1/11/2023

Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Εργασία 1

Μάριος Τζαμτζής   ΑΕΜ: 10038

Στην παρούσα εργασία ζητήθηκε η ελαχιστοποίηση τριών συναρτήσεων εντός ενός διαστήματος με την χρήση μεθόδων αναζήτησης ελαχίστου. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν ήταν:

• Η μέθοδος της Διχοτόμου (Bisection Method)

• Η μέθοδος του Χρυσού Τομέα (Golden Section Method)

• Η μέθοδος Fibonacci (Fibonacci Method)

• Η μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου (Differential Bisection Method).

Οι συναρτήσεις που δόθηκαν προς ανάλυση ήταν:

- $f_1(x) = (x-1)^3 + (x-4)^2\, cos(x)$
- $f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$
- $f_3(x) = x^2\, ln(0,5x) + sin(0,2x)^2$

Ως αρχικό διάστημα δόθηκε το $[ak\ ,bk]$=[0,3]. Τα ελάχιστα για τις συναρτήσεις στο παραπάνω διάστημα είναι τα:

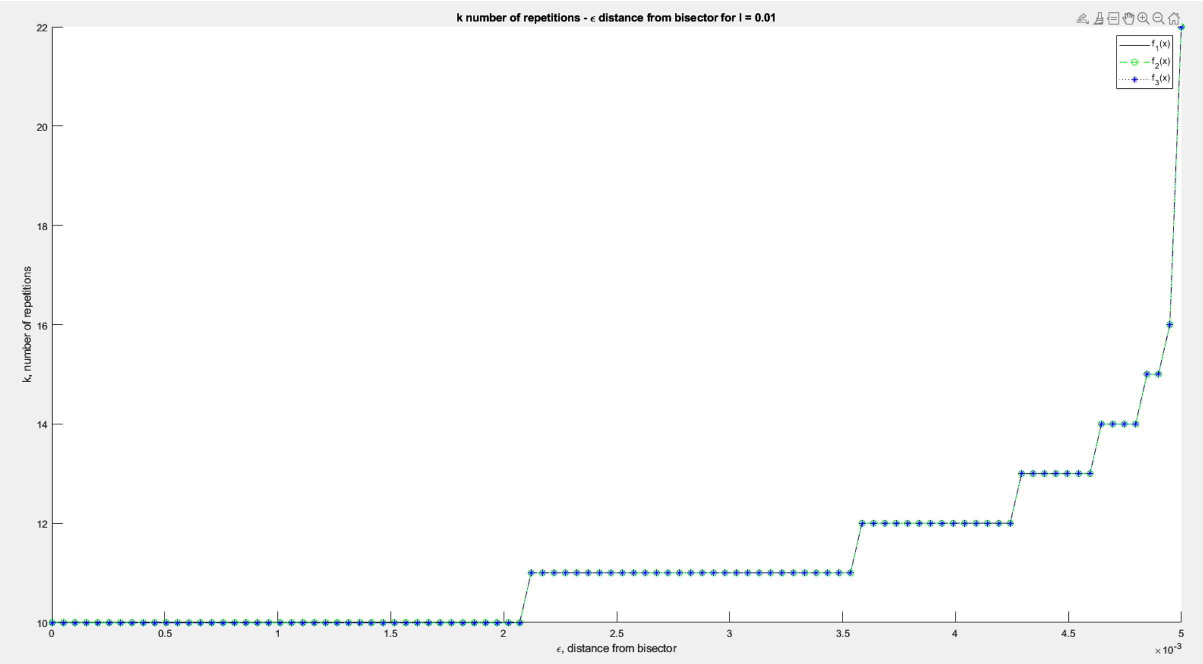
- • $f_1(x_1^*)$= 1.92725
- • $f_2(x_2^*)$= 2.0176875
- • $f_3(x_3^*)$= 1.1655625

Όλες οι μέθοδοι υλοποιήθηκαν στο περιβάλλον του $Matlab$.

ΘΕΜΑ 1

- Ερώτημα 1.1:

Κρατώντας σταθερό το τελικό εύρος αναζήτησης l = 0.01 μελετούμε τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης fi(x), i = 1,2,3, καθώς μεταβάλλουμε την σταθερά ε > 0.

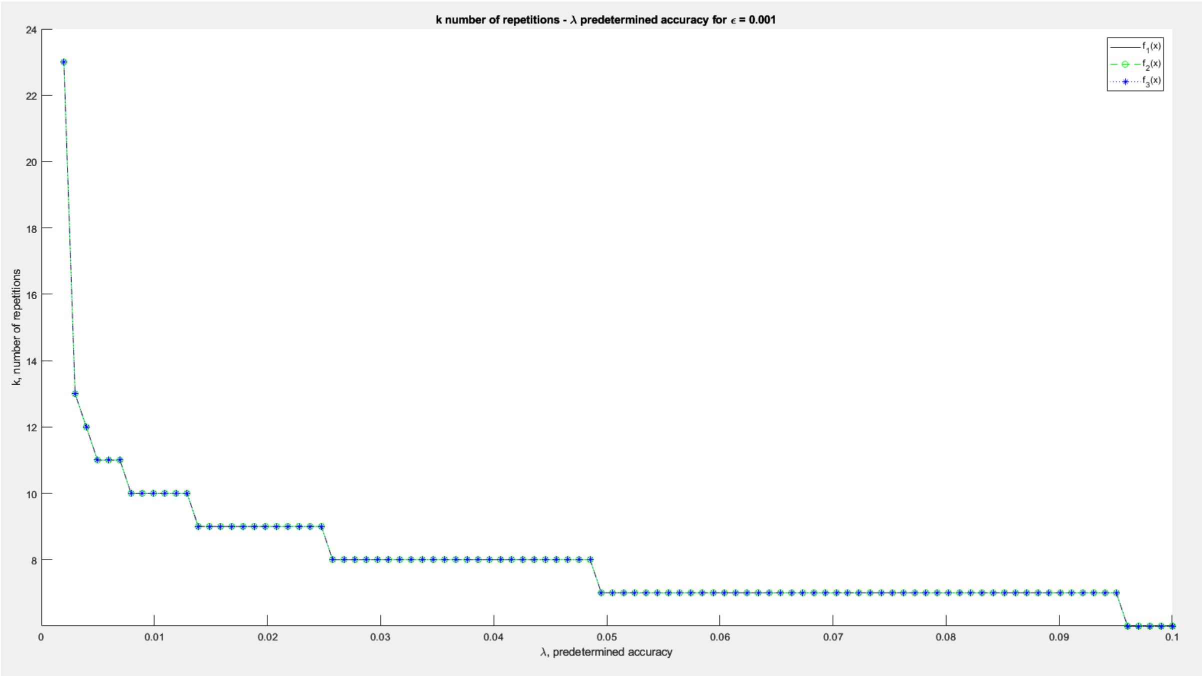


Παρατηρήσεις:

1. Καθώς η απόσταση ε από τη διχοτόμο αυξάνεται, αυξάνεται και ο αριθμός των επαναλήψεων k(και μάλιστα εκθετικά) που απαιτούνται για τη σύγκλιση. Για κάποια διαστήματα του ε ο αριθμός επαναλήψεων παραμένει σταθερός, τα διαστήματα αυτά μικραίνουν όσο αυξάνει το ε.
2. Φαίνεται ότι και στις τρεις περιπτώσεις, οι γραφικές παραστάσεις συμπίπτουν.
3. Το γράφημα αποτελείται από 100 σημεία , με το ε να έχει εύρος τιμών το [10^{-6},0.004999], έτσι ώστε να πληρείται η προϋπόθεση 2ε<λ.

- Ερώτημα 1.2:

Κρατώντας σταθερό το ε = 0.001 μελετούμε τη μεταβολή των υπολογισμών της fi(x), i = 1,2,3, καθώς μεταβάλλουμε το l.

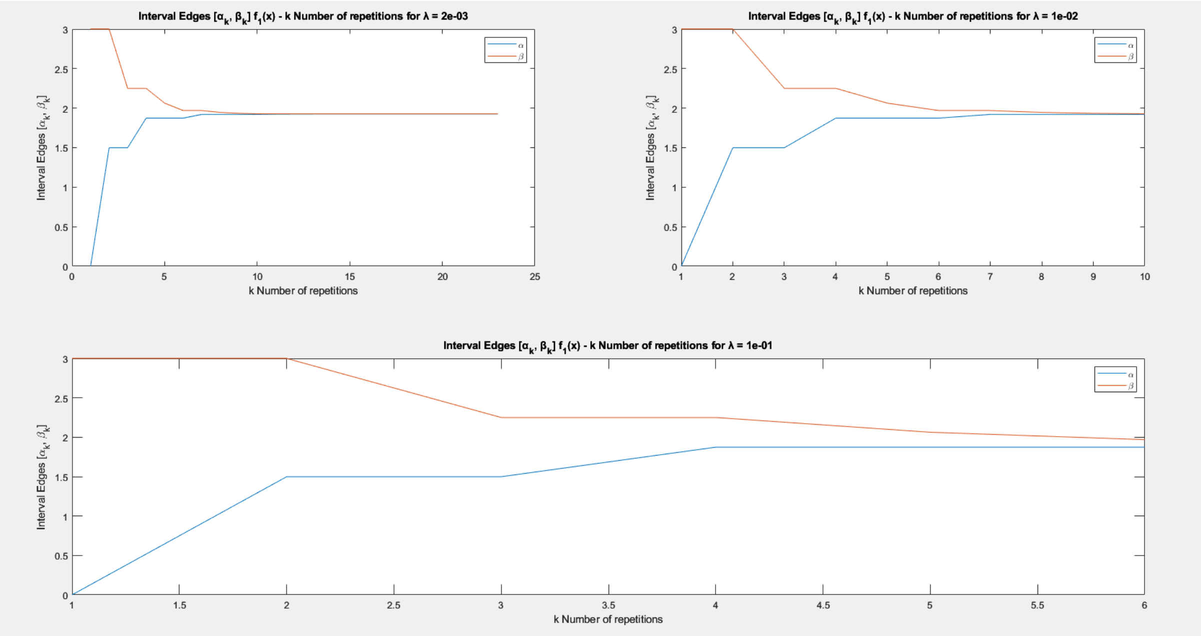


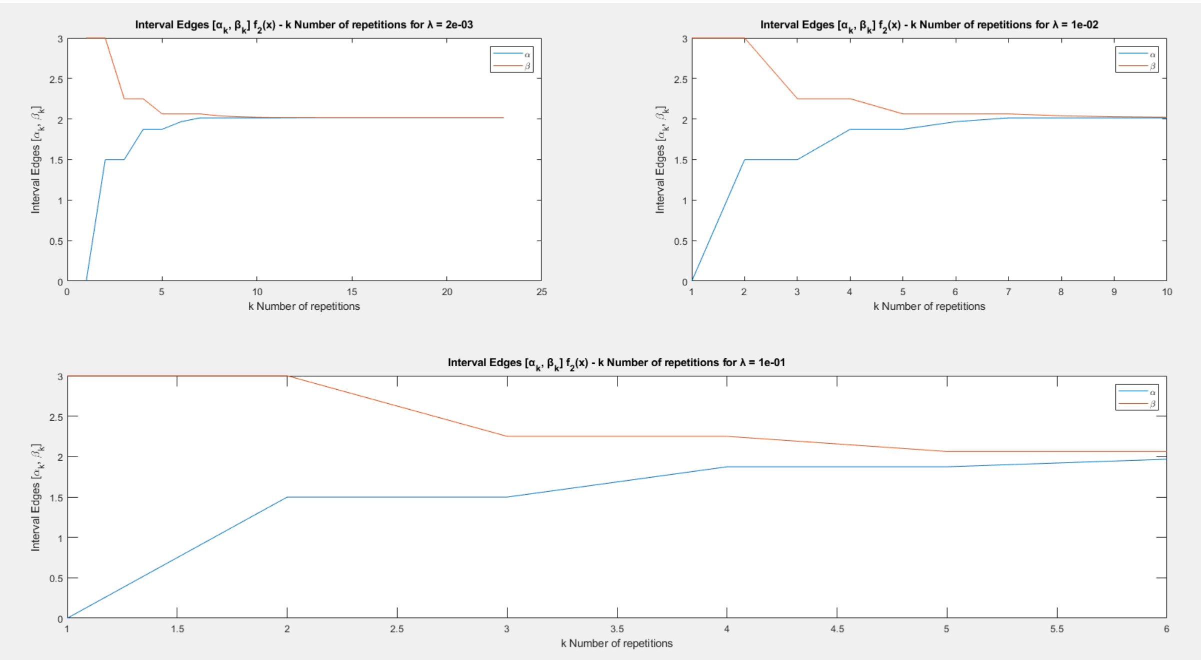
Παρατηρήσεις:

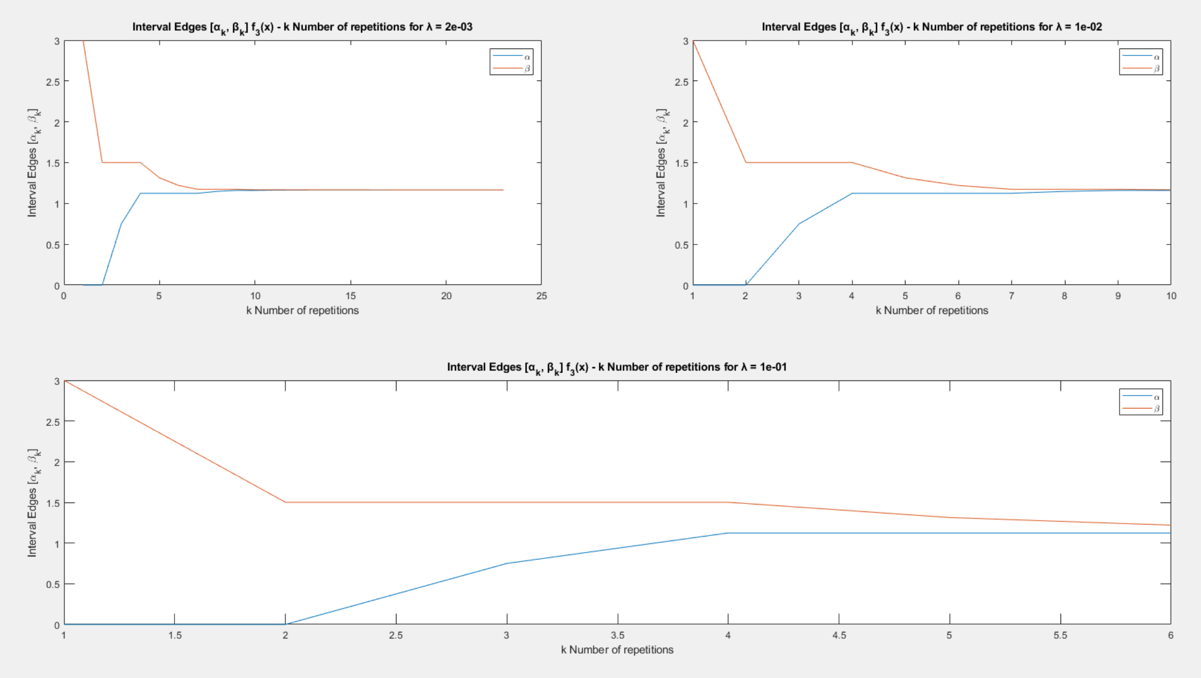
1. Όσο αυξάνεται το λ, ο αριθμός των επαναλήψεων μειώνεται. Υπάρχουν διαστήματα στα οποία η μεταβολή της τιμής του λ δεν φαίνεται να επηρεάζει την τιμή του k, αλλά σε αυτή την περίπτωση όσο αυξάνεται το λ, τα διαστήματα αυτά γίνονται μεγαλύτερα.
2. Φαίνεται ότι οι γραφικές παραστάσεις και για τις τρεις συναρτήσεις συμπίπτουν.
3. Δεν απαιτείται να αυξηθεί ιδιαίτερα η ακρίβεια του αλγορίθμου για να καταλήξει σε πιο ακριβή απάντηση, καθώς ο αριθμός των επαναλήψεων καθορίζει πόσο κοντά το τελικό διάστημα $[a_k, b_k]$ βρίσκεται στο ελάχιστο $x*$.
4. Το γράφημα αποτελείται από 100 σημεία, με το λ να έχει εύρος τιμών το [$2 * 10^{-3}$+ 10^{-6}, 0.1] = [0.002001, 0.1] (2ε<λ).

- Ερώτημα 1.3:

Σε τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k,b_k]$ συναρτήσει του δείκτη βήματος k, δηλαδή (k,a_k) και (k, b_k), για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l.







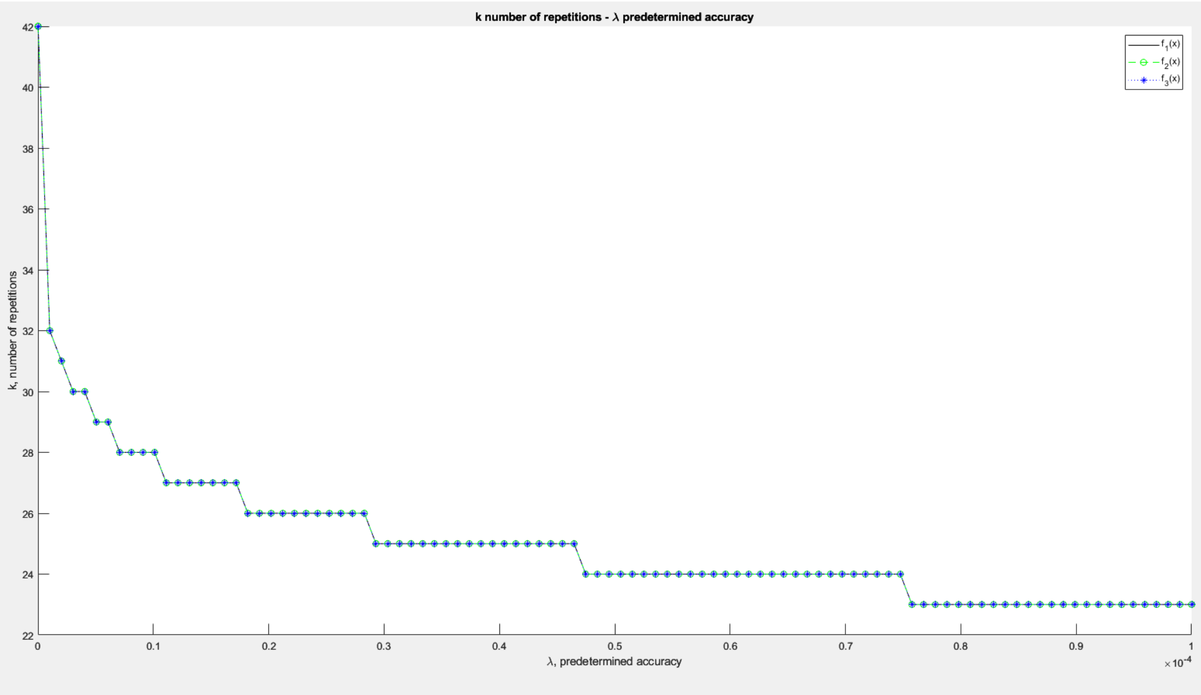
Παρατηρήσεις:

1. Όσο ο αριθμός των επαναλήψεων αυξάνεται, τα a και b συγκλίνουν και το διάστημα αναζήτησης ελαττώνεται.
2. Όσο αυξάνεται το λ, οι απαιτούμενες επαναλήψεις του αλγορίθμου μέχρι την τερματική συνθήκη μειώνονται.
3. Για τις γραφικές παραστάσεις, επιλέχθηκε ε=0.001 και για το λ επιλέχθηκαν οι τιμές λ=2 $* 10^{-3}$+ 10^{-6},λ= 0.01,λ= 0.1.

ΘΕΜΑ 2

- Ερώτημα 2.1:

Μελετούμε τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης fi(x), i = 1,2,3, καθώς μεταβάλλουμε το τελικό εύρος αναζήτησης l.

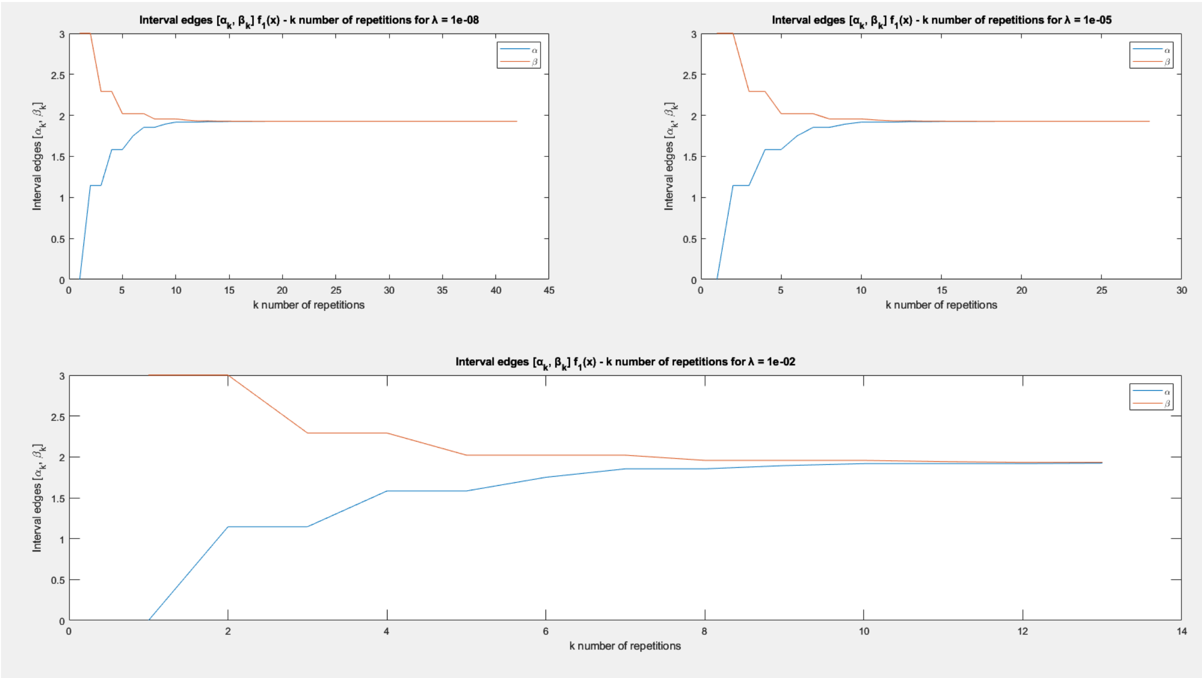


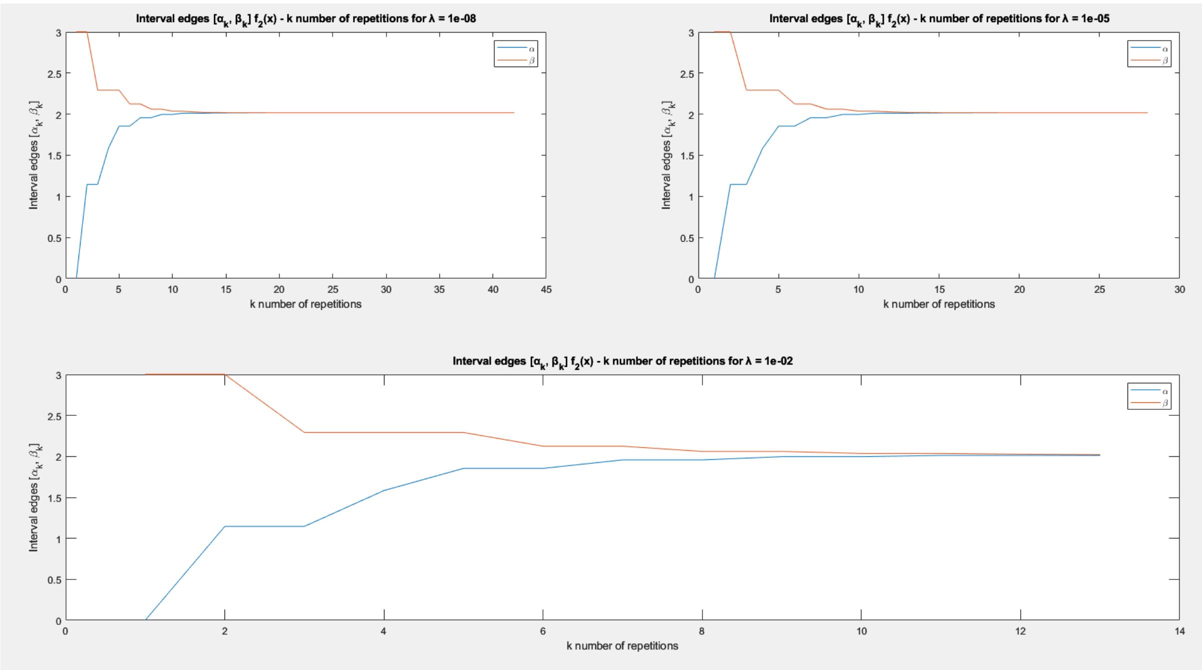
Παρατηρήσεις:

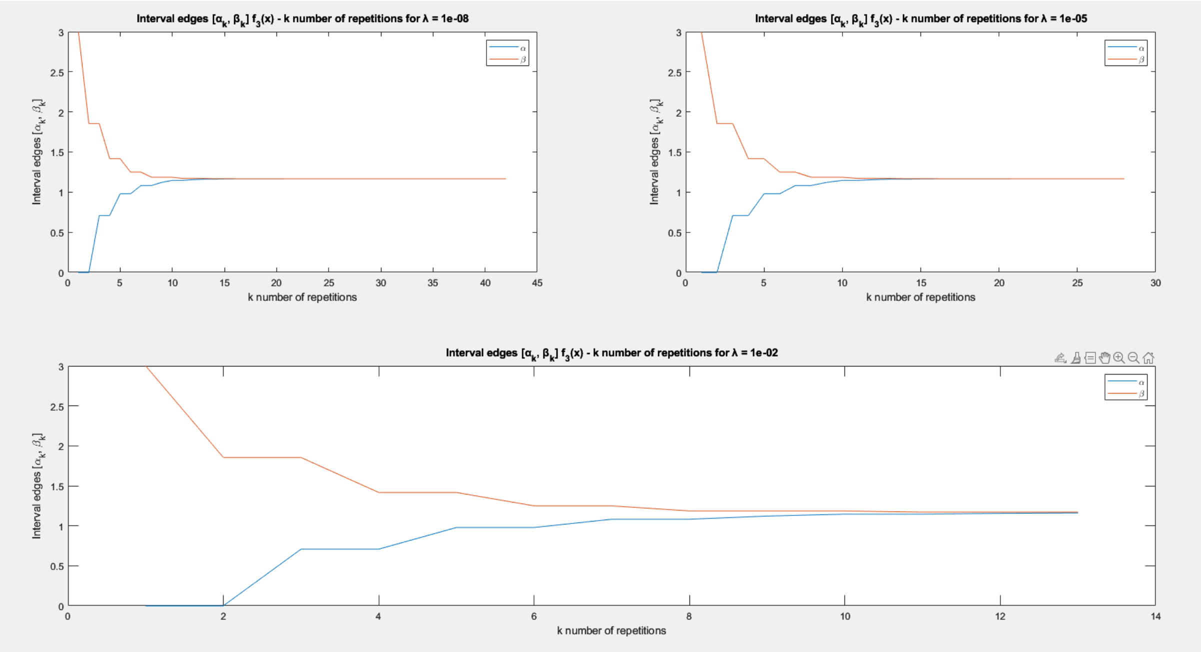
1. Με την αύξηση του λ, ο αριθμός των επαναλήψεων μειώνεται ανά διαστήματα.
2. Εφόσον στον αλγόριθμο γίνονται δύο υπολογισμοί της συνάρτησης, ο συνολικός αριθμός των υπολογισμών θα είναι διπλάσιος του αριθμού επαναλήψεων.
3. Οι γραφικές παραστάσεις και για τις τρεις συναρτήσεις συμπίπτουν.
4. Το γράφημα αποτελείται από 100 σημεία με το λ να έχει εύρος τιμών το $[10^{-8}, 10^{-5}]$.

- Ερώτημα 2.2:

Σε τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k,b_k]$ συναρτήσει του δείκτη βήματος k, δηλαδή (k,a_k) και $(k,\ b_k)$, για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l.







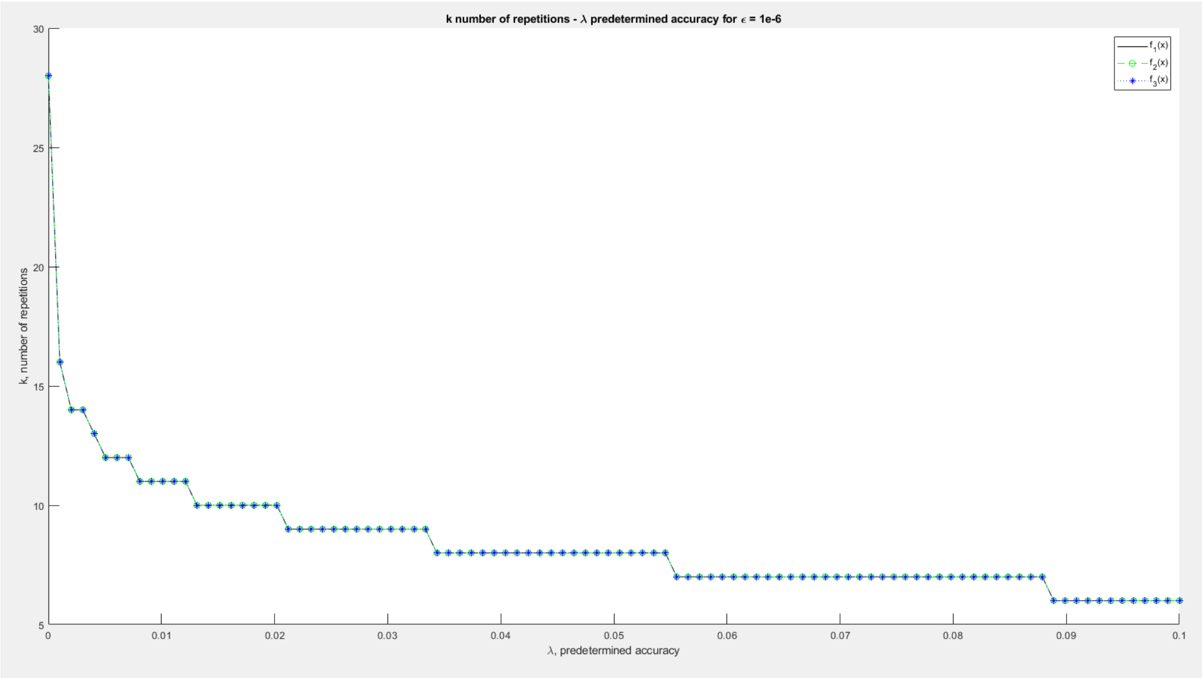
Παρατηρήσεις:

1. Όσο ο αριθμός των επαναλήψεων αυξάνεται, τα a και b συγκλίνουν και το διάστημα αναζήτησης ελαττώνεται.
2. Όσο αυξάνεται το λ, οι απαιτούμενες επαναλήψεις του αλγορίθμου μέχρι την τερματική συνθήκη μειώνονται.
3. Για τις γραφικές παραστάσεις, για το λ επιλέχθηκαν οι τιμές λ=10^{-8}, λ=10^{-5}και λ=10^{-2}.

ΘΕΜΑ 3

- Ερώτημα 3.1:

Μελετούμε τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης fi(x), i = 1,2,3, καθώς μεταβάλλουμε το τελικό εύρος αναζήτησης l.

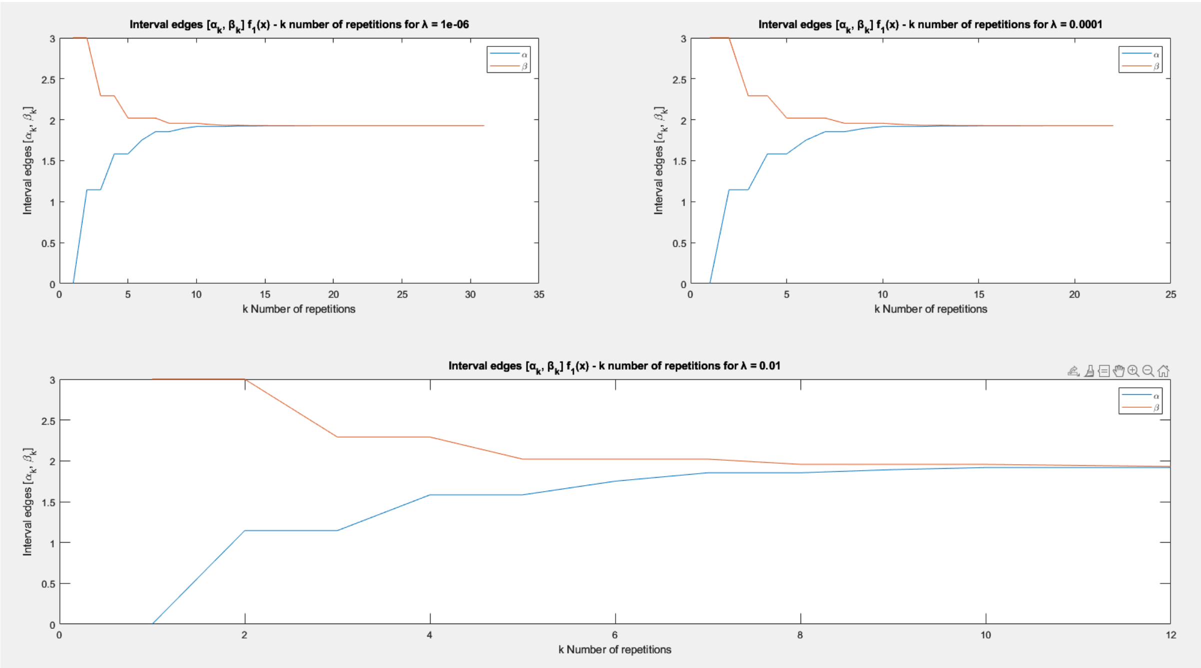


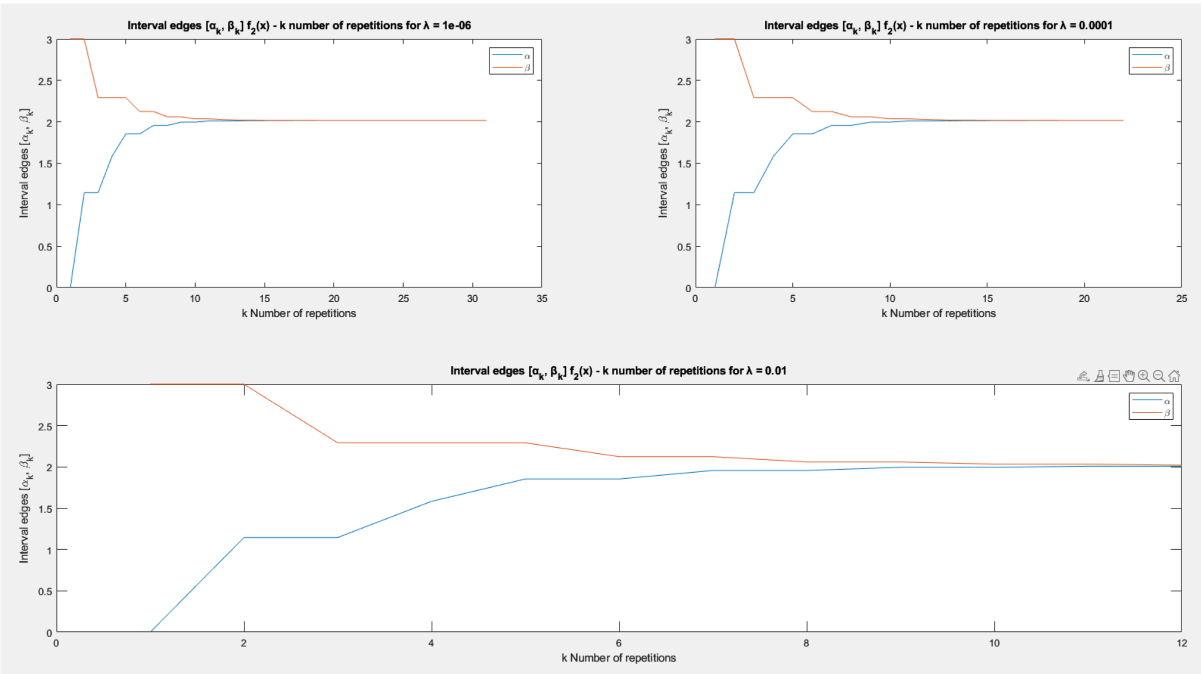
Παρατηρήσεις:

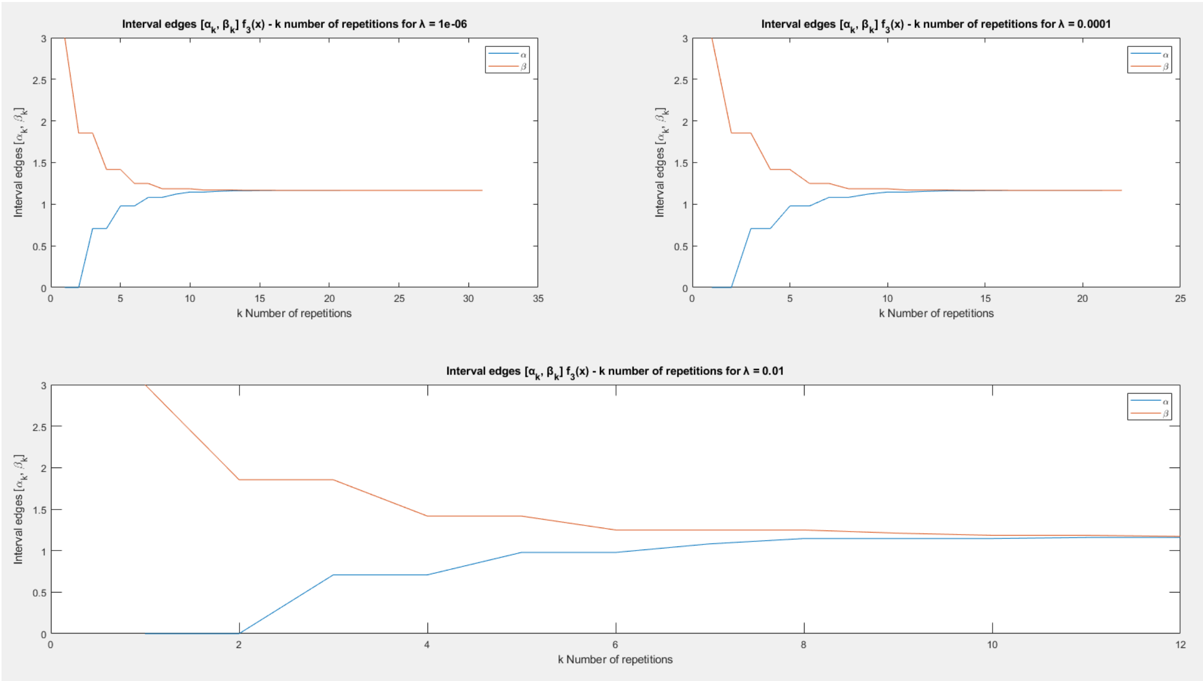
1. Καθώς το λ αυξάνεται, μειώνεται ανά διαστήματα ο αριθμός επαναλήψεων.
2. Οι τρεις γραφικές παραστάσεις συμπίπτουν και για τις τρεις συναρτήσεις.
3. Το γράφημα αποτελείται από 100 σημεία με το λ να έχει εύρος τιμών το [$3*10^{-6}$,0.1] και η σταθερά ε επιλέχθηκε ως ε=10^{-6}. Ο χρόνος εκτέλεσης του προγράμματος ήταν αισθητά μεγαλύτερος σε σχέση με των 2 προηγούμενων θεμάτων. Η καθυστέρηση έχει να κάνει με τη μέθοδο υπολογισμού των αριθμών Fibonacci στο $Matlab$.

- Ερώτημα 3.2:

Σε τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k,b_k]$ συναρτήσει του δείκτη βήματος k, δηλαδή (k,a_k) και $(k,\, b_k)$, για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l.







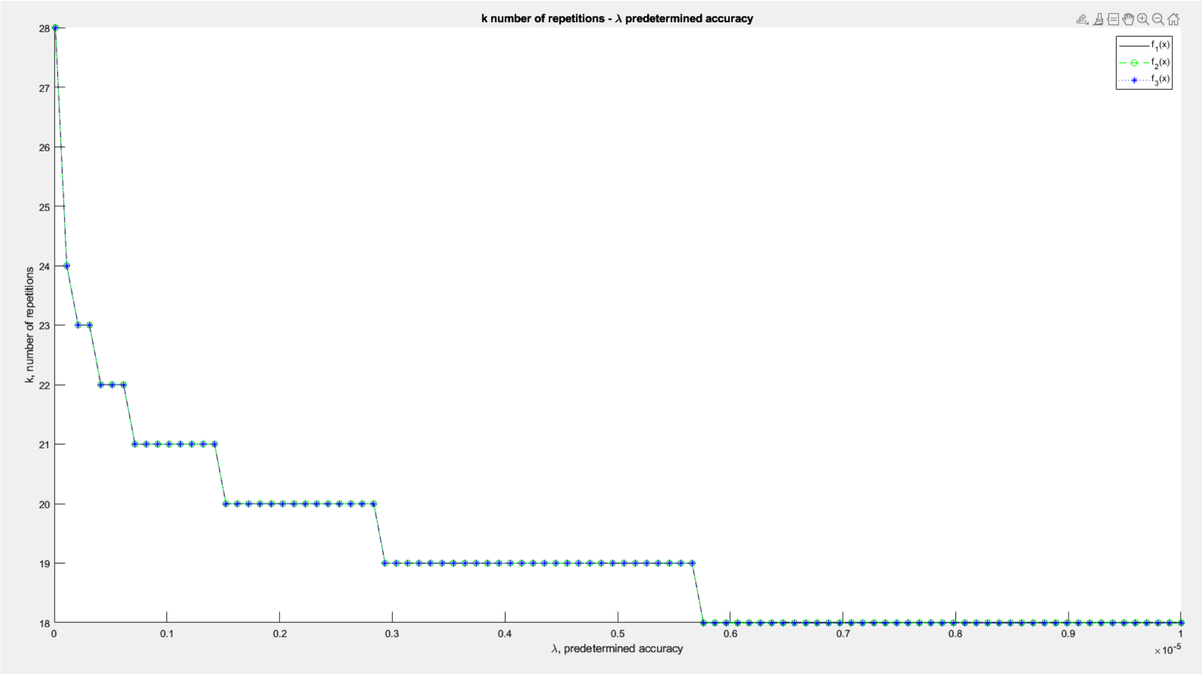
Παρατηρήσεις:

1. Όσο ο αριθμός των επαναλήψεων αυξάνεται, τα a και b συγκλίνουν και το διάστημα αναζήτησης ελαττώνεται.
2. Όσο αυξάνεται το λ, οι απαιτούμενες επαναλήψεις του αλγορίθμου μέχρι την τερματική συνθήκη μειώνονται.
3. Για τις γραφικές παραστάσεις, επιλέχθηκε ε=10^{-7}και για το λ επιλέχθηκαν οι τιμές λ=10^{-6},λ= 10^{-4},λ= 0.01.

ΘΕΜΑ 4

- Ερώτημα 4.1:

Μελετούμε τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης $f\text{i}(x)$, i = 1,2,3, καθώς μεταβάλλουμε το τελικό εύρος αναζήτησης l.

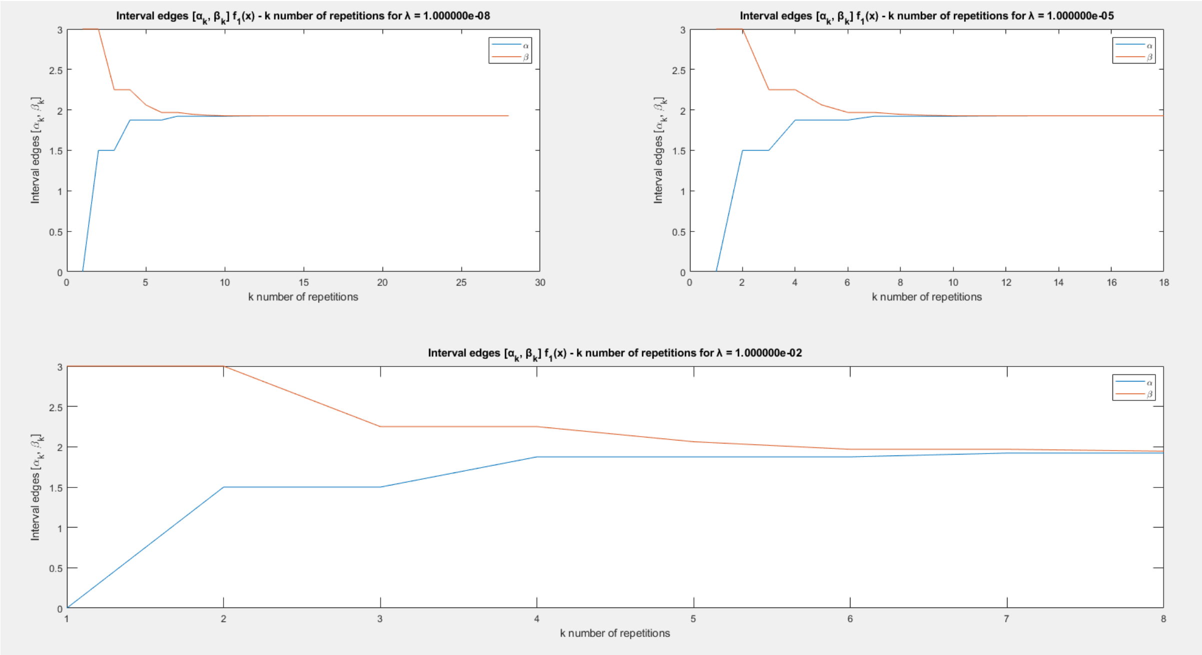


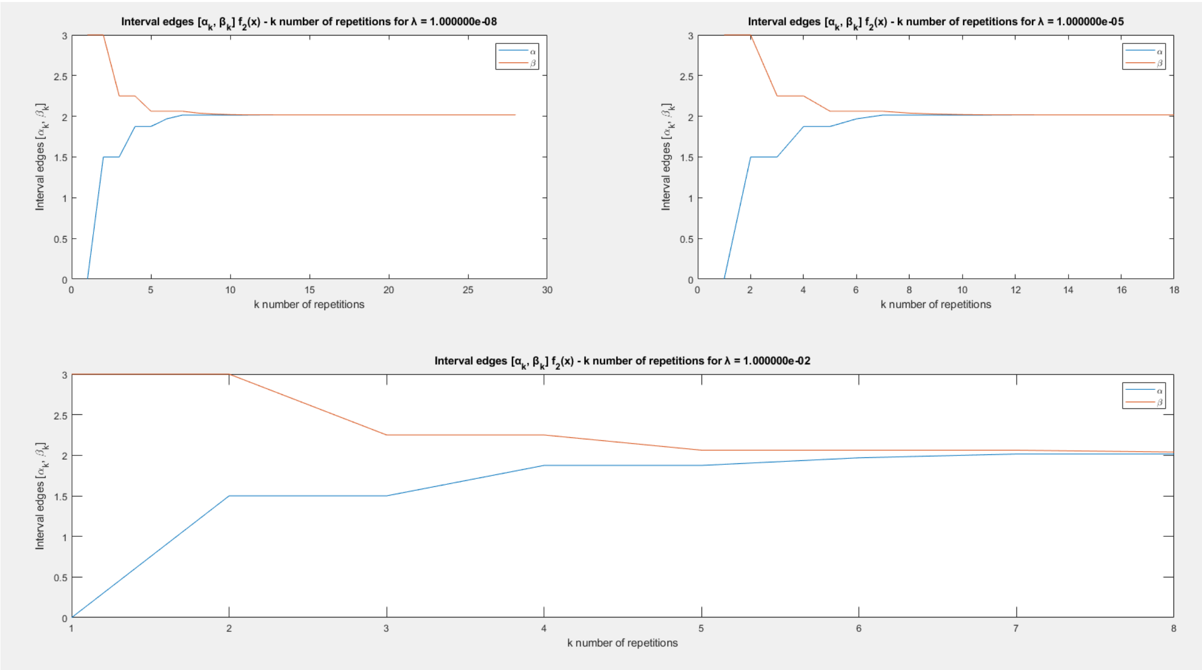
Παρατηρήσεις:

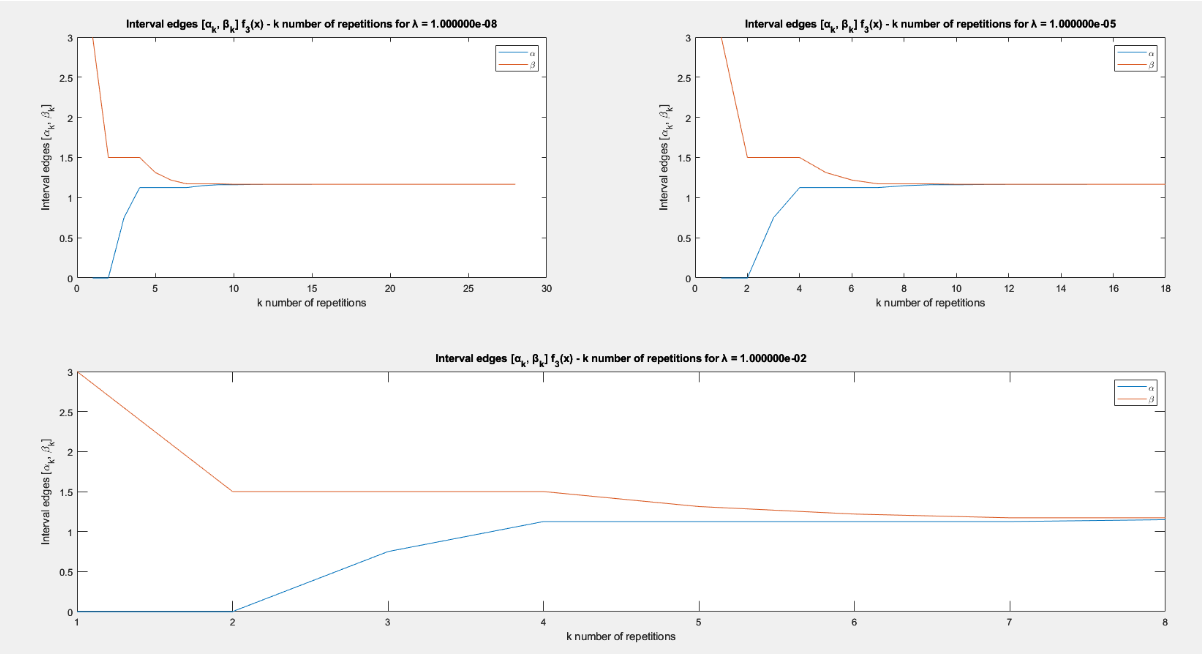
1. Καθώς το λ αυξάνεται, μειώνεται ανά διαστήματα ο αριθμός επαναλήψεων.
2. Οι τρεις γραφικές παραστάσεις συμπίπτουν και για τις τρεις συναρτήσεις.
3. Ο αριθμός των υπολογισμών είναι ίσος των επαναλήψεων.
4. Το γράφημα αποτελείται από 100 σημεία με το λ να έχει εύρος τιμών το $[10^{-8}, 10^{-5}]$.

- Ερώτημα 4.2:

Σε τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του δείκτη βήματος k, δηλαδή (k, a_k) και (k, b_k), για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l.





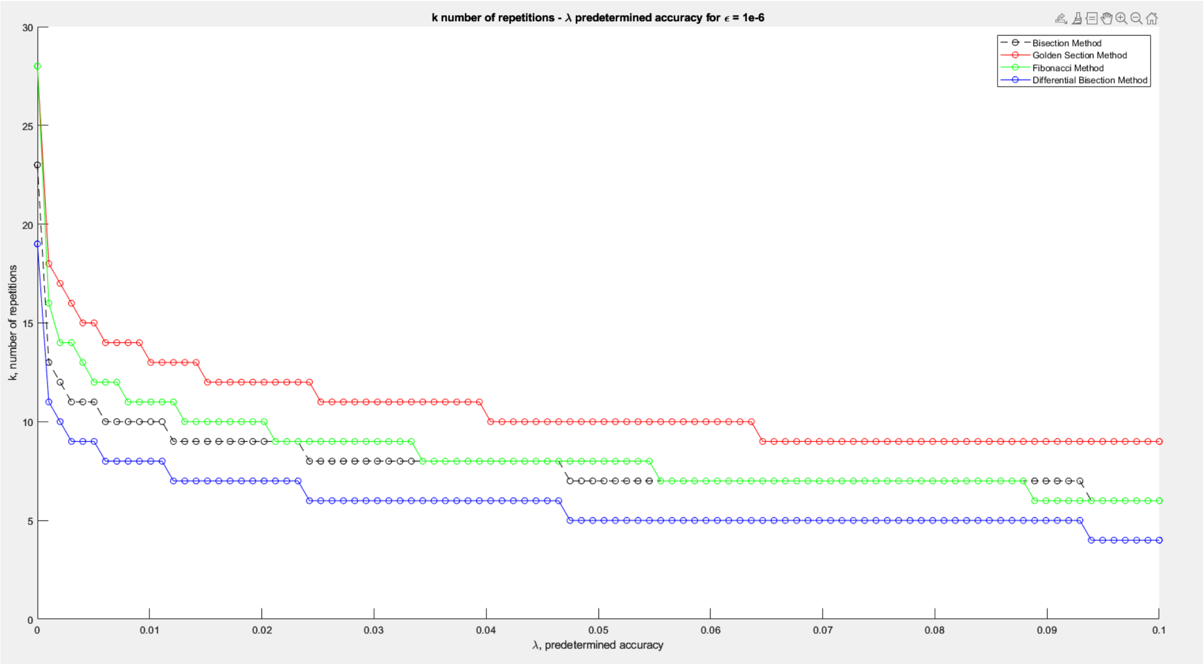


Παρατηρήσεις:

1. Όσο ο αριθμός των επαναλήψεων αυξάνεται, τα a και b συγκλίνουν και το διάστημα αναζήτησης ελαττώνεται.
2. Όσο αυξάνεται το λ, οι απαιτούμενες επαναλήψεις του αλγορίθμου μέχρι την τερματική συνθήκη μειώνονται.
3. Για τις γραφικές παραστάσεις, για το λ επιλέχθηκαν οι τιμές λ=10^{-8}, λ=10^{-5}και λ=10^{-2}.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ

Για την σύγκριση των μεθόδων κάνουμε μια γραφική παράσταση των αριθμών επανάληψης κάθε αλγορίθμου k, συναρτήσει της ακρίβειας λ. Η κάθε μέθοδος εφαρμόζεται στην συνάρτηση $f1(x)$(το ίδιο για f2 και για f3), καθώς οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων συμπίπτουν. Το εύρος τιμών του λ είναι το $[3*10^{-6}, 0.1]$.



Παρατηρήσεις:(comparison.m)

- Κατάταξη μεθόδων με βάση τον αριθμό των επαναλήψεων:
  1. Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου(λιγότερες επαναλήψεις).
  2. Μέθοδος της Διχοτόμου
  3. Μέθοδος Fibonacci
  4. Μέθοδος Χρυσού Τομέα(περισσότερες επαναλήψεις).

(comparison2.m)

Για λ=10^{-4} για την f2 με $f_{2min} = 2.0176875$:

• Η μέθοδος της Διχοτόμου με ε=10^{-6} έχει ως τελικό διάστημα το [2.01763782,2.01773137] μετά από 16 επαναλήψεις (b16−a16=9.36∗10^{-5})

• Η μέθοδος του Χρυσού Τομέα έχει ως τελικό διάστημα το [2.01764922,2.01772552] μετά από 23 επαναλήψεις (b23−a23=7.63∗10^{-5}).

• Η μέθοδος Fibonacci έχει ως τελικό διάστημα το [2.01766304,2.01772774] μετά από 22 επαναλήψεις (b22−a22=6.47∗10^{-5})

• Η μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου ελαχίστων διαφορών έχει ως τελικό διάστημα το [2.01745605,2.01782227] μετά από 14 επαναλήψεις (b14−a14=3.66∗10^{-4}).

Συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος με το μικρότερο τελικό διάστημα και άρα η πιο ακριβής είναι η μέθοδος του Fibonacci, μετά ακολουθεί η μέθοδος του Χρυσού τομέα και μετά η μέθοδος της Διχοτόμου, με μικρές διαφορές μεταξύ τους. Η μέθοδος Διχοτόμου με παραγώγιση αν και έχει τις λιγότερες επαναλήψεις, είναι η μέθοδος με το μεγαλύτερο τελικό διάστημα. Η μέθοδος Fibonacci είναι αυτή που απαιτεί τον περισσότερο χρόνο, καθώς υπολογίζει ξανά και ξανά τις τιμές Fibonacci, βέβαια αυτό μπορεί να αποφευχθεί αν τροποποιήσουμε τον κώδικα και αποθηκεύουμε τις προηγούμενες τιμές σε έναν πίνακα. Καλή επιλογή αποτελεί η μέθοδος Διχοτόμου, αφού απαιτεί αρκετά λιγότερες επαναλήψεις από τις μεθόδους

Fibonacci και Χρυσού Τομέα, και είναι αρκετά ακριβής. Η μέθοδος Διχοτόμου με χρήση παραγώγου είναι καλή επιλογή αν αναζητείται μια γρήγορη εκτίμηση του ελαχίστου.