17/11/2023

Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Εργασια 2

Μάριος Τζαμτζής 10038

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία ζητήθηκε η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $f(x,y)=x^3e^{-x^2-y^4}$, με την χρήση μεθόδων αναζήτησης ελαχίστου. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν ήταν:

- Η μέθοδος της Μέγιστης Καθόδου (Steepest Descent)
- Η μέθοδος Newton
- Η μέθοδος Levenberg-Marquardt

Ως αρχικά σημεία $(x0,y0)$ δόθηκαν τα:

- (0,0)
- (-1,-1)
- (1,1)

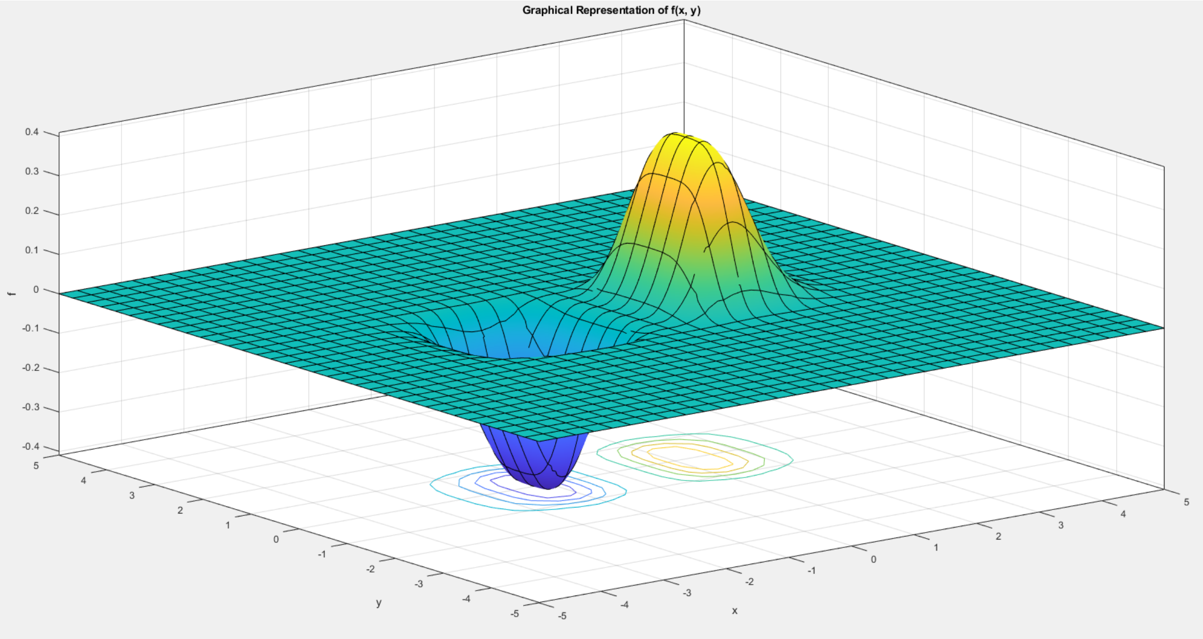
Το βήμα γ_k επιλέχθηκε

- Τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_k+\gamma_k d_k)$
- Σταθερό
- Βάσει του κανόνα Armijo

Για την περίπτωση που το γk επιλέγεται τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_k+\gamma_k d_k)$, χρησιμοποιείται η συνάρτηση "$optimalGamma.m$", η οποία ελαχιστοποιεί την $f(x_k+\gamma_k d_k)$ με την χρήση της μεθόδου Fibonacci, με εύρος αναζήτησης το [0,10]. Για την περίπτωση που το βήμα γ_k παραμένει σταθερό, επιλέγεται η τιμή $\gamma_k=0.5$, ενώ για τον κανόνα Armijo χρησιμοποιείται η συνάρτηση "$armijo.m$" με αρχική εκτίμηση $s=10, \alpha=0.01$ $και$ $\beta=0.2$.
Όλες οι μέθοδοι υλοποιήθηκαν στο περιβάλλον του $Matlab$.

ΘΕΜΑ 1

Στο πρώτο θέμα ζητείται η σχεδίαση της f:



Στην συγκεκριμένη άσκηση χρησιμοποιήθηκαν symbolic functions αντί για anonymous functions και έτσι πήραμε την γενική εικόνα της μορφής της f.

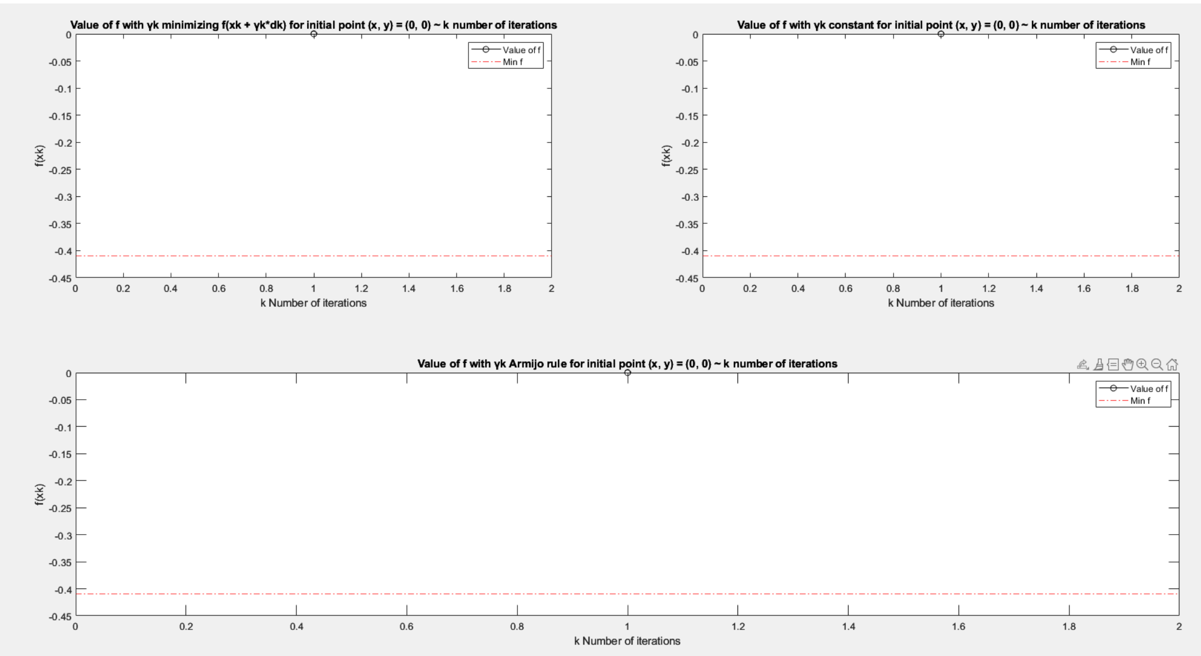
ΘΕΜΑ 2

Υλοποίηση Μεθόδου Της Μέγιστης Καθόδου

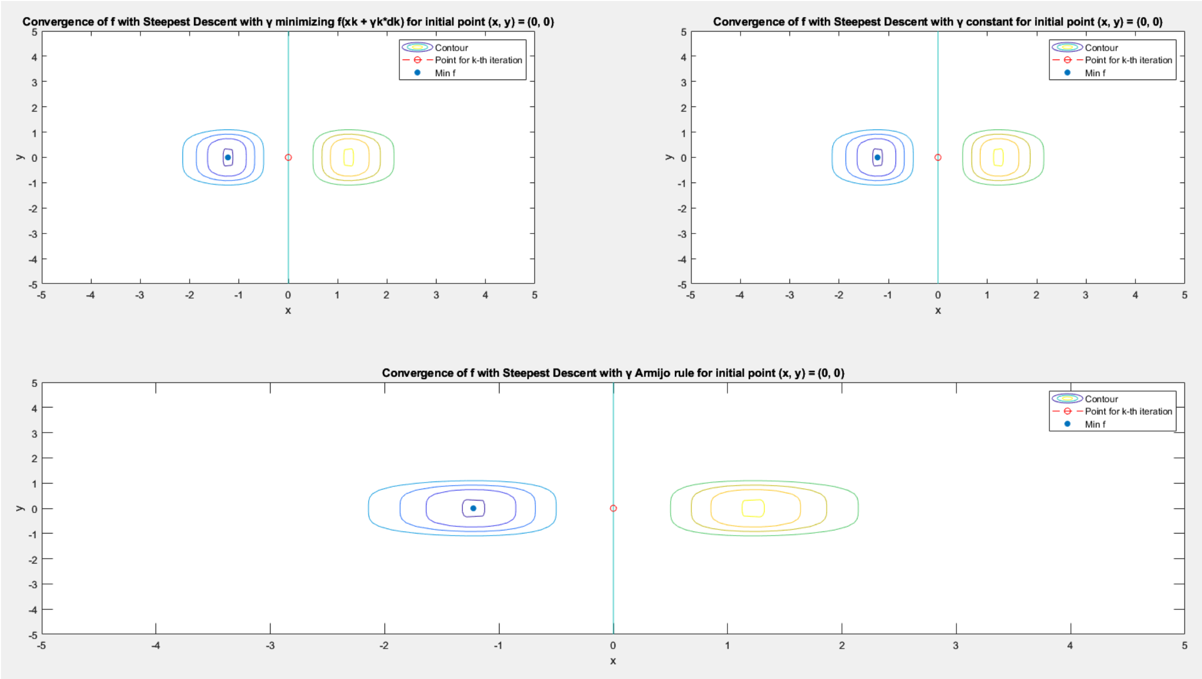
Για την υλοποίηση της μεθόδου της Μέγιστης Καθόδου χρησιμοποιήθηκε ο Αλγόριθμος του βιβλίου. Η συνάρτηση steepestDescent(epsilon, x0, f, option) δέχεται ως ορίσματα την σταθερά τερματισμού ε, το αρχικό σημείο (x_0,y_0) την συνάρτηση f και την επιλογή $option$, η οποία καθορίζει τον τρόπο που επιλέγεται το γ_k. Οι επιλογές είναι "$optimal$" (τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_k+\gamma_k d_k))$, "$constant$» (σταθερό) και «$armijo$» (σύμφωνα με τον κανόνα Armijo). Η συνάρτηση επιστρέφει τον αριθμό επαναλήψεων k, έναν πίνακα με όλα τα γ_k που επιλέχθηκαν, έναν πίνακα με τα (x_k,y_k) και το ελάχιστο της συνάρτησης. Για την εύρεση του $\nabla f(x_k,y_k)$ χρησιμοποιείται η συνάρτηση $jacobian$, η οποία επιστρέφει τον Ιακωβιανό πίνακα της συνάρτησης. Για τον υπολογισμό της τιμής της f και του ∇f δημιουργούνται οι πίνακες fx και $jacx$. Σε όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιείται σταθερά τερματισμού $\varepsilon=10^{-4}$.

i) Για αρχικό σημείο το (x0,y0) = (0,0)

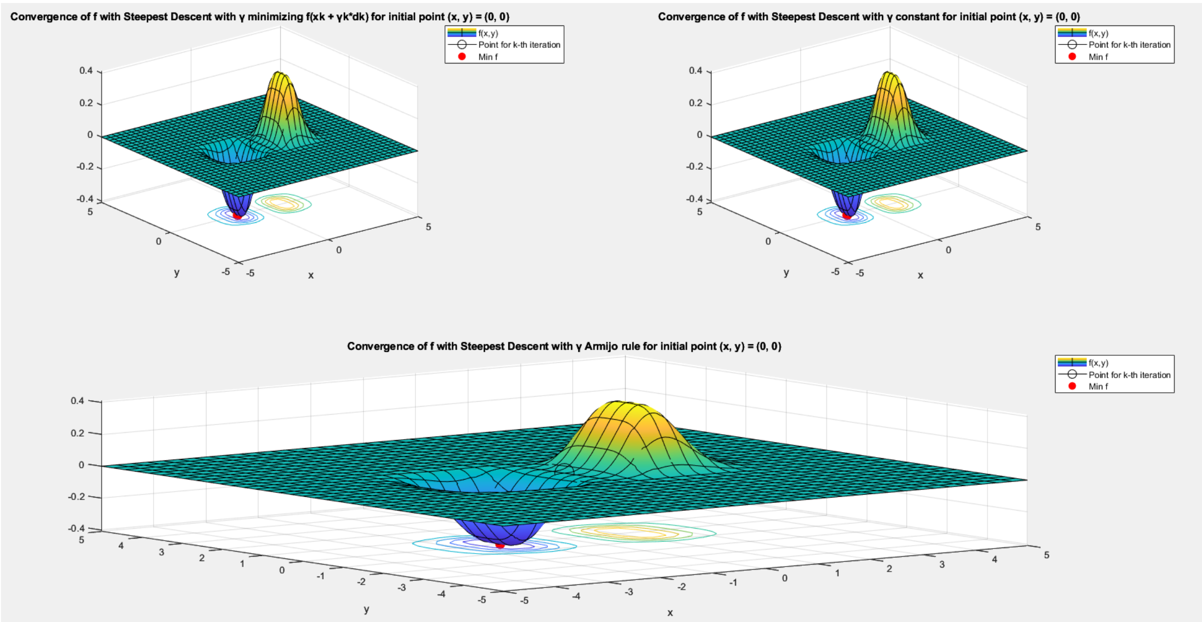
Α)Γράφημα για την σύγκλιση της τιμής της f συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων του αλγορίθμου k:



B)Γράφημα για την σύγκλιση των υποψήφιων σημείων ελαχίστου (xk, yk) με κατεύθυνση προς το ελάχιστο σημείο της f:



Γ) Τρισδιάστατη απεικόνιση της σύγκλισης της f με κατεύθυνση προς την ελάχιστη τιμή της:

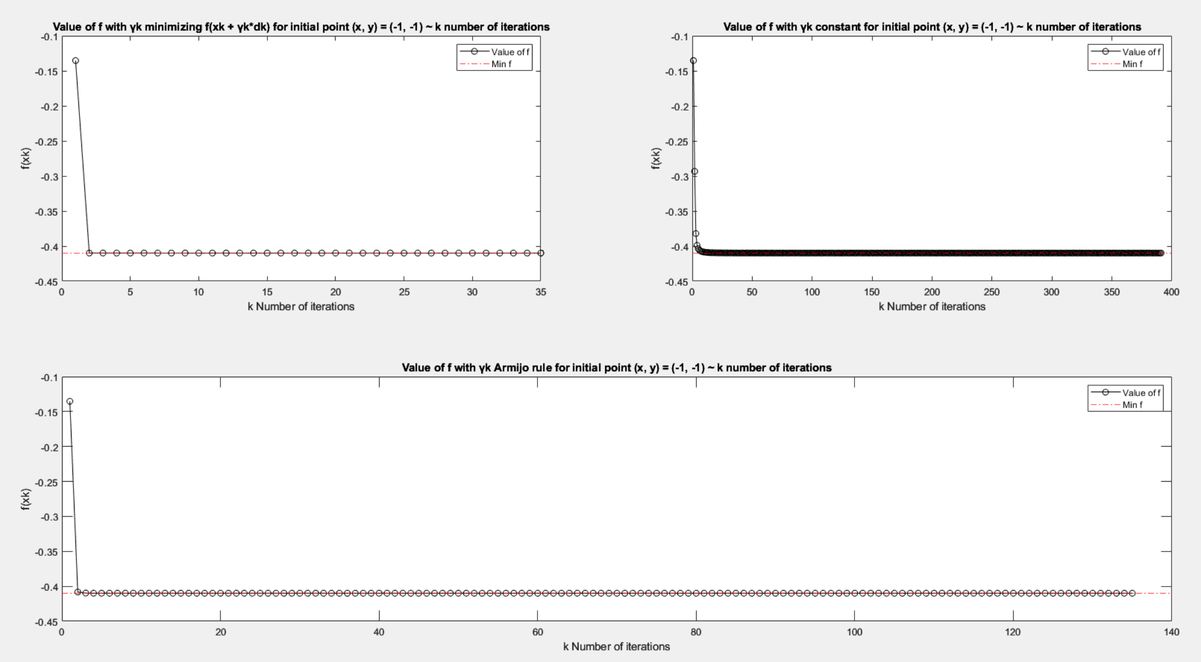


Συμπεράσματα:

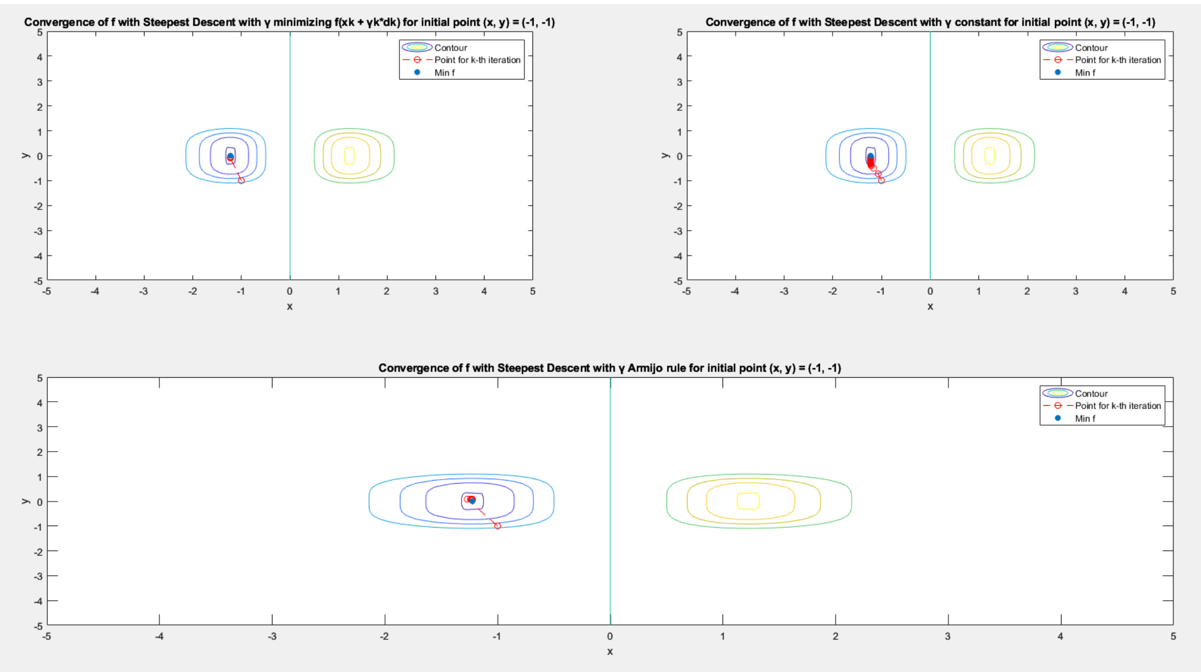
Για αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (0,0)$, ανεξαρτήτως βήματος, ο αλγόριθμος δεν βρίσκει κανένα σημείο πέρα από την αρχική εκτίμηση (x_0, y_0), καθώς για το αρχικό σημείο, $\nabla f(x_0, y_0) = 0 < \varepsilon$, φτάνοντας στην τερματική συνθήκη.

ii) Για αρχικό σημείο το (x0,y0) = (-1,-1)

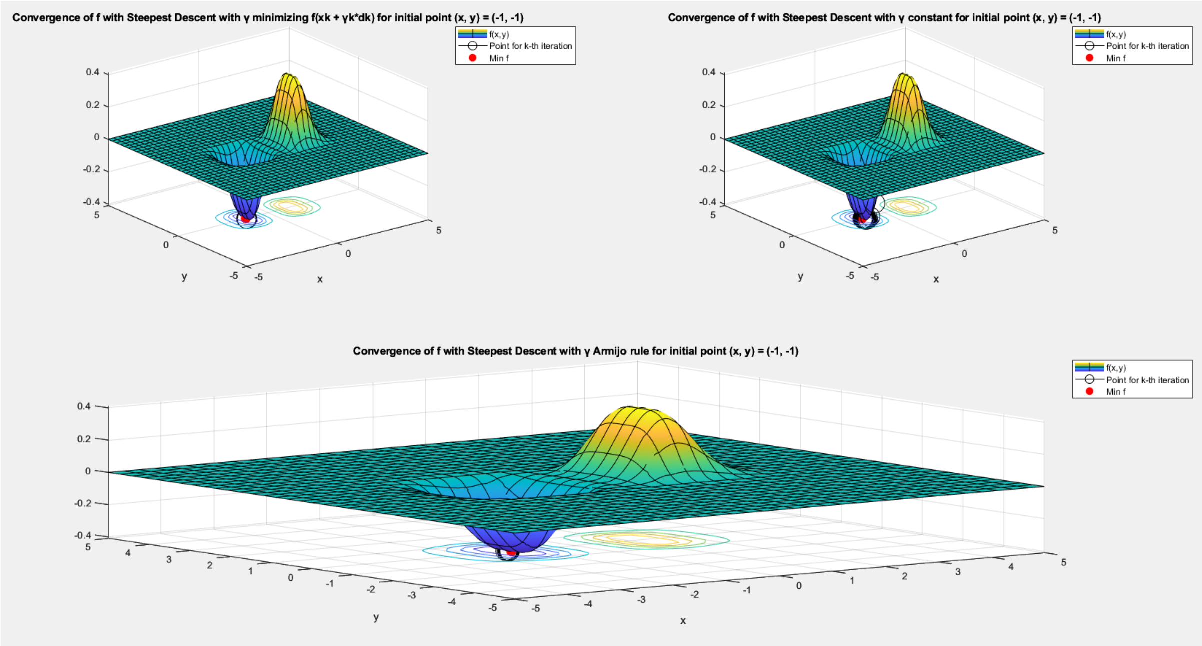
A)Γράφημα για την σύγκλιση της τιμής της f συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων του αλγορίθμου k:



B)Γράφημα για την σύγκλιση των υποψήφιων σημείων ελαχίστου (xk, yk) με κατεύθυνση προς το ελάχιστο σημείο της f:



Γ) Τρισδιάστατη απεικόνιση της σύγκλισης της f με κατεύθυνση προς την ελάχιστη τιμή της:



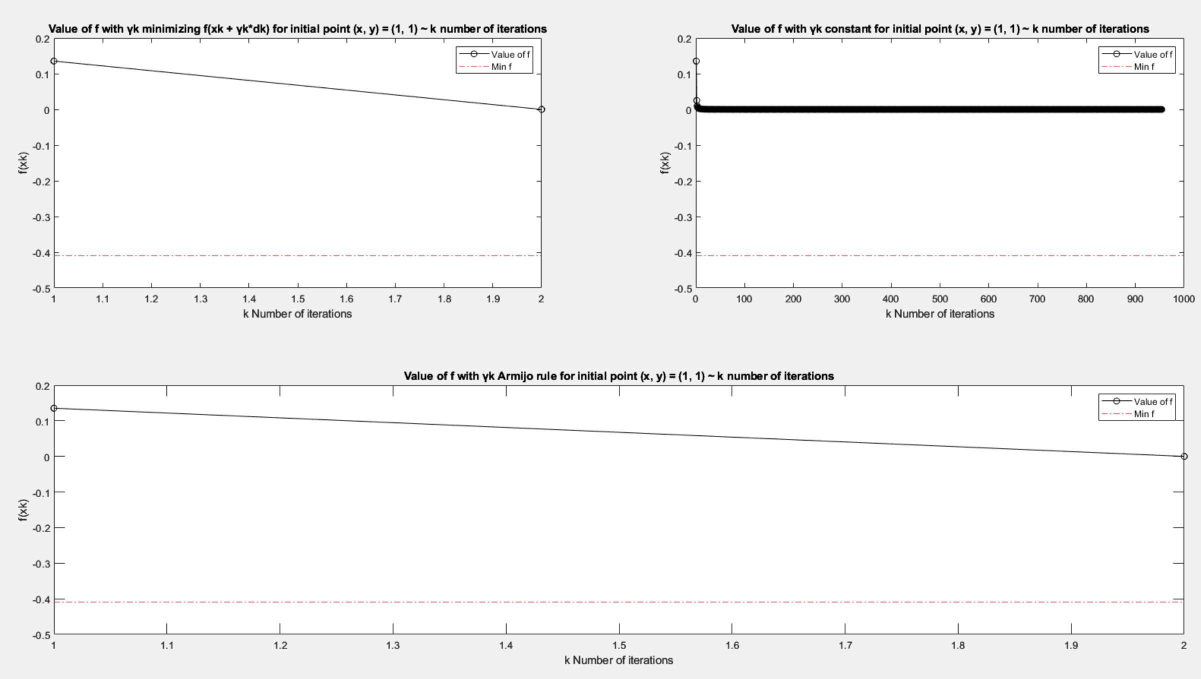
Συμπεράσματα:

Παρατηρώντας την (Α) εικόνα φαίνεται πως για γ_k μεταβαλλόμενο και τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται η $f(x_k+\gamma_k d_k)$, ο αριθμός των επαναλήψεων του κώδικα είναι ο μικρότερος με k=35, ακολουθεί ο αριθμός επαναλήψεων για γ_k σύμφωνα με τον κανόνα Armijo με k=135 και για σταθερό $\gamma_k = 0.5$ ο αριθμός επαναλήψεων είναι k=391. Η συνάρτηση συγκλίνει προς το ελάχιστό της με κάθε επανάληψη όπως αναμενόταν.

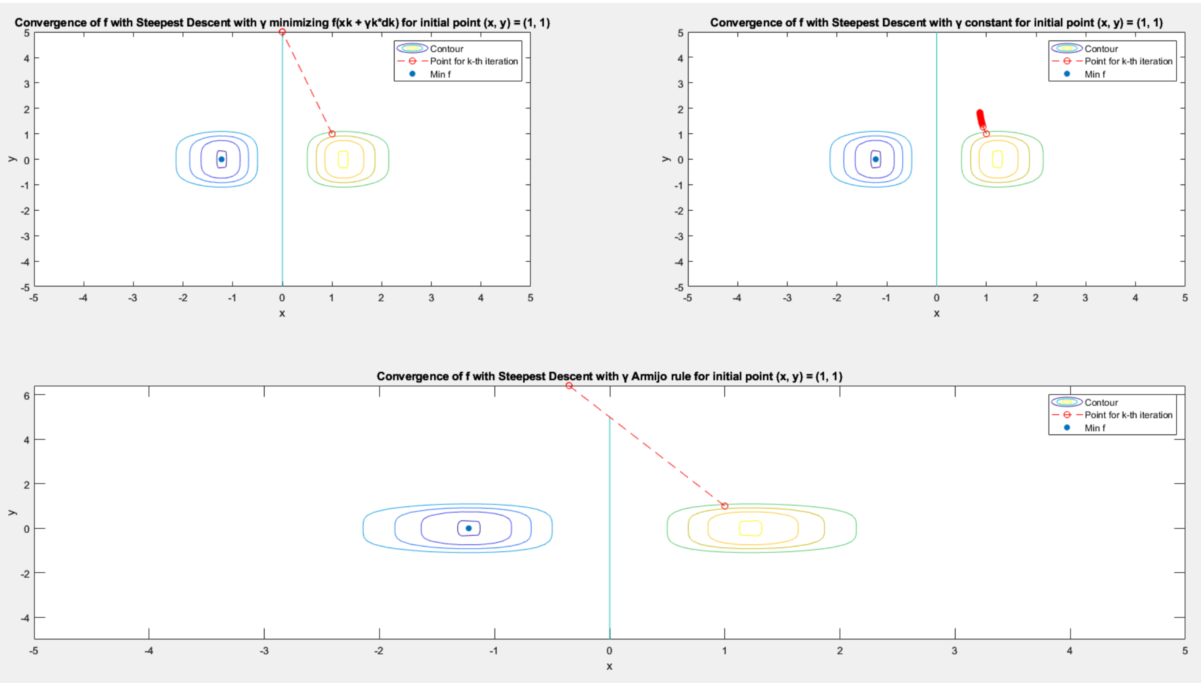
Με χρήση βήματος γk τέτοιου ώστε να ελαχιστοποιείται η $f(x_k+\gamma_k d_k)$, η ευκλείδεια απόσταση από το ελάχιστο ίση με 0.03856. Χρησιμοποιώντας βήμα βάσει του κανόνα Armijo η ευκλείδεια απόσταση από το ελάχιστο της συνάρτησης είναι ίση με 0.0378. Για σταθερό γk=0.5 η ευκλείδεια απόσταση από το ελάχιστο είναι ίση με 0.03933.

iii) Για αρχικό σημείο το (x0,y0) = (1,1)

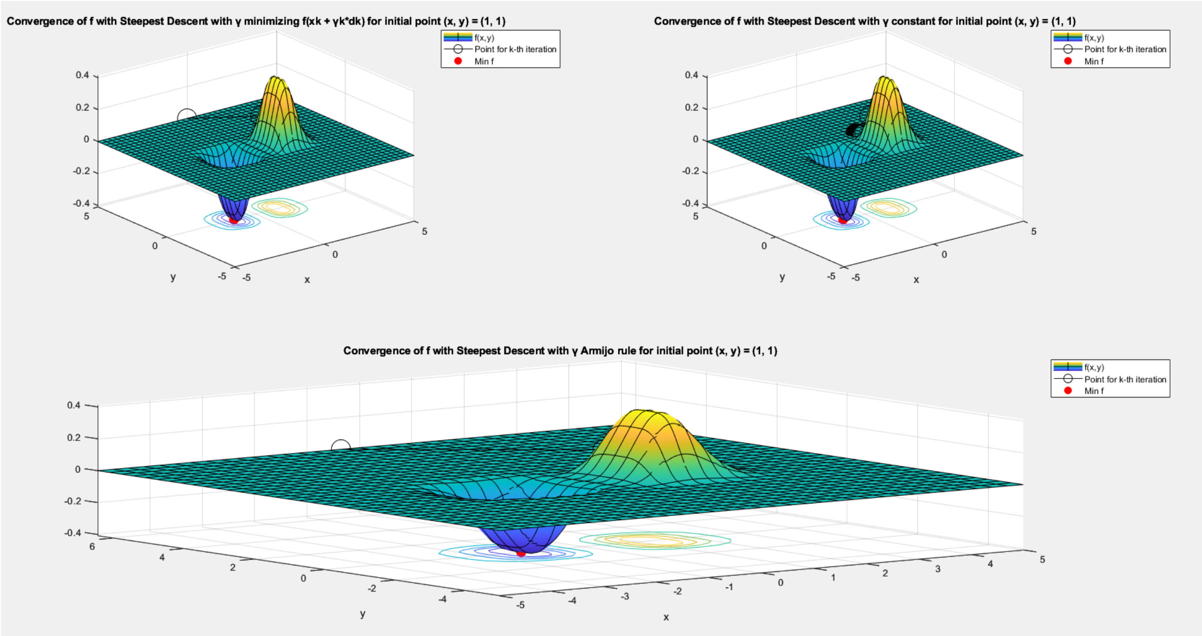
A)Γράφημα για την σύγκλιση της τιμής της f συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων του αλγορίθμου k:



B)Γράφημα για την σύγκλιση των υποψήφιων σημείων ελαχίστου (xk, yk) με κατεύθυνση προς το ελάχιστο σημείο της f:



Γ) Τρισδιάστατη απεικόνιση της σύγκλισης της f με κατεύθυνση προς την ελάχιστη τιμή της:



Συμπεράσματα:

Για αρχικό σημείο το $(x_0,y_0)=(1,1)$, ανεξαρτήτως βήματος, ο αλγόριθμος αδυνατεί να βρει το ελάχιστο της συνάρτησης, ομοίως και για οποιοδήποτε αρχικό σημείο (x_0,y_0) για το οποίο ισχύει $f(x_0,y_0)>0$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο αλγόριθμος σταματάει την αναζήτηση όταν φτάνει σε ένα σημείο στο οποίο ισχύει $f(x_k,y_k)\approx 0$, γιατί εκεί θα ισχύει $\nabla f<\varepsilon$.

Από την (A) εικόνα φαίνεται ότι για $\gamma k=0.5$ ο αλγόριθμος εκτελείται 954 φορές, ενώ για τις άλλες δύο περιπτώσεις εκτελείται 2 φορές. Το μεγαλύτερο αρχικό βήμα γk τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται η $f(x_k+\gamma_k d_k)$, και το μεγαλύτερο αρχικό βήμα βάσει του κανόνα Armijo ευθύνονται για τον γρηγορότερο τερματισμό του αλγορίθμου.

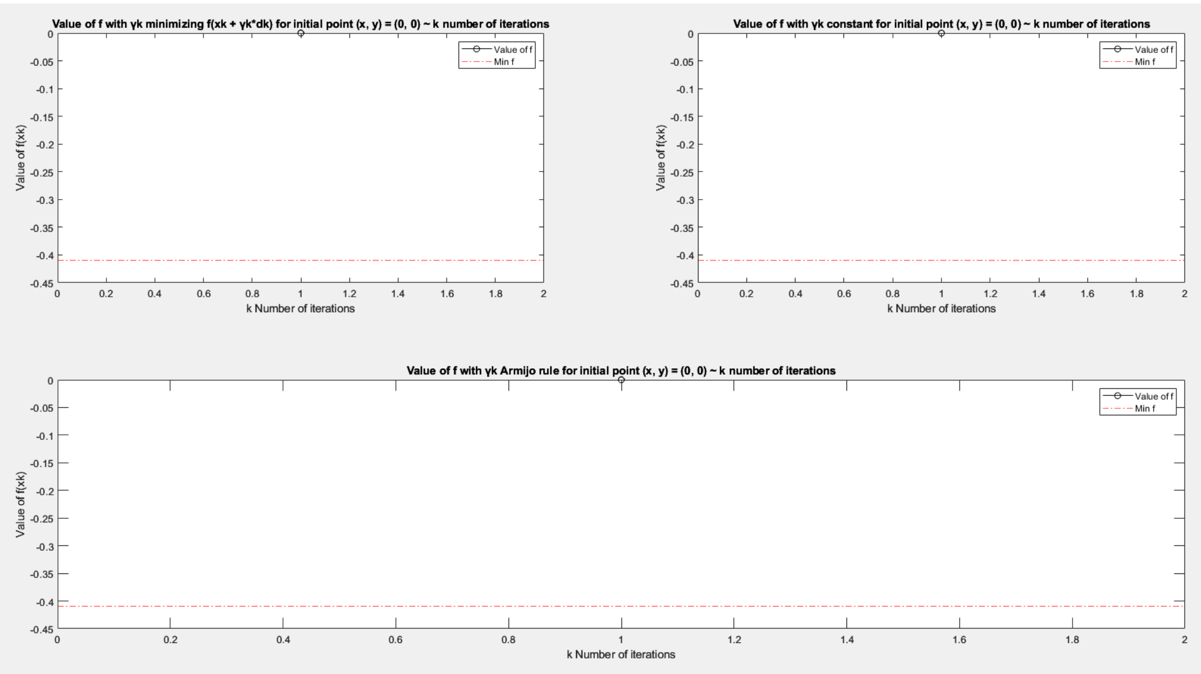
ΘΕΜΑ 3

Υλοποίηση Μεθόδου Newton

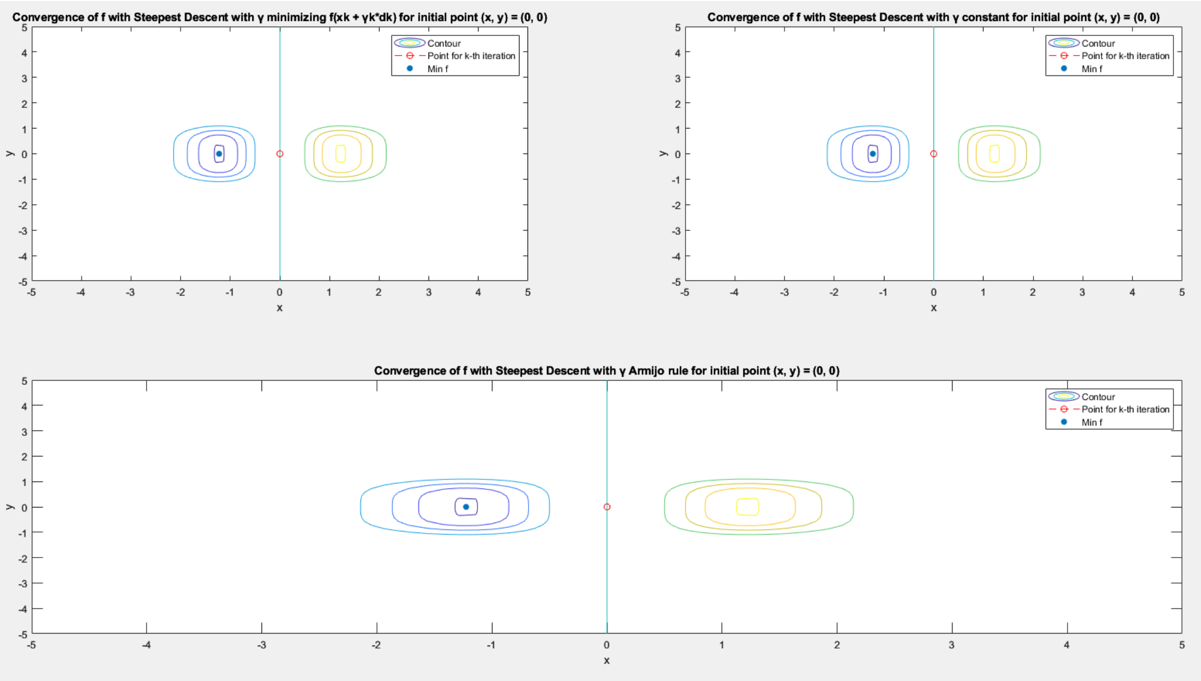
Για την υλοποίηση της μεθόδου Newton χρησιμοποιήθηκε ο Αλγόριθμος του βιβλίου. Η συνάρτηση newton(epsilon, x0, f, option) δέχεται ως ορίσματα την σταθερά τερματισμού ε, το αρχικό σημείο (x_0,y_0), την συνάρτηση f και την επιλογή *option*, η οποία καθορίζει τον τρόπο που επιλέγεται το γ_k. Οι επιλογές είναι “*optimal*” (τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την f), “*constant*" (σταθερό) και "*armijo*" (σύμφωνα με τον κανόνα Armijo). Η συνάρτηση επιστρέφει τον αριθμό επαναλήψεων k, έναν πίνακα με όλα τα γ_k που επιλέχθηκαν, έναν πίνακα με τα (x_k,y_k) το ελάχιστο της συνάρτησης καθώς και την ευκλείδεια απόσταση του τελικού σημείου από το ελάχιστο. Για την εύρεση του $\nabla f(x_k,y_k)$ χρησιμοποιείται η συνάρτηση *jacobian*, η οποία επιστρέφει τον Ιακωβιανό πίνακα της συνάρτησης. Για την εύρεση του $\nabla^2 f(x_k,y_k)$ χρησιμοποιείται η συνάρτηση *hessian*, επιστρέφοντας τον Εσσιανό πίνακα της συνάρτησης. Για τον υπολογισμό της τιμής της f,του ∇f και του $\nabla^2 f$ δημιουργούνται οι πίνακες fx, $jacx$ και $hessx$. Σε όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιείται σταθερά τερματισμού ε=10^{-4}.

i) Για αρχικό σημείο το (x_0,y_0) = (0,0)

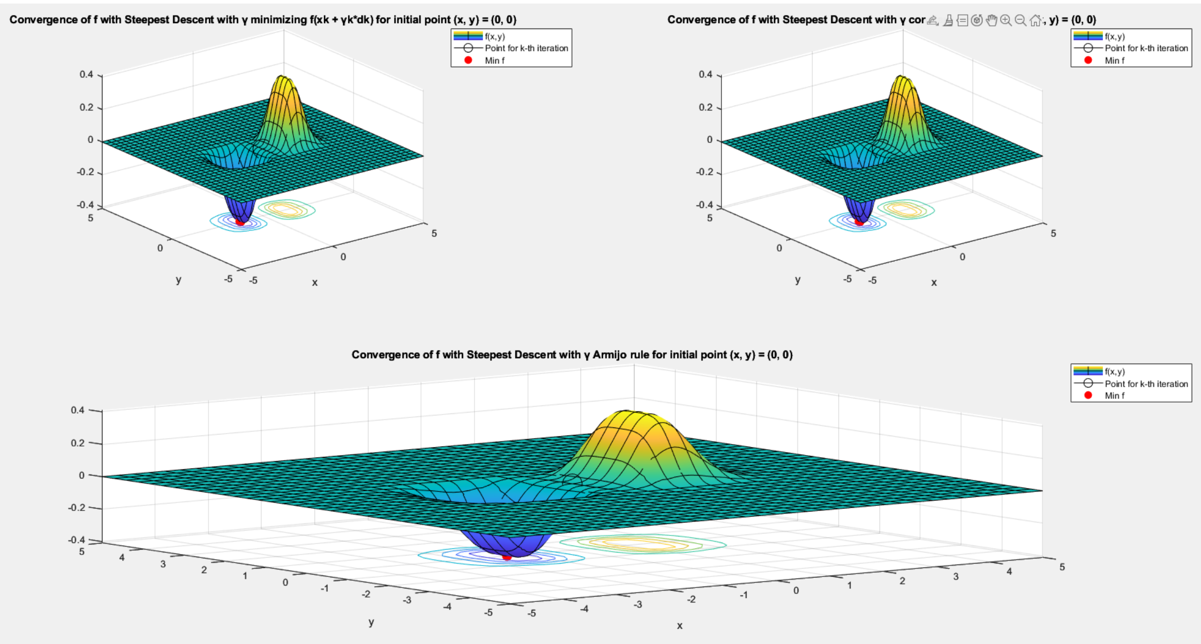
Α)Γράφημα για την σύγκλιση της τιμής της f συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων του αλγορίθμου k:



B)Γράφημα για την σύγκλιση των υποψήφιων σημείων ελαχίστου (x_k, y_k) με κατεύθυνση προς το ελάχιστο σημείο της f:



Γ) Τρισδιάστατη απεικόνιση της σύγκλισης της f με κατεύθυνση προς την ελάχιστη τιμή της:



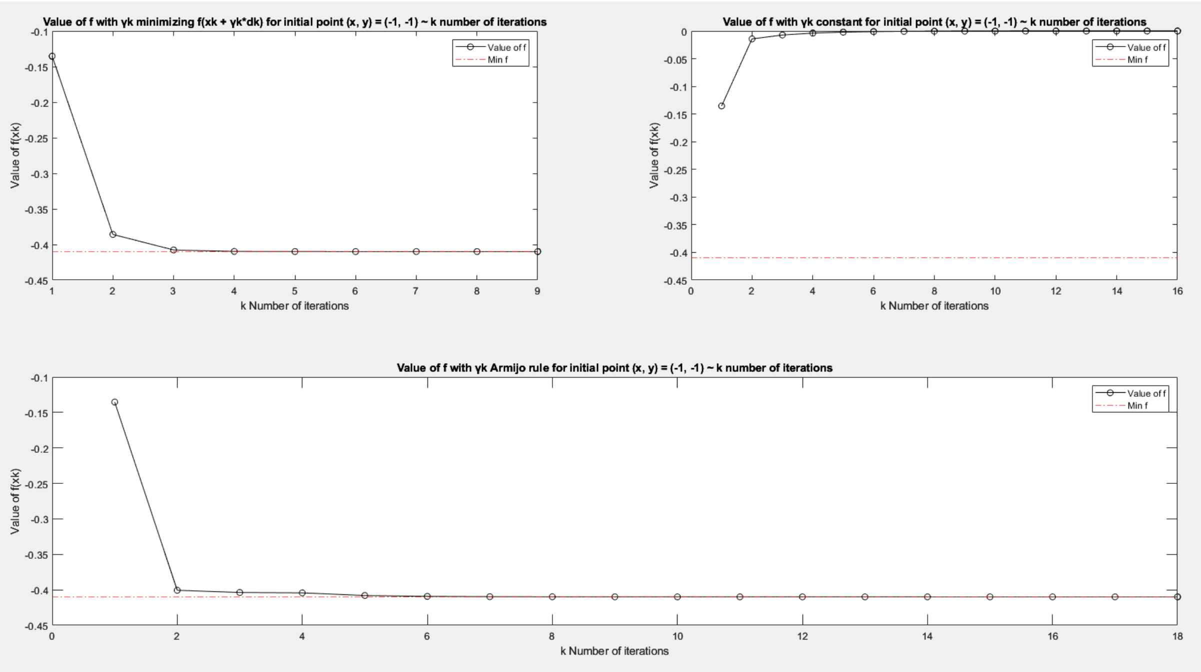
Συμπεράσματα:

Για αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (0,0)$, ανεξαρτήτως βήματος, ο αλγόριθμος δεν βρίσκει κανένα σημείο πέρα από την αρχική εκτίμηση

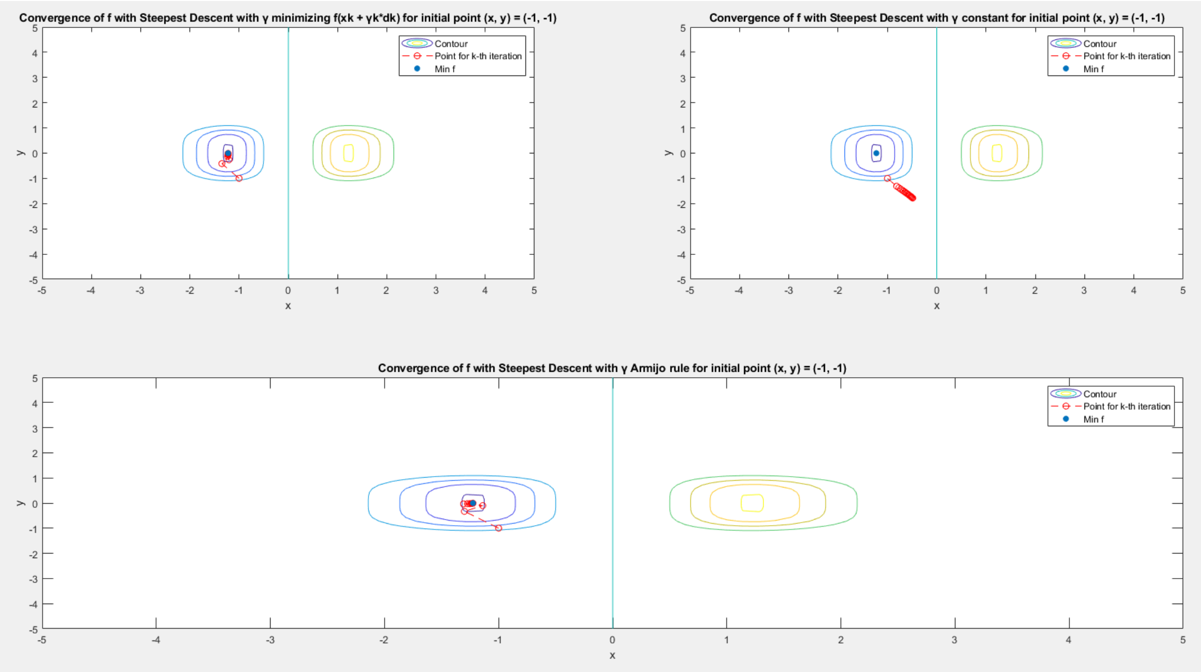
(x_0, y_0), καθώς για το αρχικό σημείο, $\nabla f(x_0, y_0) = 0 < \varepsilon$, φτάνοντας στην τερματική συνθήκη.

ii) Για αρχικό σημείο το $(x_0,y_0) = (-1,-1)$

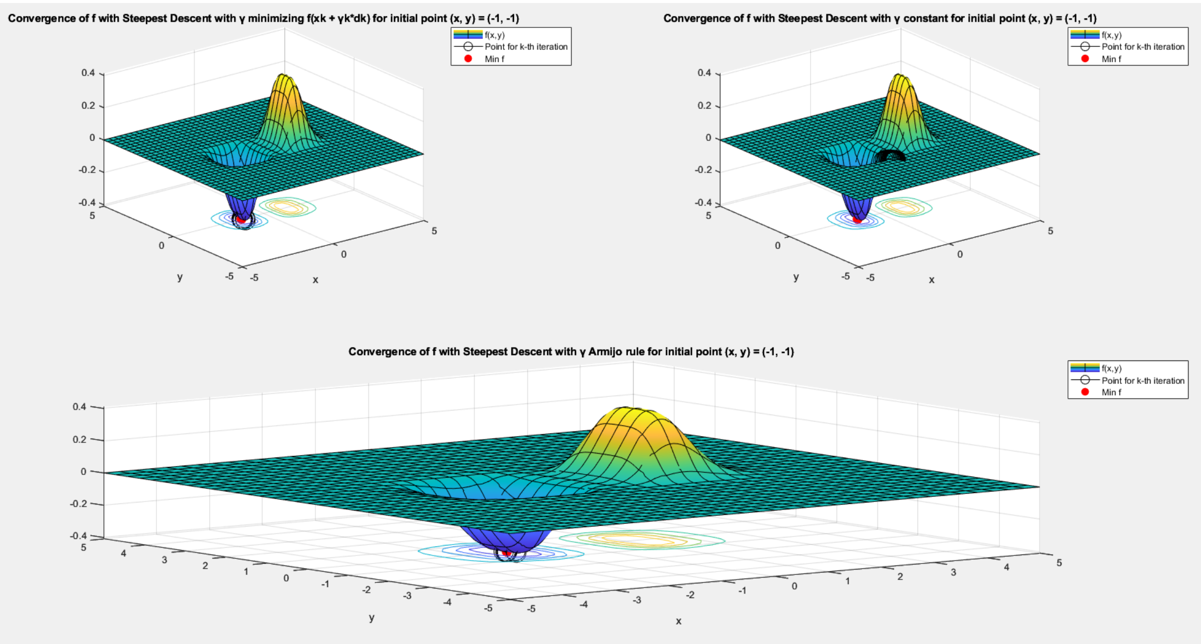
A)Γράφημα για την σύγκλιση της τιμής της f συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων του αλγορίθμου k:



B)Γράφημα για την σύγκλιση των υποψήφιων σημείων ελαχίστου (x_k,y_k) με κατεύθυνση προς το ελάχιστο σημείο της f:



Γ) Τρισδιάστατη απεικόνιση της σύγκλισης της f με κατεύθυνση προς την ελάχιστη τιμή της:



Συμπεράσματα:

Στη μέθοδο Newton, είναι σημαντικό ο Εσσιανός πίνακας $\nabla^2 f(x) = [\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}]_{i,j=1,2,\ldots,n}$ να είναι θετικά ορισμένος για κάθε σημείο (x_k,y_k), προκειμένου η συνάρτηση να συγκλείσει προς ελάχιστο. Αν ο πίνακας $\nabla^2 f(x_k)$ δεν είναι θετικά ορισμένος, τότε η κατεύθυνση $d_k = -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$ οδηγεί προς ένα σαγματικό σημείο και όχι προς το

ελάχιστο. Στην περίπτωση αρχικού σημείου $(x_0,y_0)=(-1,-1)$ ισχύει ότι:
$\nabla^2 f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} 0.5413 & 0.5413 \\ 0.5413 & -0.5413 \end{bmatrix}$

Οι ιδιοτιμές του οποίου είναι:

$\lambda_1 = -0.7656$

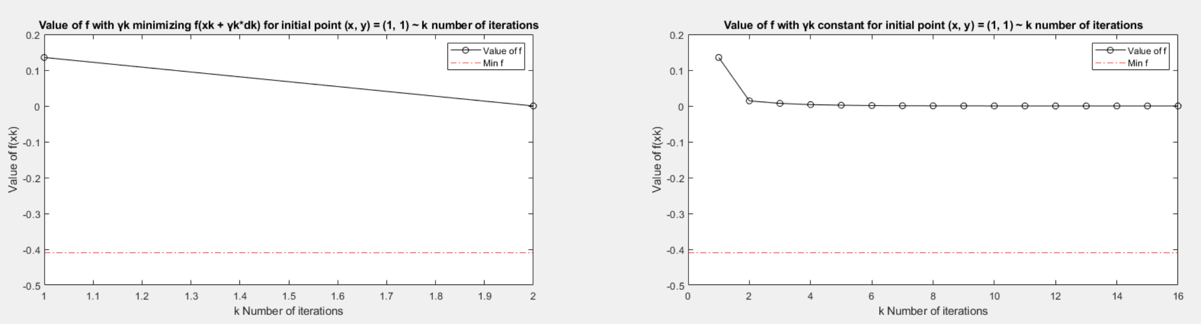
$\lambda_2 = 0.7656$

Επειδή οι ιδιοτιμές του $\nabla^2 f(x_0,y_0)$ δεν είναι όλες θετικές, δεν είναι θετικά ορισμένος και κατά συνέπεια ο αλγόριθμος Newton για αρχικό σημείο $(x_0,y_0)=(-1,-1)$ δεν συγκλίνει σε ελάχιστο. Όμως, αν το αρχικό βήμα $\gamma 1$ είναι αρνητικό, τότε για όλα τα υπόλοιπα σημεία (x_k,y_k) ισχύει ότι ο πίνακας $\nabla^2 f(x_k,y_k)$ είναι θετικά ορισμένος και τελικά ο αλγόριθμος συγκλίνει προς το ελάχιστο της $f(x,y)$. Μετατρέποντας τον αλγόριθμο *optimalGamma*, ώστε το αρχικό εύρος αναζήτησης του ελαχίστου της $f(x_k+\gamma_k d_k)$ να είναι το $[-2,10]$, παρατηρείται ότι το αρχικό $\gamma 1$ που επιλέγεται είναι το $\gamma 1 = -0.98$. Αν στο πρώτο βήμα του αλγορίθμου *newton* επιλεχθεί ως $\gamma 1=-0.98$, τότε και για την περίπτωση που το γk επιλέγεται βάσει με τον κανόνα Armijo, ο αλγόριθμος συγκλίνει προς το ελάχιστο.

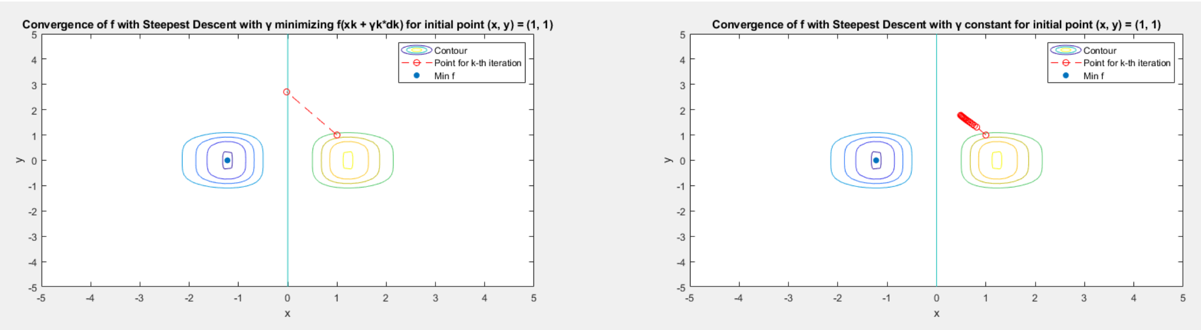
Παρατηρώντας την εικόνα (Α), ο αλγόριθμος για γ_k τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_k+\gamma_k d_k)$ τερματίζει στις 9 επαναλήψεις, ενώ για γ_k σύμφωνα με τον κανόνα Armijo ο αλγόριθμος τερματίζει στις 18 επαναλήψεις. Για σταθερό $\gamma k=0.5$, η συνάρτηση δεν συγκλίνει προς το ελάχιστο, καθώς ο $\nabla^2 f(x_0,y_0)$ δεν είναι θετικά ορισμένος. Για την περίπτωση που το γ_k επιλέγεται τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_k+\gamma_k d_k)$ η ευκλείδεια απόσταση του οποίου από το ελάχιστο είναι ίση με 0.00737. Για την περίπτωση που το γk ακολουθεί τον κανόνα Armijo η ευκλείδεια απόσταση του οποίου από το ελάχιστο είναι ίση με 0.00423. Στην περίπτωση που το αρχικό $\gamma 1>0$, αν η εύρεση του γk ακολουθεί τον κανόνα Armijo, τότε ο αλγόριθμος δεν φτάνει ποτέ στην τερματική συνθήκη, για αυτό τον λόγο δεν υπάρχουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

iii) Για αρχικό σημείο το $(x_0,y_0) = (1,1)$

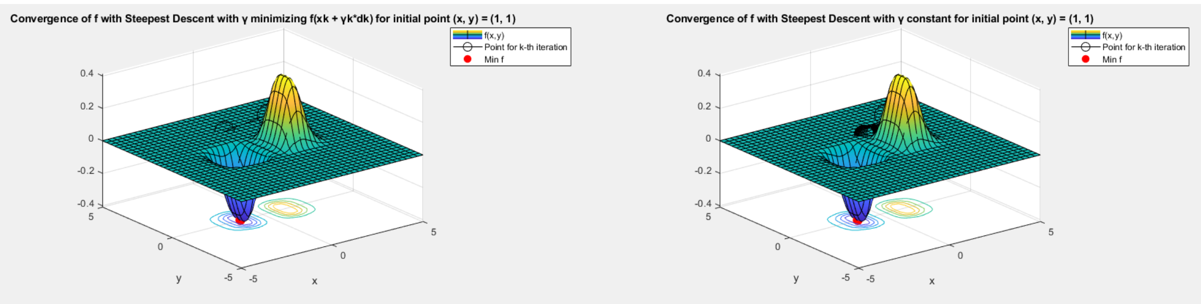
Α)Γράφημα για την σύγκλιση της τιμής της f συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων του αλγορίθμου k:



B)Γράφημα για την σύγκλιση των υποψήφιων σημείων ελαχίστου (x_k,y_k) με κατεύθυνση προς το ελάχιστο σημείο της f:



Γ) Τρισδιάστατη απεικόνιση της σύγκλισης της f με κατεύθυνση προς την ελάχιστη τιμή της:



Συμπεράσματα:

Για αρχικό σημείο το $(x_0,y_0) = (1,1)$, ανεξαρτήτως βήματος, ο αλγόριθμος αδυνατεί να βρει το ελάχιστο της συνάρτησης, ομοίως και για οποιοδήποτε αρχικό σημείο (x_0,y_0) για το οποίο ισχύει $f(x_0,y_0) > 0$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο αλγόριθμος σταματάει την αναζήτηση όταν φτάνει σε ένα σημείο στο οποίο ισχύει $f(x_k,y_k) \approx 0$, γιατί εκεί θα ισχύει $\nabla f < \varepsilon$. Φαίνεται ότι ο αλγόριθμος θα καταλήξει σε μία σωστή εκτίμηση αν και μόνο αν το αρχικό σημείο $(x0, y0)$ είναι τέτοιο ώστε $f(x_0,y_0) < 0$.

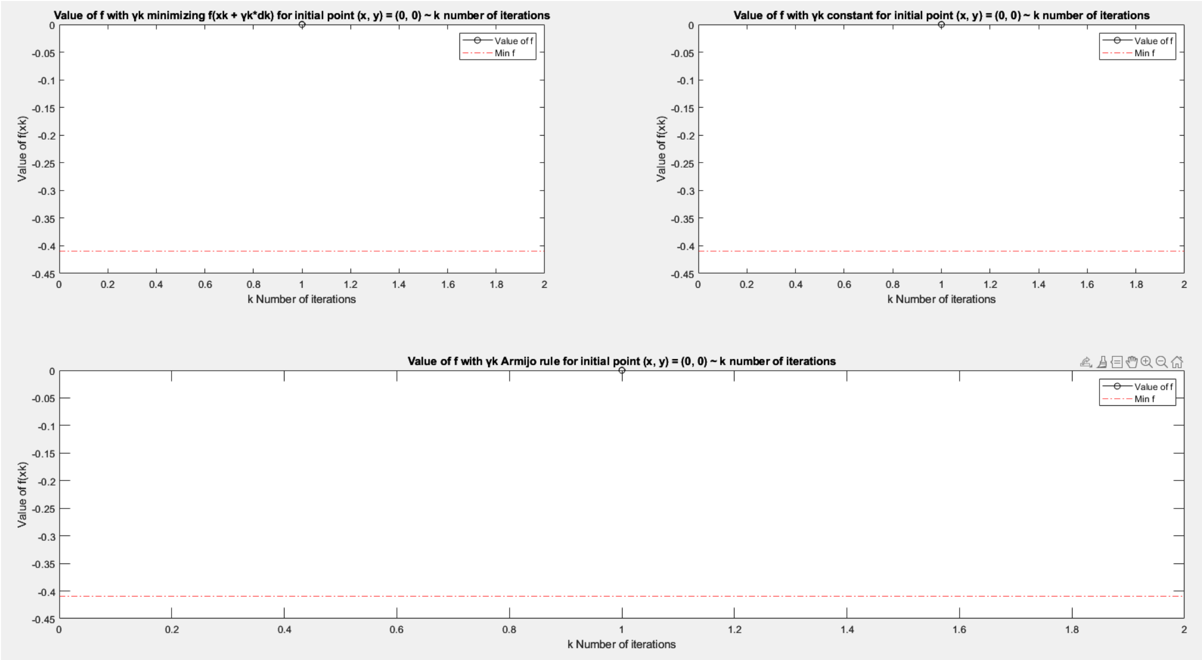
ΘΕΜΑ 4

Υλοποίηση Μεθόδου Levenberg-Marquardt

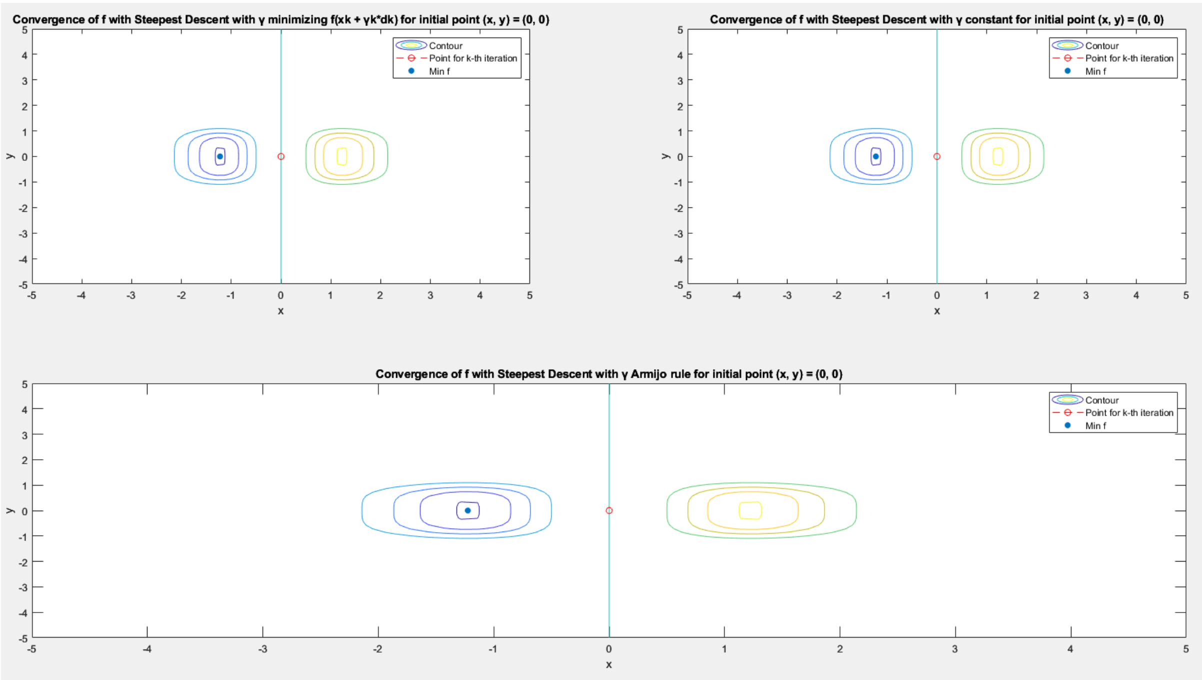
Για την υλοποίηση της μεθόδου Levenberg-Marquardt χρησιμοποιήθηκε ο Αλγόριθμος του βιβλίου. Η $levenbergMar(epsilon, x0, f, option)$ δέχεται ως ορίσματα την σταθερά τερματισμού ε, το αρχικό σημείο (x_0, y_0), την συνάρτηση f και την επιλογή $option$, η οποία καθορίζει τον τρόπο που επιλέγεται το γ_k. Οι επιλογές είναι "$optimal$" (τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_k+\gamma_k d_k))$, "$constant$" (σταθερό) και "$armijo$" (σύμφωνα με τον κανόνα Armijo). Η συνάρτηση επιστρέφει τον αριθμό επαναλήψεων k, έναν πίνακα με όλα τα γ_k που επιλέχθηκαν, έναν πίνακα με τα (x_k, y_k) το ελάχιστο της συνάρτησης, καθώς και την ευκλείδεια απόσταση του τελικού σημείου από το ελάχιστο. Για την εύρεση του $\nabla f(x_k, y_k)$ χρησιμοποιείται η συνάρτηση $jacobian$, η οποία επιστρέφει τον Ιακωβιανό πίνακα της συνάρτησης. Για την εύρεση του $\nabla^2 f(x_k, y_k)$ χρησιμοποιείται η συνάρτηση $hessian$, επιστρέφοντας τον Εσσιανό πίνακα της συνάρτησης. Για τον υπολογισμό της τιμής της f,του ∇f και του $\nabla^2 f$ δημιουργούνται οι πίνακες fx, $jacx$ και $hessx$. Ο πίνακας $\nabla^2 f(x_k)+\mu_k I$ δημιουργήθηκε προσθέτοντας τον πίνακα $hessx(xk)$ με τον πίνακα $mk*I$, όπου mk το mk και I ένας $2x2$ μοναδιαίος πίνακας. Για τον έλεγχο αν ο $\nabla^2 f(x_k)+\mu_k I$ είναι θετικά ορισμένος χρησιμοποιείται το $isposdef$, το οποίο ελέγχει αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι θετικές. Σε όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιείται σταθερά τερματισμού $\varepsilon=10^{-4}$.

i) Για αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (0,0)$

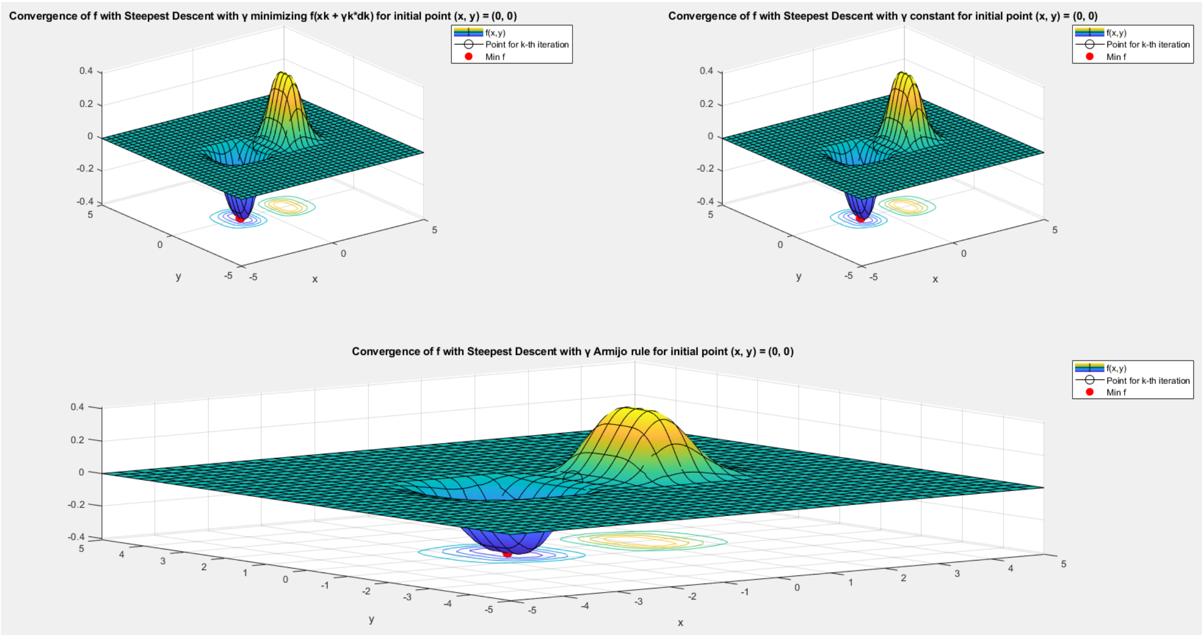
A)Γράφημα για την σύγκλιση της τιμής της f συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων του αλγορίθμου k:



Β)Γράφημα για την σύγκλιση των υποψήφιων σημείων ελαχίστου (x_k,y_k) με κατεύθυνση προς το ελάχιστο σημείο της f:



Γ) Τρισδιάστατη απεικόνιση της σύγκλισης της f με κατεύθυνση προς την ελάχιστη τιμή της:

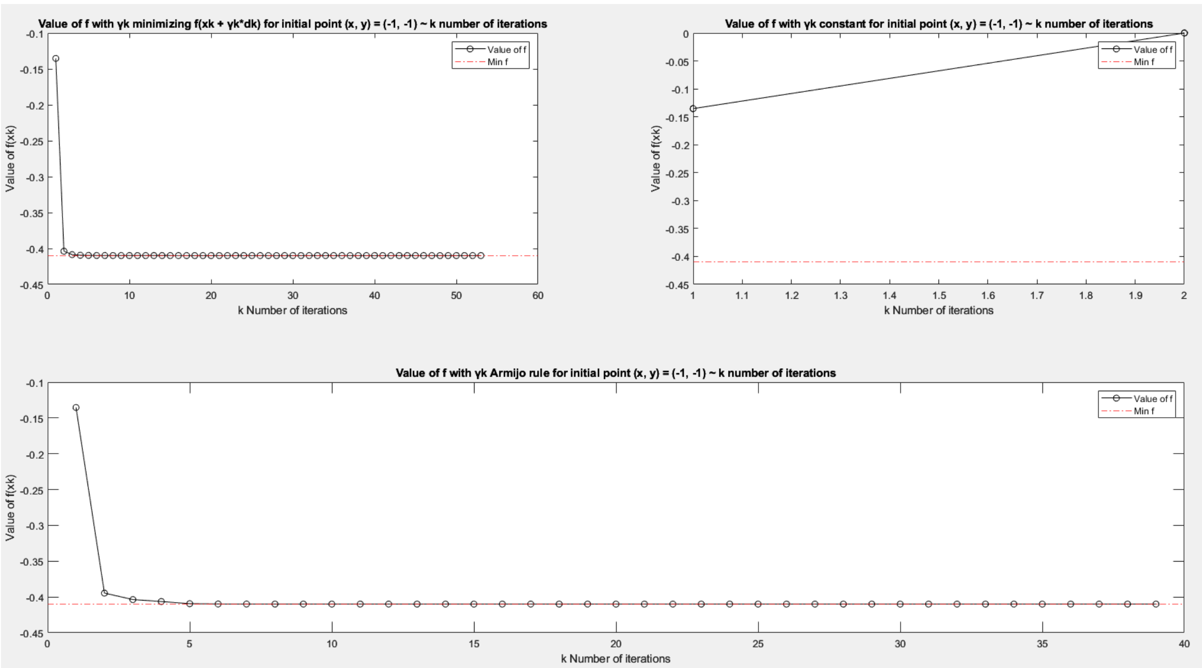


Συμπεράσματα:

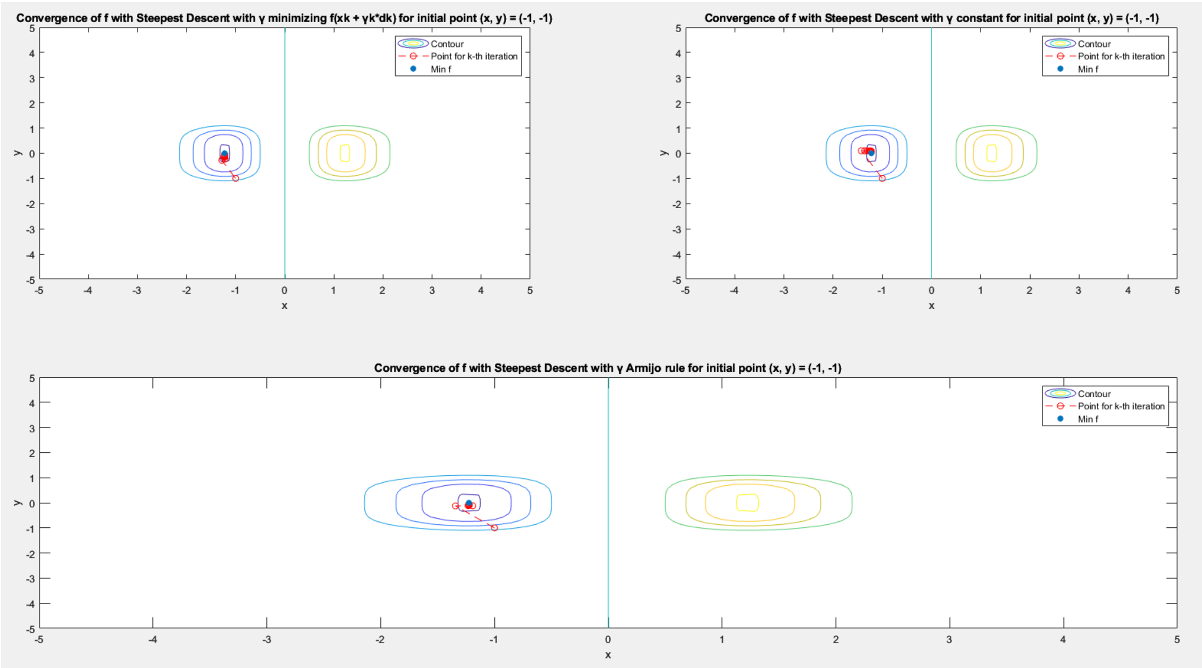
Για αρχικό σημείο το $(x_0, y_0) = (0,0)$, ανεξαρτήτως βήματος, ο αλγόριθμος δεν βρίσκει κανένα σημείο πέρα από την αρχική εκτίμηση (x_0, y_0), καθώς για το αρχικό σημείο, $\nabla f(x_0, y_0) = 0 < \varepsilon$, φτάνοντας στην τερματική συνθήκη.

ii) Για αρχικό σημείο το $(x_0,y_0) = (-1,-1)$

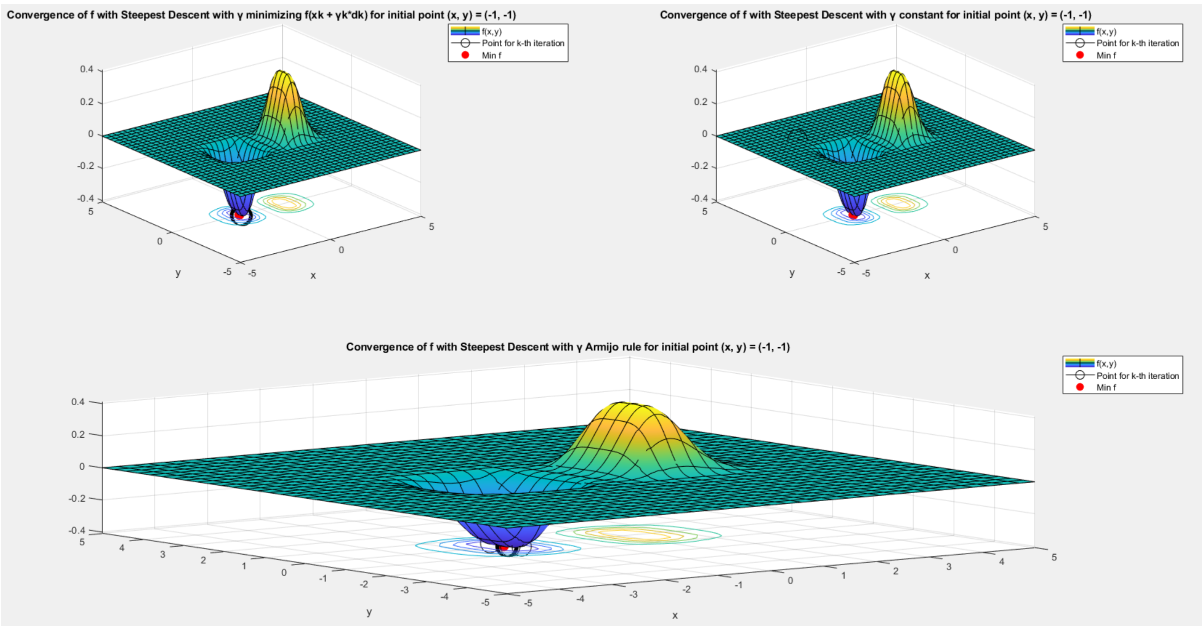
A)Γράφημα για την σύγκλιση της τιμής της f συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων του αλγορίθμου k:



B)Γράφημα για την σύγκλιση των υποψήφιων σημείων ελαχίστου (x_k,y_k) με κατεύθυνση προς το ελάχιστο σημείο της f:



Γ) Τρισδιάστατη απεικόνιση της σύγκλισης της f με κατεύθυνση προς την ελάχιστη τιμή της:



Συμπεράσματα:

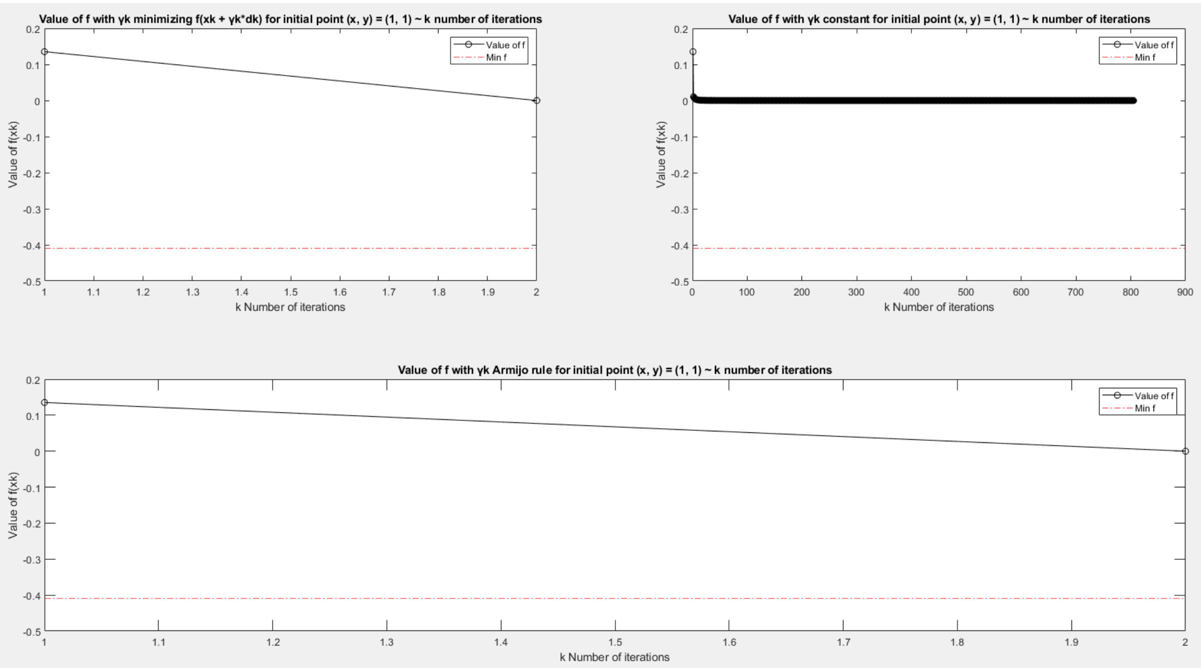
Σε αντίθεση με τη μέθοδο Newton, στη μέθοδο Levnberg-Marquardt δεν απαιτείται ο Εσσιανός πίνακας $\nabla^2 f(\mathrm{x}) = [\frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{xi}\, \partial \mathrm{xj}}]i,j{=}1,2,\ldots,n$ να είναι θετικά ορισμένος για κάθε σημείο (x_0,y_0) γιατί η κατεύθυνση d_k= $-[\nabla^2 f(xk) + \mu_K I]^{-1}\nabla f(x_k)$ προϋποθέτει ότι ο $\nabla^2 f(xk) + \mu_K I$ είναι θετικά ορισμένος, καθώς το μ_K επιλέγεται με αυτό τον σκοπό.

Από την εικόνα (A) φαίνεται πως για γ_k να ελαχιστοποιεί τη $f(x_k+\gamma_k d_k)$, ο αριθμός των επαναλήψεων του αλγορίθμου είναι k=53, για γ_k βάσει του κανόνα Armijo, ο αριθμός επαναλήψεων του αλγορίθμου είναι k=39, και για σταθερό γ_k = 0.5 ο αριθμός επαναλήψεων είναι k=2.

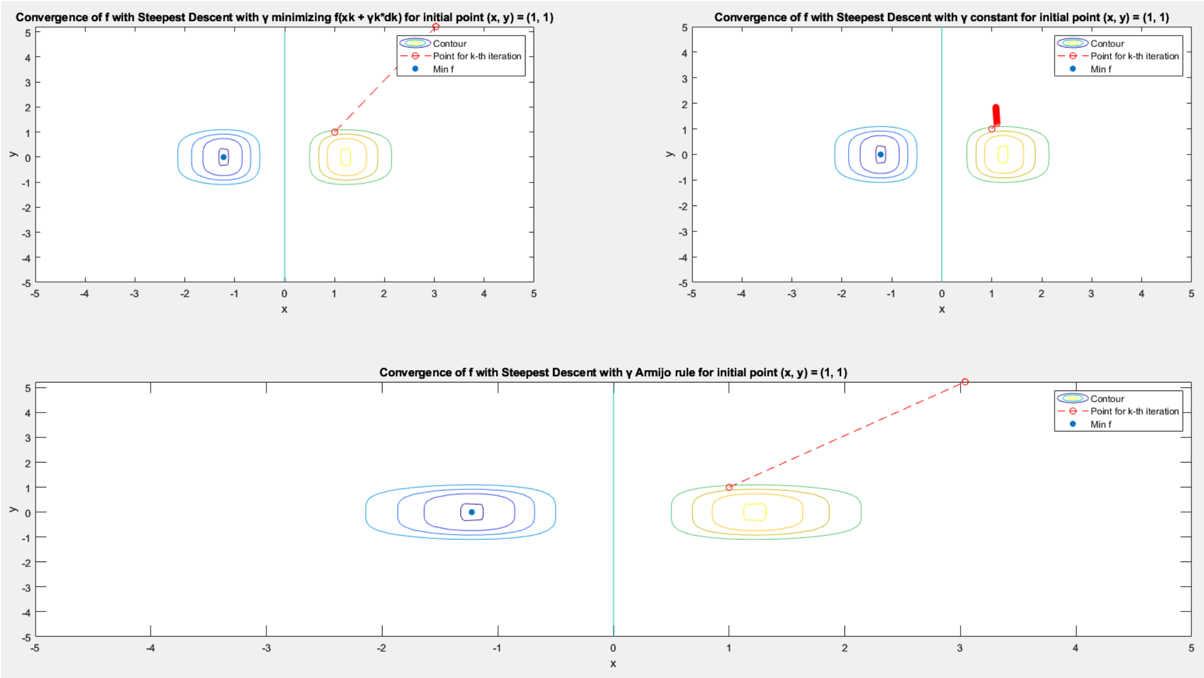
Με χρήση βήματος γ_k τέτοιου ώστε να ελαχιστοποιείται η $f(x_k+\gamma_k d_k)$ η ευκλείδεια απόσταση από το ελάχιστο είναι ίση με 0.03526. Χρησιμοποιώντας βήμα βάσει του κανόνα Armijo η ευκλείδεια απόσταση από το ελάχιστο της συνάρτησης είναι ίση με 0.03746. Για σταθερό γ_k=0.5 έχει ευκλείδεια απόσταση από το ελάχιστο ίση με 2.75958.

iii) Για αρχικό σημείο το (x_0,y_0) = (1,1)

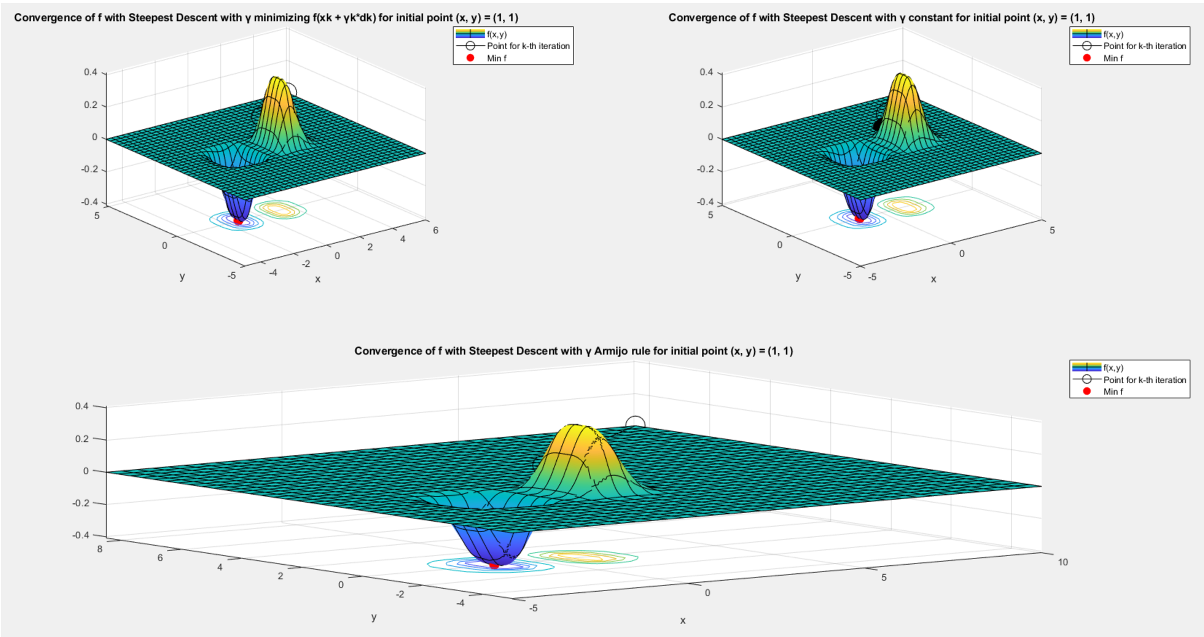
A)Γράφημα για την σύγκλιση της τιμής της f συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων του αλγορίθμου k:



B)Γράφημα για την σύγκλιση των υποψήφιων σημείων ελαχίστου (x_k,y_k) με κατεύθυνση προς το ελάχιστο σημείο της f:



Γ) Τρισδιάστατη απεικόνιση της σύγκλισης της f με κατεύθυνση προς την ελάχιστη τιμή της:



Συμπεράσματα:

Για αρχικό σημείο το $(x_0,y_0) = (1,1)$, ανεξαρτήτως βήματος, ο αλγόριθμος αδυνατεί να βρει το ελάχιστο της συνάρτησης, ομοίως και για οποιοδήποτε αρχικό σημείο (x_0,y_0) για το οποίο ισχύει $f(x_0,y_0) > 0$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο αλγόριθμος σταματάει την αναζήτηση όταν φτάνει σε ένα σημείο στο οποίο ισχύει $f(x_k, y_k) \approx 0$, γιατί εκεί θα ισχύει $\nabla f < \varepsilon$. Φαίνεται ότι ο αλγόριθμος θα καταλήξει σε μία σωστή εκτίμηση αν και μόνο αν το αρχικό σημείο $(x0, y0)$ είναι τέτοιο ώστε $f(x_0, y_0) < 0$.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ

Από τις παρατηρήσεις είναι προφανές ότι το αρχικό σημείο (x_0,y_0) έχει μεγάλη σημασία για την σωστή αναζήτηση του ελαχίστου της αντικειμενικής συνάρτησης. Πρέπει το αρχικό σημείο να είναι τέτοιο ώστε $f(x_0,y_0)<0$, διότι αν είναι μεγαλύτερο του μηδενός, οι αλγόριθμοι θα σταματήσει όταν η τιμή της $f(x,y)$ μηδενιστεί.

Ωστόσο, στην μέθοδο Newton, σημασία, επίσης, έχει το αρχικό σημείο και κάθε σημείο μετά από αυτό να είναι τέτοιο ώστε ο πίνακας $\nabla^2 f(x_k)$ να είναι θετικά ορισμένος.

Όσο αφορά το βήμα γ_k, στις περιπτώσεις που το βήμα επιλέγεται σύμφωνα με τον κανόνα Armijo και τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_k+\gamma_k d_k)$, ο αλγόριθμος απαιτεί λιγότερες επαναλήψεις για να τερματίσει. Εντούτοις, απαιτείται η χρήση ενός ακόμα επαναληπτικού αλγορίθμου για την εύρεση του γ_k σε κάθε επανάληψη.

Επειδή για την μέθοδο Newton δεν είναι δυνατόν να βρεθεί το ελάχιστο από το σημείο $(-1,-1)$ χωρίς την μετατροπή του γ_1 να είναι μικρότερο του μηδενός, επιλέχθηκε το σημείο $(-1,-0.5)$, ώστε οι μέθοδοι να μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους υπό τις ίδιες συνθήκες.

Πίνακας σύγκρισης:

γ_κ	Steepest Descent		Newton		Levenberg-Marquardt	
	Iterations	Distance	Iterations	Distance	Iterations	Distance
Optimal	118	0,03764	9	0,077	9	0,076
Constant	386	0,03933	16	0,03522	16	0,03522
Armijo	161	0,03933	19	0,0044	19	0,0044

Σε όλες τις περιπτώσεις οι μέθοδοι Newton και Levenberg-Marquardt δρουν με αρκετά παρόμοιο τρόπο, όπως και ήταν αναμενόμενο, καθώς η μέθοδος Levenberg-Marquardt είναι η τροποποιημένη μέθοδος Newton. Η μέθοδος της Μέγιστης Καθόδου έχει την χειρότερη επίδοση σε επαναλήψεις και απόσταση από το σημείο ελαχίστου της αντικειμενικής συνάρτησης. Η προτιμότερη μέθοδος είναι η Levenberg-Marquardt, καθώς έχει την ακρίβεια της μεθόδου Newton, χωρίς την απαραίτητη προϋπόθεση ο $\nabla^2 f(x_0,y_0)$ να είναι θετικά ορισμένος. Όσο αναφορά την επιλογή του γk, για σταθερό γ_κ ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί περισσότερες επαναλήψεις. Για γ_k τέτοιο σύμφωνα με τον κανόνα Armijo, η απόσταση από το ελάχιστο σημείο είναι η μικρότερη και ο αριθμός επαναλήψεων είναι σχεδόν ίσος με αυτό του γ_k που ελαχιστοποιεί την την $f(x_k+\gamma_k d_k)$.. Συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος Levenberg-Marquardt είναι η ακριβέστερη μέθοδος και επιλογή του γ_k βάσει του κανόνα Armijo υπό τις σωστές αρχικές συνθήκες μπορεί να αποδειχθεί ακριβέστερη από την επιλογή του γ_k τέτοιου ώστε να ελαχιστοποιείται η $f(x_k+\gamma_k d_k)$.