Algèbre de groupe en caractéristique 1 et distances invariantes sur un groupe fini Dominique Castella, Stephane Gaubert

Marion DANYACH

Janvier 2021

1 Introduction

Figure 1:

Nous allons ici introduire une notion bien particulière: l'algèbre tropicale.
Tout d'abord pourquoi parle t-on d'algèbre tropicale ? Le terme tropicale n'a pas d'autre sens que de faire référence au Brésil et a son inventeur Imre Simon.
L'algèbre tropicale re-définit l'addition et la multiplication ainsi que toutes les opérations qui y sont associées.
A titre d'exemple :

$$\mathrm{a}\oplus b = \max(a, b)$$
$$\mathrm{a}\odot b = a + b$$

Vous trouverez ci-dessous un petit guide trivial mais néanmoins bien pratique sur l'algèbre tropical.
`https://www.lyc-altitude.ac-aix-marseille.fr/spip/sites/www.lyc-altitude/spip/IMG/pdf/2009-Geometrie_tropicale-MeJ-Briancon.pdf/texmaker`

Quelle est la conséquence sur la géométrie?
En géométrie tropicale, deux points ne sont pas forcément alignés.

Deux concepts importants a retenir:
L'Algèbre min-plus définie avec le minimum pour addition et l'addition pour multiplication .
L'Algèbre max-plus, définie avec le maximum pour addition et l'addition pour multiplication.

DEFINITIONS UTILES
Afin de comprendre le papier il vous faudra garder en tête cette définition: L'idempotence signifie qu'une opération a le même effet qu'on l'applique une ou plusieurs fois. C'est le cas de l'opération valeur absolue: abs(abs(x)) = abs(x).
Un élément x d'un magma (M, •) est dit idempotent si 1,2 : x • x = x
Si tous les éléments de M sont idempotents pour •, alors • est dite idempotente. Un corps : un ensemble muni de deux opérations binaires. Dans le papier les auteurs entendent des idempotents non nuls.
Une application concrète en programmation:
`https://https://www.youtube.com/watch?v=UaKZ4wKytcA`

APPLICATIONS
Concrètement: a quoi cela sert-il ? L'algèbre tropical sert dans la modélisation, l'analyse, l'évaluation de performance et la synthèse de lois de commande pour des classes bien répertoriées de systèmes à événements discrets déterministes ou stochastiques (ateliers flexibles, réseaux de transport, réseaux de communications, systèmes multi-processeur, etc.) Il sert en particulier en programmation fonctionnelle. Un script SQL est par exemple écrit de façon à être idempotent car le script ne modifie pas la base de données. Vous trouverez ici une vidéo particulièrement bien faite sur les usages de l'algèbre tropical:
`https://www.youtube.com/watch?v=yP5qajIL_YM`

2 Insights du papier.

Les distances et plus généralement les métriques invariantes sur un groupe fini, utilisées en particulier en statistique, sont étroitement liées aux idem- potents de l'algèbre du groupe sur le semi-corps idempotent des réels min-plus. Comme dans le cas classique, les idempotents centraux (qui correspondent aux dis- tances bi-invariantes) sont donnés par les caractères de représentations linéaires de ce groupe.

Les auteurs démontrent que ces caractères s'obtiennent encore à partir de caractères irréductibles et que plus généralement les idempotents peuvent être décomposés de façon unique en somme d'idempotents minimaux.(Ce qui fait écho a l'algèbre min plus évoquée plus haut.)
Les auteurs déterminent les idempotents minimaux et fournissent la construction des caractères irréductibles à partir des classes de conjugaison du groupe.

Leur travail conduit en particulier à la mise en valeur d'une famille finie de métriques in-variantes, à valeurs entières, engendrant toutes les autres : les métriques de Cayley associées aux sous-groupes monogènes.
Cela fait référence a la théorie de la géométrie des groupes.
Définition 1. Soit (G, .) un groupe. (G, .) est dit monogène s'il existe un élément x tel que pour tout élément y de (G,.), il existe un entier relatif k tel que y = xk. On note alors G = ⟨x⟩ et l'on dit que (G, .) est engendré par x ou encore que x est un générateur de (G, .). Si de plus, (G, .) est d'ordre fini, on dit que (G, .) est cyclique.

3 Zoom sur quelques formulations mathématiques.

1) Si e et f sont deux idempotents centraux, e + f est un idempotent si et seulement si

$$\mathrm{ef} = \mathrm{e} + \mathrm{f}.$$

Bien que ne maîtrisant pas complètement la notion d'idempotents centraux, nous retrouvons ici l'intuition derrière la multiplication tropicale.
Par ailleurs on comprend intuitivement que le produit de 2 idempotents ici e et f est lui aussi un idempotent.

2) Un idempotent e, tel que:

$$\mathrm{N(e)} \neq 1k$$

est irréductible s'il est central et vérifie la condition : e = fg où f et g sont deux idempotents centraux implique e = f ou e = g.
Un idempotent e est central si et seulement si la fonction idempotente associée
χ
,telle donc que e = P gG (g)g) est centrale (i.e. constante sur les classes de conjugaison) et on peut alors écrire e = PC (aC)aC, ou C parcourt l'ensemble des classes de conjugaison de G.
NB: La classe de conjugaison d'une permutation est l'ensemble de ses conjuguées.

4 Notre avis.

Le document semble assez abordable bien qu'il ne reprenne pas nécessairement les principales définitions.
Il mentionne relativement peu d'applications concrètes.
En revanche son objet est parfaitement reproductible.
Ce papier a l'avantage d'être récent. Il comporte une bibliographie bien fournie, les ouvrages cites y sont plus ou moins récents et semblent se concentrer sur l'algèbre de groupe.

BIBLIOGRAPHIE

https://fr.wikipedia.org/wiki/Math\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{e\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\let\begingroup\endgroup\relax\let\ignorespaces\relax\accent19e\egroup\spacefactor\accent@spacefactormatiques_tropicales
https://fr.wikipedia.org/wiki/Idempotence
https://www.editions-ellipses.fr/PDF/9782340017870_extrait.pdf
https://tice.univ-irem.fr/lexique/res/Annexe_E_-_Liste_des_symboles_mathematiques_usuels__LaTeX_.pdf
https://antoine.delignat-lavaud.fr/doc/tropical.pdf
http://irma.math.unistra.fr/~delzant/Groupes.pdf