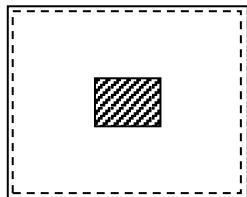
$$m_{\max} = \frac{q L_y^2}{8} \frac{\frac{5}{48} \lambda^4}{1 + \frac{5}{48} \lambda^4} = 49,95$$

$$\sigma_{\max} \approx \frac{m_{\max}}{e^3/12} \frac{e}{2} = \frac{6m_{\max}}{e^2} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow e \approx 0,35 \text{ cm}$$

De los dos criterios el más restrictivo es claramente el criterio de rigidez, y por lo tanto, para satisfacerlo será necesario  $e = 9 \text{ mm}$ .

### Ejemplo numérico 10

Recalcular mediante el método de Marcus el ejemplo numérico 2, que consistía en una placa simplemente apoyada de  $2,00 \text{ m} \times 1,60 \text{ m}$  con una carga uniforme concentrada en un rectángulo central de  $0,50 \times 0,40$  de  $200 \text{ kg/m}^2$ .



A partir de un prontuario, obtenemos que la flecha máxima y los momentos en una viga simplemente apoyada con carga uniforme en el tramo central simétricamente dispuesta vienen dados por:

$$w_{\max} = \frac{(q_x \cdot 1 \text{ m})}{24} \frac{\alpha (\alpha^3 + L_x^3 - 2L_x \alpha^2)}{EI} = \frac{(q_y \cdot 1 \text{ m})}{24} \frac{\beta (\beta^3 + L_y^3 - 2L_y \beta^2)}{EI}$$

$$m_x = \frac{1}{2} q_x \alpha (L_x - \alpha) \quad m_y = \frac{1}{2} q_y \beta (L_y - \beta)$$

De la primera de las anteriores ecuaciones y del hecho de que  $q = q_x + q_y$ , se obtiene:



$$\begin{cases} q_x = q \frac{\beta^4 + \beta L_y^3 - 2\beta^3 L_y}{(\alpha^4 + \alpha L_x^3 - 2\alpha^3 L_x) + (\beta^4 + \beta L_y^3 - 2\beta^3 L_y)} = 58,12 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2} \\ q_y = q \frac{\alpha^4 + \alpha L_x^3 - 2\alpha^3 L_x}{(\alpha^4 + \alpha L_x^3 - 2\alpha^3 L_x) + (\beta^4 + \beta L_y^3 - 2\beta^3 L_y)} = 141,88 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2} \end{cases}$$

Esto lleva a una flecha y unos momentos flectores dados por:

$$\frac{w_{\max}}{L_y} = \frac{(q_y \cdot 1 \text{ m}) \beta (\beta^3 + L_y^3 - 2L_y\beta^2)}{24L_y E (h^2/12)} \leq \frac{1}{200} \Rightarrow h \geq 7 \text{ mm}$$

El valor exacto obtenido en el ejemplo 2 fue 4,4 mm, un 60 % más bajo que el obtenido mediante el método de Markus. En cuanto al espesor mínimo según el criterio de resistencia obtenido mediante el método de Marcus:

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{1}{2} q_x \alpha (L_x - \alpha) = 12,71 \text{ kp} & m_y &= \frac{1}{2} q_y \beta (L_y - \beta) = 19,86 \text{ kp} \\ \sigma_{\max} &= \frac{6 \max(m_x, m_y)}{h^2} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow h \geq 2,2 \text{ mm} \end{aligned}$$

El valor exacto obtenido en el ejemplo 2 fue 4,4 mm, un 57 % más bajo.

### 3.5. Soluciones analíticas para placas circulares

Para el estudio de placas circulares es conveniente escribir la ecuación de gobierno en coordenadas polares. En estas coordenadas el operador laplaciano es:

$$\Delta f(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad [3.25]$$

Para una placa con carga axisimétrica, la ecuación de gobierno queda así:

$$\Delta \Delta w(r) = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right) = \frac{q(r)}{D} \quad [3.26]$$

Las secciones siguientes contienen casos particulares de la solución de la ecuación [3.26] para algunos cálculos de carga particularmente simples.

#### 3.5.1. Placa simplemente apoyada y uniformemente cargada

En este caso, debido a la simetría axial del problema, la solución sólo depende de la coordenada radial  $r$ . Siendo la carga uniforme  $q(r) = q_0$  y el radio  $R$  se tiene:



$$w(r) = \frac{q_0 R^4}{64D} \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^4 - 2 \frac{3+v}{1+v} \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{5+v}{1+v} \right] \quad [3.27a]$$

$$\begin{aligned} m_r(r) &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] &= q \frac{3+v}{16} (R^2 - r^2) \\ m_\theta(r) &= -D \left[ v \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] &= q \frac{1+3v}{16} (R^2 - r^2) \\ v_r(r) &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] &= \frac{qr}{2} \end{aligned} \quad [3.27b]$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) &= \frac{m_r(r)}{h^3/12} \frac{h}{2} = \frac{3q}{8} \frac{R^2 - r^2}{h^2} (3+v) & \sigma_{\max} = \frac{3R^2}{8h^2} (3+v) q \\ \sigma_\theta(r) &= \frac{m_\theta(r)}{h^3/12} \frac{h}{2} = \frac{3q}{8} \frac{R^2 - r^2}{h^2} (1+3v) \end{aligned} \quad [3.27c]$$

### 3.5.2. Placa simplemente apoyada cargada en el centro

En este caso, debido a la simetría axial del problema, la solución sólo depende de la coordenada radial  $r$ . Siendo la carga uniforme  $q(r) = q_0$  (para  $r < r_0 = \rho R$ ) en el centro y el radio total  $R$  se tiene:

$$w(r) = \begin{cases} \frac{q_0 r_0^4}{64D} \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^4 + 2 \frac{3+v}{1+v} \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 + \frac{5+v}{1+v} \right] + \\ \quad + \frac{q_0 r_0^2}{32D} \left[ (4R^2 + 2r_0^2) \ln \left( \frac{r_0}{R} \right) + \frac{5+3v}{1+v} (R^2 - r_0^2) \right] & r \leq r_0 \\ \frac{q_0 r_0^2}{32D} \left[ (4r^2 + 2r_0^2) \ln \left( \frac{r}{R} \right) + \left( \frac{5+3v}{1+v} + 4 \ln \left( \frac{r}{R} \right) \right) (R^2 - r^2) \right] & r > r_0 \end{cases} \quad [3.28a]$$

$$m_r(r) = \begin{cases} \frac{qr_0^2}{16} \left[ (3+v) \left( 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \right] & r \leq r_0 \\ \frac{qr_0^2}{16} \left[ 4(1+v) \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + (1-v) \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right] & r > r_0 \end{cases} \quad [3.28b]$$

$$v_r(r) = \begin{cases} \frac{qr}{2} & r \leq r_0 \\ \frac{qr_0^2}{2r} & r > r_0 \end{cases} \quad [3.28c]$$



### 3.5.3. Placa simplemente apoyada y cargada puntual en el centro

Al igual que las anteriores sólo hay dependencia en  $r$ . La única carga es una carga puntual centrada  $P$ , por lo que la carga por unidad de superficie sería una distribución delta de Dirac,  $q(r) = P\delta(r)$ :

$$w(r) = \frac{P}{8\pi D} \left[ (R^2 - r^2) + (R^2 + r^2) \ln\left(\frac{r}{R}\right) \right] \quad [3.29a]$$

$$\begin{aligned} m_r(r) &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] = \frac{P}{8\pi r^2} \left[ (1-v)(R^2 - r^2) - 2(1+v) \ln\left(\frac{r}{R}\right) \right] \\ m_\theta(r) &= -D \left[ v \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] = \frac{P}{8\pi r^2} \left[ (v-1)(r^2 - R^2) - 2(1+v) \ln\left(\frac{r}{R}\right) \right] \\ v_r(r) &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] = \frac{P}{2\pi r} \end{aligned} \quad [3.29]$$

En este caso, ni los momentos flectores ni las tensiones máximas están acotados. Este hecho tiene que ver con que toda carga, por concentrada que esté, debe ocupar una región extensa. Las cargas puntuales son sólo una idealización útil para el cálculo de flechas.

### 3.6. Membranas y paredes de depósitos

Una membrana es un tipo de elemento estructural bidimensional cuya rigidez flexional y torsional es despreciable y se encuentra en un estado elástico de tracción biaxial. Las membranas son el análogo bidimensional de los cables, que no tienen rigidez flexional y sólo trabajan en tracción.

Consideremos una porción elemental de una membrana y analicemos el equilibrio de fuerza sobre la misma. Su superficie media estará caracterizada por dos radios de curvatura principales,<sup>36</sup>  $R_1$  y  $R_2$ , y el equilibrio de fuerzas requerirá que se cumpla la siguiente ecuación:

$$2\sigma_1(h\Delta s_2)\sin\left(\frac{\Delta\theta_1}{2}\right) + 2\sigma_2(h\Delta s_1)\sin\left(\frac{\Delta\theta_2}{2}\right) - p\Delta s_1\Delta s_2 = 0 \quad [3.30a]$$

donde  $\Delta\theta_1$  y  $\Delta\theta_2$  son los ángulos subtendidos por un “rectángulo” de lados curvos  $\Delta s_1$  y  $\Delta s_2$  sobre la superficie de la membrana. Teniendo en cuenta la relación entre la longitud de los lados, el ángulo y el radio de curvatura ( $\Delta s_i \approx R_i \Delta\theta_i$ ), haciendo que el límite tienda a 0 de las longitudes del rectángulo y simplificando, se obtiene que:

$$\sigma_1 \frac{h}{R_1} + \sigma_2 \frac{h}{R_2} - p = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{R_1} + \frac{\sigma_2}{R_2} = \frac{p}{h} \quad [3.30b]$$

A continuación aplicaremos la expresión anterior a diversas formas de depósito distinguiendo los casos de un gas a presión (presión uniforme) y de un líquido (presión creciente con la profundidad bajo la superficie libre).



### 3.6.1. Depósitos de gas bajo presión uniforme

El peso de un gas a presión dentro de un depósito es una fuerza despreciable frente al producto del área de las paredes por la presión. En el caso de un depósito esférico, por ejemplo, se tiene  $R_1 = R_2 = R$  y, además, por simetría la tensión en todas las direcciones de la pared del depósito son iguales, por lo que  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ . Y por tanto para un depósito esférico lleno de gas a presión:

$$\frac{\sigma_1}{R_1} + \frac{\sigma_2}{R_2} = \frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma}{R} = \frac{p}{h} \Rightarrow \sigma = \frac{pR}{2h} \quad [3.31]$$

En el caso de un depósito cilíndrico, el menor radio de curvatura coincide con el radio del cilindro, mientras que en la dirección de las generatrices rectas el radio de curvatura es infinito, por lo que la presión sobre la pared lateral cilíndrica puede estimarse como:

$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \left( \frac{\sigma_C}{R} + \frac{\sigma_L}{R_2} \right) = \frac{p}{h} \Rightarrow \sigma_C = \frac{pR}{h} \quad [3.32a]$$

La ecuación anterior fija la tensión circunferencial ( $\sigma_C$ ), mientras que la tensión en la dirección longitudinal ( $\sigma_L$ ) puede obtenerse imaginando un corte transversal en la pared del depósito y calculando la tensión necesaria para que la tracción en esa dirección pueda igualar el efecto de la presión del depósito sobre la tapa inferior y superior del depósito. La condición de equilibrio y el resultado para la presión longitudinal son:

$$(2\pi Rh)\sigma_L = (\pi R^2)p \Rightarrow \sigma_L = \frac{pR}{2h} \quad [3.32b]$$

### 3.6.2. Depósitos para líquidos

El caso de los depósitos para líquidos es un poco más complicado, ya que la presión ejercida por un fluido aumenta linealmente con la profundidad ( $y$ ) bajo la superficie libre del fluido  $p_y = \rho g(H-y)$  donde  $H$  es la altura máxima del fluido contenido en el depósito. Analizaremos el caso de un depósito cilíndrico y el de un depósito troncocónico. Para el depósito cilíndrico de radio  $R$  ( $= R_1$ ) la presión sobre la pared lateral y las tensiones circunferencial ( $\sigma_C$ ) y longitudinal ( $\sigma_L$ ) cumplen:

$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \left( \frac{\sigma_C(y)}{R} + \frac{\sigma_L}{R_2} \right) = \frac{p_y}{h} \Rightarrow \sigma_C = \frac{p_y R}{h} = \rho g(H-y) \frac{R}{h} \quad [3.33a]$$

La tensión circunferencial máxima se da en el perímetro inferior de la parte cilíndrica cuando  $y = 0$ . En cuanto a la tensión en dirección longitudinal, dependerá de las condiciones de sujeción del depósito. Por ejemplo, si todo el depósito está suspendido de la parte superior, entonces la tensión en dirección longitudinal será de tracción y estará dada por el peso del líquido contenido:



$$(2\pi Rh)\sigma_L = (\pi R^2 H) \rho \Rightarrow \sigma_L = \frac{\rho HR}{2h} \quad [3.33b]$$

Por el contrario, si el depósito está sólo apoyado en su parte inferior, toda la pared estará comprimida por el peso propio de la pared cilíndrica. En este caso debe calcularse primero  $\sigma_L(R, h, \text{apoyo})$  y, a continuación, se comprueba la posibilidad de abolladura. Una manera de estimar, por exceso, que no existe abolladura es comparar la tensión máxima longitudinal de compresión con la tensión de abolladura de una pared cilíndrica, verificando si se cumple o no la siguiente relación:

$$\left| \sigma_L(R, h, \text{apoyo}) \right| \leq 0,35 \cdot \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{h}{R} \quad [3.33c]$$

Para la forma troncocónica tenemos igualmente que uno de los radios de curvatura es infinito (según un plano que contenga a una generatriz del cono) y otro radio finito  $R_1$ . La tensión circunferencial vendrá dada por:

$$\frac{\sigma_c}{R_1} = \frac{p}{h} \Rightarrow \sigma_c = p \frac{R_1}{h} = \rho g (H - y) \frac{y \tan \alpha}{\cos \alpha} \quad [3.34a]$$

Por otro lado, la tensión meridiana según las generatrices se obtiene igualando la resultante vertical de las tracciones sobre un corte transversal con el peso del volumen del líquido por debajo de dicho corte más la porción por encima del corte que reposa sobre el interior del círculo considerado:

$$R_t = [2\pi(y \tan \alpha)h]\sigma_m \cos \alpha \quad [3.34b]$$

$$W_G = \rho g [\pi y^2 \tan^2 \alpha]$$

### 3.7. Teoría general de láminas

Una lámina es un elemento estructural que puede ser adecuadamente analizado por un modelo bidimensional. A diferencia de las placas, las láminas en el caso general se caracterizan en cada punto por dos radios de curvatura. Para realizar los cálculos estructurales de una lámina curva conviene definir un sistema de coordenadas curvilíneas adecuado  $(\alpha, \beta, \eta)$  en lugar del sistema cartesiano plano  $(x, y, z)$ . Las coordenadas  $(\alpha, \beta)$  se tomarán sobre la superficie media y la tercera coordenada,  $-h/2 \leq \eta \leq +h/2$ , se tomará en la dirección normal a la superficie media. Así, el vector posición de cualquier punto de la lámina podrá expresarse en términos de las coordenadas curvilíneas como:

$$\mathbf{r}(\alpha, \beta, \eta) = \mathbf{r}_m(\alpha, \beta) + \eta \mathbf{n}(\alpha, \beta) \quad [3.35]$$

donde  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  es el vector de posición del punto en coordenadas cartesianas,  $\mathbf{r}_m$  es un vector de posición de la superficie media y  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie media sobre cuya dirección se encuentra el punto  $(x, y, z)$ . Hay que señalar que para los cálculos en coordenadas curvilíneas es necesario averiguar el llamado tensor métrico



asociado a las coordenadas, que permitirá definir tanto el jacobiano como otras magnitudes necesarias para el cálculo de magnitudes físicas. Las componentes de dicho tensor vienen dadas por:

$$G_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_j} \quad [3.36a]$$

donde se ha usado la nomenclatura abreviada  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\alpha, \beta, \eta)$ . Estas componentes resultan ser en términos de los radios de curvatura:

$$\begin{aligned} G_{11} &= \left(1 - \frac{\eta}{R_\alpha}\right)^2 A^2 & G_{22} &= \left(1 - \frac{\eta}{R_\beta}\right)^2 B^2 & G_{33} &= 1 \\ G_{12} = G_{21} &= 0 & G_{13} = G_{31} &= 0 & G_{23} = G_{32} &= 0 \end{aligned} \quad [3.36b]$$

donde:

$$\begin{aligned} G_{11} &= \left(1 - \frac{\eta}{R_\alpha}\right)^2 A^2 & G_{22} &= \left(1 - \frac{\eta}{R_\beta}\right)^2 B^2 & G_{33} &= 1 \\ G_{12} = G_{21} &= 0 & G_{13} = G_{31} &= 0 & G_{23} = G_{32} &= 0 \end{aligned} \quad [3.36b]$$

El jacobiano  $J$  de la transformación coincide precisamente con la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico. Es decir:

$$J = \sqrt{G} = \sqrt{G_{11} G_{22} G_{33}} = \left(1 - \frac{\eta}{R_\alpha}\right) \left(1 - \frac{\eta}{R_\beta}\right) AB = \mu AB \quad [3.37]$$

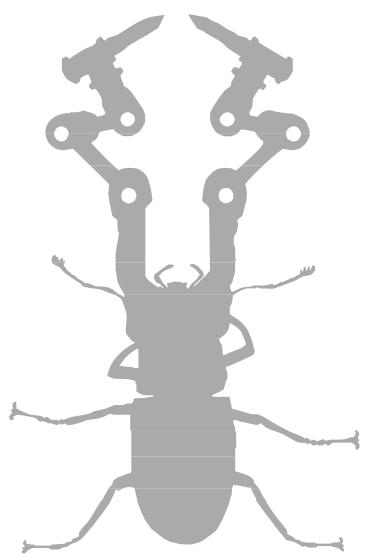
<sup>32</sup> En ingeniería casi todos los casos prácticos y tienen geometría de revolución y carga simétrica.

<sup>33</sup> El método de Marcus, que sólo se usa para predimensionado, se basa también en el modelo elástico, pero no usa la ecuación de gobierno [3.1].

<sup>34</sup> Se tomará un sistema de coordenadas en el que el plano XY ( $z = 0$ ) coincida con el plano medio de la placa.

<sup>35</sup> Consideraremos que cualquier forma geométrica de  $\Omega$  que no sea rectangular ni circular ya es complicada.

<sup>36</sup> Esto significa que fijado un punto P de la superficie, existen dos planos normales a la superficie y perpendiculares entre sí cuya intersección contiene vector normal a la superficie. La intersección de cada uno de estos planos con la superficie corresponde a dos curvas,  $C_1$  y  $C_2$ , cada una de las cuales tiene en P radios de curvatura  $R_1$  y  $R_2$ .



→ 4



# Cimentaciones basales superficiales y profundas

La cimentación tiene la misión de trasmitir los esfuerzos existentes en una estructura o provocados por una máquina al terreno. El problema de calcular una cimentación se presenta con mayor frecuencia en estructuras estáticas que en máquinas. Aunque hay que decir que algunas máquinas, debido a condiciones especiales de vibración o percusión, requieren una cimentación especial independiente además de la consideración de la fatiga.

## 4.1. Introducción

Las siguientes secciones introducen los conceptos básicos donde se explican los tipos de cimentación, los mecanismos de fallo, los datos del terreno necesarios para el dimensionado de cimentaciones y el cálculo de la capacidad portante.

### 4.1.1. Tipos básicos de cimentación

Existen tres tipos básicos de cimentación, cada una con diversos subtipos:

<b>Zapatas</b>	- Z. combinadas - Z. corridas - Z. aisladas	Cimentación más frecuente y económica. Apta para terrenos de resistencia media o alta con mucha homogeneidad. Pueden presentar el problema de asientos diferenciales.
<b>Losas</b>	- L. espesor constantes - L. con capiteles - L. nervadas	Cimentación apta para terrenos menos resistentes, ya que presenta gran superficie de contacto. También es apta para terrenos con poca homogeneidad y/o para estructuras muy rígidas, ya que soluciona adecuadamente los asientos diferenciales.
<b>Pilotes</b>	- P. aislados - Encepados	Cimentación apta para terrenos poco resistentes, donde hay un estrato resistente a gran profundidad, o cuando la estructura soporta esfuerzos horizontales muy importantes.

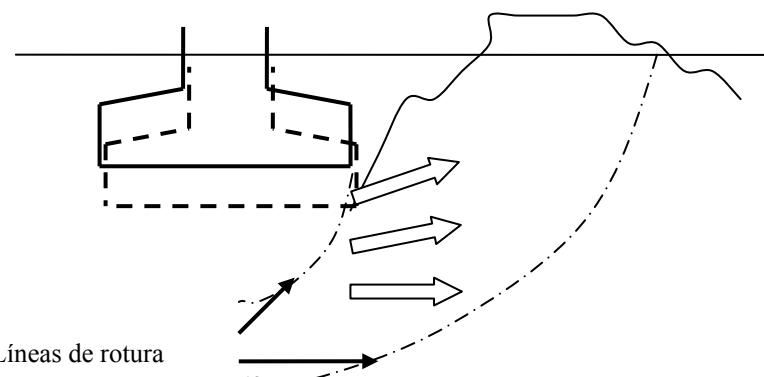


#### 4.1.2. Mecanismo de fallo

Una cimentación puede fallar y provocar así el colapso parcial o total de la estructura que sustenta básicamente por cuatro motivos: **hundimiento, vuelco, deslizamiento y asentamiento diferencial** por encima de la tolerancia admisible. El objetivo principal de una cimentación es reposar el peso propio y las sobrecargas actuantes en una estructura sobre el terreno. El hundimiento se produce cuando las tensiones sobre el terreno<sup>37</sup> superan las tensiones admisibles del mismo, y entonces aparecen en él unas líneas de plastificación o rotura a lo largo de las cuales hay desplazamientos de tierras.

Esos desplazamientos de tierras permiten que el terreno ceda espacio y la cimentación se hunda en el terreno. Como generalmente el hundimiento no se da por igual en todos los puntos de la cimentación, dicho hundimiento a partir de un cierto punto resulta catastrófico para la integridad estructural de la construcción o edificio:

FIG. 4.1.  
Líneas de rotura-  
deslizamiento para el  
hundimiento de una  
cimentación.



#### 4.1.3. Datos del terreno necesarios para la cimentación

Los parámetros que caracterizan un terreno son la tensión o **presión admisible** ( $\sigma_{adm}$ ), compresibilidad ( $Q$ ), coeficiente de balasto ( $k_b$ ) y porosidad ( $n$ ). En lo que respecta a zapatas: el parámetro más importante para una zapata aislada es la tensión admisible o **capacidad portante**; cuando las tensiones máximas bajo la zapata superan la tensión admisible se produce un **hundimiento** de la zapata en el terreno (ELU de agotamiento del terreno); cuando el momento resultante respecto al borde de la zapata es excesivo se produce el **vuelco** de la zapata (ELU de equilibrio); cuando el esfuerzo cortante en la zapata de un pilar es excesivo y no puede ser compensando por las fuerzas de rozamiento en la zapata se produce un **deslizamiento** (ELU de equilibrio), y finalmente el coeficiente de balasto, la compresibilidad y la porosidad influyen en el valor que pueda alcanzar el **asiento diferencial** (ELS de deformación).

Para las tensiones admisibles y el predimensionado de la zapata hay que distinguir si se trata de terrenos arenosos, con poca cohesión, o terrenos arcillosos, con mucha más cohesión:



TABLA 4.1.  
Presiones admisibles  
en zapatas [kN/m<sup>2</sup>]. Terrenos

Compacidad	Densidad relativa	Anchos de zapata [m]						
		1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	4,00	5,00
Suelta	Muy suelta	< 0,20	< 90	< 60	< 45	< 35	< 30	< 30
		0,20	90	60	45	35	30	30
	a	a	a	a	a	a	a	a
Media	0,40	290	250	225	210	190	185	180
	0,40	290	250	225	210	190	185	180
	a	a	a	a	a	a	a	a
Compacta	0,60	600	540	500	465	450	435	420
	0,60	600	540	500	465	450	435	420
	a	a	a	a	a	a	a	a
Muy compacta	0,80	975	900	840	800	760	735	700
	> 0,80	> 975	> 900	> 840	> 800	> 760	> 735	> 700

Tabla 4.2.  
Presiones admisibles  
en zapatas [kN/m<sup>2</sup>].  
Terrenos arcillosos.

Consistencia	Resistencia a compresión simple [N/mm <sup>2</sup> ]	Zapata	
		Aislada	Continua
Fluida	< 0,05	< 60	< 45
Blanda	0,05 a 0,10	60 a 120	45 a 90
Media	0,10 a 0,20	120 a 240	90 a 180
Semidura	0,20 a 0,40	240 a 480	180 a 360
Dura	> 0,40	> 480	> 360

Comúnmente la tensión admisible se mide según ensayos diferentes. Para terrenos arenosos se usa el SPT (*Standard Penetration Test*), en el que con un mazo normalizado se golpea una estaca metálica hasta lograr que ésta se hunda 30 cm en el suelo. Se estima la tensión a partir del número de golpes  $n$  necesarios para introducir la estaca como  $\sigma_{adm} = 10 \cdot n$ . En cambio, para terrenos arcillosos se toma una muestra de terreno y se realiza un ensayo de compresión simple, y se estima  $\sigma_{adm} = 1000 \cdot R_u$ , donde  $R_u$  [en MPa] es la tensión de compresión última a partir de la cual el bloque de arcilla se desmorona.

El **coeficiente de balasto** ( $k_b$ ) es la constante elástica de proporcionalidad entre el hundimiento del terreno ( $\delta$ ) y la tensión interna ( $\sigma_{ter}$ ) en el mismo, debido a la deformación impuesta ( $\sigma_{ter} = -k_b\delta$ ). El valor del coeficiente de balasto depende de la cohesión (terreno arcilloso/terreno arenoso). En terrenos cohesivos (arcillosos) el coeficiente de balasto depende de la cohesividad, que a su vez está correlacionada con la resistencia a compresión simple. En cambio, en terrenos nocohesivos (arenosos) el coeficiente de balasto depende de la compacidad, que a su vez está correlacionada con la densidad del terreno. En ausencia de un estudio geotécnico preciso, podemos estimar el coeficiente de balasto mediante la siguiente tabla:

TABLA 4.3.  
Propiedades típicas  
comparadas de  
terrenos cohesivos y  
arenosos.

Tipo de suelo	Estado	Densidad seca [kg/m <sup>3</sup> ]	Resistencia $R_u$ [kN/m <sup>2</sup> ]	$k_b$ [(kp/cm <sup>2</sup> ) · cm <sup>-1</sup> ]
Suelo granular no cohesivo (arenoso)	- suelto	1300	—	1,3
	- comp. media	1600	—	4
	- denso	1900	—	16
Suelo cohesivo (arcilloso)	- firme	—	100-200	2,5
	- muy firme	—	200-400	5
	- duro	—	> 400	10



En cuanto a los **asientos diferenciales** admisibles, debe tenerse en cuenta que los terrenos arcillosos son problemáticos, ya que la compresión de la cimentación produce un lento drenaje del suelo (como una esponja al ser comprimida) y por eso pueden aparecer asientos diferenciales diferidos que sólo se manifiesten una vez la obra está muy avanzada o incluso ha sido terminada. Los terrenos arenosos no presentan ese problema, ya que los asientos diferenciales son más o menos instantáneos y responden rápidamente a las cargas aplicadas. Por esa razón los terrenos arcillosos pueden requerir estudiar su consolidación (cuando se trata de arcillas saturadas) o su fluencia lenta (a muy largo plazo). Los tres tipos de asientos diferenciales previsibles son:

- a) Asientos instantáneos o no diferidos (en terrenos arenosos están en torno al 50%).
- b) Asientos de consolidación diferidos, que se producen en arcillas saturadas.
- c) Asientos de fluencia lenta, a muy largo plazo.

La razón de esto es que los asientos diferenciales producen esfuerzos indirectos debido a las deformaciones inducidas. En estructuras muy rígidas pueden conducir a esfuerzos muy grandes que den lugar a una **fisuración excesiva** y, por lo tanto, a problemas de estanqueidad o humedades, y sólo en casos muy graves suponen un riesgo de colapso total o parcial de la estructura. Por ello, el asiento diferencial admisible dependerá del tipo de estructura (metálica, de hormigón, de hormigón muy rígida, etc.). La siguiente tabla resume dichos asientos diferenciales máximos:

TABLA 4.4.  
Asientos generales  
admisibles según MV-  
101:1962.

Características del edificio	Asiento general máximo admisible en terrenos	
	Sin cohesión [mm]	Cohesivos [mm]
Obras de carácter monumental	12	25
Edificios con estructura de hormigón armado de gran rigidez	25	50
Edificios con estructura de hormigón armado de pequeña rigidez	50	75
Estructuras metálicas hiperestabletas		
Edificios con muros de fábrica		
Estructuras metálicas isostáticas	> 50	> 75
Estructuras de madera		
Estructuras provisionales		Se comprobará que no se produce desorganización de la estructura ni en los cerramientos.

#### 4.1.4. Capacidad portante del terreno

La capacidad portante del terreno se evalúa usualmente midiendo la presión de hundimiento sobre el mismo. Dicha presión está relacionada con la cohesión ( $c_d$ ) y el ángulo de rozamiento interno ( $\varphi_d$ ) del mismo. Las expresiones usadas actualmente se basan en generalizaciones de la fórmula de Terzaghi (1943) para zarpas corridas cuando existe fricción interna y cohesión. Esta ecuación a su vez se reducía al método de las cuñas de Prandtl (1920) para terrenos sin cohesión. La fórmula más comúnmente usada es la expresión de Brinch-Hansen (1961; 1970). Esta forma incorpora tanto las propiedades mecánicas del terreno como las dimensiones, la forma la profundidad de la



cimentación, así como el efecto de la inclinación de la carga. La presión media  $p_m$  resistida en la base de una cimentación puede aproximarse mediante la siguiente expresión Brinch Hansen:

$$p_m = qN_q s_q d_q i_q + cN_c s_c d_c i_c + (\gamma b / 2)N_\gamma s_\gamma d_\gamma i_\gamma \quad [4.1]$$

donde:

- $q, c, \gamma$ : son respectivamente la sobrecarga sobre el plano de cimentación, la cohesión del terreno y el peso propio efectivo del mismo.
- $N_q, N_c, N_\gamma$ : son factores que dependen del ángulo de rozamiento interno.
- $s_q, s_c, s_\gamma$ : son factores de forma de la cimentación.
- $d_q, d_c, d_\gamma$ : son factores de profundidad.
- $i_q, i_c, i_\gamma$ : son los factores de inclinación de la carga.
- $b$ : es el ancho de la cimentación en el plano más desfavorable.

La novedad de esta fórmula respecto a la de Terzaghi es que en la de Brinch-Hansen existen expresiones aproximadas para los factores  $N_k, s_k, d_k$  e  $i_k$ :

$$\begin{cases} N_q = e^{\pi \tan \phi} \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \\ N_c = (N_q - 1) \frac{1}{\tan \phi} \\ N_\gamma = 2(N_q + 1) \tan \phi \end{cases} \quad [4.2a]$$

La fórmula de Terzaghi simplemente usaba  $N_q = \pi + 2 \approx 5,14$  (valor deducido por Prandtl),  $N_c = 1$  y  $N_\gamma = 1$ , y coincide con las anteriores para el límite  $\phi \rightarrow 0$ . Los factores de forma y profundidad de la cimentación vienen dados por:

$$\begin{cases} s_q = 1 + \frac{b}{a} \tan \phi & d_q = 1 + 2 \tan \phi (1 - \sin \phi)^2 \frac{D}{b} \\ s_c = 1 + \frac{N_q}{N_c} \frac{b}{a} & d_c = d_q + \frac{1 - d_q}{N_c \tan \phi} \\ s_\gamma \approx 1 - 0,4 \frac{b}{a} & d_\gamma = 1 \end{cases} \quad [4.2b]$$

Finalmente, cuando la carga no es enteramente vertical sino que es inclinada, cosa que sucede cuando además de un esfuerzo axial existe un esfuerzo cortante en la base del pilar, deben emplearse los siguientes factores de inclinación de la carga:

$$i_q \approx \left[ 1 - \frac{V_d}{N_d + c(ab) \cot \phi} \right]^2 \quad i_c = i_q + \frac{1 - i_q}{N_c \tan \phi} \quad i_\gamma = i_q^{2/3} \quad [4.2c]$$



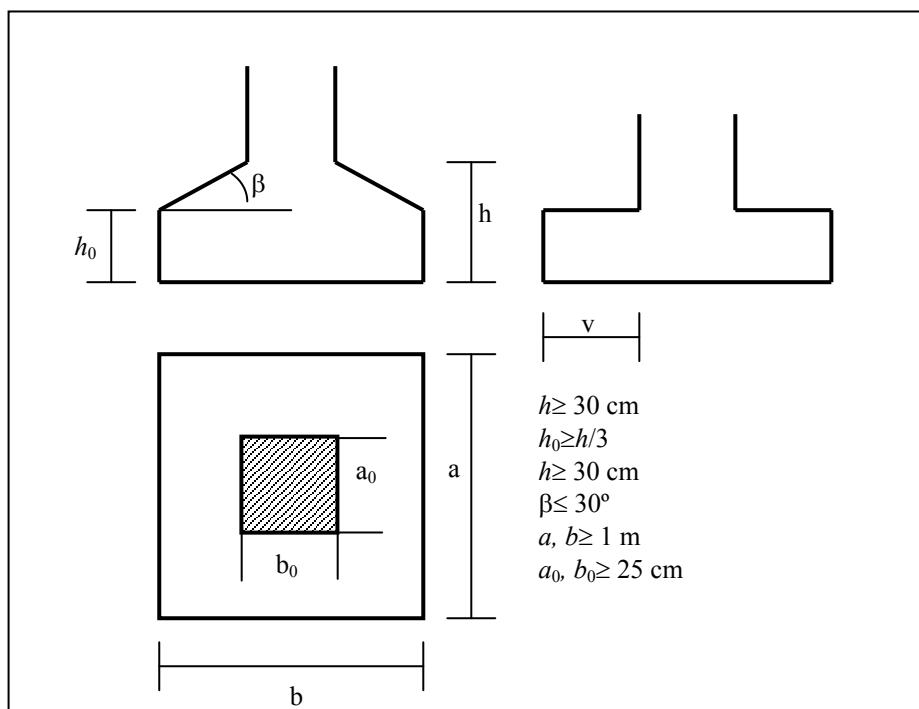
## 4.2. Cálculo de zapatas aisladas

En esta sección consideraremos el cálculo de zapatas aisladas. Las zapatas aisladas pueden ser de hormigón armado (ZHA) o de hormigón en masa (ZHM). Estas últimas sólo se pueden usar cuando la relación entre el vuelo de la zapata y la altura es muy pequeña.

Las zapatas aisladas de hormigón armado son el tipo de cimentación más común y se clasifican a partir del vuelo en zapatas rígidas (ZR) o zapatas flexibles (ZF), y teniendo en cuenta la relación entre el vuelo ( $v$ ) y el canto total ( $h$ ). En las zapatas rígidas [ $v/h < 2$ ] se pueden despreciar las deformaciones de las zapatas en el cálculo de las barras de acero necesarias (armaduras). En las zapatas flexibles [ $v/h \geq 2$ ] es necesario tener en cuenta las deformaciones debidas a la flexión de la propia zapata. Debido a que en ZR, pero no en ZF, se pueden despreciar las deformaciones de la propia zapata, se usan esquemas de cálculo diferentes para cada tipo de zapata, ya que los mecanismos resistentes involucrados difieren. Los pasos que se deben seguir para el cálculo de zapatas son los siguientes:

- 1) *Generalidades sobre las dimensiones.* A la hora de escoger las dimensiones se respetarán las siguientes dimensiones:

FIG. 4.2.  
Dimensiones generales  
de una zapata aislada.



- 2) *Predimensionado del área.* Conocidos  $N_d$ ,  $V_d$  y  $M_d$  sobre la zapata, hay que estimar las dimensiones de la zapata. Para ello necesitamos previamente el peso  $P$  estimado de la zapata y, a continuación, el área necesaria de zapata. El peso se estima como una fracción del esfuerzo axil total:



$$P + N_d = N_d (1 + \gamma_0) \quad \gamma_0 = \frac{14 - 0,02\sigma_{adm}}{100} \quad [\sigma_{adm}] = [kN/m^2] \quad [4.3]$$

Con estas dos magnitudes ya estamos listos para estimar el área de la zapata (predimensionado). Si la excentricidad (véase más abajo) es pequeña comparada con las dimensiones finales de la zapata, puede calcularse como:

$$\begin{cases} a_{min} = \sqrt{A_{min}} = \sqrt{\frac{N_d + P}{\sigma_{adm}}} & (\text{zapatas cuadradas}) \\ a_{min} = \sqrt{A_{min} \frac{a_0}{b_0}} = \sqrt{\frac{a_0}{b_0} \frac{N_d + P}{\sigma_{adm}}} & (\text{zapatas rectangulares}) \end{cases} \quad [4.4]$$

Tras este paso tomamos provisionalmente como área de la zapata  $A = A_{min}$ .

- 3) *Canto útil de la zapata.* En zapatas aisladas lo más económico es que tengan el suficiente canto total  $h$  como para que no sea necesario colocar armadura transversal adicional para resistir el esfuerzo cortante. Eso se logra si el canto útil  $d = h - r$  [= altura – recubrimiento] se dimensiona de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{N_d}{ab} = \frac{N_d}{A} & v_a &= \frac{a - a_0}{2} \\ d &= \max \left( \frac{1,1 \cdot \sigma_t}{\sigma_t + 370} v_a, 30 \text{ cm} \right) & h &\geq 35 \text{ cm} \end{aligned} \quad [4.5]$$

El recubrimiento  $r$  en principio depende de la agresividad del terreno, pero en una primera aproximación puede tomarse  $r \approx 6 \text{ cm}$ . En este punto todas las dimensiones han sido establecidas y puede calcularse el peso de la zapata con exactitud:

$$P_d = \rho_d \cdot (A \cdot h) = \rho_d \cdot (a \cdot b \cdot h) \quad [4.6]$$

- 4) *Estimación de la excentricidad de la carga.* Si tenemos en cuenta ahora  $M_d$  y  $V_d$ , se puede estimar la excentricidad de la carga como:

$$e = \frac{M_d + V_d h}{N_d + P_d} \approx \frac{M_d + V_d h}{N_d (1 + \gamma_0)} \quad [4.7]$$

Esto es válido si la excentricidad calculada es grande en comparación con el lado  $a$  seleccionando para la zapata (muy probablemente el área de zapata calculada previamente será insuficiente y hay que calcular los efectos de la excentricidad de la carga).<sup>38</sup>

- 5) *Presiones sobre el terreno.* La presión máxima sobre el terreno, estimando los efectos de excentricidad, se puede calcular como:



$$\sigma_{\max} = \begin{cases} \frac{N_d + P_d}{A} (1 + 6\eta) & \eta \leq \frac{1}{6} \\ \frac{N_d + P_d}{A} \frac{4}{3(1 - 2\eta)} & \frac{1}{6} \leq \eta < \frac{1}{2} \leq 1,25 \cdot \sigma_{adm} \\ \left[ \text{no deben usarse valores } \eta \geq \frac{1}{2} \right] \end{cases} \quad [4.8]$$

donde  $\eta$  es la excentricidad relativa dada por  $\eta = e/a$  [siendo  $a$  la longitud del lado de la zapata perpendicular a la dirección del momento, se puede estimar para zapatas cuadradas como  $a \approx a_{min}$ ].

Si la comprobación [4.8] no resulta adecuada, se ensaya de nuevo con un área mayor que  $A_{min} = (N_d + P)/\sigma_{adm}$  y se vuelve a recalcular de la ecuación [4.3] en adelante. Si la comprobación es correcta continuamos al paso siguiente. Si no es el caso ensayamos con un área más grande  $A := (N_d + P)/\sigma_{adm}$  y estimamos de nuevo  $a$  y  $b$  volviendo al paso 5 para comprobar que la presión máxima sobre el terreno sea inferior a  $1,25 \cdot \sigma_{adm}$ .

- 6) *Elección del tipo de zapata.* En función de la relación vuelo/canto ( $v/h$ ) existen unos tipos de zapatas más adecuados y/o económicos que otros. Simplificadamente podemos usar los siguientes criterios:

$$\begin{aligned} v/h < 1 &\Rightarrow \text{Zapata de hormigón en masa (ZHM)} \\ 1 \leq v/h \leq 2 &\Rightarrow \text{Zapata rígida de hormigón armado (ZR)} \\ 2 < v/h &\Rightarrow \text{Zapata flexible de hormigón armado (ZF)} \end{aligned}$$

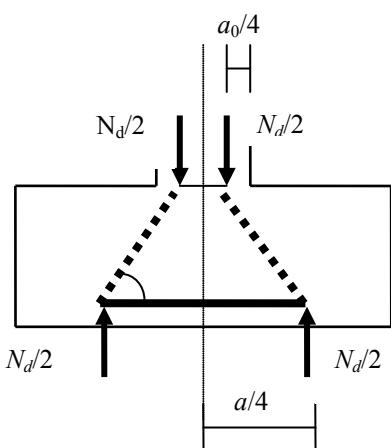
#### 4.2.1. Zapatas rígidas (ZR)

Se acepta que el mecanismo resistente de las zapatas rígidas se basa en la analogía un sistema equivalente de bielas virtuales a compresión en el hormigón y armaduras de acero a tracción. La orientación y ubicación de estas bielas se hace basándose en la distribución de isostáticas de tracción y compresión. En varios casos prácticos, la propia norma EHE-08 proporciona el esquema de bielas y tirantes equivalente fijando el conjunto de barras (virtuales y no virtuales necesarias) y da un conjunto de fórmulas explícitas para las armaduras. Por ejemplo, para cargas centradas, que son muy frecuentes en las zapatas rígidas, se da el siguiente mecanismo:

La línea punteada representa la biela virtual de hormigón que estará comprimida, la línea gruesa continua muestra la dirección de la armadura de acero y las flechas indican la distribución de resultantes aproximada.

$$T_d = \frac{N_d}{2 \cdot 0,85d} \left( \frac{a}{4} - \frac{a_0}{4} \right) = \frac{N_d}{6,8d} (a - a_0) = A_{s0} f_{yd} \quad [4.8a]$$

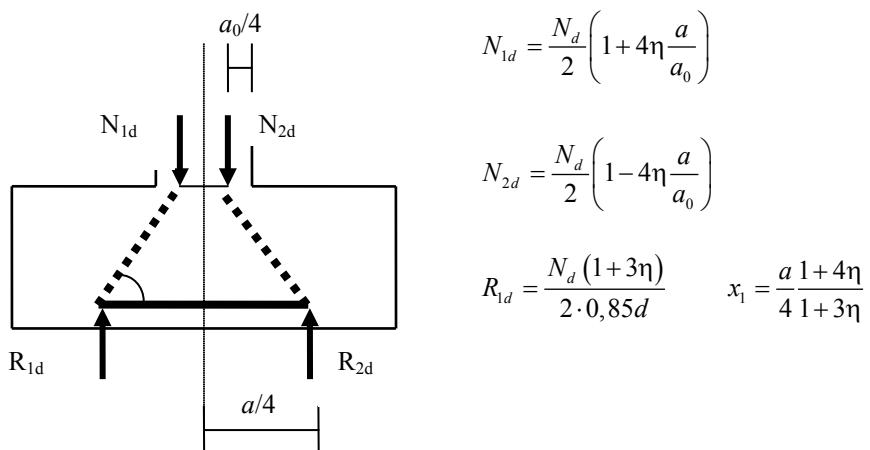
donde:



$T_d$ : esfuerzo de tracción sobre la armadura.  
 $N_d$ : esfuerzo axil que transmite el soporte.  
 $a$ : ancho de la zapata.  
 $a_0$ : ancho del pilar.  
 $A_s$ : área de la acero en un corte transversal.

FIG. 4.3.  
Esquema de cálculo.

En el caso general de zapatas con algo más de excentricidad, basta con considerar, en lugar de la ecuación [4.8a], estas otras ecuaciones:



$$N_{1d} = \frac{N_d}{2} \left( 1 + 4\eta \frac{a}{a_0} \right)$$

$$N_{2d} = \frac{N_d}{2} \left( 1 - 4\eta \frac{a}{a_0} \right)$$

$$R_{1d} = \frac{N_d (1+3\eta)}{2 \cdot 0,85d} \quad x_1 = \frac{a}{4} \frac{1+4\eta}{1+3\eta}$$

$$T_d = \frac{R_{1d}}{0,85d} \left( x_1 - \frac{a_0}{4} \right) = \frac{N_d}{2 \cdot 0,85d} \left( \frac{a(1+4\eta)}{4} - \frac{a_0(1+3\eta)}{4} \right) = A_{s0} f_{yd} \quad [4.8b]$$

$$f_{yd} \leq 400 \text{ MPa}$$

El armado dado por las ecuaciones [4.8] puede no ser suficiente para garantizar la ductilidad necesaria para la zapata. La norma impone estas condiciones tanto para el lado  $a$  como para el  $b$ :

$$A_{s,a} = \max(A_{0s,a}, \rho_{\min} bd) \quad A_{s,b} \geq \rho_{\min} bd$$

$$\rho_{\min} = \begin{cases} 0,0020 & \text{con acero B 400 S} \\ 0,0018 & \text{con acero B 500 S} \end{cases} \quad [4.9]$$



### Ejemplo numérico 1

Dimensionar una zapata aislada con canto total impuesto  $h = 0,50$  m para un soporte cuadrado  $a_0 \times b_0 = 0,45 \text{ m} \times 0,45 \text{ m}$  para un terreno con  $\sigma_{adm} = 160 \text{ kN/m}^2$ , y con un esfuerzo axial centrado de  $N_k = 300 \text{ kN}$  provocado por cargas permanentes (hay que usar coeficientes de seguridad habituales).

*Predimensionado del área.* El esfuerzo axial de diseño  $N_d = N_k \cdot \gamma_G = 300 \cdot 1,50 = 450 \text{ kN}$  nos servirá para predimensionar el área de la zapata:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{14 - 0,02\sigma_{adm}}{100} = 0,108 \\ A = a \cdot b &= \frac{N_d(1 + \gamma_0)}{\sigma_{adm}} = 3,12 \text{ m}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = b = 2,00 \text{ m} \approx 1,77 = (3,12)^{1/2}$$

*Comprobación del canto.* Aunque en nuestro caso el canto total  $h$  viene impuesto, es necesario comprobar que sea suficiente para que la zapata no requiera armadura adicional de cortante (como puede verse, en este caso no se requiere):

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \frac{a - a_0}{2} = 75,5 \text{ cm} \\ \sigma_t &= \frac{N_d}{a \cdot b} \approx 113 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1,1\sigma_t}{\sigma_t + 370} v_a = 19,3 \text{ cm} < d = h - r = 44 \text{ cm}$$

*Presiones sobre el terreno.* Como canto total escogeremos  $h \approx 50 \text{ cm}$  (que equivale a tomar un  $r$  de unos 6 cm). Con estos datos podemos estimar con exactitud el peso de la zapata  $P$  y la presión máxima sobre el terreno:

$$\begin{aligned} P &= \rho_c (a \cdot b \cdot h) = 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \cdot 2,0 \text{ m} \cdot 2,0 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ m} = 50 \text{ kN} \\ \sigma_{max} &= \frac{N_d + P_d}{A} (1 + 6\eta) = \frac{450 + 50}{4,00} (1 + 0) = 125 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \leq 1,25 \cdot 160 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

*Cálculo de las armaduras.* Como la carga está centrada, el cálculo del tirante lleva a:

$$T_d = \frac{N_d}{2 \cdot 0,85d} \left( \frac{a}{4} - \frac{a_0}{4} \right) = \frac{N_d}{6,8d} (a - a_0) = A_{s0,a} f_{yd} = 233 \text{ kN}$$

$$A_{s,a} = \max(A_{s0,a}, \rho_{min}bd) = \max(T_d/f_{yd}, \rho_{min}bd) = \max(5,83, 15,84) \approx 16 \text{ cm}^2$$

Este área  $A_{s,a}$  puede cubrirse colocando ocho barras de diámetro  $\varnothing_L = 16$ . En la dirección perpendicular también colocaremos ocho barras más de diámetro  $\varnothing_{L16}$  para cubrir un área  $A_{s,b} = A_{s,a}$ .



#### 4.2.2. Zapatas flexibles (ZF)

Las zapatas flexibles son aquellas en las que el vuelo  $v$  es más de dos veces el canto total  $h$  de la zapata [ $v > 2h$ ]. En ese caso, es necesario considerar las deformaciones sufridas por la zapata y la redistribución de esfuerzos consiguiente. Los casos que hay que distinguir en función de la excentricidad son los siguientes:

- |                                  |                    |
|----------------------------------|--------------------|
| 1) Carga ligeramente descentrada | $\eta \leq 1/9$    |
| 2) Carga muy descentrada         | $1/9 < \eta < 1/2$ |

Para el dimensionado de la zapata se examina la flexión que sufre una sección transversal de la zapata en una dirección perpendicular al momento máximo y situada a  $0,35 \cdot a_0$  del centro de la misma (i. e., a  $0,15 \cdot a_0$  del borde del pilar). El momento flector en esa sección se estima de la siguiente manera:

$$M_{a,d} = \begin{cases} \frac{\sigma_c b}{2} (1 + 4,5\eta) (v_a + 0,15a_0)^2 & \eta \leq \frac{1}{9} \\ \left[ \frac{\sigma_{1d}}{2} + \frac{\sigma_{\max,d} - \sigma_{1d}}{3} \right] (v_a + 0,15a_0)^2 & \frac{1}{9} < \eta < \frac{1}{2} \end{cases} \quad [4.10]$$

Con este momento se calcula el momento reducido  $\mu$  y la cuantía mecánica  $\omega$  de la armadura de donde surge el diámetro y el número de barras necesarias:

$$M_{a,d} \rightarrow \mu = \frac{M_{a,d}}{bd^2 f_{cd}} \rightarrow \omega = \mu(\mu + 1) \rightarrow A_{0s} = \omega bd \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \quad [4.11]$$

donde:

$b$ : ancho de la zapata perpendicular a la dirección del momento.

$d$ : canto útil de la zapata calculado previamente.

$f_{cd}$ : resistencia a compresión del hormigón de diseño.

$f_{yd}$ : resistencia a tracción del acero utilizado en la cimentación.

$A_{0s}$ : área de acero necesaria en la sección estudiada.

El área de cálculo obtenida debe verificar que la sección estudiada posea un área mínima por encima de la fijada por la normativa y dada por la ecuación [4.8]:

$$A_{s,a} = \max(A_{0s,a}, \rho_{\min} bd) \quad A_{s,b} = \max(A_{0s,b}, \rho_{\min} ad) \\ \rho_{\min} = \begin{cases} 0,0020 & \text{con acero B 400 S} \\ 0,0018 & \text{con acero B 500 S} \end{cases} \quad [4.12]$$

donde  $A_{s,a}$  es la cantidad de acero que colocaremos a lo largo del lado  $a$  de la cimentación. Para el otro lado  $b$ , si es más corto, en general bastará con colocar,  $A_{s,b} = \rho_{\min}ad$ . El número de barras  $N$  y el diámetro  $\emptyset_L$  deben tomarse de tal manera que  $N \cdot \emptyset_L \geq A_{s,i}$  con  $i \in \{a, b\}$ . Una precaución que debe respetarse en el caso de zapatas alargadas con  $a > b$  es que el cuadrado central de dimensiones  $b \times b$  contenga al menos  $2/3$  de las barras del armado  $A_{s,b}$ .

**Ejemplo numérico 2**

Dimensionar una zapata aislada que, por razones constructivas, puede tener un ancho máximo de  $b = 1,80$  m para un soporte rectangular  $a_0 \times b_0 = 0,40 \times 0,30$ , para un terreno con  $\sigma_{adm} = 160$  kN/m<sup>2</sup> y un esfuerzo axil centrado de  $N_k = 900$  kN debido a cargas variables.

*Predimensionado del área.* El esfuerzo axil de diseño  $N_d = N_k \cdot \gamma_Q = 900 \cdot 1,6 = 1395$  kN, que nos servirá para predimensionar el área de la zapata:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{14 - 0,02\sigma_{adm}}{100} = 0,108 \\ A &= a \cdot b = \frac{N_d(1 + \gamma_0)}{\sigma_{adm}} = 6,23 \text{ m}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{A}{b} = \frac{6,23}{1,80} = 3,46 \text{ m} \approx 3,50 \text{ m}$$

*Dimensionado del canto.* Ahora podemos calcular los vuelos en cada dirección y estimar el canto de la zapata:

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \frac{a - a_0}{2} = 1,55 \text{ m} \\ v_b &= \frac{b - b_0}{2} = 0,75 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \sigma_t &= \frac{N_d}{a \cdot b} = 221 \text{ kN} \Rightarrow \\ d &= \frac{1,1\sigma_t}{\sigma_t + 370} v_a = 0,638 \text{ m} \end{aligned} \right.$$

*Presiones sobre el terreno.* Como canto total escogeremos  $h \approx 70$  cm (que equivale a tomar un  $r$  de unos 6 cm). Con estos datos podemos estimar con exactitud el peso de la zapata  $P$  y la presión máxima sobre el terreno:

$$\begin{aligned} P &= \rho_{cd}(a \cdot b \cdot h) = 25 \cdot 3,5 \cdot 1,8 \cdot 0,7 = 110 \text{ kN} \\ \sigma_{max} &= \frac{N + P}{A} = \frac{900 + 110}{6,30} \approx 160,71 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \leq 1,25 \cdot 160 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

*Cálculo de las armaduras.* Los datos geométricos y materiales para el dimensionado de la armadura son:

$v_a$ :	vuelo máximo de la zapata dado por $(a - a_0)/2$	1,55 m
$a$ :	largo de la zapata	3,50 m
$a_0$ :	largo del pilar	0,40 m
$b$ :	ancho de la zapata	1,80 m
$h$ :	canto total de la zapata	0,30 m
$d$ :	canto útil de la zapata $d = h - r$	0,63 m
$r$ :	recubrimiento de hormigón de la zapata	0,06 m
$\sigma_t$ :	tensión media sobre el terreno	$221 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$
$f_{cd}$ :	resistencia a compresión de hormigón usado (HA-30)	17 MPa
$f_{yd}$ :	resistencia de diseño del acero usado (B 500 S)	400 MPa

Las magnitudes calculadas son las siguientes:



$M_{ad}$ :	momento de flexión en la zapata,	$M_{ad} = \sigma_i b (v_a + 0,15a_0)^2 / 2$	517 kN·m
$\mu_a$ :	momento de flexión reducido	$\mu_a = M_{ad} / (bd^2 f_{cd})$	0,0420
$\omega_a$ :	cuantía mecánica reducida de la armadura	$\omega_a = \mu_a(\mu_a + 1)$	0,0438
$U_{s,a}$ :	cuantía mecánica de la armadura	$U_{s,a} = \omega_a b d f_{cd}$	839 kN
$A_{0s,a}$ :	área total de la armadura	$A_{0s,a} = U_{s,a} / f_{ya}$	23,45 cm <sup>2</sup>
$\rho_{0,a}$ :	cuantía geométrica de la armadura	$\rho_{0,a} = A_{0s,a} / bd$	0,00204

La cuantía geométrica es mayor que la mínima necesaria  $\rho_{0,a} = 0,00204 > 0,0018 = \rho_{min}$ , por tanto es correcta: podemos usar  $A_{s,a} = 12\emptyset_{16}$ . Para el lado  $b$  tenemos que  $A_{s,b} = \max(A_{s0,b}, \rho_{min}ad)$ , pero un cálculo como el anterior conduce a una  $\rho_{0,b} = A_{s0,b}/ad < \rho_{min}$  por lo que tomaremos  $A_{s,b} = \rho_{min}ad = 0,0018 \cdot 350 \cdot 64 = 40,32 \text{ cm}^2 \approx 22\emptyset_{16}$  (donde 2/3 de estas barras estas deberán concentrarse en el área central de dimensiones  $b \times b$ ).

#### 4.2.3. Zapatas de Hormigón en Masa (ZHM)

Las zapatas aisladas de hormigón en masa se usan fundamentalmente para pequeñas cargas, en obras de poca importancia, y resultan antieconómicas en otros casos.

Su comprobación se realiza estimando las tensiones por el método clásico, a partir del momento flector  $M_{ad}$  dado por [4.9] y haciendo la siguiente comprobación:

$$\sigma_{ct,flex} = \frac{6M_{ad}}{bh^2} \leq f_{ct,d} = \frac{0,21 \cdot f_{ck}^{2/3}}{\gamma_c} (1 + 16,75 \cdot h^{-0,7}) \quad \begin{cases} h \text{ en [mm]} \\ f_{ck} \text{ en [MPa]} \end{cases} \quad [4.11]$$

Además es conveniente examinar el estado límite de punzonamiento mediante:

$$\sigma_{ct,punz} = \frac{N_d}{4ab} \left( \frac{b + b_0 + h}{b_0 + h} \right) \left( \frac{a - a_0 - h}{h} \right) \leq f_{ct,d} = \frac{0,42 \cdot f_{ck}^{2/3}}{\gamma_c} \quad [4.12]$$

donde ambas fórmulas requieren que  $f_{ck}$  esté expresado en MPa.

#### Ejemplo numérico 3

Comprobar el dimensionado de una zapata aislada de hormigón en masa con canto  $a \times b \times h = 1,75 \times 1,75 \times 0,50$  para un soporte cuadrado  $a_0 \times b_0 = 0,25 \times 0,25$  para un terreno con  $\sigma_{adm} = 150 \text{ kN/m}^2$  con un esfuerzo axial centrado de debido a cargas permanentes y variables  $N_k = N_{Gk} + N_{Qk} = 200 \text{ kN} + 125 \text{ kN}$ .

*Presiones sobre el terreno.* Computando el peso de la zapata se tiene que:

$$P_d = \rho_{cd} (a \cdot b \cdot h) = 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \cdot 1,75 \text{ m} \cdot 1,75 \text{ m} \cdot 0,50 \text{ m} \approx 40 \text{ kN}$$

$$\sigma_{max} = \frac{N_d + P_d}{A} (1 + 6\eta) = \frac{(200 \cdot 1,35 + 125 \cdot 1,50) + 40}{1,75} (1 + 0) = 150 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \leq 1,25 \cdot 150 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

Esfuerzos de flexo-tracción en el hormigón. Se obtienen simplemente calculando:



$$M_{ad} = \frac{N_d}{2a} (1 + 4,5\eta) (v_a + 0,15a_0)^2 = \frac{460}{2 \cdot 1,75} \cdot (1) \cdot (0,75 + 0,15 \cdot 0,25)^2 \approx 81 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{ct,flex} = \frac{6M_{ad}}{bh^2} = \frac{6 \cdot 81000}{1,75 \cdot 500^2} \approx 1,11 \text{ MPa} \leq f_{ct,d} = \frac{0,21 f_{ck}^{2/3}}{\gamma_c} (16,75 \cdot h^{-0,7} + 1) = 1,25 \text{ MPa}$$

Esfuerzos de punzonado en el hormigón. Se obtienen simplemente calculando:

$$\sigma_{ct,punz} = \frac{460}{4 \cdot 1750^2} \left( \frac{b + b_0 + h}{b_0 + h} \right) \left( \frac{a - a_0 - h}{h} \right) = 0,25 \text{ MPa} \leq f_{ct,d} = \frac{0,42 f_{ck}^{2/3}}{\gamma_c}$$

### 4.3. Comprobaciones adicionales en zapatas aisladas

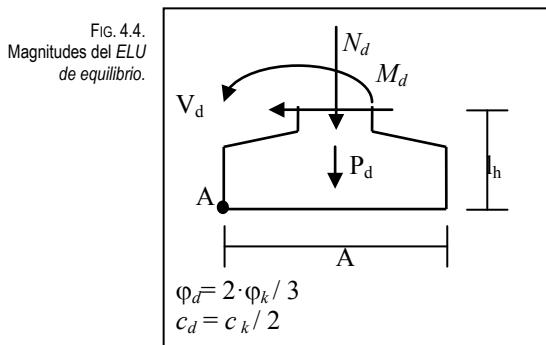
Tal como explicita la EHE-08, en una estructura de hormigón o un elemento de la misma, como son las cimentaciones, es necesario revisar la lista de estados límites últimos (ELU) y estados límites de servicio (ELS) pertinentes. En el caso de las zapatas de cimentación éstos son:

- ELU de agotamiento del terreno (hundimiento).
- ELU de agotamiento de armaduras por esfuerzo normal (armado principal).
- ELU de equilibrio (vuelco y deslizamiento).
- ELU de punzonamiento.
- ELU de anclaje de armaduras.
- ELS de asentamiento diferencial.
- ELS de fisuración excesiva (agresividad química del terreno).

En las secciones anteriores ya hemos examinado los dos primeros para cada tipología de zapata. En esta sección examinaremos algunos de los otros estados límites.

#### 4.3.1. Comprobación del vuelco y el deslizamiento

Para calcular el vuelco y el deslizamiento de una zapata aislada necesitamos conocer los esfuerzos en la base del pilar: esfuerzo axil ( $N_d$ ), esfuerzo cortante ( $V_d$ ) y momento flector ( $M_d$ ). En función de estas magnitudes aplicando las ecuaciones de equilibrio de la estática se puede calcular la seguridad frente al vuelco y frente al deslizamiento. La siguiente figura resume las magnitudes involucradas:



Vuelco:

$$(N_d + P_d) \cdot (a/2) \geq \gamma_1 (M_d + V_d \cdot l_h) \quad [4.13]$$

$$\gamma_1 \geq 1,5$$

Deslizamiento:

$$(N_d + P_d) \cdot \tan \phi_d \geq \gamma_2 V_d \quad [4.14a]$$

$$[T. arenosos, \gamma_2 \geq 1,5]$$

$$(a \cdot b) \cdot c_d \geq \gamma_2 V_d \quad [4.14b]$$

$$[T. arcillosos, \gamma_2 \geq 1,5]$$



#### 4.3.2. Comprobación del punzonamiento

La resistencia frente a los efectos transversales producidos por las cargas más o menos concentradas actuando sobre losas o zapatas sin armadura transversal se comprueba utilizando la tensión transversal ( $\tau_{sd}$ ) media sobre una superficie lateral que rodea el punto de aplicación de la carga. Dicha tensión media se compara con la resistencia a cortante del hormigón ( $\tau_{rd}$ ). El ELU de punzonamiento no se producirá si se cumple la siguiente condición:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{rd} \Rightarrow \frac{\beta F_{sd}}{u_1 d} \leq 0,12\xi(100\rho_L f_{ck})^{\frac{1}{3}} \quad [4.15]$$

donde:

- $F_{sd}$ : esfuerzo efectivo de punzonamiento (transferido por el soporte).
- $d$ : canto útil de la zapata.
- $u_1$ : perímetro crítico (coincide con la proyección horizontal del área lateral), para un soporte de sección rectangular  $u_1 = 2(a_0+b_0) + 4(\pi d/4)$ .
- $\xi$ : parámetro adimensional  $= 1 + (d_0/d)^{1/2}$  [ $d_0 = 200$  mm].
- $\beta$ : coeficiente que tiene en cuenta de excentricidad de carga, para zapatas con soporte centrado; con  $\eta < 1/90$  tómese  $\beta = 1$  y con  $\eta \geq 1/90$  tómese  $\beta = 1,15$ .
- $\rho_L$ : cuantía geométrica, obtenida como media geométrica de cuantías  $\rho_L = (\rho_x \rho_y)^{1/2}$ .
- $f_{ck}$ : resistencia característica del hormigón [expresada en MPa].
- $A_{0s}$ : área de acero necesaria en la sección estudiada.

#### Ejemplo numérico 4

Este ejemplo tiene por objeto aportar los cálculos justificativos de la cimentación para un generador eléctrico de grandes dimensiones ( $3,60 \times 3,60$  m). Como tipología para esta cimentación se ha escogido una zapata flexible. Además se comprobará la posibilidad de vuelco, punzonado y anclado de armaduras. Los datos con los que se cuenta para el dimensionado de la zapata son:

Tensión admisible del terreno	$\sigma_{adm} = 100$ kN/m <sup>2</sup>
Esfuerzo axil (peso del generador)	$N_d = 1030$ kN
Momento de vuelco en cortocircuito	$M_d = 2230$ kN·m
Excentricidad de carga	$e = M_d/N_d = 2,16$ m

*Tensiones sobre el terreno.* Mediante tanteos se ha establecido que la superficie necesaria para la zapata es de unos  $20$  m<sup>2</sup>. Dadas las dimensiones del alternador se ha optado por una zapata rectangular dimensiones  $a \times b = 6,00 \times 4,00$  [m] y canto  $h = 0,50$  m. A continuación se muestran los cálculos justificativos de que con esas dimensiones no se sobrepasan las tensiones admisibles del terreno ( $\sigma_{med} < \sigma_{adm}$ ,  $\sigma_{max} < 1,25 \cdot \sigma_{adm}$ ):

$$\sigma_{med} = \frac{N_d + P}{a \cdot b} = \frac{1030 \text{ kN} + 295 \text{ kN}}{6 \text{ m} \cdot 4 \text{ m}} = 55 \text{ kN/m}^2 < \sigma_{adm} \quad \checkmark$$

$$\sigma_{max} = \frac{4\sigma_{med}}{3(1-2\eta)} = \frac{4 \cdot 110 \text{ kN/m}^2}{3(1-2 \cdot 0,35)} = 105 \text{ kN/m}^2 < 1,25 \cdot \sigma_{adm} \quad \checkmark$$



donde:

- $\sigma_{med}$ : tensión media sobre el terreno en la base de la zapata.
- $\sigma_{max}$ : tensión máxima sobre el terreno en la base de la zapata.
- $\sigma_{adm}$ : tensión admisible del terreno.
- $N_d$ : esfuerzo axil mayorado debido al peso propio del generador.
- $M_d$ : momento de vuelco mayorado en situación de cortocircuito.
- $P$ : peso de la zapata, dado por  $P = \rho_c \cdot (a \cdot b \cdot h) \cdot g = 295 \text{ kN}$ .
- $\rho_c$ : densidad del hormigón =  $24,5 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$ .
- $a$ : largo de la zapata =  $6,00 \text{ m}$ .
- $b$ : ancho de la zapata =  $4,00 \text{ m}$ .
- $h$ : canto de la zapata =  $0,50 \text{ m}$ .

*Seguridad al vuelco de la zapata.* El criterio de seguridad al vuelco en zapatas es simplemente que los momentos estabilizantes superen a los momentos desestabilizantes, con un cierto factor de seguridad:  $M_{est} \geq \gamma_1 \cdot M_{dest}$ , en este caso:

$$(N_d + P) \frac{a}{2} \geq \gamma_1 (M_d + V_d \cdot l_h)$$

donde:

- $\gamma_1$ : coeficiente de seguridad al vuelco, para zapatas aisladas  $\gamma_1 = 1,5$ .
- $N_d$ : esfuerzo axil mayorado debido al peso propio del generador.
- $M_d$ : momento de vuelco mayorado en situación de cortocircuito.
- $V_d$ : esfuerzo cortante en la base de la cimentación; en este caso es nulo.
- $l_h$ : distancia efectiva del esfuerzo cortante a la base de la cimentación.
- $P$ : peso de la zapata.
- $a$ : largo de la zapata.

Tomando estos valores y los calculados anteriormente, puede comprobarse que la seguridad al vuelco es adecuada:

$$(1030 + 295) \text{ kN} \frac{6 \text{ m}}{2} \geq 1,5 \cdot (2230 + 0) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$3975 \text{ kN} \cdot \text{m} \geq 3345 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

*Armaduras de hormigón armado de la zapata.* Al tratarse de una zapata flexible es necesaria una armadura de tracción en la parte inferior de la misma para soportar adecuadamente los esfuerzos inducidos en la misma. Los datos geométricos y materiales para el dimensionado de la misma son:

$v_a$ :	vuelo máximo de la zapata dado por $(a - a_0)/2$	1,20 m
$a$ :	largo de la zapata	6,00 m
$a_0$ :	largo del murete sobre el que se apoya el generador	3,60 m
$b$ :	ancho de la zapata	4,00 m
$h$ :	canto total de la zapata	0,50 m
$d$ :	canto útil de la zapata $d = h - r$	0,44 m
$r$ :	recubrimiento de hormigón de la zapata	0,06 m
$\sigma_i$ :	tensión media sobre el terreno	$55 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$
$f_{ck}$ :	resistencia característica de hormigón usado (HA-30)	30 MPa



$f_{cd}$ :	resistencia de diseño de hormigón usado (HA-30)	20 MPa
$f_{yd}$ :	resistencia a compresión del acero usado (B 500 S)	435 MPa

Las magnitudes calculadas son las siguientes:

$M_{ad}$ :	momento de flexión en la zapata, $M_{ad} = \sigma_t b (v_a + 0,15a_0)^2 / 2$	666 kN·m
$\mu$ :	momento de flexión reducido $\mu = M_{ad} / (bd^2 f_{cd})$	0,045
$\omega$ :	cuantía mecánica reducida de la armadura $\omega \approx \mu(\mu+1)$	0,047
$U_s$ :	cuantía mecánica de la armadura $U_s = \omega b d f_{cd}$	1212 kN
$A_s$ :	área total de la armadura $A_s = U_s / f_{yd}$	27,9 cm <sup>2</sup>
$\rho_s$ :	cuantía geométrica de la armadura $\rho_s = A_s / bd$	0,00159

Esta cuantía mecánica es menor que la mínima necesaria  $\rho_s = 0,00159 < 0,0018 = \rho_{min}$  y, por lo tanto, debe aumentarse el área calculada de armadura hasta que se cumpla el criterio de cuantía mínima. Esto se consigue tomando  $A_{s,a} = \rho_s bd = 31,7$  cm<sup>2</sup>. Un armado que proporciona dicha área sería  $A_{s,a} = 16\varnothing{16}$ , es decir, colocaremos una barra  $\varnothing = 16$  y de longitud aproximada 6,00 cada 25 cm, que satisface las distancias mínimas. Estas barras se colocan paralelas al lado largo de la zapata.

Según el lado corto de la zapata dispondremos también el armado mínimo  $A_{s,b} = \rho_s ba = 47,5$  cm<sup>2</sup> y, por tanto, bastará con disponer una armadura  $A_{s,b} = 24\varnothing{16}$ . Estas barras serán todas paralelas al ancho de la zapata. Se tendrá además en cuenta que 2/3 de las mismas, es decir, 16 barras, irán colocadas en el cuadrado central de 4,00×4,00.

Las longitudes de anclaje (por patilla a 90°) que deben disponerse vienen dadas por la instrucción EHE-08 y son simplemente:

$$l_{bl} = \min\left(m\varnothing^2, \frac{f_{yk}}{20}\right) = 33,28 \text{ cm}$$

donde:

$\varnothing$ :	diámetro de las barras en cm	1,6 cm
$m$ :	coeficiente dado por la tabla 66.5.2.a de la EHE.99	13
$f_{yk}$ :	límite elástico característico del acero usado	500 MPa

En cuanto a las armaduras de cortante, no son necesarias, ya que se ha previsto un canto útil para la zapata superior al mínimo, por encima del cual no es necesario disponer armadura adicional de cortante, en nuestro caso  $d = 0,43$  m, mientras que  $d_{min}$  viene dado por:

$$d_{min} = \min\left(\frac{1,1\sigma_t}{\sigma_t + 370} v_a, 24 \text{ cm}\right) = 17 \text{ cm} < d \quad \checkmark$$

donde:

$v_a$ :	vuelo máximo de la zapata dado por $(a - a_0)/2$	120 cm
$\sigma_t$ :	tensión media sobre el terreno	55 kN·m <sup>-2</sup>

*Comprobación del punzonado.* En cuanto al punzonamiento tenemos:



$$F_{sd} = N_d = 1030 \text{ kN} \quad d = 0,44 \text{ m}$$

$$u_1 = 4a_0 = 7,20 < 4a_0 + 4(\pi d/4) = 15,78 \text{ m} \quad \tau_{sd} = 0,33 \text{ MPa}$$

$$\xi = 1 + (0,20/0,44)^{1/2} = 1,674 \quad \tau_{sd} = 0,33 \text{ MPa}$$

$$\rho_L = (\rho_x \rho_y)^{1/2} = \rho_{min} = 0,0018$$

Con estos datos podemos comprobar que no existe riesgo de punzonamiento:

$$\frac{\beta F_{sd}}{u_1 d} = 0,33 \leq \tau_{rd} = 0,12\xi(100\rho_L f_{ck})^{1/3} = 0,35$$

#### 4.3.3. Comprobación del cortante

Esta comprobación sólo es necesaria en encepados de zapatas y pilotajes flexibles. Debe examinarse para el valor del cortante  $V_{d2}$  sobre una sección de referencia plana situada a una distancia igual al canto útil ( $d$ ) contado a partir de la cara del soporte. Debe satisfacerse que:

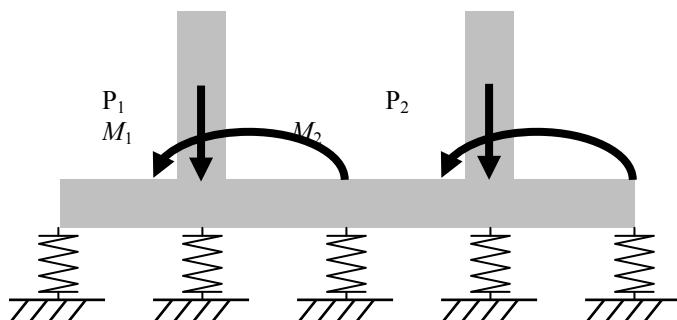
$$V_{u2} = 0,12\xi(100\rho_L f_{ck})^{1/3} b_0 d \geq V_{d2} \quad [4.16]$$

donde  $\xi = 1 + (200/d)^{1/2}$  [d en mm] y  $\rho_L = A_{s1}/b_0 d$ , siendo a su vez  $b_0$  el ancho y  $A_{s1}$  el área total de la armadura pasiva traccionada.

#### 4.4. Cálculo de zapatas corridas

Una zapata corrida bajo pilares es una cimentación común a tres o más soportes o una cimentación de un muro continuo. En esencia, una zapata corrida se calcula como una viga flotante. Una viga flotante es una viga continua en la que los apoyos fijos se han sustituido por apoyos elásticos. En la siguiente figura puede verse una viga fija y una flotante de idénticas características geométricas.

FIG. 4.5.  
Esquema de viga  
flotante para zapata  
corrida de dos pilares.



Podemos calcular ambos tipos de vigas mediante el método matricial. Teniendo en cuenta que bajo cargas verticales en cálculo de primer orden no se producen reacciones horizontales ni cambios de longitud importantes, podemos usar el esquema de cálculo para la FIG. 4.5. La matriz de rigidez elemental<sup>39</sup> para cada una de las barras de longitud  $L$ , dado que no existen esfuerzos horizontales, vendría reducirse a [4.16]:



$$\left[ K^{(e)} \right] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad [4.17]$$

En cuanto a las fuerzas nodales, debemos tomar en consideración, junto con las fuerzas transmitidas por los pilares, las reacciones de los apoyos elásticos, que vienen dadas por  $F_i = -K_i\delta_i$ , donde las  $K_i$  dependen del coeficiente de balasto y la separación entre apoyos elásticos adoptada y los  $\delta_i$  son los desplazamientos verticales de los nudos. En concreto, una zapata corrida de ancho  $b$  y largo  $L_{zap}$ , discretizada en  $2p$  tramos iguales de longitud  $L = L_{zap}/2p$ , tenemos:

- apoyos extremos  $K_1 = K_{2p+1} = k_b bL/2$
- resto de apoyos intermedios  $K_j = k_b bL$  para  $j \in \{2, 3, \dots, 2p\}$ .

Así, para calcular una viga flotante con  $p$  pilares podemos considerar un esquema de cálculo con  $2p + 1$  nudos y  $2p$  barras. Acoplando las matrices de rigidez elementales  $[K^{(e)}]$  de los  $2p$  tramos y reagrupando un poco el factor  $L$  convenientemente, el sistema de ecuaciones asociado al esquema de cálculo ideal de la figura FIG. 4.5, que tiene  $p = 3$ , puede escribirse simplemente como:

$$-K \begin{bmatrix} \delta_1/2 \\ 0 \\ \delta_2 \\ 0 \\ \delta_3 \\ 0 \\ \delta_4 \\ 0 \\ \delta_5/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 \\ M_1/L \\ 0 \\ 0 \\ P_2 \\ M_2/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -6 & -12 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 & -6 & 12 \\ 6 & 2 & -6 & 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ L\theta_1 \\ \delta_2 \\ L\theta_2 \\ \delta_3 \\ L\theta_3 \\ \delta_4 \\ L\theta_4 \\ \delta_5 \\ L\theta_5 \end{bmatrix}$$

La solución para los desplazamientos verticales en función de  $\kappa = KL^3/EI = k_b bL^4/EI$ :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{L^3}{EI} \frac{m_1 F_2^m + m_2 F_1^m - P_1 F_2^p - P_2 F_1^p}{2\kappa(9+\kappa)R} \\ \delta_2 &= \frac{L^3}{EI} \frac{m_1 G_2^m + m_2 G_1^m - P_1 G_2^p - P_2 G_1^p}{2\kappa R} \\ \delta_3 &= \frac{6L^3}{EI} \frac{(m_1 - m_2)H^m + (P_1 + P_2)H^p}{\kappa R} \\ \delta_4 &= \frac{L^3}{EI} \frac{m_1 G_1^m + m_2 G_2^m + P_1 G_1^p + P_2 G_2^p}{2\kappa R} \\ \delta_5 &= \frac{L^3}{EI} \frac{m_1 F_1^m + m_2 F_2^m + P_1 F_1^p + P_2 F_2^p}{2\kappa(9+\kappa)R} \end{aligned} \quad [4.18a]$$



Esta solución también se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \delta_5 \\ \delta_4 \\ \delta_3 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\kappa(9+\kappa)R} \begin{pmatrix} F_1^m & F_2^m & F_1^p & F_2^p \\ \bar{G}_1^m & \bar{G}_2^m & \bar{G}_1^p & \bar{G}_2^p \\ 12H^m & -12H^m & 12H^p & 12H^p \\ \bar{G}_2^m & \bar{G}_1^m & -\bar{G}_2^p & -\bar{G}_1^p \\ F_2^m & F_1^m & -F_2^p & -F_1^p \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad [4.18b]$$

dondem<sub>1</sub> = M<sub>1</sub>/L, m<sub>2</sub> = M<sub>2</sub>/L y R = 7κ<sup>2</sup> + 216κ + 288 y los otros factores:

$$\begin{aligned} F_1^p &= 2(51\kappa^2 + 990\kappa + 1512) & G_1^p &= 2(-27\kappa^2 + 144\kappa + 216) & H_p &= 11\kappa + 12 \\ F_2^p &= 2(9\kappa^2 - 306\kappa - 216) & G_2^p &= 2(7\kappa^2 + 210\kappa^2 + 1080(\kappa+1)) & H_m &= \kappa(\kappa+15) \\ F_1^m &= \kappa^3 - 4(12\kappa^2 + 171\kappa - 432) & G_1^m &= -3(\kappa-24)(\kappa^2 + 14\kappa + 12) & \bar{G}_i^m &= \frac{G_i^m}{9+\kappa} \\ F_2^m &= 13\kappa^3 + 564\kappa^2 + 3852\kappa + 1728 & G_2^m &= 3(\kappa^3 + 4(\kappa^2 + 27\kappa + 72)) & \bar{G}_i^p &= \frac{G_i^p}{9+\kappa} \end{aligned}$$

### Ejemplo numérico 5

Dimensionar el armado de una zapata corrida para dos pilares de dimensiones a<sub>0</sub>×b<sub>0</sub> = 0,35 m × 0,35 m con la misma carga vertical P<sub>d</sub> = 1350 kN y momentos opuestos M<sub>1</sub> = -M<sub>2</sub> = M<sub>d</sub> = 50 kN·m (con la misma disposición de la FIG. 4.5). El ancho de la zapata es de 1,50 m y el largo 10,0 m con una distancia entre ejes de pilares de 5,00 m. El canto total es de 0,45 m. El coeficiente de balasto del problema es de k<sub>b</sub> = 5 kp/cm<sup>3</sup>, y se usa hormigón HA-25 y acero B 400 S.

A partir de los datos modelizaremos la zapata como una viga flotante con cuatro tramos de longitud L = 2,5 m sobre apoyos flexibles. Además en nuestro caso por simetría tenemos δ<sub>1</sub> = δ<sub>5</sub>, δ<sub>2</sub> = δ<sub>4</sub> y también reacciones serán simétricas. Si usamos los desplazamientos dados por [4.18] y obtenemos las reacciones sobre el terreno, tenemos que en función de P<sub>d</sub>, m = M<sub>d</sub>/L y κ se tiene que (recuérdese que los apoyos extremos son la mitad de rígidos K<sub>2</sub> = K<sub>3</sub> = K<sub>4</sub> = k<sub>b</sub>L = 2K<sub>1</sub> = 2K<sub>5</sub>):

$$\begin{aligned} F_1 &= F_5 = +3 \frac{P_d(10\kappa + 24) + m_d\kappa(\kappa + 42)}{(7\kappa^2 + 216\kappa + 288)} \\ F_2 &= F_4 = \frac{P_d(7\kappa^2 + 120\kappa + 144) - 3m_d\kappa(\kappa - 12)}{(7\kappa^2 + 216\kappa + 288)} \\ F_3 &= 12 \frac{-P_d(11\kappa + 12) + m_d\kappa(\kappa + 15)}{(7\kappa^2 + 216\kappa + 288)} \end{aligned} \quad [4.19]$$

Con esos valores, se dibuja el diagrama de momentos flectores:

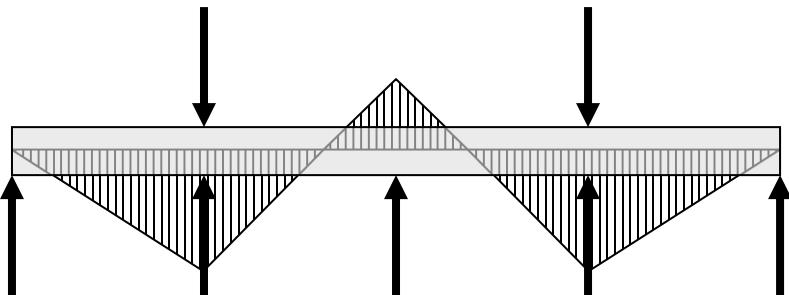


FIG. 4.6.  
Esquema de viga  
flotante para zapata  
corrida de dos pilares.

Los momentos máximos superior e inferior vienen dados por:

$$\begin{aligned} M_d^+ &= LF_1 = +3 \frac{P_d L (10\kappa + 24) + M_d \kappa (\kappa + 42)}{(7\kappa^2 + 216\kappa + 288)} \\ M_d^- &= 2LF_1 - L(P - F_2) = 3\kappa \frac{M_d(\kappa + 96) - 12P_d L}{(7\kappa^2 + 216\kappa + 288)} \end{aligned} \quad [4.20]$$

El cálculo numérico, usando las expresiones anteriores y los valores numéricos, es:<sup>40</sup>

$$\begin{array}{lll} P_d = 1350 \text{ kN} & M_d = 50 \text{ kN}\cdot\text{m} & E_c = 3960 \cdot (f_{ck}[\text{MPa}] + 8)^{1/3} = 12695 \text{ MPa} \\ L = 2,50 \text{ m} & b = 1,50 \text{ m} & h = 0,45 \text{ m} \quad I_f = bh^3/12 \end{array}$$

$$\kappa = \frac{k_b b L^4}{E_c I_f} = \frac{12 k_b L \left(\frac{L}{h}\right)^3}{E_c} = \frac{12 \left(0,049 \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} \cdot 2500 \text{ mm}\right)}{12695 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} \left(\frac{2,50 \text{ m}}{0,45 \text{ m}}\right)^3 = 19,85$$

$$M_d^+ = 332,3 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad M_d^- = -281,8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

#### 4.4.1. Zapatas corridas bajo cargas centradas e idénticas

Es interesante que para  $n$  cargas centradas e idénticas de valor  $P = P_1 = \dots = P_n$  y momentos nulos  $M_1 = \dots = M_n = 0$ , la solución general sea prácticamente constante a partir de  $n \geq 5$ . Por esa razón plantearemos el problema para  $n = 5$ . En ese caso, el sistema obtenido a partir de la matriz de rigidez, eliminando los grados de libertad horizontales y prescindiendo de los giros es:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{12EI}{L^3} \begin{pmatrix} 1 + \kappa/2 & -1 & & & \\ -1 & 2 + \kappa & -1 & & \\ & -1 & 2 + \kappa & -1 & \\ & & -1 & 2 + \kappa & -1 \\ & & & -1 & 1 + \kappa/2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{bmatrix}$$

donde  $\kappa = k_b b L^4 / 12EI$ . La solución del sistema anterior resulta ser:



$$\delta_1 = \delta_3 = \delta_5 = \delta_{\min} = \frac{24P}{(48 + \kappa)K} \quad \delta_2 = \delta_4 = \delta_{\max} = \frac{(24 + \kappa)P}{(48 + \kappa)K} \quad [4.21]$$

donde  $\delta_{\min}$  es el desplazamiento mínimo situado en la mitad del vano de una viga flotante y  $\delta_{\max}$  el máximo desplazamiento que se da justo debajo de cada pilar. Esta solución también es válida para un caso más general, en el que se obtiene para un sistema de cargas centradas idénticas que  $P_1 = P_2 = \dots P_n = P$  y  $M_1 = M_2 = \dots M_n = 0$ .

Es interesante notar que las expresiones de [4.21] permiten establecer límites en el caso de zapatas mucho más rígidas que el terreno, donde llegamos a una distribución aproximadamente triangular.<sup>41</sup> Y también podemos establecer el límite de terrenos muy rígidos y zapatas de poco canto donde se llega a una distribución constante a tramos. Los desplazamientos vienen dados por la siguiente ecuación:

$$\delta_1 = \delta_3 = \delta_5 = \delta_{\min} = \frac{24P}{(48 + \kappa)K} \quad \delta_2 = \delta_4 = \delta_{\max} = \frac{(24 + \kappa)P}{(48 + \kappa)K} \quad [4.22]$$

A partir de esto, podemos calcular el canto de una viga flotante con cargas idénticas y centradas, calculando el diagrama de momentos flectores a partir de las reacciones dadas verticales hacia arriba dadas por  $R_i = K\delta_i$  y los esfuerzos  $P_i$ .

A partir del diagrama de momentos flectores obtenido con los datos anteriores, puede verse que el momento máximo positivo se da bajo el primer pilar, mientras que el máximo momento negativo se da en el centro de la viga. Ambos vienen dados por un número par de pilares:

$$M_{\max}^+ = \frac{12PL}{48 + \varepsilon} \quad [4.23]$$

A partir de ese momento y del correspondiente  $M_{\max}^-$  pueden determinarse las armaduras de tracción y compresión y el armado distribuido necesario para una zapata corrida con  $n \geq 5$ , con pilares equidistantes.

## 4.5. Cálculo de losas

Un método común para el cálculo razonablemente exacto de las losas de cimentación es considerarlas como si fueran emparrillados. Un emparrillado es una estructura situada sobre un plano mediante barras que forman una retícula de lado  $h$  en que la matriz de rigidez elemental de cada barra viene dada por:

$$\left[ K^{(e)} \right] = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & 6h & 0 & -12 & 6h & 0 \\ 6h & 4h^2 & 0 & -6h & 2h^2 & 0 \\ 0 & 0 & ah^2 & 0 & 0 & -ah^2 \\ -12 & -6h & 0 & 12 & -6h & 0 \\ 6h & 2h^2 & 0 & -6h & 4h^2 & 0 \\ 0 & 0 & -ah^2 & 0 & 0 & ah^2 \end{bmatrix} \quad [4.24]$$



donde  $\alpha = GJ/EI$ , siendo  $GJ$  la rigidez torsional. Una condición necesaria<sup>42</sup> para que la solución de emparrillado se aproxime óptimamente a la de la losa real cuando  $h$  tiende a 0 es que  $\alpha$  se tome como  $\alpha = 8$ . Por ejemplo, una losa puede aproximarse por un emparrillado ortogonal como el siguiente:

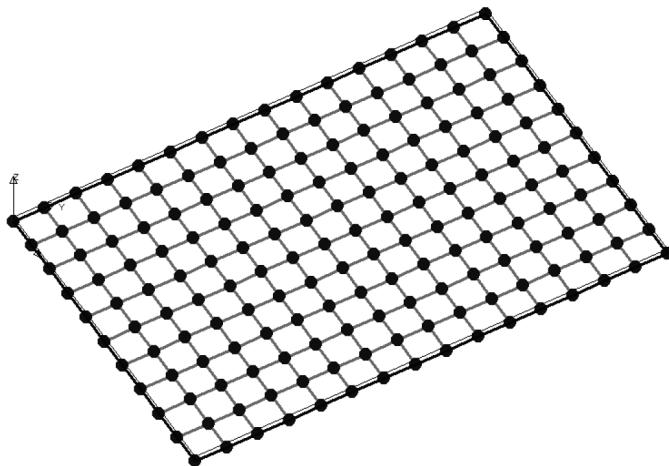


FIG. 4.7.  
Esquema de losa de cimentación (placa flotante).

El emparrillado puede usar otras formas. Dos formas de discretización comunes son:

- a) *El método de los rectángulos*, en el que se construye una red ortogonal y la intersección de dos líneas de la red constituye un nudo.
- b) *El método de los rombos*, en el que sobre una red ortogonal, nudo sí nudo no en ambas direcciones se construyen nudos. A igualdad del número de nudos este método es más exacto aunque más complicado.

La idea básica que subyace tras el emparrillado es que una losa apoyada sobre el terreno se comporta de modo similar a las barras de un emparrillado o entramado muy denso de barras. Esta discretización permite calcular los esfuerzos de la losa aproximadamente mediante el método matricial, de manera sencilla. Una vez discretizada la losa en forma de entramado, necesitamos un tipo de enlace tal que cada nudo del entramado se comporte de manera similar a como se comportaría un punto de una losa apoyada sobre un terreno. Una forma sencilla de hacer esto es suponer que en cada nudo del entramado que imita el comportamiento de la losa colocamos un muelle que reproduce la rigidez del terreno. Cuando una porción de losa de cimentación presiona sobre el terreno hundiéndose ligeramente en él, experimenta una reacción hacia arriba del terreno aproximadamente proporcional a la distancia de hundimiento.

#### 4.5.1. Método de los rectángulos

En el método de los rectángulos con discretización idéntica para los dos lados de la losa, los polígonos de Voronoi asociados a la retícula de nudos son cuadrados. A cada barra del entramado regular se le asigna el momento de inercia de una viga con un ancho igual al espacio entre barras  $s_b$  y un canto igual al canto de la losa ( $d$ ). Para las barras de los extremos, se toman los valores que sean la mitad de los anteriores:



$$\begin{aligned} A_{int} &= s_b d & I_{int,z} &= s_b d^3 / 12 & I_{int,y} &= s_b^3 d / 12 & [4.25] \\ A_{ext} &= s_b d / 2 & I_{ext,z} &= s_b d^3 / 24 & I_{ext,y} &= s_b^3 d / 24 \end{aligned}$$

En este caso, supondremos que el área de la que un nudo recibe una reacción vertical del terreno es proporcional al área del polígono de Voronoi asociada a la red de puntos. Para una red ortogonal los polígonos de Voronoi son rectángulos con el nudo ocupando el centro del rectángulo (en los rectángulos interiores), sobre la mitad del lado (en los rectángulos exteriores) o en el vértice del triángulo (en los rectángulos esquina). Cada nudo interior del entramado estará situado en el interior de un cuadrado de dimensiones  $s_b \times s_b$ , por lo que la reacción total del terreno sobre ese recuadrado interno dependerá del área del mismo y del coeficiente de balasto del terreno:

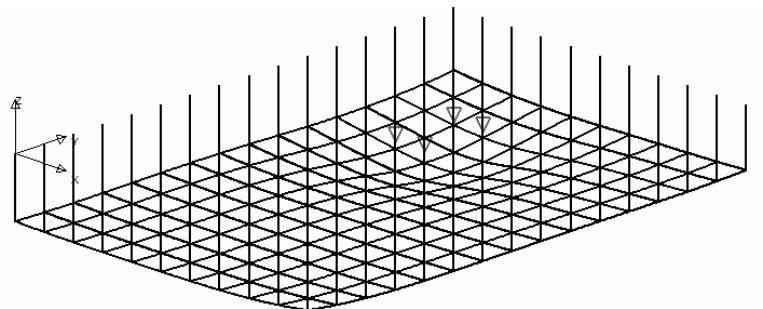
$$F_v = (k_b s_b^2) \cdot d_v = K_{ter} \cdot d_v \quad [4.26]$$

### Ejemplo numérico 6

Una losa de cimentación de  $20 \times 30$  [m] está apoyada sobre un terreno homogéneo y muy compactado con un coeficiente de balasto de  $20 \text{ kp/cm}^3$ . La losa pertenece a un subterráneo en el que circulan vehículos para mover cargas de alto tonelaje. El vehículo más pesado es de 28 t de carga característica y tiene una separación de 2 m entre ruedas traseras y delanteras y cada eje mide poco más de 1 m de longitud. Determinar un espesor de losa y los armados de acero necesarios para dicho espesor. Examinar el resultado usando una malla de puntos situados cada metro de longitud  $s_x = s_y = 1 \text{ m}$ .

El número de puntos de la losa no es muy elevado y resulta ser  $(L_x/s_x + 1) \cdot (L_y/s_y + 1) = 21 \cdot 31 = 651$ . Puesto que se usará un método matricial, el número de grados de libertad existentes será de  $651 \cdot 6 = 3906$ , lo cual significa que determinar todos los desplazamientos involucra resolver un sistema de 3906 ecuaciones con 3906 incógnitas, razón por la cual el cálculo se realizará mediante ordenador. En el centro de cada punto de la red se colocará un apoyo elástico cuyo valor será  $K_{ter} = k_b s_x s_y = 1,96 \text{ kN/m}$ . La siguiente figura muestra el cálculo del hundimiento mediante la red de puntos propuesta:

FIG. 4.8.  
Representación gráfica  
del hundimiento de la  
losa al paso de un



## 4.6. Cálculo de pilotajes

Un pilotaje es una cimentación constituida por una zapata o encepado que se apoya sobre un grupo de columnas, llamadas pilotes, que se introducen profundamente en el



terreno para transmitir su carga al mismo por fricción a través del área lateral de los pilotes. Se emplean básicamente cuando:

- El terreno resistente está a profundidades mayores de 5 o 6 m.
- El terreno es poco consistente hasta muy gran profundidad.
- El terreno contiene una gran cantidad de agua.
- La cimentación debe resistir acciones horizontales de cierta importancia.

#### 4.6.1. Cálculo del pilotaje

El cálculo del pilotaje implica comprobar que las cargas transmitidas al terreno no producen hundimiento. Las cargas que un pilote traslada al terreno son de dos tipos: de rozamiento sobre el área lateral del pilote y de compresión en la base del pilote. Conviene destacar que existen dos tipos diferenciados de pilote en cuanto a la forma de trabajar:

*Pilotes columna.* Se apoyan en su base sobre un estrato inferior resistente y trabajan predominantemente por efecto punta. En ellos debe considerarse el pandeo para calcular el armado del pilote y la compresión en la base del mismo.

*Pilotes flotantes.* Son los únicos que podemos usar cuando no existe terreno resistente a una profundidad razonable y cuando el terreno está formado por arcillas muy fluidas. Los pilotes trabajan fundamentalmente por rozamiento lateral de los pilotes.

- 1) *Cargas sobre un pilote.* Se calculan sumando la carga transmitida por el encepado, el rozamiento sobre el área lateral y la carga sobre la base. Para determinar la carga sobre cada pilote partimos de los momentos flectores  $M_{yd}$ ,  $M_{zd}$ , el axil  $N_d$  y el cortante  $V_d$  en la base del soporte. Si definimos  $e_z = M_{yd}/N_d$  y  $e_y = M_{zd}/N_d$ , la carga vertical  $N_{id}$  sobre un pilote situado en las coordenadas  $(y_i, z_i)$  viene dada por:

$$N_{id} = N_d \left( \frac{1}{n} + \frac{e_z z_i}{I_y} + \frac{e_y y_i}{I_z} \right) \quad [4.26]$$

dondén es el número de pilotes del encepado y donde  $I_y = \sum z_i^2$  e  $I_z = \sum y_i^2$ . Si existen fuerzas horizontales ( $V_d$ ) de importancia, entonces para resistirlas basta con disponer alguno de los pilotes con una inclinación respecto a la vertical. Si llamamos  $\beta_i$  al ángulo del pilote  $i$ -ésimo respecto a la vertical, entonces el equilibrio de fuerzas horizontales requiere que:

$$\sum N_{id} \cdot \operatorname{tg} \beta_i = V_d (N_{ib} = N_{id} / \cos \beta_i) \quad [4.27]$$

- 2) *ELU de hundimiento.* Para que una cimentación pilotada no se hunda en el terreno, debe darse la longitud adecuada a los pilotes. Así se logra una mayor área lateral y un mayor rozamiento del terreno. Para *pilotes flotantes*, el rozamiento es la única fuerza que el terreno ejerce sobre el pilote:

$$R_{id} = \mu_{ter} u \left( q_0 H_i + \frac{\gamma H_i^2}{2} \right) \quad [4.28]$$



donde  $\mu_{ter}$  es el coeficiente de fricción entre el terreno y el pilote, que se toma como 0,25,  $q_0$  es la sobrecarga unitaria en la superficie del terreno,  $\gamma$  es el peso específico del terreno y  $H_i$ , la altura del pilote. La condición de no hundimiento para un pilote flotante<sup>43</sup> es que  $R_{id} \geq N_{id}$ . Para pilotes columna la condición de hundimiento es  $R_{id} + R_{\varnothing d} \geq N_{id}$ , donde  $R_{\varnothing d} = \pi \varnothing^2 \sigma_{adm}$ , con  $\sigma_{adm}$  igual a la presión admisible sobre el estrato en el que se apoya.

#### 4.6.2. Cálculo del pilote

Un pilote esencialmente se calcula como un soporte bajo carga centrada. El pandeo sólo debe tenerse en cuenta para soportes, pilotes, columnas que se apoyan sobre un estrato inferior (en esos casos se puede estimar la longitud de pandeo  $L_p$  como 1/3 de la altura). Las excentricidades accidentales deben ser como mínimo las tomadas para soportes. La armadura longitudinal de los pilotes estará constituida por no menos de seis barras para los de sección circular y cuatro para los cuadrados. La cuantía geométrica mínima debe ser  $\rho \geq 0,005$ . La armadura transversal debe estar formada por espirales o cercos dimensionados con el mismo criterio que se usa en los soportes o pilares.

#### 4.6.3. Cálculo de encepados

La separación mínima de ejes de pilotes circulares debe ser dos veces el diámetro de los mismos. En pilotes cuadrados debe ser 1,75 veces la diagonal de cada uno de ellos. En todos los casos, la separación mínima no debe ser menor de 75 cm (esta separación debe mantenerse a lo largo de toda la longitud, cosa que debe tenerse en cuenta cuando existen pilotes inclinados).

El canto del encepado se fija normalmente, al igual que en las zapatas, mediante una consideración económica: que no sea necesaria la armadura adicional de cortante. Por ejemplo, eso se logra normalmente si se usa la siguiente ecuación para el canto útil:

$$d \geq \max \left( -\frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{a_0^2 + \frac{N_d}{f_{vd}}} , \varnothing_p - r \right) \quad [4.29]$$

El encepado se calcula como una zapata rígida, mediante el método de bielas y tirantes. Un encepado es rígido cuando el vuelo máximo ( $v_{max}$ ) y el canto ( $h$ ) cumplen que  $v_{max} \leq 2h$ . En ese caso la armadura de las bandas o franjas sobre la línea que une centros de pilotes (véase FIG. 4.9) viene dada por el modelo de bielas y tirantes correspondientes. De acuerdo con los modelos dados por la EHE-08, que dependen del número y disposición de pilotes, las armaduras de las bandas vienen dadas por:

Dos pilotes: 
$$A_s = \frac{N_{id,max}}{0,85f_{yd}} \left( \frac{v_{max} + 0,25a_0}{d} \right) \quad [4.30a]$$

Tres pilotes: 
$$A_s = 0,68 \frac{N_{id,max}}{f_{yd}} \left( \frac{0,58d_{ax} - 0,25a_0}{d} \right) \quad [4.30b]$$

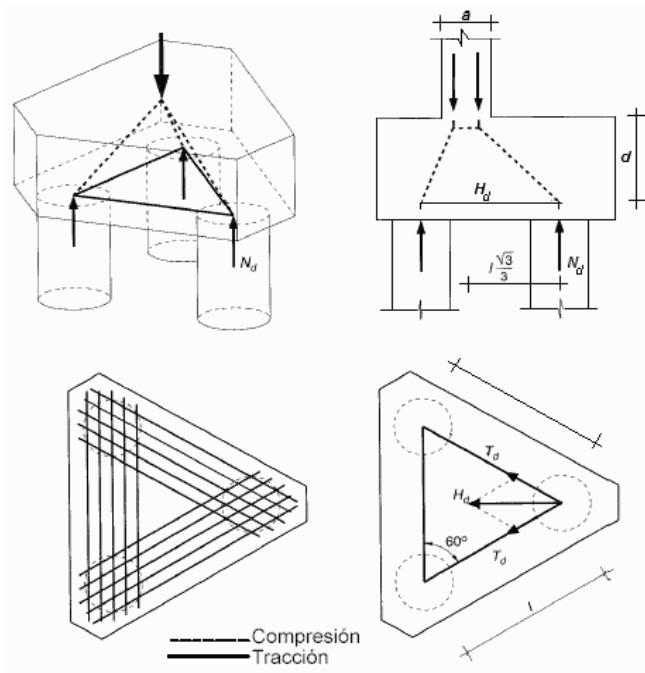


FIG. 4.9.  
Esquema general de un  
encepado de tres  
pilotes.

Cuatro pilotes:

$$\begin{cases} A_{sa} = \frac{N_{id,max}}{0,85f_{yd}} \left( \frac{0,50d_{ax,1} - 0,25a_0}{d} \right) \\ A_{sb} = \frac{N_{id,max}}{0,85f_{yd}} \left( \frac{0,50d_{ax,2} - 0,25b_0}{d} \right) \end{cases} \quad [4.30c]$$

### Ejemplo numérico 7

Dimensionar un pilotaje flotante con un encepado rígido ( $h=0,50$  m) de tres pilotes  $\varnothing_p = 30$  cm con encepado rígido para un soporte de carga vertical de dimensiones  $a_0 \times b_0 = 0,35 \text{ m} \times 0,35 \text{ m}$  y esfuerzos  $P_d = 675 \text{ kN}$  y momento  $M_{z,d} = 175,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . El terreno tiene una densidad característica  $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$  (materiales: HA-30, B 500 S).

*Cálculo de dimensiones.* En primer lugar, calcularemos las magnitudes geométricas. Tomando como centro de coordenadas el centro geométrico del pilar y orientando el encepado para que la línea neutra del soporte sea paralela a la línea entre ejes de los pilotes 1 y 2, tenemos:

$$(y_1, z_1) = \left( -\frac{d_{ax}\sqrt{3}}{6}, \frac{d_{ax}}{2} \right) \quad (y_2, z_2) = \left( -\frac{d_{ax}\sqrt{3}}{6}, -\frac{d_{ax}}{2} \right) \quad (y_3, z_3) = \left( \frac{d_{ax}\sqrt{3}}{3}, 0 \right)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^3 z_i^2 = \frac{d_{ax}^2}{2} \quad I_z = \sum_{i=1}^3 y_i^2 = \frac{d_{ax}^2}{2}$$

$$e_y = \frac{M_{z,d}}{N_d} = 0,26 \quad e_z = \frac{M_{y,d}}{N_d} = 0,00$$



La distancia  $d_{ax}$  debe ser como mínimo dos veces el diámetro de los pilotes. En este caso, siguiendo una práctica habitual, tomaremos  $d_{ax} = 3\emptyset = 90$  cm. A continuación, calculamos las cargas sobre cada pilote:

$$N_{1d} = N_d \left( \frac{1}{n} + \frac{e_y y_1}{I_z} \right) = N_d \left( \frac{1}{3} - \frac{M_{z,d}}{N_d} \frac{\sqrt{3} d_{ax}/6}{d_{ax}^2/2} \right) = \frac{675}{3} \left( 1 - \sqrt{3} \frac{26}{90} \right) \approx 112 \text{ kN}$$

$$N_{2d} = N_d \left( \frac{1}{n} + \frac{e_y y_2}{I_z} \right) = N_d \left( \frac{1}{3} - \frac{M_{z,d}}{N_d} \frac{\sqrt{3} d_{ax}/6}{d_{ax}^2/2} \right) = \frac{675}{3} \left( 1 - \sqrt{3} \frac{26}{90} \right) \approx 112 \text{ kN}$$

$$N_{3d} = N_d \left( \frac{1}{n} + \frac{e_y y_3}{I_z} \right) = N_d \left( \frac{1}{3} + \frac{M_{z,d}}{N_d} \frac{\sqrt{3} d_{ax}/3}{d_{ax}^2/2} \right) = \frac{675}{3} \left( 1 + \sqrt{3} \frac{52}{90} \right) \approx 449 \text{ kN}$$

Ahora consideramos la disposición alternativa, en que la línea neutra del soporte sea perpendicular a la línea entre ejes de los pilares 1 y 2. Así tenemos:

$$(y_1, z_1) = \left( -\frac{d_{ax}}{2}, -\frac{d_{ax}\sqrt{3}}{6} \right) \quad (y_2, z_2) = \left( \frac{d_{ax}}{2}, -\frac{d_{ax}\sqrt{3}}{6} \right) \quad (y_3, z_3) = \left( 0, \frac{d_{ax}\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^3 z_i^2 = \frac{d_{ax}^2}{2} \quad I_z = \sum_{i=1}^3 y_i^2 = \frac{d_{ax}^2}{2}$$

$$e_y = \frac{M_{z,d}}{N_d} = 0,26 \quad e_z = \frac{M_{y,d}}{N_d} = 0,00$$

La distancia  $d_{ax}$  debe ser como mínimo dos veces el diámetro de los pilotes. En este caso, siguiendo una práctica habitual, tomaremos  $d_{ax} = 3\emptyset_p = 90$  cm. A continuación calculamos las cargas sobre cada pilote:

$$N_{1d} = N_d \left( \frac{1}{n} + \frac{e_y y_1}{I_z} \right) = N_d \left( \frac{1}{3} - \frac{M_{z,d}}{N_d} \frac{d_{ax}/2}{d_{ax}^2/2} \right) = 675 \left( \frac{1}{3} - \frac{26}{90} \right) = 30 \text{ kN}$$

$$N_{2d} = N_d \left( \frac{1}{n} + \frac{e_y y_2}{I_z} \right) = N_d \left( \frac{1}{3} + \frac{M_{z,d}}{N_d} \frac{d_{ax}/2}{d_{ax}^2/2} \right) = 675 \left( \frac{1}{3} + \frac{26}{90} \right) = 420 \text{ kN}$$

$$N_{3d} = N_d \left( \frac{1}{n} + \frac{e_y y_3}{I_z} \right) = N_d \left( \frac{1}{3} + \frac{M_{z,d}}{N_d} \frac{0}{d_{ax}^2/2} \right) = 675 \left( \frac{1}{3} + 0 \right) = 225 \text{ kN}$$

Si fabricamos los tres pilotes de la misma longitud, tenemos que el más desfavorable en cuanto al hundimiento es el pilote 2. Si aplicamos la ecuación [4.28], tenemos que:



$$R_{id} = \mu_{ter} u \left( q_0 H_i + \frac{\gamma H_i^2}{2} \right) \geq 0,25 (3,1416 \cdot 0,30) \left( 0 + \frac{18 \cdot H_i^2}{2} \right) \geq 420$$

$$H_i \approx 3,32 \text{ m}$$

Tomaremos la altura de todos los pilotes idéntica e igual a  $H = 3,50 \text{ m}$ . El cálculo de los pilotes se reduce a calcular el armado necesario.

*Cálculo del armado de los pilotes.* Mediante un ábaco de armado para secciones circulares con recubrimiento de 3 cm ( $\delta' = r/\mathcal{O}_p$ ), se tiene que el área total de las armaduras sobre el soporte circular es  $A_{s,p} = 12\mathcal{O}_L 25$ .

*Cálculo del encepado.* El vuelo se calcula a partir de la distancia al centro del triángulo de pilotaje de cualquiera de los pilotes y la mitad del lado del soporte:

$$v_{\max} = \frac{d_{ax}}{\sqrt{3}} - \frac{a_0}{2} \approx 0,35 \text{ m}$$

Por lo tanto, eso requiere un encepado con  $h \geq v_{\max}/2 = 17,5 \text{ cm}$ . Las dimensiones del encepado se obtienen a partir del triángulo central de pilotes, que tiene un lado  $d_{ax} = 90 \text{ cm}$ . Si trazamos un triángulo exterior a éste que contenga los pilotes de tal manera que siempre haya con el borde exterior una distancia de al menos  $\mathcal{O}_p/4$ , tenemos que el lado del triángulo debe ser:  $L_t = d_{ax} + 2(3\mathcal{O}_p/4)/(\tg 30^\circ) = 168 \text{ cm}$ .

En cuanto al armado, si tomamos un recubrimiento  $r = 6 \text{ cm}$ , se requiere un armado en banda sobre la línea de centros dado por:

$$U_{s,banda} = A_{s,banda} f_{yd} = 0,68 N_{id,max} \left( \frac{0,58 d_{ax} - 0,25 a_0}{d} \right) = 196,8 \text{ kN}$$

Esto se puede lograr mediante  $5\mathcal{O}_L 12$  ( $U_s = 237,5 \text{ kN}$ ). Estas barras deben satisfacer la condición de cuantía mínima:

$$U_s \geq 0,044 f_{cd} = 0,20 \cdot (h L_t \cdot \cos 30^\circ / 3) \cdot 30 \text{ MPa} = 327,6 \text{ kN}$$

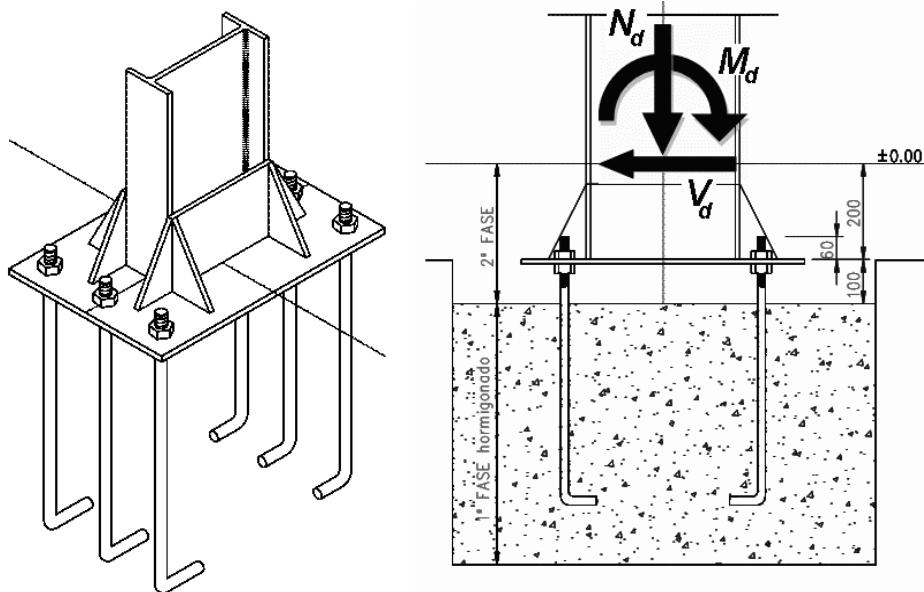
Por lo tanto, necesitamos emplear un mayor número de barras; por ejemplo,  $6\mathcal{O}_L 14$  ( $U_s = 387,9 \text{ kN}$ ).

#### 4.7. Cálculo de bases de unión pilar-cimentación

Los pilares metálicos generalmente necesitan medios de unión especiales a las cimentaciones de hormigón, ya que el acero soporta tensiones que típicamente superan diez veces o quince veces a las tensiones del hormigón; por tanto se requiere un tipo de unión que transmita los esfuerzos de los elementos de metal de forma progresiva al hormigón. Una posibilidad es disponer bases de apoyo ensanchadas en la base del pilar, formadas por una placa soldada al extremo del pilar, que luego se atornilla a pernos de longitud adecuada anclados profundamente en la cimentación.



FIG. 4.10.  
Esquema general de  
una base de anclaje  
para perfil I con cartelas  
y seis pernos.



Una base de anclaje para pilar metálico consta básicamente de:

- *Placa de anclaje*, provista de orificios que se encajan los pernos previamente embebidos en la cimentación de hormigón. El pilar se suelda a dicha base. Y en caso de existir cartelas de distribución de esfuerzos también estarán soldadas sobre esta placa, que deberá ser lo suficientemente gruesa como para resistir esfuerzos de flexión y tener un espesor adecuado para el ancho de garganta de soldadura.
- *Cartelas*. Las cartelas no siempre son necesarias, especialmente si el momento flector en la base del pilar es pequeño. Las cartelas permiten disminuir substancialmente el espesor de la placa de anclaje y garantizan una mejor distribución de los esfuerzos sobre la superficie de apoyo.
- *Pernos de anclaje*. El número, el diámetro y la longitud de estos pernos dependerán del esfuerzo de tracción existente a un lado de la línea neutra de la sección transversal del pilar.

#### 4.7.1. Cálculo de uniones pilar-cimentación

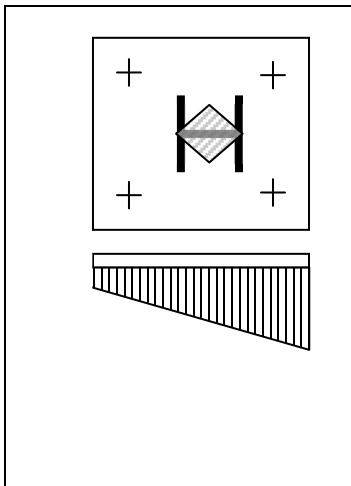
El cálculo completo de una unión pilar-cimentación requiere comprobar que no se rebasan varios estados límites últimos (ELU). Cada ELU corresponde a un posible modo de fallo de la unión. La lista de ELU que deben comprobarse es:

- ELU de agotamiento resistente por compresión en el hormigón.
- ELU de agotamiento resistente en la placa de apoyo.
- ELU de inestabilidad elástica de las cartelas laterales (si existen).
- ELU de agotamiento resistente de la sección transversal de los pernos de anclaje.
- ELU de adherencia de los pernos.



#### 4.7.2. Comprobación de la compresión en el hormigón

La distribución de tensiones provocada por la placa base sobre el elemento de hormigón se supone que es aproximadamente triangular. El valor concreto del esfuerzo máximo depende de la posición de la línea neutra sobre la placa. Se distinguen tres casos:



a) La línea neutra pasa por fuera de los límites de la placa. Esto sucede cuando el centro de presiones  $C = (e_y, e_z)$  cae dentro del núcleo central de la placa (para una placa rectangular de dimensiones  $D \times B$  el núcleo central es un rombo de diagonales  $D/3$  y  $B/3$ ). En ese caso, el esfuerzo máximo sobre el hormigón  $\sigma_c$  viene dado por:

$$\begin{aligned}\sigma_c &= \frac{N_d}{A_p} + \frac{M_{zd}}{W_{pz}} + \frac{M_{yd}}{W_{py}} = \\ &= \frac{N_d}{BD} + \frac{M_{zd}}{BD^2/6} + \frac{M_{yd}}{B^2D/6} = \frac{N_d}{BD} \left( 1 + \frac{6e_y}{D} + \frac{6e_z}{B} \right)\end{aligned}\quad [4.31a]$$

b) La línea neutra pasa entre el borde de la placa y la línea centro de pernos. Esto sucede siempre y cuando:

$$\begin{cases} \frac{D}{6} < e_y = \frac{M_{zd}}{N_d} \leq \frac{D}{2} - \frac{d}{3} \\ \frac{B}{6} < e_z = \frac{M_{yd}}{N_d} \leq \frac{B}{2} - \frac{b}{3} \end{cases}\quad [4.32]$$

El cálculo de la tensión máxima es complicado en el caso general cuando  $M_{yd} \neq 0$  y  $M_{zd} \neq 0$ . Cuando sólo existe momento  $M_{zd} = N_d e_y$  el perfil de tensiones es triangular [ $\sigma(\eta) = \sigma_c \eta / B$  con  $0 \leq \eta \leq y$  y con  $D/2 - e_y = y/3$ ], y la tensión máxima se puede obtener igualando el momento total de la distribución de tensiones con el momento  $M_{zd}$ :

$$\sigma_c = \frac{6N_d(D/2 - e_y)}{By^2} = \frac{2N_d}{3B\left(\frac{D}{2} - e_y\right)} \leq \frac{2N_d}{Bd}\quad [4.31b]$$

c) Cuando la línea neutra cae entre las dos líneas de pernos, la determinación del esfuerzo se vuelve un problema hiperestático que requiere determinar el esfuerzo de tracción que hacen los pernos traccionados. En cualquier caso, la EA-95 permite una simplificación de cálculo en la que se presupone que todo el esfuerzo de compresión recae sobre una banda de dimensiones  $D/4 \times B$  y, en ese caso, la tracción de los tornillos o pernos traccionados y la tensión de compresión del hormigón vienen dadas por:



$$\begin{cases} F_{td} = N_d \frac{8e_z - 3D}{8d - 3D} \\ \sigma_c = \frac{N_d + F_{td}}{BD/4} \end{cases} \quad [4.31c]$$

Una vez calculada la tensión de compresión en el hormigón según el caso correspondiente,  $a$ ,  $b$  o  $c$ , deberá verificarse que no se sobreponga el ELU de aplastamiento del hormigón. Para ello debe comprobarse que se cumple  $\sigma_c \leq 0.85f_{cd}$  y, por lo tanto, las dimensiones rectangulares de la placa  $B$  y  $D$  deberán ser suficientes para satisfacer dicha condición.

#### 4.7.3. Comprobación de la placa de apoyo

La placa de apoyo puede ser simplemente una placa rectangular de espesor suficiente o con cartelas de sujeción al perfil. Esta segunda solución se usa cuando la placa desnuda conduciría a espesores de la placa muy grandes, por lo que la colocación de cartelas reduciría la cantidad de chapa usada en cantidad suficiente para compensar los costes de la mano de obra adicional que requieren las cartelas.

*Espesor de la placa sin cartelas.* Para la comprobación de la placa de apoyo necesitamos conocer las dimensiones del mínimo rectángulo que contiene la sección del perfil  $b_p \times h_p$ , las dimensiones de la placa  $B \times D$ , así como la tensión última de la placa  $\sigma_{pu}$ . La comprobación se realiza verificando que el espesor de la placa  $t_p$  es tal que no se supera el ELU de agotamiento por flexión de la misma. Si se emplea el método simplificado de la EA-95, puede determinarse a partir de las siguientes relaciones:

$$L_e = \max\left(\frac{D-h_p}{2}, \frac{B-b_p}{2}\right) \quad t_p \geq \begin{cases} L_e \sqrt{\frac{3\sigma_c}{\sigma_{pu}}} & L_e < D/4 \\ L_e \sqrt{\frac{3\sigma_c}{2\sigma_{pu}} D \left(L_e - \frac{D}{8}\right)} & L_e \geq D/4 \end{cases} \quad [4.33]$$

*Dimensiones y espesor de las cartelas.* En caso de que el espesor requerido sea excesivamente alto, siempre es posible usar cartelas (FIG. 4.9) y entonces disponer un espesor menor.

#### 4.7.4. Comprobación de los pernos

La comprobación de los pernos requiere tanto la comprobación del ELU de agotamiento de sección transversal de los mismos, con tracción y cortante combinados, como la comprobación del ELU de pérdida de adherencia entre el perno y el hormigón.

*Agotamiento resistente de la sección transversal.* Si los pernos están sometidos a compresión sólo es necesaria la comprobación en cortante ( $\tau_{td} \neq 0, \sigma_{td} = 0$ ). En caso de una fila de pernos sometidos a tracción, se calcula a partir del número de pernos  $n_t$ , el esfuerzo  $F_{td}$  calculado en 4.7.2 c y el esfuerzo cortante  $V_d$ :



$$\begin{cases} \sigma_{td} = \frac{F_{td}}{n_t A_r} \\ \tau_{td} \leq \frac{4}{3} \frac{V_d}{n_t A_\varnothing} \end{cases} \Rightarrow \sigma_{co,td} = \sqrt{\sigma_{td}^2 + 3\tau_{td}^2} \leq 0,80\sigma_t \quad [4.34]$$

donde  $A_r$  es el área resistente del núcleo de la varilla roscada o tornillo (para diámetros nominales  $\varnothing_t \leq 16$  mm puede usarse  $A_r \approx \pi(\varnothing_t - 1,55)^2/4$  y para valores mayores debería consultarse la tabla de tornillos ordinarios),  $A_\varnothing = \pi\varnothing_t^2/4 > A_r$  y  $\sigma_t$  es la tensión de rotura de los pernos, tornillos o varillas roscadas.

*Pérdida de adherencia.* Para evitar la pérdida de adherencia debe darse al perno, tornillo o varilla roscada una longitud  $L_t$  suficiente. Además la práctica usual es asegurarse de que la pérdida de adherencia se produce a una carga mayor o igual que la de agotamiento resistente de la sección transversal. Esas dos condiciones se expresan como:

$$L_t (\pi\varnothing_t \tau_{bc}) \geq 0,8\sigma_t A_r \Rightarrow L_t \geq \frac{0,8\sigma_t A_r}{\pi\varnothing_t \tau_{bc}} \quad [4.35]$$

donde la tensión de adherencia  $\tau_{bc}$  se calcula mediante las siguientes fórmulas:

$$\tau_{bc} = \begin{cases} \frac{1,2}{\gamma_c} f_{ck}^{1/2} & \text{(lisas)} \\ \frac{\tau_{bu}}{1,6} \left( \frac{f_{ck}}{225} \right)^{2/3} & \text{(corrug.)} \end{cases}, \quad \tau_{bu} \geq \begin{cases} 130 - 1,9\varnothing_t & \varnothing_t < 32 \text{ mm} \\ 69 & \varnothing_t \geq 32 \text{ mm} \end{cases} \quad [4.36]$$

En las fórmulas anteriores todos los diámetros se expresan en mm y  $f_{ck}$ ,  $\tau_{bc}$  y  $\tau_{bu}$  en [ $\text{kN}/\text{cm}^2$ ].

<sup>37</sup> El terreno se puede modelizar como un sólido viscoplastico. En el proceso de hundimiento las líneas de rotura aparecen en el campo de deformación plástica.

<sup>38</sup> Cuando la carga no está centrada en principio, el perfil de tensiones sobre el terreno es trapezoidal o triangular, por lo que la tensión media dada por  $N_d(1+\gamma)/\sigma_{adm}$  no es una buena medida de las tensiones máximas.

<sup>39</sup> Es decir, podemos usar la matriz de rigidez correspondiente a una barra inextensible.

<sup>40</sup> Fórmula aproximada para el módulo de Young del hormigón; véase J. Calavera (1999).

<sup>41</sup> Véase el capítulo “Cimentaciones” en P. J. Montoya, A. G. Messeguer y F. Morán (2000).

<sup>42</sup> Véase, por ejemplo, E. Rowe (1962): *Concrete Bridge Design*, Wiley, Nueva Cork, 1962.

<sup>43</sup> La carga de hundimiento del pilotaje (grupo de pilotes) se calcula a partir de las de las cargas de hundimiento de los pilotes aislados. Esta carga de hundimiento no es necesariamente igual a la suma de las cargas de hundimiento para los pilotes aislados, si la separación entre ejes de pilotes es superior a dos veces su diámetro.

→5



## Cimentaciones extendidas y estructuras de contención

En obra civil a menudo es necesario establecer dos niveles geométricos de servicio a distintas cotas y a la vez adyacentes. El desnivel necesario se puede conseguir bien con transiciones suaves mediante la construcción de taludes, o bien mediante una transición brusca, esto es, mediante una discontinuidad prácticamente vertical. Es frecuente optar por la segunda solución cuando los requerimientos de espacio, de seguridad o de ambos así lo imponen.

El terreno no suele ofrecer una resistencia suficiente para soportar un corte vertical. Esto hace necesario insertar un elemento constructivo, la estructura de contención, que permita asegurar convenientemente el cambio de cota.

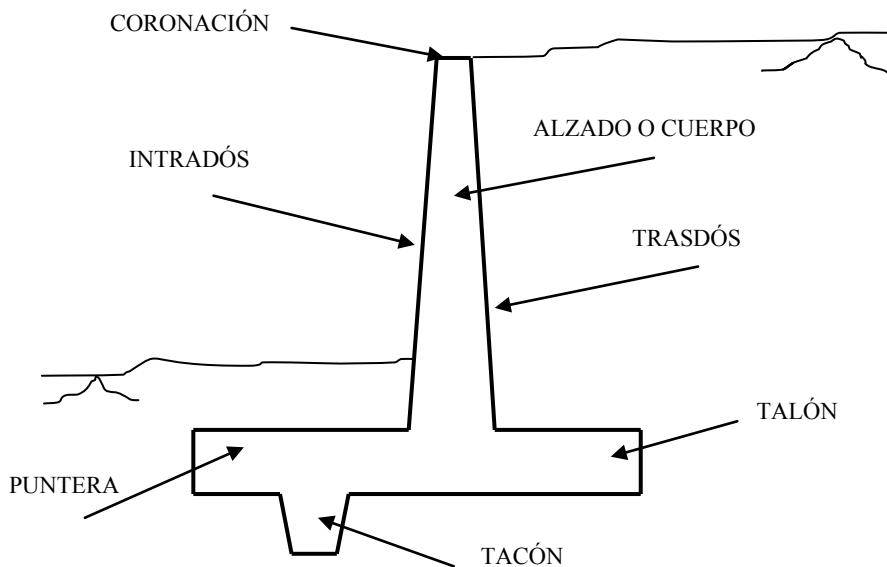
### 5.1. Definiciones

En una estructura de contención identificamos las partes que se indican en la FIG. 5.1. En relación con las acciones, y considerando un muro tradicional, la estructura de contención está sometida a los empujes del terreno que sostiene en su trasdós,  $E_t$ , a eventuales fuerzas exteriores,  $A_e$ , y a su propio peso,  $W$ . Estas acciones deben ser soportadas por la estructura, que asegurará la integridad del material que forma el muro, y transmitidas al terreno situado en la base y el pie del muro en unas condiciones que sean aceptables para el propio terreno.

Dado que el suelo presenta una rigidez relativamente inferior a la del material del muro y dado también que éste transmite acciones importantes al terreno, este último se deformará, de modo que se movilizará una cierta reacción del terreno,  $E_r$ , en la parte anterior del muro. La base de la estructura recibirá la reacción del terreno en la que se apoya,  $R_r$ . De este modo, el conjunto de fuerzas a las que se verá sometida la estructura serán las que aparecen en la FIG. 5.2.

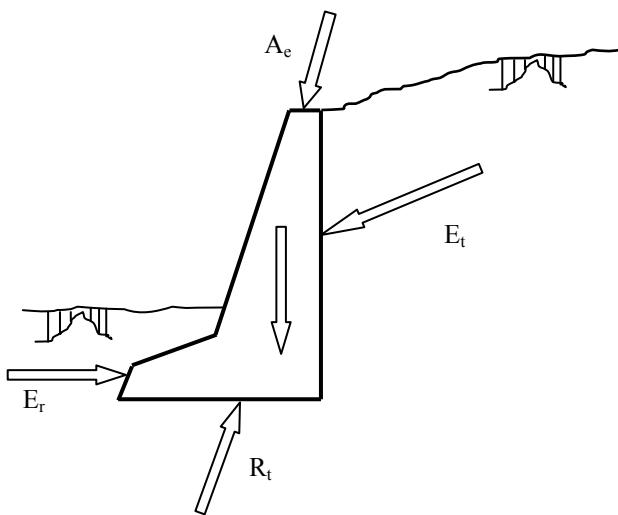


Fig. 5.1.  
Identificación de las  
partes de una  
estructura de  
contención.



Finalmente, y teniendo en cuenta el tipo y comportamiento del terreno, esto es, la parte geotécnica, se trata de determinar el valor de los empujes del terreno en el trasdós y en el intradós, a fin de comprobar si el dimensionamiento previsto de la estructura es adecuado según diversas condiciones que deben ser consideradas.

Fig. 5.2.  
Acciones sobre una  
estructura de  
contención.





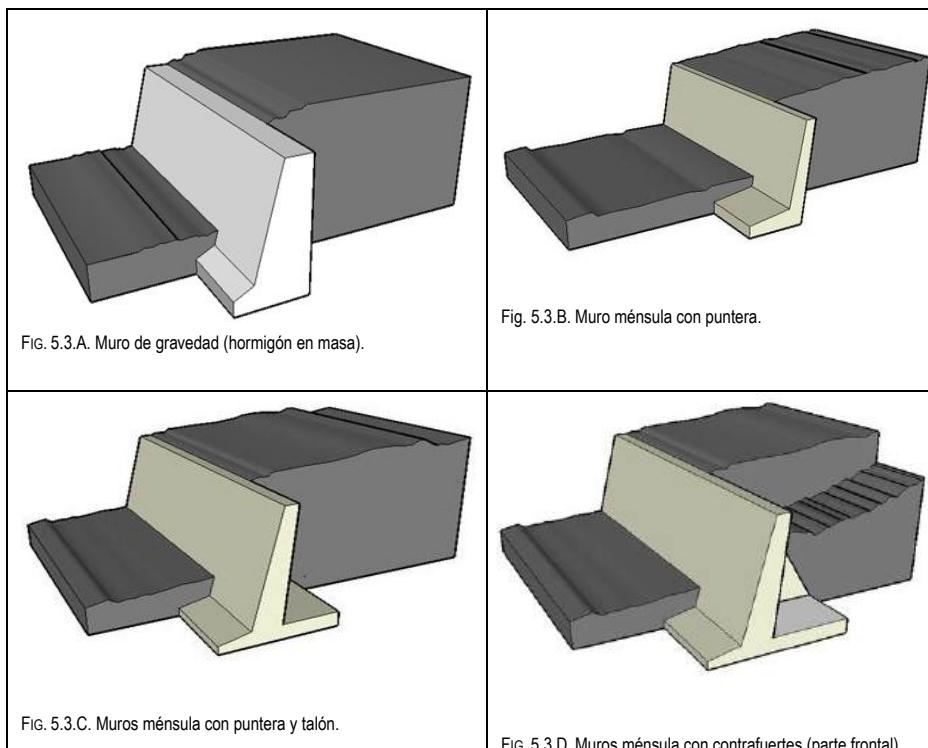
## 5.2. Tipos de estructuras de contención

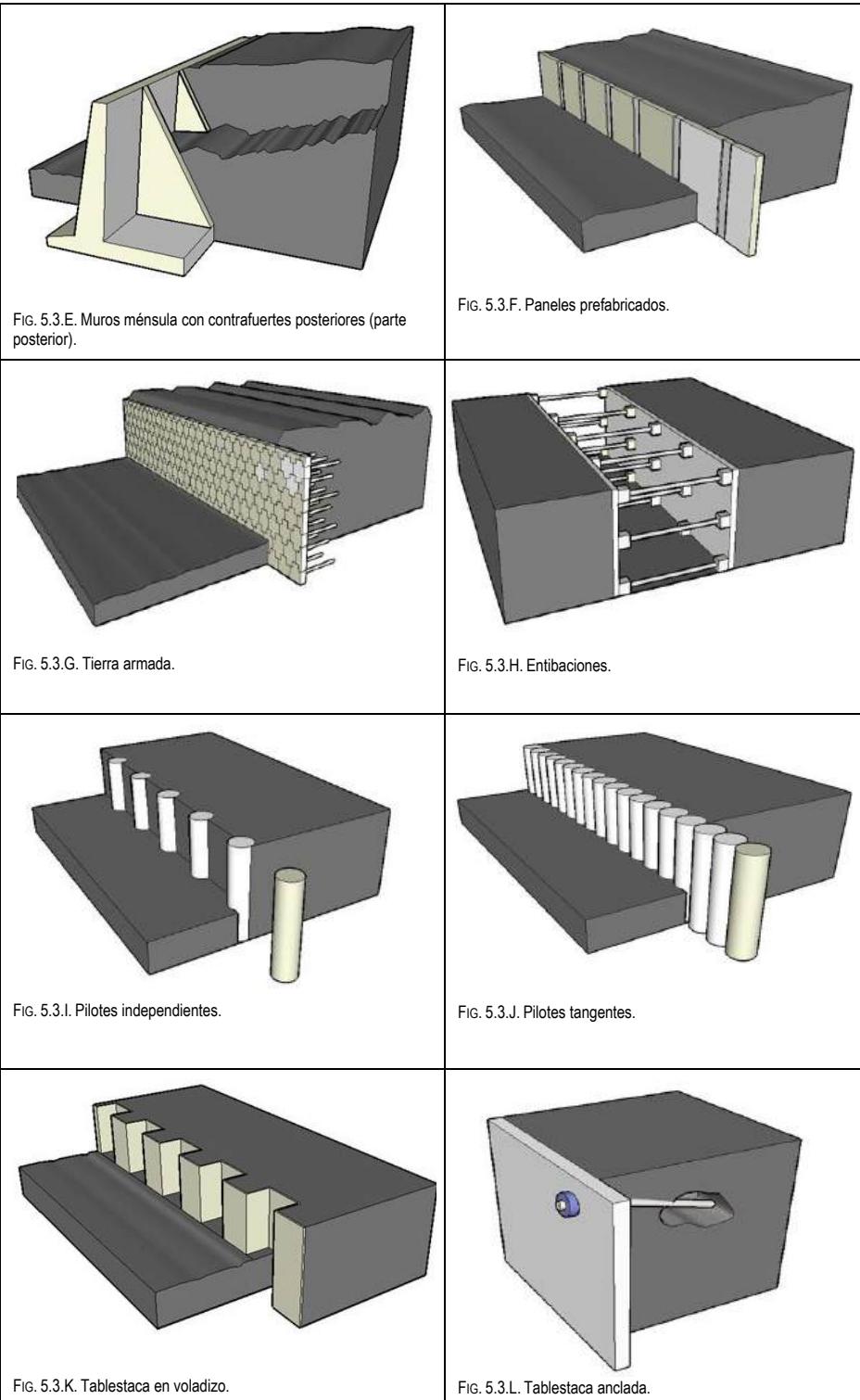
Todas las estructuras de contención se pueden agrupar en dos grandes familias según su capacidad de deformación.

- 1) *Estructuras de contención rígidas.* Son aquellas que por su diseño, su geometría y sus materiales cumplen su función sin cambiar de forma. En consecuencia, los movimientos que pueden experimentar son asimilables a los característicos de un sólido rígido. A esta familia pertenecen la mayoría de las estructuras que tradicionalmente denominamos muros.
- 2) *Estructuras de contención flexibles.* Son aquellas que por su diseño y su geometría equilibran las acciones del terreno, por lo que experimentan apreciables deformaciones por flexión. En esta familia se incluyen los tablestacados y las pantallas de hormigón armado.

Es evidente que cualquier estructura de contención rígida experimentará deformaciones bajo las acciones descritas, aunque el aspecto que aquí es relevante para esta clasificación es que estas deformaciones serán tales que no influirán en la magnitud o distribución de los empujes del terreno. En cambio, en las estructuras de contención flexibles, los cambios de forma influyen en la distribución y magnitud de los empujes.

En líneas generales, entre los tipos de estructuras rígidas y flexibles se pueden distinguir las que describe las figuras FIG. 5.3.





### 5.3. El empuje del terreno

Los empujes aparecen sobre las obras, debido a los desequilibrios tensionales introducidos en el terreno cuando éste se separa en niveles de diferente cota.

Consideraremos un suelo indefinido en el que no existe ninguna obra y un plano imaginario vertical AA'. A una cierta profundidad  $z$  situaremos un elemento diferencial de terreno sobre el que actúan tensiones verticales  $\sigma_{V0}$  y horizontales  $\sigma_{H0}$  (FIG. 5.4.A).

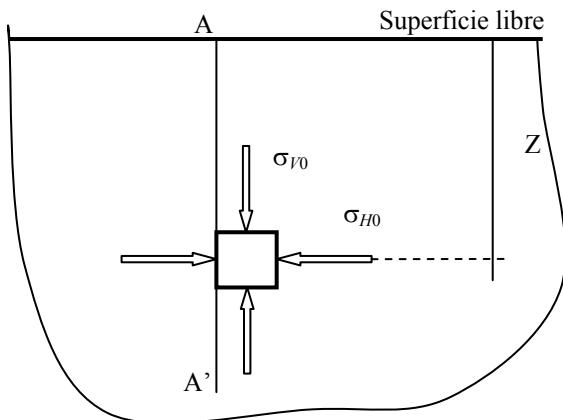


FIG. 5.4.A.  
Estado inicial en  
reposo.

Si sustituimos el plano imaginario por una pantalla indefinida de espesor inapreciable y rigidez muy grande, sucede que el estado tensional inicial no queda alterado. A este estado lo denominaremos **estado inicial**. En este punto se elimina la sección de terreno situada a la izquierda de la pantalla. Esto supone que la pantalla se verá sometida a las tensiones que había antes a la derecha pero sin que exista terreno a su izquierda para que mantenga el equilibrio. Por tanto, la pantalla tenderá a moverse bajo las tensiones iniciales y el terreno de la derecha experimentará una relajación que conllevará una disminución de las tensiones horizontales en el terreno próximo a la pantalla hasta alcanzar unos valores permanentes  $\sigma_{Ha}$ , correspondientes a un estado tensional que calificaremos de **empuje activo** (FIG. 5.4.B).

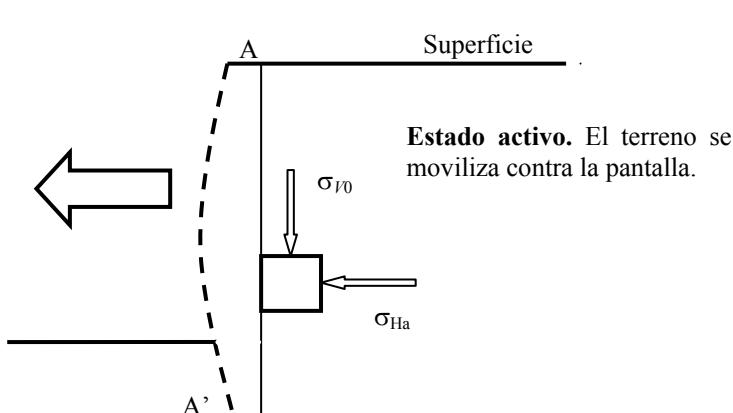
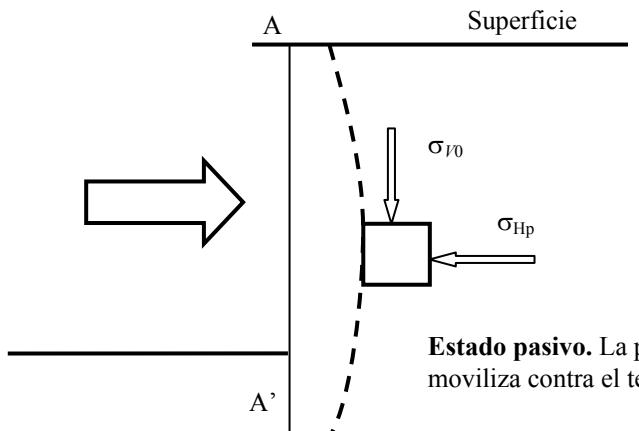


FIG. 5.4.B.  
Estado activo.



De otro modo, si hubiésemos movido la pantalla contra el terreno de la derecha, sin eliminar éste y de modo que se mantuviera el corte perfectamente vertical, las presiones sobre el plano imaginario aumentarían como reacción de la porción de terreno que se opone al movimiento. Finalmente, se llegaría a un estado de tensiones permanente  $\sigma_{Hp}$ , correspondiente a un estado tensional que denominaremos **empuje pasivo**. (FIG. 5.4.C).

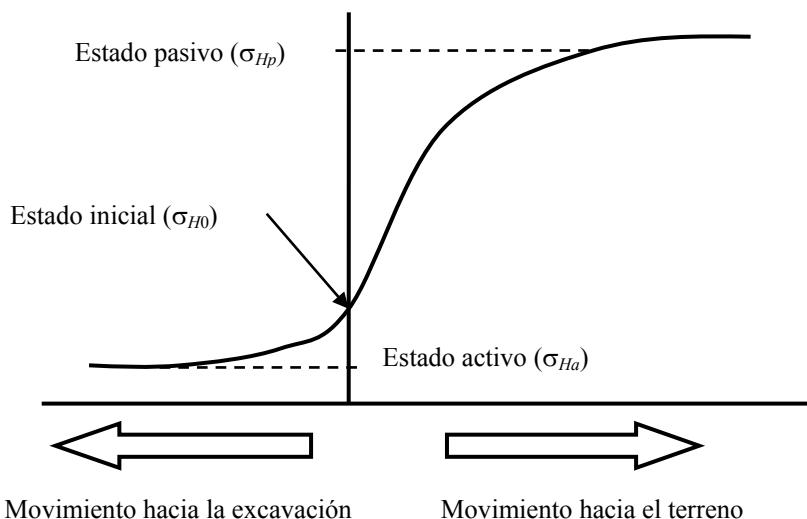
FIG. 5.4.C.  
Estado pasivo.



**Estado pasivo.** La pantalla se moviliza contra el terreno.

La figura FIG. 5.5 muestra la evolución de las tensiones horizontales en un punto, cuando se considera la transición de movimientos planteados sobre el plano imaginario AA'. Existen dos estados límites: activo y pasivo. Estos estados corresponden a la excavación y a la reacción del terreno frente a un movimiento de pantalla hacia el suelo. Asimismo, estos dos estados son los extremos de las tensiones que el terreno puede tener junto a un muro, es decir, los empujes mínimos y máximo del terreno hacia una estructura de contención.

FIG. 5.5.  
Movimientos y  
desarrollo de empujes.



Habitualmente, cuando se realiza una excavación interesa conocer el empuje activo del terreno, ya que ésta va a ser la acción hacia la que tenderá el terreno durante el vaciado y la posterior construcción del muro. Ahora bien, en el caso de pantallas, en las que una parte de la estructura está enterrada, en la zona inferior enterrada será la estructura la que empujará contra el terreno. Esto hará necesario conocer el empuje pasivo como límite de la reacción, así como la distribución de tensiones o empujes sobre el plano imaginario AA', de modo que su integración nos proporcione el empuje total sobre las estructuras de contención.

En todo lo descrito se ha supuesto que sólo existen movimientos horizontales del plano AA'. En estas condiciones se ha partido de un estado tensional tal que las tensiones principales son horizontales y verticales. En realidad, esto no es más que una aproximación. Lo indicado conduce a suponer que la tensión horizontal inicial o el empuje en reposo,  $\sigma_{H0}$ , puede expresarse como:

$$\sigma_{H0} = K_0 \sigma_v \quad [5.1]$$

donde  $K_0$  es el coeficiente de empuje del terreno en reposo. La determinación de  $K_0$  es ciertamente muy complicada. No obstante, en la práctica y para suelos granulares y arcillosos normalmente consolidados, suele tomarse en función del ángulo de rozamiento interno del terreno ( $\phi$ ) como:

$$K_0 = 1 - \sin\phi \quad [5.2]$$

De modo análogo, las tensiones horizontales correspondientes a los estados límites se pueden escribir como:

$$\sigma_{Ha} = K_a \sigma_v, \quad \sigma_{Hp} = K_p \sigma_v \quad [5.3]$$

En estas expresiones,  $K_a$  y  $K_p$  son los denominados coeficientes de empuje activo y pasivo respectivamente. Dado que la tensión  $\sigma_v$  se determina a partir de la densidad efectiva y la profundidad del punto considerado, bastará con determinar el valor del coeficiente de empuje correspondiente para determinar las acciones del terreno sobre las estructuras de contención.

## 5.4. Empuje activo

El cálculo de empujes del terreno está relativamente bien descrito y estudiado para suelos granulares. Para otros tipos de suelo no se dispone de modelos que conduzcan a cálculos convenientemente precisos. Es por ello que en este capítulo se abordaran modelos y cálculos para suelos granulares.

### 5.4.1. Teoría de Coulomb para suelos granulares

Es norma práctica aceptar que los movimientos que experimenta una estructura de contención no arriostrada hacen compatible que se pueda considerar que el empuje en su trasdós es de tipo activo. En general, la situación relativa de las fuerzas que actúan sobre el muro y la rigidez del terreno bajo la estructura hacen que dicho muro tienda a girar alrededor del vértice común de su base y del trasdós. Esto conduce a una situación



en la que el muro experimenta una pequeña descarga lateral que le lleva al estado activo. Esta descompresión horizontal va acompañada de un ligero movimiento vertical, debido al asiento del terreno situado junto al trasdós del muro. El giro del muro permite incluso observar una cuña de terreno que acompaña al muro en su movimiento horizontal. A este asentamiento del terreno se opone el trasdós del muro con una fuerza vertical, inducida por el rozamiento en el mencionado trasdós del muro.

Esto significa que el terreno falla y el corrimiento vertical relativo entre el terreno y el muro permite movilizar la fuerza de rozamiento descrita entre ambos. Por lo tanto, las fuerzas que experimenta el muro serán, por un lado, las de componente normal al muro y originadas por la acción de contención del mismo y, por otro, las de componente paralela al muro y debidas al rozamiento.

Esta situación permite describir un empuje que gira, respecto a la normal al trasdós, desde una posición inicial normal al muro hasta una posición que forma un ángulo  $\delta$ , correspondiente al rozamiento de las tierras con la fábrica del muro, respecto de su perpendicular. Habitualmente, este ángulo suele oscilar entre 0,30 y 0,60 el valor correspondiente al ángulo de rozamiento interno del terreno. Más concretamente, y si no se dispone de información procedente de ensayos, para muros de hormigón y suelos granulares se suele aceptar  $\delta = 20^\circ$ . En general, el rozamiento de las tierras con el trasdós del muro suele tener un sentido positivo y es favorable a la estabilidad del muro. No obstante, existen situaciones en las que el terreno del trasdós es muy poco compacto, con un ángulo de rozamiento interno pequeño, y entonces los asientos del terreno pueden ser importantes y originar un rozamiento desfavorable a la estabilidad del muro.

Actualmente, y para el caso de suelos granulares, es posible calcular los empujes del terreno con razonable precisión. Suponiendo que la rotura se efectúa siguiendo aproximadamente una línea recta (plano de canto), las fuerzas que intervienen en el equilibrio del muro (estado límite activo originado por la correspondiente formación de una cuña de terreno) son las que se indican en la FIG. 5.6. Esto equivale a suponer que existe una cuña responsable del valor máximo del empuje en el instante del fallo del terreno. Este esquema, deducido a partir de observaciones de muros dañados o derrumbados, es el que desarrolló Coulomb en 1779 para explicar el mecanismo de fallo y rotura de estructuras de contención no arriostradas contra terrenos granulares.

A partir del esquema incluido en la FIG. 5.6 veremos cómo determinar, siguiendo un procedimiento gráfico, el empuje activo máximo. Tal y como se ha indicado, se supone una línea de rotura recta. De modo que se tendrá el equilibrio del peso propio  $W_i$  de la cuña de terreno comprendida entre el muro y el plano de rotura, la reacción  $E_t$  del muro sobre el terreno (igual y contraria al empuje activo del terreno sobre el muro) y la reacción  $R_\phi$  del terreno que ha permanecido firme sobre la cuña de terreno que se ha descargado o fallado. Esta última fuerza formará con el plano de rotura un ángulo igual al del rozamiento interno del terreno,  $\phi$ . Algunos valores de  $\phi$ , así como algunas densidades de terrenos granulares secos, se pueden consultar en la TABLA 5.1.

Ahora bien, la cuña elegida para el primer cálculo no tiene por qué ser la que conduzca al estado límite activo. Es por ello que el método consiste en proceder por iteraciones. Elegido un primer punto  $A$  como posible vértice de la cuña de deslizamiento, se calcula

el peso propio  $W_t$  de la cuña, y en el polígono de fuerzas en equilibrio incluido en la FIG. 5.6 se determinan los vectores  $E_t$  y  $R_\phi$ , ambos de direcciones conocidas. Una vez calculado esto, se transporta el valor de  $E_t$  sobre un eje común a todas las iteraciones.

El cálculo se repite seleccionando diferentes puntos  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,... . Finalmente con tres o cuatro iteraciones se consigue apuntar el vértice  $G$  correspondiente a la cuña de terreno que presenta el empuje máximo. Con esto se obtiene el vértice y la posición  $NG$  del plano de rotura de la cuña de empuje máximo.

Clase de terreno	Densidad seca $\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )	Ángulo de rozamiento interno $\square\phi$
Grava arenosa	20	35°-45°
Arena compacta	20	35°-45°
Arena suelta	17	30°-35°

TABLA 5.1.  
Valores orientativos de la densidad y del ángulo de rozamiento interno para algunas clases de terreno granulares (a partir de Calavera, 1989).

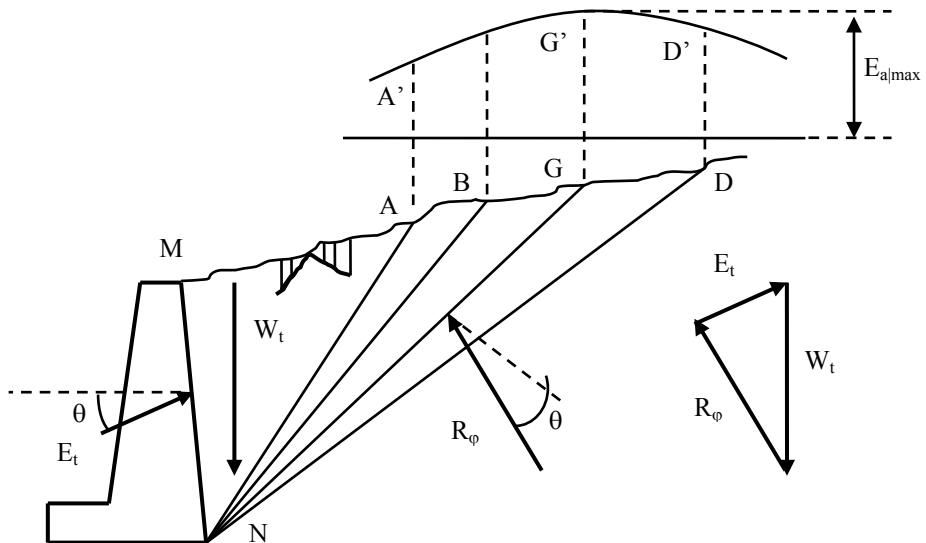


FIG. 5.6.  
Método de gráfico de Culmann para determinar el empuje activo de suelos granulares.

La posición de la resultante de presiones sobre el muro, el empuje activo, puede obtenerse con suficiente aproximación trazando una paralela a  $NG$  que pase por el c.d.m. de la cuña y que corte el perfil del trasdós del muro. Conocidas la magnitud y posición del empuje activo, es posible comprobar la estabilidad a vuelco y deslizamiento del muro. El procedimiento gráfico planteado es conocido como método gráfico de Culmann.

En el caso de rellenos limitados por una línea recta, el planteamiento analítico se ejecuta con sencillez y es posible la tabulación de resultados. En esta situación, el método conduce a la siguiente expresión de  $E_t$ :

$$E_t = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_a \quad [5.4]$$



donde  $\gamma$  es el peso específico del terreno,  $H$  es la altura del muro y  $K_a$  es el coeficiente de empuje activo, cuya expresión es la siguiente:

$$K_a = \left[ \sin \alpha \cos(\phi - \alpha) / \sqrt{\cos(\alpha + \delta)} \cdot \sqrt{\frac{\sin(\phi + \delta) \sin(\phi - \beta)}{\cos(\beta - \alpha)}} \right]^2 \quad [5.5]$$

Este coeficiente  $K_a$  permite calcular el empuje total sobre el muro. A menudo, y por razones de comodidad, se suelen determinar las componentes vertical  $E_{tv}$  y horizontal  $E_{th}$ , del empuje total, partiendo de las expresiones:

$$E_{th} = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_{ah} \quad [5.6a]$$

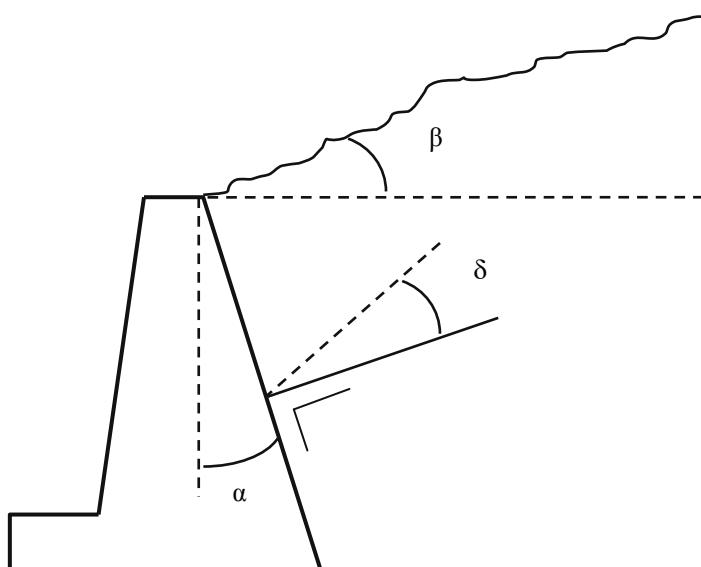
$$E_{tv} = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_{av} = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_{ah} \tan(\delta + \alpha) \quad [5.6b]$$

$$E_t = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_{ah} \frac{1}{\cos(\delta + \alpha)} \quad [5.6c]$$

Como puede observarse, estas expresiones permiten calcular el empuje total y sus componentes vertical y horizontal en función del coeficiente de empuje activo horizontal  $K_{ah}$ .

Los valores tabulados del coeficiente de empuje activo horizontal,  $K_{ah}$ , pueden consultarse en la TABLA 5.2. Asimismo, la FIG. 5.7 muestra los ángulos implicados en este cálculo. El punto de aplicación del empuje total está situado a una profundidad  $z$  desde la coronación del muro dada por la expresión  $z = 2H/3$ .

FIG. 5.7. Ángulos necesarios para calcular el coeficiente de empuje activo horizontal  $K_{ah}$ .



cos $\alpha$	$\varphi$	$\beta = 0^\circ$				$\beta = \varphi/2$				$\beta = \varphi$
		$\delta=0$	$\varphi/2$	$2/3 \varphi$	$\varphi$	$\delta=0$	$\varphi/2$	$2/3 \varphi$	$\varphi$	Cualquier valor
0,2	15°	523	480	469	449	589	552	542	524	835
	20°	417	378	367	348	482	446	435	418	763
	25°	330	295	286	270	388	354	345	329	675
	30°	257	229	221	207	306	278	270	256	587
	35°	198	175	169	158	237	214	208	195	496
	40°	148	132	126	118	178	160	155	146	406
	45°	108	96	93	86	129	116	102	95	320
	15°	556	510	499	475	627	587	576	556	883
0,1	20°	454	409	397	376	526	485	473	453	822
	25°	368	327	316	296	434	396	384	365	747
	30°	295	260	250	233	353	319	309	291	666
	35°	234	205	196	181	282	253	245	228	580
	40°	182	159	152	140	220	197	190	176	492
	45°	139	121	116	106	168	149	140	132	405
	15°	588	538	524	500	665	621	609	587	933
	20°	490	440	426	401	569	523	510	486	883
0	25°	406	359	345	322	482	436	423	400	824
	30°	333	291	279	257	402	360	334	326	750
	35°	271	235	224	205	330	293	283	262	672
	40°	218	187	183	161	267	235	226	207	587
	45°	172	148	145	125	210	185	177	160	500
	15°	619	564	549	521	701	654	640	615	983
	20°	525	469	453	424	612	561	545	518	948
	25°	443	389	373	345	529	477	461	434	900
-0,1	30°	372	321	306	280	452	402	387	359	839
	35°	309	264	251	226	381	335	318	294	768
	40°	254	216	204	180	316	275	263	237	689
	45°	207	174	164	143	257	223	212	188	605
	15°	648	588	571	541	737	584	669	642	1036
	20°	559	495	477	444	654	596	579	548	1016
	25°	479	416	398	365	576	516	498	465	982
	30°	409	349	332	299	502	442	424	390	933
-0,2	35°	347	292	275	244	432	376	360	323	872
	40°	292	243	229	197	367	316	300	265	800
	45°	243	200	186	157	307	262	247	213	720

TABLA 5.2.  
Coeficientes de  
empuje activo  
horizontal. Valores de  
 $10^3 K_{ah}$  (Kezdi, 1975).

La teoría de Coulomb supone una distribución lineal de empujes en el trasdós de la estructura de contención. El empuje activo unitario forma un ángulo  $\delta$  con la perpendicular del trasdós de la estructura y puede escribirse como:

$$e_a = \gamma z K_a \quad [5.7a]$$



A menudo, sobre la coronación del terreno situado sobre el trasdós del muro se presenta una sobrecarga uniformemente distribuida,  $p$ . Siguiendo un procedimiento análogo al desarrollado anteriormente, se llega a que el empuje unitario activo tiene como expresión:

$$e_a = \left( \gamma z + p \frac{\cos \alpha}{\cos(\beta - \alpha)} \right) K_a \quad [5.7b]$$

Esto significa que se añade al empuje con variación lineal del terreno un empuje homogéneo, cuyo valor depende de la propia sobrecarga, la geometría y el coeficiente de empuje activo.

#### 5.4.2. Cálculo del empuje activo utilizando la teoría de Rankine

Finalmente, cabe mencionar la posibilidad de solucionar el empuje activo sobre determinados muros empleando la teoría de Rankine. Este método se aplica en los casos, muy frecuentes por otra parte, en que los terrenos en el trasdós del muro tienen su coronación horizontal y el propio muro es vertical. Dado que el cálculo pretende obtener el empuje activo, se supone que todo el terreno tras el muro se encuentra en estado de rotura. Se añade una simplificación consistente en despreciar el rozamiento tierras-fábrica en el trasdós del muro. Teniendo en cuenta todas estas consideraciones, el empuje activounitario es horizontal y su distribución puede expresarse así:

$$e_{az} = (\gamma z + p) K_a = (\gamma z + p) \tan^2 \left( 45^\circ - \frac{\phi}{2} \right) \quad [5.8]$$

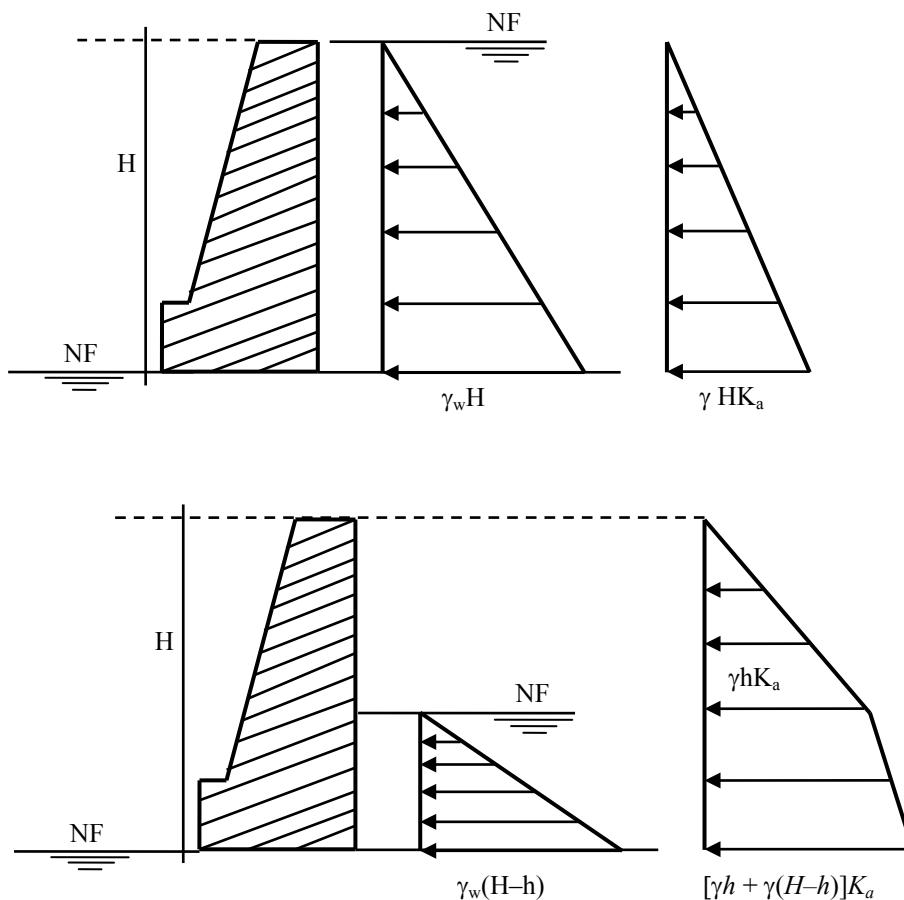
Este coeficiente de Rankine suele utilizarse mucho en aquellos casos prácticos que se ajustan a las condiciones detalladas, dada la sencillez del cálculo que hay que realizar.

#### 5.4.3. Presencia de agua en el terreno. Influencia del nivel freático

Otro aspecto importante que se debe considerar es el efecto del agua en el terreno, debido, en general, a la presencia de un nivel freático en el subsuelo. En esta situación, deben considerarse dos componentes del empuje sobre la estructura. Una debido al empuje hidrostático del agua y otra debido al empuje efectivo del terreno. El empuje hidrostático es perpendicular al paramento del muro y se calcula a partir del peso específico del agua,  $\gamma_w$ , mientras que el empuje efectivo del terreno se calcula teniendo en cuenta la densidad aparente del terreno,  $\gamma$ , y la sumergida,  $\gamma'$ . La FIG. 5.8 muestra dos situaciones posibles, en lo que refiere a la profundidad del nivel freático, y las fórmulas que deben emplearse para calcular los empujes:

Debe observarse que el empuje hidrostático sobre muros es muy superior al empuje debido a las tierras. Esta situación hace necesario y conveniente reducir la acción hidrostática drenando adecuadamente el trasdós de los muros.

Fig. 5.8.  
Empujes horizontales en muros en presencia de niveles freáticos a distinta profundidad.



## 5.5. Empuje pasivo

El cálculo del empuje pasivo, también denominado reacción del terreno, se realiza empleando procedimientos análogos a los indicados para el empuje activo. Si se opta por utilizar la teoría de Coulomb, se determinaría la cuña de empuje o reacción mínima. Este modo de proceder no es del todo correcto, ya que supone una figura de rotura con perfil recto cuando en realidad es de perfil curvo.

En el caso de emplear la teoría de Rankine, y en las mismas condiciones planteadas antes, el empuje pasivo unitario,  $e_p$ :

$$e_p = (\gamma z + p) K_p = (\gamma z + p) \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{\phi}{2} \right) \quad [5.8]$$

Normalmente, cuando se requiere calcular el empuje pasivo suele ser porque se le considera una reacción favorable del terreno sobre la estructura (es el caso del cálculo de pantallas, por ejemplo). Esto conduce a calcular valores del empuje pasivo que no sean cotas superiores. Y además motiva que se deban utilizar con mucha precaución las



diferentes teorías existentes para la evaluación de  $e_p$ . Si se consideran muros con un trasdós vertical y un relleno limitado por un perfil recto, se pueden utilizar los coeficientes de empuje pasivo mostrados en la siguiente tabla:

$\beta/\varphi$	$\varphi =$	$\delta_p = 0$							
		10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0		1,42	1,70	2,04	2,46	3,00	3,69	4,58	5,83
-0,1		1,38	1,63	1,92	2,27	2,67	3,10	3,77	4,54
-0,2		1,36	1,56	1,81	2,08	2,38	2,71	3,09	3,50
-0,3		1,32	1,49	1,69	1,89	2,10	2,30	2,50	2,68
-0,4		1,28	1,42	1,57	1,70	1,82	1,92	1,99	2,02
-0,5		1,23	1,34	1,44	1,51	1,56	1,58	1,56	1,48
-0,6		1,18	1,25	1,30	1,32	1,32	1,28	1,19	1,06
-0,7		1,12	1,15	1,17	1,14	1,09	1,00	0,880	0,731
-0,8		1,07	1,06	1,03	0,97	0,882	0,764	0,626	0,480
-0,9		1,00	0,961	0,895	0,803	0,686	0,557	0,422	0,292
-1,0		0,848	0,749	0,637	0,520	0,404	0,296	0,200	0,123

TABLA 5.3.  
Coeficientes de empuje pasivo,  $K_p$ .

$\beta/\varphi$	$\varphi =$	$\delta_p = -0,5 \varphi$							
		10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0		1,54	1,97	2,55	3,38	4,62	6,55	9,73	15,48
-0,1		1,51	1,90	2,40	3,12	4,12	5,63	8,00	12,06
-0,2		1,48	1,81	2,26	2,06	3,66	4,81	6,56	9,52
-0,3		1,44	1,73	2,11	2,59	3,23	4,09	5,30	7,11
-0,4		1,39	1,64	1,96	2,33	2,80	3,41	4,23	5,36
-0,5		1,35	1,55	1,80	2,08	2,41	2,81	3,31	3,94
-0,6		1,29	1,45	1,63	1,82	2,03	2,27	2,52	2,82
-0,7		1,22	1,34	1,46	1,57	1,67	1,78	1,87	1,94
-0,8		1,17	1,23	1,29	1,33	1,36	1,35	1,32	1,27
-0,9		1,09	1,11	1,12	1,10	1,06	0,988	0,895	0,776
-1,0		0,925	0,868	0,797	0,714	0,623	0,525	0,425	0,327
Cos $\delta_p$		0,996	0,991	0,984	0,976	0,965	0,953	0,939	0,923

$\beta/\varphi$	$\varphi =$	$\delta_p = -0,75 \varphi$							
		10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
0		1,59	2,08	2,76	3,78	5,31	7,97	12,63	22,11
-0,1		1,55	2,00	2,61	3,48	4,79	6,86	10,39	17,22
-0,2		1,52	1,91	2,45	3,19	4,26	5,86	8,51	13,26
-0,3		1,49	1,83	2,29	2,90	3,75	4,98	6,89	10,16
-0,4		1,44	1,73	2,12	2,61	3,26	4,16	5,49	7,65
-0,5		1,39	1,64	1,95	2,33	2,80	3,42	4,30	5,62
-0,6		1,33	1,52	1,76	2,03	2,36	2,76	3,27	4,02
-0,7		1,26	1,41	1,58	1,75	1,95	2,16	2,42	2,77
-0,8		1,20	1,30	1,39	1,49	1,58	1,65	1,72	1,82
-0,9		1,12	1,17	1,21	1,23	1,23	1,20	1,16	1,10
-1,0		0,956	0,917	0,864	0,799	0,724	0,64	0,553	0,466
Cos $\delta_p$		0,991	0,980	0,965	0,947	0,923	0,896	0,866	0,843

## 5.6. Proyecto y construcción de estructuras de contención rígidas

El proyecto de muros rígidos requiere conocer, en primer lugar, las características geotécnicas del terreno que rodea el muro. Esto es imprescindible para determinar los empujes sobre los diferentes planos del muro. Los datos necesarios son el peso específico del suelo,  $\gamma$ , el peso específico sumergido,  $\gamma'$ , la cohesión,  $c$ , y el ángulo de rozamiento interno  $\phi$ . En caso de diseñar estructuras de contención que requieran trabajar diferentes capas de terreno, es necesario conocer estos datos para cada tipo de material, ya que permitirán calcular los empujes debidos a:

- terreno en el trasdós
- terreno del pie de muro
- acción del agua contenida en el terreno
- sobrecargas próximas

Este conjunto de acciones, junto a un predimensionado conveniente de la estructura de contención, deben permitir comprobar la seguridad del muro considerando diferentes mecanismos de fallo que se detallarán a continuación.

### 5.6.1. Formas de agotamiento

Las estructuras de contención pueden alcanzar los siguientes estados límites de servicio y últimos.

- 1) **Estabilidad al vuelco** o giro excesivo del muro considerado como un sólido rígido.
- 2) Estabilidad frente al deslizamiento del muro.
- 3) **Seguridad frente al hundimiento o deslizamiento profundo del muro.** Se debe a la formación de una superficie de deslizamiento profunda cuyo perfil tiene forma cuasi circular. Este tipo de fallo se manifiesta si existe una capa de suelo blando a una profundidad igual a aproximadamente  $1,5H$ , donde  $H$  es la altura del muro medida desde la base de la zapata hasta la coronación.
- 4) **Deformación excesiva del alzado.** Se puede manifestar solamente en muros de elevada esbeltez.
- 5) **Fisuración excesiva.** Se puede manifestar en cualquier zona sometida a tracción.
- 6) **Rotura por flexión.** Puede presentarse en el alzado, en la puntera o en el talón. Los síntomas de prerrrotura sólo son observables en los planos de tracción, que en todos los casos están ocultos.
- 7) **Rotura por esfuerzo cortante.** Puede presentarse en el alzado, en la puntera, en el talón o en el tacón.
- 8) **Rotura por esfuerzo rasante.** La sección más vulnerable suele ser la de arranque del alzado. Esto es así dado que esta sección, la de mayor momento flector y máximo cortante, se corresponde con una junta de hormigonado obligada.
- 9) **Rotura por fallo de solape.** La sección más vulnerable suele ser la de arranque de la armadura de tracción del alzado, donde la longitud de solape debe ser cuidadosamente estudiada.



### 5.6.2. Seguridad

Todos los aspectos de seguridad relativos al muro, entendido como una estructura de hormigón que debe mantener su integridad, están establecidos y detallados convenientemente en la Instrucción de Hormigón Estructural EHE-08. Otros aspectos, como los relativos a la seguridad al vuelco o al deslizamiento, se detallan a continuación. En relación con el estudio de la seguridad ante un deslizamiento profundo remitimos a un texto más especializado (Jiménez Salas, 1980).

- **Seguridad al vuelco.** Usualmente se acepta una seguridad de 2,0 para acciones frecuentes. Este valor se reduce a 1,5 para combinaciones que incluyen acciones excepcionales.
- **Seguridad al deslizamiento.** En ausencia de empujes pasivos favorables se suele adoptar un valor de seguridad de 1,5. En presencia de empujes pasivos debe incrementarse hasta 2,0 el coeficiente de seguridad.

A continuación se sintetizan las ecuaciones que deben ser verificadas para garantizar la seguridad al vuelco y a deslizamiento para muros de gravedad y para un tipo de muros de ménsula. La FIG. 5.9 y la FIG. 5.10 muestran, respectivamente, un muro de gravedad junto al diagrama de cargas que sobre él actúan y un muro de ménsula con puntera y talón junto a las cargas que actúan sobre el mismo. En ambos casos, la resultante de las acciones se localiza aplicando momentos respecto al pie del muro. La distancia,  $d$ , medida desde el extremo de la puntera y donde se localiza la resultante de las acciones, se obtiene aplicando momentos respecto del extremo de la puntera:

$$d = \frac{W \cdot a + E_{av} \cdot e - E_{ah} \cdot b}{W + E_{av}} \quad [5.9]$$

En ambas situaciones se ha supuesto que el empuje pasivo,  $E_p$ , es nulo. La seguridad al vuelco se verifica comprobando que:

$$C_{sv} = \frac{W \cdot a}{E_a \cdot e} \geq 1,50 \quad [5.10]$$

La seguridad al deslizamiento se asegura si se cumple:

$$C_{sd} = \frac{W + E_{av}}{E_{ah}} \tan \delta \geq 1,50 \quad [5.11]$$

Si se incluye el empuje pasivo en el pie del muro, debe modificarse la seguridad y la verificación que se debe realizar, que cambia a:

$$C_{sd} = \frac{(W + E_{av}) \tan \delta + E_p}{E_{ah}} \geq 2,00 \quad [5.12]$$

En todos los casos  $\delta$  representa el ángulo de rozamiento del suelo con la base del muro (rozamiento tierras-fábrica). Asimismo, el peso  $W$  representa el peso del muro y del

terreno sobre la puntera en muros de semigravedad. En muros de ménsula,  $W$  representa el peso del muro y del terreno sobre la zapata.

FIG. 5.9.  
Diagramas de cargas para proyectos de muros de gravedad.

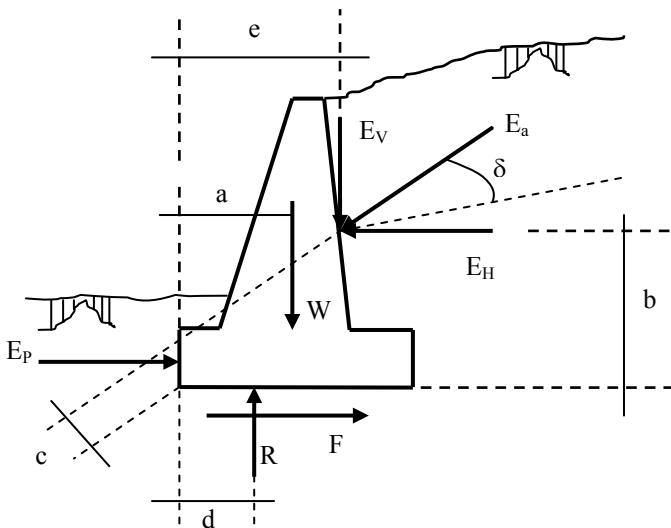
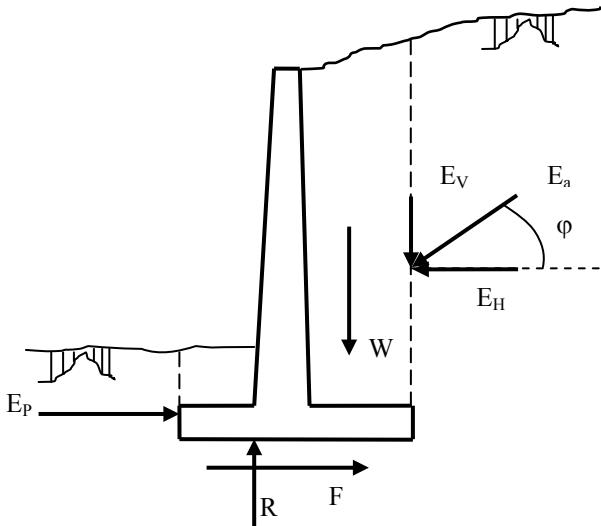


FIG. 5.10.  
Diagramas de cargas para proyectos de muros de ménsula.



En general, aunque resulta conveniente que la cota del apoyo del muro se halle entre 1,00 m y 1,50 m bajo el nivel de excavación, no se suele contar con la acción favorable que ofrece la resistencia pasiva en el pie, salvo en situaciones muy concretas en que se pueda garantizar la continuidad del terreno en esta zona.

Además de las comprobaciones de tipo geotécnico, deben realizarse, como ya se ha indicado, las verificaciones oportunas que aseguren la integridad estructural del muro.



Esto significa comprobar la admisibilidad de los estados tensionales, la correcta disposición de armaduras y anclajes, y otros aspectos convenientemente recogidos en la norma.

## 5.7. Estructuras flexibles

En general, las estructuras flexibles más frecuentes son las pantallas hormigonadas in situ con lodos bentoníticos durante su ejecución. La tecnología constructiva de este tipo de pantallas se ha desarrollado mucho, de modo que existen numerosos sistemas, algunos de ellos patentados, para su ejecución (cucharas, guiaderas, etc.).

Las pantallas in situ se construyen perforando en el terreno zanjas profundas y alargadas, que se mantienen abiertas bien por su propia resistencia o bien con ayuda de los lodos bentoníticos con los que se llenan. Las zanjas se ejecutan por bataches que se van hormigonando, previo armado, hasta conseguir una pantalla continua en la que las juntas entre paneles suponen discontinuidades de segundo orden. Para el hormigonado del panel se emplea una tubería que se introduce centrada a través del lodo hasta el fondo de la excavación. El hormigonado se realiza de modo continuo para favorecer que el hormigón desplace completamente el lodo bentonítico y éste se vea arrastrado hacia la superficie y quede desalojado de la zanja. Para este efecto, el tubo de hormigonado debe permanecer siempre hundido de 3 a 5 m en la masa de hormigón. El proceso no se interrumpe hasta que el hormigón rebasa unos 30 o 40 cm la cota teórica de la pantalla. Este hormigón superior es el primero que se vertió y, por lo tanto, se halla contaminado y debe ser eliminado, dado que en la coronación se suele incluir una viga de atado de paneles. Las armaduras de esta viga de atado deben enlazar con las de la pantalla.

### 5.7.1. Cálculo de estructuras flexibles (pantallas)

En las estructuras flexibles, la rigidez de las mismas desempeña una influencia clara en el valor final de los empujes que recibe.

Normalmente las estructuras flexibles son diseñadas para trabajar a flexión. De este modo, la deformabilidad de la estructura permite aprovechar el empuje pasivo del terreno. Esto se consigue, en un primer intento, adelgazando la estructura y prolongando la parte enterrada mucho más que en muros. Como dato orientativo y sobre la base de pantallas de hormigón armado, en un terreno de calidad media, la longitud del voladizo suele ser del mismo orden que la longitud enterrada de la pantalla. Así, los empujes activos del trasdós los compensa la reacción pasiva de la zona enterrada, en la cual no se llega a desarrollar el empuje pasivo totalmente, salvo en el caso de deformaciones muy grandes.

La FIG. 5.10 indica los estados de empujes que se movilizarán en dos puntos de una pantalla flexible en voladizo. En la parte superior se desarrolla el estado activo, pero difícilmente se desarrolla el estado pasivo completamente en la zona enterrada.

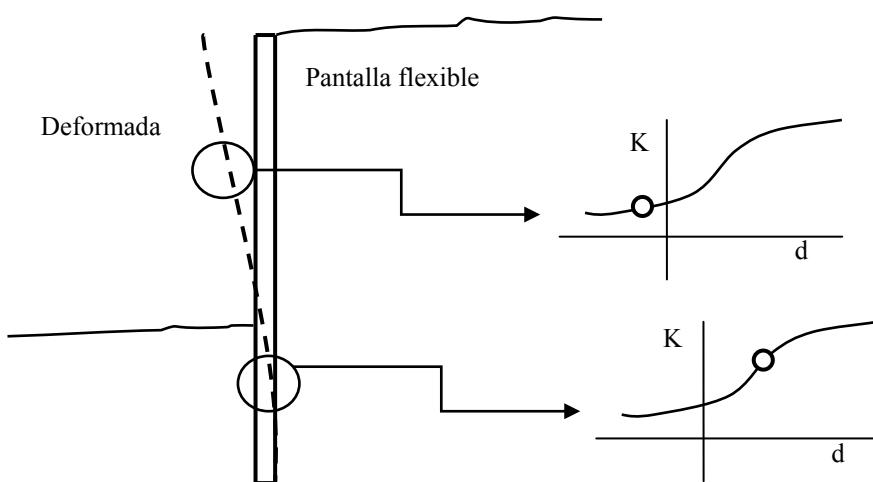


FIG. 5.11.  
Empujes activo y  
pasivo en una pantalla  
flexible en voladizo.

Exceptuando la posibilidad de calcular pantallas flexibles mediante aplicaciones basadas en el método de los elementos finitos, es muy práctico poder acudir a métodos simplificados, que introducen en general la hipótesis de que el movimiento de la pantalla o estructura flexible es suficientemente grande como para alcanzar estados activos y pasivos finales. Esta hipótesis se completa con coeficientes de seguridad adecuados.

Supuestas estas hipótesis básicas, el proyecto de una pantalla continua debe redactarse teniendo en cuenta:

- La situación adecuada a su función en alzado y planta.
- La estabilidad general y particular frente a rotura del terreno.
- La seguridad estructural de la propia pantalla y elementos de soporte.
- Repercusiones posibles en construcciones adyacentes. Particularmente debidas a los movimientos verticales u horizontales que acompañan la excavación y que pueden no ser admisibles para las estructuras próximas.

A efectos de cálculo, se deberá verificar y comprobar:

- La estabilidad de la pantalla frente a empujes del terreno. Las cargas previstas en los eventuales soportes y la reacción pasiva de la zona enterrada deben equilibrar, con la seguridad conveniente, el empuje del trasdós.
- La estabilidad de conjunto frente a una rotura del terreno.
- La estabilidad de los elementos de los sistemas de soporte (puntales, anclajes), con la seguridad conveniente sobre la máxima carga de trabajo prevista.

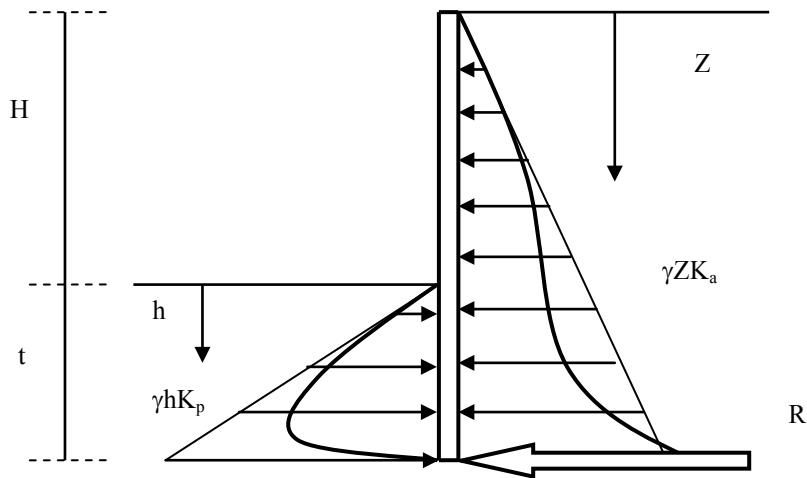
El equilibrio estático de los empujes debe verificarse contrarrestando los empujes activos con los pasivos movilizados en la parte enterrada (FIG. 5.11). La hipótesis fundamental es que se alcanzan los estados límites y que la reacción de la parte final de la pantalla se concentra en una fuerza  $R$ , denominada **contraempuje**. Evaluados previamente los empujes activos en el trasdós y los pasivos en el intradós hasta una profundidad incógnita  $t$ , y tomando momentos en ese punto 0, puede determinarse esta



incógnita. Para que se desarrolle el contraempuje se suele contemplar que la profundidad total de empotramiento,  $L$ , sea igual a 1,2 t.

Es habitual considerar nulo el rozamiento tierras-pantalla. Los empujes se calculan utilizando la teoría de Rankine y se reduce el empuje pasivo a 2/3 del valor máximo, como estrategia para incrementar la seguridad.

FIG. 5.12.  
Pantalla en voladizo.  
Equilibrio de empujes.



Para un terreno homogéneo las ecuaciones de equilibrio permiten determinar el valor de  $t$ :

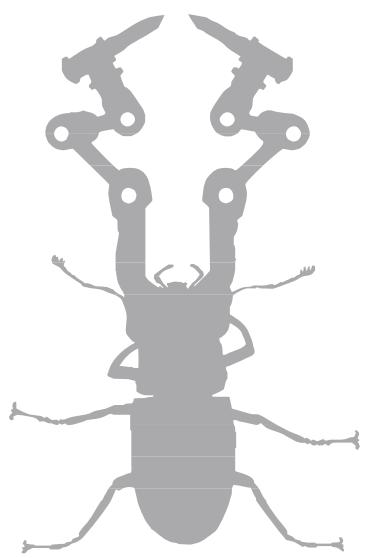
$$\frac{1}{6} \gamma K_a (H + t)^3 = \frac{1}{6} \gamma K_p t^3 \Rightarrow t = \frac{H}{\left( K_p / K_a \right)^{1/3} - 1} \quad [5.12]$$

La profundidad en la que se tiene momento máximo ( $z_{max}$ ) con cortante nulo es:

$$t = \frac{H}{\left( K_p / K_a \right)^{1/2} - 1} \quad [5.13]$$

El valor del momento máximo es:

$$M_{max} = \frac{K_a (H + z_{max})^3}{6} = \frac{K_p z_{max}^3}{6} = \frac{K_p H^3}{6 \left[ \left( K_p / K_a \right)^{1/2} - 1 \right]^2} \quad [5.14]$$



→ 6

---



# Diseño sísmico de estructuras

El diseño sísmico de estructuras pretende analizar el comportamiento de una edificación bajo solicitud dinámica; más concretamente, el efecto de las aceleraciones horizontales del terreno. El cálculo sísmico presentado en este capítulo requiere modelizar convenientemente la acción sísmica y determinar después las fuerzas estáticas equivalentes inducidas sobre los pilares de la estructura. Una vez encontradas las fuerzas estáticas equivalentes el cálculo se hace por medios convencionales.

Finalmente se harán algunas recomendaciones sobre las tipologías más adecuadas y los detalles constructivos específicos para soportar la acción sísmica.

## 6.1. Definiciones

Se entiende por **peligrosidad sísmica** de una zona una medida de la posibilidad o frecuencia de ocurrencia de terremotos en dicha zona. Esta medida puede darse por ejemplo, mediante aceleraciones, velocidades, desplazamientos o intensidades macrosísmicas. O también podría darse como una medida probabilista, como por ejemplo, la probabilidad de que en un tiempo determinado, en una región concreta, se dé un terremoto de una intensidad determinada.

En cuanto a las **medidas probabilísticas** para una región y un sismo de magnitud dados, se define el tiempo de retorno  $T_r$  como el tiempo medio entre dos sucesos de ese tipo. Puede probarse que los terremotos de una intensidad dada siguen una distribución de Poisson, tal que la probabilidad de que en un tiempo  $T$  ocurran  $k$  terremotos de magnitud  $M_0$  viene dada por:

$$p(k, T; M_0) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{T}{T_r(M_0)} \right]^k e^{-\left[ \frac{T}{T_r(M_0)} \right]} \quad [6.1]$$

donde la dificultad está en encontrar la dependencia del tiempo de retorno  $T_r$  en función de la magnitud buscada, cosa que sólo sabemos hacer mediante una estimación



empírica a partir de medidas de frecuencias de terremotos reales. Naturalmente, a partir de [6.1] es trivial ver que la probabilidad de que se produzca algún terremoto de magnitud dada  $M_0$  durante el período  $T$  viene dada por:

$$p(\text{algun terremoto}, T; M_0) = 1 - p(0, T; M_0) 1 - e^{-\left[\frac{T}{T_r(M_0)}\right]} \approx 1 - \left[1 - \frac{1}{T_r(M_0)}\right]^T \quad [6.2]$$

Más importante que el concepto de peligrosidad sísmica, es el de **riesgo sísmico**. La peligrosidad sólo nos da idea de la probabilidad de ocurrencia de un terremoto pero no de sus efectos. Para llegar al concepto de riesgo sísmico tenemos que considerar la **vulnerabilidad de las estructuras** (probabilidad de que se produzca el fallo total o parcial bajo las solicitudes sísmicas) y el **daño producido**<sup>44</sup> en caso de fallo de las estructuras. Por ejemplo, el terremoto de Bam (Irán) en diciembre de 2003 de intensidad 6,3 arrasó esa ciudad histórica y produjo algo más de cincuenta mil muertos. En cambio el terremoto de Japón de noviembre de 2004 fue de intensidad 7,1 —lo cual significa que supuso una liberación de dieciséis veces más energía, ya que la intensidad  $I$  se define como  $I = (2/3) \cdot \log_{10}(E_0) - 10,7$ — y no hubo muertos. Obviamente el factor explicativo de la catástrofe de Bam es la vulnerabilidad. Así pues, podemos considerar que el riesgo debe ser un “producto” de tres conjuntos de factores:

$$\text{riesgo sísmico} = \text{peligrosidad} \otimes \text{vulnerabilidad} \otimes \text{daño producido}$$

Así, para el caso comparativo que estamos considerando, podríamos construir la siguiente tabla (sin intentar dar índices numéricos) para evaluar el riesgo:

	Riesgo	Peligrosidad	Vulnerabilidad	Daño
Japón	medio	alta	baja	alto
Bam	alto	media	muy alta	medio

Aclarado lo anterior, debemos explicar cuál es el esquema de la mayoría de las **normativas de cálculo sísmico**. Estas normativas recogen métodos, mapas de características geotécnicas y recomendaciones de diseño sísmico. En general, los aspectos concretos que suelen ser tratados detalladamente en una normativa de cálculo sísmico, son los siguientes:

- 1) **Tipos de estructuras** a los que se aplica la normativa (aquí consideraremos estructuras que pueden ser adecuadamente modelizadas mediante un modelo elástico lineal).
- 2) **Mapa de peligrosidad** sísmica de la zona, así como definición de la acción en forma de **espectro sísmico de respuesta**. Esto nos dará una modelización adecuada de las cargas sísmicas equivalentes.
- 3) Método de cálculo de las **fuerzas sísmicas equivalentes**. Teniendo en cuenta los datos geotécnicos y geológicos de la zona, los espectros de respuesta del terreno y el modelo adoptado para la estructura, se calculan unas fuerzas sísmicas equivalentes que reproducen los esfuerzos más desfavorables en caso de sismo.

- 4) Recomendaciones referentes a la forma en planta de las estructuras más adecuadas a una zona sísmica, así como recomendaciones sobre la **tipología estructural** concreta y recomendaciones sobre los materiales para estructuras sismorresistentes.

En las siguientes secciones caracterizamos cada uno de estos puntos necesarios para un cálculo sísmico.

## 6.2. Análisis modal de edificios de cortante

### 6.2.1. Estructuras elásticas y ecuaciones de movimiento

El modelo más sencillo que uno puede usar para el cálculo sísmico de una estructura es suponer que ésta es una estructura lineal en que los desplazamientos son proporcionales a las fuerzas aplicadas. En este caso la estructura viene caracterizada por un objeto matemático llamado **matriz de rigidez**. Restringiéndonos a estructuras lineales formadas por barras unidimensionales, si  $d \in \mathbf{R}^m$  es el vector de **desplazamientos nodales** en la posición de equilibrio y  $F \in \mathbf{R}^m$  el vector de fuerzas nodales equivalentes aplicadas sobre la estructura, ambos estarán relacionados por la matriz de rigidez  $[K] \in M_{m \times m}(\mathbf{R})$  de la siguiente manera:

$$F + [K]d = 0 \quad [6.3]$$

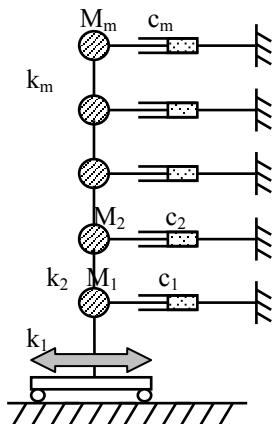
Si además consideramos el estado transitorio en que la estructura se está moviendo bajo la acción de fuerzas variables, necesitamos introducir la matriz de masa  $[M] \in M_{m \times m}$  y la matriz de amortiguamiento  $[C] \in M_{m \times m}$ . Si llamamos  $x(t) \in \mathbf{R}^m$  a los desplazamientos con respecto a la posición de equilibrio en ausencia de fuerzas, tenemos que la ecuación del movimiento es del tipo:

$$[M]\ddot{x}(t) + [C]\dot{x}(t) + [K]x(t) = -F(t) \quad [6.4]$$

La acción sísmica  $F(t)$  se puede modelizar adecuadamente como una aceleración de terreno, cuya componente vertical al terreno suele ser menos importante. Debido a eso para  $F(t)$  suele tomarse la forma  $a(t)[M](1, 1, \dots, 1)^T$ , siendo  $a(t) \in \mathbf{R}$  una función escalar del tiempo que representa la aceleración horizontal del suelo. Por otro lado, se admite que en las estructuras convencionales:

- La deformación de los pilares asociada al esfuerzo normal es despreciable  $\varepsilon_{xx} \approx 0$  y sólo son importantes los desplazamientos provocados en ellos por la flexión.
- Los forjados son rígidos (tanto a flexión como frente a esfuerzos normales).
- Las fuerzas iniciales de todos los elementos es despreciable frente a las fuerzas iniciales de los forjados y las concargas situadas sobre ellos.

Bajo esas tres hipótesis, que se cumplen razonablemente bien en las estructuras convencionales se considera que un modelo matemático o esquema para el cálculo sísmico adecuado es la columna de cortante, que estructuralmente se puede representar como:



De acuerdo con este esquema, un edificio de  $m$  plantas queda modelizado como una columna flexible de  $m$  grados de libertad, en que las masas  $M_i$  están concentradas en los forjados. Una vez definido este modelo, podemos avanzar en la forma particular de las matrices de masa [ $M$ ], rigidez [ $K$ ] y amortiguamiento [ $C$ ] que usaremos. Como la masa se considera concentrada en cada uno de los forjados tenemos una **matriz de masas de forma diagonal**:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & M_m \end{bmatrix} \quad [6.5]$$

Además, debido a la forma particular de la solicitud sísmica como aceleración horizontal y la rigidez a flexión de los forjados, resulta que podemos usar una matriz de rigidez reducida que sólo incluya los grados de libertad de desplazabilidad horizontal. Y, puesto que el desplazamiento relativo de un forjado con respecto al que tiene por debajo y el que tiene por encima sólo induce esfuerzos sobre ellos dos, sólo los términos  $K_{ij}$ , donde  $|i - j| \leq 1$ , son diferentes de cero (matriz tridiagonal). De hecho, tenemos **matriz de rigidez** [ $K$ ] del tipo:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -k_m \\ 0 & \dots & 0 & -k_m & k_m \end{bmatrix} \quad [6.6]$$

donde  $k_r$ , la rigidez total a cortante de pilares de la planta  $r$ -ésima es igual a  $12EI_r/h_r^3$ , donde a su vez  $I_r$  es la suma de momentos de inercia de los pilares de la planta  $r$ -ésima; si una planta tiene  $p$  pilares iguales cada uno con inercia igual a  $I_{(r)}$ , entonces  $I_r = p \cdot I_{(r)}$ . Además, la hipótesis de que todas las fuerzas iniciales son despreciables frente a la

asociada a la masa de los forjados y las concargas sobre ellos conduce a una matriz de masa diagonal.

Para la **matriz de amortiguamiento** debe tenerse en cuenta que el rozamiento está producido por tres factores principales: 1) el rozamiento entre superficies de deslizamiento que produce una fuerza de fricción proporcional a la fuerza normal de contacto y, por tanto, de una contribución proporcional a  $[M]$ ; 2) la fricción interna del propio material de la estructura que produce un amortiguamiento proporcional a la fuerza de recuperación elástica y, por tanto, de una contribución proporcional a  $[K]$ ; y 3) efectos de la viscosidad del material de la estructura. Ignorando el factor 3, una forma razonable de la matriz de amortiguamiento es [6.4c]:

$$[C] = \alpha_1[M] + \alpha_2[K] \quad [6.7]$$

Esta forma de la matriz de rozamiento se llama matriz de amortiguamiento de tipo Rayleigh, donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son dos coeficientes que se tienen que determinar empíricamente. Finalmente, las fuerzas vienen dadas por las fuerzas de inercia d'Alembert provocadas por la aceleración forzada  $a(t)$  del terreno en la base de la estructura y, como se ha dicho, son:

$$F^T(t) = (F_1(t), \dots, F_m(t)), \text{ donde } F_i(t) = M_i \cdot a(t) \quad [6.8]$$

### 6.2.2. Análisis modal: modos de vibración propios y frecuencias naturales

Si consideramos de nuevo la ecuación del movimiento [6.4] y prescindimos por el momento del amortiguamiento para simplificar, vemos que esa ecuación matricial es un sistema en general complicado de ecuaciones acopladas para cada uno de los grados de libertad vibracionales (que, con las simplificaciones hechas, coinciden con las oscilaciones horizontales de cada uno de los forjados que componen el edificio).

$$\begin{aligned} [M]\ddot{X}(t) + [K]X(t) &= F(t) \Rightarrow \\ \begin{cases} m_1\ddot{X}_1(t) - 0 + (k_1 + k_2)X_1(t) - k_2X_2(t) &= -F_1(t) \\ m_n\ddot{X}_2(t) - k_2X_1(t) + (k_2 + k_3)X_2(t) - k_3X_3(t) &= -F_2(t) \\ \dots \\ m_n\ddot{X}_n(t) - k_{m-1}X_{m-1}(t) + (k_{m-1} + k_m)X_m(t) - 0 &= -F_m(t) \end{cases} & [6.9] \end{aligned}$$

Para poder resolver ese sistema que involucra las funciones escalares  $X_i(t)$  componentes del vector  $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)) \in \mathbf{R}^m$  se busca un conjunto de  $m$  vectores  $A_{(i)}$  llamados **modos propios de vibración**, en función de los cuales el sistema de ecuaciones acoplado [6.9] puede ser reescrito como  $m$  ecuaciones no acopladas independientes.

Para calcular los modos propios se ensaya una solución de la forma  $X(t) = Ae^{iot}$  con  $A \in \mathbf{R}^m$  que satisfaga la ecuación [6.9] con  $F(t) = 0$  (vibraciones libres), es decir:



$$-[M]A\omega^2 e^{i\omega t} + [K]Ae^{i\omega t} = 0 \Rightarrow ([K] - \omega^2[M])A = 0 \quad [6.10]$$

Esta última ecuación homogénea sólo tiene una solución no trivial si el determinante de  $([K] - \omega^2[M])$  es nulo para el valor de  $\omega$  seleccionado. Para encontrar los valores de  $\omega$  para los cuales existe solución, desarrollamos el determinante y llegamos a una ecuación polinómica del estilo  $P(\omega) = \omega^{2m} + \alpha_1\omega^{2m-2} + \alpha_2\omega^{2m-4} + \dots + \alpha_{m-1}\omega^2 + \alpha_m = 0$ .

Puesto que  $[K]$  y  $[M]$  son matrices reales y simétricas y además  $[M]$  es definida positiva, resulta que todas las soluciones para  $\omega^2$  son reales y positivas. De hecho, existen exactamente  $m$  soluciones  $\omega_i$ , que se denominan **frecuencias propias** de la estructura. Si las ordenamos de menor a mayor, la frecuencia  $\omega_1$  se denomina **frecuencia fundamental**.

Además, para cada frecuencia natural  $\omega_i$  existe al menos un vector propio normalizado  $A_{(i)} = (A_{(i)1}, A_{(i)2}, \dots, A_{(i)m})$  que es solución de la ecuación [6.10] con  $\omega = \omega_i$  y tal que:

$$\begin{cases} ([K] - \omega_i^2[M])A_{(i)} = 0 \\ A_{(i)1} = 1 \end{cases} \quad [6.11]$$

Es interesante señalar que estos modos de vibración son linealmente independientes (de hecho, vienen representados por vectores ortogonales en el producto escalar asociado a la matriz  $[M]$ , es decir,  $A_{(i)} \cdot_M A_{(j)} = 0$  si  $i \neq j$ ). A continuación usamos estos modos propios de vibración para resolver nuestro problema inicial como combinación lineal de los  $m$  modos propios de vibración, es decir, tomaremos una  $X(t)$  de la forma:

$$X(t) = \sum_{k=1}^m A_{(k)}x_k(t) \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1(t) \\ \dots \\ X_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{(1)1} \\ \dots \\ A_{(1)n} \end{bmatrix}x_1(t) + \dots + \begin{bmatrix} A_{(n)1} \\ \dots \\ A_{(n)n} \end{bmatrix}x_n(t) \quad [6.12]$$

donde ahora las funciones  $x_k(t)$  son funciones escalares que sólo dependen del tiempo.<sup>45</sup> Nótese que las funciones  $X_i(t)$  introducidas anteriormente cumplirán que  $X_i(t) = A_{(1)}x_1(t) + A_{(2)}x_2(t) + \dots + A_{(m)}x_m(t)$ . Introduciendo la solución de la forma [6.12] en la ecuación original [6.9] y multiplicando ambos miembros por  $A_{(i)}^T$  se obtiene:

$$A_{(i)}^T [M] \left( \sum_{k=1}^m A_{(k)} \ddot{x}_k(t) \right) + A_{(i)}^T [C] \left( \sum_{k=1}^m A_{(k)} \dot{x}_k(t) \right) + A_{(i)}^T [K] \left( \sum_{k=1}^m A_{(k)} x_k(t) \right) = A_{(i)}^T F(t)$$

donde, si ahora aplicamos las **condiciones de ortonormalidad**,  $A_{(j)} \cdot_M A_{(i)} = 0$  (para  $i \neq j$ ), llegamos al siguiente sistema de ecuaciones desacopladas independientes:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) + 2\nu_1\omega_1\dot{x}_1(t) + \omega_1^2 x_1(t) &= -Q_1 a(t) \\ \ddot{x}_2(t) + 2\nu_2\omega_2\dot{x}_2(t) + \omega_2^2 x_2(t) &= -Q_2 a(t) \\ &\dots \\ \ddot{x}_m(t) + 2\nu_m\omega_m\dot{x}_m(t) + \omega_m^2 x_m(t) &= -Q_m a(t) \end{aligned} \quad [6.13]$$

donde se han introducido las siguientes definiciones:

$$F^T(t) = -a(t)[M]\underbrace{(1,1,\dots,1)}_{n \text{ veces}}^T \quad [6.14a]$$

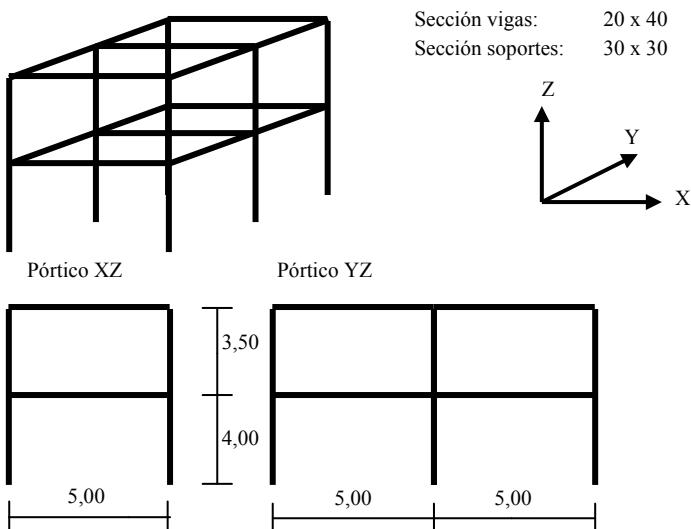
$$v_i \equiv \frac{A_{(i)}^T [C] A_{(i)}}{2\omega_i M_{(i)}} \quad [6.14b]$$

$$Q_i \equiv \frac{\sum_{k=1}^m M_k A_{(i)k}}{\sum_{k=1}^m M_k A_{(i)k}^2} \quad M_{(i)} \equiv A_{(i)}^T [M] A_{(i)}$$

El coeficiente  $Q_i$  se llama **coeficiente de participación modal** del modo  $i$ , mientras que  $v_i$  se denomina **amortiguamiento modal** del modo  $i$ . Cada una de las ecuaciones independientes del sistema [6.12] es muy sencilla y su cálculo se explica en la sección siguiente.

### Ejemplo numérico 1

Calcular las frecuencias propias  $\omega_i$  y los modos de propios de vibración  $A_{(i)}$  del siguiente edificio de hormigón, teniendo en cuenta que la carga sobre el primer piso es  $q_1 = 930 \text{ kp/m}^2$  y sobre el segundo es  $q_2 = 835 \text{ kp/m}^2$  (usando  $E_c = 300500 \text{ kp/cm}^2$ ).



En primer lugar calculamos las masas iniciales equivalentes a las cargas gravitatorias  $q_1$  y  $q_2$ , es decir, las masas tales que  $q_1 S = m_1 g$  y  $q_2 S = m_2 g$ . De aquí deducimos que la matriz de masa es simplemente:



$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \frac{S}{g} \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 4,65 & 0 \\ 0 & 4,18 \end{bmatrix} [\text{kg}]$$

La matriz de rigidez, teniendo en cuenta que tanto la primera planta como la segunda están formadas por seis pilares, tenemos,  $I_i = 6I_{pilar} = 6 \cdot (0,3^4)/12 = 4,05 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ , como  $k_i = 12EI_i/h_i^3$  llegamos fácilmente a la siguiente matriz de rigidez  $[K]$ :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = 10^7 \begin{bmatrix} 5,13 & -3,34 \\ -3,34 & 3,34 \end{bmatrix} [\text{kg} \cdot \text{s}^2]$$

Para el cálculo de las frecuencias propias, tenemos que calcular simplemente:

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = m_1m_2\omega^4 + ((k_1 + k_2)m_2 - k_2m_1)\omega^2 + k_1k_2 = 0$$

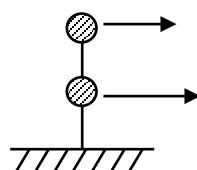
El cálculo de las frecuencias mediante la resolución anterior lleva a:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{6162400}{6479} - \frac{200\sqrt{5639262891}}{19437} \Rightarrow \omega_1 \approx 13,36 \text{ s}^{-1} \\ \omega_2^2 &= \frac{6162400}{6479} + \frac{200\sqrt{5639262891}}{19437} \Rightarrow \omega_2 \approx 41,52 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Por ello, el período fundamental de la estructura es  $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 0,47$  s. El cálculo de los modos propios se realiza calculando los vectores propios numéricamente y luego normalizando convenientemente:

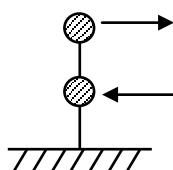
$$[A_{(1)}, A_{(2)}] = \begin{bmatrix} 1,0000 & 1,0000 \\ 1,2875 & -0,8640 \end{bmatrix} \quad \Phi_{(i)} \equiv \frac{\nu_{(i)}}{\nu_{(i)}^T [M] \nu_{(i)}} \Rightarrow$$

$$[\Phi] \equiv [\phi_{(1)}, \phi_{(2)}] = 10^{-3} \begin{bmatrix} 2,94 & 3,59 \\ 3,78 & -3,19 \end{bmatrix}$$



Modo de vibración 1

$$[\omega_1 \approx 13,36 \text{ s}^{-1}]$$



Modo de vibración 2

$$[\omega_2 \approx 41,52 \text{ s}^{-1}]$$

### 6.3. Espectros de respuesta del terreno y respuestas máximas modales

Con el fin de resolver ecuaciones del tipo [6.13], recordemos la resolución de un sistema vibratorio con un grado de libertad que está gobernado por una ecuación del tipo:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad [6.15]$$

dondex( $t$ ) es el desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio en ausencia de fuerzas,  $c$  es el coeficiente de fricción,  $k$  la rigidez o constante de restitución y  $F(t)$  la fuerza exterior o excitación en función del tiempo. Dicha ecuación puede resolverse, por ejemplo, mediante el método de la función de Green correspondiente y la solución en esta representación lleva en nombre de **integral de Duhamel**:

$$x(t) = \int_0^t \left[ \frac{F(\tau)}{m\omega\sqrt{1-v^2}} \right] e^{-(v\omega(t-\tau))} \sin(\omega\sqrt{1-v^2}(t-\tau)) d\tau \quad [6.16a]$$

donde  $\omega$  es la frecuencia natural del sistema, igual  $(k/m)^{1/2}$ , y  $v$  es el amortiguamiento, igual a  $2c/m\omega$ . Si aplicamos el resultado [6.15] a cada una de las ecuaciones del sistema [6.13] llegamos a que:

$$x_i(t) = \int_0^t \left[ \frac{-Q_i a(\tau)}{\omega_i \sqrt{1-v_i^2}} \right] e^{-(v_i \omega_i (t-\tau))} \sin(\omega_i \sqrt{1-v_i^2} (t-\tau)) d\tau \quad [6.16b]$$

Si bien puede resultar interesante conocer la evolución de las tensiones y deformaciones de la estructura en función del tiempo, un cálculo sísmico adecuado puede basarse en el cálculo de las respuestas estructurales máximas frente a la excitación exterior  $F(t)$ . De hecho, se denomina **espectro de respuesta** a la familia de curvas que relacionan la respuesta máxima (en desplazamientos, velocidades o aceleraciones) en función de la frecuencia. En general, nos interesan los espectros de desplazamiento, velocidades y aceleraciones que pueden ser calculados a partir de [6.16] y vienen dados por:

$$\begin{aligned} S_d^r &= S_d^r(\omega, v) = \max_{t \in R} |x(t)| \equiv |x(t)|_{\max} \\ S_v^r &= S_v^r(\omega, v) = \max_{t \in R} |\dot{x}(t)| \equiv |\dot{x}(t)|_{\max} \\ S_a^r &= S_a^r(\omega, v) = \max_{t \in R} |\ddot{x}(t) + a(t)| \equiv \left| \ddot{x}(t) + \frac{F(t)}{m} \right|_{\max} \end{aligned} \quad [6.17]$$

#### 6.3.1. Pseudo-espectros y espectros de diseño

Por conveniencia, se hacen algunas simplificaciones en los espectros anteriores, obteniéndose así aproximaciones prácticas a los espectros dados por [6.17], llamados pseudo-espectros. Las aproximaciones habituales consisten en:



- Se aproxima  $\omega(1-v^2)^{1/2}$  simplemente por  $\omega$ , dado que en la mayoría de las estructuras convencionales el amortiguamiento es muy bajo.
- Se admite que el término  $2\omega v \ddot{x}(t)$  (desaceleración por amortiguamiento) es pequeño comparado con las otras aceleraciones que intervienen.
- Se substituye en la expresión para el espectro de velocidades el término  $\cos(\cdot)$  por  $\sin(\cdot)$ , ya que si estamos sólo interesados en la respuesta máxima no existen diferencias apreciables.

Si consideramos todas esas simplificaciones, obtenemos para los pseudo-espectros las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} S_d &= S_d(\omega, v) = \max_{t \in R} \left| \frac{1}{\omega} \int_0^t a(\tau) e^{-v\omega(t-\tau)} \sin(\omega(t-\tau)) d\tau \right| \\ S_v &= S_v(\omega, v) = \max_{t \in R} \left| \int_0^t a(\tau) e^{-v\omega(t-\tau)} \sin(\omega(t-\tau)) d\tau \right| = \omega S_d \\ S_a &= S_a(\omega, v) = \max_{t \in R} \left| \omega \int_0^t a(\tau) e^{-v\omega(t-\tau)} \sin(\omega(t-\tau)) d\tau \right| = \omega^2 S_d \end{aligned} \quad [6.18]$$

Aun con simplificaciones, las funciones [6.18] tienen cambios abruptos en sus derivadas, ya que para ciertas frecuencias ocurren fenómenos de resonancia. En la práctica, los **espectros de diseño** usados están promediados de tal manera que se estimarán efectos que cubrirán con seguridad un amplio porcentaje de los sismos previsibles en una región (de alguna manera los espectros de diseño son un modo de mayoración de las cargas sísmicas). El parámetro más importante en un espectro de diseño normalizado es el **coeficiente sísmico**, que da la razón entre la aceleración típica del terreno y la aceleración de la gravedad, y se define como:

$$c(T, v) \equiv \frac{S_a(2\pi/T, v)}{g} \quad [6.19]$$

### 6.3.2. Respuestas máximas modales

En esta sección combinamos los resultados de las secciones 6.2.2 y 6.3.1 para encontrar los valores máximos de ciertas magnitudes importantes en el diseño. En principio, las magnitudes que nos interesan son los **desplazamientos modales** máximos, las **aceleraciones modales** máximas, las fuerzas sísmicas equivalentes y los esfuerzos cortantes asociados. Tanto los desplazamientos máximos como las aceleraciones máximas pueden obtenerse de la solución de las ecuaciones [6.13]. De hecho, pueden usarse los pseudo-espectros de respuesta para calcular tanto los desplazamientos modales máximos como las aceleraciones modales máximas:

$$\begin{aligned} |\ddot{x}_i|_{\max} &= Q_i(S_a)_i \equiv Q_i S_a(\omega_i, v_i) \\ |x_i|_{\max} &= Q_i(S_d)_i = Q_i \frac{(S_a)_i}{\omega_i^2} \end{aligned} \quad [6.20]$$

En función de estas magnitudes pueden calcular estas otras:

- 1) Las fuerzas sísmicas equivalentes modales  $F_{ri}$  para la planta  $r$  según el modo de vibración  $i$ .
- 2) Los desplazamientos modales  $x_{ri}$  para la planta  $r$  según el modo  $i$ .
- 3) El esfuerzo cortante en la base  $T_i$  para el modo  $i$ .

Los desplazamientos máximos y aceleraciones máximas en modo ( $i$ ), de acuerdo con la ecuación [6.11], son:

$$\begin{aligned} X_{(i)\max} &= A_{(i)} |x_i|_{\max} = A_{(i)} Q_i \frac{(S_a)_i}{\omega_i^2} \\ \ddot{X}_{(i)\max} &= A_{(i)} |\ddot{x}_i|_{\max} = A_{(i)} Q_i (S_a)_i \end{aligned} \quad [6.21]$$

Las fuerzas sísmicas equivalentes  $F_{(i)} \in \mathbf{R}^n$  en el modo ( $i$ ) son simplemente:

$$F_{(i)} = [M] \ddot{X}_{(i)\max} \Rightarrow F_{(i)k} = A_{(i)k} M_k Q_i (S_a)_i \quad [6.22]$$

Finalmente el cortante en la base de la estructura en el modo  $T_{(i)}$ , que es un escalar, se calcula simplemente como la suma de las componentes del vector de fuerzas sísmicas del modo ( $i$ ):

$$T_{(i)} = \sum_{k=1}^n F_{(i)k} = \frac{(S_a)_i}{g} \left[ g Q_i \sum_{k=1}^n A_{(i)k} M_k \right] \equiv \frac{(S_a)_i}{g} W_i \quad [6.23]$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y el resto de magnitudes han sido definidas previamente. La cantidad entre corchetes en [6.22] se llama peso modal efectivo  $W_i$  y tiene la propiedad de que  $W_1 + W_2 + \dots + W_n = (M_1 + M_2 + \dots + M_n)g$ , donde  $M_i$  es la masa del forjado y concargas del piso  $i$ . Esta propiedad es interesante porque sabemos que en el cálculo sísmico de un edificio se comprueba que no todos los modos de vibración ( $i$ ) tienen un peso decisivo en la respuesta estructural del edificio. La magnitud  $W_i$  nos dice qué modos de vibración tienen un peso significativo. Si ordenamos ahora los pesos modales efectivos de mayor a menor y los renumeramos para un análisis adecuado de la estructura según el nudo ( $i$ ), bastará con considerar  $q$  pesos tales que:

$$\sum_{j=1}^q W_{\sigma(j)} \geq 0,90 \cdot g \sum_{k=1}^n M_k \quad [6.24]$$

donde la suma de la izquierda involucra sólo a los  $q$  modos de vibración con una  $W_i$  mayor, es decir, tales que  $\sigma(j) > \sigma(k)$  implique que  $W_{\sigma(j)} \leq W_{\sigma(k)}$ . La ecuación [6.23] implica que sólo los  $q$  modos usados darán cuenta del 90 % de la respuesta estructural.

Un problema que se presenta es examinar la respuesta máxima de la estructura, no simplemente la respuesta para cada modo de vibración. Un método que da resultados aceptables cuando las frecuencias propias de vibración están bien separadas es evaluar la respuesta máxima como:

$$R_{\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^q (R_{(i)})_{\max}^2} \quad [6.25a]$$



donde  $R$  es una magnitud genérica,  $R_{max}$  la respuesta máxima combinada,  $R_{(j)}$  la respuesta obtenida para esa magnitud en el modo de vibración ( $i$ ) y  $q$  el número de modos de vibración relevantes dados por [6.23]. La estimación anterior se conoce como método SRSS (*Square Root of Sum of Squares*). Cuando la estructura tiene frecuencias propias con valores cercanos entre s<sup>-1</sup><sup>46</sup> el método SRSS puede subestimar o sobreestimar los efectos, así que es mejor usar una combinación conocida como método CQC (*Complete Quadratic Combination*), en que la respuesta máxima se estima como:

$$R_{max} = \sqrt{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q R_{(i)} \rho_{ij} R_{(j)}}$$

con:

$$\rho_{ij} = \frac{8(v_i v_j)^{\frac{1}{2}} (v_i + \gamma_{ij} v_j)^{\frac{3}{2}}}{(1 - \gamma_{ij}^2)^2 + 8v_i v_j \gamma_{ij} (1 + \gamma_{ij}^2) + 4(v_i^2 + v_j^2) \gamma_{ij}^2} \quad y \quad \gamma_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j} \quad [6.25b]$$

## 6.4. Aplicación de la norma NCSE-02

El proceso de cálculo previsto por las normativas de diseño sismorresistente consta de las siguientes etapas:

- 1) Cálculo de las frecuencias naturales y los modos propios de vibración de la estructura.
- 2) Determinación de las coordenadas espectrales correspondientes a cada modo de vibración, para lo cual se usarán parámetros relacionados con el terreno y la zona sísmica suministrados por la correspondiente normativa.
- 3) Cálculo de fuerzas sísmicas equivalentes de cada modo de vibración y multiplicación de las ordenadas espectrales por la masa y por el coeficiente de participación nodal.
- 4) Cálculo estático de la estructura sometida a la acción de las fuerzas sísmicas equivalentes, con lo que se obtienen los valores máximos de ciertas magnitudes para cada modo de vibración y se combinan de algún modo para obtener la respuesta máxima combinada para los modos de vibración relevantes.

### 6.4.1. Determinación de la aceleración espectral

De acuerdo con la norma NCSE-02, la aceleración espectral se calcula a partir de una aceleración básica  $a_b$  dependiente de la región geográfica que estamos considerando, un coeficiente de riesgo  $R$  que depende período de vida esperado para la estructura, una aceleración espectral de respuesta  $\alpha$  dependiente de la frecuencia natural de oscilación considerada y un coeficiente de amortiguamiento  $\beta$ . Para el modo de vibración ( $i$ ) se tiene, de hecho:

$$(S_a)_i = a(T_i) \cdot \beta = [R \cdot \alpha(T_i) \cdot a_b] \cdot \beta = [R \cdot \alpha(T_i) \cdot a_b] \cdot (v/\mu) \quad [6.26]$$

donde los parámetros  $R$  y  $v$  vienen aproximados por las siguientes fórmulas analíticas contenidas en la NCSE-02:

$$R = (t/50)^{0,37} \quad [6.27a]$$

$$v = v(v, T_i) = \begin{cases} \frac{T_i}{T_0} \left[ \left( \frac{0,05}{v} \right)^{0,4} - 1 \right] + 1 & T_i \leq T_0 \\ \left( \frac{0,05}{v} \right)^{0,4} & T_i > T_0 \end{cases} \quad [6.27b]$$

Aquí  $R$  es el coeficiente de riesgo,  $\alpha$  la amplificación dinámica de la aceleración,  $v$  el amortiguamiento (en tanto por 1),  $T_i = 2\pi/\omega_i$  el período de vibración del modo ( $i$ ), y  $t$  el tiempo de vida esperado para la estructura (en años). Finalmente los parámetros  $\alpha$  y  $\mu$  son más complicados de explicar. El primero de ellos puede calcularse a partir del coeficiente tipo de suelo  $C$  y el coeficiente de contribución  $K$ , con los que se calculan los períodos  $T_0$ ,  $T_I$  y la magnitud  $\alpha(T_0)$ . En función de ellos se calcula la aceleración espectral de respuesta, según las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} T_0 &= 0,125C + 0,2K - 0,175 \\ \alpha(T_0) &= (3C - 3,8)(K - 1,25) + 2,30 \end{aligned} \quad [6.28a]$$

$$T_I = 0,215K(5C - 1)/\alpha(T_0)$$

$$\alpha = \alpha(T_i) = \begin{cases} 1 + [\alpha(T_0) - 1] \frac{T_i}{T_0} & T_i < T_0 \\ \alpha(T_0) & T_0 \leq T_i \leq T_I \\ \alpha(T_0) \frac{T_I}{T_i} & T_i > T_I \end{cases} \quad [6.28b]$$

Finalmente el coeficiente de tipo de suelo ( $C$ ), el de contribución ( $K$ ) y el parámetro  $\mu$  llamado ductilidad se obtienen de la norma. El coeficiente  $C$  de suelo se estima como:

$$\begin{aligned} \text{Suelo tipo I} &\quad C = 1,0 \\ \text{Suelo tipo II} &\quad C = 1,4 \\ \text{Suelo tipo III} &\quad C = 1,8 \end{aligned} \quad [6.29a]$$

La ductilidad ( $\mu$ ) puede estimarse simplificadamente como:

$$\begin{aligned} \text{Estructuras sin ductilidad} &\quad \mu = 1,0 \\ \text{Estructuras de ductilidad baja} &\quad \mu = 2,0 \\ \text{Estructuras de ductilidad media} &\quad \mu = 3,0 \\ \text{Estructuras de ductilidad alta} &\quad \mu = 4,0 \end{aligned} \quad [6.29b]$$

### Ejemplo numérico 2

Calcular las fuerzas sísmicas equivalentes  $F_{(i)}$  para el edificio de hormigón armado del ejemplo numérico 1 teniendo en cuenta que se usarán cerramientos de muros de fábrica, y se estima que presenta un amortiguamiento  $v = 7\%$  y una ductilidad estructura



baja. Se halla sobre un terreno intermedio de tipo II, ubicado en la ciudad de Sevilla, considerando un coeficiente de contribución  $K = 1,2$ .

En primer lugar, examinaremos los datos de la estructura y el terreno para calcular los parámetros básicos de acuerdo con la NCSE-02. Para un terreno intermedio de tipo II obtenemos de [6.28] el coeficiente de suelo  $C = 1,4$ . Del Anejo 1 de la normativa se obtiene que la aceleración sísmica básica para la ciudad de Sevilla es  $a_b/g \approx 0,07$ . La baja ductilidad de la estructura nos lleva a tomar  $\mu = 2$ , y de la ecuación [6.26b] obtenemos un coeficiente de respuesta  $\beta = v/\mu = 0,44$ .

Usando las ecuaciones [6.27a], se calculan los períodos característicos  $T_0$  y  $T_I$  y en función de ellos el valor característico de la aceleración:

$$\begin{aligned} T_0 &= 0,125C + 0,2K - 0,175 = 0,125 \cdot 1,4 + 0,2 \cdot 1,2 - 0,175 = 0,24 \text{ s} \\ \alpha(T_0) &= (3C - 3,8)(K - 1,25) + 2,30 = (3 \cdot 1,4 - 3,8)(1,2 - 1,25) + 2,30 = 2,28 \\ T_I &= 0,215K(5C - 1)/\alpha(T_0) = 0,215 \cdot 1,2(5 \cdot 1,4 - 1)/2,28 = 0,68 \text{ s} \end{aligned}$$

En el ejemplo numérico 1 ya se determinó que las frecuencias naturales del sistema son  $\omega_1 \approx 13,36 \text{ s}^{-1}$  y  $\omega_2 \approx 41,52 \text{ s}^{-1}$ . Ahora además se considerarán que los amortiguamientos son iguales en todos los modos  $v_1 = v_2 = v = 0,07$ . A continuación pasamos a calcular las fuerzas sísmicas en cada uno de los modos de vibración.

*Primer modo de vibración.* El período fundamental es  $T_1 = 0,47 \text{ s}$ , por lo que este período se encuentra en el rango de períodos intermedios:  $T_0 \leq T_1 \leq T_I$  y, de acuerdo con [6.27b], la aceleración característica para el período fundamental es  $\alpha(T_1) = \alpha(T_0) = 2,28$ . Por otro lado, usando [6.26b] llegamos al factor de modificación por amortiguamiento,  $v = (0,05/v)^{0,4} = 0,874$ . Si consideramos para la construcción un período de vida  $t$  de cien años, tenemos que  $R = (t/50)^{0,37} = 1,3$ , y, recordando la aceleración básica  $a_b = 0,07g$ , podemos calcular la aceleración espectral modal como:

$$(S_a)_1 = a(T_1)(v/\mu) = [R \cdot \alpha(T_1) \cdot a_b] \cdot (v/\mu) = (1,3 \cdot 2,28 \cdot 0,07g) \cdot (0,874/2) = 0,0913 \text{ g}$$

Calculadas estas magnitudes, podemos pasar al cálculo del coeficiente de participación modal  $Q_1$  a partir de [6.14b] y los modos de vibración calculados en el ejemplo numérico 1:

$$Q_1 = \frac{M_1 A_{(1)1} + M_2 A_{(1)2}}{M_1 A_{(1)1}^2 + M_2 A_{(1)2}^2} = \frac{4,651,0000 + 4,181,2875}{4,651,0000^2 + 4,181,2875^2} = 0,8664$$

Para las fuerzas sísmicas equivalentes en el modo 2 la ecuación [6.21] da:

$$F_{(1)} = [M] A_{(1)} Q_1 (S_a)_{11} = 10^4 \begin{bmatrix} 4,65 & 0 \\ 0 & 4,18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 1,2875 \end{bmatrix} \cdot 0,8664 \cdot 0,0913g = \begin{bmatrix} 3678 \\ 4257 \end{bmatrix} [\text{kp}]$$

*Segundo modo de vibración.* El período de este modo es  $T_2 = 2\pi/\omega_2 = 0,15 \text{ s}$ , por lo que este período se encuentra en el rango de períodos bajos.  $T_2 \leq T_0$  con lo que la aceleración espectral de respuesta para el modo 2 es  $\alpha(T_2) = 1 + [\alpha(T_0) - 1](T_2/T_0) = 1,80$  (se ha usado

aquí [6.28b]). Usando de nuevo [6.27b] llegamos al factor de modificación por amortiguamiento  $v = (T_2/T_0)[(0,05/v)^{0,4} - 1] + 1 = 0,921$ , que junto con el coeficiente de riesgo  $R = 1,3$  y la aceleración básica  $a_b = 0,07g$ , nos dan una aceleración espectral modal para el modo 2:

$$(S_a)_2 = a(T_2)(v/\mu) = [R \cdot \alpha(T_2) \cdot a_b] \cdot (v/\mu) = (1,3 \cdot 1,80 \cdot 0,07g) \cdot (0,921/2) = 0,0754 g$$

Calculadas estas magnitudes, podemos pasar al cálculo del coeficiente de participación modal  $Q_2$ , también a partir de [6.14b] y el modo de vibración calculado en el ejemplo numérico 1:

$$Q_2 = \frac{M_1 A_{(2)1} + M_2 A_{(2)2}}{M_1 A_{(2)1}^2 + M_2 A_{(2)2}^2} = \frac{4,65 \cdot 1,0000 - 4,18 \cdot 0,8640}{4,65 \cdot 1,0000^2 + 4,18 \cdot 0,8640^2} = 0,1336$$

En cuanto a las fuerzas sísmicas equivalentes en el modo 1, la ecuación [6.21] da:

$$F_{(2)} = [M] A_{(2)} Q_2 (S_a)_2 = 10^4 \begin{bmatrix} 4,65 & 0 \\ 0 & 4,18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0000 \\ -0,8640 \end{bmatrix} \cdot 0,1336 \cdot 0,0754 g = \begin{bmatrix} 468 \\ -364 \end{bmatrix} [\text{kp}]$$

#### 6.4.2. Tablas resumen de la norma sismorresistente

Muchas de las magnitudes expresadas en fórmulas de la sección anterior pueden resumirse en forma de tabla. La tabla de coeficientes de amortiguamiento  $v$  y ductilidad  $\mu$  tiene el interés de que se dan valores orientativos de ductilidad según el tipo de estructura:

Tipo de estructura	Tipo de planta	$v$	Ductilidad			Sin ductilidad
			$\mu = 4$	$\mu = 3$	$\mu = 2$	
Acero laminado	Diáfana	0,04	0,27	0,36	0,55	1,09
	Compartimentada	0,05	0,25	0,33	0,50	1,00
Hormigón armado	Diáfana	0,06	0,23	0,32	0,46	0,93
	Compartimentada	0,07	0,22	0,29	0,44	0,87
Muros y similares	Compartimentada	0,10	—	—	0,38	0,76

#### 6.5. Edificios de torsión y cortante y efectos de segundo orden

El análisis que presentamos en la sección 6.2 se refiere al edificio de cortante en el que se despreciaban los grados de libertad torsionales. Esto puede ser razonablemente aproximado para estructuras en las que el centro de masa y el centro de torsión coinciden pero no para cualquier estructura. En esta sección introducimos un modelo para edificios sometidos a sismos ligeramente más complicado que el modelo descrito en la sección 6.2. En particular, consideraremos grados de libertad de rotación adicionales que den cuenta de la torsión, cosa que haremos mediante la introducción de matrices de masa y rigidez que den cuenta de la flexibilidad a torsión (un edificio de cortante se comporta como si fuera infinitamente rígido a torsión), puesto que cada piso



introduce un nuevo grado de rigidez torsional (el giro relativo con respecto a los otros pisos). El problema puede resolverse con una matriz de masa ampliada del tipo:

$$[M^*] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_m \\ & & & M_1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & M_2 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 0 & 0 & \dots & M_m \\ & & & & J_1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 0 & J_2 & \dots & 0 \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 0 & 0 & \dots & J_m \end{bmatrix} \quad [6.30]$$

donde  $M_k$  es la masa del piso  $k$  y  $J_k$  es el momento de inercia torsional del piso  $k$  para una planta rectangular de  $a \times b$ ,  $J_k = M_k(a^2+b^2)/12$ , y, como antes,  $m$  es el número de pisos del edificio. En cuanto a la matriz rigidez es del tipo:

$$[K^*] = \begin{bmatrix} [K_x] & 0 & [G_x] \\ 0 & [K_y] & [G_y] \\ [G_x] & [G_y] & [G_\theta] \end{bmatrix} \quad [6.31a]$$

donde  $[K_x]$  y  $[K_y]$  son matrices del tipo [6.5] definido previamente. Mientras que las matrices  $[G_x]$ ,  $[G_y]$  y  $[G_\theta]$  siguen siendo matrices tridiagonales del tipo:

$$[G_\gamma] = \begin{bmatrix} g_1^{(\gamma)} + g_2^{(\gamma)} & -g_2^{(\gamma)} & 0 & \dots & 0 \\ -g_2^{(\gamma)} & g_2^{(\gamma)} + g_3^{(\gamma)} & -g_3^{(\gamma)} & \dots & 0 \\ 0 & -g_3^{(\gamma)} & g_3^{(\gamma)} + g_4^{(\gamma)} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -g_m^{(\gamma)} \\ 0 & \dots & 0 & -g_m^{(\gamma)} & g_m^{(\gamma)} \end{bmatrix} \quad [6.31b]$$

donde  $\gamma \in \{x, y, \theta\}$  y los términos se la matriz vienen dados para pilares cuadrados por:

$$\begin{aligned} g_k^{(x)} &= \sum_{j=1}^{n_k} -\frac{12EI_j}{h_k^3} y_j & g_k^{(y)} &= \sum_{j=1}^{n_k} +\frac{12EI_j}{h_k^3} x_j \\ g_k^{(0)} &= \sum_{j=1}^{n_k} \frac{12EI_j}{h_k^3} (x_j^2 + y_j^2) \end{aligned} \quad [6.31c]$$

Las sumas anteriores se extienden sobre los  $n_k$  pilares de la planta  $k$  y donde  $(x_i, y_i)$  son las coordenadas de los centros de pilares respecto al centro de torsión.

### Ejemplo numérico 3

Calcular las frecuencias propias  $\omega_i$  y los modos de propios de vibración  $A_{(i)}$  del edificio del ejemplo 1 considerando también los grados de libertad torsionales y las dos direcciones independientes de vibración horizontal.

En primer lugar, calculamos las inercias torsionales  $J_i = m_i(a^2 + b^2)/12$ . Recordando que  $m_1 = 46500 \text{ kg}$  y  $m_2 = 41800 \text{ kg}$ , tenemos inmediatamente que  $J_1 = 484000 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  y  $J_2 = 435000 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ , por lo que la matriz de masa ampliada es:

$$[M^*] = 10^4 \begin{bmatrix} 4,65 & 0 & & \\ 0 & 4,18 & & \\ & & 4,65 & 0 \\ & & 0 & 4,18 \\ & & & & 48,4 & 0 \\ & & & & 0 & 43,5 \end{bmatrix}$$

Como los pilares son todos cuadrados e idénticos y además la distribución de cada planta es la misma, el cálculo de matrices de rigidez se simplifica enormemente. En primer lugar, por ser los pilares cuadrados (y por lo tanto no existir diferencia en dirección X e Y), resulta que  $[K_x] = [K_y] = [K]$ , donde esta última es la matriz calculada en el ejemplo 1:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = 10^7 \begin{bmatrix} 5,13 & -3,34 \\ -3,34 & 3,34 \end{bmatrix} \left[ \text{kg}\cdot\text{s}^{-2} \right]$$

En cuanto a las matrices  $[G_x]$  y  $[G_y]$ , basta con calcular las siguientes magnitudes geométricas para cada planta:

$$\begin{aligned} g_k^{(x)} &= \sum_{j=1}^{n_k} -\frac{12E_c I_j}{h_k^3} y_j = \frac{12E_c I}{h_k^3} (2 \cdot (-L) + 2 \cdot (0) + 2 \cdot (+L)) = 0 \\ g_k^{(y)} &= \sum_{j=1}^{n_k} \frac{12E_c I_j}{h_k^3} x_j = \frac{12E_c I}{h_k^3} \left[ 3 \cdot \left( -\frac{L}{2} \right) + 3 \cdot \left( +\frac{L}{2} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Obsérvese que los dos primeros grupos de términos anteriores se anulan debido a la simetría de la estructura que hace que el centro de torsión de la planta coincida con el centro geométrico de la misma. Finalmente:

$$g_k^{(0)} = \sum_{j=1}^{n_k} \frac{12E_c I_j}{h_k^3} (x_j^2 + y_j^2) = \frac{12E_c I}{h_k^3} 2 \cdot \left[ 2 \left( \frac{L^2}{4} + L^2 \right) + \left( 0^2 + \frac{L^2}{4} \right) \right] = \frac{12E_c I}{h_k^3} \left( \frac{11L^2}{4} \right)$$



Teniendo en cuenta que las dimensiones eran  $L = 5,00 \text{ m}$ ,  $h_1 = 4,00 \text{ m}$  y  $h_2 = 3,50 \text{ m}$ , que la inercia de total de los pilares de cada planta era  $I = 6 \cdot (0,3^4)/12 = 4,05 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$  y que  $E_c = 300500 \text{ kp/cm}^2$  tenemos finalmente:

$$\begin{cases} g_1^{(0)} = 1,54 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \\ g_2^{(0)} = 2,29 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$[G_0] = \begin{bmatrix} g_1^{(0)} + g_2^{(0)} & -g_2^{(0)} \\ -g_2^{(0)} & g_2^{(0)} \end{bmatrix} = 10^9 \begin{bmatrix} 3,83 & -2,29 \\ -2,29 & 2,29 \end{bmatrix} \left[ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \right]$$

Obsérvese ahora que la ecuación característica nos ha quedado de la forma:

$$\det \left( \begin{bmatrix} [K] & & \\ & [K] & \\ & & [G_0] \end{bmatrix} - \omega_i^2 \begin{bmatrix} [M] & & \\ & [M] & \\ & & [J] \end{bmatrix} \right) = 0$$

Dada la estructura de bloques, las soluciones de esta ecuación son las frecuencias calculadas en el ejemplo 1 mediante la ecuación  $\det([K] - \omega^2[M]) = 0$ , y las nuevas frecuencias calculadas a partir de  $\det([G_0] - \omega^2[J]) = 0$ . Si recopilamos todas estas frecuencias naturales hemos visto que los principales modos de vibración del edificio son:

$$\begin{array}{lll} \omega_1 = \omega_2 = & 13,36 \text{ s}^{-1} & (\text{cortante}) \\ \omega_3 = & 37,75 \text{ s}^{-1} & (\text{torsión}) \\ \omega_4 = \omega_5 = & 41,52 \text{ s}^{-1} & (\text{cortante}) \\ \omega_6 = & 108,40 \text{ s}^{-1} & (\text{torsión}) \end{array}$$

Puede verse que la frecuencia fundamental sigue siendo la que calculamos a cortante. De hecho, suele suceder que para edificios con disposición simétrica que los modos de vibración torsionales pueden ignorarse sin alterar demasiado los resultados de haberlos tenido en cuenta. El cálculo de los modos propios normalizados para los modos de torsión conduce a:

$$\begin{bmatrix} A_{(3)5} & A_{(6)5} \\ A_{(3)6} & A_{(6)6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 1,0000 \\ 1,3713 & -0,8114 \end{bmatrix}$$

Si ahora calculamos los coeficientes de participación:

$$Q_1 = \frac{\sum_i M_i A_{(1)i}}{\sum_i M_i A_{(1)i}^2} = \frac{(4,651,0000 + 4,181,3713) + 0 + 0}{4,651,0000^2 + 4,181,3713^2 + 0 + 0} = 0,85266$$

$$Q_2 = \frac{M_1 A_{(2)1} + M_2 A_{(2)2}}{M_1 A_{(2)1}^2 + M_2 A_{(2)2}^2} = \frac{4,651,0000 - 4,180,8640}{4,651,0000^2 + 4,180,8640^2} = 0,1336$$

$$\omega_3 = 37,75 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_4 = 108,40 \text{ s}^{-1}$$

## 6.6. Recomendaciones constructivas

Con respecto al diseño sísmico, podemos agrupar las edificaciones más comunes en cinco tipologías básicas:

- a) *Esqueletal*. Adecuada.
- b) Con núcleo central. Adecuada.
- c) *Con pantallas de cortante*. Adecuada, hay que comprobar problemas de compatibilidad de deformaciones.
- d) *Unión isostática de elementos prefabricados*. Adecuada, hay que comprobar que no se convierta en mecanismo si ocurren plastificaciones.
- e) Placas y pilares. No adecuada.

Algunos defectos comunes y perjudiciales del diseño sísmico implican una de estas situaciones:

- Forma no simétrica de la planta, de tal manera que el centro de masa (CM) y el centro de rigidez (CR) no coinciden. Eso obliga a tomar en consideración los grados de libertad torsionales.
- Forma rectangular excesivamente alargada, lo cual implica que la distancia entre el CM y el centro geométrico pueda llegar a ser grande.<sup>47</sup>
- Columnas de diferente altura.
- Columnas unidas al forjado indebidamente.
- Nudos soporte-forjado que plastifican con facilidad.
- Núcleo rigidizador en el perímetro (como cuando se colocan unos huecos de ascensor sobre uno de los lados del edificio).
- Isostaticidad que bajo ciertas situaciones produce plastificaciones y convierte a la estructura en un mecanismo.

Otros factores potencialmente peligrosos no siempre previsibles o evitables en el diseño son:

- Suelos blandos, que filtran las frecuencias altas y pueden dar lugar a ondas superficiales del mismo período que la vibración propia del terreno, lo que provoca una vulnerabilidad altísima de los edificios con modos propios cercanos a esta frecuencia. Además sobre terrenos blandos la duración del sismo es mayor por un menor amortiguamiento.
- Rigidización no intencionada.

Hoy en día se admite que un diseño sísmico inteligente contempla la posibilidad de que el ELU de resistencia última sea sobrepasado y en ese supuesto se prevén zonas de plastificación o absorción inelástica en los lugares adecuados y previstos de antemano.

<sup>44</sup> Para una región geográfica, los daños materiales (económicamente cuantificables) pueden estimarse a partir del PIB, mientras que los daños personales son proporcionales a la población total de la región.

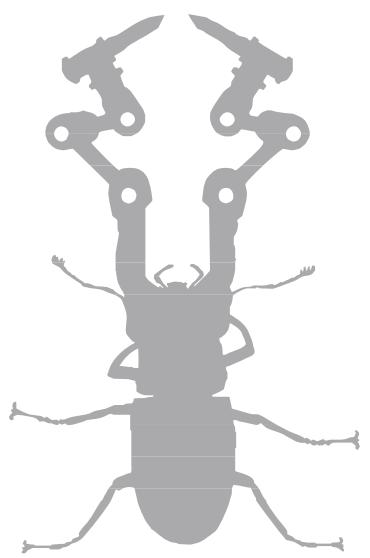
<sup>45</sup> Debido a que el segundo término de las ecuaciones [4.9] no es idénticamente 0, las funciones  $x_i(t)$  serán algo más complicadas que las exponenciales del tipo  $e^{-i\omega t}$ ; de hecho, las  $x_i(t)$  vendrán dadas por la integral de Duhamel.



---

<sup>46</sup> Se considera que dos frecuencias consecutivas  $\omega_m$  y  $\omega_n$  tales que  $\omega_m < \omega_n$  son cercanas si  $\omega_n < \omega_m \cdot (1 + 0,10)$ .

<sup>47</sup> Naturalmente eso dependerá de la distribución de pilares y otros elementos rigidizadores en cada planta. Sin embargo, es esperable que una muestra aleatoria de edificios cuadrados tengan una varianza de la distancia entre ambos centros menor que la de una muestra de edificios rectangulares.







## Apéndice I.

# Ecuación de la curva elástica

La ecuación de la curva elástica es una ecuación diferencial que representa la deformación de una pieza prismática bajo la acción de esfuerzos de flexión. Su origen se debe al estudio de la flexión por parte del ingeniero francés Claude-Louis Navier, a principios del siglo XIX.

### A.1. Deducción de la ecuación de la curva elástica

La teoría de la flexión de Navier-Bernoulli presupone que los desplazamientos de cualquier punto de una pieza alargada están relacionados con los desplazamientos y giros del eje baricéntrico de la misma. La expresión del radio de curvatura de una curva proporcionada por la geometría diferencial, junto con la teoría de Navier-Bernoulli para la flexión de vigas, permiten deducir la ecuación de la curva elástica.

Supondremos que una pieza prismática inicialmente recta se deforma por efecto de las cargas aplicadas y designaremos como  $v(x)$  los desplazamientos verticales que experimentan la fibra o el eje neutro de la viga. Las hipótesis básicas de la teoría de Navier, que relacionan la forma deformada con las tensiones y deformaciones existentes son:

- H1) En una pieza prismática flexionada existe una fibra, o eje neutro, formada por puntos sobre los cuales la tensión es nula. La ecuación de la elástica es precisamente la que da la forma deformada de esta línea neutra.
- H2) La pieza se comporta elásticamente, por lo que tensiones ( $\sigma_x$ ) y deformaciones ( $\epsilon_x$ ) son proporcionales.
- H3) La hipótesis de Navier (hipótesis cinemática de la flexión) establece que las tensiones y deformaciones longitudinales son proporcionales a la distancia perpendicular a la fibra neutra, siendo en particular la deformación longitudinal sobre la línea neutra nula.



De estas tres hipótesis puede deducirse geométricamente que el momento flector es proporcional al radio de curvatura  $\rho$ . Las hipótesis anteriores se resumen en numerosos textos, habitualmente y de manera informal, así: “*Dos secciones transversales planas y arbitrariamente cercanas antes de la deformación continuarán siendo planas después de la deformación (y arbitrariamente cercanas), pero entonces formarán un ángulo  $\Delta\theta_0$  (relacionado con la diferencia de giros en la intersección de eje con dichas secciones)*”. Expresado cuantitativamente:

$$\begin{aligned}\Delta\theta_0 &= \frac{L_0}{\rho_m} = -\frac{\Delta L}{y} \Rightarrow \frac{1}{\rho_m} = -\frac{\Delta L}{yL_0} \Rightarrow \\ \frac{1}{\rho} &= \lim_{L_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\rho_m} = -\lim_{L_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{yL_0} = \frac{\varepsilon_x}{y} = \frac{\sigma_x}{Ey} = \frac{M_z}{EI_z}\end{aligned}\quad [\text{A.1}]$$

donde  $y$  es la distancia al eje neutro;  $L_0$  la longitud de un tramo de viga una vez curvada y medida sobre la fibra neutra; y  $\Delta\theta_0$  el ángulo subtendido<sup>48</sup> en la longitud  $L_0$ . Comparando la última de estas dos expresiones con la expresión del radio de curvatura de la geometría diferencial se tiene que:

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d\theta}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{d\theta}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad [\text{A.2}]$$

La última expresión se ha obtenido tras observar que la pendiente de la tangente a la curva elástica  $\tan \theta$  y la longitud de la propia curva elástica están relacionadas con la derivada en cada punto de dicha curva:

$$\theta(x) = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad [\text{A.3}]$$

Combinando la ecuación [A.2] con [A.1] se obtiene precisamente la ecuación de la curva elástica:

$$\frac{d^2v}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\rho} = \frac{M_f(x)}{EI_f} \quad [\text{A.4a}]$$

Usualmente, en las aplicaciones prácticas se usa una aproximación de la ecuación anterior:

$$\frac{d^2v}{dx^2} \approx \frac{M_f(x)}{EI_f} \quad [\text{A.4b}]$$

A esta expresión aproximada podríamos haber llegado directamente mediante una deducción más basada en la teoría de la elasticidad, usando hipótesis análogas a las de Love-Kirchhoff para placas. Este conjunto de hipótesis sobre la deformación por flexión de piezas prismáticas en el plano son precisamente hipótesis de Navier-Bernoulli:

- H1) La pieza se comporta elásticamente.
- H2) El desplazamiento vertical  $v = u_y$  de los puntos del eje neutro sólo dependen de la distancia vertical sobre el eje neutro.
- H3) Los puntos del eje neutro sólo tienen desplazamiento vertical y giro.
- H4) La componente de tensión  $\sigma_y$  es nula para todos los puntos.
- H5) Los segmentos rectos perpendiculares al eje neutro antes de la deformación, después de la deformación siguen siendo segmentos rectos y perpendiculares al eje neutro curvado.

De las hipótesis H2 y H3 se deducen las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} \frac{du_y}{dx} = 0 \\ u_x(x, 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x(x, 0) = -y\theta_z(x) \\ u_y(x, y) = v(x) \end{cases} \quad [A.5]$$

La hipótesis H5 implica que el giro debe cumplir que:

$$\tan \theta_x(x) = \frac{dv}{dx} \Rightarrow \begin{cases} u_x(x, 0) = -y \arctan\left(\frac{dv}{dx}\right) \approx -y \frac{dv}{dx} \\ u_y(x, y) = v(x) \end{cases} \quad [A.6]$$

Si ahora utilizamos las hipótesis H1 y H5 para el cálculo de las deformaciones y tensiones se llega a que:

$$\begin{cases} \frac{du_y}{dx} = 0 \\ u_x(x, 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x(x, 0) = -y\theta_z(x) \\ u_y(x, y) = v(x) \end{cases} \quad [A.7]$$

Al calcular las deformaciones elásticas, las tensiones y el momento flector se llega:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx} = -y \frac{d^2v}{dx^2} \Rightarrow \sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -Ey \frac{d^2v}{dx^2} \quad [A.8]$$

Si multiplicamos ahora por  $y$  e integramos, se tiene:

$$\int_{\Sigma} -y\sigma_{xx} dy dz = \int_{\Sigma} Ey^2 \frac{d^2v}{dx^2} dy dz \Rightarrow M_z = EI_f \frac{d^2v}{dx^2} \quad [A.9]$$



## A.2. Resolución de la curva elástica

La ecuación [A.4a] con  $M_f(x) = -Py(x)$  y las condiciones de contorno para una viga biarticulada lleva al problema siguiente:

$$\begin{cases} \frac{d^2v}{dx^2} \left[ 1 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{P}{EI_f} v = 0 \\ v(0) = 0 \quad v(L) = 0 \end{cases} \quad [\text{A.10}]$$

Esta ecuación puede integrarse expresando la solución general en términos de integrales elípticas de primera y segunda especie y dos constantes de integración:

$$\frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{1 + \omega^2 C_1}} \left( (1 + \omega^2 C_1) E_k \left( \frac{\omega y(x)}{\sqrt{2 - 2\omega^2 C_1}} \right) - F_k \left( \frac{\omega y(x)}{\sqrt{2 - 2\omega^2 C_1}} \right) \right) = x + C_2 \quad [\text{A.11}]$$

Introducidos los parámetros  $\omega$  y  $k$  y siendo las funciones  $E_k(\cdot)$  y  $F_k(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{P}{EI} & k &= \sqrt{\frac{\omega^2 C_1 - 1}{\omega^2 C_1 + 1}} \\ F_k(\eta) &= \int_0^\eta \frac{du}{\sqrt{1-u^2} \sqrt{1-k^2 u^2}} & E_k(\eta) &= \int_0^\eta \frac{\sqrt{1-k^2 u^2}}{\sqrt{1-u^2}} du \end{aligned} \quad [\text{A.12}]$$

se tiene finalmente la siguiente expresión para la solución particular de [A.10]:

$$\sqrt{4 - \omega^2 \delta^2} E_k \left( \frac{y(x)}{\delta} \right) - \frac{2}{\sqrt{4 - \omega^2 \delta^2}} F_k \left( \frac{y(x)}{\delta} \right) = \omega x + C_2 \quad [\text{A.13}]$$

$$\delta = y \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{\sqrt{2 - 2C_1 \omega^2}}{\omega} \quad k = \sqrt{\frac{\omega^2 \delta^2}{4 - \omega^2 \delta^2}} \quad [\text{A.14}]$$

## A.3. Inestabilidad elástica

Para ilustrar el fenómeno de la inestabilidad elástica estudiaremos el proceso de aumento de la carga axial desde cero hasta la carga crítica. Como geometría consideraremos una barra biarticulada. Y consideraremos que, por inexactitud en la alineación de las cargas en los extremos, existe un pequeño momento flector muy pequeño,  $m_e$ . Por todo ello, la ecuación de gobierno (linealizada) es:

$$\begin{cases} \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI_f} v = \frac{m_\epsilon}{EI_f} \\ v(0) = 0 \quad v(L) = 0 \end{cases} \quad [A.15]$$

La ecuación anterior tiene solución para cualquier valor de  $P < P_{cr}$  y viene dada por:

$$v_1(x) = -\left(\frac{m_\epsilon}{P}\right) \left[ \left[1 - \cos(\omega L)\right] \frac{\sin(\omega x)}{\sin(\omega L)} + \left[1 - \cos(\omega x)\right] \right], \quad \omega := \sqrt{\frac{P}{EI_f}} \quad [A.16]$$

El desplazamiento es máximo en el centro de la barra  $x=L/2$  y viene dado por:

$$\delta_{1,\omega} = v\left(\frac{L}{2}\right) = -\left(\frac{m_\epsilon}{P}\right) \left[ 1 - \frac{2 \sin(\omega L/2)}{\sin(\omega L)} \right] \quad [A.17]$$

En condiciones ideales,  $m_\epsilon = 0$  y dicho desplazamiento sería cero. Sin embargo, cuando  $m_\epsilon > 0$  el desplazamiento debido a la inexactitud de aplicación de las cargas se ve aumentado respecto al desplazamiento con  $P = 0$  en un factor  $f_1$  dado por:

$$f_1 = \frac{\delta_{1,\omega}}{\delta_{1,0}} = \frac{8}{\omega^2 L^2} \left[ \frac{2 \sin(\omega L/2)}{\sin(\omega L)} - 1 \right] \geq 1 \quad [A.18]$$

El factor anterior no está acotado y crece sin límite para  $\omega L \rightarrow \pi$ , es decir, que las pequeñas imperfecciones producen inestabilidad, siendo el límite de estabilidad:

$$\omega L = L \sqrt{\frac{P}{EI_f}} < \pi \Rightarrow P < \pi^2 \frac{EI_f}{L^2} \quad [A.19]$$

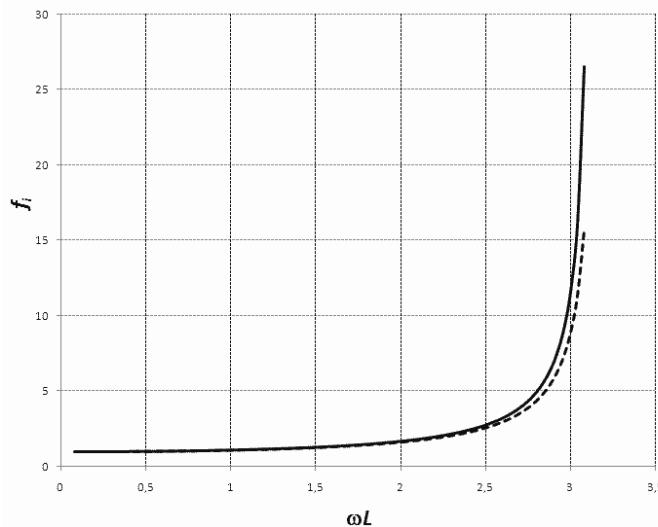
El mismo cálculo puede hacerse considerando imperfecciones de fabricación, por ejemplo una pequeña curvatura de la viga de la forma  $y_0(x) = \epsilon x(L-x)$ :

$$v_2(x) = \frac{\epsilon}{\omega^2} \left[ \left[2 + \omega^2 x(L-x)\right] - \left[1 - \cos(\omega L)\right] \frac{\sin(\omega x)}{\sin(\omega L)} - 2 \cos(\omega x) \right] \quad [A.20]$$

Y el factor multiplicativo  $f_2$  de la curvatura viene dado en este caso por:

$$f_2 = \frac{\delta_{2,\omega}}{\delta_{2,0}} = \frac{48}{5} \left[ \frac{8 - (8 + \omega^2 L^2) \cos(\omega L/2)}{\omega^2 L^2 \cos(\omega L/2)} \right] \geq 1 \quad [A.21]$$

Aunque las expresiones [A.18] y [A.21] son diferentes, el límite de estabilidad es el mismo, dado por [A.19]. La siguiente gráfica muestra los factores  $f_1$  y  $f_2$ :



donde la línea punteada corresponde a  $f_2$  y la línea continua a  $f_1$ .

---

<sup>48</sup> Suponemos que la fibra neutra forma un arco que para longitudes pequeñas puede aproximarse por un arco de circunferencia; en ese caso  $\Delta\theta_0$  es precisamente la medida del ángulo subtendido por dicho arco circular aproximante.



## Bibliografía

### 8.1. Artículos

- **J. Brinch Hansen** (1961): “Una Fórmula General para Capacidad de Carga”, Geoteknisk Institut.
- **L. Prandtl** (1920): “Über die Härte plastischer Körper”, Nachr. des Ges. der Wiss. Göttingen.
- **K. Terzaghi** (1943): “Theoretical soil mechanics”, Wiley, Nueva York.
- **Miguel A. Serra, Iñigo Puerta y Aitziber López** (1999): “Estabilidad de Estructuras Tubulares Especiales Monocapa”, IV Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, [<http://www.tecnun.es/estructuras/Paper01.pdf>].

### 8.2. Normas

- CTE-09 *Código Técnico de la Edificación* (2009): Ministerio de Obras Públicas, ISBN 978-84-937208-9-6 [<http://www.codigotecnico.org/index.php?id=33>]
- EHE-08 *Instrucción de Hormigón Estructural* (2008): Ministerio de Obras Públicas, ISBN 978-84-498-0825-8.  
[[http://www.fomento.es/MFOM/LANG\\_CASTELLANO/DIRECCIONES\\_GENERALES/ORGANOS\\_COLEGIADOS/CPH/instrucciones/EHE2007/](http://www.fomento.es/MFOM/LANG_CASTELLANO/DIRECCIONES_GENERALES/ORGANOS_COLEGIADOS/CPH/instrucciones/EHE2007/)]

### 8.3. Bibliografía convencional

- **R. Argüelles** (1975): *La Estructura Metálica Hoy*, Bellisco, Madrid, ISBN 84-600-5672-4.
- **J. Calavera** (1999): *Proyecto y Cálculo de Estructuras de Hormigón*, Intemac, Madrid, ISBN 84-88764-05-7.
- **M. A. Garcimartín** (1998): *Edificación Agroindustrial*, Mundi-Prensa, Barcelona, ISBN 84-7114-746-7.
- **S. Monleón Cremades** (1999): *Análisis de Vigas, Arcos, Placas y Láminas*, UPV, Valencia, ISBN 84-7721-769-6.
- **P. J. Montoya, A. G. Messeguer y F. Morán** (2000): *Hormigón Armado*, Gustavo Gili, Madrid, ISBN 84-2521825-X.



## índice analítico

- abolladura, 72, 80, 82, 85, 121  
alabeo, 15, 21, 22, 26, 34, 36, 39, 78, 79, 95  
amortiguamiento modal, 187  
anclaje de armaduras, 138  
arco, 13, 26  
área reducida de cortante, 18  
asentamiento diferencial, 126, 128, 138  
cambio de base, 34, 36, 37, 54  
capacidad portante, 128  
carga crítica  
    de Euler, 60, 70  
coeficiente de balasto, 126, 127, 143, 144, 148  
coeficiente de empotramiento, 66, 67, 70, 71, 75  
coeficiente de participación modal, 187, 194, 195  
cohesividad, 127  
CTE, 53, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 95, 96, 209  
curva elástica, 13, 16, 17, 18, 59, 60, 63, 68, 203  
daño producido, 182  
ecuación de compatibilidad, 16  
efectos de segundo orden, 58  
elasticidad  
    material elástico lineal, 57  
empuje
- activo, 163, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171  
coeficiente de, 165, 168, 170  
pasivo, 164, 165, 171, 174, 176, 178  
ensamblaje, 13, 34  
equivalencia estática, 29  
esbeltez, 72  
    cálculo de la, 73  
    límite, 73  
    natural, 21, 62, 79, 95  
    reducida, 73, 76, 77  
    torsional, 77  
espectro de respuesta, 189  
estructura  
    de barras, 13, 36  
    definición, 11  
    hiperestática, 12  
    traslacional, 75  
fibra neutra, 203, 205  
fórmula de Collignon, 76  
fórmula de Navier, 76, 107  
frecuencia  
    fundamental, 186, 198  
    propia, 186, 187, 188, 191, 192, 197  
fuerzas nodales equivalentes, 30, 32, 183  
grados de libertad, 11, 12, 53, 145, 148, 184, 185, 195, 197, 199  
hipótesis de Love-Kirchhoff, 101  
hipótesis de Mindlin-Reissner, 101



- hundimiento, 126, 127, 128, 138, 147, 148, 149, 150, 152, 157  
inestabilidad elástica, 58, 93, 154, 206  
instraslacional, 66  
integral de Duhamel, 189, 199  
integral elíptica, 60  
interal elíptica, 206  
Lagrange  
    desarrollo de Schneider-Lagrange, 61  
    ecuación de, 101  
matriz de amortiguamiento, 183, 185  
matriz de masa, 183, 184, 185, 187, 196, 197  
matriz de rigidez  
    elemental, 13, 14, 18, 22, 142, 146  
    global, 13, 33, 34, 35, 36, 52, 88, 184  
método de Kirchhoff, 104  
método de Marcus, 101, 114, 115, 117, 122  
método omega, 62, 95  
movimiento de sólido rígido, 38, 39  
multiplicidad  
    de autovalres, 38  
nudo  
    articulado, 12, 28, 93  
    rígido, 14, 28, 71  
pandeo  
    carga crítica, de, 54, 58, 60, 61, 64, 65, 66, 69, 78, 79, 82, 206  
    longitud, de, 64, 66, 70, 75, 79, 150  
    peligrosidad sísmica, 181, 182  
placas  
    circulares, 117  
predimensionando, 62  
punzonamiento, 137, 138, 139, 142  
riesgo sísmico, 182  
rigidez  
    axial, 14, 15, 50, 85, 86, 89  
    cortante (frente a), 16  
    cortante-flexión, 18  
    flexional, 15  
    flexional de placas, 108, 119  
    torsional, 22  
rigidizador, 80, 83  
*snap through*, 93  
teoremas de Mohr, 13, 18  
teoría de Navier-Bernouilli, 13, 19, 203  
terreno cohesivo, 127  
torsión, 13, 14, 22, 23, 24, 26, 76, 78, 79, 95, 100, 195, 197, 198  
alabeada pura, 25  
Saint-Venant pura, de, 13, 22, 26  
valor propio, 38  
vuelco, 126, 138, 139, 140  
    coeficiente al, 140  
    momento de, 140  
zapata  
    flexible, 130, 135, 140  
    rígida, 150