ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ   ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Αναγνώριση Προτύπων (ECE334)

Ακαδ. Έτος 2021 – 2022

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

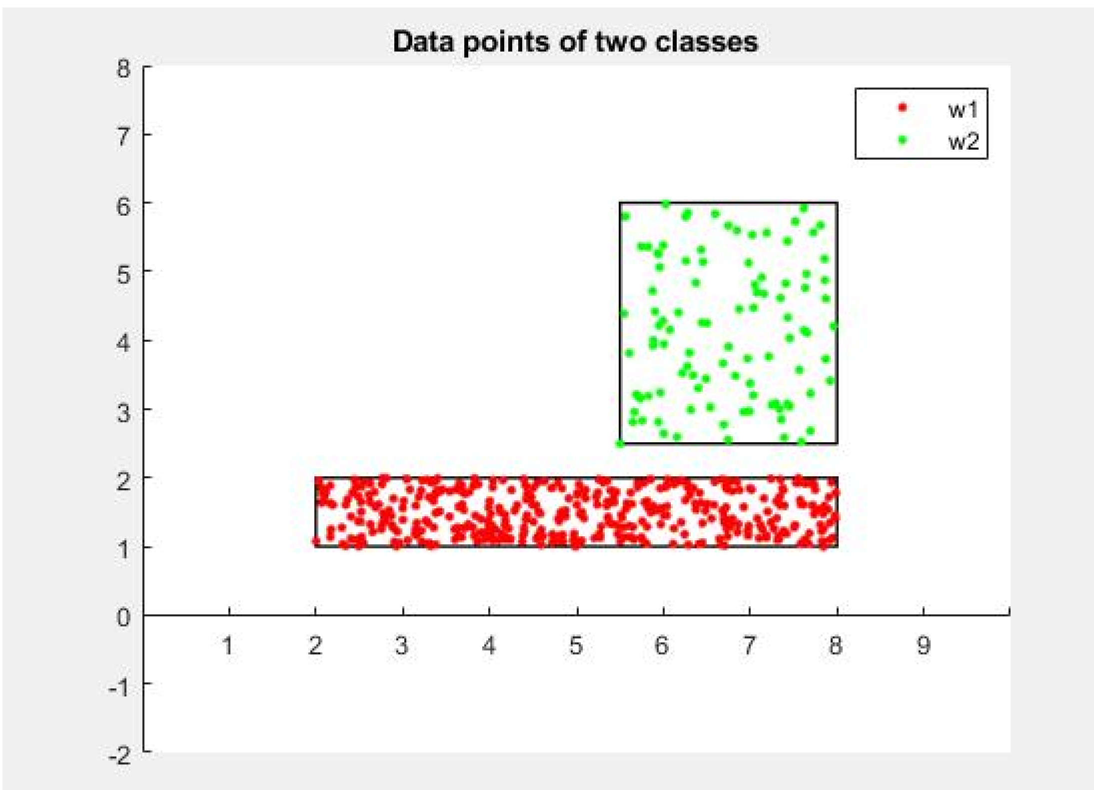
Εκπονήθηκε από ομάδα φοιτητών :
Ασκητής Μάριος – Χρυσόστομος (amarios-c@uth.gr), 2760
Φρέρης Λεονάρδος (fleonardos@uth.gr), 2696

Βόλος
2021-2022

ΜΕΡΟΣ Α :

Δημιουργήσαμε δύο κλάσεις (w1, w2) στον διαδιάστατο χώρο (2 D), όπου η πρώτη αποτελείται απο 400 τυχαία σημεία, τα οποία κατανέμονται στο χώρο μεταξύ του παραλληλόγραμμου με κάτω αριστερή γωνία το σημείο (2,1) και πάνω δεξια το (8,2). Η κλάση αυτή (w1) απεικονόζεται (figure) με κόκκινο χρώμα. Για την τυχαιότητα των δεδομένων χρησιμοποιήσαμε την συνάρτηση rand του matlab. Με παρόμοιο τρόπο κατασκευάσαμε τα 100 τυχαία σημεία για την δεύτερη κλάση με την διαφορα ότι περικλεόνται απο το παραλληλόγραμμο εντός των διαστημάτων [6 , 8] × [2.5 , 5.5] και απεικονίζονται με χρώμα πράσινο.

Παρακάτω εμφανίζεται ένα στιγμιότυπο από τα διανύσματα των δύο κλάσεων :



ΜΕΡΟΣ Β :

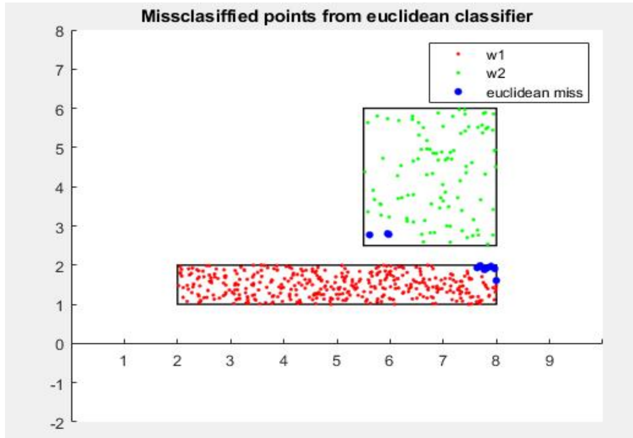
B1

Αρχικά δημιουργήσαμε την συνάρτηση Gaussian_ML_estimate, η οποία παίρνει ως όρισμα των σύνολο των δεδομένων και για τις δύο κλάσεις και επιστρέφει με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας την μέση τιμή και το μητρώο συνδιασποράς για την κάθε κλάση, θεωρώντας τα ότι ακολουθούν δυσδυάστατες κανονικές κατανομές.

B2

Στό βήμα αυτό χρησιμοποιήσαμε την ευκλείδια απόσταση για να ταξινομήσουμε τα σημεία και γ αυτόν τον λόγο δημιουργήσαμε την συνάρτηση euclidean_classifier, όπου παίρνει ως όρισματα το m = [m1 m2] που υπολογίσαμε στο B1 και το σύνολο των όλων δεδομένων. Στην συνέχεια η συνάρτηση με βάση την ελάχιστη ευκλείδια απόσταση ταξινομεί τα σημεία στις δύο κλάσεις και επιστρέφει ως έξοδο ένα διάνυσμα διάστασης 1x500 που περιέχει 1 ή 2 ανάλογα την κλάση που ταξινομήθηκαν. Έπειτα, συγκρίνουμε αυτό το διάνυσμα με το αρχικό διάνυσμα (Y) που περιέχει τις ορθές κλάσεις των διανυσμάτων για να εξάγουμε το σφάλμα της ταξινόμισης. Τέλος απεικονίζουμε όλα τα διανύσματα των δύο κλάσεων με κόκκινο και πράσινο χρώμα αντίστοιχα και με μπλέ χρώμα τα διανύσματα που ταξινομήθηκαν λάθος.

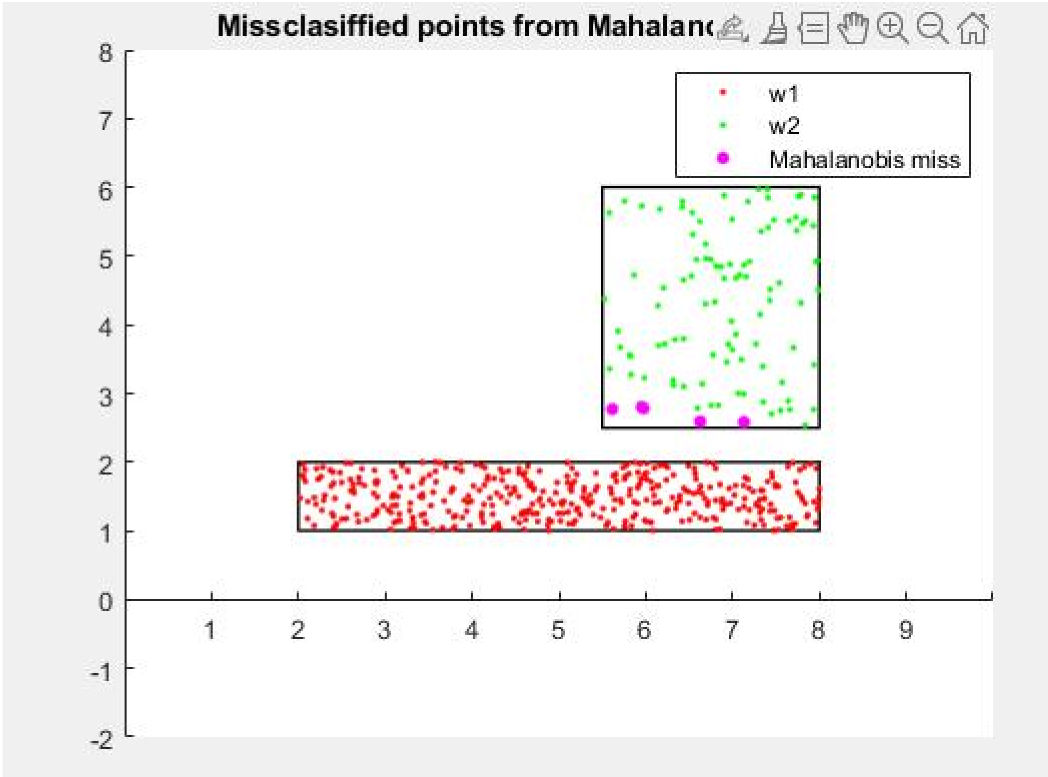
Το στιγμιότυπο αυτής της διαδικασίας φαίνεται παρακάτω :



B3

Όμοια, με το βήμα B2 κατασκεύαζουμε την συνάρτηση mahalanobis_classifier όπου ταξινομούμε τα διανύσματα στις δύο κλάσεις με βάση την απόσταση mahalanobis αυτή τη φορά, όπου παίρνει ως ορίσματα εκτος απο τα m και X (σύνολο διανυσμάτων) που είχαμε στην συνάρτηση του B2 και το S = ½ * (S1+S2), που αντιστοιχεί στον πίνακα συνδιασποράς. Στην συνέχεια η συνάρτηση με βάση την ελάχιστη mahalanobis απόσταση ταξινομεί τα σημεία στις δύο κλάσεις και επιστρέφει ως έξοδο ένα διάνυσμα διάστασης 1x500 που περιέχει 1 ή 2 ανάλογα την κλάση που ταξινομήθηκαν. Έπειτα, συγκρίνουμε αυτό το διάνυσμα με το αρχικό διάνυσμα (Y) που περιέχει τις ορθές κλάσεις των διανυσμάτων για να εξάγουμε το σφάλμα της ταξινόμισης. Τέλος απεικονίζουμε όλα τα διανύσματα των δύο κλάσεων με κόκκινο και πράσινο χρώμα αντίστοιχα και με mageta χρώμα τα διανύσματα που ταξινομήθηκαν λάθος.

Πατακάτω φαίνεται το αποτέλεσμα της διαδικασιας που προηγήθηκε



B4

Στο βήμα αυτό χρησιμοποιούμε τον Bayesian ταξινομητή. Για τον σκοπό αυτό δημιουργήσαμε τις συναρτήσεις comp_gauss_dens_val και bayes_classifier. Η πρώτη παίρνει ως ορίσματα τις μέσες τιμές, τους πίνακες συνδιασποράς και τα διανύσματα των δύο κλάσεων. Με βάση την συνάρτηση 2.27 του βιβλίου "Αναγνώριση Προτύπων, Θοδωρίδης Κουτρούμπας " για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας 2D Gaussian. Με την βοήθεια αυτής της συνάρτησης υπολογίζουμε στην bayes_classifier (με ορίσματα τις μέσες τιμές, τους πίνακες συνδιασποράς, τις πιθανότητες και το σύνολο των δεδομένων των δύο κλάσεων) το γινόμενο της σππ με την πιθανότητα της κλάσης. Έτσι ταξινομούμε κατάλληλα τα δεδομένα επιλέγοντας την κλάση για το κάθε διάνυσμα με βάση το μέγιστο γινόμενο. Όπως και στα προηγούμενα ερωτήματα επιστρέφουμε το νέο διάνυσμα ταξινόμισης και αφού πρώτα το συγκρίνουμε το όρθο εκτυπώνουμε το σφάλμα της. Επειδή , το σφάλμα σε αυτήν την περίπτωση είναι πάντα μηδέν δεν βρήκαμε σκόπιμο να απεικονίσουμε το αποτελέσμα της παραπάνω μεθόδου, καθώς αποτελεί το στιγμιότυπο των δεδομένων, όπως φαίνεται στο B1.

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με τα ακόλουθα σφάλματα παρατηρούμε ότι με τέλεια ακρίβεια ταξινομηθήκαν όλα τα δεδομένα με τον Bayessian ταξινομητή. Κατά σείρα, ακριβέστερη ταξινόμιση πραγματοποιεί η Mahalanobis και λιγότερο επιτυχημένη απ όλες η Ευκλείδια. Παρόλα αυτά οι δύο τελευταίες έχουν αρκετά μικρό σφάλμα 2 % και 1 %, καθιστώντας τις καλούς τρόπους ταξινόμισης.

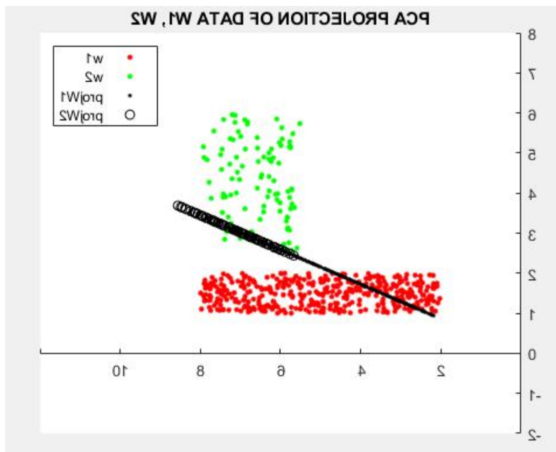
```
Το λάθος της Ευκλείδιας ταξινόμησης είναι 2.00 %
Το λάθος της Mahalanobis ταξινόμησης είναι 1.00 %
Το λάθος της Bayesian ταξινόμησης είναι 0.00 %
```

ΜΕΡΟΣ Γ :

Στην ενοτήτα αυτή θα μειώσουμε την διάσταση των δεδομένων από δύο σε ένα με την βοήθεια των αλγορίθμων PCA και LDA.

Γ1

Σε αυτό το ερώτημα θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό PCA για να βρούμε την μονοδιάστατη προβολή των δεδομένων του συνόλου εκπαίδευσης κατά μήκος του διανύσματος που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη ιδιοτιμή. Γ' αυτό τον σκοπό δημιουργήσαμε μία συνάρτηση pca_fun, όπου παίρνει ως ορίσματα τις μέσες τιμές και το σύνολο των δεδομένων των δύο κλάσεων και ως έξοδο επιστρέφει τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα της πρώτης m κύριας συστάδας, το ποσοστό της συνολικής διακύμανσης που εξηγείται απο την καθεμία κύρια συστάδα, τις προβολές των δεδομένων στο χώρο που εκτείνεται απο τα m πρώτα στοιχεία (ένα διάνυσμα Y με διαστάσεις 2X500) και τέλος τον μέσο όρο όλων των δεδομένων των δύο συστάδων. Στην συνέχεια με βάση το ιδιοδιάνυσμα που μας επέστρεψε η παραπάνω συνάρτηση βρίσκουμε το wpca , όπου απο εκεί θα το εντοπίσουμε το wproj. Με τα παραπάνω αποτελέσματα θα κατασκεβάζουμε το projection. Παρακάτω φαίνεται ένα στιγμιότυπο από αυτό το τρέξιμο.



Παρατηρούμε, ότι η ευθεία δεν διαχωρίζει τις κλασεις και διέρχεται μέσα από αυτές, αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι όλα τα σημεία (δεδομένα) προβάλονται κάθετα στην ευθεία επομένως είναι λογικό το παραπάνω αποτέλεσμα. Γενικά παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει διαχωριμός στις κλασεις πάνω στην ευθεία αφού τα προβαλόμενα σημεία εμπλέκονται. Γ' αυτον τον λόγο για να ταξινομηθούν σε δύο κλάσεις θα χρησιμοποιηθεί κάποιος ταξινομιτής.

Γ2

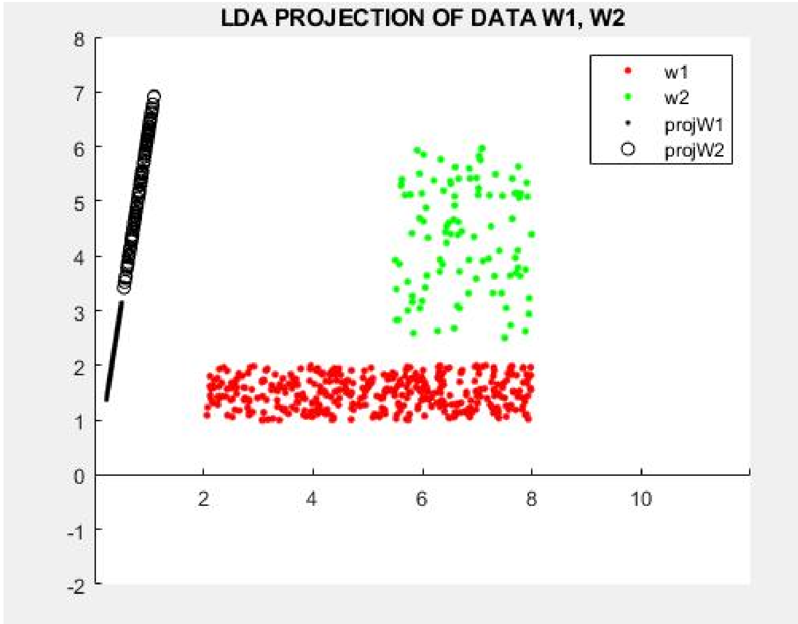
Εφόσον μετατρέψαμε, τα στοιχεία από τον διδυάστατο στον μονοδιάστατο χώρο μπόρουμε πλέον να εφαρμόσουμε έναν ταξινομιτή για να χωρίσουμε τα δεδομένα σε δύο κλάσεις. Σε αυτό το ερώτημα χρησιμοποιούμε την ευκλείδια απόσταση για να τα ταξινομήσουμε. Επομένως χρησιμοποιούμε την συνάρτηση που είχαμε κατασκευάσει για το μέρος B της εργασίας την euclidean_classifier. Έτσι δημιουργείται

ένα
διάνυσμα διάστασης 1x500 που περιέχει 1 ή 2 ανάλογα την κλάση που ταξινομήθηκαν. Έπειτα, συγκρίνουμε αυτό το διάνυσμα με το αρχικό διάνυσμα (Y) που περιέχει τις ορθές κλάσεις των διανυσμάτων για να εξάγουμε το σφάλμα της ταξινόμισης. Παρακάτω, φαίνεται τα σφάλμα που προέκυψε.

```
Το λάθος της Ευκλείδιας ταξινόμησης για τις προβαλόμενες κλάσεις με PCA είναι 21.40 %
```

Γ3

Και σε αυτό το ερώτημα θέλουμε όμοια να βρούμε την μονοδιάστατη προβολή των δεδομένων του συνόλου εκπαίδευσης με την διαφορά ότι σε αυτήν την περίπτωση θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό LDA. Γ' αυτόν τον σκοπό σχεδιάσαμε την συνάρτηση lda_fun όπου παίρνει ως ορίσματα το διάνυσμα που περιέχει το σύνολο των δεδομέμων εκπαίδευσης και τις δύο μέσες τιμές των δύο κλάσεων αντίστοιχα (m1,m2). Ως έξοδο επιστρέφει το Wproj(LDA), όπου στην συνέχεια το χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε τα projections των δεδομένων για κάθε κλάση. Παρακάτω φαίνεται ένα στιγμιότυπο από το τρέξιμο του αλγορίθμου.



Παρατηρούμε, ότι η κλήση της ευθείας είναι διαφορετική αφού το διάνυσμα wproj(LDA) είναι πολλαπλασιασμένο με μία σταθερά. Επίσης σε αντίθεση με πριν τα σημεία προβολής διαχωρίζονται στην ευθεία προβολής σε μεγάλο βαθμό αφού αριστερά της ευθείας προβάλονται τα περισσότερα σημεία της κόκκινης κλάσης, ενώ πάνω αριστερα τα σημεία της πράσινης κλασης. Αυτό οδηγεί στο συμπέραμα ότι με την χρήση της ευκλείδιας απόστασης για την ταξινόμιση των σημείων στις κλάσεις όπως χρησιμοποιήσαμε και στο ερώτημα Γ2 θα έχουμε μίκροτερο σφάλμα σε σχέση με αυτό (Γ2).

Γ4

Όμοια με το Γ2, εφόσον προβάλαμε όλα τα σημεία στην ευθεία προβολής και μειώσαμε την διάσταση, μπορούμε και πάλι να εφαρμόσουμε την ευκλείδια απόσταση για να ταξινομίσουμε τα δεδομένα στις δύο κλάσεις.

Επομένως χρησιμοποιούμε ξανά την συνάρτηση που είχαμε κατασκευάσει για το μέρος Β της εργασίας την euclidean_classifier. Έτσι δημιουργείται ένα διάνυσμα διάστασης 1x500 που περιέχει 1 ή 2 ανάλογα την κλάση που ταξινομήθηκαν. Έπειτα, συγκρίνουμε αυτό το διάνυσμα με το αρχικό διάνυσμα (Y) που περιέχει τις ορθές κλάσεις των διανυσμάτων για να εξάγουμε το σφάλμα της ταξινόμισης. Παρακάτω, φαίνεται τα σφάλμα που προέκυψε.

```
Το λάθος της Ευκλείδιας ταξινόμησης για τις προβαλόμενες κλάσεις με LDA είναι 1.20 %
```

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω είναι λογικό το σφάλμα να είναι μικρότερο από αυτο του PCA, καθώς οι προβολές των σημείων στην ευθεία είναι πιο διαχωρισμένες με την μέθοδο του LDA και λιγότερο με την μέθοδο του PCA.

ΜΕΡΟΣ Δ :

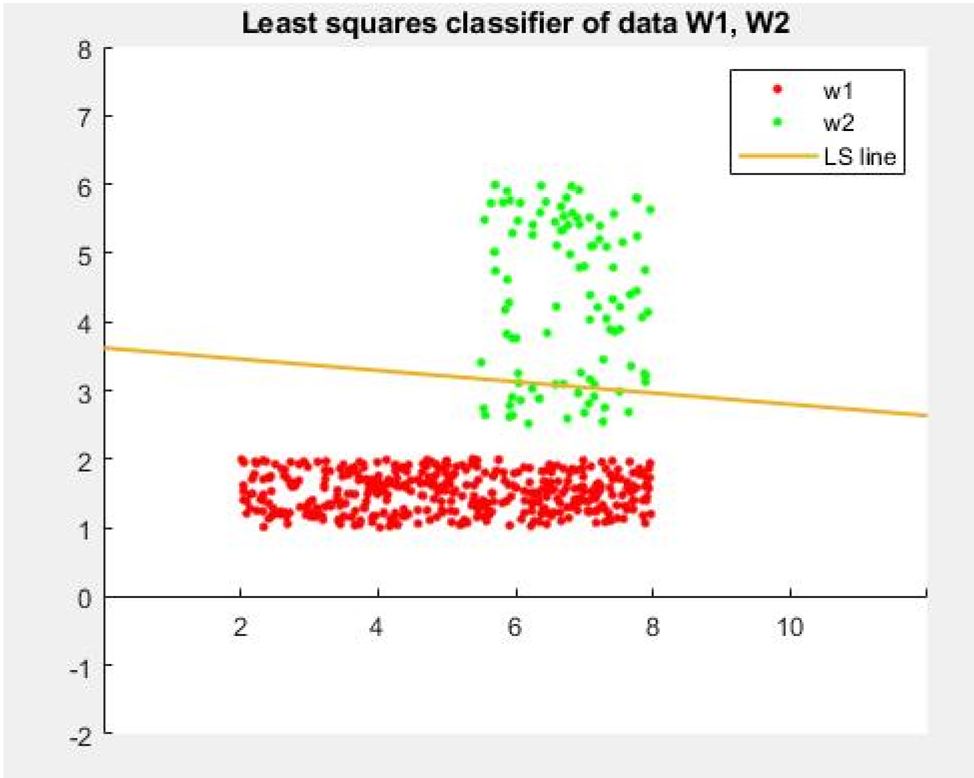
Στο μέρος Δ της εργασίας θα υλοποιήθουν γραμμικοί ταξινομητές στο δυσδιάστατο χώρο με βάση τους αλγόριθμους ελαχίστων τετραγώνων και perceptron

Δ1

Σε αυτό το ερώτημα θα βρούμε τον γραμμικό ταξινομιτή που ελαχιστοποιεί το κριτήριο των ελάχιστων τετραγώνων για το σύνολο των δεδομένων. Έτσι δημιουργήσαμε την συνάρτηση ls_fun, όπου δέχεται ως ορίσματα το σύνολο των διανυσμάτων ανεστραμένα και extended, ένα δίανυσμα που περιέχει τις σωστές κλάσεις που ανήκει το κάθε σημείο (διάνυσμα διάστασης 1x500 που περιέχει 1 ή 2 ανάλογα την κλάση που ταξινομήθηκαν), και ως έξοδο επιστέφει το διάνυσμα των βαρών Wls. Στην συνέχεια κατασκευάζουμε το διάνυσμα y_ls, που είναι απαραίτητο για τον υπολογισμό του σφάλματος ταξινόμισης, είναι δίαστασης 1x500 και περιέχει το αριθμό 1 και -1 ανάλογα με το που ταξινόμησε ο αλγόριμος τα δεδομένα. Επομένως σύμφωνα με τα παραπάνω υπολογίζουμε το σφάλμα ταξινόμισης και το τετραγωνικό σφάλμα, με τα αποτελέσματα να εμφανίζονται στο παρακάτω στιγμιότυπο.

```
Το σφάλμα ταξινόμησης του γραμμικού ταξινομητή (ευθεία) που ελαχιστοποιεί το κριτήριο ελαχίστων τετραγώνων ταξινόμησης είναι 4.20 %
Το σφάλμα τετραγώνων του γραμμικού ταξινομητή (ευθεία) που ελαχιστοποιεί το κριτήριο ελαχίστων τετραγώνων ταξινόμησης είναι 11.943315
```

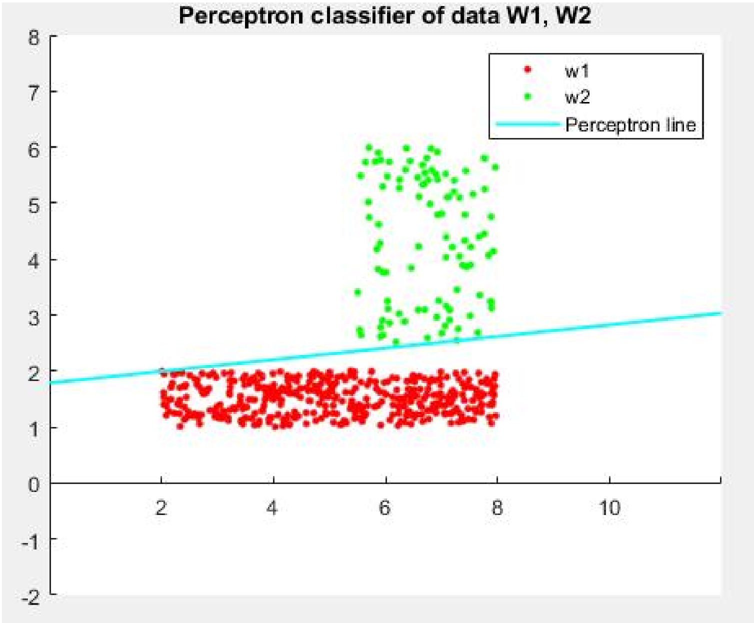
Παρακάτω, φαίνεται ο γραμμικός ταξινομιτής που διαχωρίζει της δύο κλάσεις μαζί με τα σημεία που ταξινομήθηκαν λανθασμένα τα οποία είναι λίγα εξού και το μικρό σφάλμα ταξινόμισης.



Δ2

Όμοια και σε αυτό το ερώτημα ψάχνουμε έναν γραμμικό ταξινομιτή στον διδυάστατο χώρο, όπου να χωρίζει σωστά στις δύο κλάσεις τα δεδομένα εκπαίδευσης. Γ' αυτό τον λόγο δημιουργήσαμε την συνάρτηση perce η οποία παίρνει ως ορίσματα το σύνολο των δεδομένων που πρόκειται να ταξινομηθούν, το διάνυσμα y όπου περιέχει για τα πρώτα 400 στοιχεία το 1 (κλαση w1) και στα υπόλοιπα 100 το -1 (κλαση w2), το διάνυσμα του βάρους της degenerate ευθείας όπου ταξινομεί σωστά τα σημεία της δεύτερης κλάσης και λανθασμένα τα σημεία της πρώτης κλάσης και το learning rate (rho) με κατάλληλη τιμή που να βοηθάει τον αλγόριθμο να συγκλίνει σε σχετικά μικρό αριθμό βημάτων. Η degenerate ευθεία που χρησιμοποιήσαμε έχει διάνυσμα βαρών [0 ½ 0] και ο ρυθμός εκμάθησης που εντοπίσαμε ότι οδηγούσε σε λιγότερες επαναλήψης είναι 1. Έτσι ως έξοδο παίρνουμε το διάνυσμα του βάρους της ευθείας ταξινόμισης, ο αριθμός των επαναλήψεων και ο αριθμός των λανθασμένων σημείων. Παρακάτω βλέπουμε τα αποτελέσματα της συνάρτησης και την γραμμή ταξινόμισης των σημείων.

```
w_perce =

   1.0e+03 *

    0.1345
   -1.0613
    1.8020


iter =

   131


mis_clas =

     0
```



Παρατηρούμε από την γραμμή ταξινόμισης και επείδη mis_clas = 0, ότι ο αλγόριθμος τερματίζει όταν όλα τα λανθασμένα δεδομένα ταξινομηθούν σωστά, δηλαδή όταν η συνάρτηση κόστους γίνεται μηδέν. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το σφάλμα της ταξίνόμισης που υπολογίσαμε παρακάτω είναι μηδέν.

```
Το σφάλμα ταξινόμησης του γραμμικού ταξινομητή (ευθεία) με βάση τον αλγόριθμο perceptron είναι 0.00 %
```