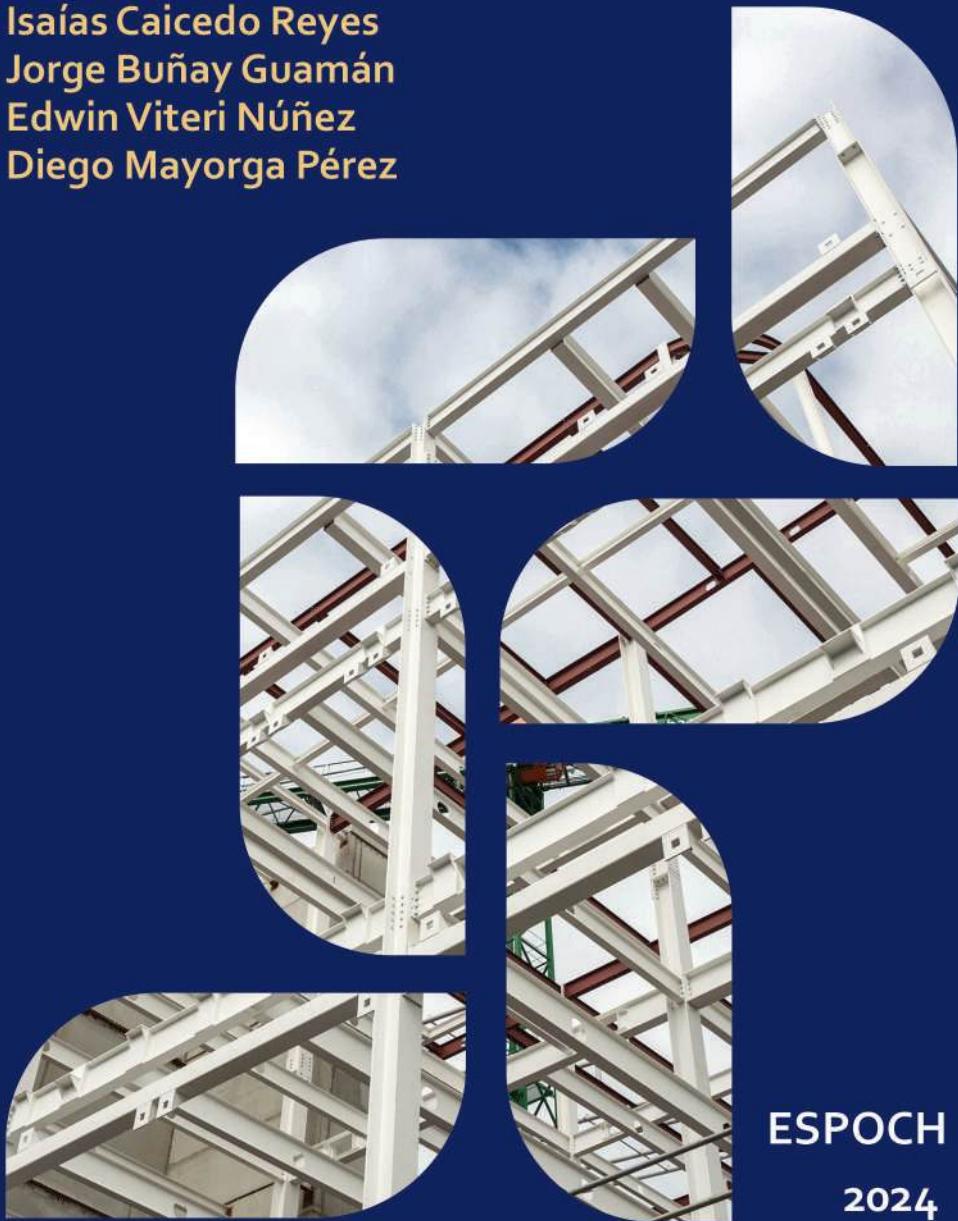


Mecánica de materiales

Teoría y ejercicios

Isaías Caicedo Reyes
Jorge Buñay Guamán
Edwin Viteri Núñez
Diego Mayorga Pérez



ESPOCH
2024

MECÁNICA DE MATERIALES TEORÍA Y EJERCICIOS

MECÁNICA DE MATERIALES

TEORÍA Y EJERCICIOS

**Isaías Caicedo Reyes
Jorge Buñay Guamán
Edwin Viteri Núñez
Diego Mayorga Pérez**



**Decanato
de Publicaciones**



epoch

Mecánica de materiales. Teoría y ejercicios

© 2024 Caicedo I.

Buñay J.

Viteri E.

Mayorga D.

© 2024 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Panamericana Sur, kilómetro 1 ½

Instituto de Investigaciones

Decanato de Publicaciones

Riobamba, Ecuador

Teléfono: 593 (03) 2 998-200

Código Postal: EC0600155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego
(*peer review*)

Corrección y diseño:

La Caracola Editores

Publicado en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio,
sin la previa autorización por escrito de los propietarios del
Copyright

CDU: 621

Mecánica de Materiales Teoría y Ejercicios

Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo Instituto de Investigaciones

Decanato de Publicaciones, Año 2024

198 pp. vol: 1 17 x 24 cm

ISBN: 978-9942-45-157-6

1. Ingeniería mecánica

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	7
CAPÍTULO I	8
1. ESFUERZOS	8
1.1 Introducción	8
1.2 Conceptos fundamentales	12
1.3 Repaso de métodos estáticos	13
1.4 Tipos de esfuerzos	15
1.4.1 Esfuerzos normales	15
1.4.2 Esfuerzos cortantes	17
1.5 Esfuerzo de aplastamiento	20
1.6 Esfuerzo en un plano oblicuo bajo carga axial	21
1.7 Esfuerzos bajo condiciones generales de carga. Componentes de esfuerzo	24
EJERCICIOS PROPUESTOS	76
CAPÍTULO II	82
2. DEFORMACIÓN	82
2.1 Introducción	82
2.2 Ensayo de tensión y compresión	83
2.3 Deformación normal bajo carga axial	84
2.4 Diagrama Esfuerzo-Deformación Unitaria	86
2.4.1 Descripción del diagrama esfuerzo-deformación para materiales dúctiles	89

2.4.2 Diagrama esfuerzo deformación verdadero	94
2.5 Ley de Hooke	95
2.6 Teorema de Williot	102
2.7 Efecto de la temperatura en la deformación	113
EJERCICIOS PROPUESTOS	127
 CAPÍTULO III	 133
3. TORSIÓN	133
3.1 Introducción	133
3.2 Análisis de esfuerzos en un sección circular	134
3.3 Ley de Hooke	138
PROBLEMAS PROPUESTOS	160
 CAPÍTULO IV	 165
4. COLUMNAS	165
4.1 Introducción	165
4.2 Carga Crítica	166
EJERCICIOS PROPUESTOS	186
 GLOSARIO DE TÉRMINOS	 192
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	195

INTRODUCCIÓN

La Mecánica de materiales es un área de la mecánica que estudia la relación existente entre las fuerzas externas y las fuerzas internas que actúan sobre un sólido deformable, ciertas consideraciones permiten simplificar el estudio de estos fenómenos y aplicarlos de una forma un tanto más sencilla.

El texto abarca consideraciones recogidas a través de la experiencia desarrollada en el ámbito profesional y de enseñanza universitaria, buscando una integración entre las consideraciones teóricas, prácticas y los ensayos estandarizados utilizados en mecánica de materiales.

La obra se compone de cuatro capítulos los cuales pretenden sentar las bases para el estudio de otros temas avanzados en la mecánica de materiales y que son fundamentales para el proceso de diseño mecánico.

CAPÍTULO I

1. ESFUERZOS

1.1 INTRODUCCIÓN

Todo elemento estructural o de máquina está sometido a esfuerzos y deformaciones producidos por cargas externas aplicadas al mismo, por lo que la resistencia de materiales o mecánica de materiales se encarga de dotar al futuro Ingeniero de los conocimientos necesarios para el análisis y diseño de las diversas máquinas y estructuras.

El Ingeniero debe asegurar que las estructuras o elementos de las máquinas cumplan el objetivo con el que fueron diseñados, para lo cual es necesario calcular las fuerzas internas que se producen y que serán las causantes de producir deformaciones y fractura del material;

Se conoce que una fuerza interna produce un esfuerzo en el elemento, el cual es denominado esfuerzo de trabajo.

El esfuerzo de trabajo no debe ser mayor al esfuerzo permisible que tenga el elemento, el cual depende del material y de su sección; entonces, el Ingeniero tiene que garantizar que las deformaciones se encuentren dentro de los límites permisibles para evitar la fractura o falla y una deformación excesiva del elemento analizado.

El estudio de la resistencia de materiales se basa en dos partes: teórica y experimental; la teórica explica los fundamentos, leyes e hipótesis en las que se rige nuestro estudio, así como también el análisis y el cálculo de los diferentes problemas presentes en el transcurso del libro; mientras que la experimental estudia la resistencia de materiales mediante ensayos destructivos, la cual se basa en normativas que establecen los métodos para ejecutar los ensayos entre las cuales se utilizarán, ASTM E-8, ASTM E 143, ASTM E 9, ASTM E23.

Para el estudio de la resistencia de materiales el concepto de equilibrio es fundamental es así que las ecuaciones de la estática Ecuación (1.1) serán fundamentales aplicar a cada uno de los elementos en estudio, ya que la determinación de las fuerzas sobre los sistemas será el punto de partida hacia para la resistencia de materiales.

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M = 0 \quad (1.1)$$

La resistencia de materiales analiza la acción de las fuerzas en base a su punto de aplicación y la configuración de la misma, a fin de determinar el esfuerzo que produce y como consecuencia la deformación que se genera, esto permite definir si los valores obtenidos son aceptables o buscar otras consideraciones.

El término llamado “*factor de seguridad*” es un índice el cual, al ser aplicado sobre esfuerzos previstos en una sección del material en análisis o diseño, incrementa la capacidad de resistencia a los esfuerzos previstos, permitiendo que, en caso de haber un esfuerzo adicional con contemplado, el material del elemento en consideración no sufra daños permanentes o considerables, usualmente se contemplan valores superiores a 1.05. Factores de seguridad están sugeridas en diferentes normas según el tipo de trabajo, este factor se define como:

$$n = \frac{\sigma_{\text{resistente}}}{\sigma_{\text{actuante}}} \quad (1.2)$$

Donde:

n = factor de seguridad

$\sigma_{\text{resistente}}$: Esfuerzo que depende del tipo del material seleccionado y se encuentra en tablas de propiedades de materiales y en las normas técnicas.

σ_{actuante} : Esfuerzo que hallamos en el cálculo.

Para el cálculo y diseño de máquinas y estructuras, existen normativas establecidas, los cuales indican los parámetros de trabajo de acuerdo a su uso, por ejemplo, DIN-743 para el diseño de ejes, Diseño de vigas compuestas según ANSI/AISC 360-16, diseño de engranajes ANSI/AGMA 2101-D04. Los ensayos para determinar las propiedades mecánicas de un material se encuentran establecidos en las normativas respectivas, y corresponden generalmente a ensayos destructivos que se realizan en laboratorios de resistencia de materiales.

En el Ecuador el Servicio Ecuatoriano de Normalización (INEN) establece la normativa referencial para los ensayos de laboratorio, por ejemplo; NTE INEN 102, NTE-INEN 1053, NTE INEN 123, NTE INEN 108, entre otras las mismas que pueden consultarse según el requerimiento en el sitio oficial del INEN.

Existe alrededor del mundo diferentes entidades, encargadas de generar normativa para diferentes sectores de la industria a los cuales se puede recurrir en función de la necesidad y la localización, en ciertas ocasiones son una fuente de referencia y consulta para problemáticas que no se encuentran normadas en el ámbito nacional.

Instituciones Norteamericanas que generan normativa

AISI.- (American Iron and Steel Institute) Instituto Americano del Hierro y el Acero.

ASME.- (American Society of Mechanical Engineers) Sociedad Americana de Ingenieros Mecánicos.

ASTM.- (American Society of testing Materials) Sociedad Americana para prueba de Materiales.

AWS.- (American Welding Society) Sociedad Americana de soldadura.

S.A.E.- (Society American of Engineers) Sociedad Americana de Ingenieros.

NEMA.- (Nacional Electrical Manufacturers) Asociación Nacional de Fabricantes de Aparatos Eléctricos.

ANSI.- (American Nacional Standars Institute) Instituto Nacional Americano de Estándares.

NIST.- (National Institute of Standards and Technology) Instituto Nacional de Normas y Tecnología.

ASA.- (American Standards Association) Asociación Americana de Estandarización.

Instituciones Europeas que generan normativa

DIN.- (Deutsche Industrie Norm) Normas Industriales de Alemania.

BS.- (British Institution) Instituto Británico de Estándares.

AFNOR.- Organización Nacional Francesa para la Estandarización.

UNI.- Organización de Normas Italiana.

ISO.- (International Organization for Standardization) Organización Internacional para la estandarización.

La resistencia de materiales con la finalidad de simplificar su estudio plantea ciertas hipótesis que son suposiciones hechas a partir de datos, las cuales sirven para simplificar el análisis y el cálculo para un determinado problema. (Hibbeler, 2010)

Estas hipótesis son:

- Los materiales se consideran homogéneos: un material se considera homogéneo cuando su composición, la distribución de las fases y las propiedades mecánicas sean las mismas a lo largo de todo el material.
- Los materiales se consideran continuos: al no presentar discontinuidades o poros en su geometría, considerando como si fuese un material ideal.
- Los materiales se consideran isótropos: se supone que sus propiedades son iguales en todas las direcciones.
- No se tienen en cuenta las fuerzas internas de tipo interatómico existentes en los materiales: solo se consideran las fuerzas causadas por la aplicación de fuerzas externas.
- Principio de superposición: los esfuerzos combinados sobre un elemento son iguales a la suma de los efectos individuales de cada una de las fuerzas. Siendo válido únicamente en la zona elástica.
- Principio de Saint Venant: establece que para un elemento sometido a fuerzas externas la distribución de las fuerzas a lo largo del elemento, a partir de una distancia suficiente de los puntos de aplicación de las fuerzas, será uniformemente distribuida. Ver Fig. 1.1.

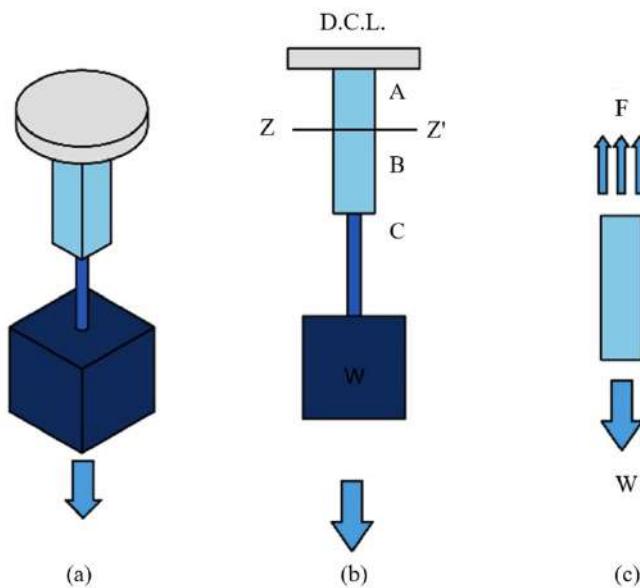


Fig. 1.1. Principio de Saint Venant. a) Vista isométrica del elemento.
b) DCL del elemento. c) Fuerzas distribuidas en el elemento.

1.2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Resistencia: capacidad de los cuerpos para resistir las fuerzas y esfuerzos aplicados sin que estas generen deformaciones plásticas o permanentes. La resistencia mecánica de un cuerpo depende de su material y de su geometría.

Rigidez: se define como la capacidad de un cuerpo de absorber deformación dentro de su comportamiento elástico, como consecuencia de la aplicación de una fuerza o un esfuerzo.

Ensayo destructivo: es aquel ensayo donde el elemento ensayado sufre algún daño, la cual puede ser una fractura, deformación, entre otros.

Fractura: es la separación del material en dos o más partes producto de algún tipo de esfuerzo, se produce al sobrepasar la zona de fluencia ya que el material no es capaz de resistir más.

Deformación: es el cambio en la forma del elemento, como consecuencia de la acción de una fuerza externa y tratar de adaptarse a ella.

Esfuerzo: Es el efecto de una fuerza actuando sobre determinada área, donde el tipo esfuerzo dependerá de la configuración que tengan estas dos variables.

Torsión: es el efecto que se produce como consecuencia de aplicar un momento sobre el eje longitudinal de un elemento. (Hibbeler, 2010)

Eslabón: elemento de conexión que se usa para transmitir movimiento y fuerzas.

1.3 REPASO DE MÉTODOS ESTÁTICOS

- Determinar la fuerza P necesaria para que la ménsula A B C pueda soportar las 2 cargas puntuales de 80 kg y 75 kg; además, determinar las reacciones en el pasador B.

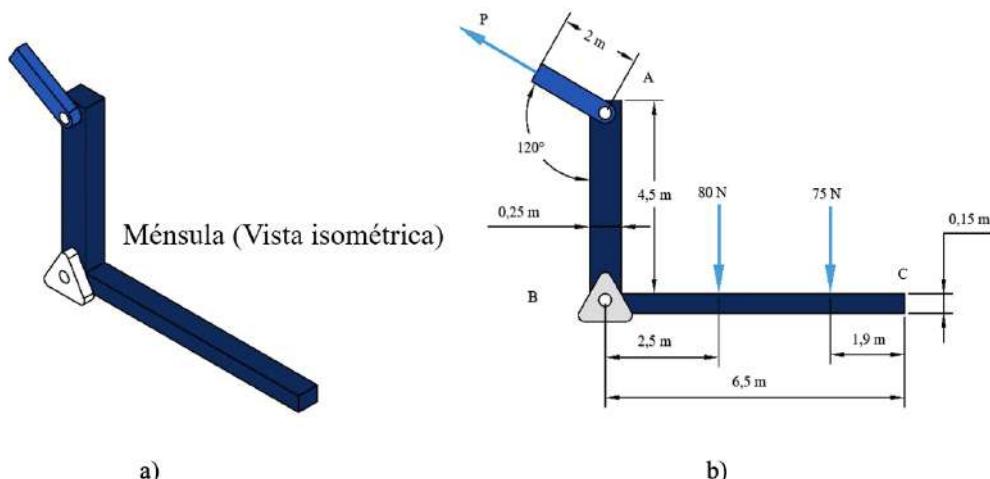
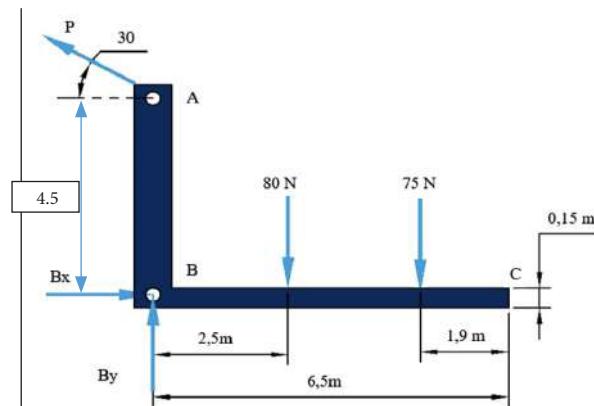


Fig. 1.2. Ménsula. a) Vista isométrica. b) DCL de la ménsula.

Desarrollo:

Primero se realiza un diagrama de cuerpo libre en el cual se expresan todas las cotas y fuerzas para facilitar el cálculo, como se muestra en la Fig. 1.2 a.

DCL



c) Dimensiones de la Ménsula

Para facilitar el cálculo y encontrar las variables restantes de manera más rápida, se debe aplicar la sumatoria de momentos en el punto donde hay la mayor cantidad de incógnitas.

Las ecuaciones de equilibrio contemplan que la sumatorias de fuerzas y la sumatoria de momentos deben ser iguales a cero, las sumatorias de fuerzas se analizan en X e Y, la sumatoria de momentos en el plano X-Y es igual a cero, por lo que existen tres ecuaciones a considerar.

Cálculo de la fuerza P

$$\sum M_B = 0 \quad (2)$$

$$P \cos 30^\circ (4,5 \text{ m}) - 80 \text{ N}(2,5 \text{ m}) - 75 \text{ N}(4,6 \text{ m}) = 0$$

$$P \cos 30^\circ (4,5 \text{ m}) = 80 \text{ N}(2,5 \text{ m}) + 75 \text{ N}(4,6 \text{ m})$$

$$P = 139,847 \text{ N}$$

Cálculo de reacciones en B

$$\sum F_y = 0 \uparrow +$$

$$P^* \operatorname{sen}(30^\circ) + By = 80 \text{ N} + 75 \text{ N}$$

$$By = 85,076 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow +$$

$$Bx = P^* \cos(30^\circ)$$

$$Bx = 121,11 \text{ N}$$

1.4 TIPOS DE ESFUERZOS

Una fuerza actuando sobre un elemento estructural o un elemento de máquina puede producir sobre el mismo diferentes efectos, al considerar la relación que lleva con la sección sobre la que actúa, la relación que presentan las mencionadas variables definirá si el esfuerzo es normal, cortante o un combinado.

El máximo esfuerzo que puede resistir un elemento viene en una parte definida por el material del cual se construye, así también su aspecto geométrico, cada material tendrá sus características de resistencia definidas y se indicaran en catálogos o tablas.

1.4.1 Esfuerzos normales

Un esfuerzo normal es aquel en el que actúa una fuerza o carga paralela al elemento, y este puede ser un esfuerzo de tracción o compresión. En la Fig.1.3 se muestra como la fuerza intenta comprimir al elemento, mientras que en la Fig. 1.4 intenta traccionar o estirar al elemento; las fuerzas son perpendiculares a la sección transversal y están en sentido opuesto. Al realizar un corte A-A' y B-B' se realiza un diagrama de cuerpo libre (DLC) y así se obtiene una fuerza prima en la sección donde se realizó el corte. (Ferdinand , y otros, 2013)

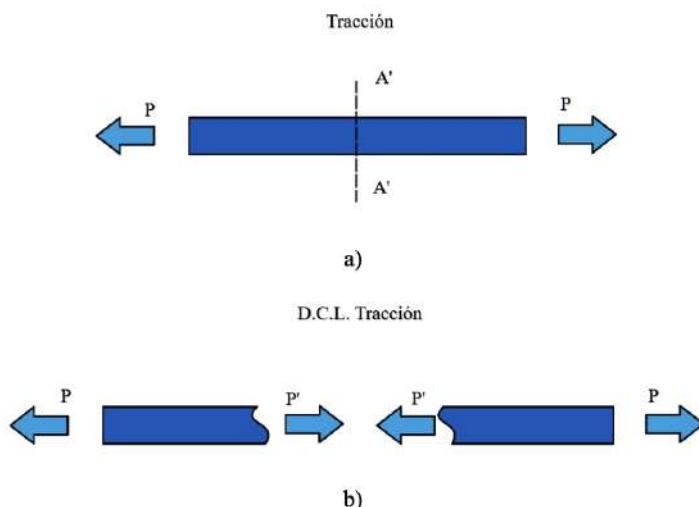
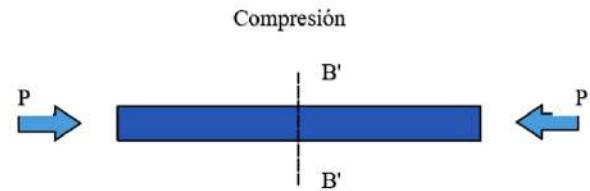
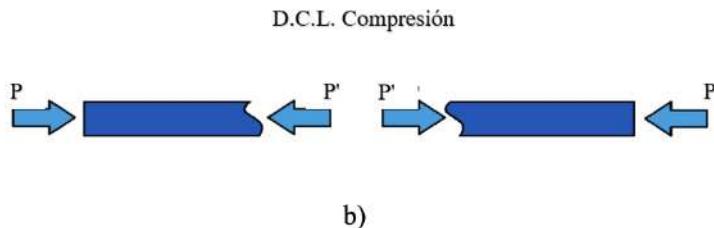


Fig. 1.3. Elemento sometido a tracción. a) Elemento en tracción b) DCL de la representación de tracción



a)



b)

Fig. 1.4. Elemento sometido a compresión. a) Elemento en compresión b) DCL de la representación de la compresión

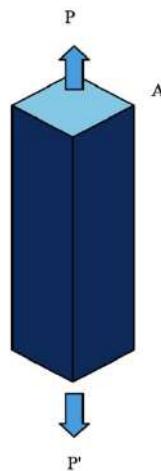


Fig. 1.5. Esfuerzo normal.

$$\sigma_{\text{norm}} = \frac{P}{A} \quad (1.3)$$

$$A = L * e \quad (1.4)$$

Donde:

σ_{norm} = Esfuerzo normal en N/m^2

P = representa la carga en N

A = representa el Área de la sección Transversal en m^2

1.4.2 Esfuerzos cortantes

Suelen presentarse en elementos como pernos, remaches, pasadores, entre otros elementos de unión y sujeción, las fuerzas suelen ser transmitidas por los elementos estructurales hacia los elementos de unión, actúan sobre una porción del elemento de unión mientras que la otra porción está sujetando otro elemento, como en la Fig.1.6, esto produce fuerzas de reacción dirigidas en sentidos contrarios con las que el elemento de unión tendría a fracturarse o cortarse sobre el plano donde estas fuerzas actúan.

1.4.2.1 Esfuerzo Cortante Simple

El corte simple se produce cuando un elemento de unión se encuentra sometido a un solo plano de corte, como el E-E'; mismo que se puede observar en las Fig. 1.6 b) y Fig. 1.7; además, se hace un DCL donde se ubican las fuerzas o cargas actuantes sobre el mismo.

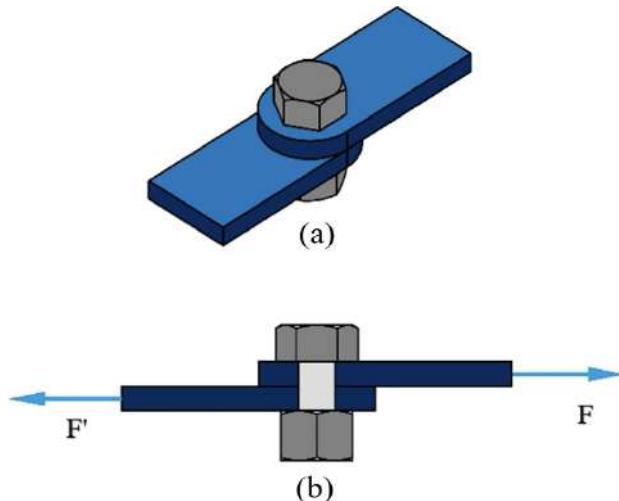


Fig. 1.6. Elemento de unión sobre dos elementos estructurales.
a) Vista isométrica, b) Vista frontal.

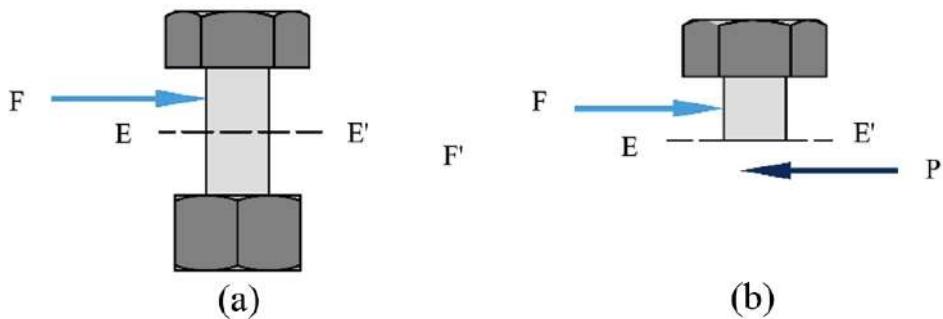


Fig.1.7. DCL de las fuerzas actuantes sobre el elemento de unión.
a) Elemento de unión, b) Corte simple del elemento de unión.

$$\tau = \frac{P}{A} \quad (1.5)$$

$$A = \frac{\pi(\phi_{perno})^2}{4} \quad (1.6)$$

Donde:

τ : Esfuerzo cortante

P: Fuerza tangencial aplicada en N

A: Área sobre el cual actúa la fuerza m^2

ϕ_{perno} : Diámetro del perno o pasador en la unión

1.4.2.2 Esfuerzo Cortante Doble

El corte doble se produce cuando un elemento de unión se encuentra sometido a dos planos de corte como el S-S' X-X', como se puede observar en las Fig. 1.8 y Fig. 1.9, además se hace un DCL donde se ubican las fuerzas o cargas actuantes sobre él mismo.

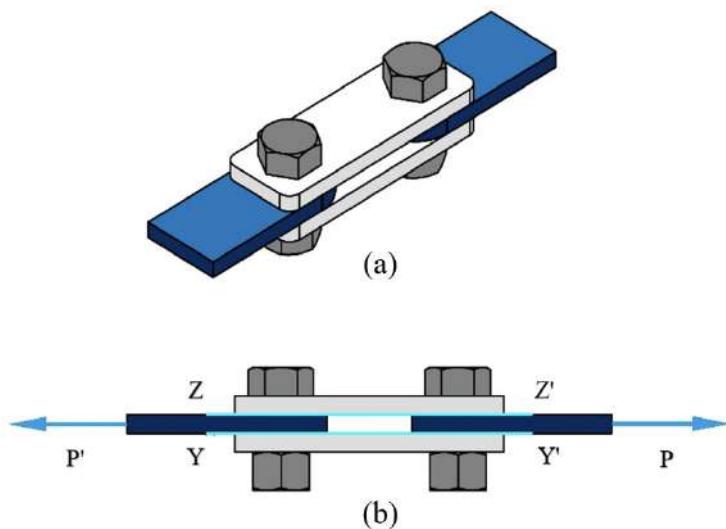


Fig. 1.8. Tres elementos estructurales sujetados por dos elementos de unión.
a) Vista isométrica, b) Vista frontal.

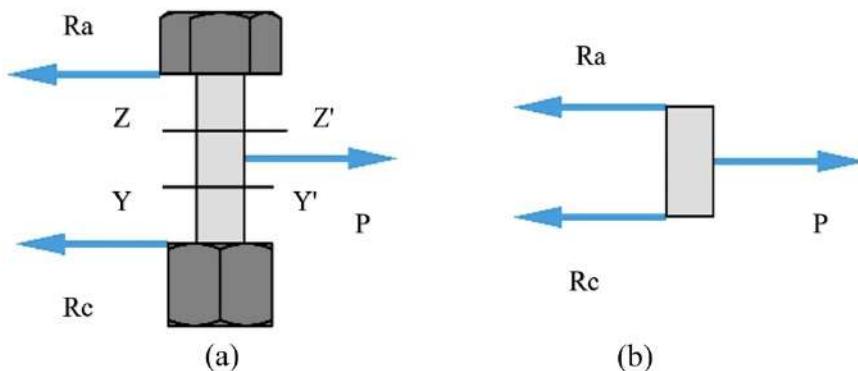


Fig. 1.9. DCL de las fuerzas actuantes sobre el elemento de unión.
a) Elemento de unión, b) Corte Doble del elemento de unión.

$$\tau = \frac{P}{A}$$

$$R_a = R_c = \frac{P}{2}$$

$$A = \frac{\pi(\phi_{\text{perno}})^2}{4} \quad (1.7)$$

Donde:

R_a = Fuerza Resultante del punto A

R_c = Fuerza Resultante del punto C

1.5 ESFUERZO DE APLASTAMIENTO

La fuerza de aplastamiento se define como la carga que el elemento conector ejerce sobre la perforación del elemento estructural en un intento de agrandar el agujero, es decir aumentar su diámetro. Esta fuerza se calcula en el plano imaginario del agujero del elemento estructural, como se muestra en la Fig. 1.10. Pareciera ser algo insignificante, pero es necesario conocer y realizar un análisis de este tipo de esfuerzos, ya que, si no se controlan adecuadamente, los elementos pueden provocar holguras y generar vibraciones que a su vez causan fatiga en los componentes estructurales, acortando su vida útil más de lo esperado. (Hibbeler, 2010)

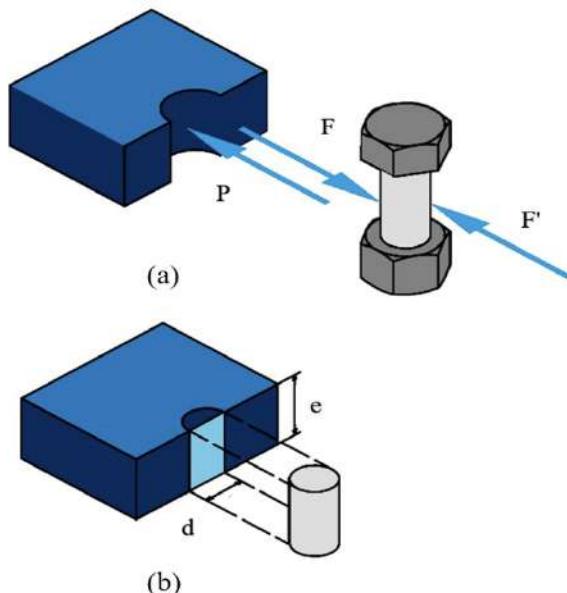


Fig. 1.10. Esfuerzo de aplastamiento sobre la región sombreada.
a) Carga del elemento de unión, b) Sección plana imaginaria del orificio del elemento.

$$\sigma_{aplas} = \frac{P}{A}$$

$$A = d(L) \quad (1.8)$$

Donde:

A = Área proyectada de la sección plana del orificio de elemento en m^2

1.6 ESFUERZO EN UN PLANO OBLICUO BAJO CARGA AXIAL

En las secciones anteriores se habló de esfuerzos axiales ejercidos en elementos sometidos a fuerzas, las mismas que causan esfuerzos normales en el elemento; además, se encontró que las fuerzas transversales actuantes en pernos o pasadores generan esfuerzos cortantes. Una vez analizados los planos perpendiculares al elemento, es importante destacar que las fuerzas axiales generan tanto fuerzas normales como cortantes en planos que no son perpendiculares al eje del elemento. De manera similar, las fuerzas transversales ejercidas sobre un perno producen esfuerzos tanto normales como cortantes en planos que no son perpendiculares al eje del perno o pasador (Fig. 1.11).

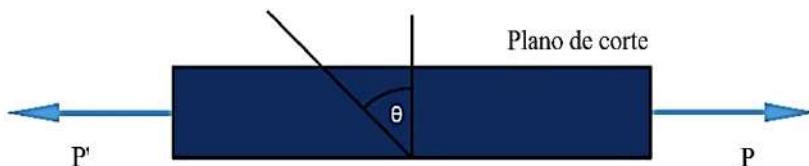


Fig. 1.11. Corte no perpendicular en un elemento.

Como se puede observar en la Fig. 1.11, el elemento se encuentra bajo la acción de cargas de igual carga en ambos extremos. Se realiza un corte en un plano que forma un ángulo θ con la vertical y se selecciona una de las dos partes resultantes. En este caso, se tomará la parte izquierda del elemento (Fig. 1.12).

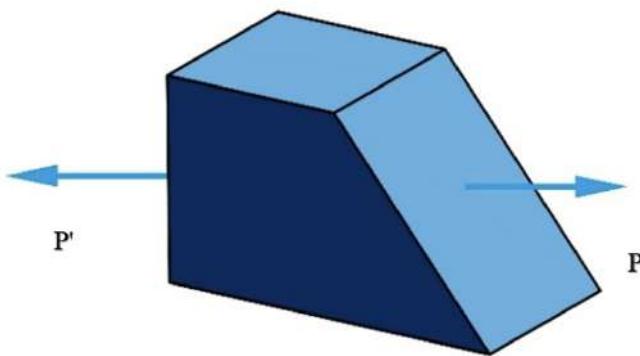


Fig. 1.12. Parte izquierda del elemento cortado.

Del elemento tomado se puede separar P en sus componentes normal y tangencial al corte denotadas por las letras F y V respectivamente (Fig. 1.13).

$$F = P \cos(\theta)''$$

$$V = P \sin(\theta)''$$

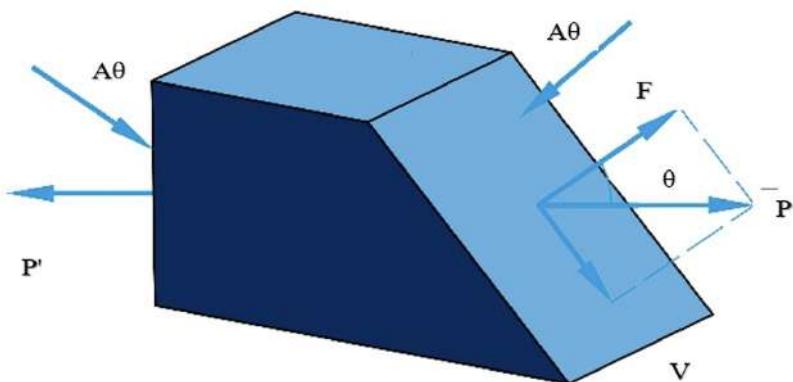


Fig. 1.13. Componentes de la fuerza expresados en su plano.

La fuerza F representa la resultante de las fuerzas normales distribuidas a través de la sección, y la fuerza V la resultante de las fuerzas cortantes (Fig. 1.14).

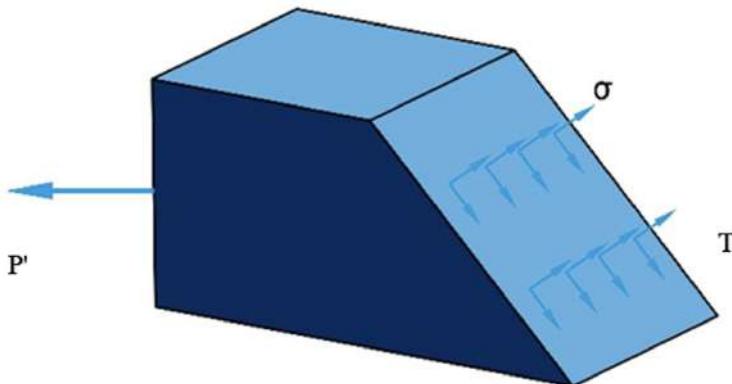


Fig. 1.14. Resultante de esfuerzos normales y cortantes por cada diferencial de área.

Los valores promedio de los esfuerzos normales y corte correspondientes se obtienen dividiendo, respectivamente, F y V entre el área A_θ de la sección.

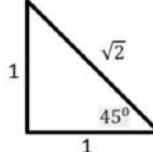
	$\sigma = \frac{F}{A_0}$ $\cos\theta = \frac{A_0}{A_\theta}$ Esfuerzo Normal $A_\theta = \frac{A_0}{\cos(\theta)}$ $\sigma = \frac{P \cdot \cos(\theta)}{\frac{A_0}{\cos(\theta)}}$ $\sigma = \frac{P \cdot \cos^2(\theta)}{A_0}$	σ : es máximo cuando $\theta = 0^\circ$. σ : es cero cuando $\theta = 90^\circ$. Entonces: $\sigma_{\max} = \frac{P}{A_0}$
	$\tau = \frac{V}{A_0}$ $\tau = \frac{P \cdot \sin(\theta)}{\frac{A_0}{\cos(\theta)}}$ Esfuerzo Cortante $\tau = \left(\frac{P}{A_0} \right) \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$	τ : es cero cuando $\theta = 0^\circ$. τ : es cero cuando $\theta = 90^\circ$. τ : es máximo cuando $\theta = 45^\circ$. Entonces: $\tau_{\max} = \left(\frac{P}{A_0} \right) \sin(45^\circ) \cdot \cos(45^\circ)$
	 <p>Entonces:</p> $\tau_{\max} = \frac{P}{A_0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ $\tau_{\max} = \frac{P}{2(A_0)}$ <p>Como se tiene que:</p> $\sigma = \frac{P \cdot \cos^2(\theta)}{A_0}$ <p>Para 45° tenemos:</p> $\sigma = \frac{P \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2}{A_0} = \sigma'$ $\sigma' = \frac{P}{2(A_0)} = \tau_{\max}$	
Nota. Se puede notar que la misma carga produce un esfuerzo normal y un esfuerzo cortante de igual magnitud.		

Tabla 1.1. Resultante de esfuerzos normales y cortantes

1.7 ESFUERZOS BAJO CONDICIONES GENERALES DE CARGA. COMPONENTES DE ESFUERZO

En las unidades anteriores, el estudio se basó solo en cargas axiales y transversales pero la mayoría de los elementos estructurales y de máquinas se encuentran bajo condiciones de carga más complicadas. Se tiene un elemento sujeto a varias cargas (Fig. 1.15).

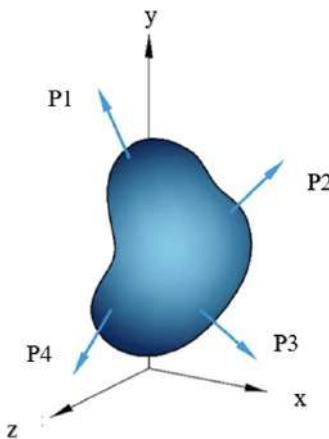


Fig. 1.15. Elemento sujeto a varias cargas.

Para un mejor entendimiento de los esfuerzos generados por las cargas en un cuerpo, se toma un punto Q cualesquiera dentro del cuerpo, para ello se efectúa un corte por ese punto utilizando un plano paralelo, a cualquiera de los planos en el sistema de referencia, en este caso el plano ZY (Fig. 1.16).

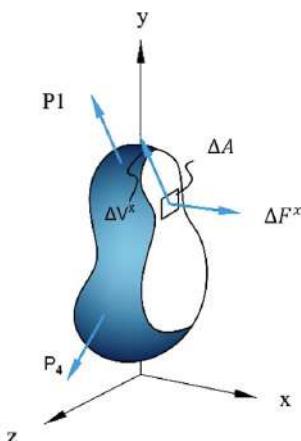


Fig. 1.16. Corte con plano paralelo a zy en el punto Q .

En la Fig. 1.16 se denotan las fuerzas normales y de corte distribuidas a través de la sección como ΔF^x y ΔV^x , respectivamente, nótese que usando un superíndice x las fuerzas normales y cortantes actúan sobre una superficie perpendicular al eje x . Ahora bien, la dirección de ΔF^x se encuentra bien definida mientras que ΔV^x puede tener cualquier dirección, pero en el plano de la sección.

Si se toma la fuerza cortante ΔV^x y al descomponerla en dos componentes tenemos, ΔV_y^x y ΔV_z^x , en direcciones paralelas a los ejes y y z , respectivamente (Fig. 1.17).

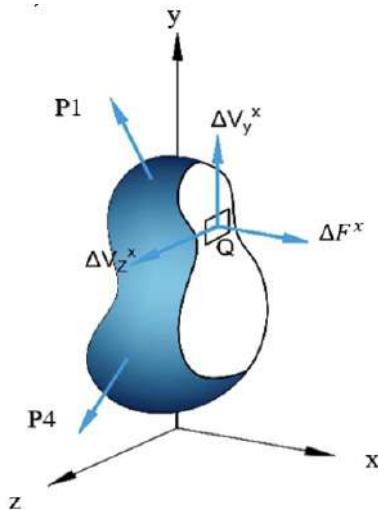


Fig. 1.17. Descomposición de fuerza cortante.

Si se divide la fuerza cortante y normal (ΔF^x y ΔV^x) sobre el área ΔA , y haciendo que ΔA tienda a cero, se pueden definir las componentes de esfuerzo (Fig. 1.18).

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A} \quad (1.13)$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A} \quad (1.14)$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A} \quad (1.15)$$

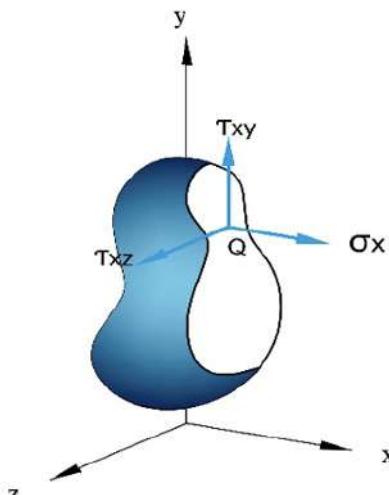


Fig. 1.18. Distribución de esfuerzos.

Se puede notar que para los esfuerzos (σ_x , τ_{xy} , τ_{xz}), el primer subíndice sirve para indicar que los esfuerzos se aplican sobre un plano perpendicular al eje x , en el caso de τ_{xy} , τ_{xz} , el segundo subíndice especifica la dirección de la componente de dichos esfuerzos. En este caso todas las direcciones son positivas, pero si el corte se lo hace con respecto a otro plano las direcciones van a ser distintas, como se puede observar en la Fig. 1.19.

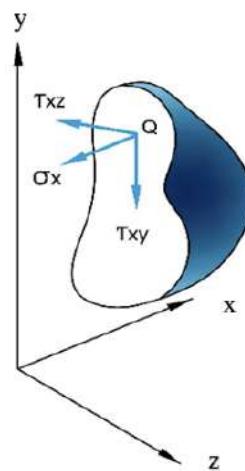


Fig. 1.19. Corte con plano paralelo a yz en el punto Q.

De igual manera si se realiza un corte con un plano paralelo al plano zx , se tiene (σ_y , τ_{yz} , τ_{yx}), y si se realiza un corte con un plano paralelo al plano xy , se tiene (σ_z , τ_{zx} , τ_{zy}).

Si se considera un diferencial de área en forma de cubo de lado a con el punto Q en su centro, se puede indicar que los esfuerzos normales y cortantes se aplican sobre cada una de las 6 caras del cubo.

Como se nota en la figura solo 3 caras están visibles, y en las caras opuestas actúan esfuerzos iguales pero opuestos. Los esfuerzos que actúan sobre las caras del cubo tienen un error muy pequeño con las ejercidas en el punto Q , y cuando se lo aproxima a cero el error lo hace de igual forma (Fig. 1.20).

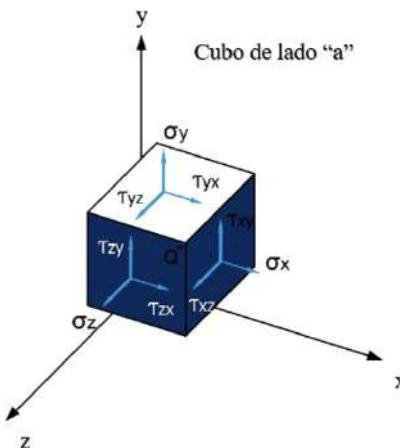


Fig. 1.20. Distribución de esfuerzos en las caras visibles.

Analizando el cubo de la Fig. 1.20, se tiene que las fuerzas cortantes y normales que actúan sobre las caras del cubo se obtienen al multiplicar el esfuerzo por el área de cada cara, como se puede observar en la Fig. 1.21.

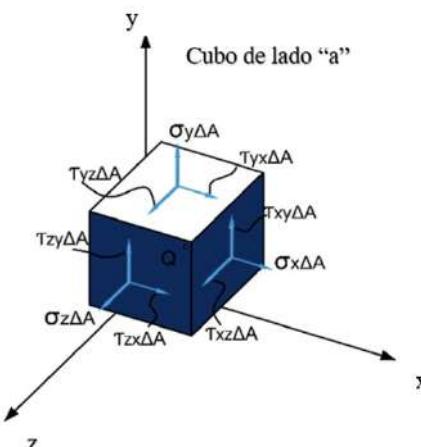


Fig. 1.21. Fuerzas normales y cortantes en cada cara.

Como las caras opuestas a las mostradas presentan esfuerzos iguales, pero de dirección contraria, se deben cumplir las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

Considerando un nuevo sistema de ejes coordenados en el punto Q y nombrándolos como x' , y' , z' , utilizando una proyección sobre el plano $x'y'$ (Fig. 1.22).

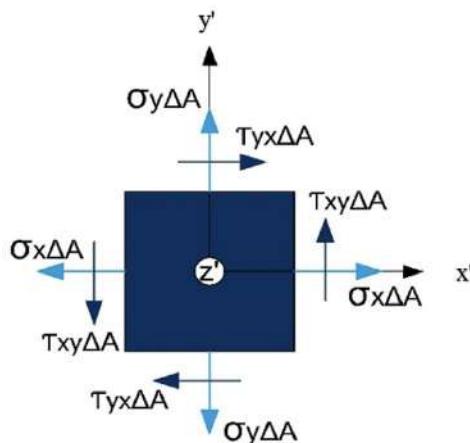


Fig. 1.22. Proyección sobre el plano $x'y'$.

Analizando la Fig. 1.23, se tiene:

$$\sum M_{x'} = 0 \quad \sum M_{y'} = 0 \quad \sum M_{z'} = 0$$

Realizando sumatoria de fuerzas en el eje z' se tiene:

$$\begin{aligned}
 \sum M_{z'} &= 0 \quad (\curvearrowright) + \\
 -\tau_{xy}(\Delta A) \left(\frac{a}{2}\right) - \tau_{xy}(\Delta A) \left(\frac{a}{2}\right) + \tau_{yx}(\Delta A) \left(\frac{a}{2}\right) + \tau_{yx}(\Delta A) \left(\frac{a}{2}\right) &= 0 \\
 -\frac{a-a}{2}(\tau_{xy} \cdot \Delta A) + \frac{a+a}{2}(\tau_{yx} \cdot \Delta A) &= 0 \\
 -\frac{2a}{2}(\tau_{xy} \cdot \Delta A) + \frac{2a}{2}(\tau_{yx} \cdot \Delta A) &= 0 \\
 -a(\tau_{xy} \cdot \Delta A) + a(\tau_{yx} \cdot \Delta A) &= 0 \\
 -(\tau_{xy} \cdot \Delta A) + (\tau_{yx} \cdot \Delta A) &= 0 \\
 \tau_{xy}(\Delta A) &= \tau_{yx}(\Delta A) \\
 \tau_{xy} &= \tau_{yx}
 \end{aligned}$$

La relación encontrada muestra que la componente del esfuerzo cortante ejercida sobre una cara perpendicular al eje x es igual a la componente x del esfuerzo cortante ejercido sobre una cara perpendicular al eje y; del mismo modo, si se proyecta sobre los planos $y'z'$ y $x'z'$, y se realiza sumatoria de momentos con respecto al eje x' y y' , respectivamente, se obtendrá:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

Se concluye, que solo se requieren seis componentes de esfuerzo para definir la condición de esfuerzo en un punto dado Q, en lugar de nueve como se supuso al principio. Estas seis componentes son: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$. (Hibbeler, 2010)

EJERCICIOS DE REPASO

- 1) La estructura mostrada esta diseñada para soportar una carga de 50 N. La estructura esta soportada por mensulas y pernos en A y C, el eslabon BC tiene un diametro de 0,02 m. Si el eslabon BC tiene un esfuerzo admisible de $\sigma = 230$ MPa, determine si este eslabon puede soportar con seguridad dicha carga.

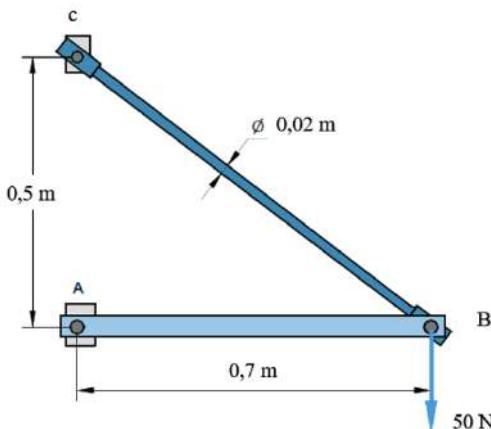
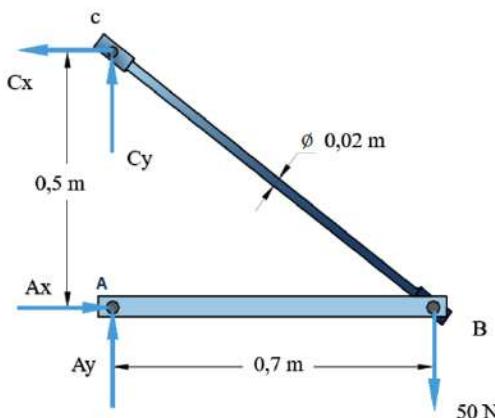


Fig. 1.23. Estructura de análisis

Desarrollo:

Para el desarrollo del ejercicio se aplicará sumatoria de fuerzas y de momentos con el fin de determinar las reacciones en la estructura, como se muestra en la Fig. 1.23a.



a) Aplicación de sumatoria de fuerzas

Sumatoria de fuerzas en y:

$$\sum F_y = 0 \quad (\uparrow) +$$

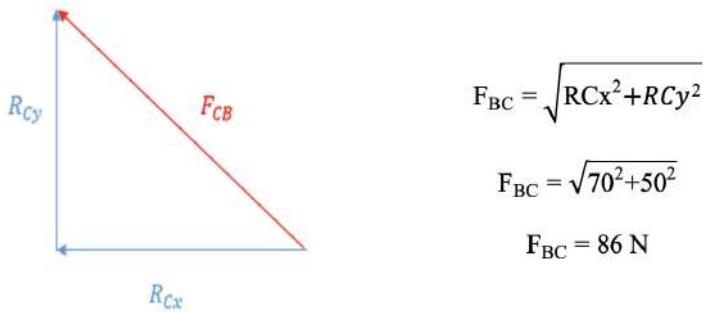
Sumatoria de fuerzas en X:

$$RAx - RCx = 0$$

En la sumatoria de fuerzas en “y” se obtiene una ecuación con dos incógnitas, ahora se realiza una sumatoria de momentos en uno de los puntos de las incógnitas:

$$0,7 \text{ m} (50 \text{ N}) - RAx (0,5 \text{ m}) = 0$$

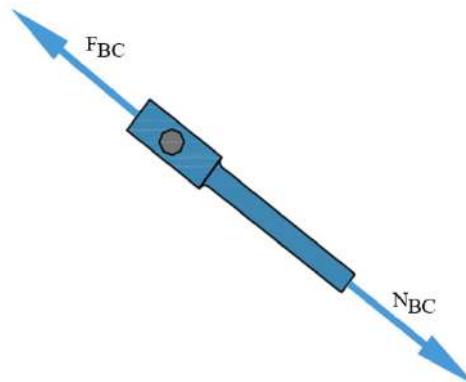
Recordando que el sistema es estático, se dice que el perno C está en equilibrio, entonces se dibuja el triángulo de fuerzas correspondiente con las fuerzas que actúan en dicho perno, donde la fuerza FCB se dirige a lo largo del elemento BC, como se muestra en la Fig. 1.23b.



b) Triángulo de fuerzas que actuan

Ahora realizamos un diagrama de cuerpo libre del elemento BC (Fig. 1.23c) para ver como esta sometido. Con la ayuda del diagrama de cuerpo libre, podemos ahora determinar el esfuerzo que este soporta.

$$F_{BC} = N_{BC}$$



c) Diagrama de cuerpo libre

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{(86 \text{ N})(4)}{\pi(0,02)^2 \text{ m}^2}$$

$$\sigma_{BC} = 273,74 \text{ kPa (Tracción)}$$

$$\sigma_{PERMISIBLE} > \sigma_{TRABAJO}$$

Ya obtenido el valor del esfuerzo de trabajo, y sabiendo que el esfuerzo permisible es mayor al del trabajo, procedemos a hallar el factor de seguridad.

$$n = \frac{\sigma_{PERMISIBLE}}{\sigma_{TRABAJO}} = \frac{273,74 \text{ MPa}}{230 \text{ MPa}} = 1,19$$

Donde:

$\sigma_{\text{PERMISIBLE}}$: esfuerzo permisible

σ_{TRABAJO} : esfuerzo de trabajo

Nota: El eslabón si va a soportar la carga ya que el factor de seguridad es mayor a 1.

- 2) Calcular los esfuerzos en la barra BE y BD. Suponga que el área de BE y BD es de $0,02 \text{ m}^2$ y sus cargas están expresadas en N.

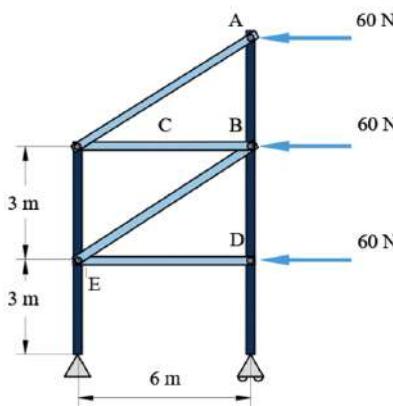
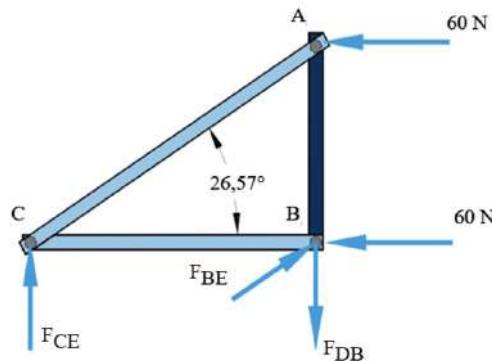


Fig. 1.24. Estructura de la barra BE y BD

Desarrollo:

Se realiza primero un diagrama de cuerpo libre entre los puntos ABC, mediante el método de las secciones (Fig. 1.24a), posteriormente se reliza una sumatoria de fuerzas para hallas las correspondientes.

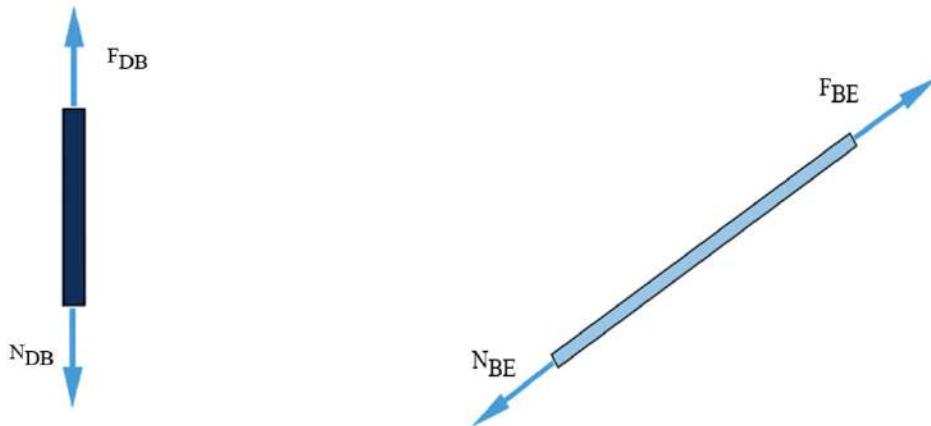


a) Diagrama de cuerpo libre entre los puntos ABC

Realizando sumatoria de fuerzas:

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 (\uparrow) + \\ F_{CE} + \sin(26,57)F_{BE} &= F_{DB} \\ \sum F_x &= 0 (\rightarrow) + \\ \cos(26,57)F_{BE} - 60\text{ N} - 60\text{ N} &= 0 \\ F_{BE} &= 134,17\text{ N}\end{aligned}$$

Ahora se realiza el diagrama de cuerpo libre del elemento BE y BD Fig. 1.24 b) y Fig. 1.24 c), igualmente se realiza una sumatoria de fuerzas y momentos para hallar el valor numérico de las normales.



b) Diagrama de cuerpo libre del elemento BD c) Diagrama cuerpo libre del elemento BE

Realizando la sumatoria de momentos con respecto al punto B

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0 (\curvearrowright) + \\ 60\text{ N} (3\text{ m}) &= F_{CE}(6\text{ m}) \\ F_{CE} &= 30\text{ N} \\ F_{CE} + \sin(26,57)F_{BE} &= F_{DB} \\ 30\text{ N} + \sin(26,57)(134,17\text{ N}) &= F_{DB} \\ F_{DB} &= 90,013\text{ N}\end{aligned}$$

Con los valores hallados se determinan sus respectivos esfuerzos normales de traccion y compresion:

$$\sigma_{BE} = \frac{N_{BE}}{A} = \frac{134,17 \text{ N}}{(0,02 \text{ m}^2)}$$

$$\sigma_{BE} = 6\,708,5 \text{ Pa (Compresión)}$$

$$\sigma_{BD} = \frac{N_{DB}}{A} = \frac{90,013 \text{ N}}{(0,02 \text{ m}^2)}$$

$$\sigma_{BC} = 4\,500,65 \text{ Pa (Tracción)}$$

- 3) Calcular la fuerza P del sistema mostrado sabiendo que el esfuerzo del eslabón BD es de 40 MPa, y el área tanto del eslabón AB y BD es de 0,0004 m².

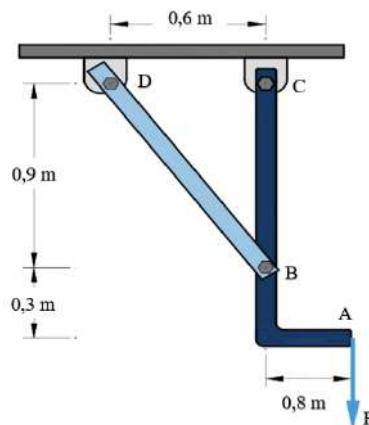


Fig. 1.25. Sistema del eslabón AB y BD

Desarrollo:

Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de cada elemento (Fig. 1.25a) y se realiza una sumatoria de momentos, en la cual se deja una ecuación expresada en función de P.

Tenemos el esfuerzo Normal de BE

$$\sigma_{BE} = 40 \text{ MPa}$$

Realizando la sumatoria de momentos con respecto al punto C

$$\sum M_C = 0 \quad (\curvearrowleft) +$$

$$P(0,8 \text{ m}) - F_{BD} \sin(33,69) (0,9 \text{ m}) = 0$$

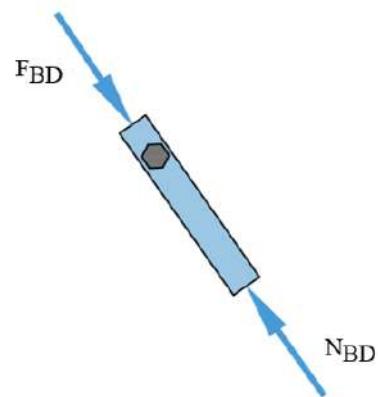
$$F_{BD} = 1,6024 P$$

Para el esfuerzo Normal de BD

$$\sigma_{BD} = \frac{N_{BD}}{A} = \frac{1,6024(P)}{0,0004 \text{ m}^2}$$

$$P = \frac{0,0004 \text{ m}^2}{1,602} (\sigma_{BD})$$

$$P = 9,987 \text{ kN}$$



a) Diagrama de cuerpo libre BD

- 4) Dos barras rectangulares están soldadas en B; la medida del espesor de cada una es igual, y corresponde a 0,06 m. Encuentre el esfuerzo normal en el punto medio de cada barra.

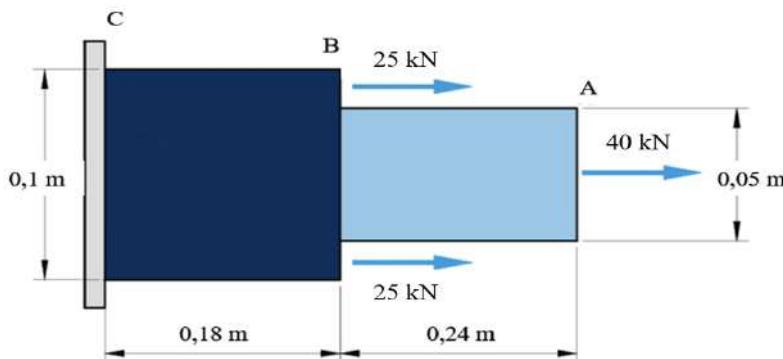
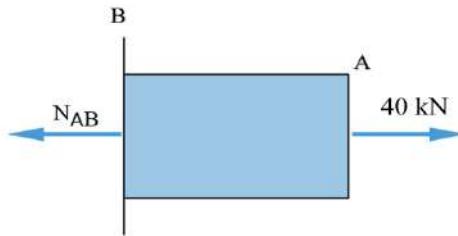


Fig. 1.26. Barras rectangulares soldadas

Desarrollo:

Se realiza una sumatoria de fuerzas, previamente realizando un diagrama de cuerpo libre en el tramo AB Fig. 1.26 a), en donde hallaremos la fuerza normal en dicho tramo antes mencionado; posteriormente hallar el esfuerzo normal requerido.

TRAMO AB



a) Diagrama de cuerpo libre en el tramo AB

Realizando la sumatoria de fuerzas con respecto a X

$$\sum F_x = 0 (\rightarrow) +$$

$$N_{AB} = 40 \text{ kN}$$

Para el esfuerzo Normal de AB

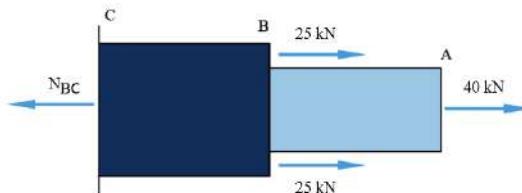
$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{40 \text{ kN}}{(0,05)(0,06) \text{ m}^2}$$

$$\sigma_{AB} = 13,33 \text{ MPa (Tracción)}$$

Al igual que el tramo AB se utiliza el mismo concepto para el tramo BC Fig. 1.26 b); hallamos la fuerza normal con sumatoria de fuerzas y con ello poder hallar el esfuerzo de BC.

TRAMO BC



(a) Diagrama de cuerpo libre en el tramo BC

Realizando la sumatoria de fuerzas con respecto a X

$$\sum F_x = 0 (\rightarrow) +$$

$$-N_{BC} + 25 \text{ kN} + 25 \text{ kN} + 40 \text{ kN} = 0$$

$$N_{BC} = 90 \text{ kN} \text{ (Compresión)}$$

Para el esfuerzo Normal de AB

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{90 \text{ kN}}{(0,1)(0,06) \text{ m}^2}$$

$$\sigma_{BC} = 15 \text{ MPa} \text{ (Compresión)}$$

- 5) Se aplica una fuerza a la ménsula ABC como se muestra en la figura; y, conociendo que el pasador en A es de acero con un esfuerzo cortante de 650 kPa:

- a) Determine el diámetro del pasador utilizando un factor de seguridad de 2,3.
- b) Halle el espesor requerido de los soportes de la ménsula en B sabiendo que el esfuerzo permisible de aplastamiento del acero utilizado es de 300 kPa con un factor de seguridad de 2.

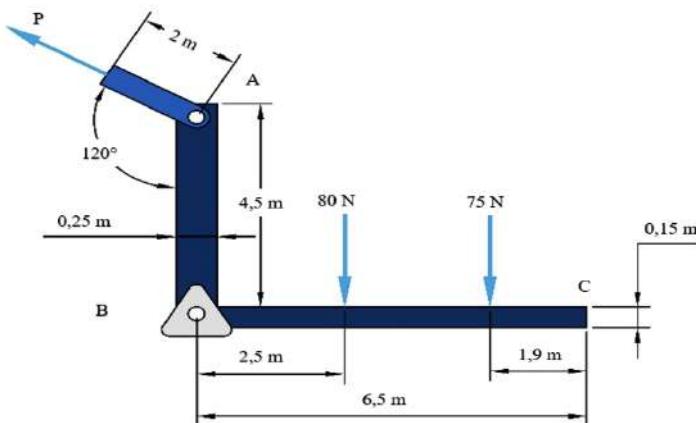
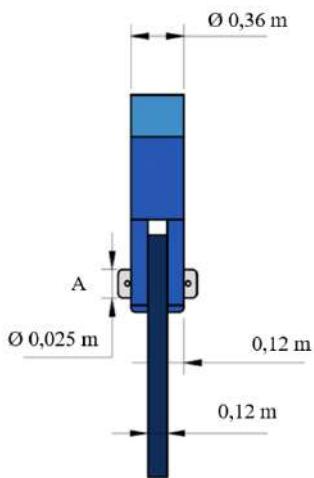
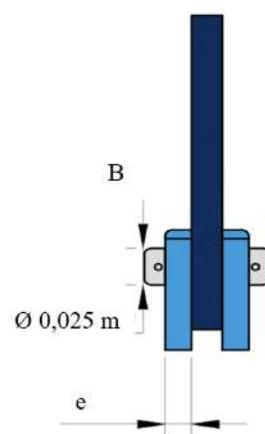


Fig. 1.27. Ménsula ABC



a) Pasador en A



b) Soportes de la ménsula en B

Desarrollo:

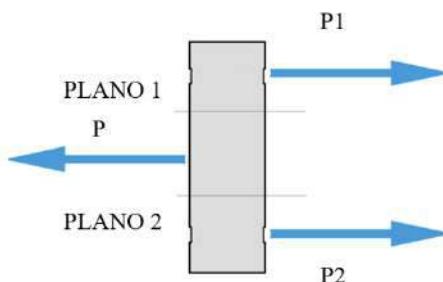
a) Para encontrar el diámetro del pasador en el punto A se debe usar una ecuación que involucre el esfuerzo en el pasador.

Se puede observar que el pasador está sometido a un esfuerzo constante doble, por lo tanto, se utiliza la ecuación:

$$\tau = \frac{P}{2(A)} \rightarrow \quad \text{Esfuerzo de corte en A}$$

Donde:

$2A$: se considera porque existe un corte doble



b) Esfuerzo de corte en A

Recuerda:

En el primer ejercicio de la estática se determinó el valor de P y los valores de las reacciones en cada apoyo.

“Note que las lineas son planos de corte”

$$P = 139,847 \text{ N}$$

$$\tau = \frac{P}{2(A)} = \frac{P(4)}{(2\pi)(d)^2}$$

$d = \emptyset$ Diametro del pasador

Como se conoce, el valor del rendimiento (factor de seguridad) se puede despejar del esfuerzo de trabajo de la ecuación:

$$\begin{aligned} n &= \frac{\tau_{adm}}{\tau_{trab}} \\ \tau_{trab} &= \frac{\tau_{adm}}{n} \\ \tau_{trab} &= \frac{650 \text{ kPa}}{2,3} = 282,608 \text{ kPa} \end{aligned}$$

De la ecuación de esfuerzo cortante se despeja el diámetro y se determina su valor numérico:

$$d = \sqrt{\frac{4P}{2\pi\tau_{trab}}} = \sqrt{\frac{4(139,847 \text{ N})}{2\pi(282,608 \text{ kPa})}}$$

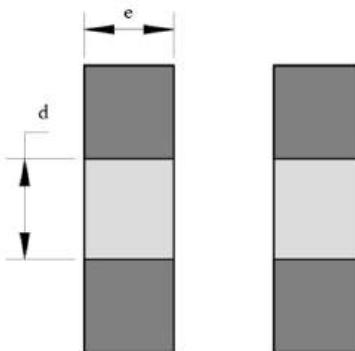
$$d = 0,018 \text{ m} = 18 \text{ mm}$$

Nota:

El diámetro encontrado es solo ideal; en la realidad no existen pasadores con tal diámetro, para la práctica se debería buscar en tablas y catálogos, un diámetro superior y calcular los esfuerzos nuevamente.

b) Para encontrar el esfuerzo de aplastamiento se debe tener claro que ese esfuerzo se genera en la pieza no en un perno o pasador.

La reacción By ya se encontró en el primer ejercicio de la estática, y se procede de la misma manera que el literal anterior.



b) Esfuerzo se genera en la pieza no en un perno o pasador

Para la reacción By se tiene:

$$By = 85,076 \text{ N}$$

$$\sigma_{\text{trab}} = \frac{By}{A} = \frac{By}{2(d)(e)} \quad [1]$$

$$n = \frac{\sigma_{\text{adm}}}{\sigma_{\text{trab}}}$$

$$\sigma_{\text{trab}} = \frac{\sigma_{\text{adm}}}{n} = \frac{300 \text{ kPa}}{2}$$

$$\sigma_{\text{trab}} = 150 \text{ kPa}$$

Despejando el valor de e de la ecuación de esfuerzo de aplastamiento:

$$e = \frac{By}{A} = \frac{By}{2(d)(\sigma_{\text{trab}})} \quad [1]$$

$$e = \frac{85,076 \text{ N}}{2(0,025 \text{ m})(150 \text{ kPa})}$$

$$e = 0,0113 \text{ m} = 11,3 \text{ mm}$$

- 6) Se tiene un muro sometido a una carga de 12 000 N por metro de longitud y soportado por una cimentación de concreto la cual a la vez se apoya sobre el suelo. Calcular los esfuerzos cortantes en el muro, la cimentación y el suelo y compararlos con los esfuerzos admisibles de los tres elementos, que son los siguientes:

- a) Se encuentra a tracción o compresión;
- b) Resiste o no resiste;
- c) Si resiste, ¿con qué factor de seguridad lo hace?

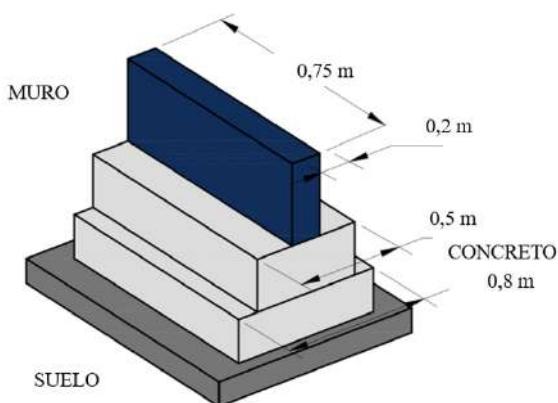


Fig. 1.28. Muro

Datos:

Muro

$$\sigma_{\text{admisible}} = 4,12 \text{ MPa}$$

Cimentación-Concreto

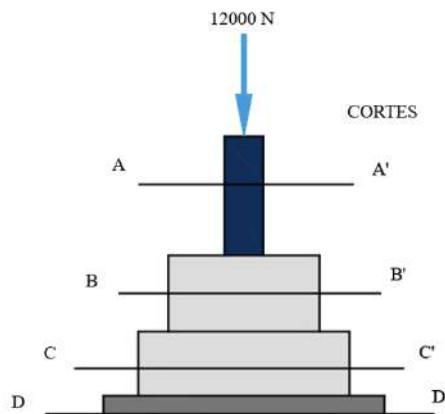
$$\sigma_{\text{admissible-concreto}} = 4,7 \text{ MPa}$$

Suelo

$$\sigma_{\text{admisible}} = 0.0000147 \text{ MPa}$$

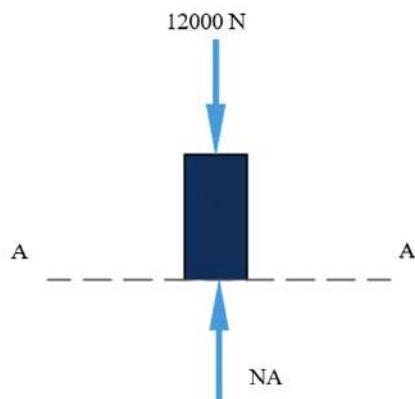
Desarrollo:

DCL



(a) Diagrama de cuerpo libre del sistema

DCL Corte A-A'



(b) Diagrama de cuerpo libre Corte A-A'

Realizando la sumatoria de fuerzas con respecto a Y

$$\sum F_y = 0 \quad (\uparrow) +$$

$$N_A = 12 \text{ kN} \text{ (Compresión)}$$

$$\sigma_{\text{muro}} = \frac{N_A}{A}$$

$$\sigma_{\text{muro}} = \frac{12 \text{ kN}}{0,2 \text{ m} \times 0,75 \text{ m}}$$

$$\sigma_{\text{muro}} = 80 \text{ kPa}$$

Para determinar si la carga aplicada puede resistir, es necesario comparar los esfuerzos.

$$\sigma_{\text{adm}} > \sigma_{\text{trab}}$$

Se observa que la estructura es capaz de soportar la carga. En este caso, se puede obtener el factor de seguridad.

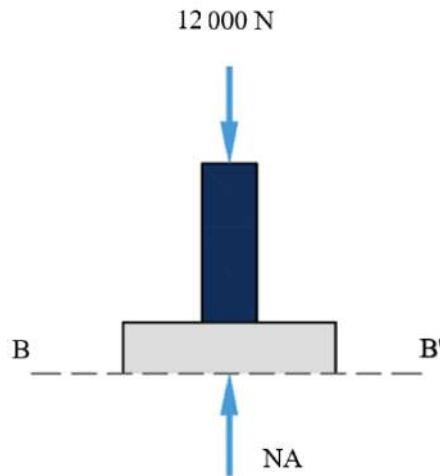
$$n = \frac{\sigma_{\text{adm}}}{\sigma_{\text{trab}}}$$

$$n = \frac{4120 \text{ kPa}}{80 \text{ kPa}}$$

$$n = 51,15$$

$n > 1$ "El muro es seguro"

DCL Corte B-B'



(c) Diagrama de cuerpo libre Corte B-B'

Realizando la sumatoria de fuerzas con respecto a Y

$$\sum F_y = 0 \quad (\uparrow) +$$

$$N_B = 12 \text{ kN} \text{ (Compresión)}$$

$$\sigma_{\text{concreto}} = \frac{N_B}{A} = \frac{12 \text{ kN}}{0,5 \text{ m} \times 0,75 \text{ m}} = 32 \text{ kPa}$$

Para determinar si la carga aplicada puede resistir, es necesario comparar los esfuerzos.

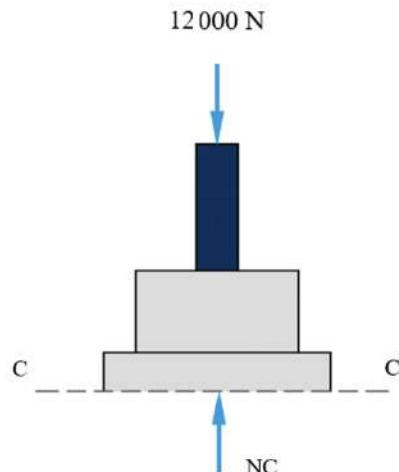
$$\sigma_{\text{adm}} > \sigma_{\text{trab}}$$

Se observa que la estructura es capaz de soportar la carga. En este caso, se puede obtener el factor de seguridad.

$$n = \frac{\sigma_{\text{adm}}}{\sigma_{\text{trab}}} = \frac{4700 \text{ kPa}}{32 \text{ kPa}} = 146,875$$

$n > 1$ "El concreto es seguro"

DCL Corte C-C'



(d) Diagrama de cuerpo libre Corte C-C'

Realizando la sumatoria de fuerzas con respecto a Y

$$\sum F_y = 0 \quad (\uparrow) +$$

$$N_C = 12 \text{ kN} \text{ (Compresión)}$$

$$\sigma_c = \frac{N_c}{A} = \frac{12 \text{ kN}}{0,8 \text{ m} \times 0,75 \text{ m}} = 20 \text{ kPa}$$

Para determinar si la carga aplicada puede resistir, es necesario comparar los esfuerzos.

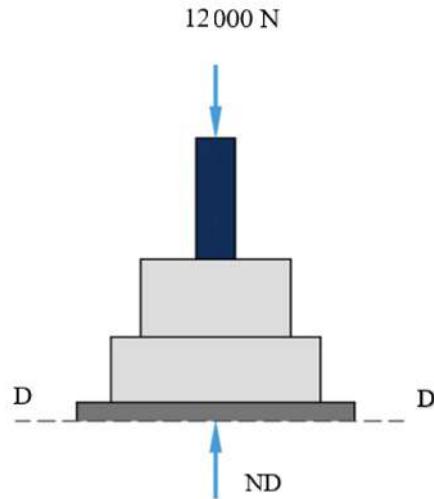
$$\sigma_{\text{adm}} > \sigma_{\text{trab}}$$

Se observa que la estructura es capaz de soportar la carga. En este caso, se puede obtener el factor de seguridad.

$$n = \frac{\sigma_{\text{adm}}}{\sigma_{\text{trab}}} = \frac{4700 \text{ kPa}}{20 \text{ kPa}} = 235$$

$n > 1$ "El concreto es seguro"

DCL Corte D-D'



(e) Diagrama de cuerpo libre Corte D-D'

Realizando la sumatoria de fuerzas con respecto a Y

$$\sum F_y = 0 \quad (\uparrow) +$$

$$N_D = 12 \text{ kN} \text{ (Compresión)}$$

$$\sigma_{\text{suelo}} = \frac{N_D}{A}$$

$$\sigma_{\text{suelo}} = \frac{12 \text{ kN}}{0,8 \text{ m} \times 0,75 \text{ m}}$$

$$\sigma_{\text{suelo}} = 20 \text{ kPa}$$

Para determinar si la carga aplicada puede resistir, es necesario comparar los esfuerzos.

$$\sigma_{\text{adm}} > \sigma_{\text{trab}}$$

Se observa que la estructura es capaz de soportar la carga. En este caso, se puede obtener el factor de seguridad.

$$n = \frac{\sigma_{\text{adm}}}{\sigma_{\text{trab}}} = \frac{2999.99 \text{ kPa}}{20 \text{ kPa}} = 1499$$

$n > 1$ "El suelo es seguro"

- 7) Calcular los esfuerzos normales en el cable B-C y en los dos tramos de barra ABD de la figura, si esta está sometida a una carga $W = 5 \text{ kN}$; y, si el cable tiene un diámetro de 0,015 m y la barra una sección de 2x5 cm.

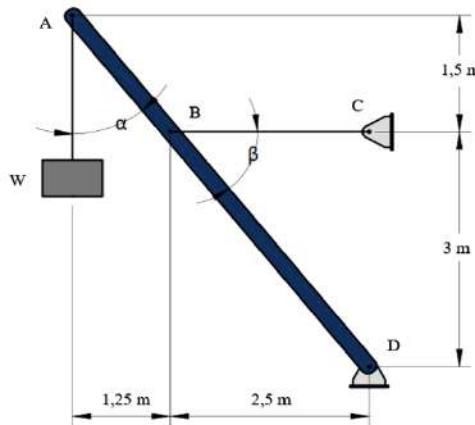


Fig. 1.29. Barra ABD

Desarrollo:

Es necesario conocer los ángulos que intervienen, pues nos ayudan a poner las fuerzas en función de sus componentes.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,25 \text{ m}}{1,5 \text{ m}}$$

$$\alpha = 39,805^\circ$$

$$\beta = 90 - \alpha$$

$$\beta = 50,195^\circ$$

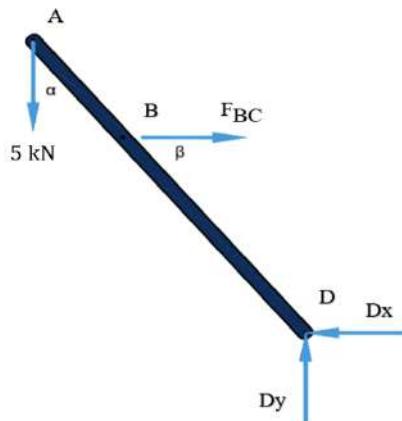
$$A_{\text{cable}} = \frac{\pi(\phi_{\text{cable}})^2}{4}$$

$$A_{\text{cable}} = \frac{\pi}{4}(0,015 \text{ m})^2 = 1,767 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_{\text{barra}} = (0,02 \text{ m})(0,05 \text{ m}) = 0,001 \text{ m}^2$$

Cálculo de las fuerzas AB, CB y BD

DCL



a) Diagrama de cuerpo libre AB, CB y BD

Realizando la sumatoria de momentos con respecto al punto D

$$\begin{aligned}\sum M_D = 0 \text{ (↷)} + \\ -F_{BC}(3 \text{ m}) + 5 \text{ kN}(3,75 \text{ m}) = 0 \\ F_{BC} = \frac{(5 \text{ kN})(3,75 \text{ m})}{3 \text{ m}} = 6,25 \text{ KN}\end{aligned}$$

Realizando la sumatoria de fuerzas con respecto a Y

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 \text{ (↑)} + \\ Dy = 5 \text{ kN}\end{aligned}$$

Realizando la sumatoria de fuerzas con respecto a X

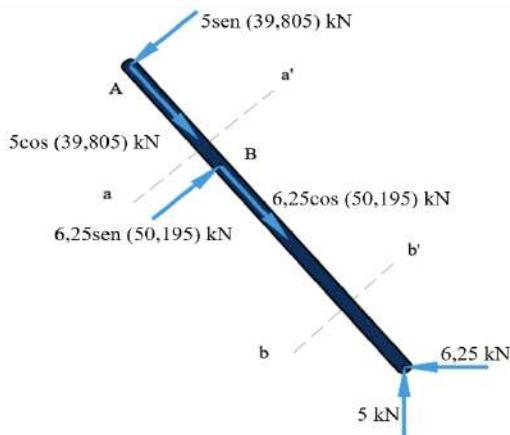
$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 \text{ (→)} + \\ Dx = F_{BC} \\ Dx = 6,25 \text{ kN}\end{aligned}$$

Esfuerzo en el cable BC tracción:

$$\sigma_{\text{cable}} = \frac{F_{BC}}{A}$$

$$\sigma_{\text{cable}} = \frac{6,25 \text{ kN}}{1,767 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 35,37 \text{ MPa}$$

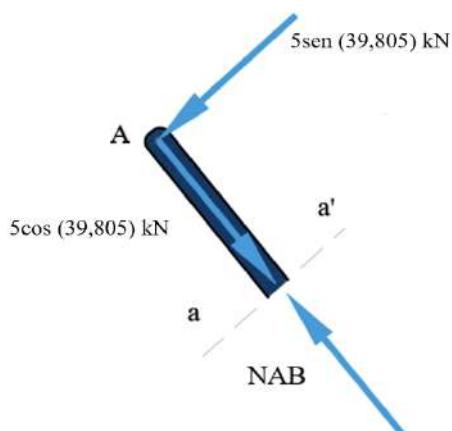
Análisis en la barra ABD



b) Análisis en la barra ABD

Corte A-A'

DCL A-B



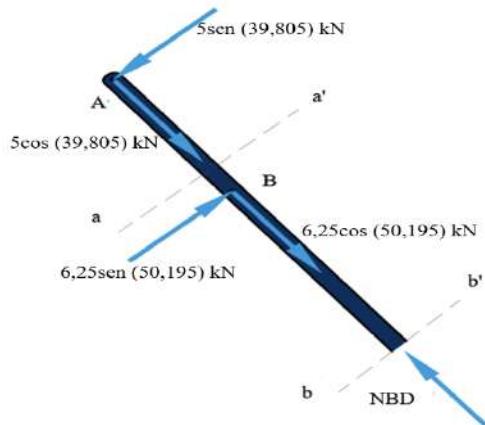
c) Diagrama de cuerpo libre Corte A-A'

$$\sum F = 0 \quad (\searrow) +$$

$$N_{AB} = 5 \cdot \cos(39,805^\circ)$$

$$N_{AB} = 3,841 \text{ kN} \text{ (Compresión)}$$

Corte B-B'
DCL B-D



d) Diagrama de cuerpo libre Corte B-B'

$$\sum F = 0 \quad (\nwarrow) +$$

$$N_{BD} = (5 \text{ kN}) (\cos(39,805^\circ)) + (6,25 \text{ kN}) (\cos(50,195^\circ))$$

$$N_{BD} = 3,841 \text{ kN} + 4 \text{ kN}$$

$$N_{BD} = 7,841 \text{ kN} \text{ (Compresión)}$$

Esfuerzos en los tramos BD y AB

$$\sigma_{barra} = \frac{N_{BD}}{A}$$

$$\sigma_{barra} = \frac{7,841 \text{ kN}}{0,001 \text{ m}^2}$$

$$\sigma_{barra} = 7,841 \text{ MPa} \text{ (Compresión)}$$

$$\sigma_{barra} = \frac{N_{AB}}{A}$$

$$\sigma_{barra} = \frac{3,841 \text{ kN}}{0,001 \text{ m}^2}$$

$$\sigma_{barra} = 3,841 \text{ MPa} \text{ (Compresión)}$$

8) La barra de sujeción de acero mostrada en la Fig. 1.30. debe ser diseñada para soportar una fuerza de tensión de $P = 300$ kN cuando se asegure con pasadores entre las ménsulas dobles A y B. La barra está fabricada con acero y tiene un espesor de 0,025m. Para el grado de acero utilizado, se considera lo siguiente:

$$\sigma_{\text{normal}} = 225 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{corte}} = 120 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{aplastamiento}} = 330 \text{ MPa}$$

Determine:

- a) Esfuerzo de corte (doble) al que se somete el pasador;
 - b) La dimensión b en cada extremo de la barra;
 - c) La dimensión h de la barra.

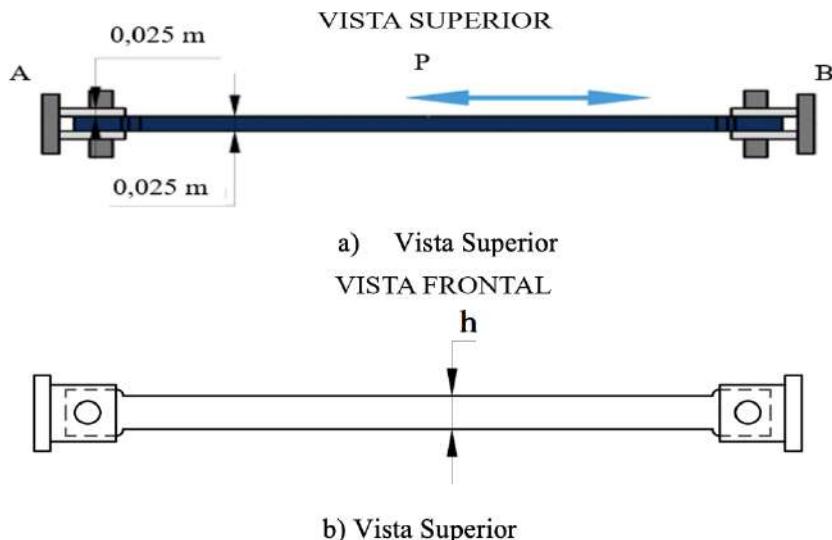


Fig. 1.30. Vistas de la barra de sujeción de acero

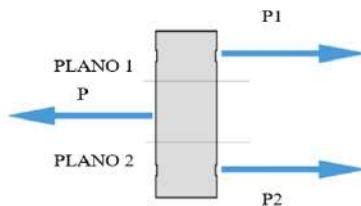
Desarrollo:

Para aspectos de diseño, se suelen hacer rectificaciones a los valores obtenidos en el cálculo, ya que, para adquirir los productos se requiere de una medida que conste en los catálogos respectivos.

a) Esfuerzo de corte (doble) al que se somete el pasador;

DCL del pasador

Se observa en la gráfica principal que el pasador se encuentra en cortante doble representado en la siguiente grafica (Fig. 1.30a) efectuando los siguientes cálculos para la determinación de su diámetro.



c) Diagrama de cuerpo libre del pasador

$$\tau_c = \frac{P}{A}$$

Donde:

τ_c representa el esfuerzo cortante

P representa la carga

A representa el área

$$\tau_c = \frac{4(P)}{2\pi\phi^2}$$

$$\begin{aligned} \phi &= \sqrt{\frac{4(P)}{2\pi\tau}} = \sqrt{\frac{4(300 \text{ kN})}{2\pi(120 \times 10^3 \text{ kPa})}} \\ \phi &= 0,03989 \text{ m} \end{aligned}$$

Rectificación $\phi = 4 \text{ mm}$

Ahora se verifica el esfuerzo de aplastamiento entre la placa y el pasador cuyo diámetro se calculó anteriormente para verificar si resiste o no.

$$\sigma_{\text{aplastamiento}} = \frac{P}{A} = \frac{P}{0,025(d)}$$

Donde:

$\sigma_{\text{aplastamiento}}$ representa el esfuerzo de aplastamiento

d representa el diámetro

$$\sigma_{\text{aplastamiento}} = \frac{300 \text{ kN}}{0,025\text{m}(0,04\text{m})}$$

$$\sigma_{\text{aplastamiento}} = 300 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{admisible}} > \sigma_{\text{trabajo}}$$

$$n = \frac{\sigma_{\text{adm}}}{\sigma_{\text{trab}}}$$

Donde:

n , representa el factor de seguridad

$\sigma_{\text{admisible}}$, representa el esfuerzo admisible

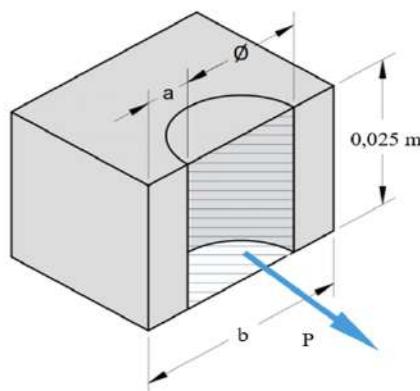
σ_{trabajo} , representa el esfuerzo de trabajo

$$n = \frac{330 \text{ MPa}}{300 \text{ MPa}}$$

$$n = 1,1$$

b) Para el calculo de “ b ”, se realiza un corte perpendicular a la cabeza del pasador:

DCL aplastamiento



d) Diagrama de cuerpo libre aplastamiento

Del grafico de corte sabemos que:

$$b = d + 2a$$

$$\sigma_n = \frac{P}{A} = \frac{P}{2a*t}$$

Donde:

P, representa la carga

A, representa el area

a, representa la sección entre la cara y la perforación del elemento

t, representa la sección vertical del elemento

$$a = \frac{300 \text{ kN}}{2(0,025 \text{ m})(225 \times 10^3 \text{ kPa})} = 0,027 \text{ m}$$

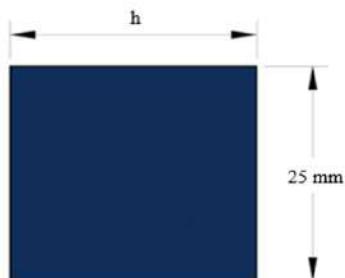
$$b = 0,03989 \text{ m} + 2(0,027 \text{ m}) = 0,09389$$

Con el valor del diámetro rectificado se obtiene un valor b de:

$$b = 0,04 \text{ m} + 2(0,027 \text{ m}) = 0,094 \text{ m}$$

c) Para el calculo de h, procedemos a realizar un corte a la barra para estudiarla bajo la acción de la fuerza en tensión.

DCL Barra sección transversal



e) Diagrama de cuerpo libre Barra sección transversal

$$\sigma_n = \frac{P}{A} = \frac{P}{h*t}$$

$$h = \frac{300 \text{ kN}}{0,025 \text{ m}(225 \times 10^3 \text{ kPa})}$$

$$h = 0,053 \text{ m}$$

$$\text{Rectificación } h = 0,055 \text{ m}$$

$$\sigma_n = \frac{P}{A}$$

$$\sigma_n = \frac{P}{h*t}$$

$$\sigma_n = \frac{300 \text{ kN}}{0,055 \text{ m}(0,025 \text{ m})} = 218,18 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{adm}} > \sigma_{\text{trab}}$$

$$n = \frac{\sigma_{\text{adm}}}{\sigma_{\text{trab}}} = \frac{225 \text{ MPa}}{218,18 \text{ MPa}} = 1,031$$

$$n > 1$$

- 9) Un puntal S de acero sirve como rioste a un malacate marino y transmite una fuerza de tracción $P = 100 \text{ kN}$ a la plataforma del muelle. El puntal tiene una sección transversal cuadrada hueca, con un espesor de pared $t_p = 0,014 \text{ m}$ y se encuentra inclinado a 45 grados. Un pasador que atraviesa el puntal transmite la fuerza de tracción a 2 placas de unión G, soldadas a la placa base B; mientras que 4 pernos de anclaje la aseguran a la plataforma.

Calcular:

- a) Esfuerzo de aplastamiento entre el puntal y el pasador;
- b) Esfuerzo tangencial en el pasador;
- c) Esfuerzo de aplastamiento entre el pasador y las placas de unión;
- d) Esfuerzo de aplastamiento entre el anclaje y la placa base;
- e) Esfuerzo tangencial en los pernos de anclaje.

El diámetro del pasador
 $\phi_{\text{pasador}} = 0,020 \text{ m}$

El espesor de las placas de unión
 $t_G = 0,016 \text{ m}$

El espesor de la placa base es
 $t_B = 0,010 \text{ m}$

Diámetro del pasador
 $\phi_{\text{perno}} = 0,014 \text{ m}$

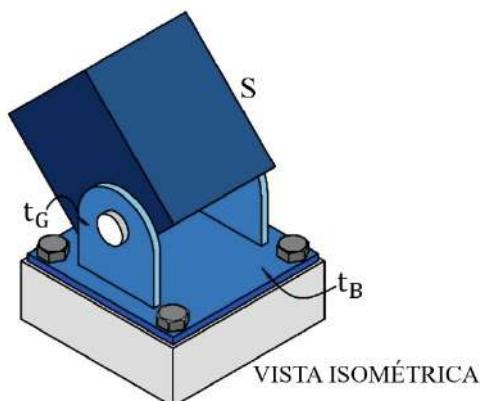
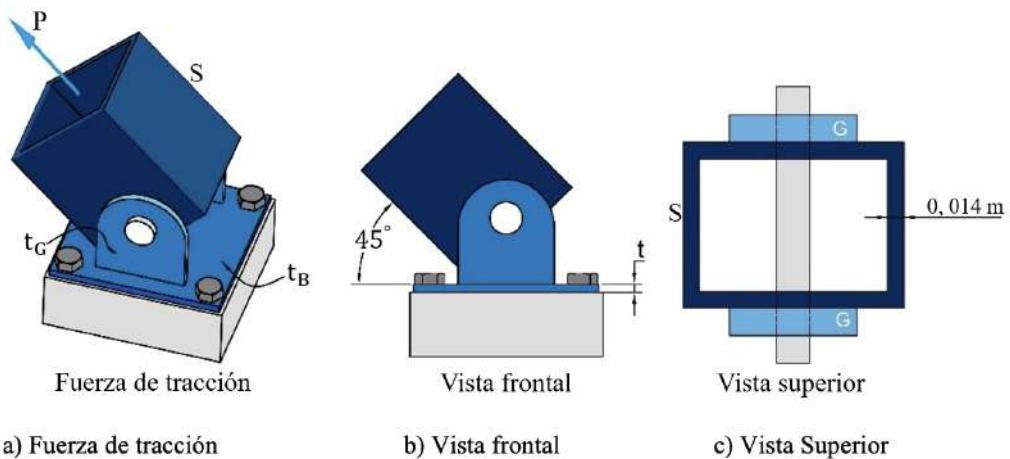
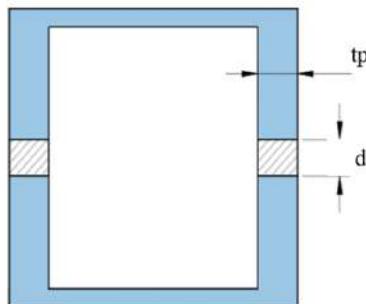


Fig. 1.31. Vista Isométrica de una punta S de acero



Desarrollo:

a) Cálculo del esfuerzo de aplastamiento entre el puntal y el pasador.

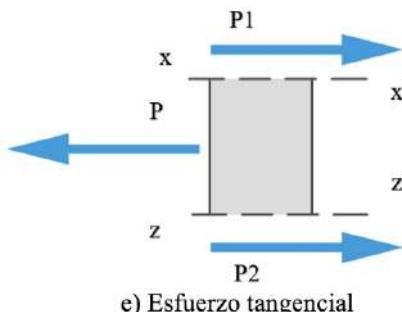


d) Esfuerzo de aplastamiento entre el puntal y el pasador

$$\sigma_{aplas} = \frac{P}{2A}$$

$$\sigma_{aplas} = \frac{100000 \text{ N}}{2(0,014 \text{ m})(0,020 \text{ m})} = 178,57 \text{ MPa}$$

b) Cálculo del esfuerzo tangencial-corte en el pasador;

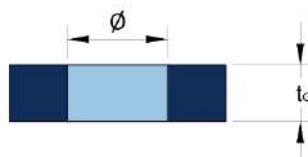


e) Esfuerzo tangencial

$$\tau = \frac{P}{2A}$$

$$\tau = \frac{100\,000 \text{ N}(4)}{2(\pi)(0,02 \text{ m})^2} = 159,15 \text{ MPa}$$

c) Cálculo esfuerzo de aplastamiento entre el pasador y las placas de unión;

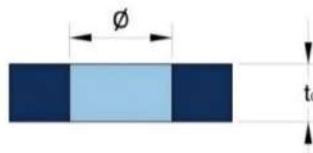


f) Esfuerzo de aplastamiento entre el pasador y las placas de unión

$$\tau_{aplas} = \frac{P}{A}$$

$$\sigma_{aplas} = \frac{100\,000 \text{ N}}{2(0,016 \text{ m})(0,020 \text{ m})} = 156,25 \text{ MPa}$$

Cálculo del esfuerzo de aplastamiento entre el anclaje y la placa base.



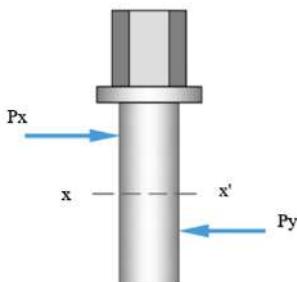
g) Esfuerzo de aplastamiento entre al ancla y la placa base

$$\tau_{aplas} = \frac{F}{A}$$

$$= \frac{P_X}{4 * t_G * \emptyset}$$

$$\sigma_{aplas} = \frac{(100\,000 \text{ N}) \cos 45}{4(0,010 \text{ m})(0,014 \text{ m})} = 126,27 \text{ MPa}$$

d) Cálculo del esfuerzo tangencial-corte en los pernos de anclaje;



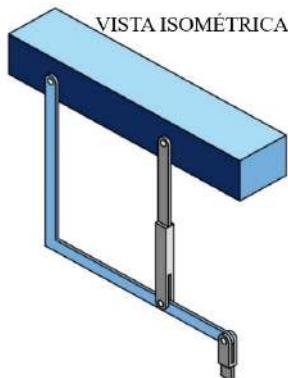
$$\tau_{corte} = \frac{F}{4A}$$

$$\tau_{corte} = \frac{(100\,000 \text{ N}) \cos 45(4)}{4(\pi(0,014 \text{ m})^2)} = 11,484 \text{ MPa}$$

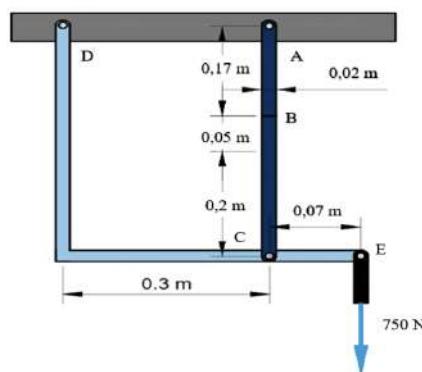
h) esfuerzo tangencial corte
en los pernos de anclaje

10) En el soporte mostrado en la Fig. 1.32, la porción superior del eslabón ABC es de 0,9525 cm de espesor y las porciones inferiores de 0,635 cm de espesor. Se utiliza resina para unir la porción superior con la inferior en B. El pasador A tiene un diámetro de 0,9525 cm, mientras que en C se emplea un pasador de 0,635 cm. Determine:

- a) El esfuerzo cortante en el pasador A;
- b) El esfuerzo cortante en el pasador C;
- c) El máximo esfuerzo normal en el eslabón ABC;
- d) El esfuerzo cortante de las superficies pegadas en B;
- e) El esfuerzo de apoyo en el punto C del eslabón ABC.



a) Vista Isométrica

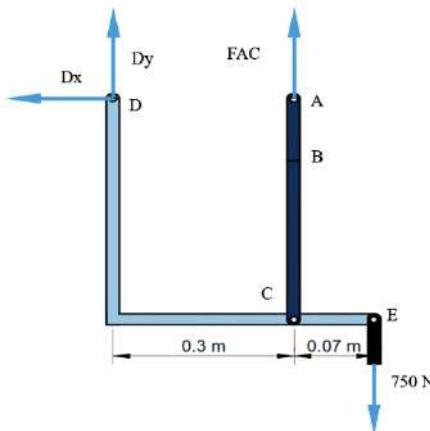


b) Soporte

Fig. 1.32. Soporte y su vista isométrica

Desarrollo:

DCL



b) Diagrama de cuerpo libre del soporte

Se procede a calcular la fuerza en el eslabón ABC.

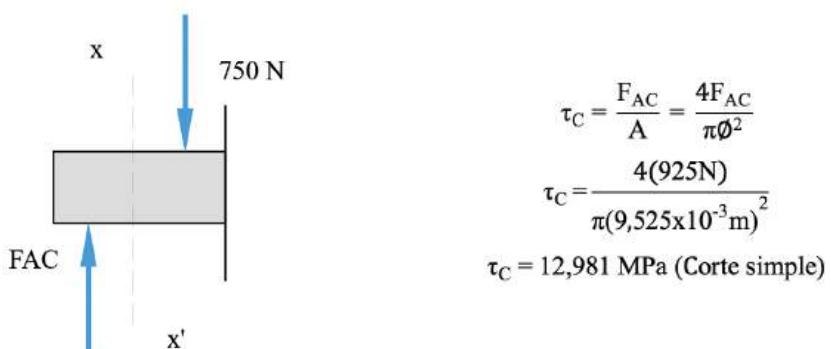
$$\sum M_D = 0 \text{ (c)} +$$

$$F_{AC}(0,3 \text{ m}) - 750 \text{ N}(0,37 \text{ m}) = 0$$

$$F_{AC} = \frac{750 \text{ N}(0,37 \text{ m})}{0,3 \text{ m}} = 925 \text{ N}$$

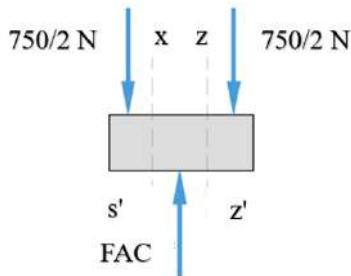
a) Esfuerzo cortante en A;

DCL perno en A



c) Diagrama de cuerpo libre perno en A

b) Esfuerzo cortante en C: se trata de un esfuerzo de corte doble;



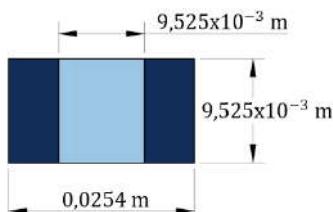
$$\tau_C = \frac{F_{AC}}{2A} = \frac{4F_{AC}}{2\pi\phi^2}$$

$$\tau_C = \frac{4(925 \text{ N})}{2\pi(6,35 \times 10^{-3} \text{ m})^2}$$

$$\tau_C = 14,604 \text{ MPa}$$

d) Esfuerzo de corte doble

c) Maximo esfuerzo normal en la barra ABC;



$$\sigma_n = \frac{F_{AC}}{A}$$

$$\sigma_n = \frac{925 \text{ N}}{(9,525 \times 10^{-3} \text{ m})(0,02 \text{ m} - 9,525 \times 10^{-3} \text{ m})}$$

$$\sigma_n = 9,27 \text{ MPa}$$

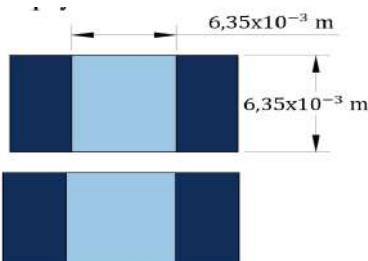
e) Esfuerzo normal en la barra ABC

d) Esfuerzo cortante de las superficies pegadas: al estar pegadas dos superficies a manera de mensula, se puede considerar un esfuerzo de corte doble;

$$\tau_C = \frac{F_{AC}}{A} = \frac{F_{AC}}{2l*a}$$

$$\tau_C = \frac{925 \text{ N}}{2(0,02 \text{ m})(0,05 \text{ m})} = 462,5 \text{ kPa}$$

e) Esfuerzo de apoyo en el eslabon C: el esfuerzo en este ítem puede ser considerado uno de aplastamiento, ya que se refiere al esfuerzo de apoyo.



$$\sigma = \frac{F_{AC}}{A} = \frac{F_{AC}}{2t\phi c}$$

$$\sigma = \frac{925 \text{ N}}{2(6,35 \times 10^{-3} \text{ m})(6,35 \times 10^{-3} \text{ m})}$$

$$\sigma = 11,47 \text{ MPa}$$

f) Esfuerzo de apoyo en el eslabón C

Donde:

σ , representa el esfuerzo

F , representa la fuerza

A , representa el area

$\emptyset c$, representa la sección interna del apoyo

- 11) Determine los esfuerzos normales y de aplastamiento en los elementos A-B y B-C; además; el esfuerzo cortante en cada uno de los pasadores. Los pasadores son del mismo diámetro.

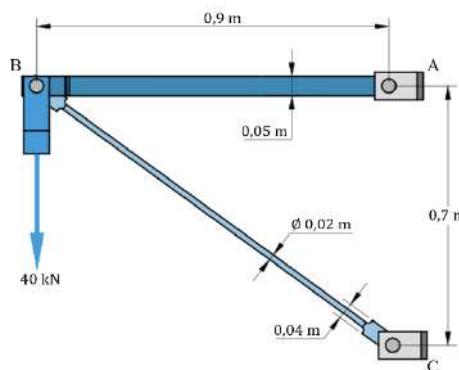
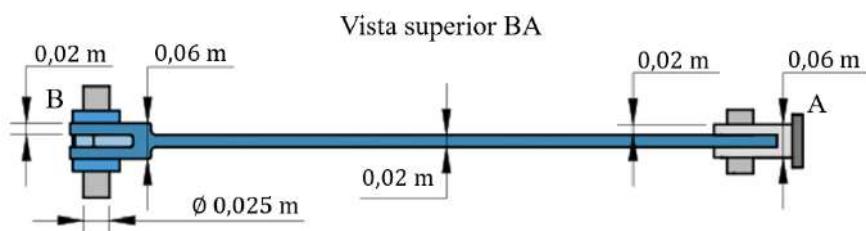
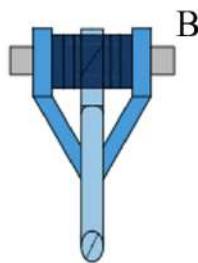


Fig. 1.33. Sistema A-B y B-C



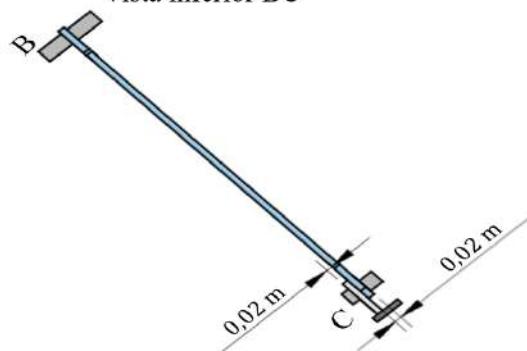
a) Vista Superior del sistema

Vista del extremo



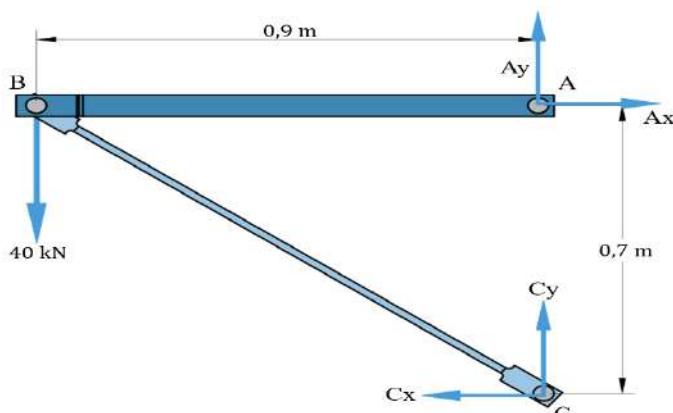
c) Vista del extremo B

Vista inferior BC



d) Vista inferior BC

Desarrollo:



e) Diagrama de cuerpo libre del sistema

Realizando sumatoria de fuerzas en Y

$$\sum F_y = 0 \ (\uparrow) +$$

$$Ay + Cy = 40 \text{ kN}$$

$$Cy = 40 \text{ kN}$$

Realizando sumatoria de fuerzas en X

$$\sum F_x = 0 \ (\rightarrow) +$$

$$Cx = Ax$$

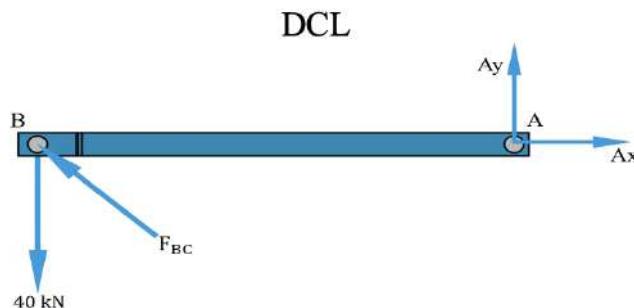
Realizando sumatoria de momentos con respect al punto A

$$\sum M_A = 0 \ (\curvearrowleft) +$$

$$40 \text{ kN} (0,9 \text{ m}) - Cx (0,7 \text{ m})$$

$$Cx = 51,42 \text{ kN}$$

$$Ax = 51,42 \text{ kN}$$



f) Diagrama de cuerpo libre de AB

$$\sum M_B = 0 \ (\curvearrowleft) +$$

$$Ay = 0$$

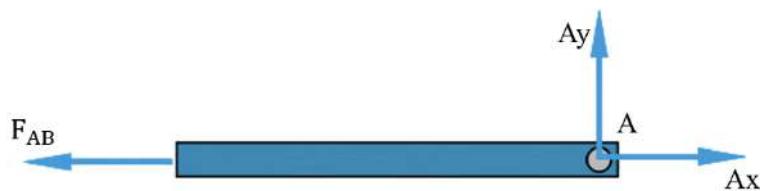
$$\sum F_x = 0 \ (\rightarrow) +$$

$$Ax = F_{BC} \cdot \cos(37,87^\circ)$$

$$F_{BC} = \frac{51,42 \text{ kN}}{\cos(37,87^\circ)}$$

$$F_{BC} = 65,137 \text{ kN} (\text{Compresión})$$

DCL



g) Diagrama de cuerpo libre en A

Realizando sumatoria de fuerzas en X

$$\sum F_x = 0 \rightarrow +$$

$$Ax - F_{AB} = 0$$

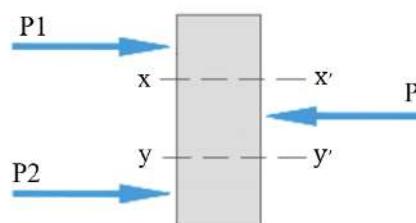
$$Ax = F_{AB}$$

$$F_{AB} = 51,42 \text{ kN (Tracción)}$$

ESFUERZOS EN A

- CORTE

DCL pasador en A



h) Diagrama de cuerpo libre corte en pasador en A

$$\tau_A = \frac{F_{AB}}{2A}$$

Donde:

τ_A , representa el esfuerzo cortante en el punto A

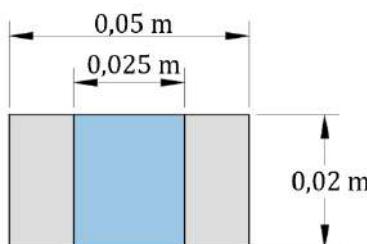
$$\tau_A = \frac{F_{AB}(4)}{2(\pi(\phi^2))}$$

$$\tau_A = \frac{51,42 \text{ kN}(4)}{2\pi(0,025 \text{ m})^2}$$

$$\tau_{A(\text{corte doble})} = 52,375 \text{ MPa}$$

- NORMAL

DCL tracción



i) Diagrama de cuerpo libre tracción

$$\sigma_A = \frac{F_{AB}}{A}$$

$$\sigma_A = \frac{F_{AB}}{(h_{AB} - \phi_A)(t_{AB})}$$

Donde:

σ_A , representa el esfuerzo normal en A

F, representa la fuerza

A, representa el area

h_{AB} , representa la sección externa del elemento

ϕ_A , representa la sección interna del elemento

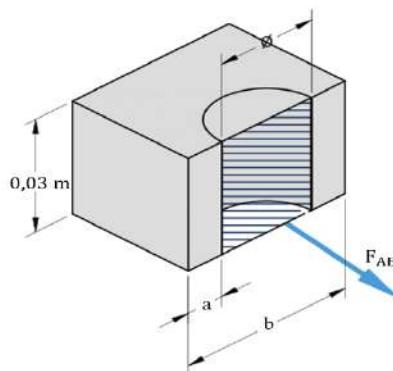
t_{AB} , representa la sección vertical del elemento

$$\sigma_A = \frac{51,42 \text{ kN}}{(0,05 \text{ m} - 0,025 \text{ m})(0,02 \text{ m})}$$

$$\sigma_A = 176,8 \text{ MPa}$$

- APLASTAMIENTO

DCL aplastamiento



j) Diagrama de cuerpo libre aplastamiento

$$\sigma_A = \frac{F_{AB}}{A}$$

$$\sigma_A = \frac{F_{AB}}{\emptyset_A(t_{AB})}$$

Donde:

σ_A , representa el esfuerzo normal en A

F, representa la fuerza

A, representa el area

\emptyset_A , representa el diámetro interno del elemento

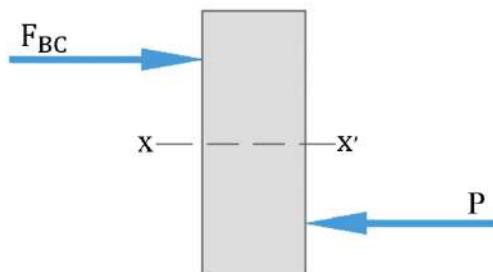
t_{AB} , representa la sección vertical del elemento

$$\sigma_A = \frac{51,42 \text{ kN}}{0,025\text{m}(0,03\text{m})} = 68,560 \text{ MPa}$$

ESFUERZOS EN C

- CORTE

DCL CORTE



k) Diagrama de cuerpo libre corte en C

$$\tau_C = \frac{F_{BC}}{A}$$

$$\tau_C = \frac{F_{BC}(4)}{\pi(\varnothing^2)}$$

Donde:

τ_C , representa el esfuerzo cortante

F , representa la fuerza

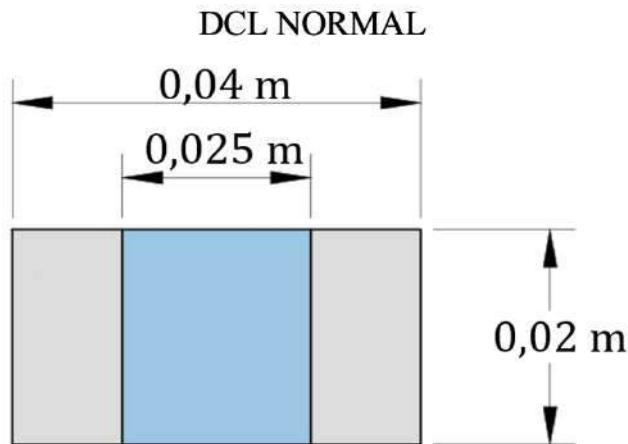
A , representa el area

\varnothing , representa el diametro

$$\tau_C = \frac{65,137 \text{ kN}(4)}{\pi(0,025 \text{ m})^2}$$

$$\tau_{C(\text{corte simple})} = 132,7 \text{ MPa}$$

- NORMAL



l) Diagrama de cuerpo libre de la normal

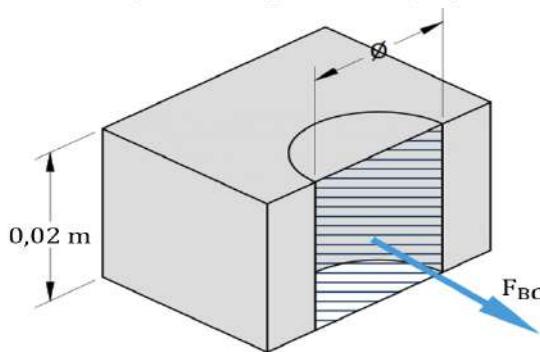
$$\sigma_C = \frac{F_{BC}}{A}$$

$$\sigma_C = \frac{F_{BC}}{(h_{BC} - \phi_C)(t_{BC})}$$

$$\sigma_C = \frac{65,137 \text{ kN}}{(0,04 \text{ m} - 0,025 \text{ m})(0,02 \text{ m})} = 217,12 \text{ MPa}$$

- APLASTAMIENTO

DCL APLASTAMIENTO



m) Diagrama de cuerpo libre aplastamiento

$$\sigma_C = \frac{F_{BC}}{A}$$

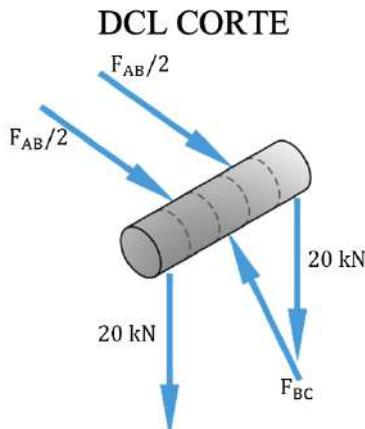
$$\sigma_C = \frac{F_{BC}}{\phi_C(t_{BC})}$$

$$\sigma_C = \frac{65,137 \text{ kN}}{0,025 \text{ m} (0,02 \text{ m})} = 130,274 \text{ MPa}$$

ESFUERZOS EN B

- CORTE

Se conoce que la fuerza BC es la mayor entonces el esfuerzo se procede a calcular con ese valor (Fig. 1.33m) entonces:



n) Diagrama de cuerpo libre corte en B

$$\tau_B = \frac{F_{BC}}{2A} = \frac{F_{BC}(4)}{2\pi(\phi^2)}$$

$$\tau_B = \frac{65,137 \text{ kN}(4)}{2\pi(0,025 \text{ m})^2}$$

$$\tau_{B(\text{corte doble})} = 66,348 \text{ MPa}$$

- NORMAL

El esfuerzo es el mismo a lo largo de la barra por lo tanto

BARRA AB

$$\sigma_B = 176,8 \text{ MPa}$$

BARRA BC

$$\sigma_B = 217,12 \text{ MPa}$$

- APLASTAMIENTO

BARRA AB
 $\sigma_B = 68,560 \text{ MPa}$

BARRA BC
 $\sigma_B = 130,274 \text{ MPa}$

NOTA: Si el diámetro del pasador es el mismo, tanto el esfuerzo de aplastamiento como el esfuerzo normal serán iguales en ambos extremos de la barra. Sin embargo, si los diámetros son diferentes, los esfuerzos variarán.

- 12) La barra tiene una sección transversal cuadrada de 0,045 m. Si se aplica una fuerza axial de 100 N a lo largo del eje centroidal del área transversal de la barra, determine el esfuerzo normal promedio y el esfuerzo cortante promedio que actúan sobre el material a lo largo del plano.

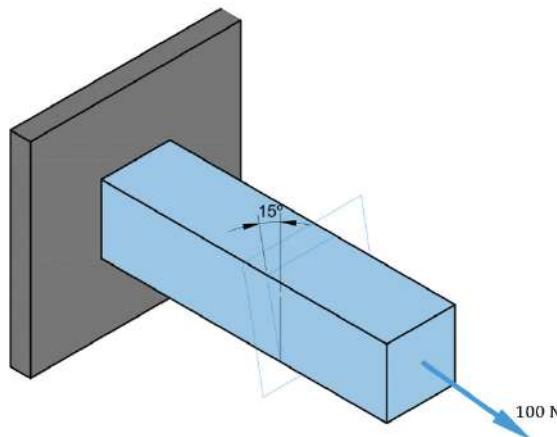
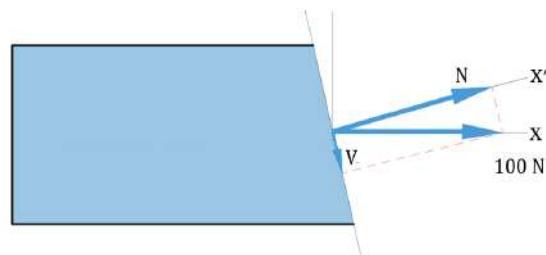


Fig. 1.34. Barra con una sección transversal

Desarrollo:



a) Diagrama de cuerpo libre sección transversal

Realizando sumatoria de fuerzas en X

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 (\nearrow) + \\ N + 100 \text{ N} \cos(15^\circ) &= 0 \\ N &= -96,56 \text{ N}\end{aligned}$$

Realizando sumatoria de fuerzas en X

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 (\searrow) + \\ V + 100 \text{ N} \sin(15^\circ) &= 0 \\ V &= 25,88 \text{ N}\end{aligned}$$

En este caso el área seccionada tiene un espesor de 0,045 m y una profundidad de $\frac{0,045 \text{ m}}{\operatorname{sen}(75^\circ)} = (0,04658 \text{ m})$ respectivamente.

El área es:

$$A = 0,045 \text{ m} (0,047 \text{ m}) = 2,115 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

El esfuerzo normal promedio es entonces:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{N}{A} \\ \sigma &= \frac{96,56 \text{ N}}{2,115 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = 45,655 \text{ kPa}\end{aligned}$$

Por tanto, el esfuerzo cortante promedio es:

$$\tau = \frac{25,88 \text{ N}}{2,115 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = 12,236 \text{ kPa}$$

- 13) La barra que se muestra en la Fig. 1.35, tiene un ancho constante de 0,045 m y un espesor de 0,020 m. Determine el esfuerzo normal promedio máximo en la barra, cuando está sometido a las cargas mostradas.

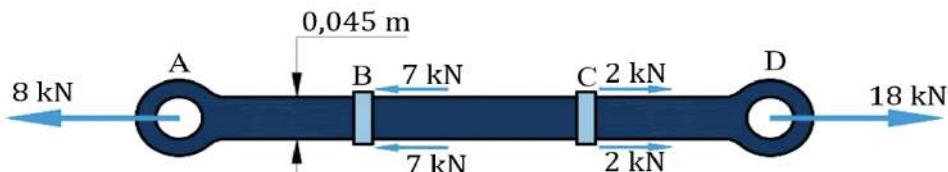
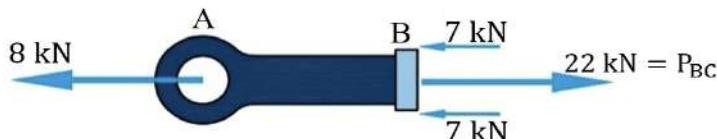


Fig. 1.35. Barra y sus cargas



a) Cargas aplicadas en A y B



b) Cargas aplicadas en A

Desarrollo:

Las fuerzas axiales internas en las regiones AB, BC y CD son todas constantes, aunque en magnitudes diferentes. Estas cargas se determinan usando el método de las secciones Fig. 1.35 a).

La mayor carga se encuentra en la región BC, donde $P_{bc} = 30 \text{ kN}$. Como el área de la sección transversal de la barra es constante, el mayor esfuerzo normal promedio también ocurre dentro de esta región de la barra.

Esfuerzo normal promedio

$$\sigma_{BC} = \frac{P_{BC}}{A} = \frac{22(10^3)\text{N}}{(0,045\text{ m})(0,020\text{ m})} = 24,4 \text{ MPa}$$

14) Determine el esfuerzo cortante promedio en el pasador de 0,035 m de diámetro ubicado en A y en el pasador de 0,045 m de diámetro que está en B, los cuales soportan la viga de la figura.

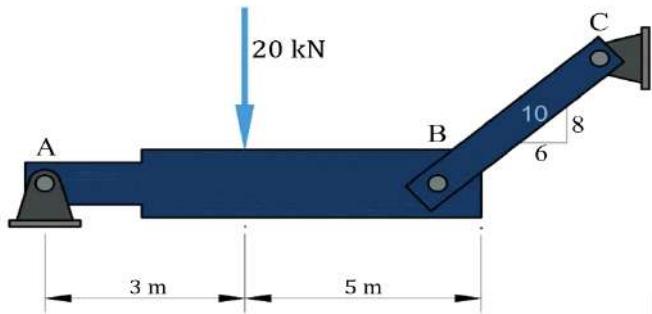
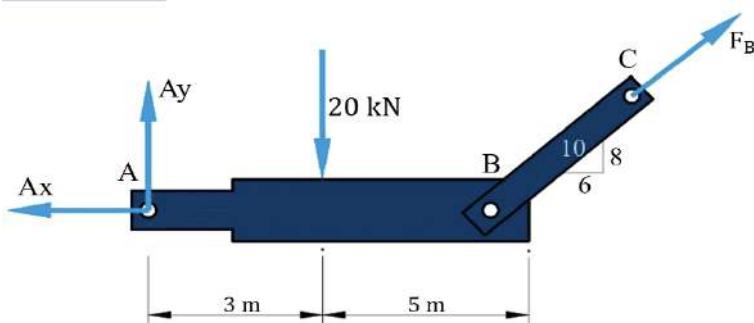


Fig. 1.36. Viga

Desarrollo:

Las fuerzas sobre los pasadores pueden obtenerse al considerar el equilibrio de la viga (Fig. 1.36a).



a) Cargas aplicadas en A, B y C

Sumatoria de fuerzas de Y

$$\sum F_y = 0 \quad (\uparrow) +$$

$$Ay - 20 \text{ kN} + F_B \left(\frac{8}{10} \right) = 0$$

Sumatoria de fuerzas de X

$$\sum F_x = 0 \rightarrow +$$

$$-Ax + F_B \left(\frac{6}{10} \right) = 0$$

Sumatoria de momentos en el punto A

$$\sum M_A = 0 \curvearrowleft +$$

$$-20 \text{ kN}(3 \text{ m}) + F_B \left(\frac{8}{10} \right)(8 \text{ m}) = 0$$

$$F_B = 9,375 \text{ kN}$$

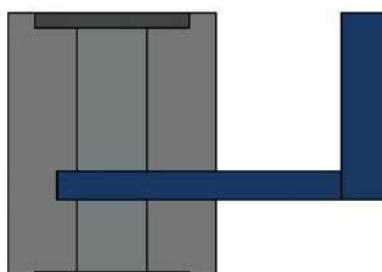
$$Ax = 5,625 \text{ kN}$$

$$Ay = 12,5 \text{ kN}$$

Obtenido las respectivas incógnitas se procede a hallar la fuerza en A la cual es la resultante en el pasador A:

$$F_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(5,625 \text{ kN})^2 + (12,5 \text{ kN})^2} = 13,7 \text{ kN}$$

Dos hojas fijas sostienen el pasador, siendo así existen dos superficies cortantes entre la viga y cada hoja (Fig. 1.36b). Así la fuerza de la viga en este caso 13,7 kN que actúa en el pasador esta soportada por fuerzas cortantes en cada una de las superficies mencionadas. Este caso se llama cortante doble antes mencionado en los anteriores ejercicios. Por lo tanto:



b) Viga y cada hoja

$$V_A = \frac{F_A}{2} = \frac{13,7 \text{ kN}}{2} = 8,85 \text{ kN}$$

En la Fig. 1.36b, observe que el pasador B está sometido a cortante simple, el cual ocurre en la sección comprendida entre el cable y la viga, para este segmento de pasador, se tiene:

$$V_B = F_B = 9,375 \text{ kN}$$

Esfuerzo cortante promedio.

$$(T_A)_{\text{prom}} = \frac{V_A}{A_A} = \frac{8,85 \text{ kN}}{\pi(0,035 \text{ m})^2} = 2,3 \text{ MP}_a$$

Donde:

T_A _{prom} = representa esfuerzo cortante promedio

A_A = Área con respecto a A

$$(T_B)_{\text{prom}} = \frac{V_B}{A_B} = \frac{9,375 \text{ kN}}{\pi(0,03 \text{ m})^2} = 1,47 \text{ MP}_a$$

Donde:

A_B = Área con respecto a B

- 15) El elemento AC que se muestra en la figura 1.37, está sometido a una fuerza vertical de 5 kN. Determine la posición x de esta fuerza de manera que el esfuerzo de tensión promedio en el tirante AB. Este tirante tiene un área en su sección transversal de $250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ y el área de contacto en C es de $550 \times 10^{-6} \text{ m}^2$.

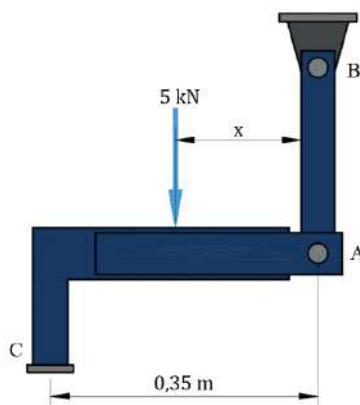


Fig. 1.37. Sistema AC

Desarrollo:

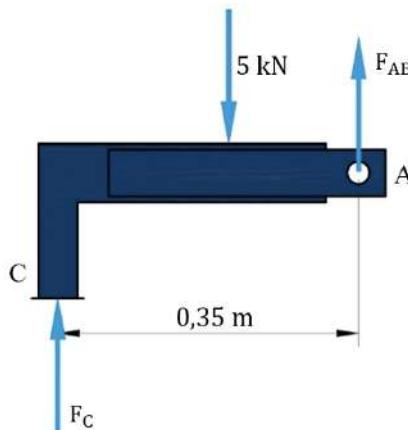
Las fuerzas en A y C pueden relacionarse al considerar el diagrama de cuerpo libre del elemento AC (Fig. 1.37a). Existen tres incógnitas, éstas son: F_{AB} , F_C y x .

Realizando sumatoria de fuerzas en Y

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad F_{AB} + F_C - 5\ 000 \text{ N} = 0 \quad (1)$$

Realizando sumatoria de momentos em A

$$\text{O}\uparrow \sum M_A = 0; \quad - 5000 \text{ N}(x) + F_C(0,35 \text{ m}) = 0 \quad (2)$$



(a) Cargas aplicadas en A y C

Puede escribir una tercera ecuación, la cual requiere que el esfuerzo de tensión en la barra AB y el esfuerzo de compresión en C sean equivalentes Fig. 1.37 a), es decir:

$$\sigma = \frac{F_{AB}}{250 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = \frac{F_C}{550 \times 10^{-6} \text{ m}^2}$$

$$F_C = 2,2 F_{AB}$$

Al sustituir esto en la ecuación 1, despejar F_{AB} y después despejar F_C'

$$F_{AB} = 1\ 562,5 \text{ N}$$

$$F_C = 3\ 437,5 \text{ N}$$

La posición de la carga aplicada se determina a partir de la ecuación 2:

$$x = 0,240 \text{ m}$$

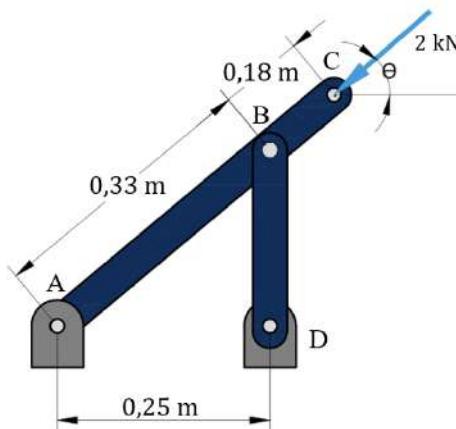
EJERCICIOS PROPUESTOS

F1-1. El eslabón BD es una barra de 0,0508 m de ancho y $8,467 \times 10^{-3}$ m de espesor. Si se sabe que cada pasador tiene un diámetro de 0,019 m, calcule el valor máximo del esfuerzo normal promedio en el eslabón BD si:

Considerar la concordancia de las unidades, realizar las conversiones necesarias.

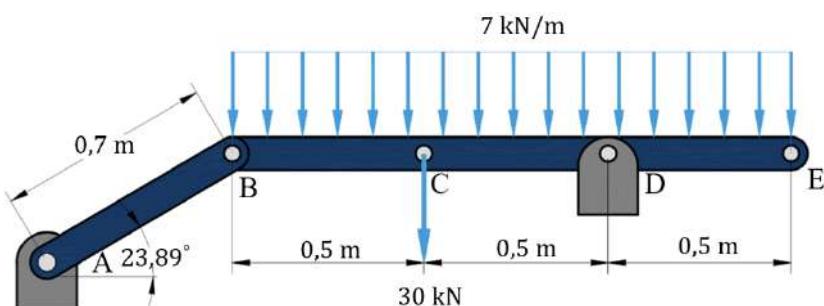
a) $\theta=10^\circ$

b) $\theta=80^\circ$



F1-1. Eslabón BD

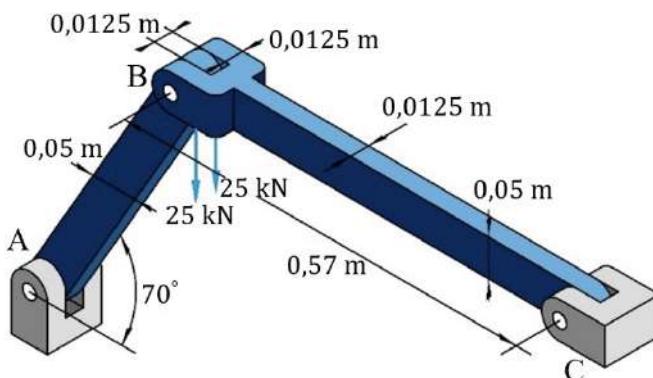
F1-2. El eslabón BE debe fabricarse con un acero cuya resistencia última a la tensión sea de 400 MPa. Determine el área de la sección transversal de AB para la cual el factor de seguridad es de 3. Suponga que el eslabón se reforzará de manera adecuada alrededor de los pasadores en A y B.



F1-2. Eslabón BE aplicadas cargas

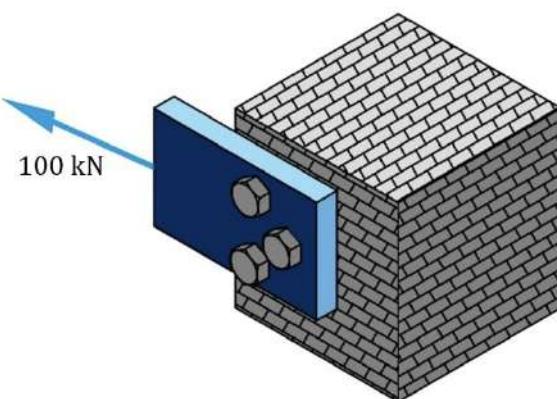
F1-3. Dos fuerzas verticales de 25 kN se aplican al pasador B en el ensamble que se muestra. Si se sabe que en cada conexión se emplea un pasador de 0,02 m de diámetro y la longitud del eslabón AB es 0,04 m , determine el valor máximo del esfuerzo normal promedio:

- a) En el eslabón AB;
- b) En el eslabón BC;



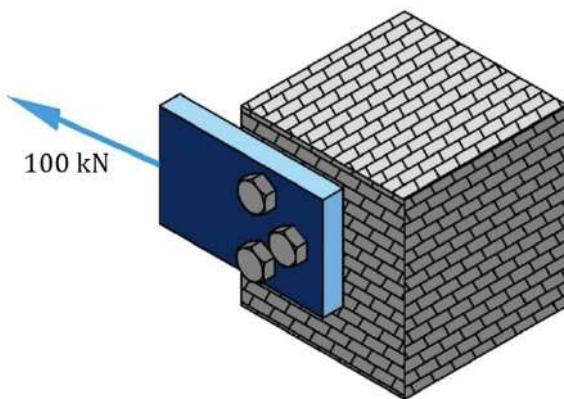
F1-3. Ensamble con pasador B

F1-4. Tres pernos de acero de 0,015 m de diámetro se utilizan para unir la placa de acero a una pared, como se muestra en la figura. Si se sabe que la placa puede soportar una carga de 100 kN y que el esfuerzo cortante último para el acero utilizado es de 300 MPa. Determine el factor de seguridad para este diseño.



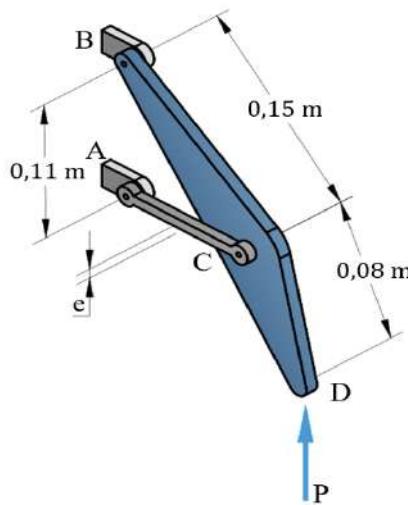
F1-4. Placa unión con pernos a una pared

F1-5. Tres pernos de acero serán utilizados para unir la placa de acero con una pared, como se muestra en la figura. Si se sabe que la placa puede soportar una carga de 100 kN, que el esfuerzo cortante último para el acero utilizado es de 300 MPa y que se desea un factor de seguridad de 3. Determine el diámetro requerido para los pernos.



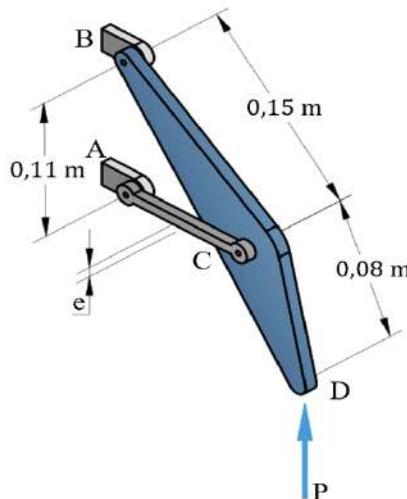
F1-5. Placa unión con pernos a una pared

F1-6. El eslabón horizontal AC tiene 0,0127 m de grosor y un ancho $e = 0,038 \text{ m}$ y está fabricado de acero con una resistencia última a la tensión de 311 kN. ¿Cuál es el factor de seguridad si la estructura mostrada se diseñó para soportar una carga $P = 4 \text{ kN}$?



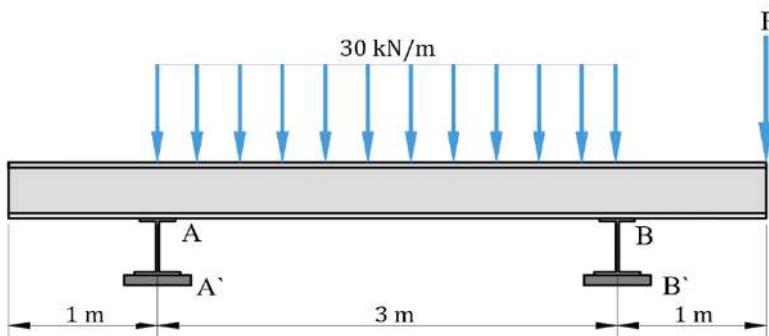
F1-6. Estructura con un eslabón horizontal AC

F1-7. El eslabón horizontal AC tiene 0,0127 m de espesor y es de un acero con una resistencia última a la tensión de 455 MPa. ¿Cuál debe ser su ancho e si la estructura mostrada se diseñó para soportar una carga $P = 40 \text{ kN}$ con un factor de seguridad igual a 2,5?



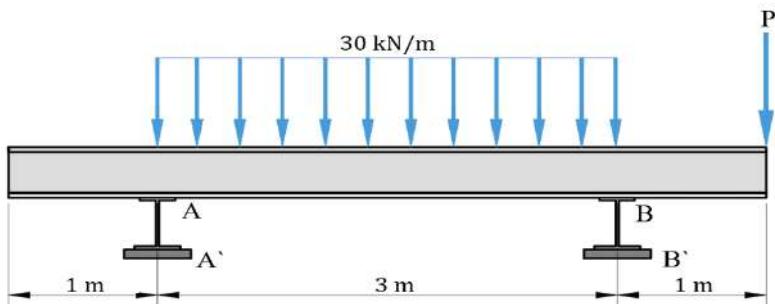
F1-7. Estructura con un eslabón horizontal AC

F1-8. Si el esfuerzo de aplastamiento permisible para el material debajo de los soportes en A y B es de $(\sigma_b)_{perm} = 1,3 \text{ MPa}$, se requiere determinar el tamaño de las placas cuadradas de apoyo A' y B' necesarias para soportar la carga. Es necesario calcular las dimensiones de las placas con una exactitud de 0,002 m. Las reacciones en los soportes son verticales y se considera una carga $P = 98 \text{ kN}$.



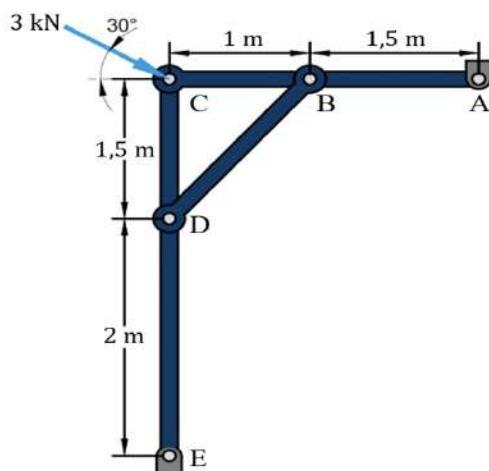
F1-8. Eslabón horizontal

F1-9. Si el esfuerzo de aplastamiento permisible para el material que se encuentra bajo los soportes en A y B es (σ_b)_{perm} = 1,3 MPa, determine la carga máxima P que puede aplicarse a la viga. Las placas de apoyo A' y B' tienen secciones transversales cuadradas de 0,12 m x 0,12 m y 0,22 m x 0,22 m, respectivamente.



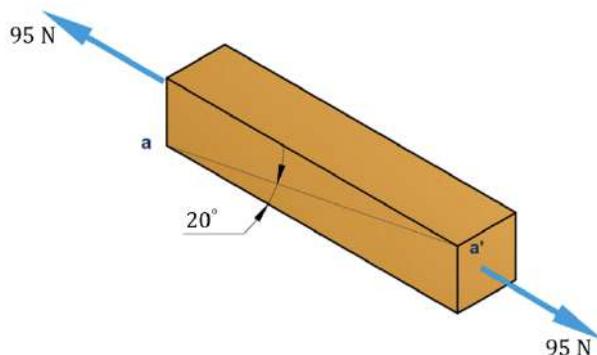
F1-9. Eslabón horizontal

F1-10. El bastidor está sometido a una carga de 3 kN que actúa sobre el elemento CDE en C según se puede observar en la Fig. P1.10. Determine el diámetro requerido de los pernos en C y B si el esfuerzo cortante permisible para el material es $\sigma_{perm}=35$ MPa. El pasador B está sometido a cortante doble mientras que el pasador C está sometido a cortante simple.



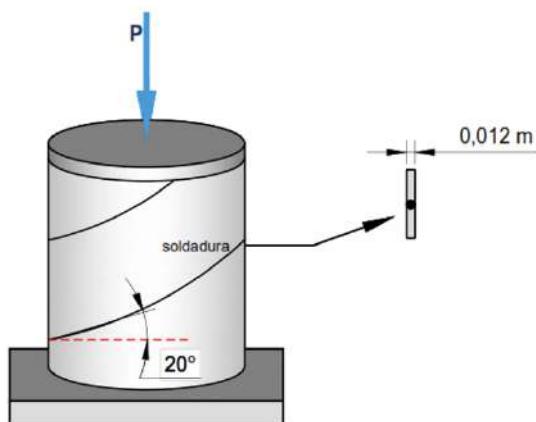
F1-10. Bastidor

F1-11. La pieza de madera de $0,0635 \text{ m} \times 0,0635 \text{ m}$ de espesor está sometido a una fuerza de tensión de 95 N. Determine los esfuerzos normal y cortante promedio desarrollados en las fibras de la madera orientadas a lo largo de la sección a-a, a 20° con respecto el eje de la pieza.



F1-11. Pieza de madera

F1-12. Un tubo de acero de $0,450 \text{ m}$ de diámetro exterior se fabrica a partir de una placa de $0,012 \text{ m}$ de espesor soldado a lo largo de una hélice que forma un ángulo de 20° con un plano perpendicular al eje del tubo. Si se sabe que los esfuerzos normal y cortante máximos permisibles, en las direcciones respectivas normal y tangencial a la soldadura, son de 20 MPa y 16 MPa , respectivamente, determine la magnitud P de la máxima fuerza axial que puede aplicarse al tubo.



F1-12. Tubo de acero

CAPÍTULO II 2. DEFORMACIÓN

2.1 INTRODUCCIÓN

El capítulo anterior se enfocó en el estudio de los esfuerzos producidos por cargas externas aplicadas sobre varios elementos de máquinas o estructuras, además, se logró comprender los efectos que produce cada tipo de esfuerzos horizontales en los elementos que se los aplica, con el objetivo de realizar un análisis y diseño de elementos sencillos, los mismos que no fallen cuanto estén sometidos a varios tipos de cargas. Otro efecto de mucho interés que producen las cargas externas sometidas a elementos estructurales o de máquinas es el cambio de forma y tamaño del cuerpo. Este cambio es denominado deformación, el cual deberá ser analizado al momento de realizar el diseño, ya que una deformación excesiva o notable impide que los elementos cumplan con la función destinada.

Sabemos que la estática es de gran utilidad para determinar fuerzas en elementos, considerándolos como un cuerpo rígido e indeformable, pero en la ingeniería a los elementos se los considera como deformables; analizando las deformaciones en cada uno de los elementos que conforman una estructura o máquina podemos llegar a calcular fuerzas que desde el punto estático son imposibles de encontrar. Para determinar la distribución real de los esfuerzos presentes en una estructura o en cada elemento, se necesita analizar las deformaciones que va a sufrir dicho elemento mediante ensayos basados en normas específicas, además, la deformación debe estar en un rango requerido puesto que, este sobrepasa dicho rango, manejado por normas, se lo considerá como una falla; no obstante, si la deformación está por debajo también se considerá como un mal diseño debido a que el elemento se lo considera muy rígido, lo cual conlleva a un sobredimensionamiento existiendo un gasto innecesario de material perdiendo así competitividad. (Ferdinand , y otros, 2013)

2.2 ENSAYO DE TENSIÓN Y COMPRESIÓN

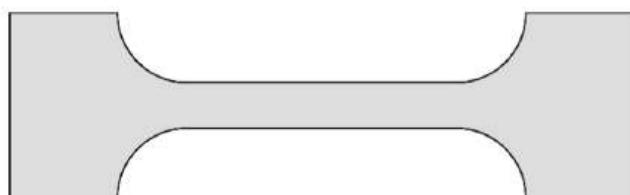
Al deformar un material sin llegar a fracturarse o fallar, el material puede soportar la tensión máxima inherente al propio material y se analiza utilizando métodos experimentales como pruebas de tracción y compresión de materiales de ingeniería, como metales, cerámicos, polímeros, maderas y materiales compuestos. Estos métodos permiten evaluar las propiedades mecánicas y determinar los límites de resistencia del material.

Para realizar estos ensayos se fabrican probetas en base a las normas específicas; para el ensayo de tracción se utiliza la norma INEN.NTE 109:2009 y ASTM E9 para compresión. En estas normas se especifican todos los parámetros que se deben tener en cuenta al momento de realizar los ensayos.

Las probetas fabricadas bajo normas son diseñadas para fallar a lo largo del eje, normalmente bajo condiciones ideales el material colapsará en el centro, basándose en el principio de Saint Venant, pero en realidad los materiales pueden fallar en cualquier parte del elemento debido a sumideros o discontinuidades que los materiales presentan en su estructura.



Fig. 2.1. Probeta normalizada



(a) Ensayo de tracción

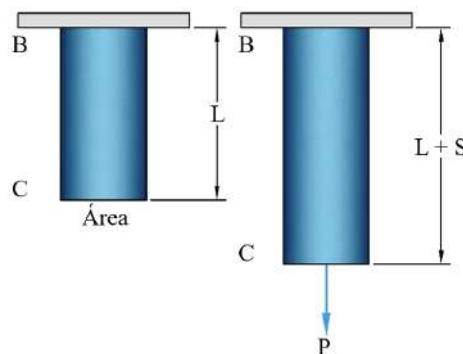
El ensayo se realiza en la Máquina Universal como se muestra en la Fig. 2.2; para ello se asegura la probeta y se aplica una carga de tracción de igual magnitud en cada uno de sus extremos a bajas velocidades; al aumentar la carga el material empieza a deformarse incrementando su longitud, siendo posible medir la carga P directamente de la máquina y la deformación δ a través de un deformímetro, hasta llegar al colapso del material. (Hibbeler, 2010)



Fig. 2.2. Máquina universal.

2.3 DEFORMACIÓN NORMAL BAJO CARGA AXIAL

Se considera una varilla de longitud L y sección uniforme A que se encuentra suspendida, y que al aplicar una carga P como se muestra en la Fig. 2.3 a y b, sufrirá un alargamiento producto de esta. Al graficar la magnitud P (Fuerza) vs la deformación total (δ) se obtiene el diagrama de carga-deformación. Este diagrama nos ayuda a determinar propiedades intrínsecas del material, tales como: rigidez (oposición a la deformación), ductilidad (capacidad del material a someterse a cargas normales) y resistencia (oposición a la fractura), como se muestra en la Fig. 2.3.a y b.



a) Varilla con Longitud L

b) Deformación bajo carga normal.

Fig. 2.3. Varilla

Cabe resaltar que este diagrama es muy importante y contiene mucha información útil del elemento en análisis, que no puede emplearse directamente para predecir propiedades de elementos que se encuentren hechos del mismo material.

$$\delta = L_f - L_0 \quad (2,1)$$

Donde:

δ : Alargamiento o deformación en m;

L_f : Longitud final en m;

L_0 : Longitud inicial en m.

Si representamos en un diagrama los valores de carga vs deformación con datos obtenidos de ensayos en el laboratorio de resistencia de materiales llegamos a representar una gráfica, como la mostrada en la Fig. 2.4.

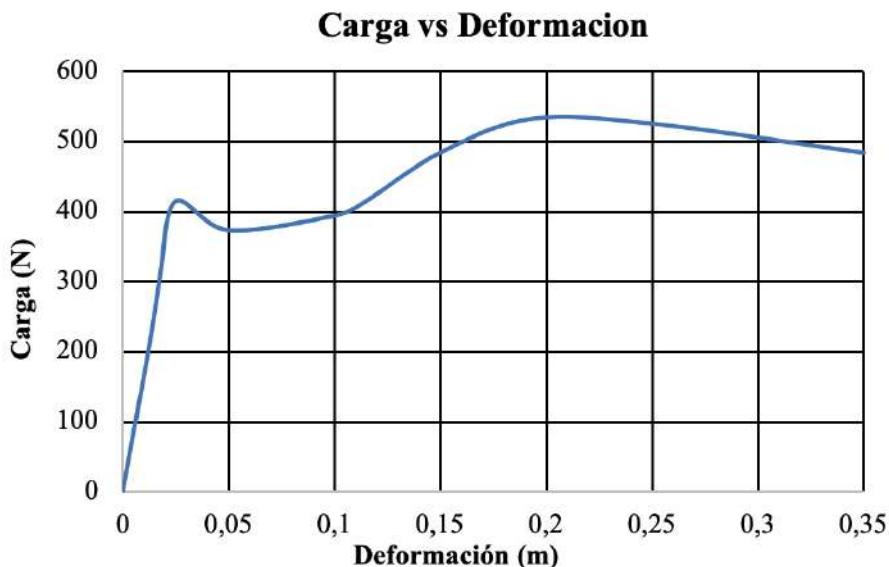


Fig. 2.4. Diagrama carga-deformación.

Si se considera una varilla de longitud L y una carga P aplicada sobre ella, se producirá una deformación δ , siendo esta la misma si la varilla tiene una longitud L pero de área transversal $2A$ y una carga $2P$; con ello se puede observar que las dos varillas tienen el mismo esfuerzo, concluyendo que la deformación de una varilla o eje, depende únicamente del material con la cual está hecha y no de su forma o geometría, como se muestra en la Fig. 2.5a, b, c y d.

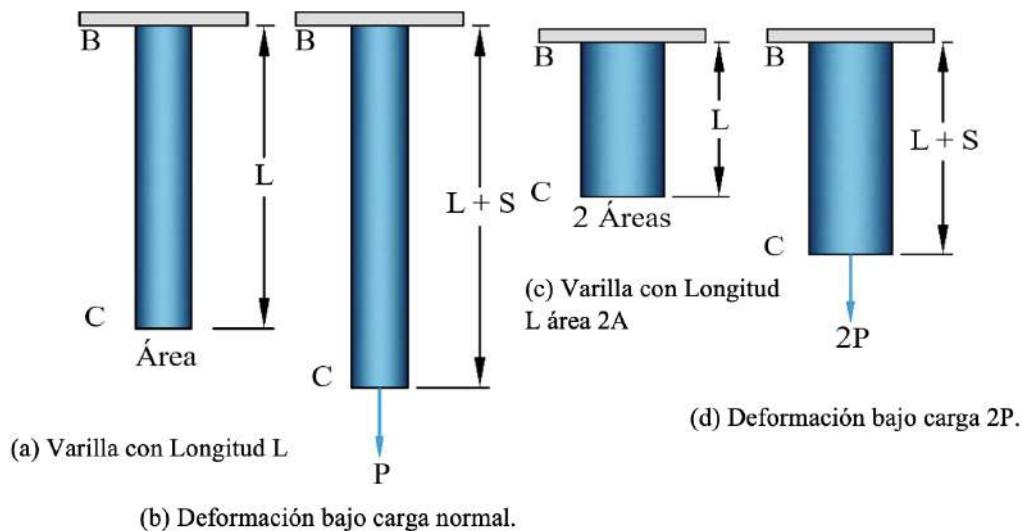


Fig. 2.5. Varilla

Como se puede observar, las varillas van a ser expuestas a deformación unitaria, que es la deformación por cada unidad de longitud de las mismas; para los casos anteriores la deformación por longitud es la misma.

$$\epsilon (\epsilon = \frac{\delta}{L}) \text{, al igual que el valor de esfuerzo que será el mismo.}$$

Donde:

ϵ representa la deformación unitaria de la varilla.

δ representa el alargamiento o deformación.

L representa la longitud de la varilla en (m).

2.4 DIAGRAMA ESFUERZO-DEFORMACIÓN UNITARIA

Como ya se vio anteriormente, el diagrama carga vs deformación nos presenta las propiedades intrínsecas de cada material; para realizar un diagrama que no tenga que ver con la geometría del elemento sino únicamente con el material, se realiza un ensayo o prueba de tensión sobre una probeta con una longitud inicial L_0 . Montada la probeta en la máquina universal la cual aplica una carga P tensionando el material, con ello al ir incrementando el valor de la carga se produce

una deformación cambiando la longitud de la probeta, logrando así determinar el alargamiento δ y finalmente los valores de esfuerzos y deformaciones, obteniendo así el diagrama esfuerzo σ - deformación unitaria ϵ .

El esfuerzo se puede llegar a determinar con la siguiente fórmula:

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \quad (2,2)$$

Dónde:

σ : representa el esfuerzo.

P : representa el carga aplicada a la varilla de longitud L

A_0 : representa el área transversal inicial de la probeta

Mientras la deformación unitaria se calcula con la siguiente fórmula:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L_{\text{inicial}}} \quad (2,3)$$

Dónde:

ϵ : Deformación unitaria.

δ : Alargamiento que sufre el elemento.

L_{inicial} : Longitud inicial de la barra antes del ensayo.

Esfuerzo vs Deformacion Unitaria

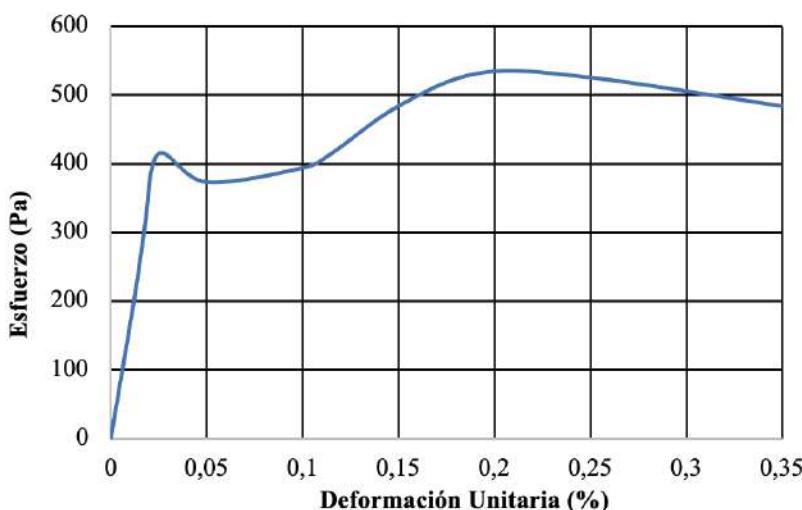
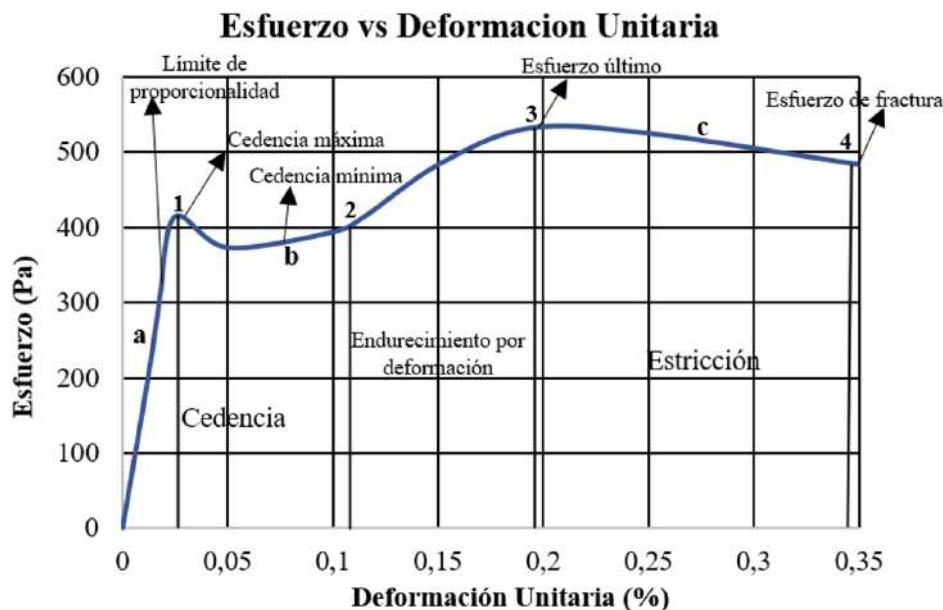


Fig. 2.6. Diagrama esfuerzo- deformación unitaria.

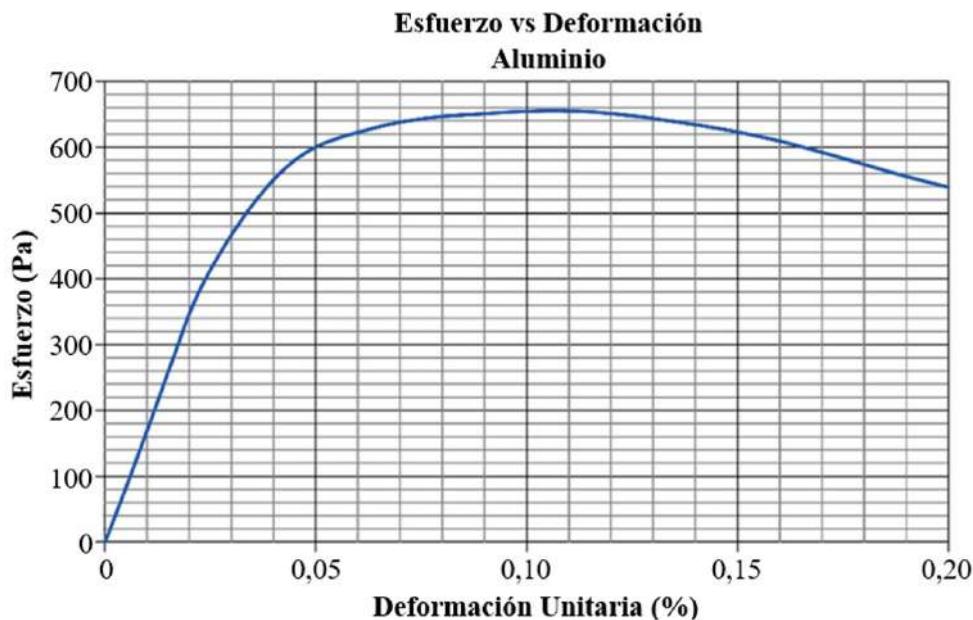
Se sabe que el diagrama esfuerzo – deformación unitaria de un material en particular nos estrega datos útiles e importantes del mismo; pero estos diagramas llegan a variar muy notablemente debido a las condiciones de ensayo, ya sea porque se ha variado la temperatura o la velocidad de aplicación de la carga. Por lo tanto, los materiales pueden ser divididos en categorías amplias y con características comunes entre sí, existiendo así materiales dúctiles y frágiles.

Los materiales dúctiles pueden ser de aceros estructurales, aleaciones metálicas; se caracterizan por su buena fluidez a temperaturas normales. En la máquina universal el material se somete lentamente una carga la cual se puede observar cómo varía linealmente el esfuerzo con respecto a la deformación, comportándose de una forma elástica y así la porción de diagrama es una línea recta de pendiente pronunciada, el material se seguirá deformando hasta alcanzar la zona de fluencia, una vez pasada esta zona se llega el esfuerzo máximo que soporta el material antes de la fractura.

Como se puede observar en las Fig. 2.7 a) y Fig. 2.7 b), las curvas esfuerzo vs deformación unitaria varían para cada material.



a) Diagrama esfuerzo vs deformación acero A36.



b) Diagrama esfuerzo vs deformación del aluminio.

2.4.1 Descripción del diagrama esfuerzo-deformación para materiales dúctiles

La zona *a* representa la zona elástica y ésta rige bajo la Ley de Hook, misma que nos indica que un material sometido a una carga, que sufre un alargamiento o acortamiento, al retirar la carga éste recupera su forma; a esto se lo conoce como memoria del material.

El punto *1* se conoce como cedencia o fluencia máxima o en donde el material pasa del estado elástico al plástico y comienza a fluir o deslizarse; este punto de fluencia máxima ocurre de manera instantánea, y el material entra en fluencia; a partir de este punto su deformación puede ser 200 veces más grande que la anterior.

La zona *b* representa la zona de cedencia o fluencia mínima o estable, es decir, en donde el elemento que está sometido a una carga se prepara para un nuevo cambio o condición porque en esta zona es en donde la materia del elemento fluye o se desliza, y este es el valor que se encuentra tabulado. Además, no ocurre de manera instantánea, sino que se mantiene, y es aquí en donde el material realiza su fluencia.

La zona *c* representa la zona de deformación y es aquí en donde el material deformado ya no puede recuperar su forma.

El punto 3 es el punto de esfuerzo máximo, resistencia máxima o estriccción, donde se produce un cambio de sección considerable.

El punto 4 es el punto de resistencia última donde el elemento finalmente se fractura.

Existen algunos materiales en donde la zona de fluencia en el diagrama de carga-deformación es imperceptible; un ejemplo muy común de estos es el aluminio por ser un material dúctil, pero para cuando se requiera saber cuál es su zona de fluencia, hay un método para poder señalarlo en el cual consiste en:

1. Ubicar un punto en donde se ve que termina la zona elástica, es decir, donde en la gráfica termina de ser una recta.
2. Ubicar en 0,2 % en el eje de deformación, y ya identificada la recta en el primer paso, se traza una recta paralela a ésta hasta que corte la curva; el punto de intersección sería la zona de fluencia.

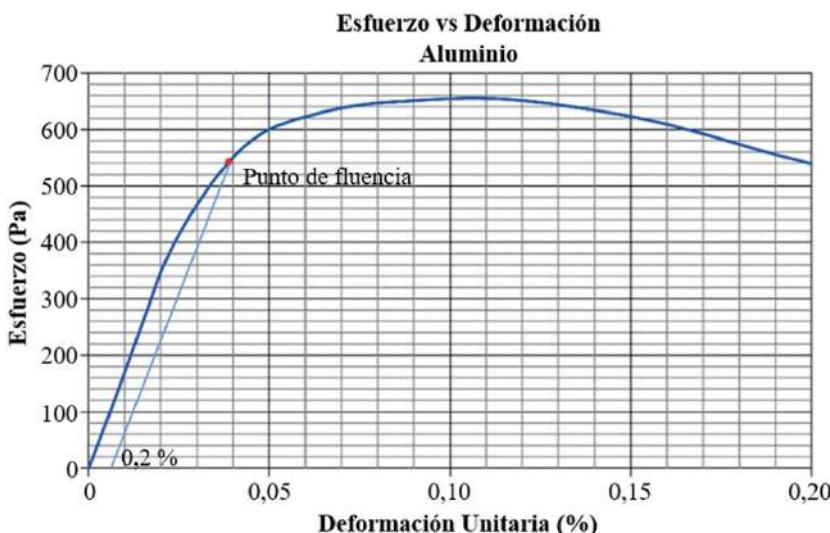


Fig. 2.8. Punto de fluencia del aluminio.

En los materiales dúctiles, la fractura ocurre en forma de cono, que aproximadamente forman 45° con la superficie inicial; lo que nos lleva a concluir que los esfuerzos cortantes son los responsables del colapso de los materiales dúctiles; se puede afirmar que esos esfuerzos son máximos en las superficies de 45° .

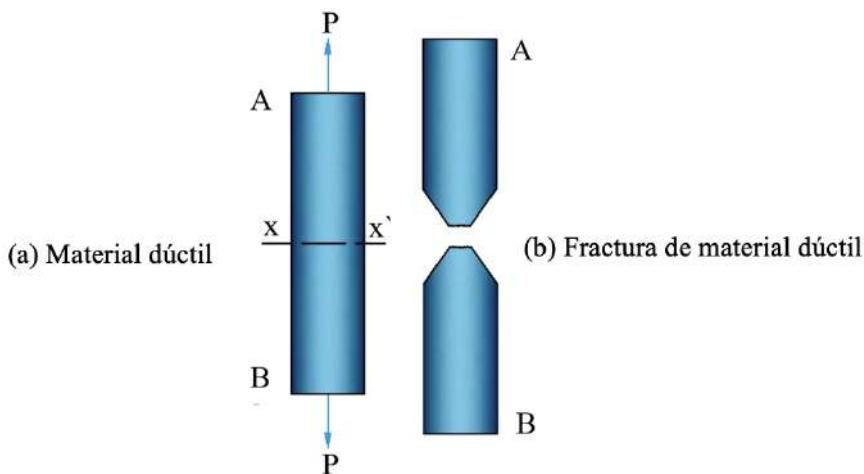


Fig. 2.9. Fractura de material ductil

Los materiales dúctiles forman diagramas de Esfuerzo-Deformación distintos con cada tipo de aleación o tratamiento que se da al acero, pero en estos tipos de aceros existe una particularidad y es que la rigidez nunca va a cambiar; lo contrario pasa con la resistencia y ductilidad, éstas van a ser variables dependiendo del material que se va a estudiar. (Timoshenko, 1957)

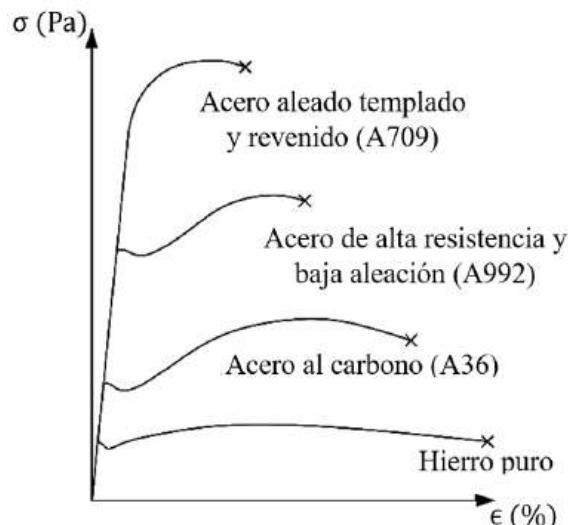


Fig. 2.10. Diagramas esfuerzo-deformación para el hierro y diversos tipos de acero.
Fuente: (Beer, y otros, 2010)

Por ejemplo, si hablamos de un acero muy usado y común como el caso del A-36, que con varios estudios realizados para determinar propiedades de materiales se ha llegado a concluir que ocurre un esfuerzo mínimo de fluencia de 50 ksi (50 000 lb/in²), y el alargamiento mínimo será del 21 % de una longitud determinada, para una mejor comprensión se utiliza la siguiente fórmula:

$$\% A = \frac{L_f - L_0}{L_0} 100 \%$$

Dónde:

% A: Porcentaje de alargamiento.

L_f : longitud final que tomó el elemento al deformarse.

L_0 : longitud inicial del elemento.

Además, al ser un material dúctil va a tener un cambio en su área, y mediante esa diferencia de áreas también se puede conocer que la ductilidad en el acero A-36 varía entre un 60-70 %

$$\% Ra = \frac{A_0 - A_f}{A_0} 100 \%$$

Dónde:

% Ra: Porcentaje de reducción de área.

A_0 : área inicial que tiene el elemento.

A_f : Área final del que tomó elemento al deformarse.

Los materiales frágiles pueden ser el hierro colado, el vidrio y la piedra, estos se caracterizan por tener una alta dureza, por lo mismo, sabiendo que son frágiles y la fractura se produce sin una variación notable de deformación. Por lo cual en estos materiales el esfuerzo máximo y el esfuerzo de fractura son los mismos. Sabiendo que el porcentaje de alargamiento es extremadamente pequeño y que no posee una zona de fluencia Fig. 2.11. Estos materiales se fracturan en sentido perpendicular al de aplicación de las cargas, como podemos ver en la Fig. 2.11a y b.

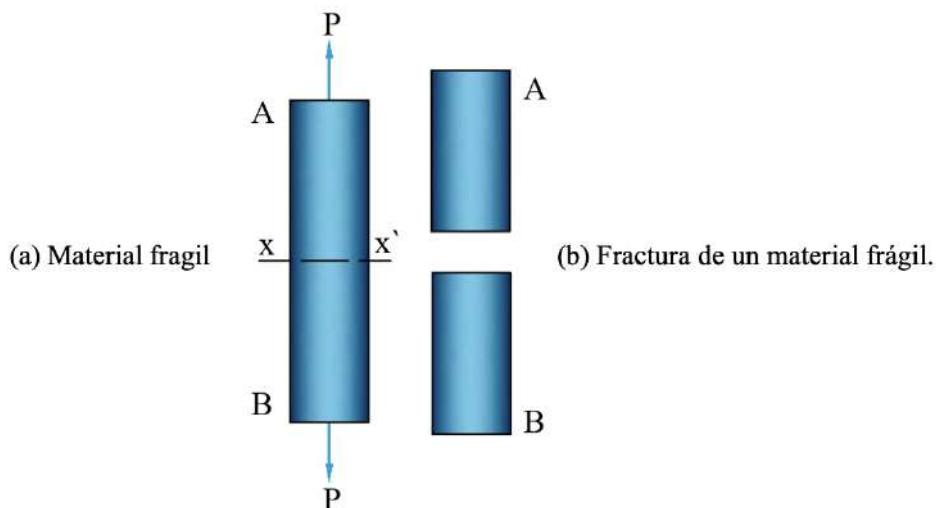


Fig. 2.11. Material a fractura

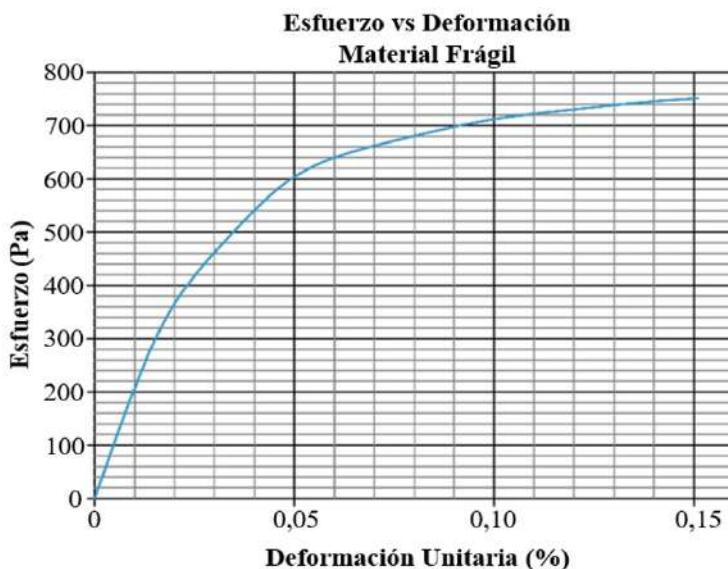


Fig. 2.12. Diagrama esfuerzo-deformacion de un material frágil.

Como se sabe, estos diagramas están hechos bajo condiciones ideales y considerando que el área va a ser siempre constante; estos diagramas se los conoce como diagrama esfuerzo vs deformación convencional o de ingeniería. Pero, en la realidad el área de la sección transversal no va a permanecer constante, por lo que se obtendrá un diagrama diferente en ciertas partes; a este diagrama se lo conoce como diagrama esfuerzo deformación verdadero.

2.4.2 Diagrama esfuerzo deformación verdadero

El diagrama esfuerzo vs deformación verdadero es graficado por medio del esfuerzo real vs la deformación unitaria real, la cual indica con mayor precisión el comportamiento del material al ser sometido a carga. Se debe tener en cuenta que no existe disminución del esfuerzo real en el proceso de estricción, por lo tanto, las gráficas que se obtienen durante los ensayos de tracción y compresión son las mismas si se utiliza el esfuerzo real y la deformación unitaria real; lo cual no sucede para valores grandes de deformación unitaria al realizar la gráfica de esfuerzo vs deformación unitaria convencional o ingenieril. Pero la resistencia última de compresión es mayor a la de tensión; esto de debe a las fallas e imperfecciones que por mínimas que sean al momento de traccionar va a ser mas probable que fisuren al material que cuando contraemos; eso sucede para la mayoría de los materiales dúctiles. Fig. 2.13.

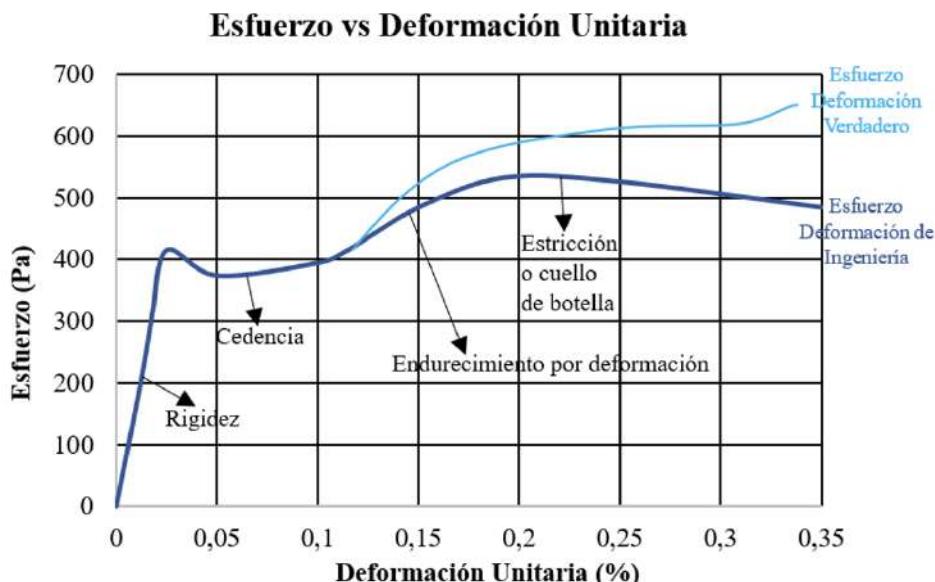


Fig. 2.13. Diagrama esfuerzo-deformación verdadero.

La Fig. 2.13 muestra como se comportaría la curva en condiciones reales e ideales, pero en nuestro estudio y por facilidad; se opta por trabajar con un diagrama convencional; puesto que el Ingeniero Mecánico se basa en el estudio de los materiales elásticos, debido a que si estos pasan a la zona plástica el material ya fallaría y presentaría peligro.

Como se mencionó, la zona elástica o zona lineal es la parte que más interesa a los Ingenieros Mecánicos, para eso debemos usar la ley de Hooke.

2.5 LEY DE HOOKE

El Ingeniero Mecánico se encarga de diseñar elementos estructurales o de máquinas que se encuentren en la zona elástica, es decir, en la zona lineal del diagrama esfuerzo vs deformación en el cual las deformaciones que sufren los elementos deben ser mínimas. Esta zona del diagrama es gobernada por la ley de Hooke y es directamente proporcional a la deformación (ϵ). Para ello se tiene una relación, la cual posee una constante de proporcionalidad, la misma que se le denomina módulo de elasticidad o de Young (E).

$$\sigma = E * \epsilon \quad (2,4)$$

Dónde:

σ : Esfuerzo del Elemento.

E: módulo de Young o módulo de elasticidad (propio de cada material).

ϵ : deformación unitaria.

El módulo de elasticidad representa la pendiente de la recta, además, como la deformación es adimensional, el módulo de elasticidad tendrá las mismas unidades de esfuerzo.

El esfuerzo tambien es igual a carga sobre el área, de modo que reemplazando:

$$\sigma = \frac{P}{A} = E * \epsilon \quad (2,5)$$

Pero la deformación unitaria es igual a deformacion o alargamiento sobre la longitd:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (2,6)$$

Reemplazando tenemos:

$$\frac{P}{A} = E \frac{\delta}{L} \quad (2,7)$$

$$\delta = \frac{PL}{EA} \quad (2,8)$$

Se debe tener en cuenta de que si un elemento está sometido a varias cargas, se puede usar el principio de Saint Vernant para encontrar diferentes deformaciones a lo largo del material, y la suma de sus deformaciones será la deformación total, teniendo en cuenta que si está sometida a tracción el resultado es una deformación positiva y si está sometida a compresión lo contrario.

$$\delta = \sum \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \quad (2,9)$$

EJERCICIOS DE REPASO

- 1) Determinar el alargamiento de la barra doble ABCD mostrada en la figura, teniendo en cuenta que el factor $E = 200 \text{ GPa}$ y el área de la barra ABC es de $3,227 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. El área de la barra CD es de $6,455 \times 10^{-5} \text{ m}^2$.

Considere que las barras:

$$AB = BC$$

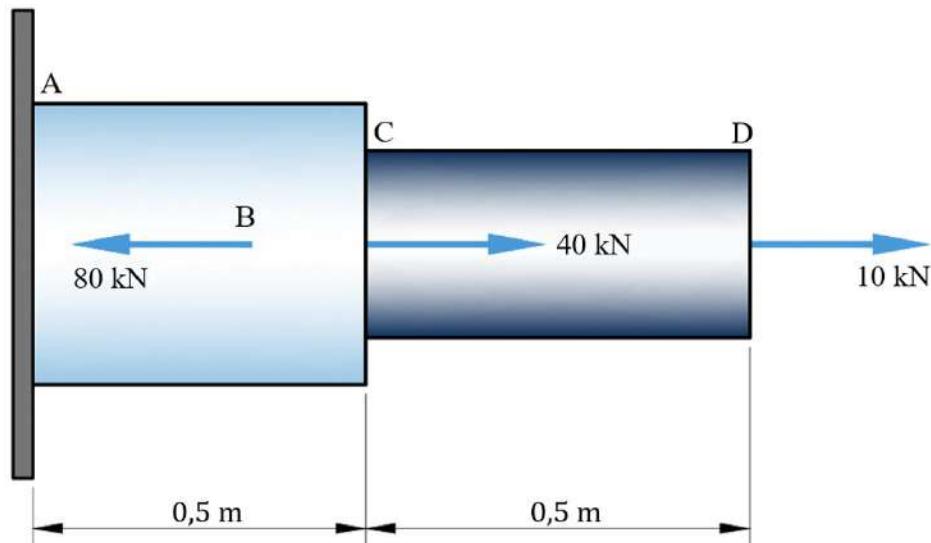


Fig. 2.14 Barra doble ABCD

Desarrollo:

Para el Tramo de la barra CD

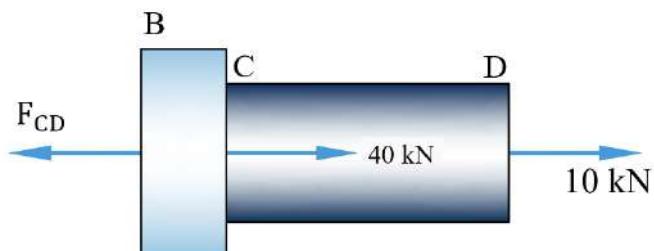


(a) Diagrama de cuerpo libre tramo CD

Realizando sumatoria de fuerzas en X

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \ (\rightarrow)+ \\ -F_{CD'} + 10 \text{ kN} &= 0 \\ F_{CD'} &= 10 \text{ kN} \text{ (Tracción)} \end{aligned}$$

Para el Tramo de la barra BC

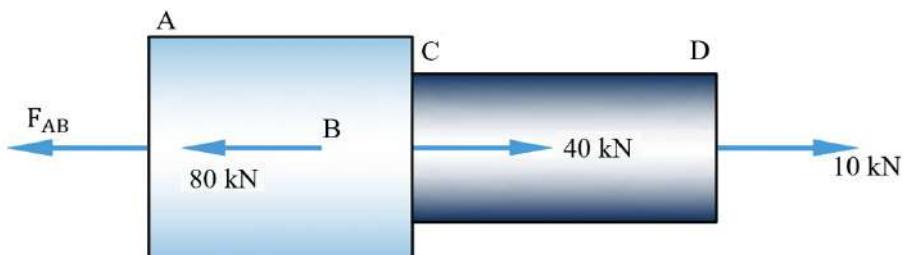


(b) Diagrama de cuerpo libre tramo BC

Realizando sumatoria de fuerzas en X

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \ (\rightarrow)+ \\ -F_{BC'} + 40 \text{ kN} + 10 \text{ kN} &= 0 \\ F_{BC'} &= (40 + 10) \text{ kN} \\ F_{BC'} &= 50 \text{ kN} \text{ (Tracción)} \end{aligned}$$

Para el Tramo de la barra AB



(c) Diagrama de cuerpo libre tramo AB

Realizando sumatoria de fuerzas en X

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 (\rightarrow) + \\ -F_{AB}' &+ (-80 + 40 + 10) \text{ kN} = 0 \\ F_{AB}' &= (-80 + 40 + 10) \text{ kN} \\ F_{AB}' &= -30 \text{ kN (Compresión)} \end{aligned}$$

Alargamiento

En este caso el alargamiento total, es la suma de los alargamientos parciales donde actúan las diferentes cargas.

$$l = \sum \frac{(P_i)(L_i)}{(E_i)(A_i)}$$

Alargamiento tramo CD

$$\begin{aligned} l &= \frac{(10\,000 \text{ N})(0,5 \text{ m})}{(200 \times 10^9 \text{ Pa})(6,455 \times 10^{-5} \text{ m}^2)} \\ l &= 3,873 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,3873 \text{ mm (Tracción)} \end{aligned}$$

Alargamiento tramo BC

$$\begin{aligned} l &= \frac{(50\,000 \text{ N})(0,25 \text{ m})}{(200 \times 10^9 \text{ Pa})(3,227 \times 10^{-4} \text{ m}^2)} \\ l &= 1,937 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,1937 \text{ mm (Tracción)} \end{aligned}$$

Alargamiento tramo AB

$$\Delta = \frac{(30\,000 \text{ N})(0,25 \text{ m})}{(200 \times 10^9 \text{ Pa})(3,227 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}$$

$$\Delta = 1,162 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,1162 \text{ mm} \text{ (Compresión)}$$

Alargamiento total

$$\Delta = 0,3873 \text{ mm} + 0,1937 \text{ mm} - 0,1162 \text{ mm}$$

$$\Delta = 0,4648 \text{ mm} \text{ (Tracción)}$$

- 2) Determine las reacciones en A y en B para la barra de acero con un $E=600 \text{ GPa}$, mostrada en la figura. Suponga que existe un claro de $0,0025 \text{ m}$ entre la barra y el piso antes de que se apliquen las cargas.

Considerar

$$AD = DB = BK = KC'$$

Área

$$AB = 0,2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Área

$$BC = 4,5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

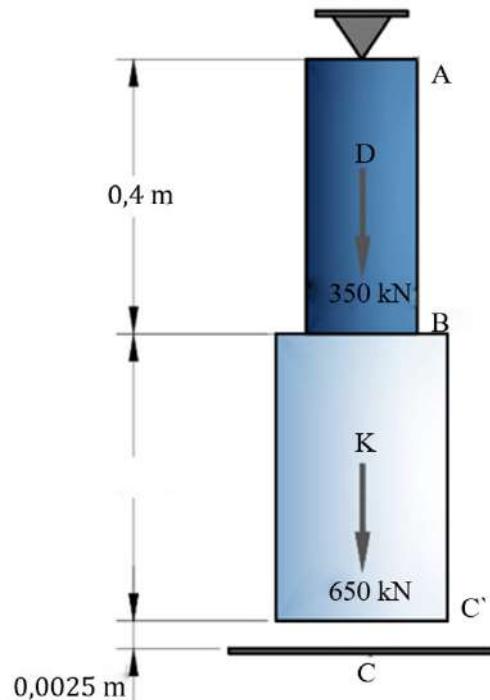
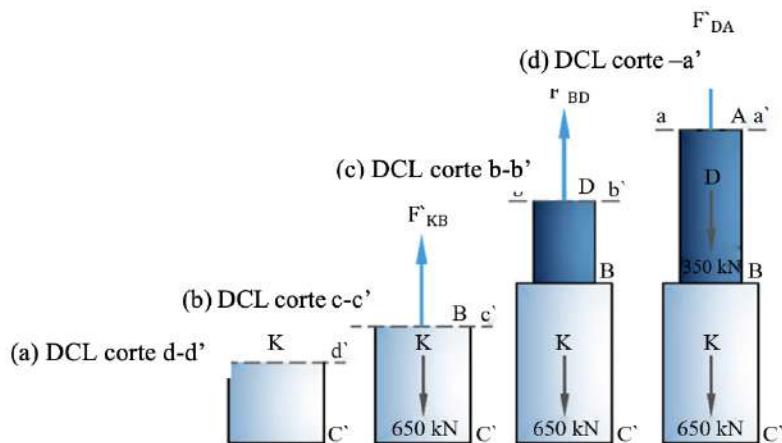


Fig. 2.15. Barra de acero

Desarrollo:

DCL



Realizando la sumatoria de fuerzas en Y

$$\sum F_y = 0 (\uparrow) +$$

$$F_{CK} = 0 \quad F_{KB} = 650 \text{ kN} \quad F_{BD} = 650 \text{ kN} \quad F_{DA} = 1000 \text{ kN}$$

$$A_{AB} = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_{BC'} = 4,5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Partiendo del gráfico podemos deducir:

$$l = l_L + l_R$$

l_L = causada por las cargas

l_R = causada por las reacciones

$$0,0025 \text{ m} = l_L + l_R$$

Se calcula la deformación antes de que tope el suelo en C

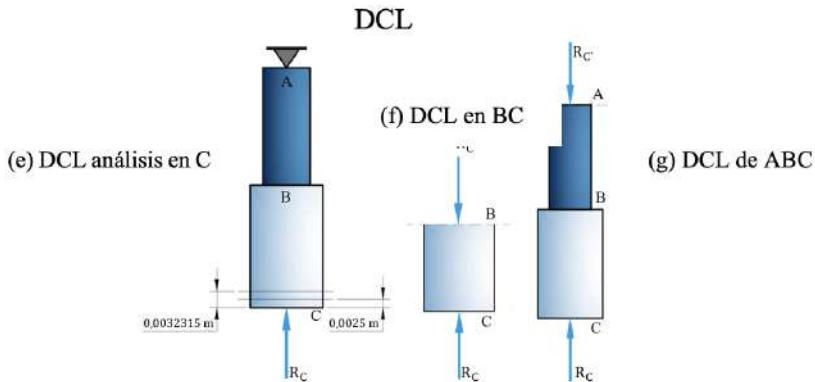
$$l_L = \frac{P_{CK}L_{CK}}{E_{CK}A_{CK}} + \frac{P_{KB}L_{KB'}}{E_{KB'}A_{KB'}} + \frac{P_{BD}L_{BD'}}{E_{BD'}A_{BD'}} + \frac{P_{DA}L_{DA'}}{E_{DA'}A_{DA'}}$$

$$l_L = 0 + \frac{650 \text{ kN}(0,2 \text{ m})}{600 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} (4,5 \times 10^{-4} \text{ m}^2)} + \frac{650 \text{ kN} (0,2 \text{ m})}{600 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} (2 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}$$

$$+ \frac{1000 \text{ kN}(0,2 \text{ m})}{600 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} (2 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}$$

$$l_L = 0,003231 \text{ m}$$

Se hace el análisis en el punto C:



$$R_C = R'_C \quad R_C = R'_C$$

$$l_R = -\frac{R_C(0,4 \text{ m})}{600 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} (4,5 \times 10^{-4} \text{ m}^2)} - \frac{R_C(0,4 \text{ m})}{600 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} (2 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}$$

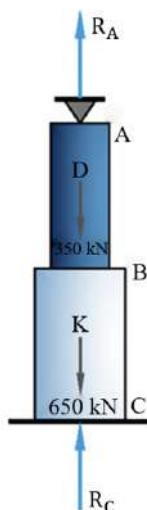
$$l_R = -(4,815 \times 10^{-3} \text{ m}) R_C$$

$$0,0025 \text{ m} = 0,003231 \text{ m} - (4,815 \times 10^{-3} \text{ m}) R_C$$

Despejando R_C

$$R_C = 151,817 \text{ kN}$$

DCL



(h). Diagrama de cuerpo libre en ABC

Con la reacción en el punto C, podemos calcular la reacción en A:

$$\sum F_y = 0 \text{ (↑)} +$$

$$R_C + R_A = 1\,000 \text{ kN}$$

Despejando R_A

$$R_A = 848,183 \text{ kN}$$

2.6 TEOREMA DE WILLIOT

El teorema de Williot nos facilita el cálculo de la deformación de los elementos estructurales; en el cual se sabe que, si se tiene una fuerza P que trata de deformar a una estructura, este va a provocar que rote; si este elemento estructural tiene un apoyo fijo en un extremo y en el otro extremo está libre aplicado la carga P, éste va a tender a formar un arco, y por tanto, el cálculo de la deformación que ésta sufre es muy compleja de realizarlo.

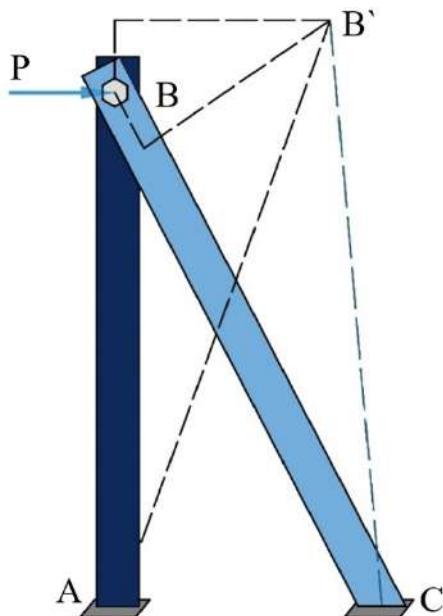


Fig. 2.16. Teorema de Williot.

El teorema de Williot establece que los elementos que están sometidos a tracción o compresión se van a deformar de manera lineal; para ello se dibuja una línea paralela al elemento estructural, alargándola si es de tracción y acortándola si se trata de una compresión; luego de realizar esto se traza una línea perpendicular desde el punto final de la primera línea dibujada, del cual se supone que se deformará el elemento, hasta otro punto donde allí se ubicará el extremo del elemento estructural deformado. Este procedimiento permite formar un triángulo rectángulo el cual hace más fácil el cálculo; ya que así se puede establecer relaciones de triángulos semejantes y poder realizar los cálculos mediante las ecuaciones que rigen a un triángulo rectángulo.

Hay que tomar en cuenta que el teorema de Williot, a pesar de que facilita el cálculo, posee una desviación con respecto al resultado real; pero se ha demostrado mediante investigaciones y ensayos que esta desviación está muy baja, con lo cual el teorema es muy aceptado. (Timoshenko, 1957)

EJERCICIOS DE REPASO

- 1) La barra rígida EBD se soporta en 2 eslabones; el eslabón AB está hecho de aluminio, donde $E_{Al} = 60 \text{ GPa}$ y su $A_{Al} = 0,6 \text{ m}^2$, y el eslabón CD es de acero donde $E_{Acero} = 200 \text{ GPa}$ y su $A_{Acero} = 8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

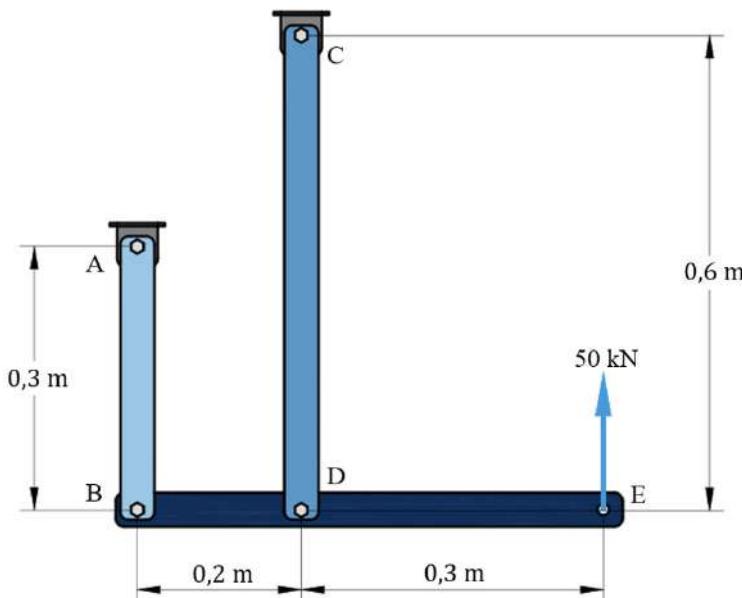
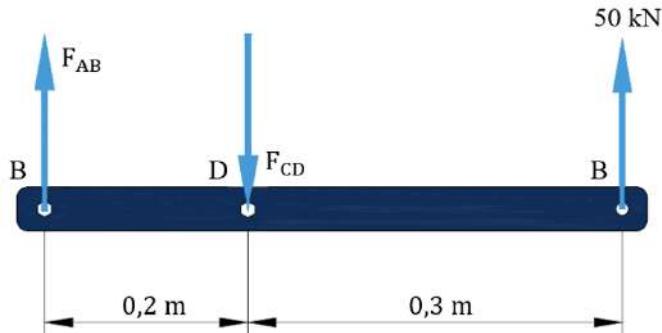


Fig. 2.17. Barra rígida EBD

Desarrollo:



(a) Cargas aplicadas a la barra

Realizando la sumatoria de fuerzas en Y

$$\sum F_y = 0 \quad (\uparrow) + \\ F_{AB} - F_{CD} + 50 \text{ kN} = 0$$

Realizando la sumatoria de momentos en el punto B

$$\sum M_B = 0 \quad (\curvearrowright) + \\ F_{CD}(0,2 \text{ m}) - 50 \text{ kN}(0,5) = 0 \\ F_{CD} = 125 \text{ kN} \text{ (Compresión)} \\ F_{AB} = (125 - 50) \text{ kN} \\ F_{AB} = 75 \text{ kN} \text{ (Tracción)}$$

ALARGAMIENTO DE LA BARRA AB

Como se puede notar la barra AB estará sometida a tracción y podemos calcular su deformación.

$$\rho_{AB} = \frac{P_{AB}(L_{AB})}{E_{AB}(A_{AB})} \\ \rho_{AB} = \frac{75 \text{ kN}(0,3 \text{ m})}{6 \times 10^{-4} \text{ m}^2 (60 \times 10^6 \text{ kPa})} \\ \rho_{AB} = 7,5 \times 10^{-4} \text{ m} \text{ (Tracción)}$$

ALARGAMIENTO DE LA BARRA CD

La barra CD estará sometida a compresión y podemos calcular su deformación.

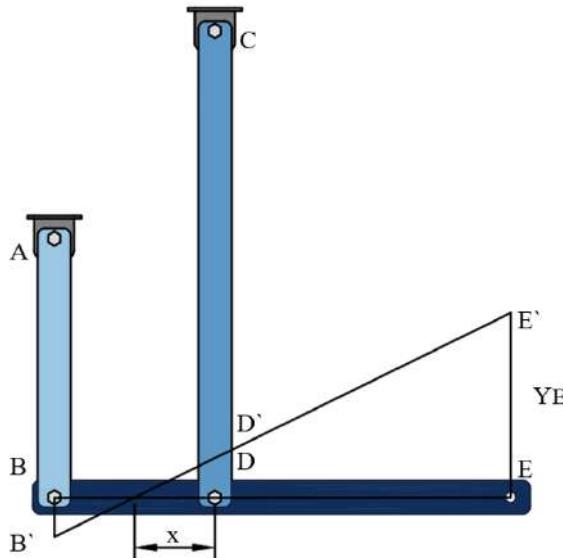
$$\rho_{CD} = \frac{P_{CD}(L_{CD})}{E_{CD}(A_{CD})}$$

$$\rho_{CD} = \frac{125 \text{ kN}(0,6 \text{ m})}{(8 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(200 \times 10^6 \text{ kPa})}$$

$$\rho_{CD} = 4,687 \times 10^{-4} \text{ m (Compresión)}$$

ALARGAMIENTO EN EL PUNTO E

Para este análisis, se opta por hacer semejanza de triángulos con las deformaciones antes calculadas.



(b) Alargamiento en el punto E

$$\frac{DD'}{BB'} = \frac{x}{0,2 \text{ m} - x}$$

$$\frac{DD'}{EE'} = \frac{0,07691 \text{ m}}{(0,3 + 0,07691) \text{ m}}$$

$$\frac{4,687 \times 10^{-4} \text{ m}}{7,5 \times 10^{-4} \text{ m}} = \frac{x}{0,2 \text{ m} - x}$$

$$\frac{Y_E}{4,687(10^{-4}) \text{ m}} = \frac{0,37691 \text{ m}}{0,07691 \text{ m}}$$

$$x = 0,07691 \text{ m}$$

$$Y_E = 2,2969 \times 10^{-3} \text{ m}$$

2) La varilla CE $1,2 \times 10 \text{ m}$ de diámetro y la varilla DF de $1,8 \times 10^{-3} \text{ m}$ de diámetro están unidas a la barra ABCD, como se muestra en la Fig. 2.18. Sabiendo que las varillas son de aluminio con un $E = 73 \text{ GPa}$, determine:

- La fuerza en cada varilla causada por la carga mostrada.
- La deflexión correspondiente en el punto A.

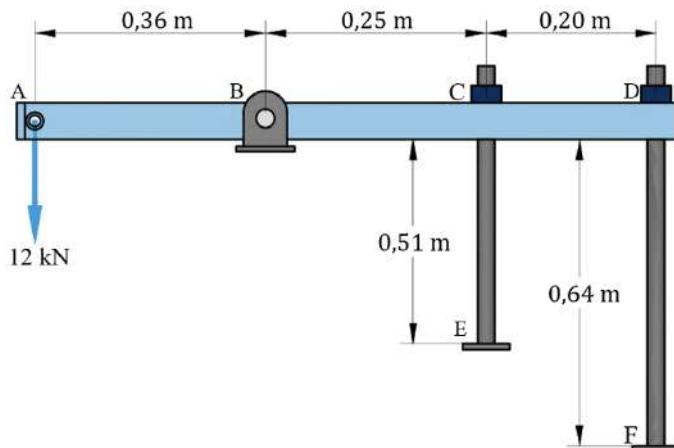
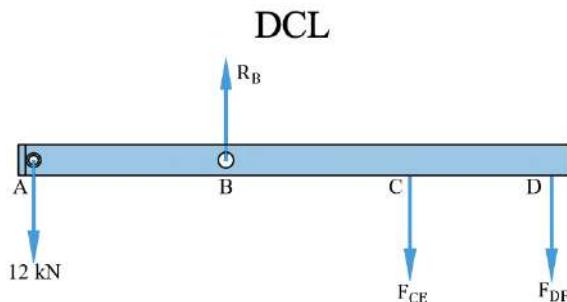


Fig. 2.18. Barra ABCD

Desarrollo:



(a) Diagrama cuerpo libre de la barra ABCD

Realizando la sumatoria de fuerzas en Y

$$\sum F_y = 0 \quad (\uparrow) +$$

$$F_B - F_{CE} - F_{DF} - 12 \text{ kN} = 0$$

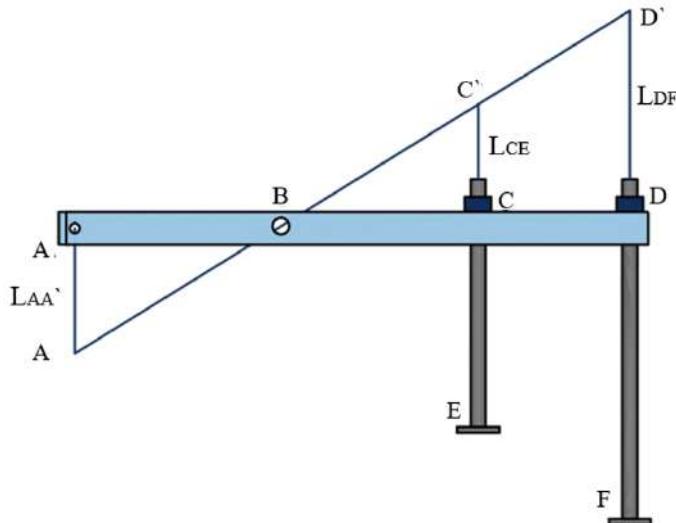
Realizando la sumatoria de momentos en el punto B

$$\sum M_B = 0 \quad (\curvearrowleft) +$$

$$12 \text{ kN}(0,36 \text{ m}) - F_{CE}(0,25 \text{ m}) - F_{DF}(0,45 \text{ m}) = 0$$

$$0,25F_{CE} + 0,45F_{DF} = 4,36$$

DCL



(b) Diagrama de cuerpo libre con alargamiento en D.

$$\frac{l_{CE}}{l_{DF}} = \frac{0,25 \text{ m}}{0,45 \text{ m}} = \frac{\frac{F_{CE} * L_{CE}}{E_{CE} * A_{CE}}}{\frac{F_{DF} * L_{DF}}{E_{DF} * A_{DF}}}$$

$$\frac{0,25 \text{ m}}{0,45 \text{ m}} = \frac{\frac{F_{CE} * L_{CE}}{\phi_{CE}^2}}{\frac{F_{DF} * L_{DF}}{\phi_{DF}^2}}$$

$$\frac{0,25 \text{ m}}{0,45 \text{ m}} = \frac{\frac{F_{CE}(0,51 \text{ m})}{(1,2 \times 10^{-3})^2}}{\frac{F_{DF}(0,64 \text{ m})}{(1,8 \times 10^{-3})^2}}$$

Despejando las fuerzas, una en función de la otra:

$$F_{DF} = 3,227F_{CE}$$

Reemplazando en la ecuación del momento en el punto B:

$$0,25F_{CE} + 0,45(3,227)F_{CE} = 4,36$$

$$F_{CE} = 2,561 \text{ kN (Tracción)}$$

Reemplazando en la otra ecuación, calculamos la otra fuerza:

$$F_{DF} = 3,227F_{CE}$$

$$F_{DF} = 8,266 \text{ kN (Tracción)}$$

Calculamos la deformación en el punto A:

$$\frac{l_{AA'}}{l_{DF}} = \frac{0,36 \text{ m}}{0,45 \text{ m}}$$

$$l_{DF} = \frac{F_{DF}L_{DF}}{E_{DF}A_{DF}}$$

$$l_{DF} = \frac{8,266 \text{ kN}(0,64 \text{ m})}{73 \times 10^6 \text{ kPa} \left(\frac{\pi}{4}(1,8 \times 10^{-3} \text{ m})^2\right)}$$

$$l_{DF} = 0,028 \text{ m}$$

$$l_{AA'} = l_{DF}(0,8)$$

$$l_{AA'} = 0,0224 \text{ m}$$

- 3) Calcular el alargamiento de cada cable de acero y el desplazamiento vertical del punto C en el cual está aplicada la carga. Considerar que la barra ACB es rígida (indeformable), si los cables tienen un diámetro de 0,015 m y un $E_{acero} = 200 \text{ GPa}$.

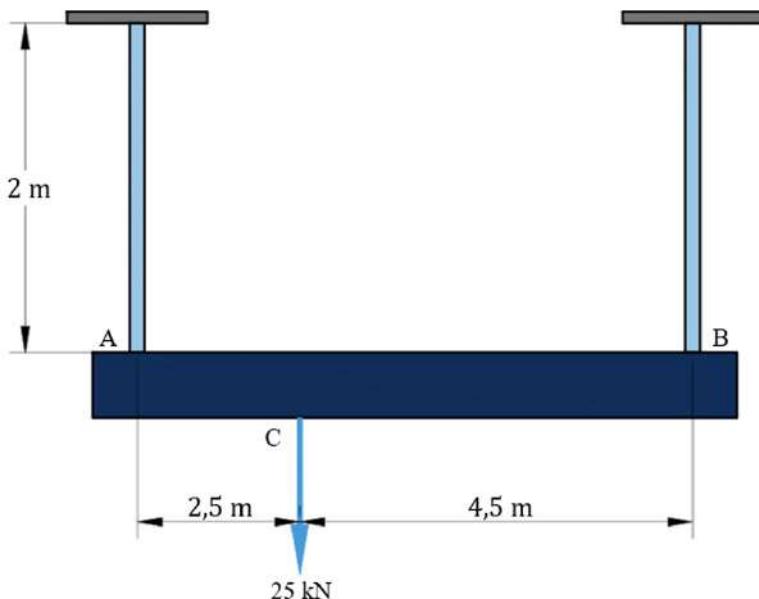


Fig. 2.19. Barra ACB

Desarrollo:

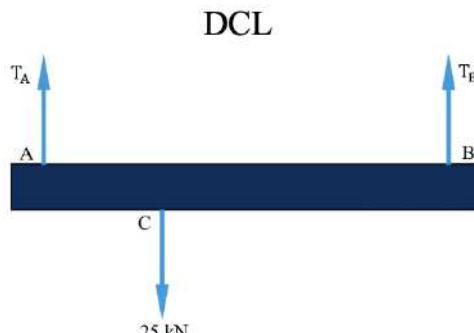
Alargamiento de los cables:

$$\delta_{\text{cable A}} = \frac{F_A(L)}{A(E)}$$

$$\delta_{\text{cable B}} = \frac{F_B(L)}{A(E)}$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(0,015 \text{ m}^2)}{4} = 1,7671 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Cálculo de reacciones:



(a) Diagrama de cuerpo libre ACB

Realizando la sumatoria de fuerzas en Y

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \quad (\uparrow) + \\ T_A - 25 \text{ kN} + T_B &= 0 \\ T_A &= 25 \text{ kN} - T_B \quad (1)\end{aligned}$$

Realizando la sumatoria de momentos en el punto A

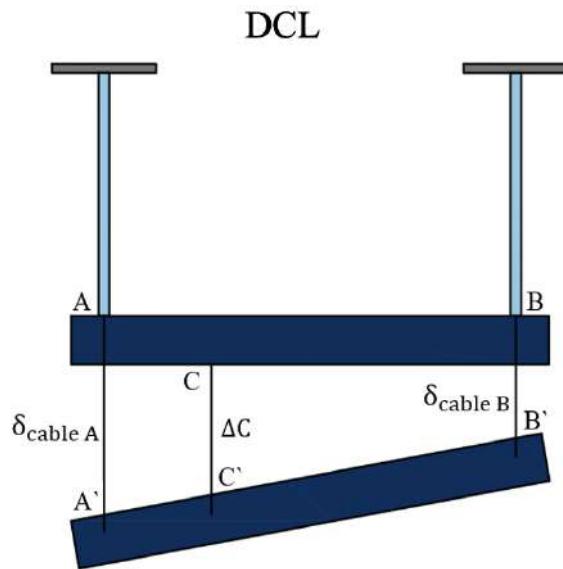
$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0 \quad (\curvearrowright) + \\ 25 \text{ kN}(2,5 \text{ m}) - T_B(7 \text{ m}) &= 0 \\ T_B &= 8,9286 \text{ kN}\end{aligned}$$

Reemplazando en (1) tenemos:

$$T_A = 25 \text{ kN} - 8,9286 \text{ kN}$$

$$T_A = 16,071 \text{ kN}$$

Cálculo de deformaciones en los cables A y B:



(c) Diagrama de cuerpo libre AB com deformación de cables

$$\delta_{\text{cable A}} = \frac{F_A(L)}{A(E)} = \frac{(16,07(10^3) \text{ N})(2 \text{ m})}{(1,7671 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(200(10^9) \frac{\text{N}}{\text{m}^2})}$$

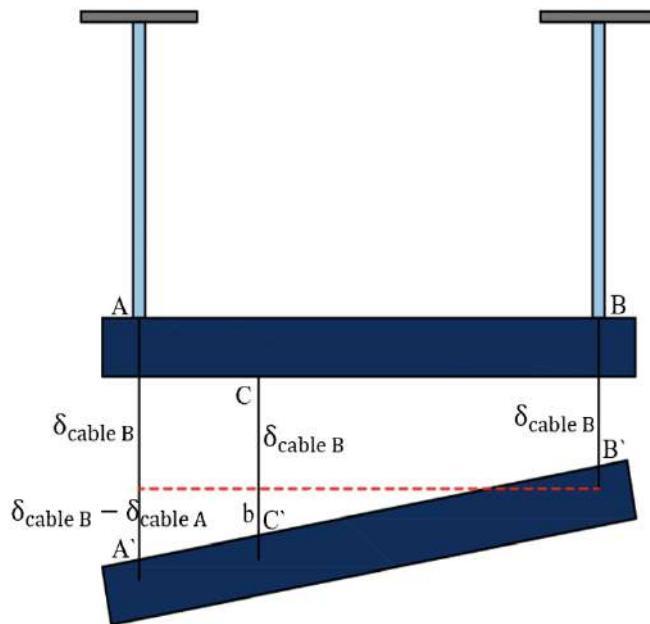
$$\delta_{\text{cable A}} = 9,094(10^{-4}) \text{ m}$$

$$\delta_{\text{cable B}} = \frac{F_B(L)}{A(E)} = \frac{(8,9286(10^3) \text{ N})(2 \text{ m})}{(1,7671 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(200)(10^9) \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}$$

$$\delta_{\text{cable B}} = 5,05 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Cálculo de desplazamiento del punto C:

DCL



(d) Diagrama de cuerpo libre con desplazamiento del punto C

Por relación de triángulos:

$$\Delta C = \delta_{\text{cable } B} + b$$

$$\frac{\delta_{\text{cable } A} - \delta_{\text{cable } B}}{7} = \frac{b}{4,5}$$

$$b = \frac{4,5(\delta_{\text{cable } A} - \delta_{\text{cable } B})}{7}$$

$$b = \frac{4,5(9,094 \times 10^{-4} \text{ m} - 5,05 \times 10^{-4} \text{ m})}{7} = 2,6 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Finalmente:

$$\Delta C = \delta_{\text{cable } B} + b$$

$$\Delta C = 5,05 \times 10^{-4} \text{ m} + 2,6 \times 10^{-4} \text{ m} = 7,65 \times 10^{-4} \text{ m}$$

2.7 EFECTO DE LA TEMPERATURA EN LA DEFORMACIÓN

Hasta el momento hemos considerado que todos los elementos se mantienen a la misma temperatura cuando se les aplica una carga. Pero también existen elementos que van a trabajar en presencia de cambio de temperatura.

Un cambio de temperatura en un material puede ocasionar que sus dimensiones varíen; por lo general, si la temperatura incrementa un cuerpo se expande y si la temperatura disminuye se contrae. Para analizar este efecto, esta expansión o contracción, se relaciona de forma lineal con el aumento o disminución de la temperatura.

Considerando al material homogéneo e isotropo, el desplazamiento de un elemento con una longitud L puede calcularse aplicando la siguiente fórmula.

$$\delta_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot L \quad (2.10)$$

Dónde:

δ_T : deformación por efecto de la temperatura.

α : coeficiente de dilatación (propio de cada material).

ΔT : módulo de la variación de temperatura.

L: longitud original del elemento.

Un elemento estáticamente determinado se puede calcular con facilidad a través del cambio de longitud, ya que el elemento tiende a expandirse o contraerse; pero el problema se encuentra en los elementos estáticamente indeterminados; estos desplazamientos térmicos se verán limitados por soportes que producen esfuerzos, que en el diseño de elementos o máquinas deben ser considerados.

Estos esfuerzos se pueden determinar mediante el método de superposición. Este principio se utiliza en muchos cálculos a lo largo del libro cada vez que se aplica la ley de Hooke; y además, cuando los elementos están sometidos a fuerzas estos sufren, deformaciones muy pequeñas que es insignificante al cambio de dirección y posición de la carga, por ende puede ser despreciado.

Ahora, al estar sometido a soportes, evitando que se comprima o traccione, la deformación total $\delta_{total} = 0 = \delta_{temperatura} + \delta_{carga}$, debido a que los empotramientos no se mueven y la deformación siempre va a ser a lo largo del eje x del material; esto no quiere decir que no se presenten deformaciones a lo largo del material. (Hibbeler, 2010)

EJERCICIOS DE REPASO

Determinar los esfuerzos en las porciones AC y CB de la barra de acero mostrada en la Fig. 2.20 cuando la $T = 250$ K, sabiendo que existe un buen ajuste en ambos soportes rígidos cuando la temperatura es 283 K, $\alpha = \frac{6,5 \times 10^{-6}}{K}$ y su $E = 2 \times 10^{11}$ Pa, teniendo en cuenta que el área mayor es "9,7 (10⁻⁴) m² y el área menor es "6,5 (10⁻⁴) m².

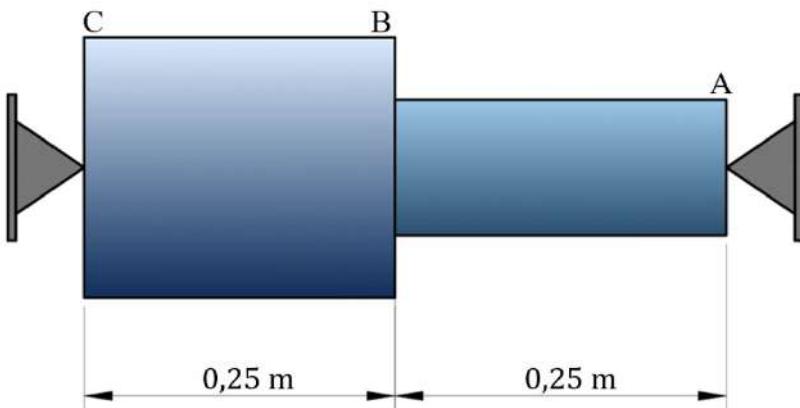


Fig. 2.20. Barra de acero

Desarrollo:

La fórmula de la deformación por efecto de la temperatura es:

$$\rho_T = \alpha(\Delta T)(L)$$

El coeficiente de dilatación térmica es:

$$\alpha = \frac{6,5 \times 10^{-6}}{K}$$

Calculamos la deformación efecto de la temperatura:

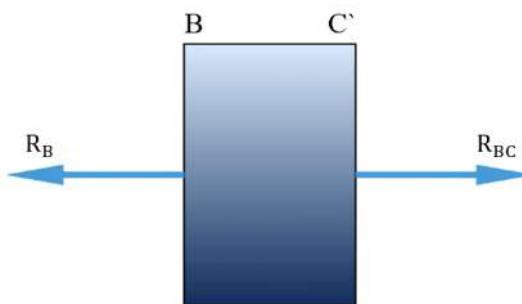
$$\rho_T = \frac{6,5(10^{-6})}{K} (250-283) K (0,5) m$$

$$\rho_T = -1,072 (10^{-4}) m$$

La deformación total en estos casos es igual a cero:

$$\rho_T = \rho_T + \rho_R = 0$$

Haciendo el corte en B y analizando las fuerzas (Fig. 2.20a), se tiene lo siguiente:

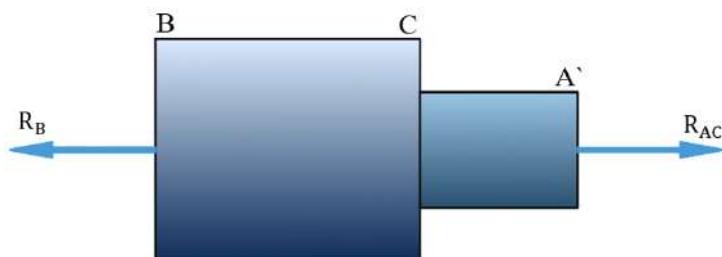


(a) Diagrama de cuerpo libre corte en B

$$\sum F_x = 0 (\rightarrow) +$$

$$R_B = R_{BC} \text{ (Tracción)}$$

Haciendo el corte en A y analizando las fuerzas (Fig. 2.20b), se tiene lo siguiente:



(b) Diagrama de cuerpo libre corte en A

$$\sum F_x = 0 (\rightarrow) +$$

$$R_B = R_{AC} \text{ (Tracción)}$$

La deformación causada por la fuerza RB es:

$$\rho = \sum \frac{P(L)}{E(A)}$$

$$\rho = \frac{R_{BC}(L_{BC})}{E(A_{BC})} + \frac{R_{AC}(L_{AC})}{E(A_{AC})}$$

$$\rho_{RB} = \frac{R_B(0,25) \text{ m}}{2 \times 10^{11} \text{ Pa} (9,7 \times 10^{-4} \text{ m}^2)} + \frac{R_B(0,25) \text{ m}}{2 \times 10^{11} \text{ Pa} (6,5 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}$$

$$\rho_{RB} = 3,21 \times 10^{-9} \left(\frac{\text{m}}{\text{N}}\right) R_B$$

Aplicando la fórmula de la deformación antes expuesta, tenemos:

$$\rho_T + \rho_R = 0$$

$$3,21 \times 10^{-9} R_B + (-1,072 \times 10^{-4}) = 0$$

$$R_B = 33\,395,63 \text{ N}$$

Calculando los esfuerzos en cada sección:

$$\sigma_{AC} = \frac{R_B}{A_{AC}}$$

$$\sigma_{AC} = \frac{33\,395,63 \text{ N}}{6,5(10^{-4}) \text{ m}^2}$$

$$\sigma_{AC} = 51,38 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{CB} = \frac{R_B}{A_{CB}}$$

$$\sigma_{CB} = \frac{33\,395,63 \text{ N}}{9,7(10^{-4}) \text{ m}^2}$$

$$\sigma_{CB} = 34,43 \text{ MPa}$$

- 2) La barra de acero A-36 que se muestra en la figura, consta de dos segmentos con áreas de sección transversal $A_{AB} = 6,451 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ y $A_{BD} = 1,29 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. Determine el desplazamiento vertical del extremo A y el desplazamiento de B respecto a C.

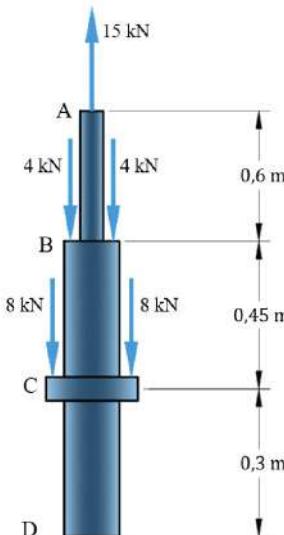
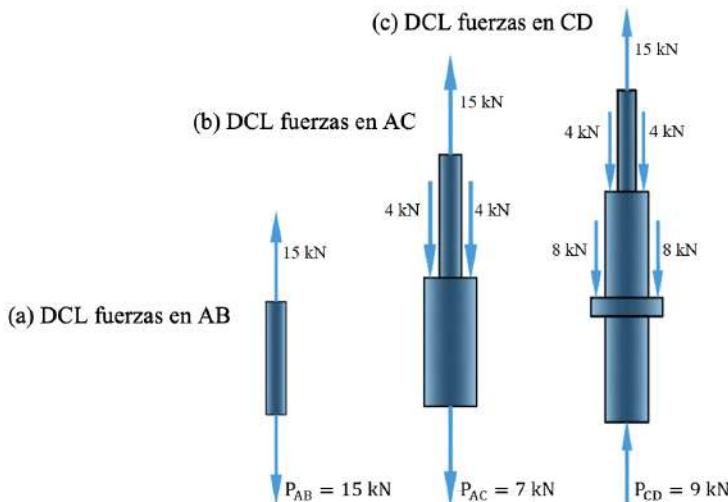


Figura 2.21. Barra de acero A-36

Desarrollo:

Como los anteriores ejercicios, se realiza el cálculo de la fuerza P (Fig. 2.20a, b, c) para la ecuación general; para nuestro módulo de elasticidad utilizamos la tabla que se encuentra al final del libro, cuyo valor es de 200 GPa.



$$\delta = \sum \frac{PL}{AE}$$

$$\delta = \frac{15 \text{ kN}(0,6 \text{ m})}{6,451 \times 10^{-4} \text{ m}^2(200 \times 10^6 \text{ kPa})} + \frac{7 \text{ kN}(0,45 \text{ m})}{1,29 \times 10^{-3} \text{ m}^2(200 \times 10^6 \text{ kPa})} + \frac{-9 \text{ kN}(0,3 \text{ m})}{1,29 \times 10^{-3} \text{ m}^2(200 \times 10^6 \text{ kPa})}$$

$$\delta = 0,071 \text{ mm}$$

Como el resultado es positivo la barra se alarga, por consiguiente, el desplazamiento de A es hacia arriba.

Al aplicar la ecuación, se obtiene:

$$\delta_{B/C} = \frac{P_{BC} L_{BC}}{A_{BC} E} = \frac{7 \text{ kN}(0,45 \text{ m})}{1,29 \times 10^{-3} \text{ m}^2(200 \times 10^6 \text{ kPa})} = 0,012 \text{ mm}$$

Con el resultado positivo obtenido se concluye que el punto B se aleja de C, ya que el segmento se alarga hacia arriba como antes se mencionó.

- 3) La barra de aluminio tiene una sección transversal circular y está sometida a una carga axial de 15 kN. Determine la elongación aproximada de la barra cuando se aplica la carga. Considere que $E_{al} = 70 \text{ GPa}$.

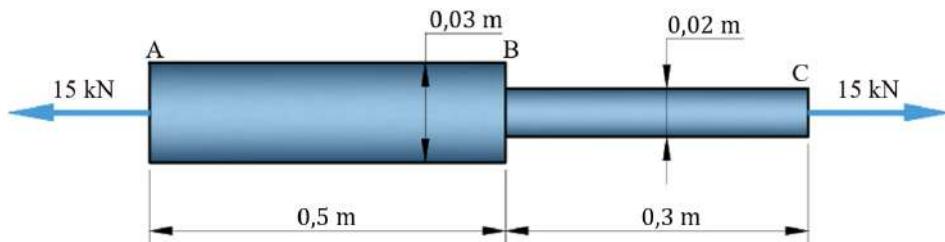


Fig. 2.22. Barra de aluminio con sección transversal circular

Desarrollo:

Para el análisis no se tomarán en cuenta las deformaciones localizadas en el punto de aplicación de la carga y donde la sección transversal de la barra cambia de manera repentina. El esfuerzo normal y las deformaciones son uniformes a través de la sección media de cada segmento.

Para encontrar la elongación de la barra, primero se debe obtener la deformación. Esto se realiza mediante el cálculo del esfuerzo, para después usar el diagrama de esfuerzo-deformación. El esfuerzo normal dentro de cada segmento es:

$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A} = \frac{10 \times 10^3 \text{ N}}{\pi(0,01 \text{ m})^2} = 31,83 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A} = \frac{10 \times 10^3 \text{ N}}{\pi(0,0075 \text{ m})^2} = 56,59 \text{ MPa}$$

Con base en el diagrama de esfuerzo-deformación, el material en el segmento AB se deforma elásticamente puesto que $\sigma_{AB} < \sigma_y = 40 \text{ MPa}$. Mediante la ley de Hooke.

$$\epsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E_{al}} = \frac{31,83 \times 10^6 \text{ Pa}}{70 \times 10^9 \text{ Pa}} = 4,54 \times 10^{-4} \text{ m/m}$$

El material dentro del segmento BC se deforma plásticamente puesto que $\sigma_{AB} < \sigma_y = 40 \text{ MPa}$. A partir de la gráfica para $\sigma_{BC} = 56,59 \text{ MPa}$. $\epsilon_{BC} \approx 8,08 \times 10^{-4} \text{ m/m}$. Por lo tanto, la elongación aproximada de la barra es:

$$\delta = \sum \epsilon L = 4,54 \times 10^{-4} (0,6 \text{ m}) + 8,08 \times 10^{-4} (0,4 \text{ m})$$

$$\delta = 5,96 \times 10^{-4} \text{ m}$$

- 4) La viga rígida mostrada en la figura se fija en la parte superior de los tres postes hechos de acero A-36 y aluminio 2014-T6. Cada poste tiene una longitud de 0,250 m cuando no se aplica carga a la viga y la temperatura es T₁ 200C. Determine la fuerza que soporta cada poste si la barra se somete a una carga uniformemente distribuida de 50 kN/m, y la temperatura se eleva a T₂ = 80 0C.

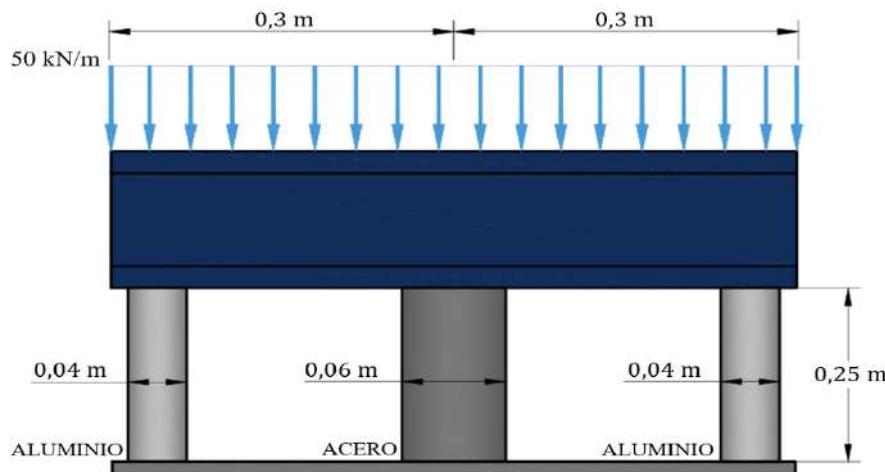
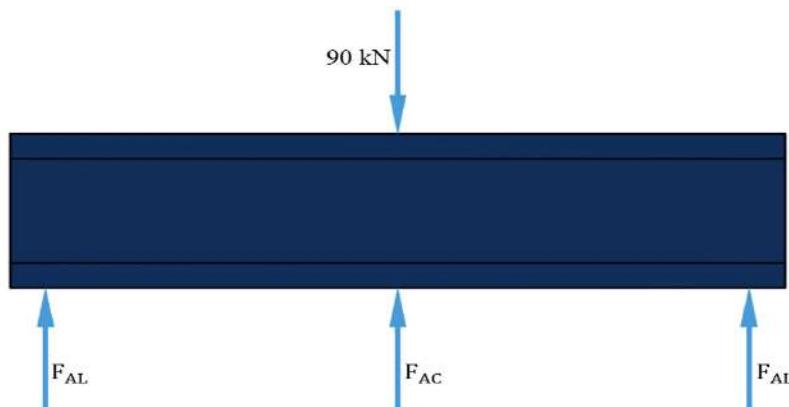


Fig. 2.23. Viga rígida

Desarrollo:

En la Fig. 2.23a se muestra el diagrama de cuerpo libre de la viga. El equilibrio del momento alrededor del centro de la viga requiere que las fuerzas de los postes de acero sean iguales. Al sumar fuerzas en el diagrama de cuerpo libre, se tiene:

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 2F_{ac} + F_{al} - 90 \text{ kN} = 0 \quad (1)$$



(a) Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas aplicadas

Debido a la carga, la geometría y la simetría del material, la parte superior de cada poste se desplaza en la misma extensión. Por lo tanto:

$$(+) \quad \delta_{ac} = \delta_{al} \quad (2)$$

La posición final de la parte superior de cada poste es igual a su desplazamiento causado por el aumento de la temperatura, más su desplazamiento causado por la fuerza axial interna de compresión. Así, para los postes de acero y el aluminio, se tiene que:

$$(+\downarrow) \quad \delta_{ac} = -(\delta_{ac})_T + (\delta_{ac})_F$$

$$(+\downarrow) \quad \delta_{ac} = -(\delta_{al})_T + (\delta_{ac})_F$$

Si se aplica la ecuación 2 resulta:

$$\begin{aligned} -(\delta_{al})_T + (\delta_{al})_F &= -(\delta_{al})_T + (\delta_{ac})_F \\ -[12 \times 10^{-6}/^\circ C](80^\circ C - 20^\circ C)(0,250 \text{ m}) + \frac{F_{ac}(0,250 \text{ m})}{\pi(0,020 \text{ m})^2(200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)} \\ &= -[23 \times 10^{-6}/^\circ C](80^\circ C - 20^\circ C)(0,250 \text{ m}) + \frac{F_{al}(0,250 \text{ m})}{\pi(0,030 \text{ m})^2(73,1 \times 10^9 \text{ N/m}^2)} \\ F_{ac} &= 1,216 F_{al} - 165,9 \times 10^3 \end{aligned} \quad (3)$$

Al resolver las ecuaciones 1 y 3 de manera simultánea resulta:

$$F_{ac} = -16,4 \text{ kN} \quad F_{al} = 123 \text{ kN}$$

- 5) La barra de acero que se muestra en la figura tiene un diámetro de 15 mm; y está empotrada a la pared en A, y antes de recibir la carga, hay un espacio de 0,3 mm entre a pared en B' y la barra. Determine las reacciones en A y B' si la barra está sometida a una fuerza axial de $P = 35 \text{ kN}$ como se muestra en la figura. No tome en cuenta el tamaño del collarín en C. Considere $E_{ac} = 200 \text{ GPa}$.

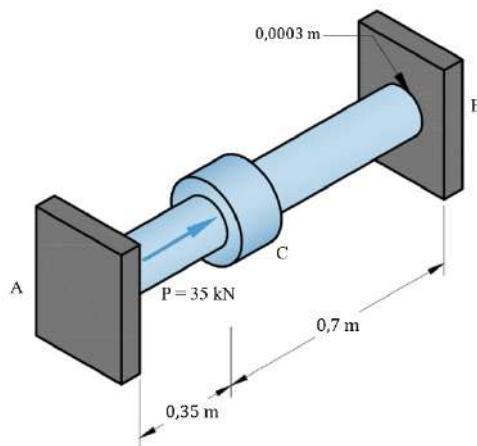


Fig. 2.24. Barra de acero

Desarrollo:

Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre (Fig. 2.24a), se supondrá que la fuerza P es lo suficientemente grande para causar que el extremo B de la barra toque la pared en B'. El problema es estáticamente indeterminado ya que hay dos incógnitas y sólo una ecuación de equilibrio.

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0; -F_A - F_B + 35 \times 10^3 \text{ N} = 0 \quad (1)$$



(a) DCL fuerzas en A

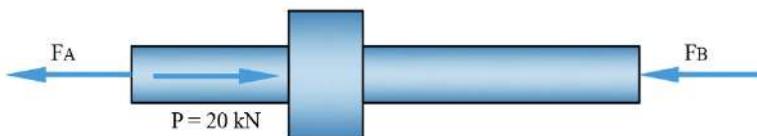


(b) DCL fuerzas en B

La fuerza P ocasiona que el punto B se mueva hasta B' sin desplazamientos adicionales (Fig. 2.24. c). Por lo tanto, la condición de compatibilidad para la barra es:

$$\delta_{B/A} = 0,0003 \text{ m} = \frac{(F_A)(L_{AC})}{(A)(E)} - \frac{(F_B)(L_{CB})}{(A)(E)}$$

$$0,0003 \text{ m} = \frac{F_A(0,35 \text{ m})}{\pi(0,0075 \text{ m})^2(200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)} - \frac{F_B(0,7 \text{ m})}{\pi(0,0075 \text{ m})^2(200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)}$$



(c) DLC fuerzas de A y B

O bien

$$F_A(0,35 \text{ m}) - F_B(0,7 \text{ m}) = 10\,602,875 \text{ Nm} \quad (2)$$

Si se resuelven las ecuaciones 1 y 2, se obtiene:

$$F_A = 33,353 \text{ kN} (F_B) = 1,647 \text{ kN}$$

- 6) La barra de acero A-36, que se muestra en la figura cabe justamente entre dos soportes fijos cuando $T_1 = 330 \text{ }^\circ\text{C}$. Si la temperatura se eleva a $T_2 = 390 \text{ }^\circ\text{C}$, determine el esfuerzo térmico normal promedio desarrollado en la barra. El área de la barra de acero tiene un área de $0,015 \text{ m} \times 0,015 \text{ m}$.

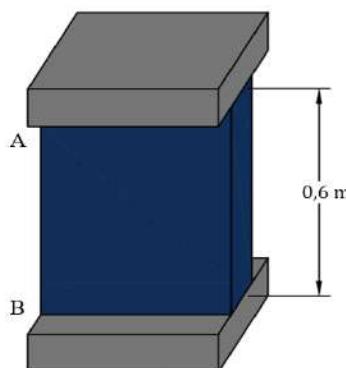


Fig. 2.25. Barra de acero A-36

Desarrollo:

En la Fig. 2.24 a) se muestra el diagrama de cuerpo libre de la barra. Como no hay carga externa, la fuerza en A es igual pero opuesta a la fuerza en B; es decir.



(a) Diagrama de cuerpo libre de la barra

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad F_A = F_B = F$$

Como $\delta_{A/B} = 0$, el desplazamiento térmico δ_T que se produce en A, está contrarrestado por la fuerza F que se requiere para empujar la barra δ_F de regreso a su posición original. La condición de compatibilidad en A se convierte en:

$$(+\uparrow) \quad \delta_{A/B} = 0 = \delta_T - \delta_F$$

Al aplicar las relaciones térmicas y de carga – desplazamiento, se tiene:

$$0 = \alpha \Delta T L - \frac{FL}{AE}$$

$$F = \alpha \Delta T AE$$

El valor del coeficiente de dilatación y el módulo de elasticidad se obtienen de la tabla al final del libro.

$$F = (11,7 \times 10^{-6} / ^\circ C)(390 ^\circ C - 330 ^\circ C)(0,015 \text{ m})^2 (200 \times 10^6 \text{ kPa})$$

$$F = 31,59 \text{ kN}$$

Como F también representa la fuerza axial interna dentro de la barra, el esfuerzo de compresión normal promedio es:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{31,59 \text{ kN}}{(0,015 \text{ m})^2} = 140,4 \text{ MPa}$$

- 7) En la figura se muestra una barra de acero A-36 que tiene un diámetro de 20 mm y está empotrada en A. Antes de aplicar una carga hay un espacio de 0,15 mm entre la pared en B' y la barra. Determine las reacciones en A y B'; no tome en cuenta el tamaño del collarín en C. Considere que $E_{BC} = 200 \text{ GPa}$.

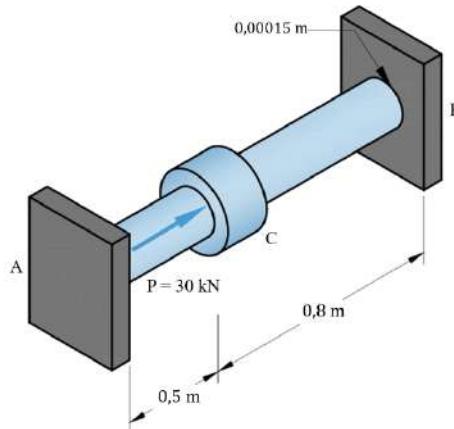
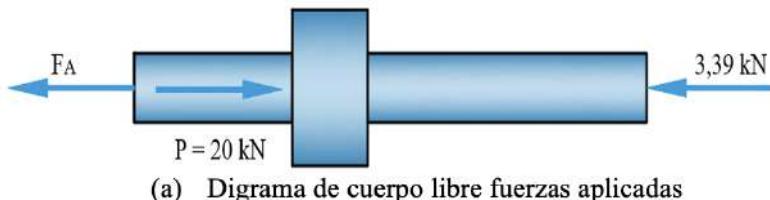


Fig. 2.26. Barra de acero A-36

Desarrollo:

Si se utiliza el principio de superposición, se tiene:



$$(\rightarrow) 0,00015 \text{ m} = \delta_p - \delta_B$$

Las deflexiones δ_p y δ_B se determinan a partir de la ecuación de deformación:

$$\delta_p = \frac{(P)(L_{AC})}{(A)(E)} = \frac{(30 \times 10^3 \text{ N})(0,5 \text{ m})}{\pi(0,01 \text{ m})^2 (200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)} = 2,387 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\delta_B = \frac{(F_B)(L_{AB})}{(A)(E)} = \frac{F_B(1,3 \text{ m})}{\pi (0,01 \text{ m})^2 (200 \times 10^9 \text{ N/m}^2)}$$

$$\delta_B = 2,069 \times 10^{-8} (F_B)$$

Al sustituir en la ecuación 1. Se tiene:

$$0,00015 \text{ m} = 2,387 \times 10^{-4} \text{ m} - 2,069 \times 10^{-8} (F_B)$$

$$F_B = 4287,095 \text{ N} = 4,287 \text{ kN}$$

A partir del diagrama de cuerpo libre mostrado se tiene:

$$\pm \sum F_x = 0; -F_A + 30 \text{ kN} - 4,287 \text{ kN} = 0 \quad F_A = 25,713 \text{ kN}$$

- 8) Un tubo de aluminio 2014-T6 con un área en su sección transversal de $0,45 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ se utiliza como la manga de un perno de acero A-36, que tiene un área en su sección transversal de $0,27 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. Cuando la temperatura es $T_1 = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$ la tuerca mantiene al ensamble en una las tres posiciones ajustadas, de tal manera que la fuerza axial en el perno es insignificante. Si la temperatura aumenta $T_2 = 70 \text{ }^{\circ}\text{C}$, determine la fuerza en el perno y la manga.

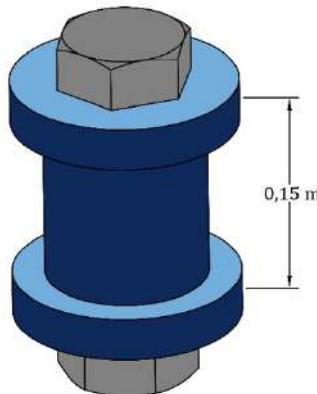


Fig. 2.27. Tubo de aluminio 2014-T6

Desarrollo:

Las fuerzas "F_b y F_y" están presentes debido a que manga tiene un mayor coeficiente de expansión térmica que el perno, y por tanto el crecimiento de la manga será más grande cuando la temperatura aumenta.

Se requiere que:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad F_y = F_b$$

El aumento en la temperatura hace que la manga y el perno se expandan $(\delta_t)_r$ y $(\delta_b)_f$. Sin embargo, las fuerzas redundantes F_b y F_t alargan el perno y acortan la manga. En consecuencia, el extremo del ensamblaje llega a una posición final que no es igual a su posición inicial.

Por lo tanto, las condiciones de compatibilidad se convierten en:

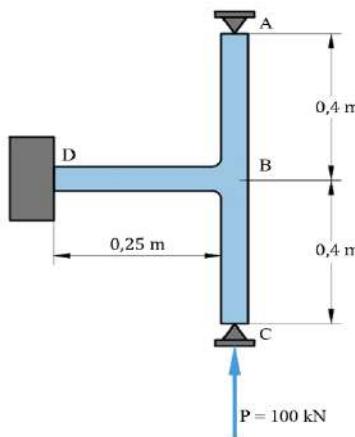
$$\begin{aligned}
 (+\downarrow) \quad & \delta = (\delta_B)_r + (\delta_B)_{fr} = (\delta_B)_T - (\delta_B)_r \\
 \left(12 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}\right) (70 \text{ }^{\circ}\text{C} - 20 \text{ }^{\circ}\text{C})(0,15 \text{ m}) + \frac{F_b(0,15 \text{ m})}{(0,27 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(200 \times 10^6 \text{ kPa})} \\
 \left(23 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}\right) (70 \text{ }^{\circ}\text{C} - 20 \text{ }^{\circ}\text{C})(0,15 \text{ m}) - \frac{F_y(0,15 \text{ m})}{(0,45 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(75 \times 10^6 \text{ kPa})}
 \end{aligned}$$

Si se usa la ecuación y se resuelve resulta:

$$F_1 = F_b = 11,426 \text{ kN}$$

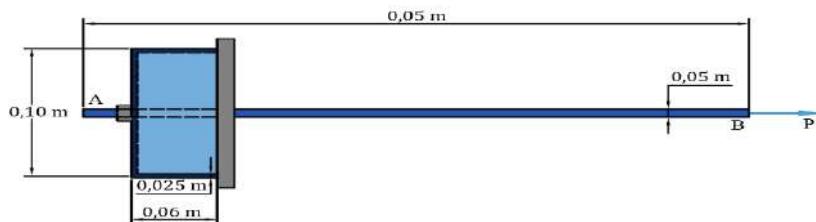
EJERCICIOS PROPUESTOS

F2-1. La varilla BD está hecha de acero ($E = 199,9 \times 10^6 \text{ kPa}$) y se utiliza para reforzar al elemento axialmente comprimido ABC. La máxima fuerza que puede desarrollarse en el elemento BD es de 0,04 P. Si el esfuerzo no debe exceder 137,895 MPa y el máximo cambio en longitud BD no debe superar 0,002 veces la longitud de ABC, determine el diámetro mínimo que puede utilizarse para la varilla del elemento BD.



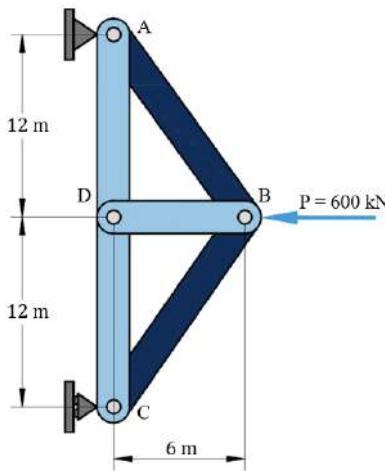
F2.1. Varilla BD

F2-2. Un cilindro hueco de poliestireno ($E = 3102 \times 10^3$ MPa) con $6,35 \times 10^{-3}$ m de grosor y una placa circular rígida (de la cual se muestra sola una parte) se usan para soportar una varilla AB de acero ($E = 199,94 \times 10^6$ GPa), con una longitud de 0,508 in y un diámetro 0,0127 m. Si se aplica una carga P de 4,4 kN en B, determine: a) la elongación de la varilla AB b) la deflexión del punto B, c) el esfuerzo normal promedio en la varilla AB.



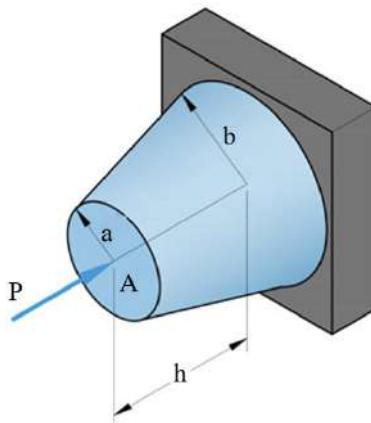
F2-2. Cilindro hueco de poliestireno

F2-3. Para la armadura de acero ($E=200$ GPa) y la carga mostrada en la figura, determine las deformaciones de los elementos AB y AD, si se sabe que sus respectivas áreas de sección transversal son de $7,2 \times 10^{-3}$ m² y $5,4 \times 10^{-3}$ m².



F2-3. Armadura de acero

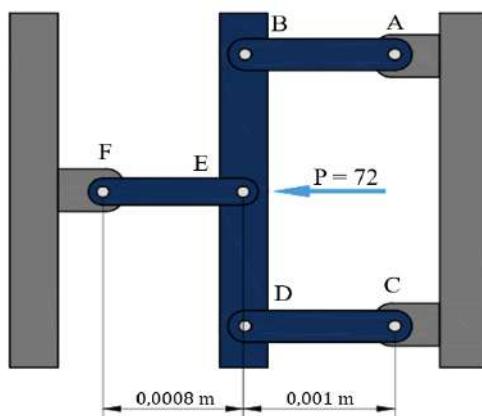
F2-4. Una carga horizontal P se aplica en el centro A de la sección superior de un cono truncado circular homogénea con altura h , radio mínimo a y radio máximo b . Si se denota con E el módulo de elasticidad del material y se desprecia el efecto de su peso, determine la deflexión del punto A.



F2-4 Cono truncado circular homogénea

F2-5. Tres varillas de acero ($E = 190 \text{ GPa}$) soportan carga P de 72 kN . Cada una de las varillas AB y CD tiene un área de sección transversal de $0,4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ y la varilla EF tiene un área de sección transversal de $1,25 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. Despreciando la deformación de la varilla BED, determine:

- El cambio de longitud en la varilla EF.
- El esfuerzo en cada varilla.

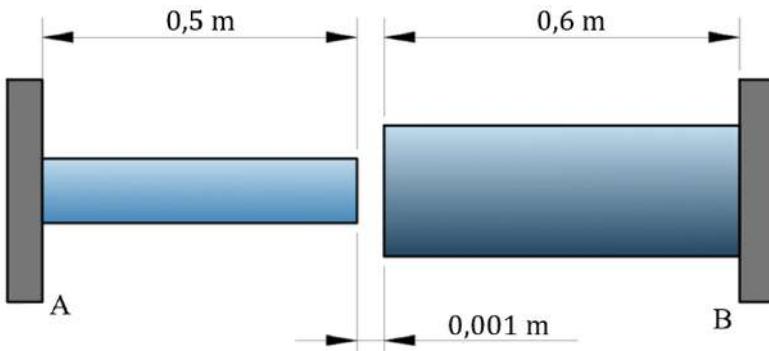


F2-5 Tres varillas de acero

F2-6. A temperatura ambiente (20°C) hay un espacio de 1 mm entre los extremos de las varilla mostradas en la figura. Posteriormente, cuando la temperatura alcanza 180°C , determine:

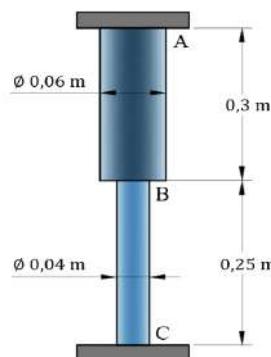
- El esfuerzo normal en la varilla de aluminio.
- El cambio de longitud de la varilla de aluminio.

Acero Inoxidable	Aluminio
$A = 1,6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	$A = 4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
$E = 190 \text{ GPa}$	$E = 75 \text{ GPa}$
$\alpha = 17,3 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$	$\alpha = 23 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$



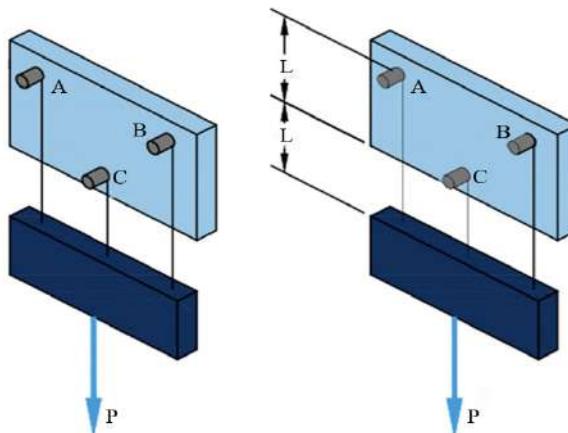
F2-6. Varillas

F2-7. Una varilla que consiste en dos porciones cilíndricas AB y BC, está restringida en ambos extremos. La porción AB es de acero ($E = 200 \text{ GPa}$, $\alpha = 11,7 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$), y la porción BC está hecha de latón ($E = 105 \text{ GPa}$, $\alpha = 20,9 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$). Si se sabe que la varilla se encuentra inicialmente sin esfuerzos, determine la fuerza de compresión inducida en ABC cuando la temperatura se eleva a 50°C .



F2-7. Varilla que consiste en dos porciones cilíndricas AB y BC

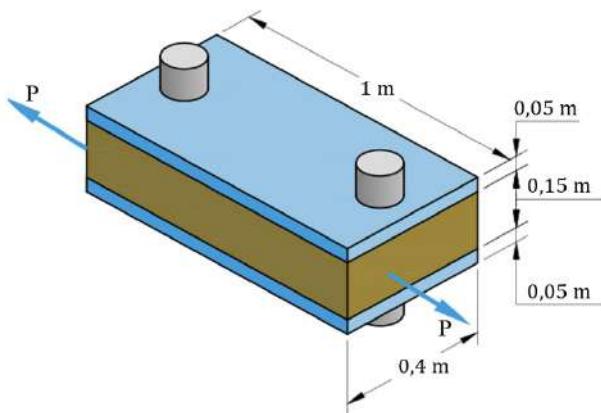
F2-8. Se emplean 3 alambres para suspender la placa que se muestra en la figura. Se utilizan alambres de aluminio en A y B con un diámetro de $6,35 \times 10^{-3}$ m y se usa alambre de acero en C con un diámetro de $4,23 \times 10^{-3}$ m. Si se sabe que el esfuerzo permisible para el aluminio ($E = 71,7$ GPa) es de 193 MPa y que el esfuerzo permisible para el acero ($E = 200$ MPa) es de 248 MPa, determine la máxima carga P que puede aplicarse.



F2-8. Placa con 3 alambres

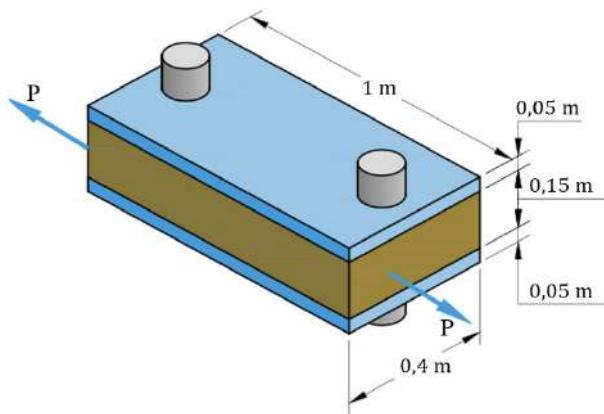
F2-9. Dos barras de acero ($E_a = 200$ GPa, $\alpha_a = 11,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$) se emplean para reforzar una barra de latón ($E_l = 105$ GPa, $\alpha_l = 20,9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$) que está sujetada a una carga $P = 35$ kN. Cuando se fabricaron, la distancia entre los centros de los agujeros que debían ajustarse a los pasadores se redujo a $0,5 \times 10^{-3}$ m en relación con los $0,1$ m que se necesitaban. Por ello, las barras de acero se colocaron en un horno para aumentar su longitud, con el fin de que se ajustaran a los pasadores. Después de este proceso, la temperatura de las barras de acero se redujo a la temperatura ambiente, determine:

- El incremento en la temperatura que hizo posible que la barra de acero se ajustara a los pasadores,
- El esfuerzo en la barra de latón después de aplicar la carga sobre ella.



F2-9. Dos barras de acero

F2-10. Determine la carga máxima P que puede aplicarse a la barra del problema anterior si el esfuerzo permisible en las barras de acero es de 27 MPa y el esfuerzo permisible en la barra de latón es de 23 MPa.



F2-10. Dos barras de acero

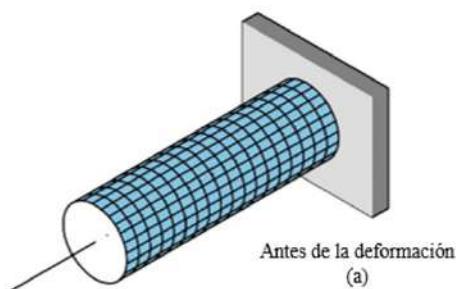
CAPÍTULO III

3. TORSIÓN

3.1 INTRODUCCIÓN

Anteriormente él estudió se enfocó en el cálculo de esfuerzos y deformaciones en distintos elementos estructurales y de máquina que se encontraban sometidos a cargas axiales o a fuerzas dirigidas a lo largo de los tres ejes del elemento. Ahora se estudiarán los efectos que provocan las cargas de torsión sobre un elemento, cuando el momento de torsión es normal al eje longitudinal del elemento en estudio.

La forma más fácil de asociar la torsión o un par torsor, es mediante una barra de sección circular sólida o hueca, por lo tanto, un par torsor provoca un momento el cual tiende a torcer al elemento sobre su eje longitudinal. Considerando un eje de sección circular, el cual se encuentra empotrado y en voladizo en sus extremos como se muestra en la Fig. 3.1a, se le dibujan líneas longitudinales y círculos a lo largo de su sección transversal, dicho eje es sometido a torsión y se puede evidenciar como los círculos se mantienen mientras que las líneas longitudinales se distorsionan en forma de hélice, también se puede notar que las secciones transversales en los extremos a lo largo del elemento continuarán siendo planas y las líneas radiales se mantendrán rectas en el transcurso de la deformación Fig. 3.1b.



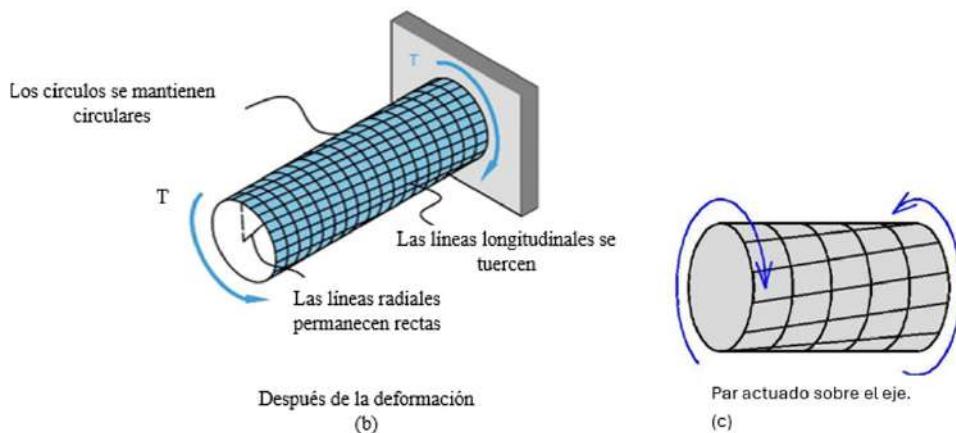


Fig. 3.1. Eje lleno sometido a torsión.

Para entender el comportamiento del material sometido a un par torsor se consideran las deformaciones en la zona elástica; por lo tanto, se utiliza la ley de Hooke que nos facilita mucho el cálculo, la distribución de esfuerzos a lo largo del eje de sección circular ya sea esta sólida o hueca; por lo que posteriormente se deducirán las fórmulas para torsión elástica.

3.2 ANÁLISIS DE ESFUERZOS EN UN SECCIÓN CIRCULAR

Considerando una barra empotrada en voladizo, sometida a pares de torsión T y T' de la misma magnitud, pero de sentidos opuestos, se analiza el comportamiento de áreas muy pequeñas (dA) que incluye fuerzas cortantes (dF) perpendiculares al eje como se muestra en la Fig. 3.2, de modo que la sumatoria de todos esos pares torsores internos, equivalente a un par de torsión T de igual magnitud y opuesto a T' .

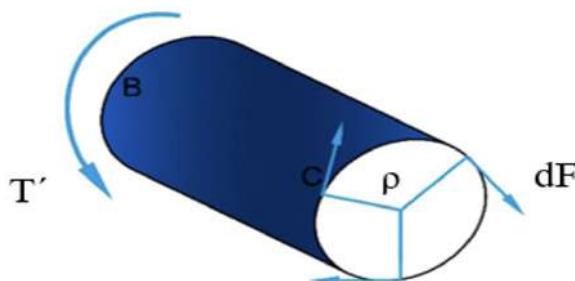


Fig. 3.2. Diferenciales de fuerza generados por una torsión tramo BC.

Como ya se habló, las secciones transversales de un eje circular permanecen planas y sin distorsión, y su apariencia es la misma; al ubicar un punto en una posición fija A y, si este gira alrededor del eje, se observa cómo cambia de posición A' formando un ángulo ϕ llamado ángulo de giro, mientras que la línea longitudinal en el extremo empotrado B se mantiene fijo y el extremo en voladizo A gira hasta la posición del punto A' formando un ángulo γ , conocido como ángulo unitario de giro y sabiendo que ϕ es proporcional a γ y siendo este último proporcional a L como se muestra en la Fig. 3.3. Denominando a ρ como la distancia perpendicular entre la fuerza dF y el eje seleccionado. (Hibbeler, 2010)

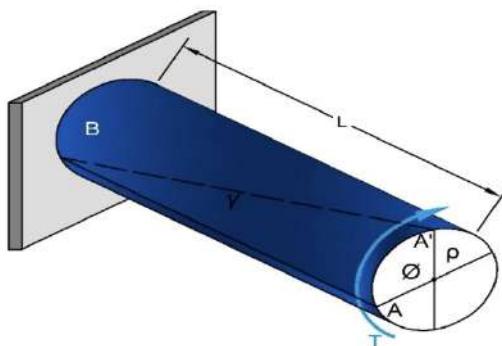


Fig. 3.3. Generación de un ángulo ϕ producto de una torsión.

Entonces se tiene que:

$$\int \rho(dF) = T$$

Donde:

$$\tau = \frac{F}{A} \quad (3.1)$$

Donde:

τ : Representa el Esfuerzo

F: Representa la Fuerza

A: Representa el Área

Tenemos que:

$$\tau = \frac{dF}{dA} \quad (3.2)$$

Donde:

dF : Representa la derivada de la fuerza

dA : Área en la cual actua τ

$$dF = \tau \cdot dA \quad (3.3)$$

Donde:

τ : Representa el esfuerzo

dA : Área en la cual actua τ

Reemplazando tenemos:

$$\int \rho(\tau \cdot dA) = T$$

Proceso de integración, con términos constantes

Se sabe que:

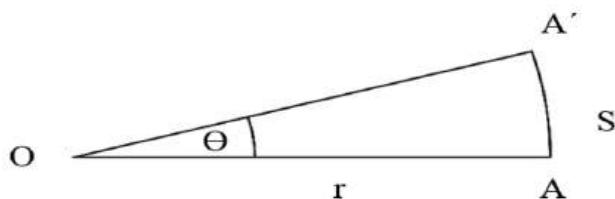


Fig. 3.4. Sección circular.

$$AA' = S = r\phi \quad (3.4)$$

También:

$$AA' = L\gamma$$

Igualando:

$$r\phi = L\gamma$$

$$\frac{r\phi}{L} = \gamma$$

$$\frac{L\gamma}{r} = \phi$$

Como se puede notar el ángulo unitario de giro puede llegar a ser máximo cuando alcance al valor del radio del eje:

Se tiene:

$$\gamma_{\max} = \frac{C(\phi)}{L}$$

$$\phi = \frac{\gamma_{\max} \cdot L}{C}$$

Igualando:

$$\frac{r \cdot \gamma}{L} = \phi = \frac{\gamma_{\max} L}{C}$$

$$\gamma = \frac{P}{C} \gamma_{\max}$$

Cuando

$$P = C \rightarrow \gamma = \gamma_{\max} \quad (3.5)$$

Cabe recalcar que al hablar de torcas o pares de torsión se aplicará la ley de la mano derecha, la misma que nos ayuda a determinar si el sentido de la torca es positivo o negativo.

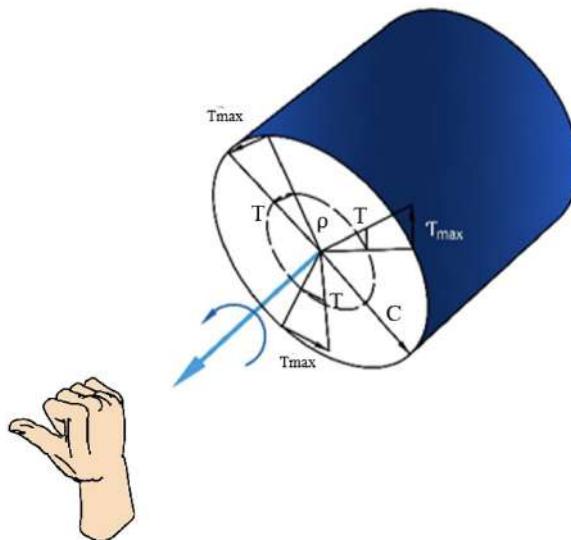


Fig. 3.5. Ley de la mano derecha.

La ley de la mano derecha consiste en identificar si la fuerza sale o entra al eje; en este caso sale, y como se puede ver en la Fig. 3.5 el pulgar de la mano derecha apunta, hacia afuera y mediante el giro de los dedos restantes al cerrar la palma nos indica el giro. En este caso la torca es de sentido antihorario.

Los ejes sometidos a torsión ya sean huecos o sólidos, deben comportarse de una forma lineal, es decir, elásticamente; caso contrario si la carga supera el límite elástico, el elemento sobrepasaría; la zona elástica por lo tanto el material no puede recuperar su forma original; entonces, el elemento se deformó y entró a la zona plástica.

3.3 LEY DE HOOKE

Al aplicar la ley de Hooke en torsión nos regimos a la siguiente ecuación:

$$\tau = G \cdot \gamma \quad \left[\frac{N}{m} \right] \quad (3.6)$$

Donde:

τ : Representa el esfuerzo cortante.

G : Representa el módulo de rigidez o módulo de corte del material.

γ : Representa el ángulo unitario de giro.

Esta ecuación es análoga a $\sigma = E \cdot \epsilon$ que se estudió en el capítulo anterior, de modo que:

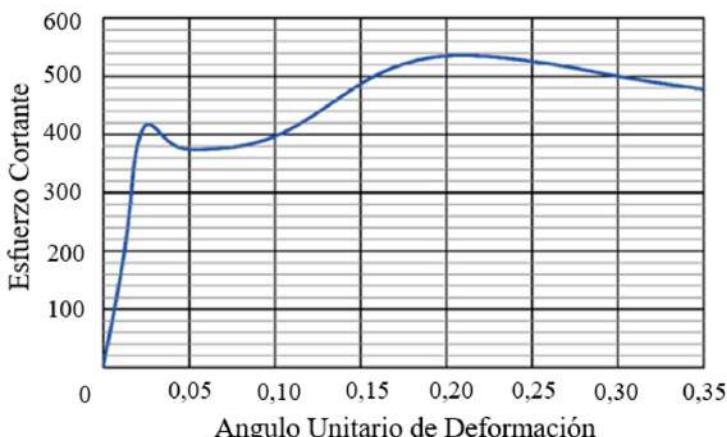


Fig. 3.6. Esfuerzo cortante-Ángulo unitario de deformación acero A-36.

Tenemos que:

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$\gamma = \frac{\rho}{C} (\gamma_{\max})$$

Reemplazando:

$$\tau = G \left(\frac{\rho}{C} \right) (\gamma_{\max})$$

$$\tau = \left(\frac{\rho}{C} \right) (G \gamma_{\max})$$

Tenemos un ángulo unitario máximo vamos a tener esfuerzo cortante máximo:

$$\tau = \frac{\rho}{C} \tau_{\max}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\tau \cdot C}{\rho}$$

Donde:

τ_{\max} : Representa el Esfuerzo Máximo

τC : Representa el Esfuerzo Cortante

ρ : Representa el Ángulo unitario máximo

La ecuación nos muestra que el esfuerzo cortante variará en forma lineal con la distancia desde el centro o desde un radio mínimo hasta un radio máximo.

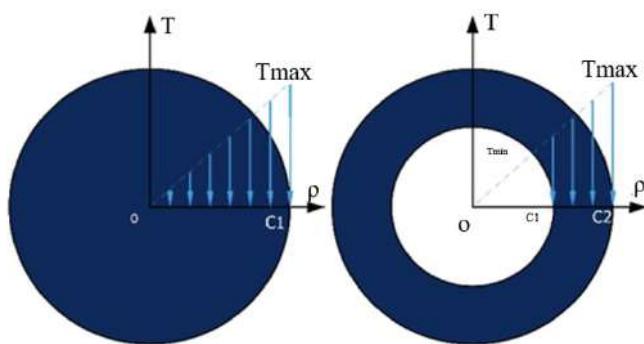


Fig. 3.7. Distribución de esfuerzos en una sección llena y hueca.

Para el cálculo de esfuerzos en torsión, se necesitará calcular el torque o momento par conociendo que:

$$\begin{aligned} T &= \int \rho (\tau dA) \\ T &= \int \rho \left(\frac{\rho}{C} \tau_{\max} \right) dA \\ T &= \frac{\tau_{\max}}{C} \int (\rho^2) dA \end{aligned} \quad (3.7)$$

El Momento de Inercia según Steiner es igual:

$$I_{EN} = \sum I_{CY} + \sum AY^2$$

Entonces:

$$\sum A.Y^2 = \int \rho^2 \cdot dA$$

La ecuación resultante será:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\tau_{\max}}{C} J \\ \tau_{\max} &= \frac{T \cdot C}{J} \left[\frac{N}{m^2} \right] \end{aligned}$$

Donde:

τ_{\max} : Torsión máxima

T: Torque

C: Radio

J: Momento polar de inercia

Siendo J el momento polar de inercia que para ejes sólidos y huecos va a ser distinta por lo tanto tenemos:

Para ejes sólidos:

$$I = \frac{\pi}{2} C^4 [m^4] \quad (3.8)$$

Donde:

I: Representa la Inercia

C: Representa el Radio

Y para ejes huecos:

$$I = \frac{\pi}{2} (C_2^4 - C_1^4) \quad [m^4] \quad (3.9)$$

Donde:

C_2 = Representa el radio Exterior

C_1 = Representa el radio Interior

Entonces:

$$\tau_{\max} = \frac{TC}{J}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\tau C}{\rho}$$

Igualando tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{(3.4)TC}{J} &= \frac{\tau C}{\rho} \\ \tau &= \frac{Tp}{J} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Donde:

τ : Representa la torsión

J : Representa el momento polar de inercia

Como los esfuerzos máximos se producen cuando el radio es máximo, esta ecuación nos va a indicar el esfuerzo que se genera a lo largo del mismo.

Para el caso de determinar la distribución de esfuerzos en una sección sólida como la Fig. 3.8 se conoce que:

$$\begin{aligned} \tau &= G\gamma \\ \gamma &= \frac{\tau}{G} \\ \gamma_{\max} &= \frac{\tau_{\max}}{G} \\ \frac{C\phi}{L} &= \frac{TC}{GL} \end{aligned}$$

Relación del ángulo de deformación y el torque o momento par:

$$\phi = \frac{TL}{JG} \quad (3.11)$$

Donde:

\varnothing : Representa el Ángulo

T: Representa el Torque

L: Representa la Longitud

G: Representa el Módulo de rigidez."

Para el caso de calcular el esfuerzo cortante mínimo en una sección transversal hueca, y en la cual nos permite determinar la distribución de esfuerzos en una sección hueca, como la Fig. 3.8, nosotros sabemos que:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\rho}{C} \tau_{\max} \\ \rho &= C_1 \\ C &= C_2 \\ \tau_{\min} &= \frac{C_1}{C_2} \tau_{\max} \left[\frac{N}{m^2} \right]\end{aligned}\tag{3.12}$$

Donde:

τ_{\min} : Representa el esfuerzo cortante mínimo.

C_1, C_2 : Radio

τ_{\max} : Representa el esfuerzo cortante máximo

EJERCICIOS DE REPASO

- 1) Se tiene una varilla de acero BC cuyo esfuerzo cortante permisible es $\tau_{\text{acero}} = 82 \text{ MPa}$, una varilla de latón AB, cuyo esfuerzo cortante permisible es $\tau_{\text{latón}} = 41 \text{ MPa}$. Si se conoce que el par torsor que se aplica en A es $T = 2 \text{ kNm}$, determine el diámetro para cada varilla.

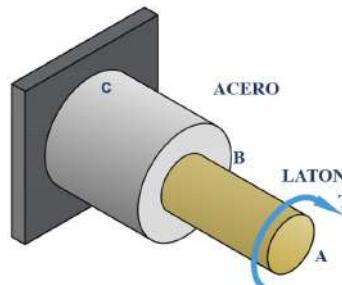


Fig. 3.8 Varilla de acero BC

Desarrollo:

Como las varillas que se muestran no están conectadas o involucradas con otros elementos, el par torsor general es de $T = 2 \text{ kNm}$.

Se plantea la ecuación del esfuerzo cortante, analizando su respectivo momento de inercia J .

$$\tau_{\max} = \frac{(T)(c)}{J}$$

$$\tau_{\max} = \frac{(T)(c)}{\frac{\pi}{2}(c^4)} \quad (3.13)$$

Se despeja el radio para la varilla AB

$$c_{AB} = \sqrt[3]{\frac{T}{\frac{\pi}{2}(\tau_{\max})}}$$

$$c_{AB} = \sqrt[3]{\frac{2 \text{ kN.m}}{\frac{\pi}{2}(41000 \text{ kPa})}}$$

$$c_{AB} = 0,031 \text{ m}$$

$$d_{AB} = 0,062 \text{ m}$$

Se despeja el radio para la varilla BC

$$c_{BC} = \sqrt[3]{\frac{T}{\frac{\pi}{2}(\tau_{\max})}}$$

$$c_{BC} = \sqrt[3]{\frac{2 \text{ kN.m}}{\frac{\pi}{2}(82000 \text{ kPa})}}$$

$$c_{BC} = 0,025 \text{ m} = 25 \text{ mm}$$

$$d_{BC} = 50 \text{ mm}$$

- 2) Los engranes mostrados conectan los ejes sólidos de la figura. La magnitud del par torsor aplicado en el eje AB es de $T = 400 \text{ N*m}$. Sabiendo que el esfuerzo de corte permisible es de 10 MPa, determinar el diámetro de los ejes AB y CD.

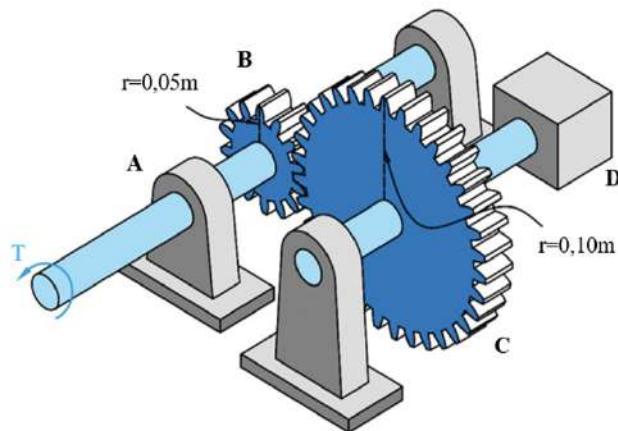


Fig. 3.9 Engranes conectan los ejes sólidos

Desarrollo:

Con la relación de radios se procede al cálculo del par torsor que afecta al eje CD.

$$T_{AB} = 400 \text{ N*m}$$

$$T_{CD} = \frac{r_C}{r_B} (T_{AB})$$

$$T_{CD} = \frac{0,1 \text{ m}}{0,05 \text{ m}} (400 \text{ N*m})$$

$$T_{CD} = 800 \text{ N*m}$$

Se plantea la ecuación del esfuerzo cortante, analizando su respectivo momento de inercia J.

$$\tau_{\max} = \frac{T^*c}{J}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T^*c}{\frac{\pi}{2} (c^4)}$$

Se despeja el radio para la varilla AB:

$$c_{AB} = \sqrt[3]{\frac{T_{AB}}{\frac{\pi}{2} * \tau_{max}}}$$

$$c_{AB} = \sqrt[3]{\frac{400 \text{ N*m}}{\frac{\pi}{2} (10 \times 10^6) \text{ Pa}}}$$

$$c_{AB} = 0,0294 \text{ m}$$

$$d_{AB} = 0,0588 \text{ m}$$

Se despeja el radio para la varilla CD:

$$c_{CD} = \sqrt[3]{\frac{T_{CD}}{\frac{\pi}{2} * \tau_{max}}}$$

$$c_{CD} = \sqrt[3]{\frac{800 \text{ N*m}}{\frac{\pi}{2} (10 \times 10^6) \text{ Pa}}}$$

$$c_{CD} = 0,037 \text{ m}$$

$$d_{CD} = 0,074 \text{ m}$$

- 3) Los ejes de latón AB y BC con radios de 50 mm y 60 mm respectivamente tienen un módulo de rigidez $G = 39 \text{ GPa}$, dichos ejes se encuentran sometidos a pares de torsión en las poleas como se muestra en la figura. Para ambos ejes sólidos de longitud $AB = 1 \text{ m}$ y $BC = 2 \text{ m}$ determinar los ángulos de giro entre a) A y B y b) B y C.

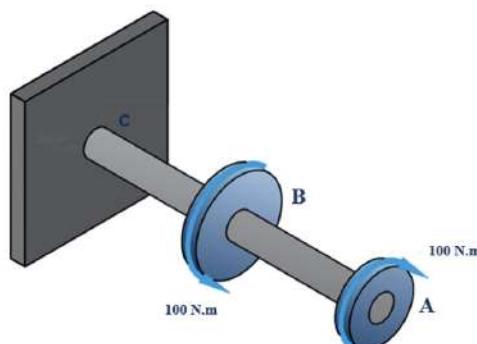
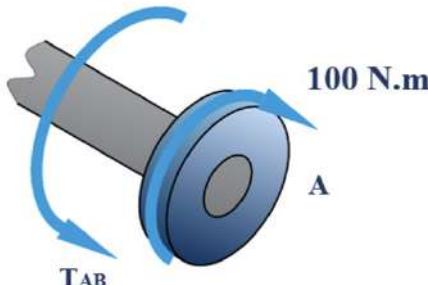


Fig. 3.10 Ejes de latón AB y BC

Desarrollo:

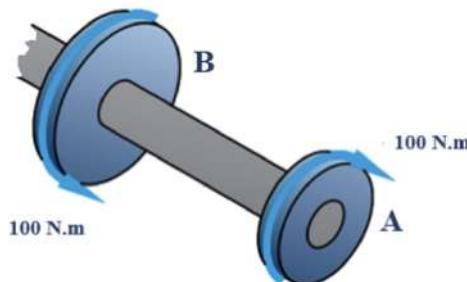
Se calculan los pares torsores que afectan directamente a los tramos de cada eje (Fig. 3.11a y Fig. 3.11b).



(a) Diagrama de cuerpo libre tramo AB

$$\sum M = 0$$

$$T_A = T_{AB} = 100 \text{ N*m}$$



(b) Diagrama de cuerpo libre de AB

$$\sum M = 0 \text{ (↻)+}$$

$$T_{BC} = T_B - T_A$$

$$T_{BC} = 700 \text{ N*m}$$

Calculamos J para los tramos AB y BC

$$J = \frac{\pi}{2} (c^4)$$

$$J_{AB} = \frac{\pi}{2} (c^4)$$

$$J_{AB} = \frac{\pi}{2} (0,05^4)$$

$$J_{AB} = 9,8175 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$J_{BC} = \frac{\pi}{2}(c^4)$$

$$J_{BC} = \frac{\pi}{2}(0,060^4)$$

$$J_{BC} = 2,0358 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

Calculamos el ángulo de giro entre A y B

$$\phi_{AB} = \frac{(T_{AB})(L_{AB})}{(G)(J_{AB})}$$

$$\phi_{AB} = \frac{(100 \text{ N*m})(1 \text{ m})}{(39 \times 10^9 \text{ Pa})(9,8175 \times 10^{-6} \text{ m}^4)} \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right)$$

$$\phi_{AB} = 0,015^\circ$$

Calculamos el ángulo de giro entre B y C

$$\phi_{BC} = \frac{(T_{BC})(L_{BC})}{(G)(J_{BC})}$$

$$\phi_{BC} = \frac{(700 \text{ N*m})(2 \text{ m})}{(39 \times 10^9 \text{ Pa})(2,0357 \times 10^{-5} \text{ m}^4)} \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right)$$

$$\phi_{BC} = 0,101^\circ$$

- 4) El tubo mostrado en la figura tiene un diámetro exterior de 0,1 m y un diámetro interior de 0,085 m. Si su extremo se aprieta contra el soporte en A, aplicando fuerzas en una llama de torsión como se muestra, determine el esfuerzo cortante desarrollado en el material en las paredes interna y externa a lo largo de la porción central del tubo cuando se aplican las fuerzas de 10 N.

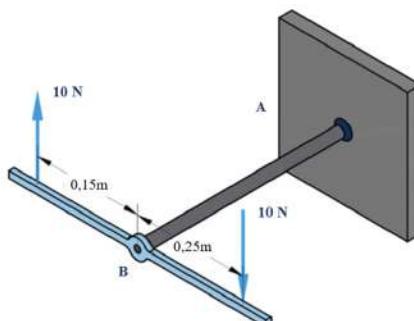
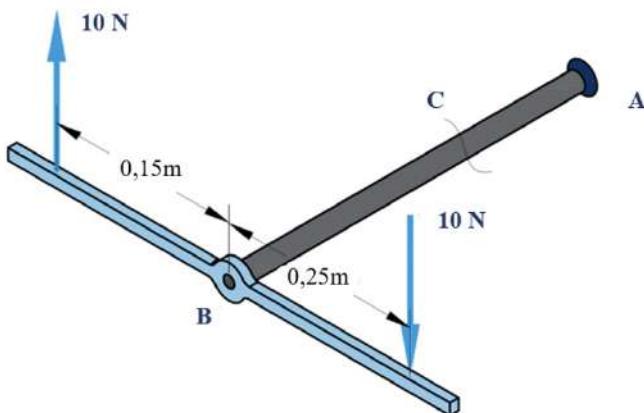
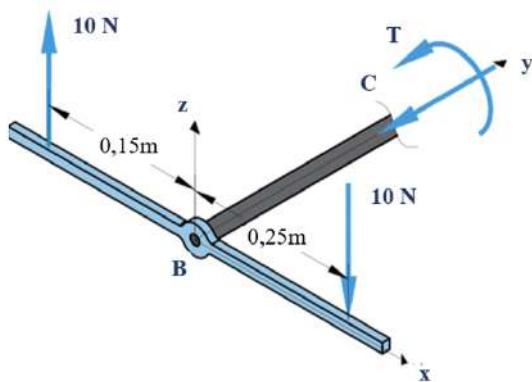


Fig. 3.11 Tubo

Desarrollo:



(a) Fuerzas aplicadas en B



(b) Diagrama de cuerpo libre corte en C

Haciendo un corte en el punto C (Fig. 3.12b), y haciendo sumatoria de momentos con respecto al eje Y, tenemos una única incógnita T.

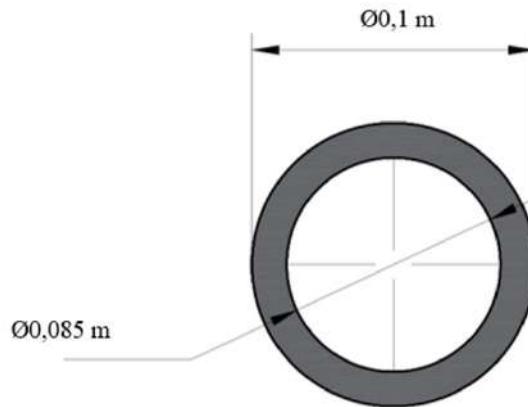
Realizando sumatoria de momentos en Y

$$\sum M_Y = 0 (\curvearrowright) +$$

$$10 \text{ N}(0,15 \text{ m}) + 10 \text{ N}(0,25 \text{ m}) - T = 0$$

$$T = 4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

El momento polar de inercia de la sección transversal del tubo hueco es:



(c) Momento polar de inercia de la sección transversal

$$J = \frac{\pi}{2} (C_{\text{ext}}^4 - C_{\text{int}}^4)$$

$$J = \frac{\pi}{2} (0,05^4 - 0,0425^4)$$

$$J = 4,7 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

El esfuerzo cortante en la parte exterior del tubo es:

$$\tau = \frac{T * C}{J}$$

$$\tau = \frac{4 \text{ N} * \text{m} (0,05 \text{ m})}{4,7 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$$

$$\tau = 42,55 \text{ kPa}$$

El esfuerzo cortante en la parte interior del tubo es:

$$\tau = \frac{4 \text{ N} * \text{m} (0,0425 \text{ m})}{4,7 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$$

$$\tau = 36,17 \text{ kPa}$$

- 5) Un eje cilíndrico hueco de acero mide 1,5 m de longitud y tiene diámetros interior y exterior de 35 mm y 55 mm respectivamente.
- Cuál es el máximo par de torsión que puede aplicarse al eje si el esfuerzo cortante no debe exceder 120 MPa.
 - Cuál es el valor mínimo correspondiente al esfuerzo cortante.
 - Dibuje la distribución de esfuerzos en el eje.

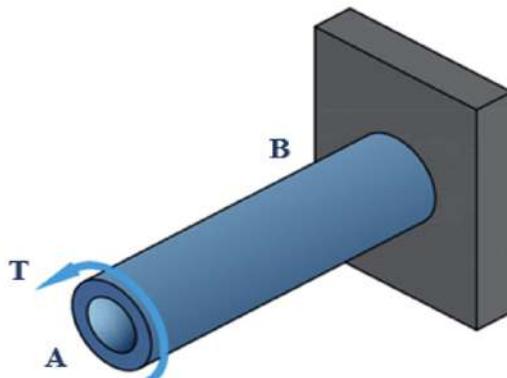


Fig. 3.12 Cilindro hueco

Desarrollo:

$$\tau_{\max} = \frac{(T)(C)}{J}$$

- a) Máximo par de torsión para no exceder esfuerzo cortante no debe exceder 120 MPa.

$$T_{\max} = \frac{(\tau_{\max})(J)}{C}$$

$$J = \frac{\pi}{2} (C_{\text{ext}}^4 - C_{\text{int}}^4)$$

$$J = \frac{\pi}{2} (0,0275^4 - 0,0175^4)$$

$$J = 7,51 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$T_{\max} = \frac{(\tau_{\max})(J)}{C}$$

$$T_{\max} = \frac{(120 \times 10^6 \text{ Pa})(7,51 \times 10^{-7} \text{ m}^4)}{0,0275 \text{ m}}$$

$$T_{\max} = 3277,25 \text{ N*m}$$

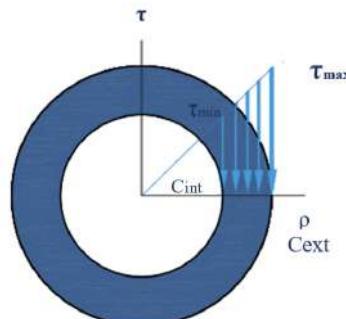
b) Valor mínimo correspondiente al esfuerzo cortante.

$$\tau_{\min} = \left(\frac{C_{\text{int}}}{C_{\text{ext}}} \right) (\tau_{\max})$$

$$\tau_{\min} = \left(\frac{0,0175 \text{ m}}{0,0275 \text{ m}} \right) (120 \times 10^6 \text{ Pa})$$

$$\tau_{\min} = 76,36 \text{ MPa}$$

c) Distribución de esfuerzos en el eje.



(a) Distribución de esfuerzos en el eje

- 6) El eje BC es hueco y tiene un diámetro interior y exterior de 0,1 m y 0,13 m respectivamente, los ejes AB y CD son sólidos o llenos y de diámetro "d"; para las cargas mostradas en la figura determine:
- τ_{\max}, τ_{\min} en el eje z en el eje hueco.
 - El diámetro d requerido en los ejes AB y CD, si los esfuerzos cortantes permisibles son de 65 MPa.

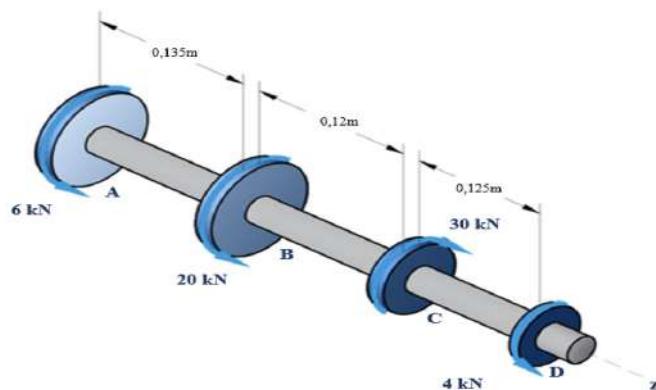
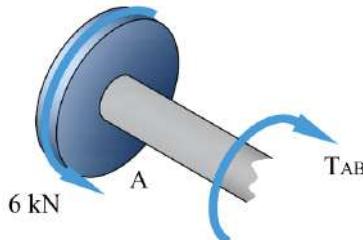


Fig. 3.13 Eje

Desarrollo:

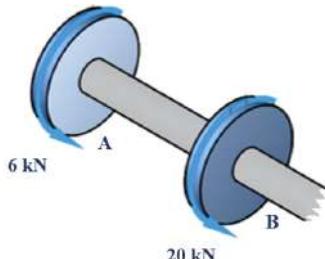
Indicando con TAB el par de torsión en el Eje AB, se realiza un corte en dicho eje (Fig. 3.14a) y se realiza una sumatoria de momentos respecto al eje z para la siguiente gráfica:



(a) Par de torsión en el Eje AB

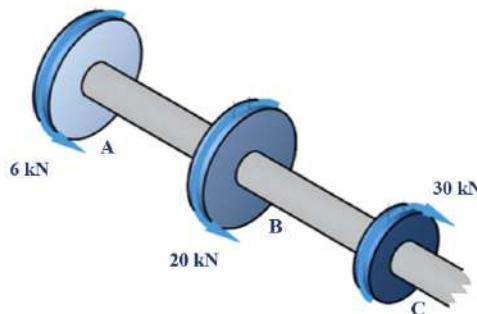
$$\sum M_z = 0 (\curvearrowright) + \\ 6 \text{ kN} \cdot \text{m} - T_{AB} = 0 \\ 6 \text{ kN} \cdot \text{m} = T_{AB}$$

Al igual que el proceso anterior se realiza lo mismo, pero en este caso se existe un corte en el eje BC (Fig. 3.14b), lo mismo para el tramo AD realizando en este caso un corte en el tramo CD (Fig. 3.14c), luego se encuentran los cálculos correspondientes:



(b) Corte en el eje BC

$$\sum M_z = 0 (\curvearrowright) + \\ 6 \text{ kN} \cdot \text{m} + 20 \text{ kN} \cdot \text{m} - T_{BC} = 0 \\ T_{BC} = 26 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



(c) Corte en el tramo CD

Sumatoria de momentos con respecto al punto Z

$$\sum M_z = 0 \quad (\curvearrowright) +$$

$$6 \text{ kN} + 20 \text{ kN} - 30 \text{ kN} + T_{CD} = 0$$

$$T_{CD} = 4 \text{ kN}$$

a) τ_{\max} , τ_{\min} (Esfuerzos Máximos y Mínimos)

$$\tau_{\max} = \frac{T C}{J}$$

$$J = \frac{\pi}{2} (C_{ext}^4 - C_{int}^4)$$

$$J = \frac{\pi}{2} (0,065^4 - 0,05^4)$$

$$J = 1,82 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

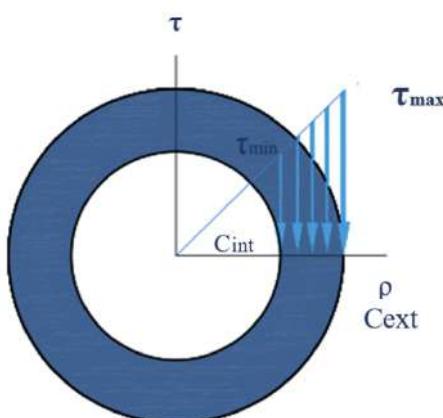
$$\tau_{\max} = \frac{26 \text{ kN}(0,065 \text{ m})}{1,82 \times 10^{-5} \text{ m}^4}$$

$$\tau_{\max} = 92,85 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\min} = \frac{C_{int}}{C_{ext}} \tau_{\max}$$

$$\tau_{\min} = \frac{0,05 \text{ m}}{0,065 \text{ m}} (97,85 \text{ MPa})$$

$$\tau_{\min} = 75,26 \text{ MPa}$$



(d) Esfuerzos mínimos y máximos

- b) Diámetro d requerido en los ejes AB y CD, si los esfuerzos cortantes permisibles son de 65 MPa.

$$\tau_{\max} = \frac{T_{AB} * C}{J}$$

$$65 \times 10^3 \text{ kPa} = \frac{6 \text{ kN}(C)}{\frac{\pi}{2}(C^4)}$$

$$C_{AB} = 0,039 \text{ m} \quad d = 0,078 \text{ m}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T_{CD} C}{J}$$

$$65 \times 10^3 \text{ kPa} = \frac{4 \text{ kN}(C)}{\frac{\pi}{2}(C^4)}$$

$$C_{CD} = 0,034 \text{ m} \quad d = 0,068 \text{ m}$$

- 7) Los engranes unidos al eje de acero que tiene un extremo fijo están sometidos a los pares de torsión que se muestran en la figura. Si el módulo de elasticidad cortante es de 80 GPa y el eje tiene un diámetro de 0,014 m, determine el desplazamiento del diente P en el engrane A. El eje gira libremente en el cojinete ubicado en B.

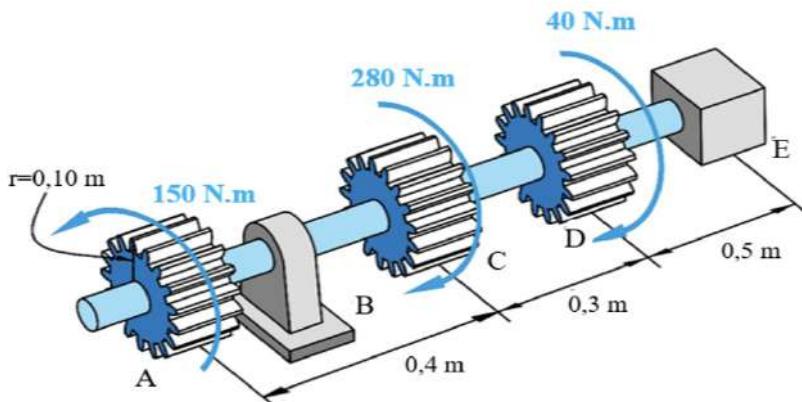


Fig. 3.14 Engranes unidos al eje de acero

Desarrollo:

Utilizando la regla de la mano derecha y la convención de signos establecida de que el par de torsión positivo se dirige hacia afuera del extremo seccionado del eje, se tiene:

$$T_{AC} = +150 \text{ N*m} \quad T_{CD} = -130 \text{ N*m} \quad T_{DE} = -170 \text{ N*m}$$

El momento polar de inercia para el eje es:

$$J = \frac{\pi}{2} (0,007 \text{ m})^4 = 3,771(10^{-9}) \text{ m}^4$$

Si se aplica la ecuación a cada segmento y se suman los resultados algebraicamente, se tiene:

$$\begin{aligned} \phi_A &= \sum \frac{T*L}{J*G} = \frac{(150 \text{ N*m})(0,4 \text{ m})}{3,771(10^{-9}) \text{ m}^4 (80(10^9) \text{ N/m}^2)} \\ &\quad + \frac{(-130 \text{ N*m})(0,3 \text{ m})}{3,771(10^{-9}) \text{ m}^4 (80(10^9) \text{ N/m}^2)} \\ &\quad + \frac{(-170 \text{ N*m})(0,5 \text{ m})}{3,771(10^{-9}) \text{ m}^4 (80(10^9) \text{ N/m}^2)} = 0,2121 \text{ rad} \end{aligned}$$

El desplazamiento del diente P en el engrane A es:

$$S_p = \phi_A * r = (0,2121 \text{ rad})(0,1\text{m}) = 0,212 \text{ m}$$

- 8) Los dos ejes sólidos de acero mostrados en la figura se acoplan entre sí mediante engranes dentados. Determine el ángulo de giro del extremo A del eje AB cuando se aplica el par de torsión $T = 60 \text{ N.m.}$; Considere $G = 95 \text{ GPa}$. El eje AB gira libremente en los cojinetes E y F, mientras que el eje DC está fijo en D. Cada eje tiene un diámetro de $0,03 \text{ m}$.

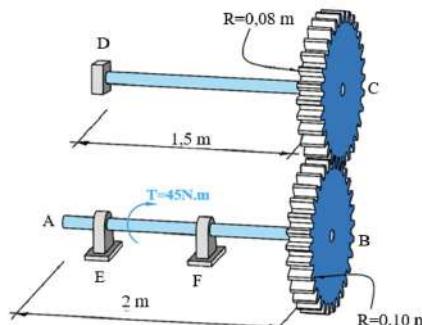


Fig. 3.15 Dos ejes sólidos de acero

Desarrollo:

Primero, consideramos que, si se suman los momentos a lo largo de la línea central x del eje AB, se obtiene la reacción tangencial entre los engranes, lo cual dará un valor de $F = 60 \text{ Nm} / 0,10 \text{ m} = 600\text{N}$; obteniendo la fuerza F, ahora se suman los momentos respecto a la línea central x del eje DC; se observa que esta fuerza crea un par de torsión de $(T_D)x = 600\text{N}(0,08\text{m}) = 48 \text{ Nm}$ sobre el eje DC.

Al momento de resolver el problema primero se considera el cálculo de la rotación del engranaje C debido al par de torsión que anteriormente se calculó obteniendo un valor de 48 Nm en el eje DC. Este ángulo de giro es de:

$$\phi_C = \frac{T^*L_{DC}}{J^*G} = \frac{(48 \text{ N*m})(1,5 \text{ m})}{\left(\frac{\pi}{2}\right)(0,015 \text{ m})^4 \left(95 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)} = 0,0095 \text{ rad}$$

Si se observa la gráfica principal se tiene en cuenta que los engranes en el extremo del eje están endentados, la rotación Φ_C del engrane C ocasiona que el engrane B gire Φ_B , donde:

$$\phi_B(0,1 \text{ m}) = (0,0095 \text{ rad})(0,08 \text{ m})$$

$$\phi_B = 0,0076 \text{ rad}$$

Ahora se determinará el ángulo de giro del extremo A con respecto al extremo B del eje AB causado por el par de torsión de 45 Nm, se tiene:

$$\phi_{A/B} = \frac{T_{AB}^*L_{AB}}{JG} = \frac{(60 \text{ N*m})(2 \text{ m})}{\left(\frac{\pi}{2}\right)(0,015 \text{ m})^4 \left(95 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)} = 0,0159 \text{ rad} = 0,91^\circ$$

La rotación del extremo A se determina mediante la suma de ϕ_B y ϕ_{AB} , puesto que ambos ángulos tienen la misma dirección. Con lo antes mencionado se obtiene:

$$\phi_A = \phi_B + \phi_{AB} = 0,0076 \text{ rad} + 0,0159 \text{ rad} = 0,0235 \text{ rad} = 1,35^\circ$$

- 9) El eje mostrado en la figura está fabricado de un tubo de acero que se encuentra unido a un núcleo de latón. Si se aplica un par de torsión $T = 250 \text{ N.m}$ sobre un extremo libre, grafique la distribución del esfuerzo cortante a lo largo de una línea radial del área de su sección transversal. Considere $G_{\text{ac}} = 78,6 \text{ MPa}$, $G_{\text{lat}} = 35,8 \text{ MPa}$.

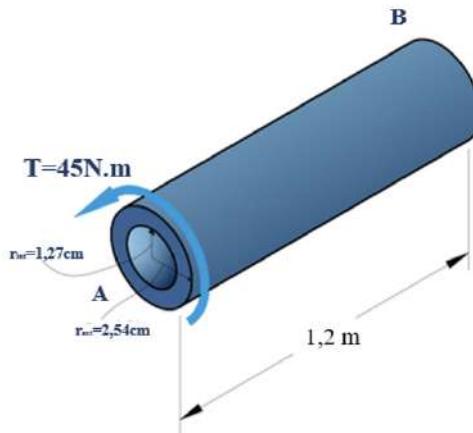


Fig. 3.16. Tubo de acero

Desarrollo:

La reacción se ha representado mediante la cantidad desconocida de par de torsión resistida por el acero T_{ac} y por el latón T_{la} ; el equilibrio requiere:

$$-T_{\text{st}} - T_{\text{br}} + (250 \text{ Nm}) = 0 \quad (1)$$

Se requiere que el ángulo de giro del extremo A sea igual tanto para el acero como para el latón, ya que están unidos entre sí. Por lo tanto:

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_{\text{st}} = \dot{\theta}_{\text{bt}}$$

Si se aplica la relación carga – desplazamiento, $\dot{\theta} = TL / JG$,

$$\frac{T_{\text{st}} * L}{\frac{\pi}{2} (25,4 \times 10^{-3} \text{ m})^4 - (12,7 \times 10^{-3} \text{ m})^4 (27,58 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)} =$$

$$\frac{T_{\text{br}} * L}{\frac{\pi}{2} (12,7 \times 10^{-3} \text{ m})^4 (35,85 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)}$$

$$T = 32,88 T_{\text{br}} L \quad (2)$$

Al resolver las ecuaciones, se obtiene:

$$(T_{br})_{\max} = \frac{(9,94 \text{ Nm})(12,7 \times 10^{-3} \text{ m})}{(\frac{\pi}{2})(12,7 \times 10^{-3} \text{ m})^4} = 3,08 \text{ MPa}$$

Los esfuerzos cortantes mínimo y máximo son:

$$(T_1)_{\min} = \frac{(328,95 \text{ Nm})(12,7 \times 10^{-3} \text{ m})}{(\frac{\pi}{2})((25,4 \times 10^{-3} \text{ m})^4 - (12,7 \times 10^{-3} \text{ m})^4)} = 6,65 \text{ MPa}$$

$$(T_1)_{\max} = \frac{(328,95 \text{ N.m})(25,4 \times 10^{-3} \text{ m})}{(\frac{\pi}{2})((25,4 \times 10^{-3} \text{ m})^4 - (12,7 \times 10^{-3} \text{ m})^4)} = 13,31 \text{ MPa}$$

- 10) El eje sólido que se muestra en la figura tiene un diámetro de 0,035 m. Está sometido a los dos pares torsión mostrados, determine las reacciones en los soportes fijos A y B.

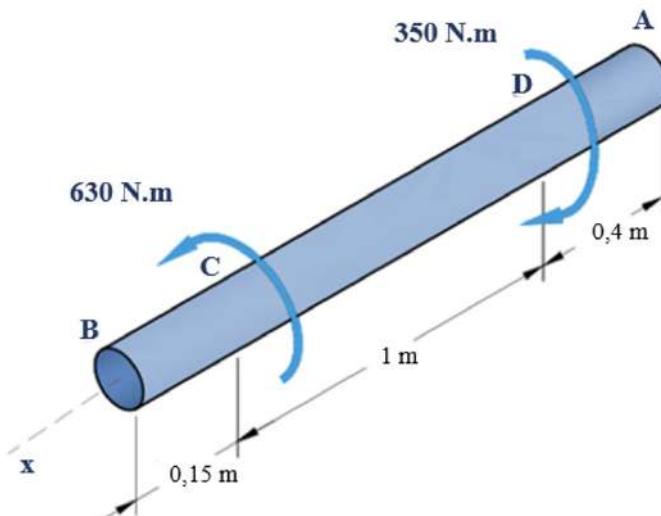


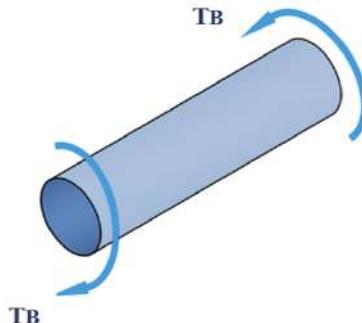
Fig. 3.17 Eje sólido

Desarrollo:

Al revisar el diagrama de cuerpo libre, puede observarse que el problema es estáticamente indeterminado, ya que solo existe una ecuación de equilibrio disponible y dos incógnitas. Se requiere

$$\sum M_x = 0; -T_B + 630 \text{ Nm} - 350 \text{ Nm} - T_A = 0 \quad (3.14)$$

Los ejes están fijos (Fig. 3.18a), el ángulo de giro de un extremo del eje con respecto al otro debe ser igual a cero. Por lo tanto, la ecuación de compatibilidad se convierte en:



(a) Diagrama de cuerpo libre del eje

$$\phi_{A/B} = 0$$

Esta condición puede expresarse en términos de los momentos de torsión desconocidos, utilizando la relación carga -desplazamiento, $\phi = T*L/J*G$. Aquí hay tres regiones, del eje donde el par de torsión interno es constante. Usando la convención de signos establecida en la sección se tiene:

$$-\frac{T_B(0,15 \text{ m})}{JG} + \frac{(630 \text{ kNm}-T_B)(1 \text{ m})}{JG} + \frac{(380-T_B)(0,4 \text{ m})}{JG} = 0$$

De modo que:

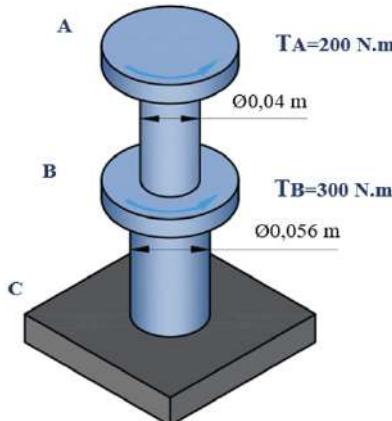
$$T_B = 504,51 \text{ Nm}$$

Con base en ecuación 1

$$T_A = -224,52 \text{ Nm}$$

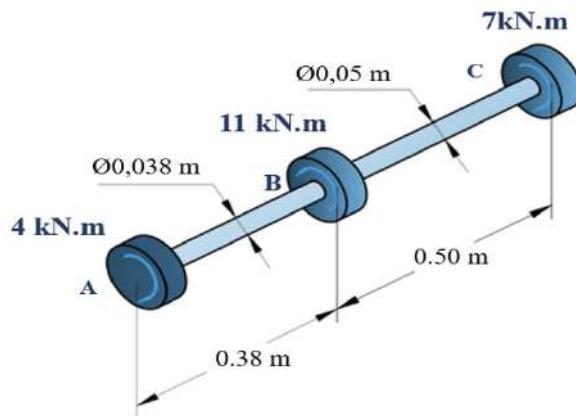
PROBLEMAS PROPUESTOS

F3-1. Los pares de torsión indicados se ejercen sobre las poleas A y B. Si se sabe que cada eje es sólido, determine el esfuerzo cortante máximo: a) en el eje AB, b) en el eje BC.



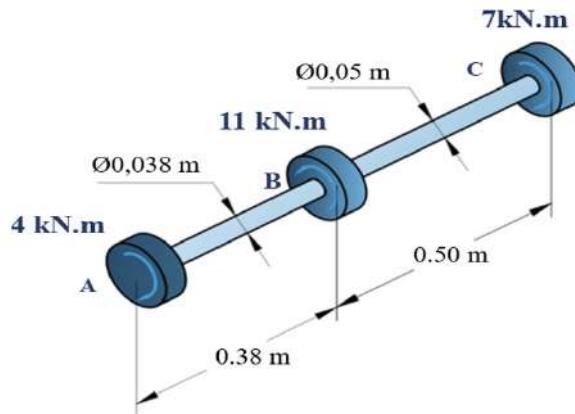
F3-1 Eje ABC

F3-2. Los pares de torsión indicados en la figura se ejercen sobre las poleas A, B y C. Si se sabe que cada eje es sólido, determine el esfuerzo cortante máximo: a) en el eje AB, b) en el eje BC.



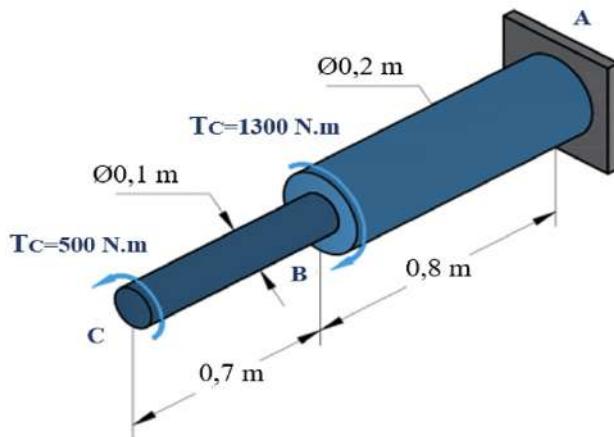
F3-2. Pares de torsión aplicados sobre las poleas A, B y C.

F3-3. Los ejes del ensamble de poleas que se muestran en la figura anterior serán rediseñados. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible en cada eje es de 8,5 kN; determine el diámetro mínimo permisible para: a) el eje AB, b) el eje BC.



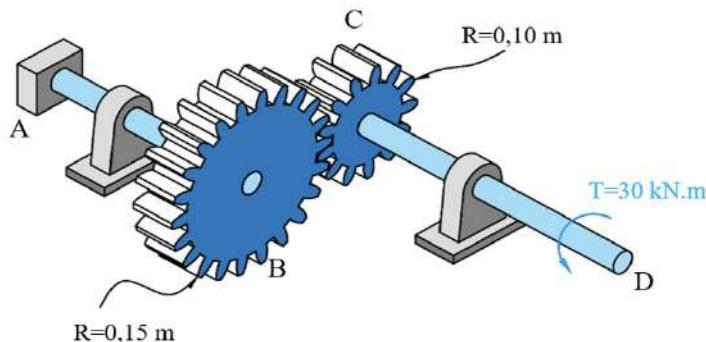
F3-3. Pares de torsión aplicados sobre las poleas A, B y C.

F3-4. El eje sólido que se muestra en la figura está hecho de un latón para el cual el esfuerzo cortante permisible es de 55 MPa. Si se desprecia el efecto de las concentraciones de esfuerzo, determine los diámetros mínimos d_{AB} y d_{BC} con los cuales no se excede el esfuerzo cortante permisible.



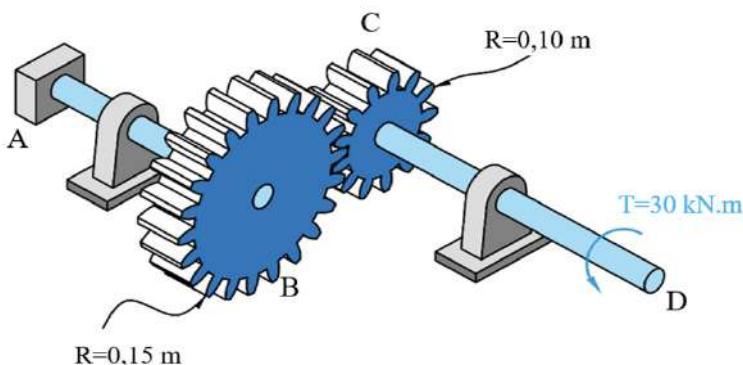
F3-4. Eje sólido de latón

F3-5. Un par de torsión de magnitud $T = 30 \text{ kN.m}$, se aplica en D como se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible es de 517 MPa en cada eje, determine el diámetro requerido: a) del eje AB, b) del eje CD.



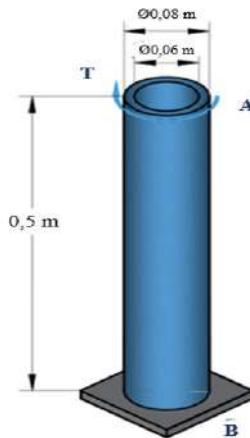
F3-5 Par de torsión aplicado al eje CD

F3-6. Un par de torsión de magnitud $T = 30 \text{ kN.m}$, se aplica en D como se muestra en la figura anterior. Si se sabe que el diámetro del eje AB es de 0,025 m y que el diámetro del eje CD es de 0,020 m, determine el esfuerzo cortante máximo: a) en el eje AB, b) en el eje CD.



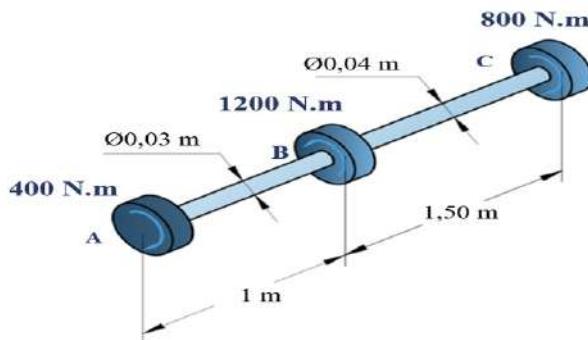
F3-6 Par de torsión aplicado al eje CD

F3-7. Para el tubo de aluminio que se muestra en la figura ($G = 27 \text{ GPa}$), determine el par de torsión T que causa un ángulo de giro de 2° , b) Determine el ángulo de giro, si se aplica el mismo par de torsión T a un eje cilíndrico sólido con igual longitud y área de sección transversal.



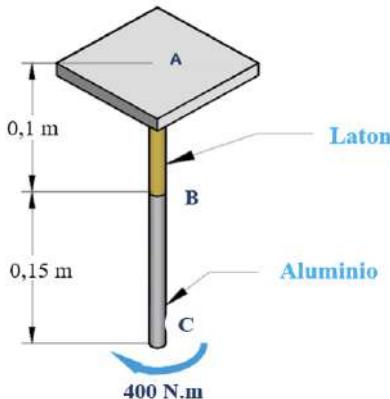
F3-7. Tubo de aluminio

F3-8. Los pares de torsión indicados en la siguiente figura se ejercen sobre las poleas A, B y C. Si se sabe que ambos ejes son sólidos y están hechos de latón ($G=39 \text{ GPa}$), determine el ángulo de giro entre: a) A y B, b) A y C.



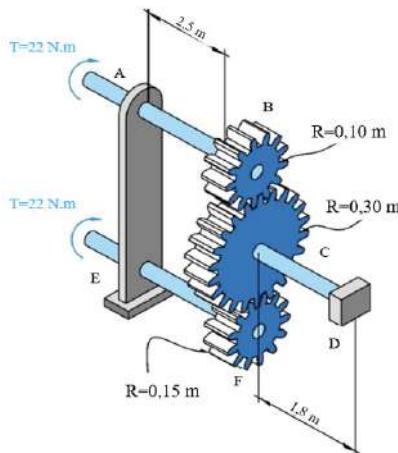
F3-8 Ejes sólidos de latón

F3-9. La varilla de aluminio BC ($G = 26 \text{ GPa}$) está unida a la varilla de latón AB ($G = 39 \text{ GPa}$). Si se sabe que cada varilla es sólida y tiene un diámetro de 0,015 m, determine el ángulo de giro: a) en B, b) en C.



F3-9 Varilla de aluminio

F3-10. Tres ejes sólidos, cada uno de 0,04 m de diámetro, se conectan mediante los engranajes que se muestra en la figura. Si se sabe que $G = 77 \text{ GPa}$, determine: a) el ángulo a través del cual gira el extremo A del eje AB, b) el ángulo que gira el extremo E del eje EF.



F3-10. Tres ejes sólidos conectados con engranajes

CAPÍTULO IV

4. COLUMNAS

4.1 INTRODUCCIÓN

En los tres capítulos anteriores se han calculado los esfuerzos que actúan en los elementos con el fin de compararlos con los esfuerzos permisibles, para garantizar la seguridad de las estructuras siendo $\sigma_{\text{trabajo}} < \sigma_{\text{permisible}}$; el análisis que se realizará en este capítulo es el estudio y diseño de columnas los cuales son elementos prismáticos sometidas a cargas axiales. Ahora el estudio se enfocará en estos elementos que solamente están sometidos a compresión; las columnas son elementos largos de forma vertical sujetos a fuerzas de compresión axial utilizados como soportes para estructuras que deben ser resistentes y estables. En este estudio, la estabilidad no tiene nada que ver con la resistencia debido a que un material por más robusto que sea puede llegar a fallar; en estos casos, la falla del material se debe a la inestabilidad que poseen estos elementos; la inestabilidad es conocida como pandeo, el mismo que puede llevar a una repentina y dramática falla de la estructura, por lo tanto, se debe tener una alta consideración y atención al estudio de columnas. Si tomamos en cuenta el elemento de la Fig. 4.1, y cambiamos su geometría sin variar la sección, es decir, incrementamos su longitud, este fenómeno se llama esbeltez; en este caso el elemento incrementa la probabilidad de falla o inestabilidad lateral o pandeo. Nótese que mientras más esbelta, la falla puede ocurrir con mayor facilidad y deformarse al aplicar una carga vertical o incluso por su propio peso. (Ferdinand , y otros, 2013)

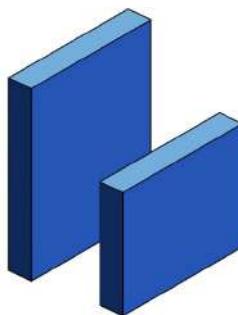


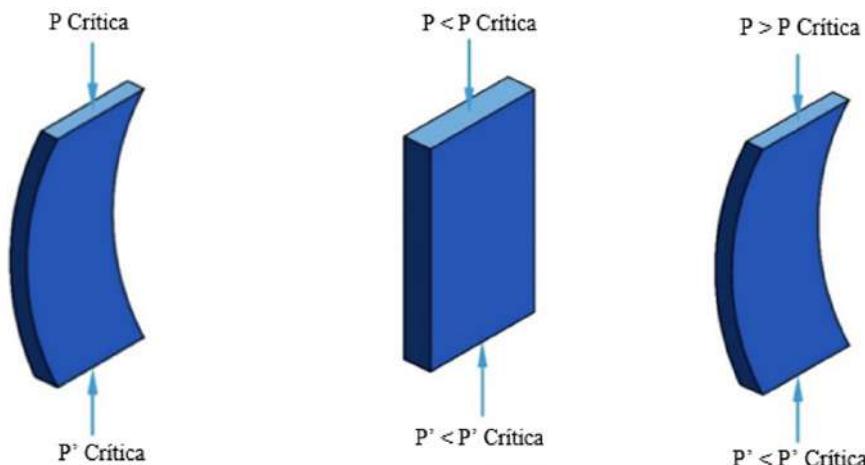
Fig. 4.1. Elementos con misma sección y diferente longitud.

Normalmente a los elementos que se encuentran en sentido vertical se los conoce como columnas y a los elementos que se encuentran en sentido horizontal se los conoce como vigas; pero las columnas pueden ser estudiadas como vigas y viceversa, ya que los principios físicos que poseen son de la misma magnitud.

4.2 CARGA CRÍTICA

Dado que ya estamos familiarizados con el concepto de esbeltez, podemos afirmar que cuando aumentamos la carga en una columna, eventualmente llegará a un punto en el que la columna alcanzará su capacidad máxima de carga antes de entrar en la fase plástica, esta carga máxima se la conoce como carga crítica. En el momento que se retira la carga la columna regresa a su posición inicial, pero si se sobrepasa la carga crítica, ya se encuentra en la zona plástica y la columna colapsa y no recuperará su posición inicial.

Esta carga crítica se la conoce como carga crítica de Euler y es de gran utilidad, ya que sirve para identificar si un elemento está actuando dentro o fuera de la zona elástica. Esta carga provocará que el elemento se curve, es decir, se doble adoptando una forma como la mostrada en la Fig. 4.2b, y si excede se volverá inestable y fallará como se puede observar en la Fig. 4.2c.



(a) Carga menor que la crítica. (b). Carga igual a la crítica. (c) Carga mayor que la crítica.

Una columna es capaz de soportar una carga axial máxima, denominada carga crítica cuando se encuentra a punto de pandearse; por tal motivo, si existiese una carga adicional provocará que la columna se pandee sufriendo una flexión lateral como se muestra en la Fig. 4.2c. Con el propósito de entender este fenómeno de inestabilidad se considerará un mecanismo formado de dos barras rígidas sin peso las cuales se encuentran conectadas por un pasador como se muestra en la Fig. 4.3a. En el momento en que las barras se encuentran en posición vertical, el resorte cuya rigidez k , se encuentra sin estirarse, y si al aplicar sobre la parte superior de una de las barras una pequeña fuerza axial P de forma vertical el sistema se encontrará en equilibrio, por lo tanto, el sistema puede alterarse al cambiar de posición el pasador A una distancia Δ , Fig. 4.3b. En la Fig. 4.3c se indica el diagrama de cuerpo libre del pasador en el instante en que las barras se desplazan; entonces, mediante la ley de Hooke el resorte produce una fuerza $F = k\Delta$, la misma que trata de restablecer su posición de equilibrio al sistema, por otro lado, al descomponer la carga P en sus componentes horizontales $P_x = P \cdot \operatorname{tg}\theta$, estas fuerzas tienden a empujar tanto al pasador como a las barras a una distancia mayor del punto de equilibrio. Si se sabe que θ es pequeño $\Delta \approx \theta (L/2)$ y $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$, entonces la fuerza de restauración queda expresada como $F = k\theta L/2$ y la fuerza perturbadora $2P_x = 2P\theta$.

Si la fuerza de $F > 2P_x$, entonces $k\theta L/2 > 2P\theta$; al despejar P se tiene:

$$P < \frac{kL}{4} \quad \text{equilibrio estable} \quad (4.1)$$

Donde:

P : carga axial aplicada

k : factor definido para cada caso de columna

L : longitud de la columna

Esta condición nos indica que se encuentra en un equilibrio estable, ya que la fuerza generada por el resorte es lo suficiente para restaurar a las barras a su posición original o de equilibrio; sin embargo $k\theta L/2 < 2P\theta$, entonces:

$$P > \frac{kL}{4} \quad \text{equilibrio inestable} \quad (4.2)$$

Esta condición nos indica que se encuentra en un equilibrio inestable, es decir, si se aplica una carga P y se produce un leve desplazamiento en A el sistema tiende a salir del equilibrio y no se regresará a su posición original.

El valor medio de P , donde $k\theta L/2 = 2P\theta$, es la carga crítica, entonces:

$$P_{cr} = \frac{kL}{4} \quad \text{equilibrio neutro} \quad (4.3)$$

Esta carga crítica mantiene al sistema en un equilibrio neutro. Puesto que $P_{(cr)}$ es independiente del pequeño desplazamiento θ producido por las barras, cualquier variación ligera del sistema no provocará un alejamiento del equilibrio, ni recuperará su posición original. Por lo tanto, las barras se mantendrán en su posición con flexión.

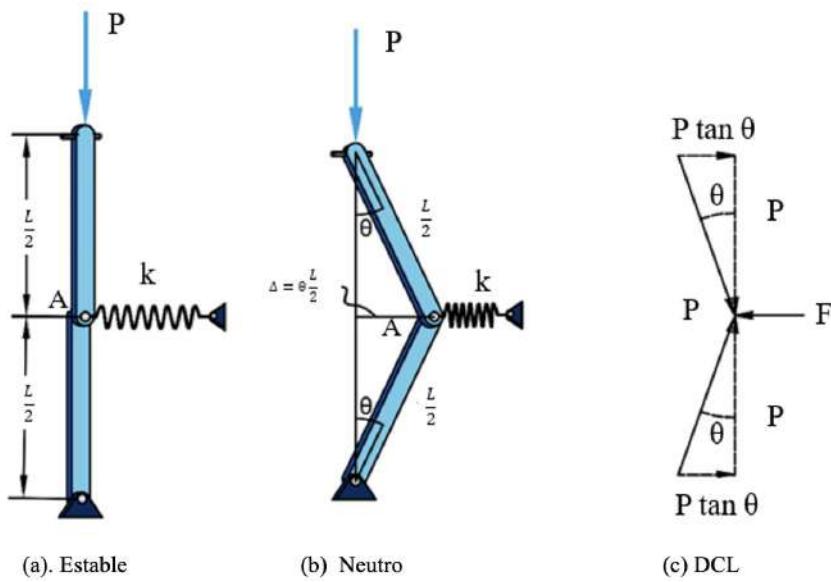


Fig. 4.3. Demostracion de columna capaz de soportar carga axial máxima

Para facilitar el análisis a la columna se la puede trabajar como si fuera una viga como podemos observar en la Fig. 4.4.

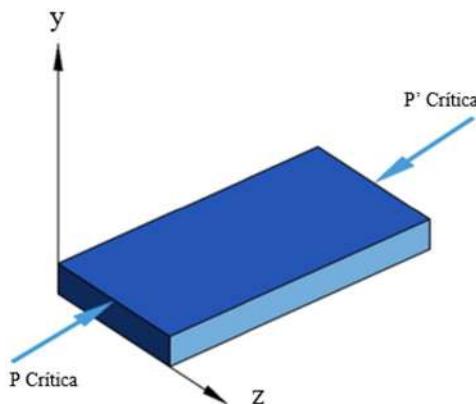


Fig. 4.4. Viga sometida a compresión.

Como ya se mencionó anteriormente, al aplicar la carga crítica en el elemento provocará que éste se curve, como se puede observar en la Fig. 4.5.

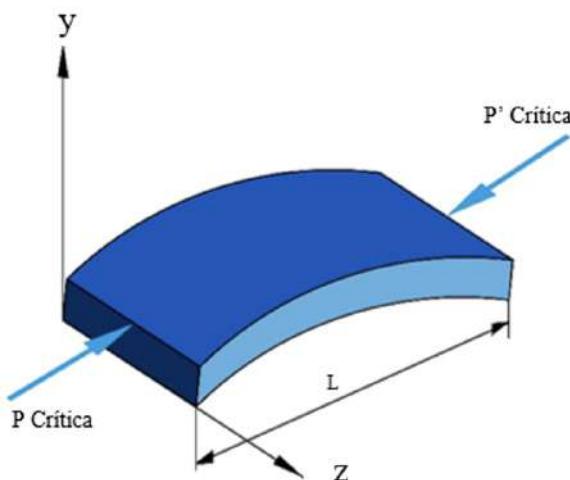


Fig. 4.5. Elemento sometido a compresión debido a la carga crítica.

Como sabemos, la carga crítica fue analizada y calculada por el matemático Euler mediante un método denominado método de la doble integración, el mismo que se estudiará más a fondo en temas posteriores; a través de este método es posible hallar deformaciones y ángulos de giro para cualquier punto de la columna. Ahora bien, para nuestro análisis tomamos el elemento curvado y hacemos un corte a una distancia $L/2$ del origen de coordenadas como se muestra en la Fig. 4.6.

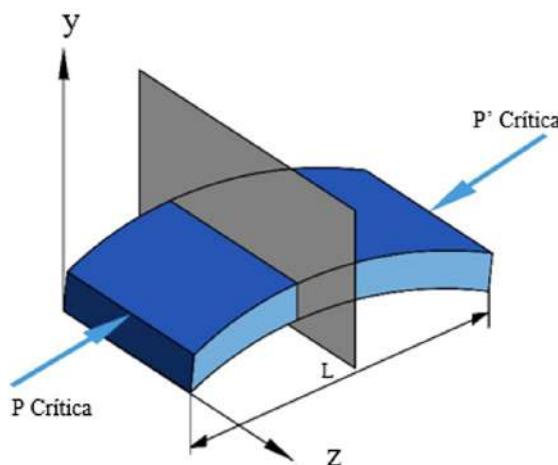


Fig. 4.6. Corte de elemento sometido a compresión.

Producto del corte llegamos a tener una fuerza cortante y un momento flector, teniendo así 2 partes del elemento de igual sección y de longitud $L/2$, del cual tomamos uno de ellos para nuestro análisis; nótese que si se trabaja con una u otra parte del elemento las fuerzas y momentos van a estar dirigidas al lado contrario debido a la oposición del material a ser cortada y mediante el sistema de referencia que se opte, se lo tomará como positivo o negativo. En nuestro caso tomaremos el elemento que se muestra en la Fig. 4.7.

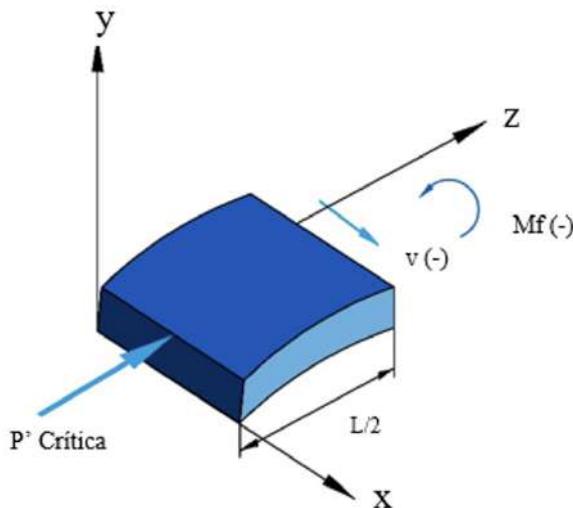


Fig. 4.7. Elemento de izquierdo a derecho.

Partiendo de la estática se tiene que:

$$EI_x \ddot{y} = M_{\text{Fcortante}} \quad (4.4)$$

Donde:

I_x : momento de inercia de la sección de columna.

E: módulo de elasticidad de cada material.

Analizando el punto c tenemos:

$$\begin{aligned} \sum M_{fc} &= 0 (\curvearrowright) + \\ - P_{\text{critica}}(y) - M_{fc} &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazando en:

$$EI_x \ddot{y} = M_{\text{Fcortante}}$$

Tenemos:

$$P_{\text{critica}}(y) + EI_x y'' = 0$$

$$\frac{P_{\text{critica}}(y) + EI_x y''}{EI_x} = 0$$

$$y'' + \frac{P_{\text{critica}}(y)}{EI_x} = 0$$

Como la matemática nos indica tenemos que:

$$y'' + \alpha^2 y = 0$$

Tenemos que:

$$\alpha^2 = \frac{P_{\text{critica}}}{EI_x}$$

Entonces reemplazando tenemos que:

$$y'' = \alpha^2 y \quad \rightarrow 2^{\circ} \text{ orden}$$

Integrando 2 veces tenemos que:

$$y = A \cos(\alpha z) + B \sin(\alpha z) \quad (4.5)$$

Donde:

A, B: Constantes de integración.

Para encontrar un valor para constantes de integración, tomamos las condiciones de frontera en los apoyos, en los cuales se aplica la carga.

Condiciones:

- $Z = 0 \rightarrow Y = 0$
 $0 = A \cos(0) + B \sin(0)$
 $A = 0$

- $Z = L \rightarrow Y = 0$
 $0 = 0 + B \sin(\alpha * L)$
 $B \sin(\alpha L) = 0$

Esta ecuación se cumple si $B=0$ por lo tanto:

$$y = A \cos(\alpha z) + B \sin(\alpha z)$$

$$y = 0$$

Esto nos quiere decir que la columna siempre permanecerá recta, a pesar de que la carga puede provocar que la columna se vuelva inestable.

Como tenemos que $\operatorname{sen}(\alpha z) = 0$, debemos ver con qué valores se cumple con la condición, por ende, tenemos que analizarlo en el círculo trigonométrico (Fig. 4.8).

$$\alpha^* z = n^* \pi = \alpha^* L$$

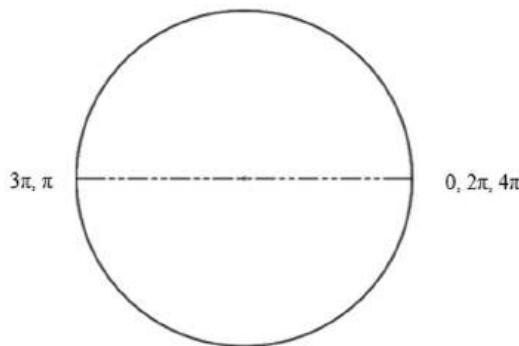
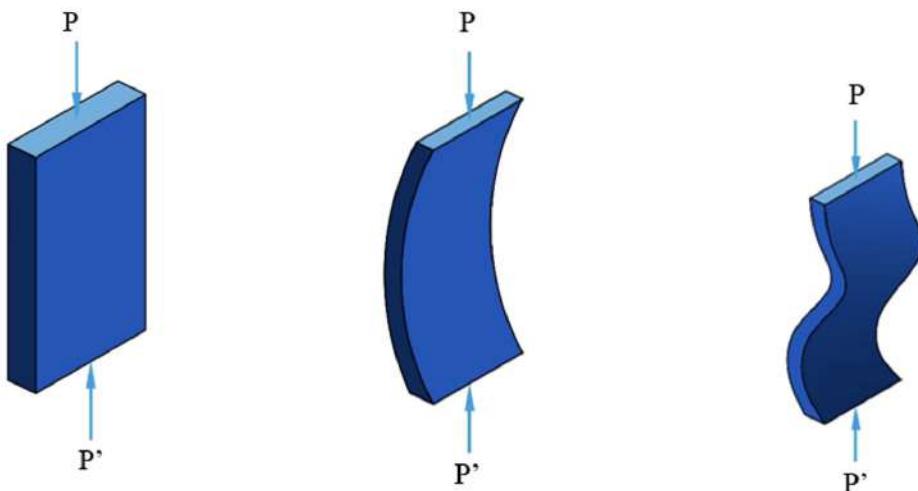


Fig. 4.8. Círculo trigonométrico.

De donde teóricamente n puede tomar valores de: $(0 - \infty)$

Se debe analizar cuál de esos valores sería factible tomar; si se toma el valor de cero, que obviamente daría la carga crítica cero que es algo absurdo entonces, se descartaría el cero; ahora si bien, se tiene el conocimiento a mayor carga mayor es la deformación, como se puede observar en la Fig. 4.9.



(a) Columna sometida a carga crítica.

(b) Columna susceptible a falla.

(c) Columna fallida.

Fig. 4.9. Columna sometida a carga

Entonces, el número de n que se tome será equivalente al número de ondas sinusoidales que se generará en la columna, como ingenieros, lo más eficiente sería asignar un valor de 1 en este caso, teniendo que $\alpha L = \pi$ (Fig. 4.10).

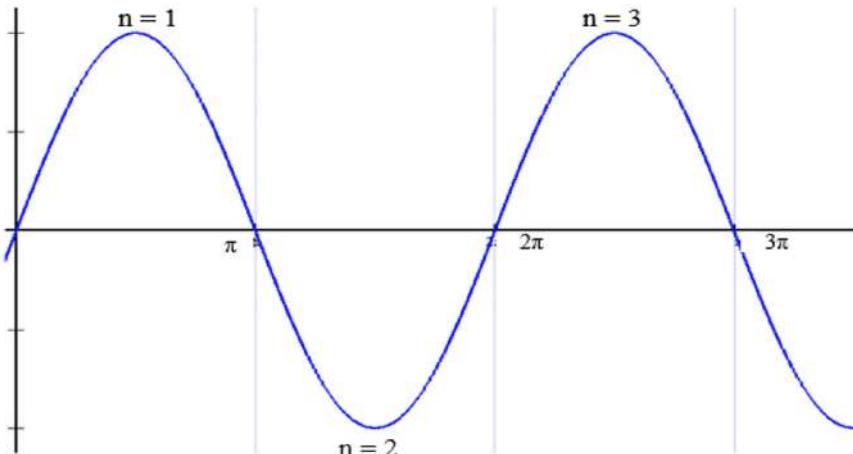


Fig. 4.10. Onda sinusoidal para carga crítica.

Tenemos que:

$$\alpha^* L = \pi \quad (4.6)$$

Entonces

$$\alpha^2 = \frac{\pi^2}{L^2} = \frac{P_{\text{crítica}}}{E^* I_x} \quad (4.7)$$

Teniendo la ecuación de la carga crítica de Euler, la misma que depende de la geometría y del material que va a estar construida la columna.

$$P_{\text{crítica}} = \frac{\pi^2 * E^* I_x}{L^2} \quad (4.8)$$

Donde:

$P_{\text{crítica}}$: carga crítica que soporta la columna.

I_x : momento de inercia de la sección de columna.

E : módulo de elasticidad de cada material.

L : distancia sin soporte (L_{efectiva}).

Recalcando nuevamente, si la longitud incrementa va a bajar abruptamente la carga crítica que soportará el elemento y tornándose más esbelta e inestable.

La longitud efectiva representa la distancia entre los puntos de momento 0; como es obvio, la longitud efectiva variará acorde a los tipos de apoyo que presenta cada columna, entre los cuales tenemos los siguientes:

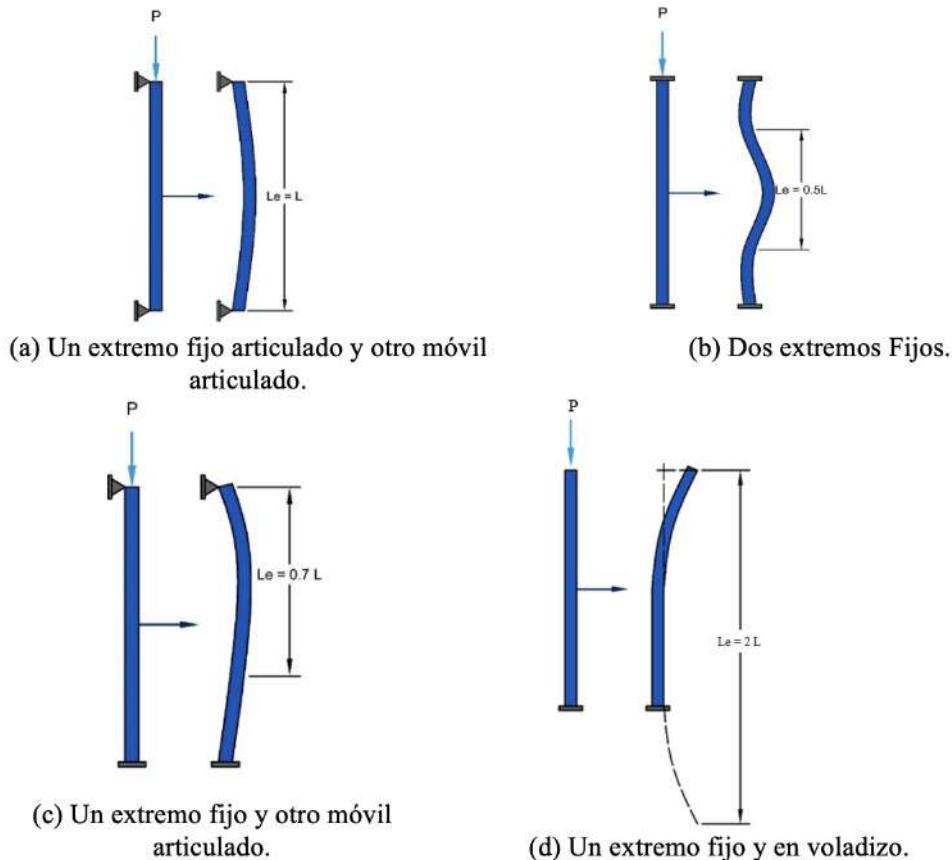


Fig. 4.11. Columna sometida a cargas

EJERCICIOS DE REPASO

- 1) La barra uniforme de aluminio AB tiene una sección transversal de forma rectangular de $0,015 \text{ m} \times 0,03 \text{ m}$ y se encuentra apoyada mediante pasadores y ménsulas, como se muestra. Los extremos pueden rotar libremente alrededor de un eje horizontal a través del pasador. Si tenemos un $E = 70 \text{ GPa}$, determine la carga crítica permisible F si se quiere un factor de seguridad de 1.8.

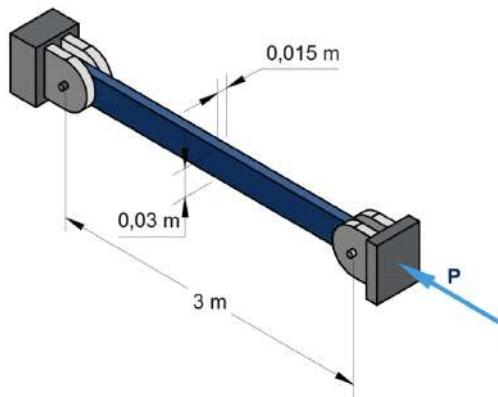


Fig. 4.12 Barra uniforme AB de aluminio

Desarrollo:

$$L = 3 \text{ m}; \quad d = 0,015 \text{ m}; \quad b = 0,03 \text{ m}$$

En el plano horizontal:

Se define la longitud equivalente:

$$Le = \left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{3 \text{ m}}{2}\right) = 1,5 \text{ m}$$

El momento de inercia para este caso es

$$I = \frac{1(d)(b^3)}{12} = \frac{1(0,03 \text{ m})(0,015 \text{ m}^3)}{12}$$

$$I = 8,4375 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

Aplicando la fórmula de la carga crítica tenemos:

$$P_{\text{crítica}} = \frac{\pi^2(E)(I)}{Le^2}$$

$$P_{\text{crítica 1}} = \frac{\pi^2(70 \times 10^9 \text{ Pa})(8,4375 \times 10^{-9} \text{ m}^4)}{(1,5 \text{ m})^2}$$

$$P_{\text{crítica 1}} = 2590,77 \text{ N}$$

En el plano vertical:

$$Le = L = 2 \text{ m}$$

El momento de inercia para este caso es:

$$I = \frac{1(b)(d^3)}{12} = \frac{1(0,015\text{ m})(0,03\text{ m}^3)}{12}$$

$$I = 0,3375 \times 10^{-9}\text{ m}^4$$

Aplicando la fórmula de la carga crítica tenemos:

$$P_{\text{crítica}} = \frac{\pi^2(E)(I)}{Le^2}$$

$$P_{\text{crítica 2}} = \frac{\pi^2(70 \times 10^9 \text{ Pa})(0,3375 \times 10^{-9} \text{ m}^4)}{(2\text{ m})^2}$$

$$P_{\text{crítica 2}} = 5\,829,235 \text{ N}$$

Se toma la máxima entre las P encontradas:

$$P_{\text{crítica 2}} = 5\,829,235 \text{ N}$$

$$n = \frac{P_{\text{crítica}}}{P_{\text{trabajo}}}$$

$$1,8 = \frac{5\,829,235 \text{ N}}{P_{\text{trabajo}}}$$

$$P_{\text{trabajo}} = 3\,238,679 \text{ N}$$

- 2) Se desea construir una columna de 7,5 m de longitud efectiva, para ello se usan placas como las mostradas en la figura siguiente. Considere un $E = 200 \text{ GPa}$ para determinar el factor de seguridad respecto al pandeo para una carga crítica de 13,5 kN. Considere que la longitud horizontal de la área 1 es igual a la longitud horizontal del área 3 y su valor $Le = 7,5 \text{ m}$.

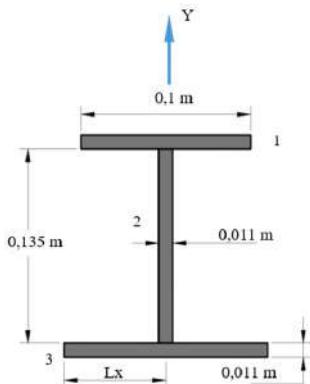


Fig. 4.13 Placas

Desarrollo:

Para el cálculo del momento de inercia se toma en el centro de gravedad con respecto al eje vertical debido a que es mínimo.

$$I = I_{cg} + Ax^2$$

$$I_y = 2 \left[\frac{1}{12} (0,011 \text{ m}) (0,1 \text{ m})^3 \right] + \frac{1}{12} (0,135 \text{ m}) (0,011)^3$$

$$I_y = 1,848 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$P_{\text{crítica}} = \frac{\pi^2 * E * I_y}{L e^2} = \frac{\pi^2 (200 \times 10^9 \text{ Pa}) (1,848 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(7,5 \text{ m})^2}$$

$$P_{\text{crítica}} = 64,89 \text{ kN}$$

$$n = \frac{P_{\text{crítica}}}{P_{\text{trabajo}}} = \frac{64,89 \text{ kN}}{13,5 \text{ kN}}$$

$$n = 4,8$$

“Como el factor de seguridad es muy elevado el elemento se encuentra sobre dimensionado por lo que hay un gasto innecesario en el material.”

- 3) Un elemento sometido a compresión con una longitud efectiva de 5 m se construyó uniendo dos ángulos de 0,127 x 0,0762 x 0,0127 m, por medio de soldadura como se muestra. Determine la carga crítica permisible para el elemento si $E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$ y el factor de seguridad es de 2,1.

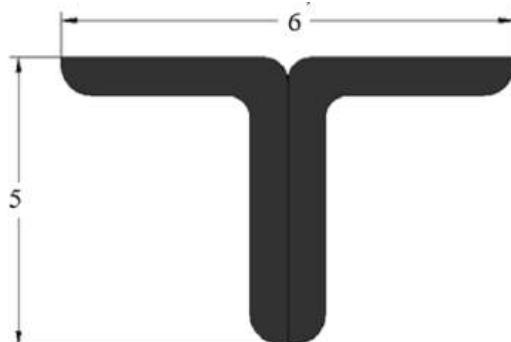


Fig. 4.14 Soldadura

Desarrollo:

Para el ángulo L0,127 x 0,0762 x 0,0127 m de Beer y Johnston apéndice (c) 5º edición.

$$A = 2,4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_x = 3,93 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_y = 1,07 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Para el elemento soldado tenemos:

$$I_x = 2I_x = 2(3,93) \times 10^{-6} \text{ m}^4 = 7,86 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_y = 2I_y = 2(1,07) \times 10^{-6} \text{ m}^4 = 2,14 \times 10^{-6} \text{ m}^4 = I_{\min}$$

$$L_e = 5 \text{ m}$$

$$E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$P_{\text{crítica}} = \frac{\pi^2(E)(I_y)}{Le^2} = \frac{\pi^2(2 \times 10^{11}) \text{ Pa}(2,14 \times 10^{-6}) \text{ m}^4}{(5 \text{ m})^2}$$

$$P_{\text{crítica}} = 16\,8967,63 \text{ N}$$

$$n = \frac{P_{\text{crítica}}}{P_{\text{trabajo}}}$$

$$2,1 = \frac{16\,8967,63 \text{ N}}{P_{\text{trabajo}}}$$

$$P_{\text{crítica}} = 80\,460,77 \text{ N}$$

- 4) El elemento W410 x 46,1 de acero A-36, cuyo E = 200 GPa, debe usarse como columna que está sujeta mediante pernos. Determine la mayor carga axial que puede soportar antes de que comience a pandearse o esta ceda.

Perfil	A(mm ²)	I _{xx} (mm ⁴)	I _{yy} (mm ⁴)
(W410 x 46,1)	5 890	156 x 10 ⁶	5,14 x 10 ⁶

Tabla 4.1: Datos de tabulados

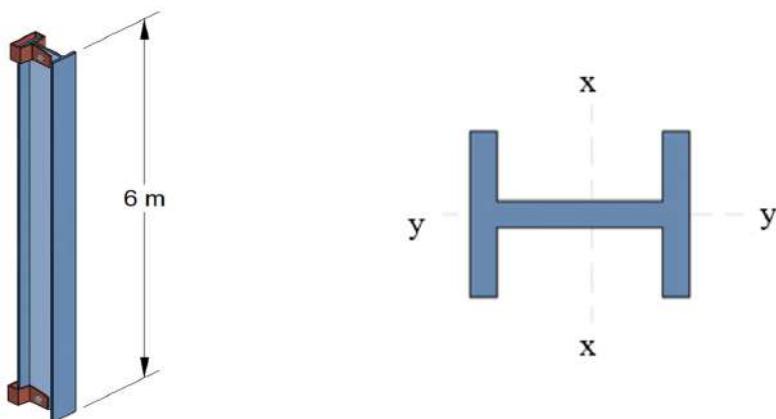


Fig.4.15 Elemento W410 x 46,1 de acero A-36

Desarrollo:

La longitud equivalente al análisis debido a los soportes es la siguiente:

$$L_e = 0,5(L) = 0,5(6\text{m}) = 3\text{m}$$

Aplicando la fórmula de la carga crítica para el eje y tenemos:

$$\begin{aligned} P_{\text{crítica } y-y} &= \frac{\pi^2(E)(I_{yy})}{L_e^2} \\ P_{\text{crítica } y-y} &= \frac{\pi^2(200 \times 10^6 \text{ kPa})(5,15 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(3 \text{ m})^2} \\ P_{\text{crítica } y-y} &= 1,129 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de carga crítica para el eje x tenemos:

$$\begin{aligned} P_{\text{crítica } x-x} &= \frac{\pi^2(E)(I_{xx})}{L_e^2} \\ P_{\text{crítica } x-x} &= \frac{\pi^2(200 \times 10^6 \text{ kPa})(156 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(3 \text{ m})^2} \\ P_{\text{crítica } x-x} &= 34,214 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Se diseña con la carga más crítica que en este caso surgió del análisis de columnas

$$P_{\text{crítica } y-y} = 1,129 \text{ MPa}''$$

- 5) Una columna rectangular de madera con 3 m de largo tiene las dimensiones indicadas en la figura. Determine la carga crítica que podría soportar la columna, si ésta tiene los extremos empotrados. $E = 14 \text{ GPa}$. No se produce fluencia.

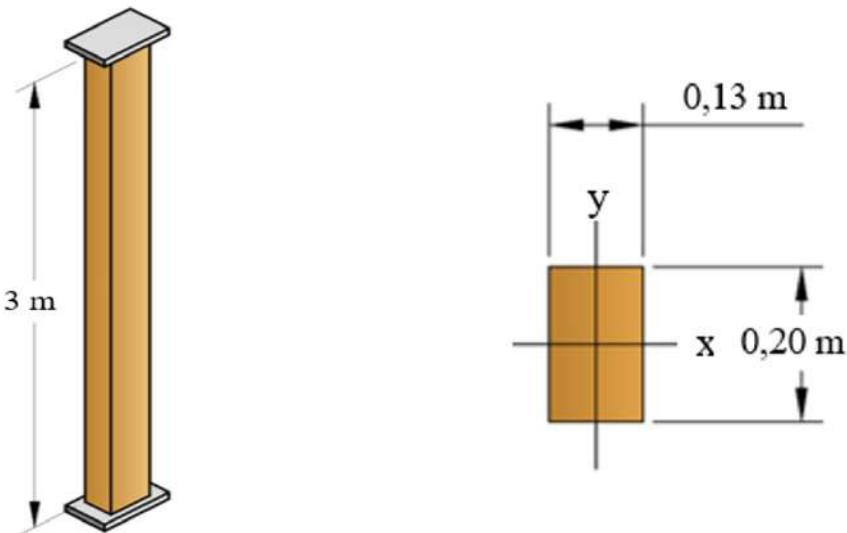


Fig. 4.16 Columna rectangular

Desarrollo:

Si consideramos el eje x, tenemos:

$$Le = 0,5 * L = 1,5 \text{ m}$$

$$P_{\text{crítica } x-x} = \frac{\pi^2(E)(I_{xx})}{Le^2}$$

$$I_{x-x} = \frac{1}{12}(b)(h)^3$$

$$I_{x-x} = \frac{1}{12}(0,13 \text{ m})(0,20 \text{ m})^3$$

$$I_{x-x} = 8,667 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$P_{\text{crítica } x-x} = \frac{\pi^2(14 \times 10^9 \text{ Pa})(8,667 \times 10^{-5} \text{ m}^4)}{(1,5 \text{ m})^2}$$

$$P_{\text{crítica } x-x} = 5,322 \text{ MN}$$

Si considerando el eje y, tenemos:

$$Le = 0,5 * L = 1,5 \text{ m}$$

$$P_{\text{crítica}} y - y = \frac{\pi^2(E)(I_{yy})}{Le^2}$$

$$I_{y-y} = \frac{1}{12}(b)(h)^3$$

$$I_{y-y} = \frac{1}{12}(0,20 \text{ m})(0,13 \text{ m})^3$$

$$I_{y-y} = 3,662 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$P_{\text{crítica}} y - y = \frac{\pi^2(14 \times 10^9 \text{ Pa})(3,662 \times 10^{-5} \text{ m}^4)}{(1,5 \text{ m})^2}$$

$$P_{\text{crítica}} y - y = 2,249 \text{ MN}$$

Se diseña con la carga más crítica que en este caso es:

$$P_{\text{crítica}} x - x = 5,322 \text{ MN}$$

- 6) Una columna (W200 x 22,5) de 9 m de altura, está fija en sus extremos. Su capacidad de carga se incrementa arriostrándola (riostras: elementos secundarios que aumentan rigidez) con refuerzo alrededor del eje y - y mediante puntales que se supone están conectados por pasadores en su altura media (rodillos). Determinar las cargas que puede soportar, de modo que la columna no se pandee ni que el material exceda el esfuerzo de cadencia; considere: $E_{\text{acero}} = 200 \text{ GP}$ y $\sigma_y = 103 \text{ MPa}$.

Perfil	$A(\text{mm}^2)$	$I_{x-x} (\text{mm}^4)$	$I_{y-y} (\text{mm}^4)$
(W200 x 22,5)	2 860	20×10^6	$1,42 \times 10^6$

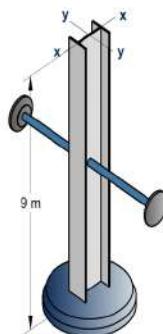


Fig. 4.17 Columna (W200 x 22,5)

Desarrollo:

La longitud equivalente al análisis debido a los soportes es la siguiente:

$$L_e = 0,7 \left(\frac{L}{2} \right) = 0,7 \left(\frac{9 \text{ m}}{2} \right) = 3,15 \text{ m}$$

Aplicando la fórmula de la carga crítica tenemos:

$$\begin{aligned} P_{\text{crítica } y-y} &= \frac{\pi^2(E)(I_{y-y})}{L_e^2} \\ P_{\text{crítica } y-y} &= \frac{\pi^2(200 \times 10^6 \text{ kPa})(1,42 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(3,15 \text{ m})^2} \\ P_{\text{crítica } y-y} &= 282,486 \text{ kN} \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de los esfuerzos tenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{crítico}} &= \frac{P_{\text{crítica}}}{A} \\ \sigma_{\text{crítico}} &= \frac{282,486 \text{ kN}}{2,86 \times 10^{-3} \text{ m}^2} \\ \sigma_{\text{crítico}} &= 98,77 \text{ MPa} \end{aligned}$$

El esfuerzo obtenido es menor al esfuerzo de cedencia, lo que resultará en pandeo antes de que el material se deformé permanentemente. Por lo tanto, se obtiene un $P_{\text{crítico}}$ mediante el esfuerzo de 103 MPa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P_{\text{crítico}} &= \sigma_{\text{permisible}}(A) \\ P_{\text{crítico}} &= 103 \text{ MPa}(2,86 \times 10^{-3} \text{ m}^2) \\ P_{\text{crítico}} &= 294,58 \text{ kN} \end{aligned}$$

Se diseña con la carga más crítica que en este caso surgió del análisis de columnas:

$$P_{\text{crítica } y-y} = 282,486 \text{ kN}$$

De igual forma se puede analizar la carga crítica sin haberle reforzado a la columna:

$$Le = 0,5(L) = 0,5(9 \text{ m}) = 4,5 \text{ m}$$

$$P_{\text{crítica } y-y} = \frac{\pi^2(E)(I_{y-y})}{Le^2}$$

$$P_{\text{crítica } y-y} = \frac{\pi^2(200 \times 10^6 \text{ kPa})(1,42 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(4,5 \text{ m})^2}$$

$$P_{\text{crítica } y-y} = 138,42 \text{ kN}$$

- 7) Un tubo de acero se sostiene en sus extremos mediante unos apoyos articulados. Tiene 6 m de largo, su diámetro externo es de 60 mm y su diámetro interno es de 48 mm; se desea determinar la máxima carga axial P que puede soportar sin pandearse. $E = 200 \text{ GPa}$, $\sigma = 250 \text{ MPa}$.

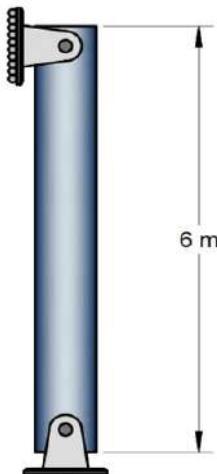


Fig. 4.18 Tubo de acero

Desarrollo:

Se define la longitud equivalente sabiendo que se trata de apoyos articulados:

$$Le = 0,7 \left(\frac{L}{2}\right) = 0,7 \left(\frac{6}{2}\right) \text{ m} = 2,1 \text{ m}$$

El momento de inercia para este caso es:

$$I = \frac{\pi}{4} (C_2^4 - C_1^4) = \frac{\pi}{4} (0,03^4 - 0,024^4) = 3,756 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

Aplicando la fórmula de la carga crítica tenemos:

$$P_{\text{crítica}} = \frac{\pi^2(E)(I)}{Le^2}$$

$$P_{\text{crítica}} = \frac{\pi^2(200 \times 10^9 \text{ Pa})(3,755 \times 10^{-7} \text{ m}^4)}{(2,1 \text{ m})^2}$$

$$P_{\text{crítica}} = 168,1 \text{ kN}$$

Aplicando la fórmula de los esfuerzos tenemos:

$$\sigma_{\text{crítico}} = \frac{P}{A}$$

$$A = \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2) = \frac{\pi}{4}(0,06^2 - 0,048^2) = 1,0178 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\sigma_{\text{crítico}} = \frac{168,1 \text{ kN}}{1,0178 \times 10^{-3} \text{ m}^2}$$

$$\sigma_{\text{crítico}} = 165,147 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{crítico}} < \sigma_{\text{permisible}}$$

Calculamos la carga crítica empleando el esfuerzo permisible:

$$P_{\text{crítico}} = \sigma_{\text{permisible}}(A)$$

$$P_{\text{crítico}} = (250 \times 10^3 \text{ kPa})(1,0178 \times 10^{-3} \text{ m}^2)$$

$$P_{\text{crítico}} = 254,45 \text{ kN}$$

Se diseña para la carga crítica:

$$P_{\text{crítica}} = 168,1 \text{ kN}$$

- 8) Un elemento de latón se somete a compresión con 3 m de longitud efectiva, la barra posee una medida de 0,050 m de diámetro, pero se desea reducir el peso un 40 %; para ello se reemplaza por una barra hueca con la sección transversal mostrada en la figura. Determine: a) el diámetro interno requerido para disminuir el peso en un 40 %, b) la reducción en porcentaje de la carga crítica, c) el valor de la carga crítica nueva de la barra hueca. Considere el módulo de elasticidad $E = 105 \text{ GPa}$.

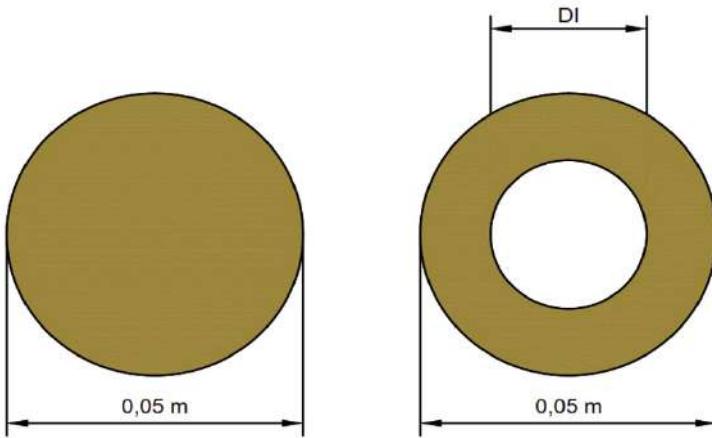


Fig. 4.19 Barra hueca de latón

Desarrollo:

- a) Diámetro interno requerido para disminuir el peso en un 40 %.

$$\begin{aligned}
 m_{\text{hueco}} &= 0,6(m_{\text{lleno}}) \\
 \rho_{\text{hueco}}(V_{\text{hueco}}) &= 0,6(\rho_{\text{lleno}})(V_{\text{lleno}}) \\
 \pi(r_{\text{ext}}^2 - r_{\text{int}}^2)L &= 0,6(\pi)(r_{\text{ext}}^2)(L) \\
 0,4(r_{\text{ext}}^2) &= r_{\text{int}}^2 \\
 0,4(0,025 \text{ m})^2 &= r_{\text{int}}^2 \\
 r_{\text{int}} &= 15,81 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

- b) Reducción en porcentaje de la carga crítica

$$P_{\text{crítica}} = \frac{\pi^2(E)(I)}{Le^2}$$

Para la parte sólida tenemos:

$$I = \frac{\pi}{4}(C^4) = \frac{\pi}{4}(0,025^4) = 3,068 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

Para la parte hueca tenemos:

$$I = \frac{\pi}{4}(C_{\text{ext}}^4 - C_{\text{int}}^4) = \frac{\pi}{4}(0,025^4 - 0,01581^4) = 2,577 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

La relación de cargas críticas será:

$$\frac{P_{\text{crit hueca}}}{P_{\text{crit llena}}} = \frac{\frac{\pi^2(E)(I_{\text{hueco}})}{Le^2}}{\frac{\pi^2(E)(I_{\text{lleno}})}{Le^2}}$$

$$\frac{P_{\text{crit hueca}}}{P_{\text{crit llena}}} = \frac{I_{\text{hueco}}}{I_{\text{lleno}}} = \frac{2,577 \times 10^{-7} \text{ m}^4}{3,068 \times 10^{-7} \text{ m}^4}$$

$$\frac{P_{\text{crit hueca}}}{P_{\text{crit llena}}} = 0,84 \rightarrow 84 \%$$

Por lo tanto, se ha reducido:

$$100 \% - 84 \% = 16 \%$$

Carga crítica nueva de la barra hueca

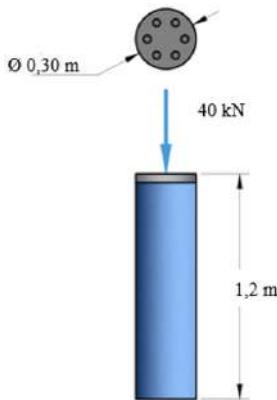
$$P_{\text{critica}} = \frac{\pi^2(E)(I)}{Le^2}$$

$$P_{\text{critica}} = \frac{\pi^2(105 \times 10^9 \text{ Pa})(2,577 \times 10^{-7} \text{ m}^4)}{3 \text{ m}}$$

$$P_{\text{critica}} = 89 \text{ kN}$$

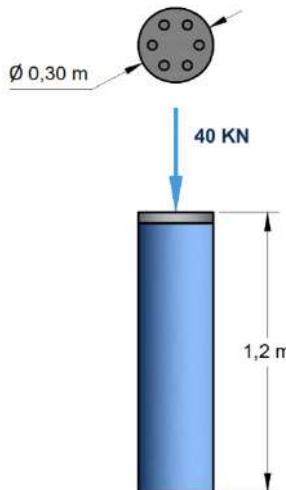
EJERCICIOS PROPUESTOS

F4-1. La columna está hecha de concreto de alta resistencia y seis varillas de refuerzo de acero A-36. Si la columna se somete a una fuerza axial de 40 kN, determine el diámetro requerido de cada varilla de tal manera que una cuarta parte de la carga sea soportada por el concreto y tres cuartas partes por el acero.



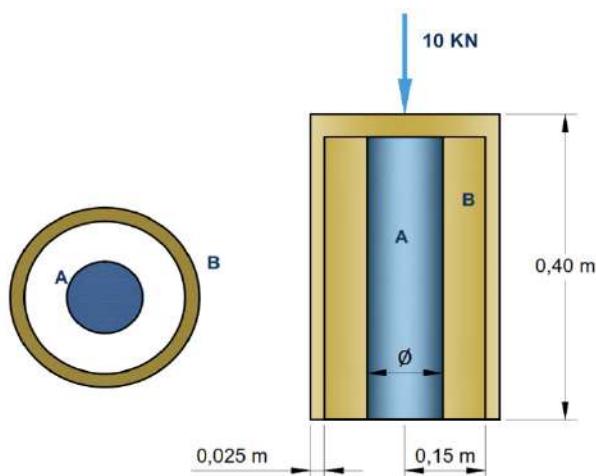
F4-1. Varillas de acero A-36

F4-2. La columna de la figura anterior está hecha de concreto de alta resistencia y seis varillas de refuerzo de acero A-36. Si la columna se somete a una fuerza axial de 40 kN, determine el esfuerzo normal promedio en el concreto y en cada varilla. Cada una tiene un diámetro de 0,04 m.



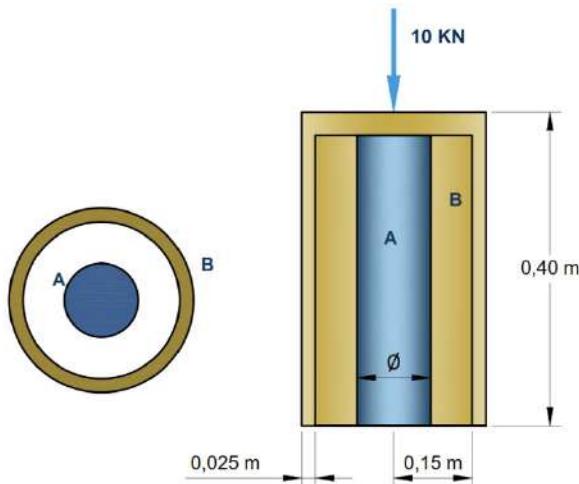
F4-2 Varillas de acero A-36

F4-3. El poste A de acero inoxidable 304 está rodeado por el tubo B de latón rojo C83400. Ambos descansan sobre un superficie rígida. Si se aplica una fuerza de 10 kN sobre la tapa rígida, determine el diámetro “d” requerido para el poste de acero de modo que la carga se reparta en partes iguales entre el poste y el tubo.



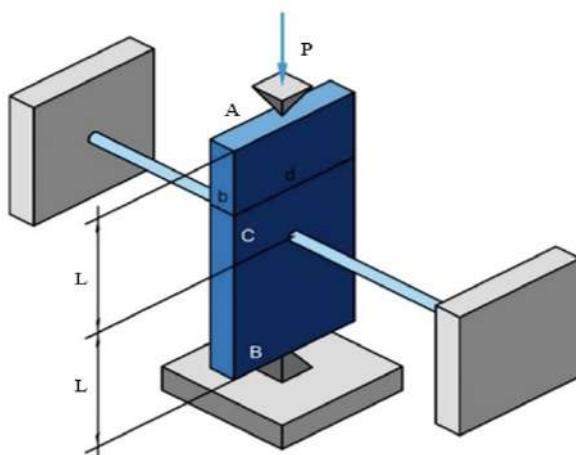
F4-3 Poste de acero inoxidable 304

F4-4. El poste A de acero inoxidable 304 tiene un diámetro $d = 0,1 \text{ m}$ y está rodeado por el tubo B de latón rojo C83400. Ambos descansan sobre una superficie rígida. Si se aplica una fuerza de 10 kN sobre la tapa rígida, determine el esfuerzo normal promedio desarrollado en el poste y en el tubo.



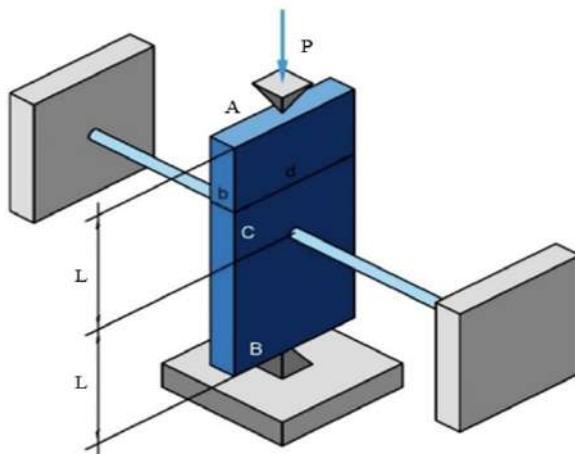
F4-4 Poste de acero inoxidable 304

F4-5. La columna ABC tiene una sección transversal rectangular uniforme con $b = 0,024 \text{ m}$ y $d = 0,044 \text{ mm}$. La columna se sostiene en su punto medio C y recibe una fuerza céntrica P con magnitud de 7,6 kN. Si se sabe que el factor de seguridad requerido es de 3, determine la máxima longitud permisible L . Utilice $E = 200 \text{ GPa}$.



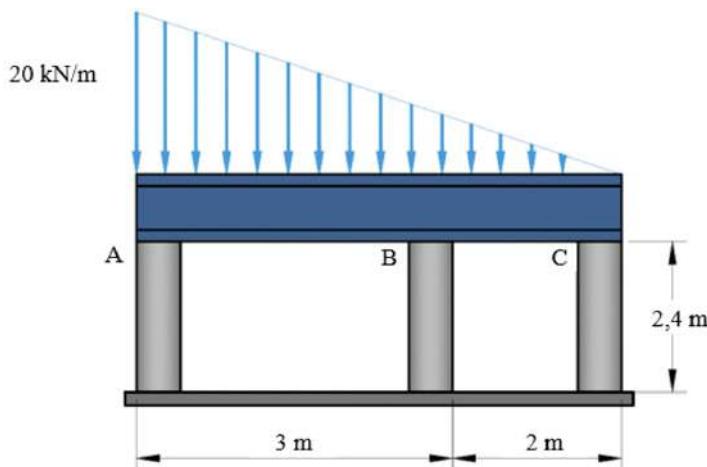
F4-5 Columna ABC

F4-6. La columna ABC tiene una sección transversal rectangular uniforme y se encuentra apoyada en su punto medio C. Diseñar la sección transversal de la columna para la cual el factor de seguridad será 3, cuando $P = 8,8 \text{ kN}$, $L = 2 \text{ m}$ y $E = 200 \text{ GPa}$.



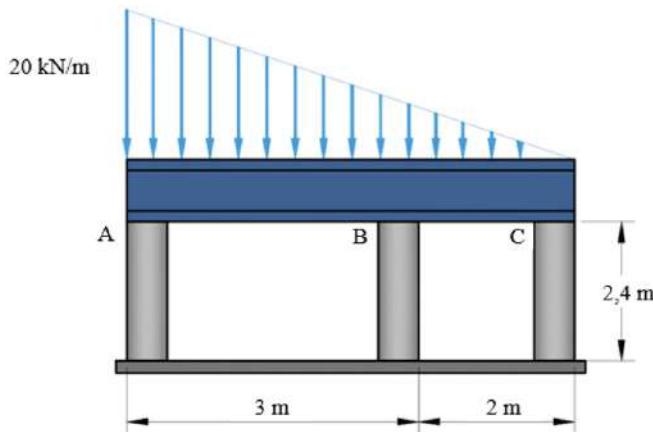
F4-6 Columna ABC

F4-7. Se supone que la viga horizontal es rígida y soporta la carga distribuida que se muestra en la figura. Determine las reacciones verticales en los apoyos. Cada soporte se compone de un poste de madera con un diámetro de 0,18 m y una longitud (original) sin carga de 2,4 m. Considere $E = 12 \text{ GPa}$.



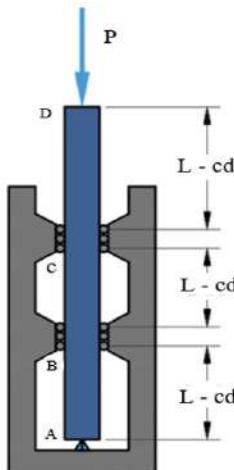
F4-7 Viga horizontal rígida

F4-8. Se supone que la viga horizontal es rígida y soporta la carga distribuida que se muestra en la figura. Determine el ángulo de inclinación de la viga después de que se aplica la carga. Cada soporte se compone de un poste de madera con un diámetro de 0,18 m y una longitud (original) sin carga de 2,4 m. Considere $E = 12 \text{ GPa}$.



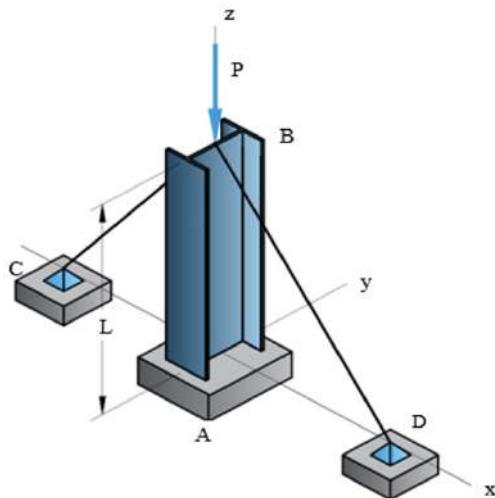
F4-8 Viga horizontal rígida

F4-9. Un puntal cuadrado de aluminio de 0,05 m se mantiene en la posición que se observa en la figura gracias a un anclaje en el punto A y por un conjunto de apoyos móviles en B y C, los cuales impiden la rotación del puntal en el plano de la figura. Si se sabe que $L - ab = 0,72 \text{ m}$, determine: a) los valores máximos de $L - bc$ y $L - cd$ que pueden usarse si la carga permisible P debe ser lo más grande posible, b) la magnitud de la carga permisible correspondiente. Considere solo el pandeo en el plano de la figura y use $E = 71 \text{ GPa}$.



F4.9 Puntal cuadrado de aluminio

F4-10. La columna AB soporta una carga céntrica P con magnitud de 30 kN. Los cables BC y BD están tensos y evitan el movimiento del punto B. Con la fórmula de Euler y un factor de seguridad de 2 y despreciando la tensión de los cables, determine la máxima longitud permisible L . Utilice $E = 200$ MPa.



F4-10 Columna AB

GLOSARIO DE TÉRMINOS

- **Compresión:** Es el cambio de longitud que sufre un cuerpo debido a una carga axial, también se le conoce como deformación total, y se representa por δ (delta).
- **Cuerpo elástico:** Es aquel que regresa a su forma original después de una deformación.
- **Cuerpo inelástico:** Un objeto inelástico es aquel que no regresa a su estado original luego de una deformación.
- **Deformación unitaria:** Se puede definir como la relación existente entre la deformación total y la longitud inicial del elemento, la cual permitirá determinar la deformación del elemento sometido a esfuerzos de tensión o compresión axial.
- **Deformación:** es el cambio en la forma del elemento, como consecuencia de la acción de una fuerza externa y tratar de adaptarse a ella.
- **Ductilidad:** Medida de la capacidad bajo la acción de una fuerza para de formar plásticamente sin fractura.
- **Elasticidad:** Propiedad que hace que un cuerpo que ha sido deformado regrese a su forma original después de que se han removido las fuerzas de formadoras.
- **Elongación:** Alargamiento de una pieza sometida a tracción antes de romperse.
- **Esfuerzo (σ):** Magnitud de la reacción interna producida en un sólido bajo la acción de una carga externa.
- **Esfuerzo admisibles:** (OW) es máximo al que puede ser sometido el material con un cierto grado de seguridad. En la realidad el (OW) ha de ser inferior al límite de proporcionalidad para que pueda aplicar la ley de hook.

- **Esfuerzo cortante:** (tangencial al plano considerado), es el que viene dado por la resultante de tensiones cortantes τ , es decir, tangenciales, al área para la cual pretendemos determinar el esfuerzo cortante.
- **Esfuerzo de fluencia:** El esfuerzo determinado para alguna de formación permanente arbitraria. El límite de fluencia representa un límite práctico superior para el esfuerzo real desarrollado en una estructura.
- **Esfuerzo normal:** (normal o perpendicular al plano considerado), es el que viene dado por la resultante de tensiones normales σ , es decir, perpendiculares, al área para la cual pretendemos determinar el esfuerzo normal.
- **Esfuerzos internos o esfuerzos de sección:** son magnitudes físicas con unidades de fuerza sobre área utilizadas en el cálculo de piezas prismáticas como vigas o pilares y también en el cálculo de placas y láminas. 20.
- **Estricción:** Adelgazamiento limitado a un área de una barra metálica sometida a grandes esfuerzos de tracción, justo antes de romperse en ese punto si se hubiera continuado estirándola. Estrechamiento, constricción.
- **Flexibilidad:** Capacidad de doblarse un cuerpo fácilmente y sin que exista peligro de que se rompa.
- **Flexión:** Fuerza que consiste en doblar el cuerpo o uno de sus miembros.
- **Inelasticidad:** Es aquel material que al ser deformado no regresara a su forma original como lo es el material elástico.
- **Módulo de elasticidad (E):** Un módulo elástico es un tipo de constante elástica que relaciona la tensión y la deformación en diferentes direcciones. Los materiales elásticos isótropos quedan caracterizados por un módulo y un coeficiente elásticos (o razón entre dos deformaciones).
- **Resiliencia:** Una medida de la habilidad de un material para absorber energía sin deformación plástica o permanente. (J/m^3 o $N.mm/mm^3 = MPa$)
- **Rigidez:** es una medida cualitativa de la resistencia a las deformaciones elásticas producidas por un material, que contempla la capacidad de un elemento estructural para soportar esfuerzos sin adquirir grandes deformaciones.

- **Sistema estructural:** consiste de un conjunto de componentes, unidos convenientemente por articulaciones o acoplamientos. La función primordial de una componente o sistema estructural es la transmisión de fuerzas o cargas.
- **Tensión:** Acción de fuerzas opuestas a que está sometido un cuerpo.
- **Torsión:** Término que alude al acto y el resultado de torcer. El concepto suele referirse específicamente a aquello que se tuerce en sentido helicoidal (como hélice).
- **Transversal:** Es aquello que cruza, corta o atraviesa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Beer, F. P y Johnston E, R. J. 2010. *Mecánica de materiales, Diagramas esfuerzo-deformación para el hierro y diversos tipos de acero*. México D.F : Mc Graw Hill., 2010. (5a. ed.).
- Ferdinand , P. Beer y Russell , Johnston. 2013. *Mecánica de Materiales*. México D.F. : s.n., 2013.
- Hibbeler, Russell. 2010. *Mecánica de Materiales*. México: Décimo Segunda Edición, 2010.
- Mott, Robert. 2009. *Resistencia de Materiales*. México: s.n., 2009.
- Timoshenko, S. 1957. *Resistencia de Materiales*. Madrid : s.n., 1957.

Esta obra se compone de cuatro capítulos y está dirigida a los estudiantes de las carreras de ingeniería quienes inician sus estudios en el área de la Mecánica de materiales, el texto aborda cada tema considerando los aspectos teóricos, prácticos y la resolución de ejercicios finalizando con la aplicación de todo lo expuesto, al presentar al final de cada capítulo un grupo de ejercicios propuestos, el objetivo del libro es brindar una base sólida en el entendimiento de la Mecánica de materiales para aquellos que posteriormente estarán inmersos en el diseño de elementos de máquinas así como también en el diseño de elementos estructurales.

Jorge Isaías Caicedo Reyes es ingeniero mecánico por la ESPOCH y obtuvo su Maestría en Diseño Mecánico en la Universidad Técnica de Ambato. Desde 2013, se desempeña como docente universitario en la ESPOCH, donde ha impartido clases en la Facultad de Mecánica. Es autor y coautor de varios artículos científicos indexados regionales y de alto impacto; así como también de libros y ha participado varias ponencias nacionales e internacionales. Fue coordinador del Programa de Maestría en Diseño Mecánico desde el año 2017 al 2024 y actualmente es Coordinador del Programa de Maestría en Ingeniería Mecánica con Mención en Diseño de Estructuras Metálicas y Calderería.

Jorge Sebastián Buñay Guamán es ingeniero mecánico por la ESPOCH y máster en Ingeniería Matemática y computación por la UNIR, 2020). Metrólogo (INEN, 2017), técnico docente del laboratorio de Resistencia de Materiales de la ESPOCH (2016-2021), docente universitario en la ESPOCH desde el año 2022, autor y coautor de varios artículos indexados regionales y de alto impacto. Actualmente miembro de la comisión de calidad de la Carrera de Mantenimiento Industrial.

Edwin Fernando Viteri Nuñez es ingeniero mecánico por la ESPOCH y obtuvo su maestría en Gerencia de Proyectos en la UTA y su doctorado en Ciencias Administrativas en la UNMSM en 2021. Desde 2011, se desempeña como docente universitario en la ESPOCH. Es autor y coautor de varios artículos científicos indexados a nivel regional, con alta repercusión actualmente ha sido designado como Subdecano de la Facultad de Mecánica.

Diego Fernando Mayorga Pérez es ingeniero mecánico por la ESPOCH, magíster en Seguridad y Prevención de Riesgos del Trabajo y máster en Ingeniería Matemática y Computación. Metrólogo (INEN, 2017), candidato a Doctor en estadística matemática aplicada (UNTUMBES), Docente universitario en la ESPOCH desde 2011 en la facultad de Mecánica. Autor y coautor de varios artículos indexados regionales, alto impacto y ponencias internacionales.

ISBN: 978-9942-45-157-6



9 789942 451576

