

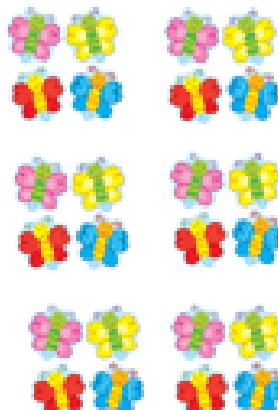


¿Cuántos soles ves?

- 4   12   24   11   8

Rodea la solución correcta

[www.colorear-dibujos.com/2010](http://www.colorear-dibujos.com/2010)



¿Cuántas mariposas  
amarillas ves?

- 4   12   6   24   11   8

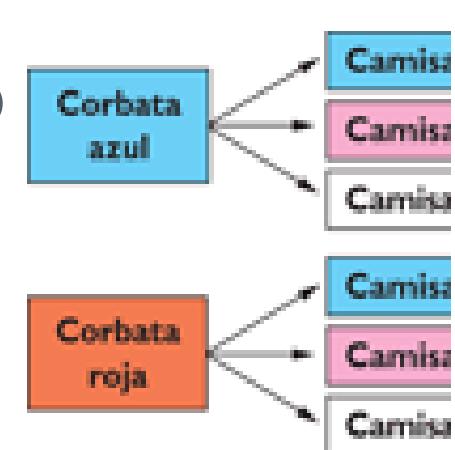
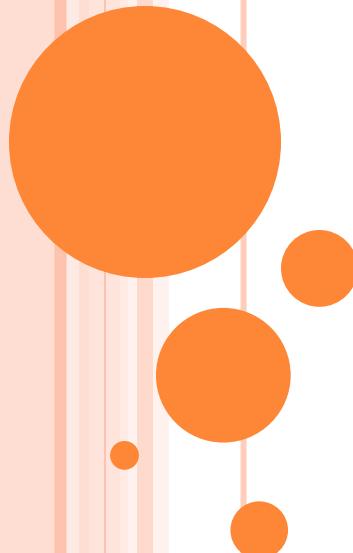
Rodea la solución correcta

[www.colorear-dibujos.com/2010](http://www.colorear-dibujos.com/2010)

# UNIDAD 2

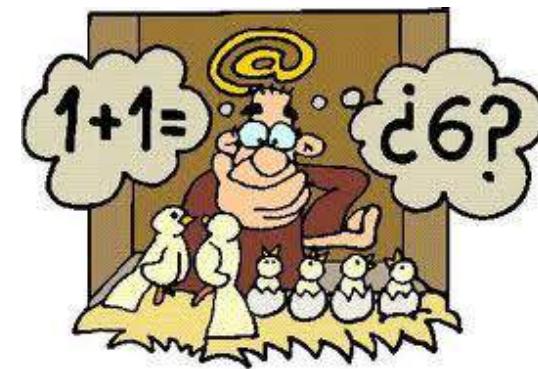
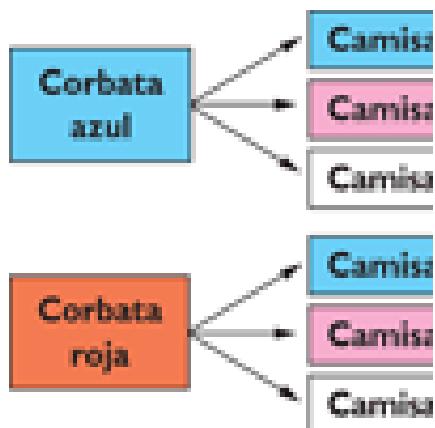
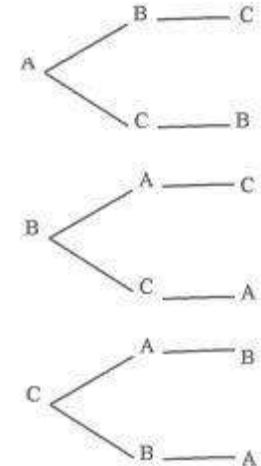
## ANÁLISIS COMBINATORIO

### Conteo



# CONTENIDO

- 2.1 Principio de la suma y producto.
- 2.3 Diagramas de árbol.
- 2.2 Permutaciones y combinaciones.



¡Ya sé contar!



123



# CONTEO

- La enumeración no termina con la aritmética.
- Tiene aplicaciones en áreas como álgebra, la probabilidad y estadística (matemáticas) y el análisis de algoritmos (en ciencias de la computación).
  - Núm. de comparaciones que realiza un programa para ordenar un conjunto de datos. ¿Cuáles son “buenos” o “malos”?
  - El número de palabras diferentes que tiene un lenguaje con determinada gramática.
- A medida que vayamos entrando en este fascinante campo de las matemáticas, nos encontraremos con muchos problemas que se pueden enunciar en forma sencilla pero que son “duros” de resolver.



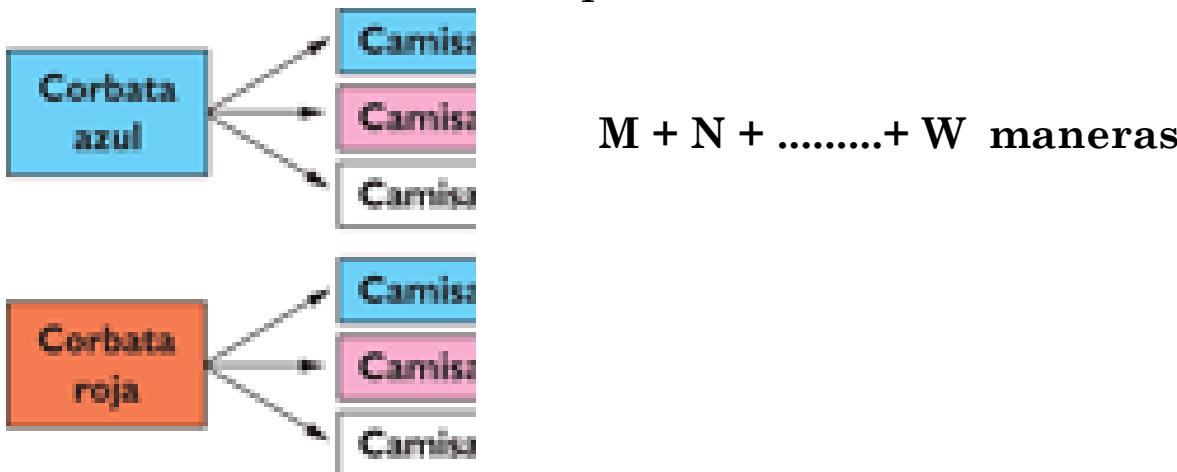
# CONTEO

- Las técnicas de conteo son aquellas que son usadas para enumerar eventos difíciles de cuantificar.
- Ejemplo : ¿Cuántas maneras tiene una persona de seleccionar una lavadora, una batidora y dos licuadoras, si encuentra en una tienda 8 modelos diferentes de lavadoras, 5 modelos diferentes de batidoras y 7 modelos diferentes de licuadoras?
- Se les denomina técnicas de conteo a las:
  - **combinaciones**
  - **permutaciones**
- Las bases para entender el uso de las técnicas de conteo son el principio aditivo y el multiplicativo.



# PRINCIPIO ADITIVO

- Si se desea llevar a efecto una actividad, la cuál tiene formas alternativas para ser realizada, donde:
  - la primera de esas alternativas puede ser realizada de **M** maneras,
  - la segunda alternativa puede realizarse de **N** maneras
  - ..... y
  - la última de las alternativas puede ser realizada de **W** maneras,
- Entonces esa actividad puede ser llevada a cabo de :



## EJEMPLO

- La biblioteca de la FCC tiene 40 libros de texto de programación y 50 de matemáticas. Por la regla de la suma, un estudiante de esta facultad puede elegir entre

$$40+50=90 \text{ libros de texto}$$

para aprender acerca de alguno de estos dos temas.



# PRINCIPIO ADITIVO

## EJEMPLO:

- “Se desea comprar una lavadora de ropa, para lo cuál ha pensado que puede seleccionar de entre las marcas Whirpool, LG y Mademsa, cuando acude a hacer la compra se encuentra que la lavadora de la marca W se presenta en dos tipos de carga ( 8 u 11 kg.), en cuatro colores diferentes y puede ser automática o semiautomática, mientras que la lavadora de la marca LG, se presenta en tres tipos de carga (8, 11 o 15 kg.), en dos colores diferentes y puede ser automática o semiautomática y la lavadora de la marca Mademsa, se presenta en sólo un tipo de carga, que es de 11 kg., dos colores diferentes y solo hay semiautomática. ¿Cuántas maneras existen de comprar una lavadora?”

### *Resultado=*

- *M = Número de maneras de seleccionar una lavadora Whirpool*
- *N = Número de maneras de seleccionar una lavadora de la marca LG*
- *W = Número de maneras de seleccionar una lavadora de la marca Mademsa*
- *M = 2 x 4 x 2 = 16 maneras*
- *N = 3 x 2 x 2 = 12 maneras*
- *W = 1 x 2 x 1 = 2 maneras*
- *M + N + W = 16 + 12 + 2 = 30 maneras de seleccionar una lavadora*

## EJERCICIOS

- Una persona puede pagar el servicio de agua potable en cualquiera de las 7 oficinas municipales o bien en cualquiera de los 30 bancos de la ciudad. ¿en cuántos lugares diferentes se puede pagar el servicio de agua potable?

**Lugares en donde puede pagar =  $n + m = 7 + 30 = 37$**

- El día domingo de 12:00 a 14:00, una persona puede ver uno de los 4 partidos de fútbol que pasan en diferentes canales de televisión, o bien ver algunas de las 6 películas que transmiten a esa misma hora en otros seis canales diferentes o ver alguno de los 2 conciertos que coinciden también en ese horario. ¿Cuántos eventos diferentes puede ver en la televisión esa persona de 12:00 a 14:00?

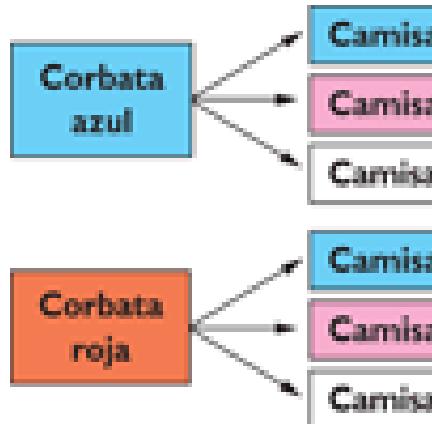


# PRINCIPIO MULTIPLICATIVO

- Si se desea realizar una actividad que consta de  $r$  pasos, en donde el primer paso de la actividad a realizar puede ser llevado a cabo de  $N_1$  maneras, el segundo paso de  $N_2$  maneras y el  $r$ -ésimo paso de  $N_r$  maneras, entonces esta actividad puede ser llevada a efecto de:

$$N_1 \times N_2 \times \dots \times N_r \text{ maneras}$$

- El principio multiplicativo implica que cada uno de los pasos de la actividad deben ser llevados a efecto, uno tras otro.



# PRINCIPIO MULTIPLICATIVO

- Ejemplo : “Una persona desea armar una computadora, para lo cuál considera que puede seleccionar la Motherboard de entre las dos disponibles, mientras que el procesador puede ser seleccionado de un Pentium IV, un Celeron o un Athlon, la tarjeta de video puede ser una ATI Radeon o una GForce y por último hay disponible un solo modelo de gabinete (Tower).”
- ¿Cuantas maneras tiene esta persona de armar su PC?”
  - Respuesta  $2*3*2*1=12$

# PRINCIPIO ADITIVO Y MULTIPLICATIVO

- *¿Cómo podemos distinguir cuando hacer uso del principio multiplicativo y cuando del aditivo?*
  - Cuando se trata de una sola actividad, la cual requiere para ser llevada a efecto de una serie de pasos, entonces haremos uso del *principio multiplicativo* y si la actividad a desarrollar o a ser efectuada tiene alternativas para ser llevada a cabo, haremos uso del *principio aditivo*.

## EJERCICIO

- Calcular el número total de comidas con dos platos posibles del siguiente menú:
  - ***Menú Sopa Du Joir***  
*Crema de la Crema*  
*Crema de Tomate*
  - ***Platos Principales***  
*Rosbif con Papas o Coles de Bruselas*  
*Lomo de cerdo con Manzana, Mango, o Papaya*



## EJERCICIO 2

- Consideremos tres conjuntos de letras que llamamos conjuntos I, II y III.
  - $I = \{a, m, r\}$
  - $II = \{b, d, i, l, u\}$
  - $III = \{c, e, n, t\}$
- 1. Cuántos modos hay para elegir una letra de los conjuntos I, II y III. Nótese que estos tres conjuntos son disjuntos o mutuamente excluyentes, es decir no hay elementos en común entre ellos.
- 2. Usando nuestros tres conjuntos I, II y III. Determinar el número de conjuntos de tres letras que pueden ser creados tales que una letra sea de I, una de II y la otra de III.



## EJERCICIO 3

- Un matrimonio decide comprar una radio y una cocina. Si en el lugar donde harán la compra hay 4 tipos de radio y 2 tipos de cocina. ¿De cuántas maneras distintas pueden realizar la compra de ambos objetos a la vez?



## EJERCICIO 4

- Una pareja quiere ir al sur de Chile. Para ir en avión hay 2 compañías y para ir en autobús hay 3 compañías. ¿Cuántas maneras tienen para ir al sur?



# FACTORIAL

- El *factorial* del número natural  $n$  es el producto de los números naturales de 1 a  $n$ , esto es,  
 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$  y que por convenio  $0! = 1$



# PERMUTACIONES

- Se llama *permutación* de  $n$  elementos  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  a cualquier ordenación de los mismos.

Por ejemplo: Las permutaciones de las 3 letras pqr son pqr, qrp, rpq, qpr,rqp,prq.

- Teorema:El número de permutaciones de  $n$  elementos es  $n!$
- En el ejemplo  $3!=6$



# PERMUTACIONES

- En lugar de ordenaciones de los  $n$  elementos podríamos pensar en ordenaciones de  $k$  elementos extraídos de los  $n$  dados.
- Por ejemplo: las permutaciones de las tres letras pqr tomadas de dos en dos cada vez son pq, pr, qr, qp, rp, rq
- Teorema: El número de permutaciones de  $n$  elementos tomados de  $k$  en  $k$  es:

$$n!/(n-k)!$$



# PERMUTACIONES

- En nuestro ejemplo  $3!/(3-2)! = 6/1 = 6$
- Nota: Si en las permutaciones de  $n$  elementos tomados de  $k$  en  $k$  cada vez se admitiera repeticiones el número de tales permutaciones sería  $n^k$
- En nuestro ejemplo  $3^2 = 9$ :  
pp, pq, pr, qp, qq, qr, rp, rq, rr



# PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

$$P(n,r) = n * n * n * \dots * n = n^r$$

- Cuando  $r > n$ ,  $P(n,r) = n^r$
- Ejemplo: El número de permutaciones de las letras de la palabra “sal” es:

- a. Sin repetición y  $r=n$

$$3! = 6 \quad \{ \text{sal, sla, asl, als, lsa, las} \}$$

- a. Con repetición y  $r=n$

$$P(3,3) = 3^3 = 27$$

- a. Sin repetición y  $r=2$

$$P(3,2) = 3! / (3-2)! = 3 * 2 * 1 / 1! = 6 \quad \{ \text{sa, sl, al, as, la, ls} \}$$

- a. Con repetición y  $r=2$

$$P(3,2) = n^r = 3^2 = 9 \quad \{ \text{aa, as, al, ss, sa, sl, ll, la, ls} \}$$



# EJEMPLO

- El sistema numérico octal, en donde cada dígito en octal equivale a una cadena de ceros y unos en binario.

Octal	Binario
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

- En este caso n=2 (solo los dígitos 0 y 1) los que se deben permutar, y la longitud de la cadena es r=3 por lo que se obtiene:
  - $P(2,3)=2^3=8$

## EJEMPLO

- En el sistema trinario son válidos los dígitos 0,1 y 2 de tal forma que:

- a. El número de permutaciones en trinario en grupos de 2 sin que se repitan los dígitos es:

$$P(3,2)=3!/(3-2)!= 3!/1! = 6$$

{01, 02, 10, 12, 20, 21}

- b. El número de permutaciones en trinario en grupos de 2 con repetición es:

$$3^2 = 9$$

{00,01,02, 10,11,12,21,22,23}



## EJERCICIOS

- Cuatro libros distintos de matemáticas, seis diferentes de física y dos diferentes de química se colocan en un estante. De cuántas formas distintas es posible ordenarlos si:
  - 1. Los libros de cada asignatura deben estar todos juntos.
  - 2. Solamente los libros de matemáticas deben estar juntos.
- ¿ De cuántas formas diferentes se pueden fotografiar 5 amigos frontalmente en línea recta?



# PERMUTACIONES CON REPETICIÓN EN OBJETOS

- En los casos anteriores se han obtenido permutaciones en donde todos los elementos utilizados para hacer los arreglos son diferentes.
- Obtenga todas las permutaciones posibles con las letras de la palabra OSO.
- Suponer que todas las letras de la palabra OSO son diferentes .
- Por lo que quedaría, O<sub>1</sub>SO<sub>2</sub>, y las permutaciones a obtener serían:  ${}_3P_3 = 3!$

**O<sub>1</sub>SO<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>SO<sub>1</sub>, SO<sub>1</sub>O<sub>2</sub>, SO<sub>2</sub>O<sub>1</sub>, O<sub>1</sub>O<sub>2</sub>S, O<sub>2</sub>O<sub>1</sub>S**

- ¿Pero realmente podemos hacer diferentes a las letras O?, eso no es posible, luego entonces ¿cuántos arreglos reales se tienen?



# PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

- $O_1SO_2 = O_2SO_1 \rightarrow OSO$
- $SO_1O_2 = SO_2O_1 \rightarrow SOO$
- $O_1O_2S = O_2O_1S \rightarrow OOS$
- El número de arreglos reales = No. de permutaciones considerando a todos los objetos como diferentes dividido por los cambios entre objetos iguales.
- Caso Anterior El número de arreglos reales :  $3! / 2! = 3$

$$nP_{x_1, x_2, \dots, x_k} = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!}$$

- $nP_{x_1, x_2, \dots, x_k}$  = Número total de permutaciones que es posible obtener con  $n$  objetos, entre los que hay una cantidad  $x_1$  de objetos de cierto tipo, una cantidad  $x_2$  de objetos de un segundo tipo,..... y una cantidad  $x_k$  de objetos del tipo k.
- Algunas veces no todos los objetos son distintos, sino que parte de ellos se repiten. En este caso el número de permutaciones de  $n$  objetos de los cuales  $x_1$  son de un tipo,  $x_2$  son de otro tipo distinto y  $x_k$  son del  $k$ -ésimo tipo, se muestra en la ecuación anterior.

## EJEMPLOS

- El número de permutaciones de las letras de la palabra BEBE es:
  - $n=4=|\text{BEBE}|$ ,  $x_1=2$  (Letra B),  $x_2=2$  (Letra E)
  - $P(4,2)=4!/(2!2!)=12/2!=6$
- El número de permutaciones de las letras de la palabra DEDO es:
  - $4!/(2!1!1!)=12$
- El número de permutaciones de las letras RELEER
  - $6!/(2!3!1!)=60$
- El número de permutaciones de las letras ARRABALERA
  - $10!/(4!3!1!1!1!)=25200$
  - Si las cuatro A's deben estar juntas, el resultado es:
    - $7!/(3!1!1!1!1!)=840$   $x_1=3$  (R),  $x_2=1$  (AAAA),  $x_3=1$  (B),  $x_4=1$  (L),  $x_5=1$  (E)
    - Solo consideramos las permutaciones de los siete símbolos AAAA (un símbolo), R, R, R, B, L, E



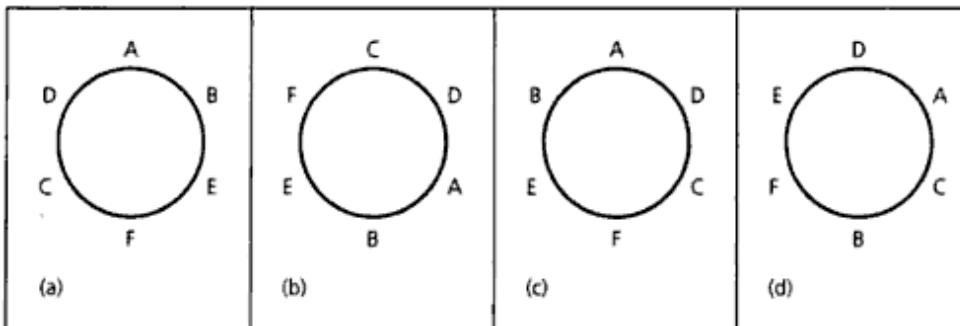
## EJERCICIOS

- Obtener las permutaciones de la palabra beethoven
- Obtener las permutaciones de las letras de la palabra COTORRO bajo las siguientes condiciones:
  - Eliminando letras repetidas
  - Considerando que todas son diferentes, aun cuando se trate de la misma letra.



# EJEMPLO

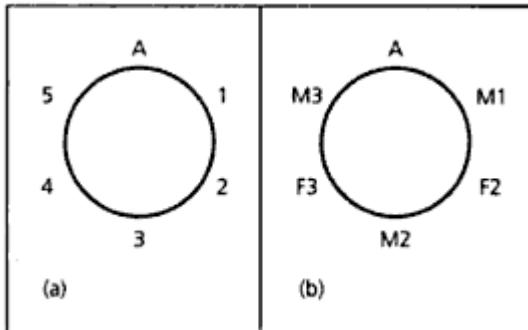
- Si se sientan 6 personas (A, B, C, D, E, F), alrededor de una mesa redonda, ¿cuántas disposiciones (permutaciones) circulares distintas se pueden realizar si éstas se consideran iguales cuando una se puede obtener de otra por rotación?



- Al considerar la figura a) y b), empezando en la parte superior del círculo y moviéndose en el sentido de las manecillas del reloj, se listan distintas disposiciones lineales ABEFCD y CDABEF, BEFCDA, DABEFC, EFCDAB y FCDABE, corresponden a la misma disposición circular que en a) o b).
- Como cada disposición circular corresponde a 6 disposiciones lineales, se tiene que
  - $6 * (\text{número de disposiciones circulares de } A, B, \dots, F) =$   
(número de disposiciones lineales de A, B, ..., F) =  $6!$
  - En consecuencia, hay  $6!/6 = 5! = 120$  disposiciones de A, B, ..., F alrededor de la mesa circular.

# EJEMPLO

- Ahora, supóngase que las seis personas del ejemplo anterior son tres parejas, donde A, B y C son mujeres. Se quiere ordenar a las seis personas alrededor de la mesa de forma que se alternen los sexos. (Las disposiciones se consideran idénticas si una se puede obtener de la otra por rotación). Resolvamos el ejemplo anterior por otro método.



- Si se coloca A en la mesa como se muestra la figura a), quedarán 5 lugares para ocupar. Ocupar estos lugares con B,C,...,F es el problema de permutar B,C,...,F linealmente, lo que puede hacerse de  $5! = 120$  maneras.
- Ahora situar a las 6 personas de forma que se alternen los sexos, considera A colocada en la figura b). La siguiente posición, a partir de A, se marca M1 (masculino) y puede colocarse de tres maneras. La posición F2 (femenino 2) puede ocuparse de 2 maneras. Procediendo de esta forma, por la regla del producto hay  $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 12$  maneras posibles de disponer a estas personas sin que dos hombres o dos mujeres se sienten juntos.

# NUMEROS COMBINATORIOS

- Se llama *combinación* a una permutación en la que el orden no tiene relevancia y sólo importa qué elementos la forman
- Por ejemplo: Sólo hay una combinación de las tres letras pqr, precisamente **pqr**.
- Las combinaciones de pqr tomadas de dos en dos son **pq**, **pr**, **qr** y tomadas de uno en uno **p**, **q**, **r** .



# NUMEROS COMBINATORIOS

- Teorema: El número de combinaciones de  $n$  elementos tomados de  $k$  en  $k$  viene dado por la expresión

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

- El primer miembro de la expresión es la notación del *número combinatorio  $n$  sobre  $k$*  definido por el segundo miembro.



## EJEMPLO

- En un examen de historia, un estudiante debe responder a siete preguntas cualesquiera de un cuestionario de diez. Como no importa el orden, el estudiante puede responder el examen de:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} =$$

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10*9*8}{3*2*1} = 120$$



## EJEMPLO

- Suponga que la academia de programación está integrada únicamente por 3 maestros (Ignacio, Miriam y Jorge), y que con ellos es necesario formar un comité que estará integrado por un presidente, un secretario y un vocal. Suponga que no importa cuál de los elementos ocupará cualquiera de los puestos. ¿Cuántos tipos de comité se pueden formar?
- Sol: En este caso  $r=n=3$  ya que se está tomando el total de los elementos para formar el comité, por lo tanto:

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{3!(3-3)!} = \frac{3!}{3!0!} = \frac{3!}{3!} = 1$$

- Lo cual indica que el numero de combinaciones es 1:

$(\text{Ignacio, Jorge, Miriam})=(\text{Ignacio, Miriam, Jorge}) = (\text{Miriam,Jorge,Ignacio})$

- Ya que no es importante el orden o el puesto que ocupen los maestros.



## EJEMPLO

- Ahora suponga que la academia está integrada por 8 maestros, y que de ese conjunto se desea seleccionar a 3 de ellos que integrará el comité que ocupará los puestos de presidente, secretario y vocal. Suponiendo que no es importante quién ocupe cualquiera de los puestos, ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?
- El número de comités es:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 * 7 * 6 * 5!}{3!5!} = 56$$



## EJERCICIO

- Una compañía de desarrollo de software desea contratar a 8 personas de un grupo de 14 jóvenes profesionistas que acaban de egresar de la universidad como licenciados en ciencias de la computación. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar a los 8 profesionistas si se aplican las siguientes condiciones?
  - a) No importa el orden en que se les selecciona.
  - a) Si se les selecciona pensando en que el primero ocupará la Dirección de desarrollo de software, el segundo la jefatura de diseño de software, el tercero el puesto de programador A, el cuarto el de programador B, y así sucesivamente hasta que el octavo ocupará el puesto de programador F, todo esto considerando que la responsabilidad del puesto y el salario van de manera decreciente.
  - a) Si se selecciona a los 14 profesionistas para ocupar 14 puestos de diferente responsabilidad, sin que sea importante el orden de selección.



## EJERCICIO

- Se tienen 10 computadoras y 6 impresoras. Determinar el número de paquetes que es posible formar, si se desea que éstos contengan 4 computadoras y 3 impresoras.



# EJERCICIO

- El examen ordinario de la materia de Programación I está integrado por 5 unidades diferentes, y cada una de éstas tiene 7 preguntas también diferentes.
  - a) Si se desea que se contesten solamente 4 preguntas de cada unidad, sin importar el orden, ¿de cuántas maneras distintas se puede contestar el examen?
  - b) Si deben de contestar 6 preguntas de la primera unidad, 4 de la segunda y tercera unidades y 3 de las unidades cuatro y cinco, sin importar el orden en que se contesten, ¿de cuántas formas distintas es posible contestar el examen?
  - c) En total son 35 preguntas, considerando las cinco unidades. Si solamente se deben de contestar 20 preguntas sin importar el orden ni la unidad, ¿de cuántas maneras diferentes se puede contestar el examen?
  - d) ¿De cuántas maneras se puede contestar el examen si se requiere que se contesten todas las unidades sin importar el orden?



# NUMEROS COMBINATORIOS

- Nota: Si en las combinaciones de  $n$  elementos tomados de  $k$  en  $k$  cada vez se admiten repeticiones, el número de tales combinaciones viene dado por

$$\binom{n+k-1}{k}$$



# NUMEROS COMBINATORIOS

- Ejemplo: El número de combinaciones de las tres letras pqr tomadas de dos en dos cada vez es

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{6}{1.2} = 3$$

y si se admite repeticiones de letras

$$\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \dots = 6$$



# NUMEROS COMBINATORIOS

- Se tienen las siguientes *propiedades*:

$$1) \binom{n}{0} = 1 \quad 2) \binom{n}{1} = n$$

$$3) \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$4) \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$



## EJERCICIOS

- Siete amigos hacen cola para el cine. Al llegar sólo quedan 4 entradas. ¿ De cuántas formas podrían repartirse estas entradas para ver la película ?
- En una clase de 30 alumnos se quiere elegir un grupo de 5 alumnos para participar en un concurso. ¿ De cuántas formas podría hacerse ?
- A una reunión asisten 10 personas y se intercambian saludos entre todos. ¿Cuántos saludos se han intercambiado?



# PERMUTACIONES Y COMBINACION

- Para ver de una manera objetiva la diferencia entre una combinación y una permutación, plantearemos cierta situación.
- Suponga que un curso está constituido por 35 alumnos.
  - a) El profesor desea que tres de los alumnos lo ayuden en actividades rutinarias tales como mantener la sala limpia o entregar material a los alumnos cuando así sea necesario.
  - b) El profesor desea que se nombre a los representantes del curso (Presidente, Secretario y Tesorero).
- Para a) es ¿Es importante el orden como se selecciona a los elementos que forma el grupo de tres personas?
- Este ejemplo es una **combinación**, quiere decir esto que las combinaciones nos permiten formar grupos o muestras de elementos en donde lo único que nos interesa es el contenido de los mismos



# PERMUTACIONES Y COMBINACION

<b>PRESIDENTE</b>	Daniel	Arturo	Rafael	Daniel
<b>SECRETARIO</b>	Arturo	Daniel	Daniel	Rafael
<b>TESORERO</b>	Rafael	Rafael	Arturo	Arturo

- Para b) ¿Importa el orden de los elementos en la selección?
- Definitivamente sí, por lo tanto las representaciones antes definidas son diferentes ya que el orden o la forma en que se asignan las funciones sí importa, por lo tanto es este caso estamos tratando con **permutaciones**.



## APLICACIONES: TEOREMA DEL BINOMIO

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)(a + b) \\&= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb \\&= a^3 + a^2b + a^2b + ab^2 + a^2b + ab^2 + ab^2 + b^3 \\&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b) \cdots (a + b)}_{\text{factores de } n},$$

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= C(n, 0)a^n b^0 + C(n, 1)a^{n-1}b^1 + C(n, 2)a^{n-2}b^2 \\&\quad + \cdots + C(n, n-1)a^1b^{n-1} + C(n, n)a^0b^n.\end{aligned}$$



## TEOREMA DEL BINOMIO

- Si  $a$  y  $b$  son números reales y  $n$  es un entero positivo, entonces:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) a^{n-k} b^k.$$

- Los números  $C(n, r)$  se conocen como los coeficientes binomiales.



## EJEMPLO

- Al considerar n=3 en el teorema anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= C(3, 0)a^3b^0 + C(3, 1)a^2b^1 + C(3, 2)a^1b^2 + C(3, 3)a^0b^3 \\&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$



- Desarrollar  $(3x-2y)^4$  utilizando el teorema del binomio. Si  $a=3x$ ,  $b=-2y$  y  $n=4$  en el teorema obtenemos:

$$\begin{aligned}
 (3x - 2y)^4 &= (a + b)^4 \\
 &= C(4, 0)a^4b^0 + C(4, 1)a^3b^1 + C(4, 2)a^2b^2 \\
 &\quad + C(4, 3)a^1b^3 + C(4, 4)a^0b^4 \\
 &= C(4, 0)(3x)^4(-2y)^0 + C(4, 1)(3x)^3(-2y)^1 \\
 &\quad + C(4, 2)(3x)^2(-2y)^2 + C(4, 3)(3x)^1(-2y)^3 \\
 &\quad + C(4, 4)(3x)^0(-2y)^4 \\
 &= 3^4x^4 + 4 \cdot 3^3x^3(-2y) + 6 \cdot 3^2x^2(-2)^2y^2 \\
 &\quad + 4(3x)(-2)^3y^3 + (-2)^4y^4 \\
 &= 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4.
 \end{aligned}$$

## EJERCICIO

- Obtener los factores del binomio  $(-3x+2y^2)^2$ .
  - a) Utilizando el binomio elevado al cuadrado
  - b) Usando el teorema binomial



# APLICACIONES: TRIANGULO DE PASCAL

## EJERCICIO

- Considérese el conjunto  $A=\{v,w,x,y,z\}$ .  
Determinar el número de:
  - a) Permutaciones para arreglos de tamaño  $r=n$  con repetición.
  - b) Permutaciones para arreglos de tamaño  $r=n$  sin repetición.
  - c) Combinaciones para arreglos de tamaño  $r=n$ .
  - d) Permutaciones para arreglos de tamaño  $r=2$  con repetición.
  - e) Permutaciones para arreglos de tamaño  $r=2$  sin repetición.
  - f) Combinaciones para arreglos de tamaño  $r=2$ .



## BIBLIOGRAFÍA

- Ralph P. Grimaldi. Matemáticas discreta y combinatoria: introducción y aplicaciones

