Introdução a Complexidade de Algoritmos

Estrutura de Dados

Prof. Anselmo C. de Paiva
Departamento de Informática – Núcleo de Computação Aplicada NCA-UFMA

Introdução

- Problema Importante:
  - escolha das estruturas de dados adequadas para uma dada aplicação.
- Exemplo:
  - Considere o problema de ordenar n números.
    - algoritmo simples: baseado na comparação de cada número com todos os outros n^2 comparações.
    - Para n=10, estamos falando de umas 100 comparações.
    - Para ordenar um milhão de números 10^{12} comparações
    - Algoritmo melhor - 20×10^{6} comparações
    - Considerando um milhão de comparações por segundo:
      - um milhão de segundos (100 dias)
      - 20 segundos

Introdução

- Opção:
  - escolher a implementação mais adequada através de medidas reais de desempenho das várias implementações.
    - Problemas:
      - escolha dos casos para teste, porque uma forma de implementação pode ser boa para alguns casos e ruim para outros, e pode ser difícil decidir quais são os melhores e os piores casos.
      - levar em consideração todos os casos é impensável.
- Exemplo:
  - Estudar o desempenho dos dois algoritmos de ordenação.
    - números são inteiros de 16 bits - 65000 valores possíveis para cada um dos 106
    - 6.5x1010 casos.

Algoritmos e Complexidade

- Eficiência de um algoritmo
  - Complexidade de tempo: quanto "tempo" é necessário para computar o resultado para uma instância do problema de tamanho n
    - Pior caso: Considera-se a instância que faz o algoritmo funcionar mais lentamente
    - Caso médio: Considera-se todas as possíveis instâncias e mede-se o tempo médio
- Eficiência de uma estrutura de dados
  - Complexidade de espaço: quanto "espaço de memória/disco" é preciso para armazenar a estrutura (pior caso e caso médio)
- Complexidade de espaço e tempo estão freqüentemente relacionadas

Tempo de execução de um programa

- Questões:
  - em que máquina deve ser realizada a execução
  - que outros programas estão em execução nessa máquina ao mesmo tempo
  - que informação está disponível nos caches de memória e de disco por ocasião da execução
- Levam à procura da avaliação da forma de variação do tempo de execução de um algoritmo com o "tamanho do problema", em geral representado por uma variável n.

Algoritmos e Complexidade

- Eficiência medida objetivamente depende de:
  - Como o programador implementou o algoritmo/ED
  - Características do computador usado para fazer experimentos:
    - Velocidade da CPU
    - Capacidade e velocidade de acesso à memória primária / secundária
    - Etc
  - Linguagem / Compilador / Sistema Operacional / etc
- Portanto, a medição formal de complexidade tem que ser subjetiva, porém matematicamente consistente
  - Complexidade assintótica

Complexidade Assintótica

- Tempo / espaço medidos em número de "passos" do algoritmo / "palavras" de memória ao invés de segundos ou bytes
- Análise do algoritmo / e.d. permite estimar uma função que depende do tamanho da entrada / número de dados armazenados (n).
  - Ex.: $$T(n) = 13n^3 + 2n^2 + 6n \log n$$
- Percebe-se que à medida que n aumenta, o termo cúbico começa a dominar
- A constante que multiplica o termo cúbico tem relativamente a mesma importância que a velocidade da CPU / memória
- Diz-se que $T(n) \in O(n^3)$. Big-oh
- Ozao - KNUTH

Definição de O(f(n))

- f(n) função de números naturais
- Definição:
  - Dizemos que uma função T(n) é O(f(n)) se existem constantes n_0 e c>0 tais que para todo n > n_0, T(n) < c f(n).
- Exemplo: mostrar que T(n)=5n2 +5n-6 é O(n2).
  - escolher valores apropriados de c e de n0.
  - Tomando c=6, podemos descobrir um valor adequado de n0 escrevendo
    - 5n2 +5n-6 £ 6n2
    - n2 -5n+6 ³ 0
- obtendo-se, assim n ³ 3
- Como 5n2 +5n-6 £ 6n2 para n ³ 3, T(n) é O(n 2).

Dizemos que uma função f(n) é O(g(n)) se existem constantes n_0 e c_i>0 tais que para todo n > n_0, T(n) < c f(n).

Complexidade Assintótica

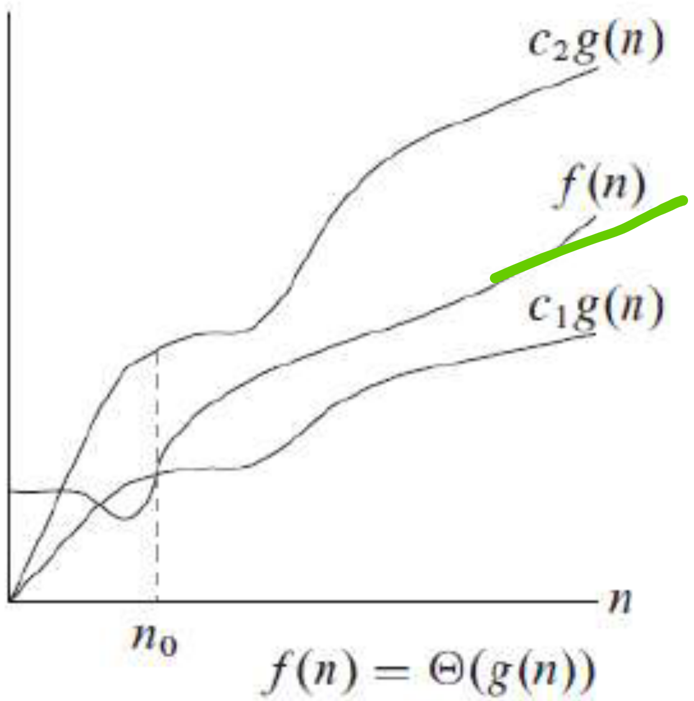
- Definição:
  - T(n) ∈ O(f (n)) se existem constantes c e n0 tais que

    T(n) ≤ c f (n) para todo n ≥ n0
- Alternativamente,
  - T(n) ∈ O(f (n)) se lim n→∞ T(n) / f (n) é constante (mas não infinito)

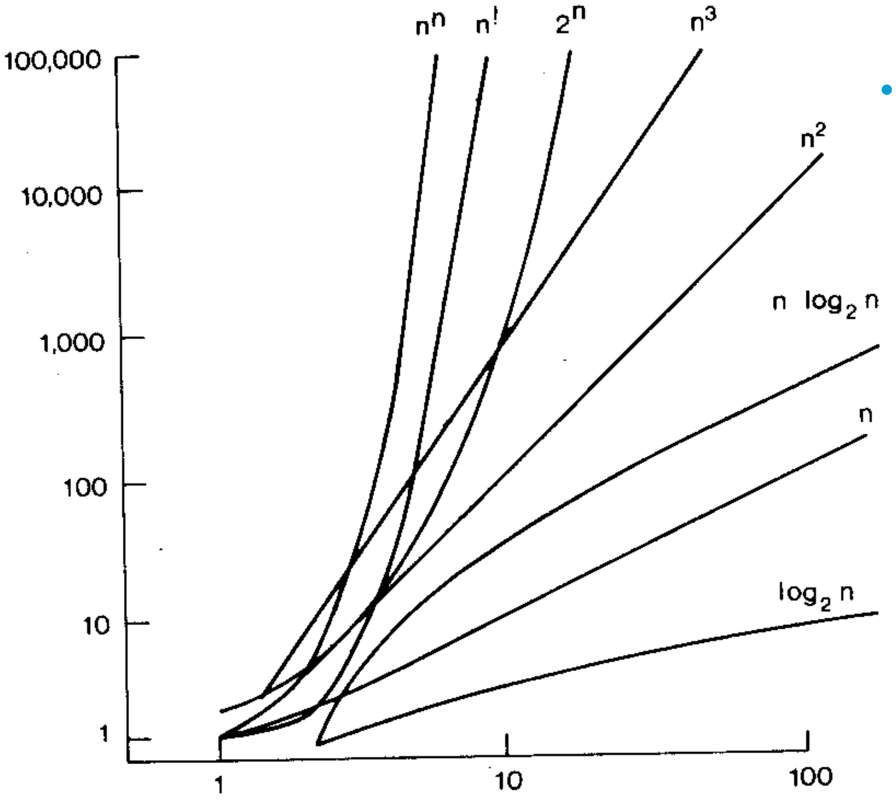
f(n) é O(g(n))

f(n) é menor que g(n)

T(n) é O(n^2)



Ordem de Crescimento de Funções



Ordem dos Algoritmos

- "ordem" dos algoritmos é informação adequada para escolha de um algoritmo
- Problema:
  - Vários algoritmos de mesma ordem estão disponíveis.
- Exemplo: Para resolver um problema, estão disponíveis dois algoritmos:

  Algoritmo A, com tempo $f(n) = 10000\ n$.

  Algoritmo B, com tempo $g(n) = n^2$.

  - A é $O(n)$, e B é $O(n2\ )$
    - algoritmo A é melhor que algoritmo B
  - $f(n) < g(n)$, para $n > 10000$
  - para valores grandes de n, o algoritmo A é mais rápido.
  - Entretanto, $g(n) > f(n)$, para $n < 10000$
    - para problemas pequenos, o algoritmo B seria preferível.

Caso médio e pior caso

- Algoritmo para ordenar os elementos de um vetor de tamanho n
  - Pode gastar menos tempo quando o vetor já se encontra ordenado, ou quase ordenado,
  - Pode gastar mais tempo quando os elementos de vetor se encontram “embaralhados”
- Opções:
  - Analisar o algoritmo e determinar o tempo de execução no pior caso
  - Realizar a análise levando em consideração todos os casos, juntamente com suas probabilidades de ocorrência, e obter um tempo de execução médio

Caso médio e pior caso

- Considere o problema de inserir elementos em uma lista encadeada ordenada, com n elementos.
  - Pior caso: Elemento precisa ser inserido no fim da lista
    - percorre toda a lista (k1 n)
    - tempo constante k2 da inserção propriamente dita.
    - T(n) = k1 n + k2, ou seja, O(n).
  - Caso médio: elementos a serem inseridos se distribuem uniformemente entre os já existentes.
    - Em média, será necessário percorrer meia lista, para realizar a inserção
    - T(n) = k1 (n/2) + k2, ou seja, O(n).

Tempo de execução em algoritmos

- Tempo gasto por um algoritmo
  - soma os tempos gastos por suas componentes.
- Exemplo: Avaliar o tempo consumido pela execução de
    - for (i=0; i<n; i++) {
    - a=10;
    - }
  - tempo correspondente à atribuição i=0
  - n vezes o tempo consumido pela atribuição de 10 parea a variavel a
  - n vezes o tempo consumido pelo teste i<n
  - n vezes o tempo consumido pelo incremento i++
  - $T(n) = 1 + n + n + n = 1 + 3\ n$
    - da forma k1 + k2n
    - tempo de execução é O(n).

execução de uma operação toma uma unidade de tempo;

Classes de Comportamento Assintótico

- determinam a complexidade inerente do algoritmo
- Comportamento assintótico é medido quando o tamanho da entrada (n) tende a infinito
  - constantes são ignoradas e apenas o componente mais significativo da função de complexidade é considerado
- Dois algoritmos da mesma classe de comportamento assintótico são ditos equivalentes

Principais Classes de Problemas

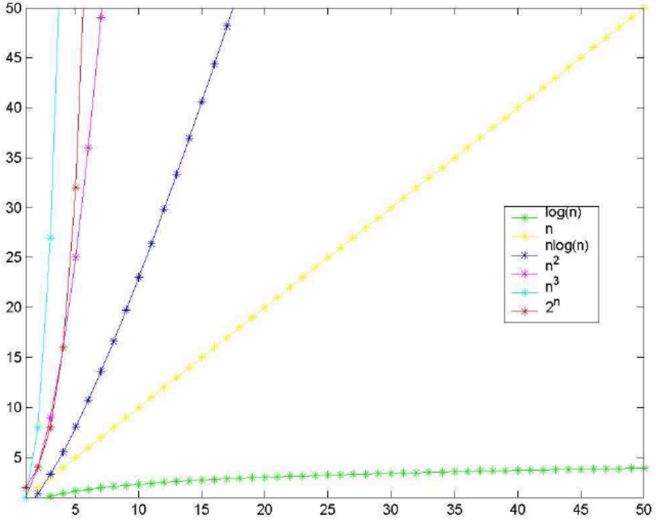
- $f(n) = O(1)$
  - Complexidade constante.
  - Tempo de execução independe de n.
    - instruções do algoritmo são executadas um número fixo de vezes.
- $f(n) = O(\log n)$.
  - Complexidade logarítmica.
  - Típico em algoritmos dividir pra conquistar
    - transformam um problema em outros menores
  - Quando n é mil, $\log_2 n \approx 10$, quando n é 1 milhão, $\log_2 n \approx 20$.
  - Para dobrar o valor de log n temos de considerar o quadrado de n.
  - A base do logaritmo muda pouco estes valores: quando n é 1 milhão, o $\log_2 n$ é 20 e o $\log_{10} n$ é 6.
- $f(n) = O(n)$
  - Complexidade linear.
  - Pequeno trabalho realizado sobre cada elemento de entrada.
  - Melhor situação para algoritmo que processa/produz n elementos de entrada/saída.
  - n dobra de tamanho, o tempo de execução dobra.
- $f(n) = O(n \log n)$
  - Típico em algoritmos dividir pra conquistar
    - transformam um problema em outros menores
  - n é 1 milhão, $n\log_2 n$ é cerca de 20 milhões.
  - n é 2 milhões, $n\log_2 n$ é cerca de 42 milhões,
    - pouco mais do que o dobro.

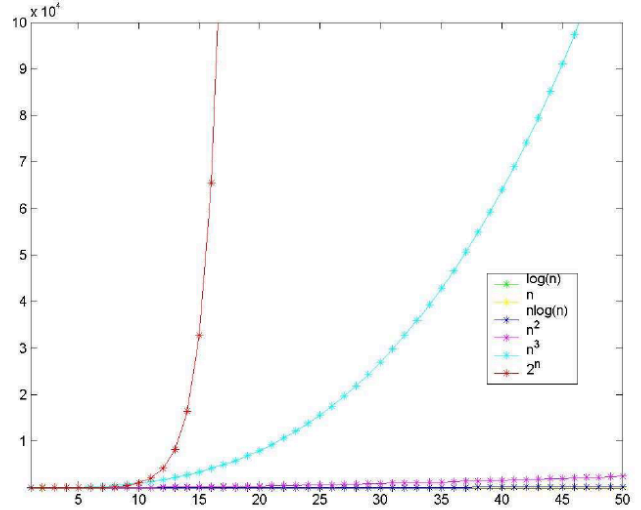
- $f(n) = O(n^2)$
    - complexidade quadrática.
  - itens de dados são processados aos pares
  - n é mil, o número de operações é da ordem de 1 milhão.
  - n dobra, o tempo de execução é multiplicado por 4.
  - Úteis para resolver problemas de tamanhos relativamente pequenos.
- $f(n) = O(n^3)$
  - Complexidade cúbica.
  - Úteis apenas para resolver pequenos problemas.
  - n é 100, o número de operações é da ordem de 1
  - milhão.
  - n dobra, o tempo de execução fica multiplicado por 8.
- $f(n) = O(2^n)$
  - Complexidade exponencial.
  - Geralmente não são úteis sob o ponto de vista prático.
  - Ocorrem na solução de problemas quando se usa força bruta para resolvê-los.
  - n é 20, o tempo de execução é cerca de 1 milhão.
  - n dobra, o tempo fica elevado ao quadrado.
- $f(n) = O(n!)$
  - Complexidade exponencial
  - $O(n!)$ é muito pior do que $O(2^n)$.
  - força bruta para solução do problema.
  - n = 20 => 20! = 2432902008176640000, um número com 19 dígitos.
  - n = 40 => um número com 48 dígitos

Comparação

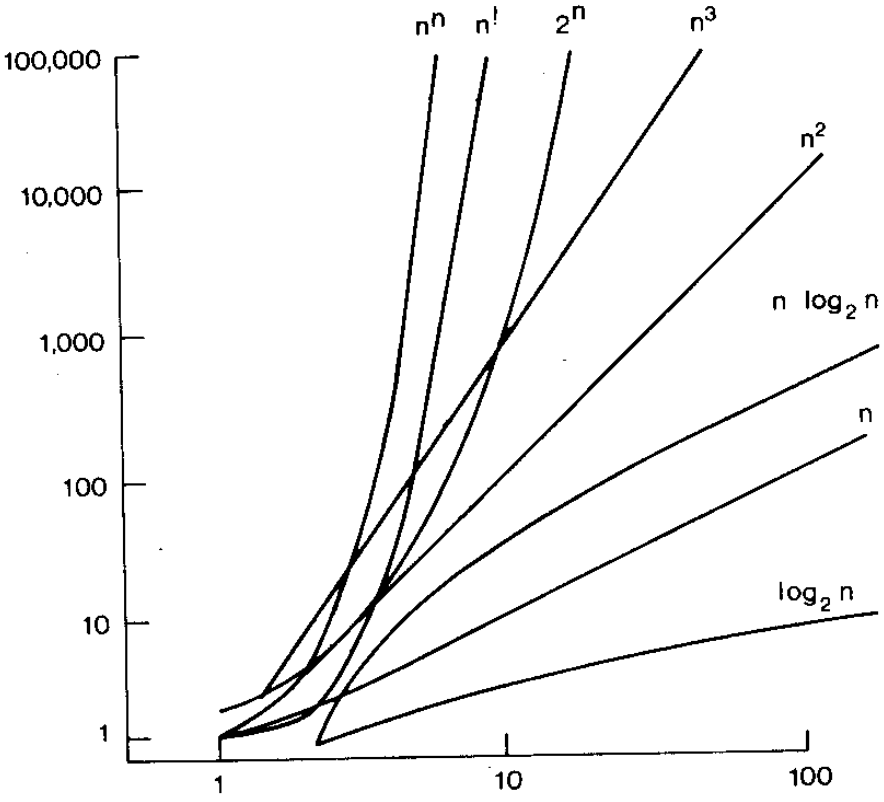
Função de custo de tempo	Computador atual	Computador 100 vezes mais rápido	Computador 1.000 vezes mais rápido
n	t_1	$100\ t_1$	$1000\ t_1$
n^2	t_2	$10\ t_2$	$31,6\ t_2$
n^3	t_3	$4,6\ t_3$	$10\ t_3$
2^n	t_4	$t_4 + 6,6$	$t_4 + 10$

Função de custo	10	20				
n	0,00001 s	0,00002 s	0,00003 s	0,00004 s	0,00005 s	0,00006 s
n^2	0,0001 s	0,0004 s	0,0009 s	0,0016 s	0,0.35 s	0,0036 s
n^3	0,001 s	0,008 s	0,027 s	0,64 s	0,125 s	0.316 s
n^5	0,1 s	3,2 s	24,3 s	1,7 min	5,2 min	13 min
2^n	0,001 s	1 s	17,9 min	12,7 dias	35,7 anos	366 séc.
3^n	0,059 s	58 min	6,5 anos	3855 séc.	10^8 séc.	10^{13} séc.





Ordem de Crescimento de Funções



Exemplos

- sum= 0;
- for (i = 1; i ≤ n; i + +) {
  - for (j = 1; j ≤ n; j + +) {
    - Sum++;
  - }
- }

- sum= 0;
- for (i = 1; i ≤ n; i + +) {
  - for (j = 1; j ≤ i; j + +) {
    - Sum+;
  - }
- }

EXERCÍCIOS

7. Calcule a soma dos 20 primeiros termos da P.A. (5, 8, 11, 14...)

a) 680 b) 670 c) 640 d) 650 e) 620

EXERCÍCIOS (PA)

SOMA DOS N TERMOS

$$S_n = \frac{(a_{1+a_n})n}{2}$$

Exemplos

- sum= 0;
- for (i = 1; i ≤ n; i + +) {
  - for (j = 1; j ≤ n; j + +) {
    - Sum+;
  - }
- }

- sum= 0;
- for (i = 1; i ≤ r
  - for (j = 1; j ≤ i; j + +) {
    - Sum+;
  - }
- }

Arvores

Estrutura de Dados

Prof. Anselmo C. de Paiva
Departamento de Informática – Núcleo de Computação Aplicada NCA-UFMA

Definições

- Árvore: conjunto finito T de elementos denominados nós ou vértices, tq
    - existe um nó especial denominado raiz da árvore
    - Os nós restantes são particionados em $m^{3}0$ conjuntos disjuntos T1,...,Tm, cada um sendo uma árvores
    - T1,...,Tm são denominados subárvores da raiz.
- Um conjunto de árvores é denominado floresta.

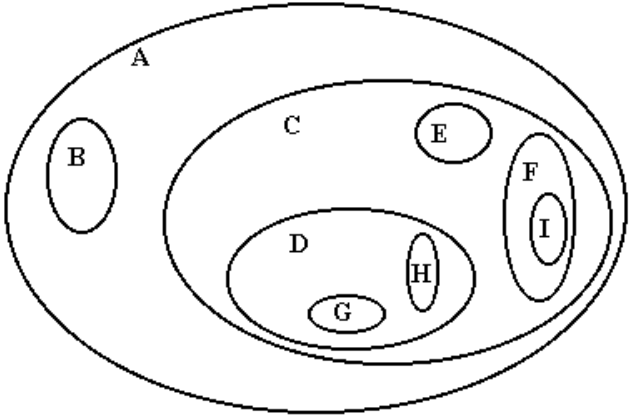
Motivação

- Diversas aplicações necessitam de estruturas mais complexas que as listas
- Inúmeros problemas podem ser modelados através de árvores
- Árvores admitem tratamento computacional eficiente quando comparadas às estruturas mais genéricas como os grafos

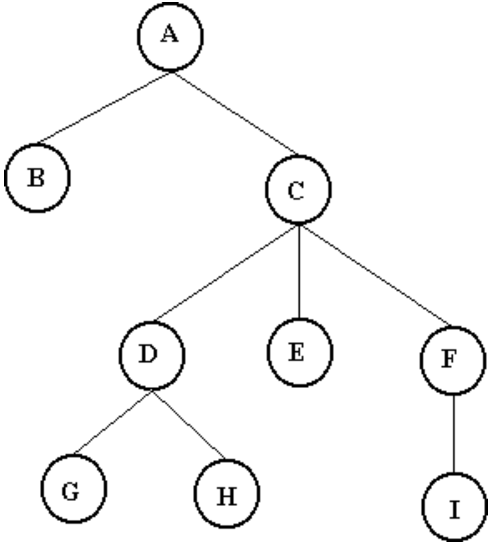
Representações Gráficas

- Representação por parênteses aninhados
- (A (B) (C (D (G) (H)) (E) (F (I))))

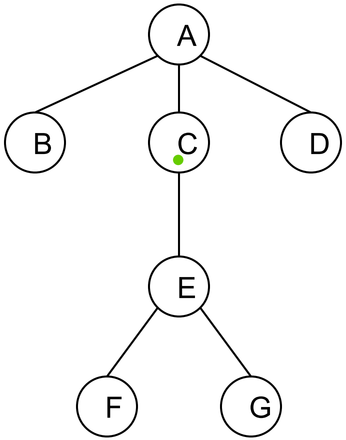
Diagrama de inclusão



Repr. hierárquica



Árvores



Representação Gráfica

A
  B
  C
    E
      F
      G
  D

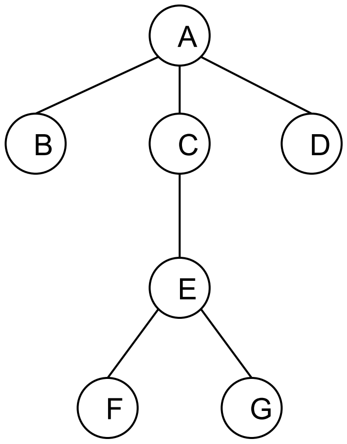
Representação Indentada

(A(B)(C(E(F)(G)))(D))

Representação com Parênteses

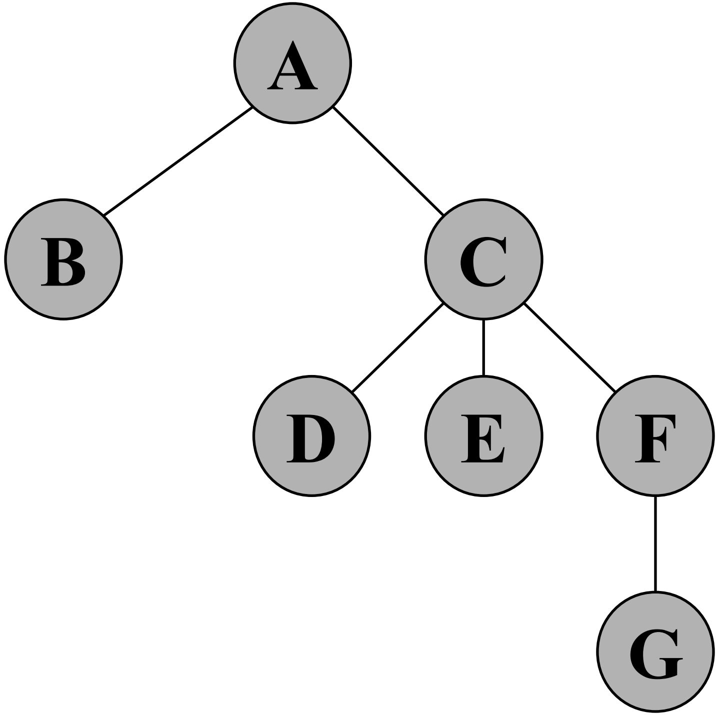
Terminologia

- Grau de um nó: número de subárvores do nó
- Folha: nó de grau zero.
- Profundidade de um nó:
  - A profundidade da raiz da árvore T é 0
  - A profundidade de outro nó n em T é 1 mais a altura de n na subárvore de raiz(T) que contém n.
- Altura de uma árvore:
  - maior profundidade de um nó na árvore



Exemplo

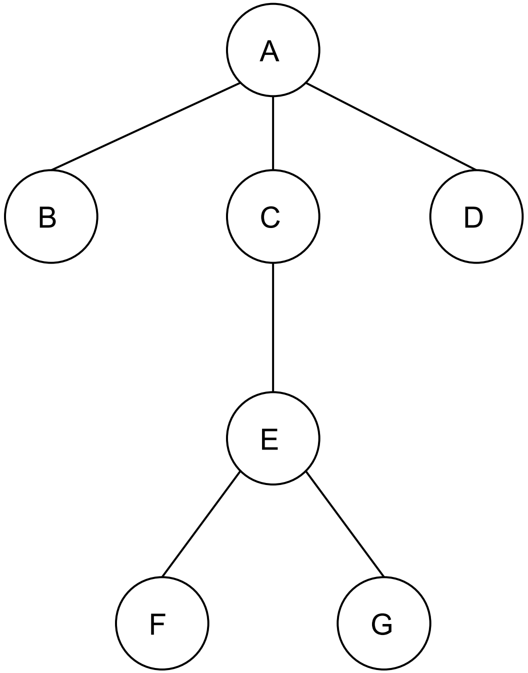
- A possui grau 2,
- C - 3, F – 1
- B, D, E, e G são folhas
- A altura da árvore é 3



Mais Terminologia

- Seja n um nó e n1,...,nm as raízes de suas subárvores.
- n é o pai de n1,...,nm , e n1,...,nm são filhos de n.
- n1,...,nm são irmãos.
- n é o ancestral de todos os nós nas subárvores de n.
- Os nós nas subárvores de n são descendentes de n.

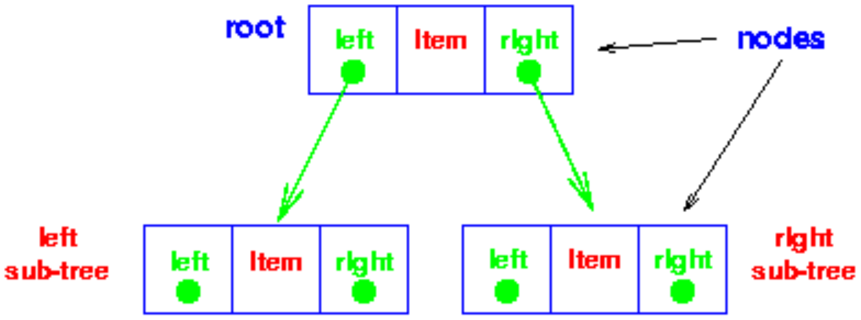
Árvores – Nomenclatura



- “A” é o pai de “B”, “C” e “D”
- “B”, “C” e “D” são filhos de “A”
- “B”, “C” e “D” são irmãos
- “A” é um ancestral de “G”
- “G” é um descendente de “A”
- “B”, “D”, “F” e “G” são nós folhas
- “A”, “C” e “E” são nós internos
- O grau do nó “A” é 3
- Comprimento do caminho de “C” a “G” é 2
- Nível de “A” é 1 e o de “G” é 4
- A altura da árvore é 4

Implementação

```
typedef struct _tnode_ {
     void *item;
     struct t_node *left;
     struct t_node *right;
}TNode;

struct _tree_ {
     Node root;
     ......
}Tree;
```



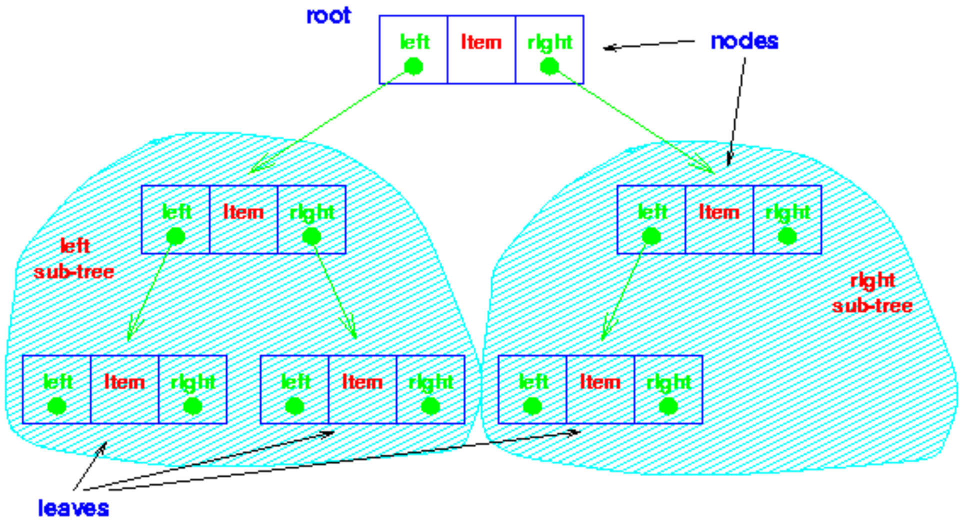
Árvores Binárias – Definição Recursiva

- São compostas de Nodes
- Duas subárvores (Left e Right)
- Ambas as subárvores são árvores binárias

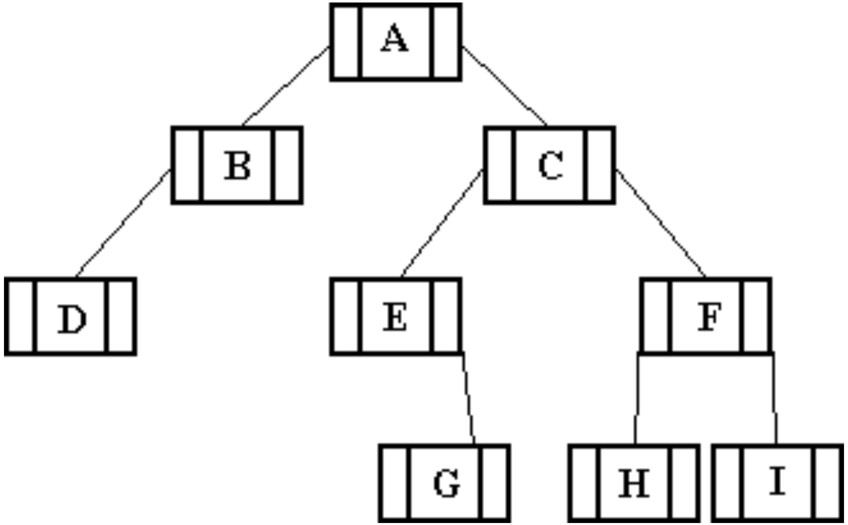
Cada subárvore é uma árvore binária

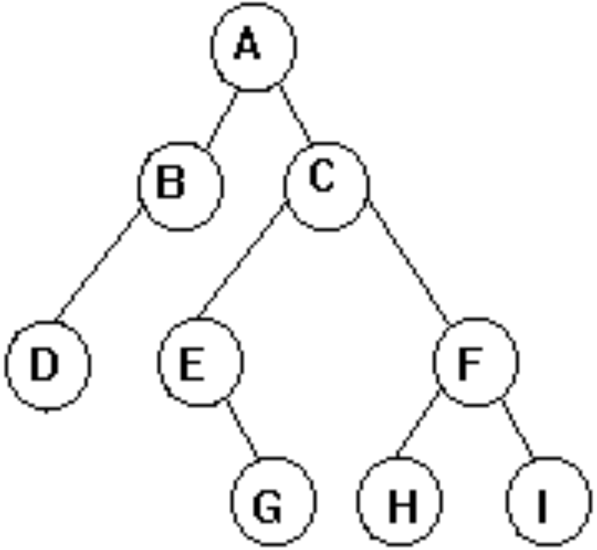
```
typedef struct _tnode_ {
    void *item;
    struct t_node *left;
    struct t_node *right;
}TNode;
```

Grau <= 2



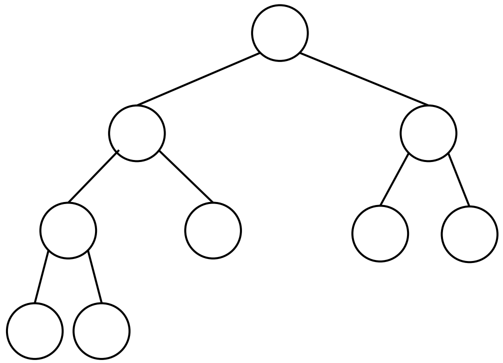
Árvores Binárias – Exemplo

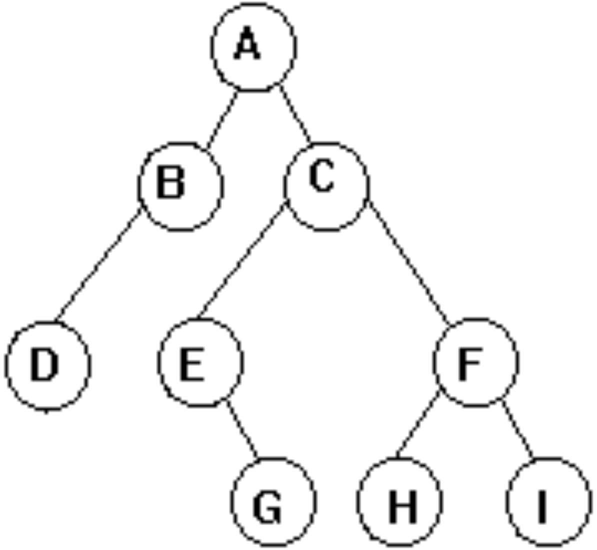


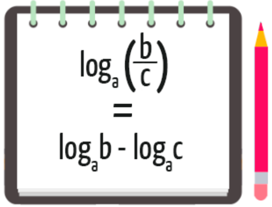


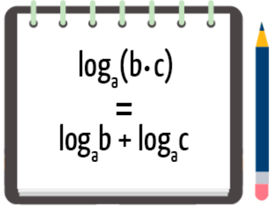
Altura de Árvores Binárias

- O processo de busca em árvores é normalmente feito a partir da raiz na direção de alguma de suas folhas
- Naturalmente, são de especial interesse as árvores com a menor altura possível
- Se uma árvore T com $n > 0$ nós é completa, então ela tem altura mínima. Para ver isso observe que mesmo que uma árvore mínima não seja completa é possível torná-la completa movendo folhas para níveis mais altos




A
B
C
D
E
F
G
H
I



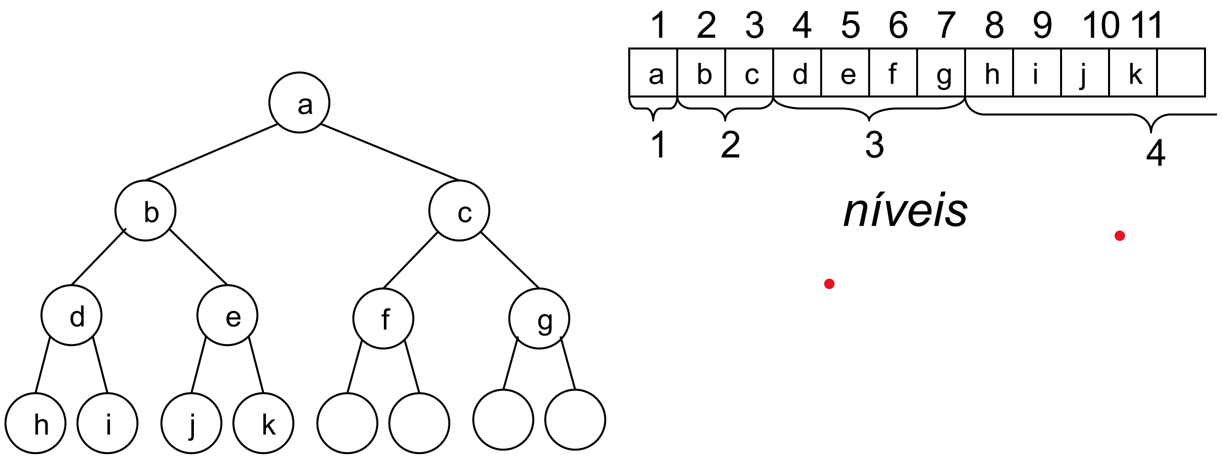


Altura de Árvores Binárias

- A altura mínima de uma árvore binária com $n > 0$ nós é
  $h = 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$
- Prova-se por indução. Seja T uma árvore completa de altura h
  - Vale para o caso base (n=1)
  - Seja T' uma árvore cheia obtida a partir de T pela remoção de k folhas do último nível
    - Então T' tem n' = n – k nós
    - Como T' é uma árvore cheia,
      n' = 1 + 2 + … + 2h-2 = 2h-1 – 1 e
      h = 1+ log2 (n'+1)
    - Sabemos que $1 \leq k \leq n'+1$ e portanto
      log2 (n'+1) = $\lfloor$log2 (n'+ k)$\rfloor$ = $\lfloor$log2 n$\rfloor$

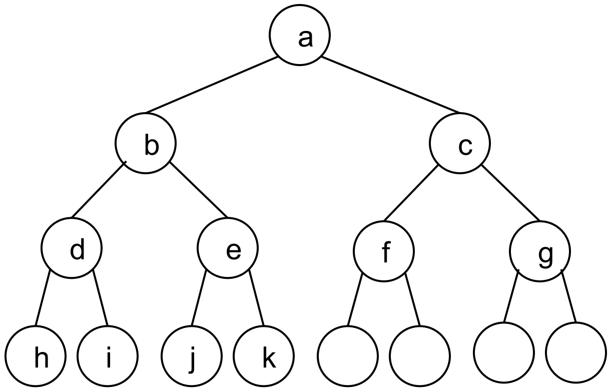
Implementando Árvores Binárias com Arrays

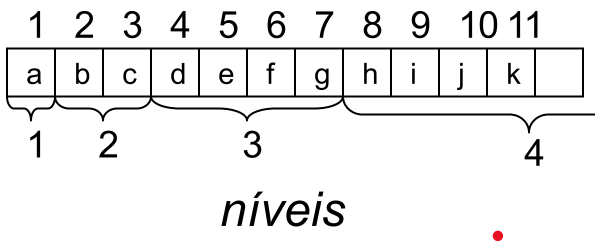
- Assim como listas, árvores binárias podem ser implementadas utilizando-se o armazenamento contíguo proporcionado por arrays
- A idéia é armazenar níveis sucessivos da árvore seqüencialmente no array



Implementando Árvores Binárias com Arrays

- Assim como listas, árvores binárias podem ser implementadas utilizando-se o armazenamento contíguo proporcionado por arrays
- A idéia é armazenar níveis sucessivos da árvore seqüencialmente no array



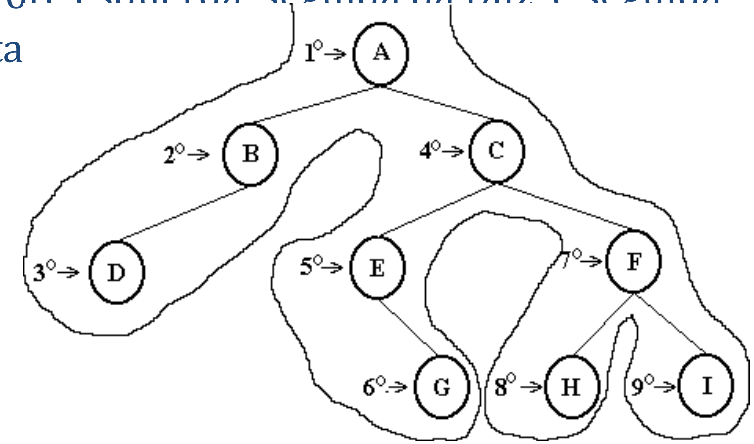


Implementando Árvores Binárias com Arrays

- Dado um nó armazenado no índice i, é possível computar o índice
  - do nó filho esquerdo de i : 2 i
  - do nó filho direito de i : 2 i + 1
  - do nó pai de i : i div 2
- Para armazenar uma árvore de altura h precisamos de um array de 2h – 1 (número de nós de uma árvore cheia de altura h)
- Nós correspondentes a subárvores vazias precisam ser marcados com um valor especial diferente de qualquer valor armazenado na árvore
- A cada índice computado é preciso se certificar que está dentro do intervalo permitido
  - Ex.: O nó raiz é armazenado no índice 1 e o índice computado para o seu pai é 0

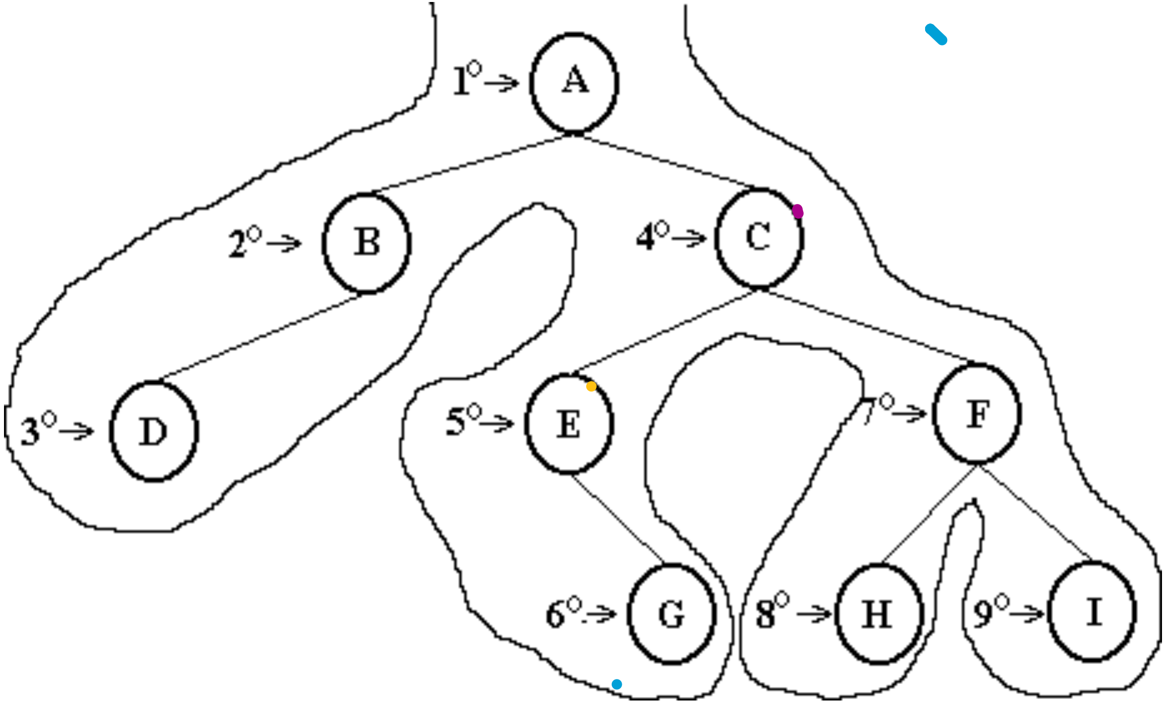
Árvores Binárias – Caminhamento

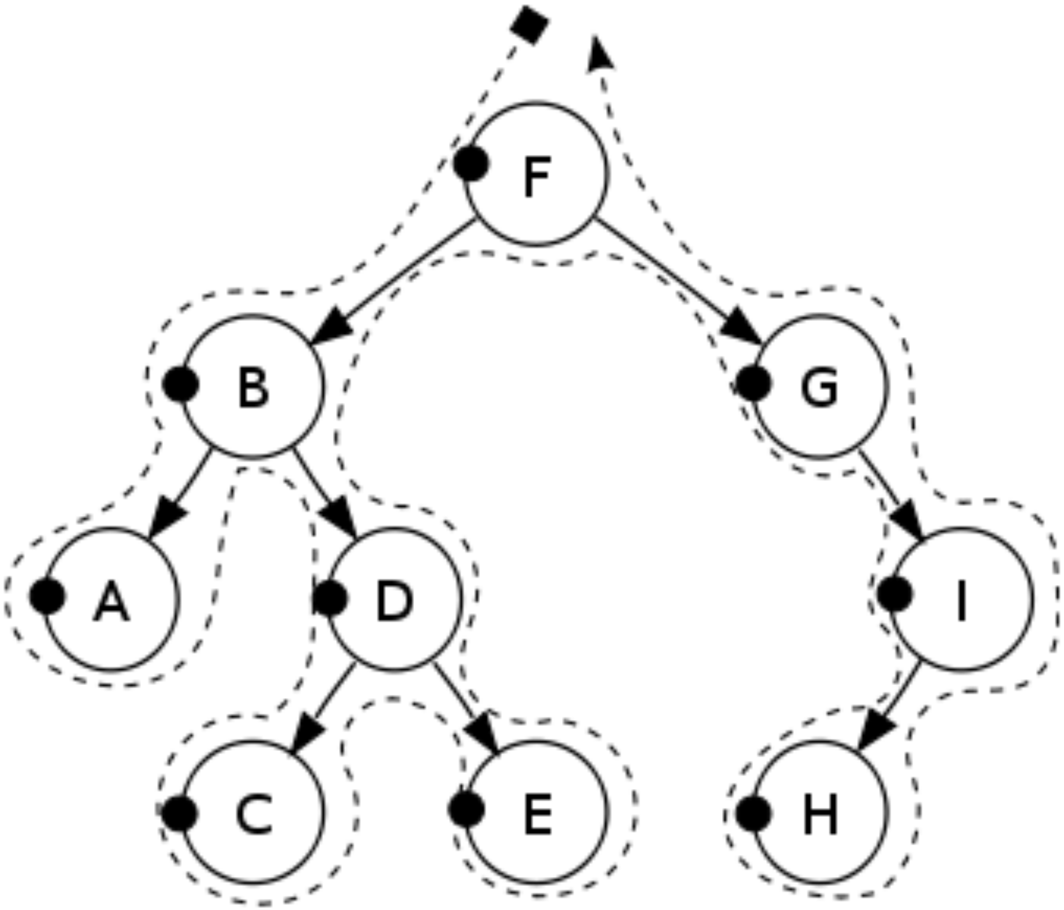
- Ordem em que se percorre todos os nós de uma árvore
- Três maneiras principais:
  - Pré-ordem – raiz, depois caminhamento em préordem das subárvores esquerda e direita
  - Pós-ordem – caminhamento pós-ordem das subárvores(esq. e dir.) seguida pela raiz
  - Simétrica – caminhamento simétrico da sub-árvore esquerda, seguida da raiz, e seguida do caminhamento simétrico da subárvore direita



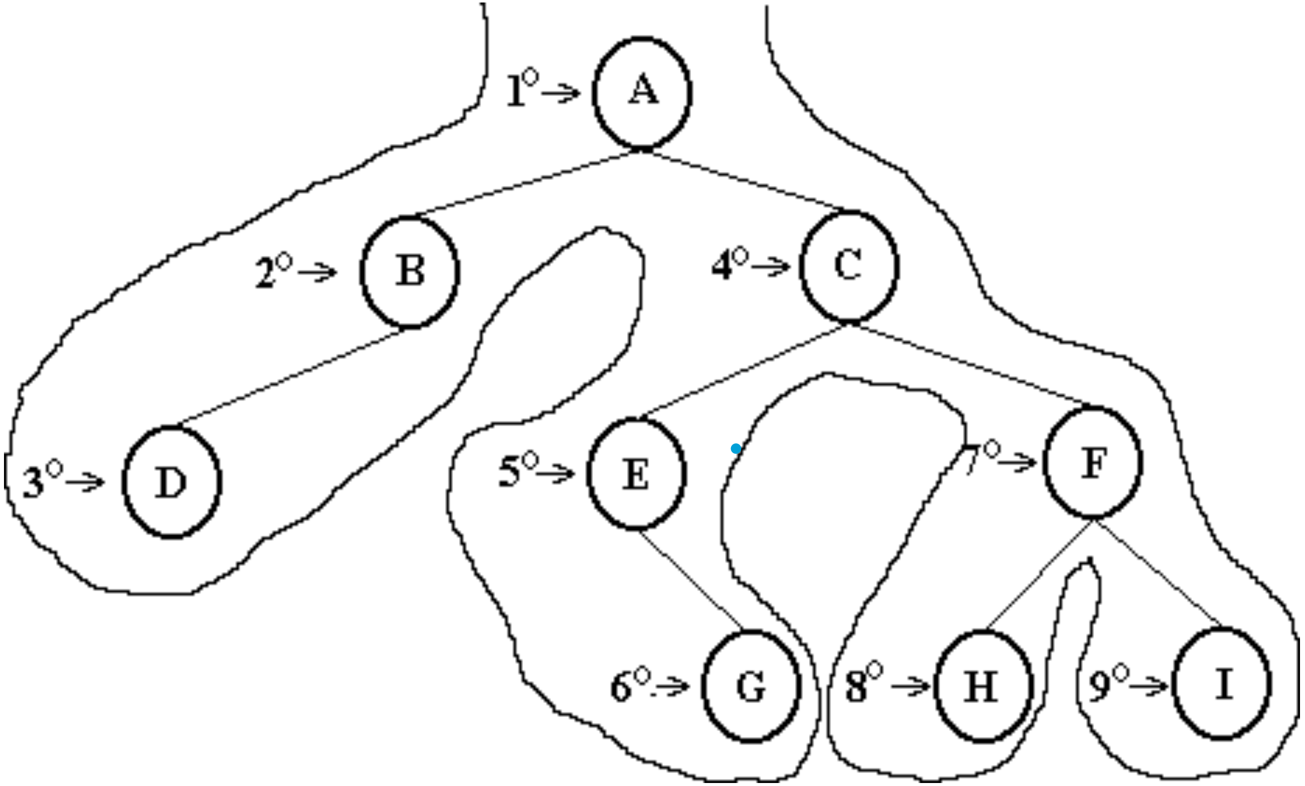
Árvores Binárias – Caminhamento

- Simétrica – caminhamento simétrico da sub-árvore esquerda, seguida da raiz, e seguida do caminhamento simétrico da subárvore direita

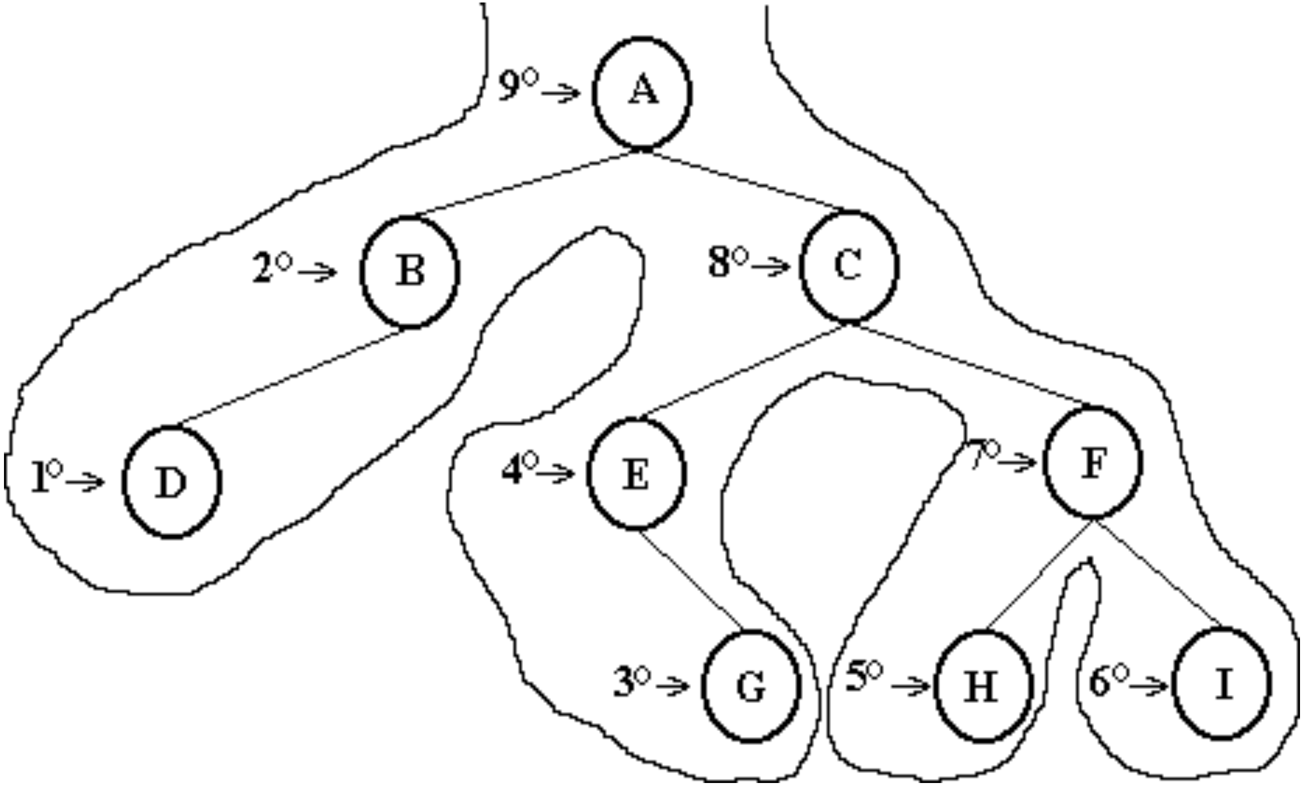



F
B
G
A
D
I
C
E
H

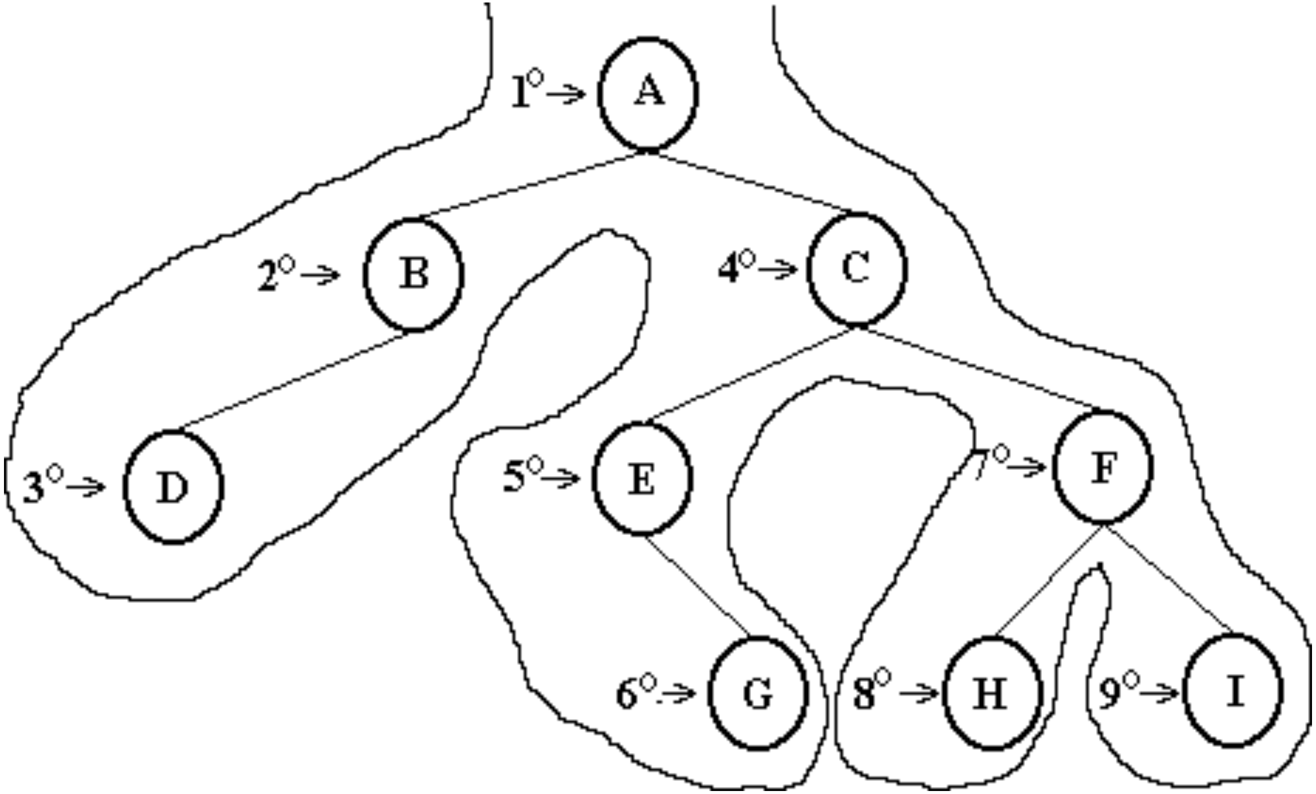
Árvores Binárias – Cam. PréOrdem



Árvores Binárias – Cam.PósOrdem



Árvores Binárias – Cam. Simétrico

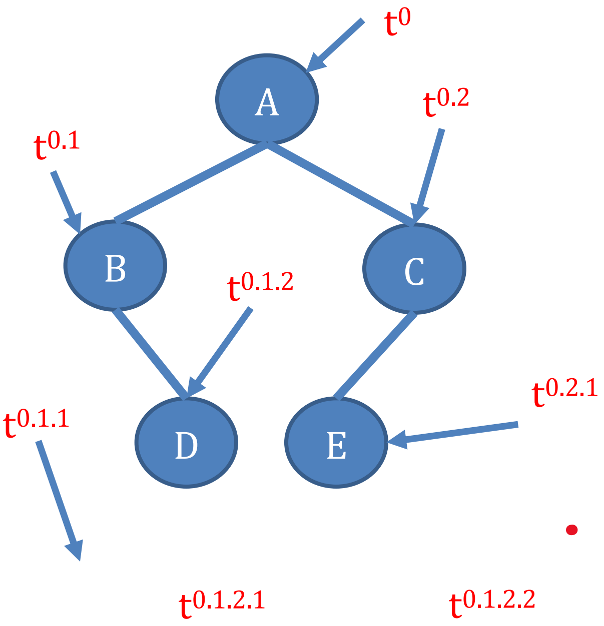


Implementação - Caminhamento

typedef struct _tnode_ {
void *item;
struct t_node *left;
struct t_node *right;
}TNode;

```
void preOrdem ( TNOde *t, void (*visit)(void *))
{
  if ( t != NULL ) {
    visit(t->item);
    preOrdem ( t->left, visit);
    preOrdem ( t->right, visit);
  }
}
```

```
void preOrdem (t, visit){
  if ( t != NULL ) {
    visit(t->item);
    preOrdem ( t->left, visit);
    preOrdem ( t->right, visit);
  }
}
```



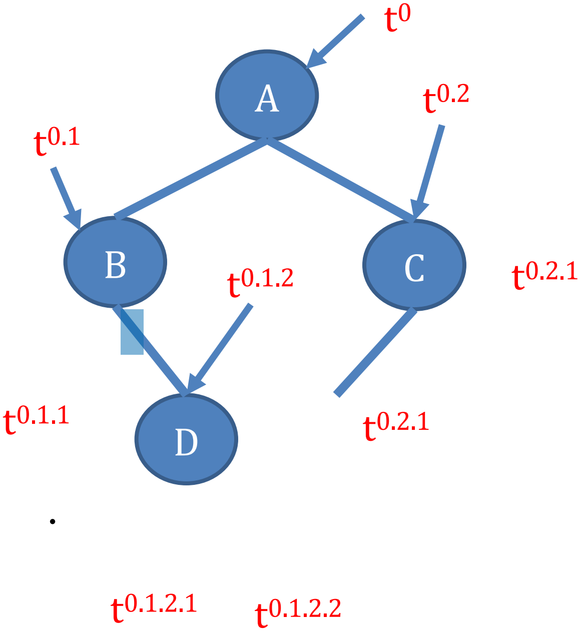

```
void preOrdem (t^0(&A), visit){
  if ( t^0 != NULL ) {
    visit(t^0->item);
    preOrdem ( t^0->left, visit) (t^0.1(&B), visit){
        if ( t^0.1 != NULL ) {
          visit(t^0.1->item);
          preOrdem ( t^0.1->left, visit) (t^0.1.1(NULL), visit) {
               if  ( t^0.1.1 != NULL ) {
                 visit(t->item);
                 preOrdem ( t->left, visit);
                 preOrdem ( t->right, visit);
               }
          }
          preOrdem ( t^0.1->right, visit) (t^0.1.2(&D), visit) {
             if  ( t^0.1.2 != NULL ) {
                 visit(t^0.1.2->item);
                 preOrdem ( t^0.1.2->left, visit); (t^0.1.2.1(&NULL), visit)
                 preOrdem ( t^0.1.2->right, visit); (t^0.1.2.2(&NULL), visit)
             }
          }

        }
  }
  preOrdem ( t^0->right, visit); (t^0.2(&C), visit){
        if ( t^0.2 != NULL ) {
          visit(t^0.2->item);
          preOrdem ( t^0.2->left, visit)  (t^0.2.1(&E), visit) {
                if ( t^0.2.1 != NULL ) {
                  visit(t^0.2.1->item);
                  preOrdem ( t^0.2.1->left, visit) (t^0.2.1.1(NULL), visit)
                  preOrdem ( t^0.2.1->right, visit) (t^0.2.1.2(NULL), visit)
          preOrdem ( t^0.2->right, visit) (t^0.2.2(NULL), visit)
```

A B D C E

Implementação - Caminhamento

```
void posOrdem ( TNOde *t, void (*visit)(void *))
{
  if ( t != NULL ) {
    posOrdem ( t->left, visit);
    posOrdem ( t->right, visit);
    visit(t->item);
  }
}
```

```
void Simetrico (t,visit) {
  if ( t != NULL ) {
    Simetrico( t->left, visit);
    visit(t->item);
    Simetrico ( t->right, visit);
  }
}
```



B D A C

```
void Simetrico (t^0,visit) t^0(&A){
  if ( t^0 != NULL ) {
   Simetrico( t^0->left, visit) (t^0.1(&B){
      if ( t^0.1 != NULL ) {
        Simetrico( t^0.1->left, visit);(t^0.1.1(NULL){
          if ( t^0.1.1 != NULL ) {
              Simetrico( t^0.1.1->left, visit);
              visit(t^0.1.1->item);
              Simetrico ( t^0.1.1->right, visit);
          }
        }
        visit(t^0.1->item);
        Simetrico ( t^0.1->right, visit); t^0.1.2(&D)
           if ( t^0.1.2 != NULL ) {
              Simetrico( t^0.1.2->left, visit);
              visit(t^0.1.2->item);
              Simetrico ( t^0.1.2->right, visit);
           }
         }
      }
   }
   visit(t^0->item);
   Simetrico ( t^0->right, visit); t^0.2 (&C) {
     if ( t^0.2 != NULL ) {
       Simetrico( t^0.2->left, visit);
       visit(t^0.2->item);
       Simetrico ( t^0.2->right, visit);
     }
```

Implementação - Caminhamento

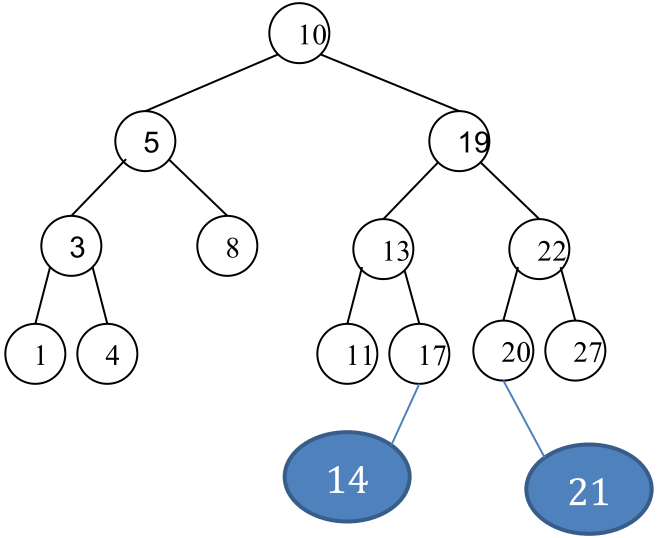
```
void Simetrico ( TNOde *t, void (*visit)(void *))
{
  if ( t != NULL ) {
    Simetrico( t->left, visit);
    visit(t->item);
    Simetrico ( t->right, visit);
  }
}
```

Arvore Binaria de Pesquisa (busca)

•

Muito rápido para consultar um nó
- O(logn) •

Fazer o

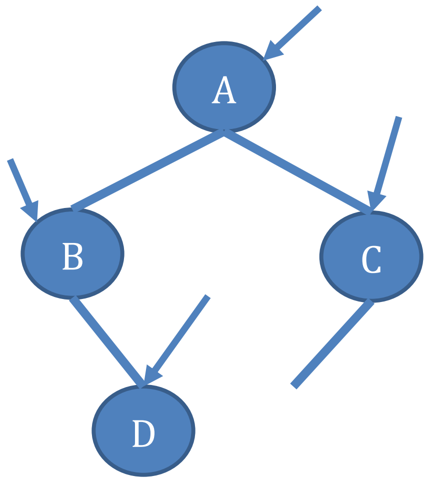


Lista de Exercício

fazer para a arvore que esta neste slide a visitacao com execução expandida do algoritmo PosOrdem

Implementar um TAD Arvore Binaria de Pesquisa com quatro funções:

- Criar uma arvore vazia
- Inserir num dado numa arvore
- Remover um dado de uma arvore
- Listar em visitação simétrica.



Refazer o programa que vc já fez duas vezes com as seguintes funções:

- Inserir dados
- Remover dado
- Consultar dado

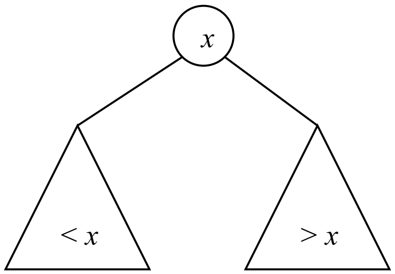
Listar em visitação simetrica

Dicionários

- A operação de busca é fundamental em diversos contextos da computação
- Por exemplo, um dicionário é uma estrutura de dados que reúne uma coleção de chaves sobre a qual são definidas as seguintes operações :
  - Inserir (x, T) : inserir chave x no dicionário T
  - Remover (x, T) : remover chave x do dicionário T
  - Buscar (x, T) : verdadeiro apenas se x pertence a T
- Outras operações são comuns em alguns casos:
  - Encontrar chave pertencente a T que sucede ou precede x
  - Listar todas as chaves entre x1 e x2

Árvores Binárias de Busca

- Uma maneira simples e popular de implementar dicionários é uma estrutura de dados conhecida como árvore binária de busca
- Numa árvore binária de busca, todos os nós na subárvore à esquerda de um nó contendo uma chave x são menores que x e todos os nós da subárvore à direita são maiores que x

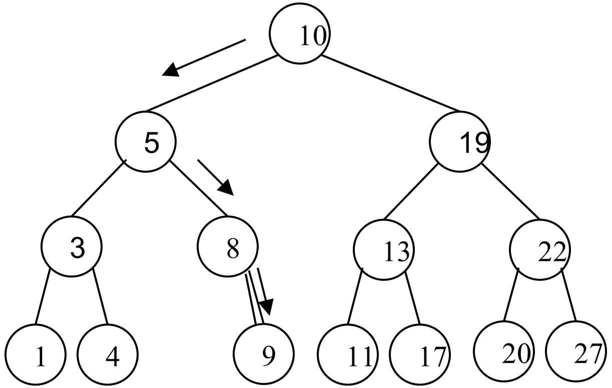


Busca e Inserção em Árvores Binárias de Busca

```
proc Buscar (Chave x, Árvore T) {
  se T = Nulo então retornar falso
  se x = T->Val então retornar verdadeiro
  se x < T->Val então retornar Buscar (x, T->Esq)
  retornar Buscar (x, T->Dir)
}
proc Inserir (Chave x, var Árvore T) {
  se T = Nulo então {
    T = Alocar (NoArvore)
    T->Val, T->Esq, T->Dir = x, Nulo, Nulo
  }
  senão {
    se x < T->Val então Inserir (x, T->Esq)
    se x > T->Val então Inserir (x, T->Dir)
  }
}
```

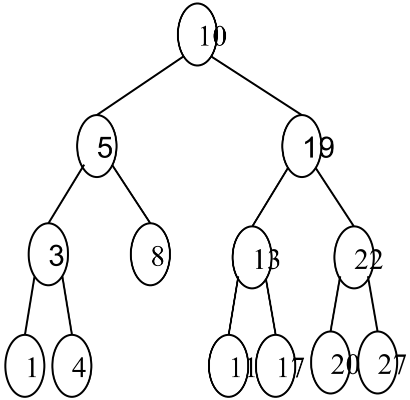
Inserção em Árvores Binárias de Busca

Inserir (9, *T*)



```
void *abpQuery( TNode *t, void *key, int (*cmp)(void *, void *))
    int stat;
       if ( t != NULL ) {
         stat = cmp(key, t->data);
          if ( stat == 0 ) {
              return t->data;
          }else if (stat < 0 ) {
             return  abpQuery(t->left, key, cmp);
          } else {
              return  abpQuery(t->right, key, cmp);
          }
       }
       return NULL;
}
```

```
TNode *abpInsert( Tnode *t, void *data, int (*cmp)(void *, void *))
{.      Tnode *newnode;   int stat;
        if ( t != NULL ) {
           stat = cmp(data, t->data);
            if ( stat <= 0 ) {
                t->left = abpInsert(t, data, cmp);
             }else {
               t->right = abpInsert(t, data, cmp);
             }
            return t;
        } else {
             newnode = (Tnode *) maloc (sizeof(TNode));
              if (newnode != NULL ) {
                   newnode->data = data;
                    newnode->left = newnode->right = NULL;
                    return newnode;
             } else {
                     return NULL;
             }
       }
}
```

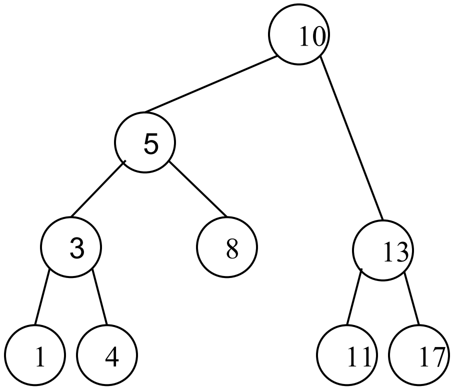



```
TNode *abpInsert( Tnode *t, void *data, int (*cmp)(void *, void *))
{.      Tnode *newnode;   int stat;
        if ( t != NULL ) {
          stat = cmp(data, t->data);
          if ( stat <= 0 ) {
              t->left = abpInsert(t, data, cmp);
          }else {
              t->right = abpInsert(t, data, cmp);
          }
          return t;
        } else {
          newnode = (Tnode *) maloc (sizeof(TNode));
          if (newnode != NULL ) {
              newnode->data = data;
              newnode->left = newnode->right = NULL;
              return newnode;
          } else {
              return NULL;
          }
        }
}
```

```
t = abpInsert(t, data, cmp) {
      if ( t != NULL ) {
        stat = cmp(data, t->data);
         if ( stat <= 0 ) {
           t->left = abpInsert(t->left , data, cmp) {
                   if ( t != NULL ) {
                     stat = cmp(data, t->data);
                   if ( stat <= 0 ) {
                    }else {
                      t->right = abpInsert(t->right, data, cmp); {
                              if ( t != NULL ) {
                                stat = cmp(data, t->data);
                                 if ( stat <= 0 ) {
                                  t->left = abpInsert(t->left , data, cmp) {
                                          if ( t != NULL ) {
                                           } else {
                                             newnode = (Tnode *) maloc (sizeof(TNode));
                                             if (newnode != NULL ) {
                                                 newnode->data = data;
                                                  newnode->left = newnode->right = NULL;
                                                  return newnode;
```

Remoção em Árvores Binárias de Busca

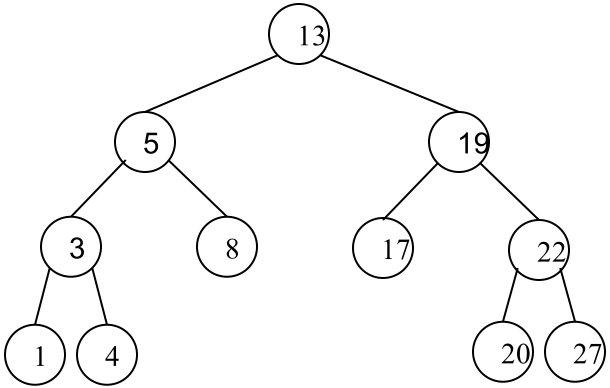
- Para remover uma chave x de uma árvore T temos que distinguir os seguintes casos
  - x está numa folha de T : neste caso, a folha pode ser simplesmente removida
  - x está num nó que tem sua subárvore esquerda ou direita vazia: neste caso o nó é removido substituído pela subárvore não nula



Remover (19, *T*)

Remoção em Árvores Binárias de Busca

- Se x está num nó em que ambas subárvores são não nulas, é preciso encontrar uma chave y que a possa substituir. Há duas chaves candidatas naturais:
  - A menor das chaves maiores que x ou
  - A maior das chaves menores que x



Remover (10, *T*)

```
TNode *abpRemove( Tnode *t, void *key, int (*cmp)(void *, void *), void  **data)
{       void *data2;
        if ( t != NULL ) {
          stat = cmp(data, t->data);
           if ( stat < 0 ) {
                t->left = abpRemove(t->left, key, cmp);
                 return t;
           } else if ( stat > 0 ) {
                 t->right = abpRemove(t->right, key, cmp);
           } else {
                  if (t->left == NULL && t->right == NULL) {
                        *data = t->data;
                           free(t);
                          return.   NULL;
                 } else  if (t->left == NULL ) {
                     aux = t->right; *data = t->data;
                      free(t);
                       return aux;
                  } else if ( t->right == NULL ) {
                      aux = t->left; *data = t->data;
                      free(t);
                       return aux;
                } else {
                       *data = t->data;
                         t->right = abpRemoveMenor(t->right, kewy, cmp, &data2);
                          t->data = data2;
                         return t;
                }
           }
```

```
TNode *abpRemoveMenor( Tnode *t, void *key, int (*cmp)(void *, void *),
void  **data)
{       void *data2;
         if ( t!= NULL ) {
             if ( t-> left != NULL ) {
                    t->left = abpRemoveMenor(t->left, kewy, cmp, &data2);
             } else {
                  if (t->right != NULL ) {
                      aux = t->right; *data = t->data;
                       free(t);
                        return aux;
                  } else  {
                         *data = t->data;
                       free(t);
                        return NULL;
             }
        }
         *data = NULL;
         return NULL;
}
```

Retorna o menor nó de uma arvore

```
void * abpGetMin ( Tnode *t)
{
   if ( t ! = NULL ){
       if ( t->left  != NULL) {
              return abpGetMin (t->left);
       } else {
              returnm t->data;
       }
   }
   return NULL;
}
```

Retorna o menor nó de uma arvore

```
void * abpGetMax ( Tnode *t)
{
   if ( t ! = NULL ){
       if ( t->rioght  != NULL) {
              return abpGetMin (t->right);
       } else {
              returnm t->data;
       }
   }
   return NULL;
}
```

Remoção em Árvores Binárias de Busca

```
proc RemoverMenor (var Árvore T) {
 se T->Esq = Nulo então {
  tmp = T
  y = T->Val
  T = T->Dir
  Liberar (tmp)
  retornar y
 }
 senão
  retornar RemoverMenor (T->Esq)
}
```

```
TNode *abpRemoveMenor( Tnode *t, void *key, int (*cmp)(void *, void *),
                                    void  **data)
{       void *data2;
        if ( t->left == NULL ) {
          *data2 = t->data;
            free (t);
             return NULL;
         } else  {
                return abpMenor(t->right, kewy, cmp, &data2);
        }
}
```

Remoção em Árvores Binárias de Busca

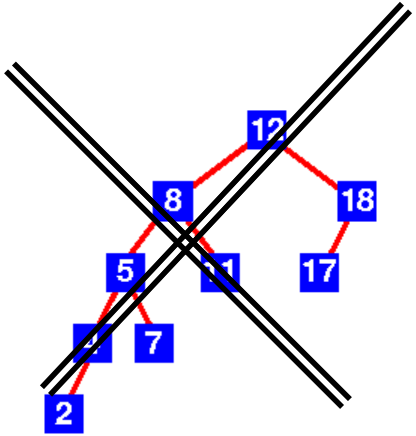
```
proc Remover (Chave x, Árvore T) {
 se T ¹ Nulo então
  se x < T->val então Remover (x, T->Esq)
  senão se x > T->val então Remover (x, T->Dir)
  senão
   se T->Esq = Nulo então {
    tmp = T
    T = T->Dir
    Liberar (tmp)
   }
   senão se T->Dir = Nulo então {
    tmp = T
    T = T->Esq
    Liberar (tmp)
   }
   senão T->Val = RemoverMenor (T->Dir)
}
```

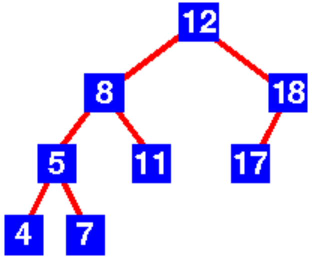
Árvores Binárias de Busca - Complexidade

- A busca em uma árvore binária tem complexidade O(h)
- A altura de uma árvore é,
  - no pior caso, n
  - no melhor caso, $\lfloor \log 2\ n \rfloor + 1$ (árvore completa)
- Inserção e remoção também têm complexidade de pior caso O(h), e portanto, a inserção ou a remoção de n chaves toma tempo
  - O(n2) no pior caso ou
  - O(n log n) se pudermos garantir que árvore tem altura logarítmica

Árvore Binária Balanceada

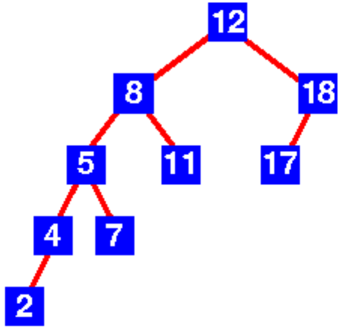
- Árvore Binária Balanceada
  - para cada nó, as alturas de suas subárvores diferem de, no máximo 1.



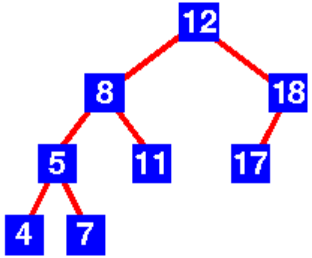


Árvores AVL

- 1962: Matemáticos Russos G.M. Adelson-Velskki e E.M.Landis sugeriram uma definição para "near balance"e descreveram procedimentos para inserção e eliminação de nós nessas árvores.
- Propriedades
  - árvore binária
  - altura da subárvore esquerda e altura da subárvore direita diferem de no máximo uma unidade
  - subárvores são árvores AVL



~~Árvore AVL~~



Árvore AVL

Árvores AVL

- Em geral, rebalancear uma árvore quando ela deixa de ser completa (devido a uma inserção ou remoção por exemplo) pode ser muito custoso (até n operações)
- Uma idéia é estabelecer um critério mais fraco que, não obstante, garanta altura logarítmica
- O critério sugerido por Adelson-Velskii e Landis é o de garantir a seguinte invariante:
  - Para cada nó da árvore, a altura de sua subárvore esquerda e de sua subárvore direita diferem de no máximo 1
- Para manter essa invariante depois de alguma inserção ou remoção que desbalanceie a árvore, utiliza-se operações de custo O(1) chamadas rotações

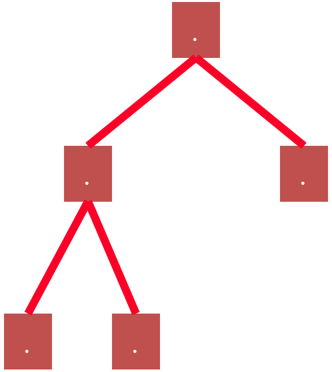
Árvores AVL

- Uma árvore AVL tem altura logarítmica?
  - Seja N(h) o número mínimo de nós de uma árvore AVL de altura h
  - Claramente, N(1) = 1 e N(2) = 2
  - Em geral, N(h)= N(h – 1) + N(h – 2)+1
  - Essa recorrência é semelhante à recorrência obtida para a série de Fibonacci
  - Sua solução resulta aproximadamente em

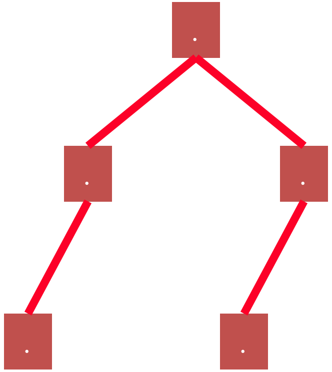
$$N(h) \approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^h \approx 1.618^h$$

Árvore Perfeitamente Balanceada

- Árvore Binária Perfeitamente Balanceada
  - para cada nó, o número de nós de suas subárvores diferem de no máximo, 1.
  - Árvore com menor altura para o seu número de nós.



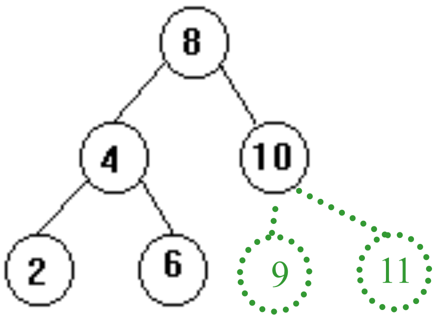
Balanceada

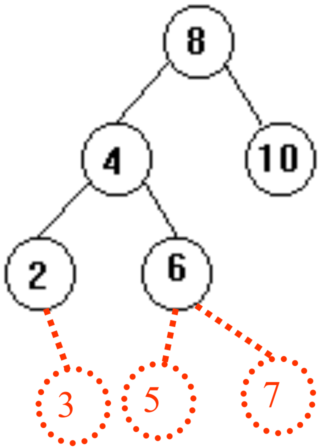


Perfeitamente Balanceada

Árvores AVL - Exemplo Desbalanceamento

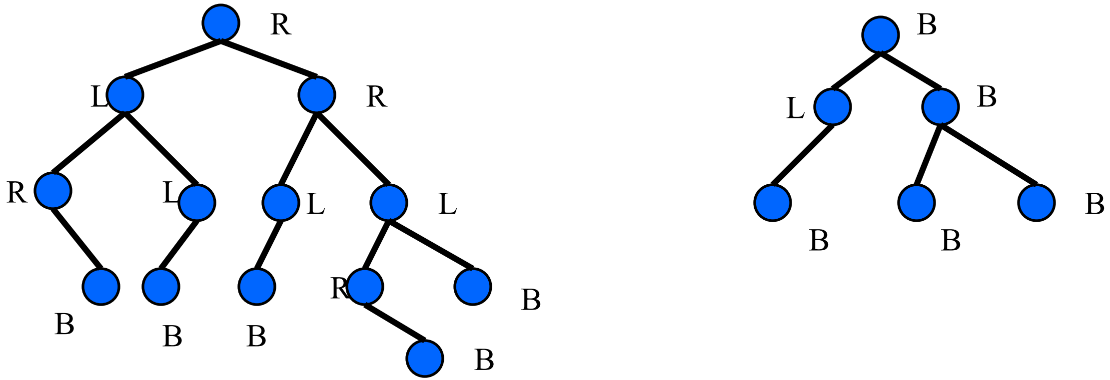
- Nós 9 ou 11 pode ser inseridos sem balanceamento .
- Inserção dos nós 3, 5 ou 7 requerem que a árvore seja rebalanceada!





Indicador de balanceamento

- Para prevenir desbalanceamento, cada nó possui um indicador de balanceamento:
  - LeftHeavy - subárvore esquerda do nó possui altura uma unidade maior que a da direita.
  - Balance - as duas subárvores possuem mesma altura
  - RightHeavy - subárvore direita do nó possui altura uma unidade maior que a da esquerda.



Árvores AVL - Estrutura de Dados

- Acrescenta-se o flag para indicar o estado de balanceamento

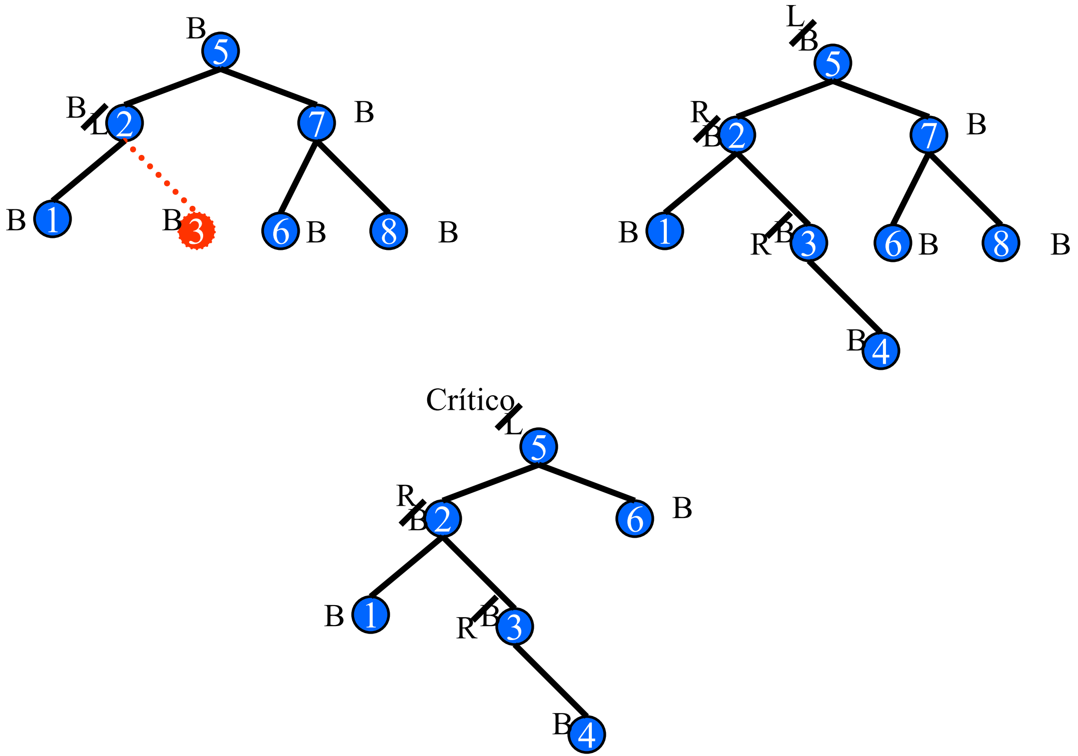
```
struct AVL_node {
    char bf;
    void *item;
    struct AVL_node *left, *right;
}AVLNode;
```

- Inserção
  - Insira um novo nó, como em qualquer árvore binária
  - Verifique se causou desbalanceamento e rebalanceie se necessário

Inserção - Atualização do Indicador de Balanceamento

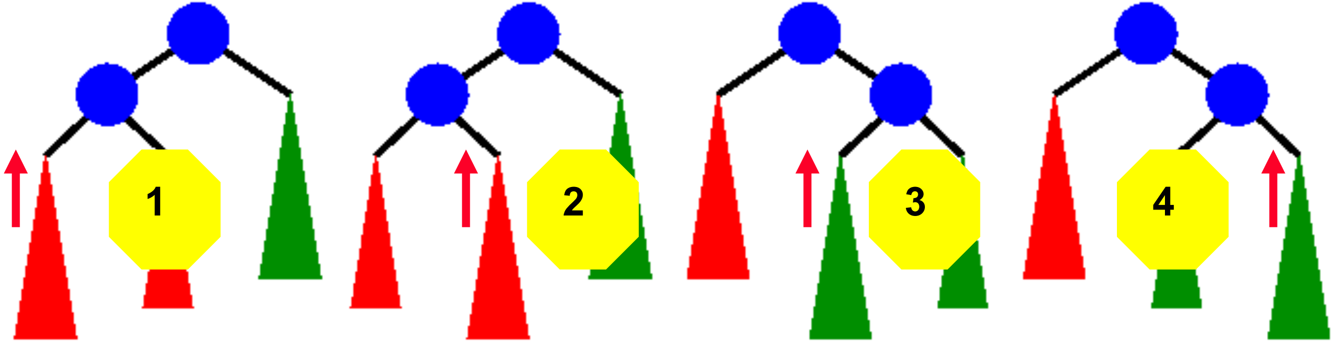
- Somente nós no caminho entre o nó inserido e a raiz (Path)
- Mudanças possíveis:
  - nó estava LeftHeavy ou RightHeavy e se tornou balanceado
    - o indicador de todos os ancestrais se mantém inalterados;
  - nó estava balanceado e se tornou LeftHeavy ou RightHeavy
    - muda os indicador dos ancestrais
  - nó estava LeftHeavy ou RightHeavy e se tornou desbalanceado
    - nó denominado nó crítico, sujeito a rebalanceamento

Inserção - Atualização do Indicador de Balanceamento



Árvores AVL - Rebalanceamento

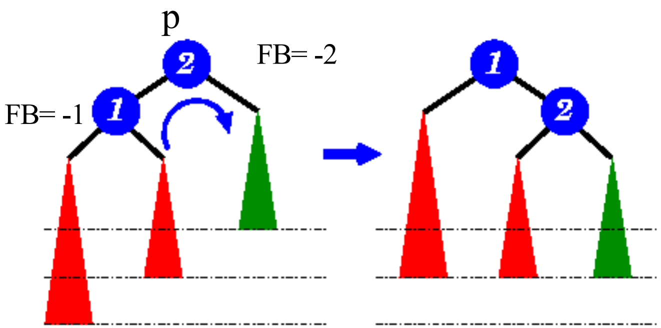
- Inserção pode gerar uma árvore não balanceada, quebrando a condição de árvore AVL
  - 4 casos

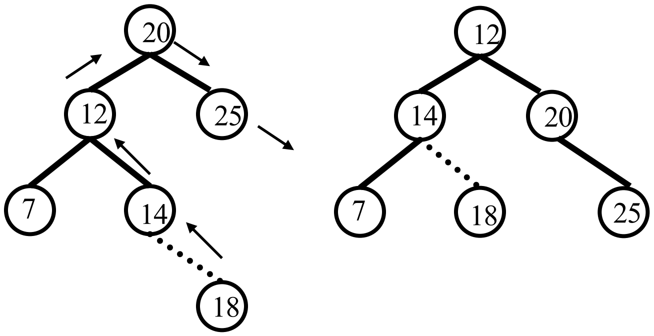


  - 1 e 4 representam o mesmo caso espelhado
  - 2 e 3 representam o mesmo caso espelhado

Árvores AVL - Rebalancemaneto

- Caso 1: Uma rotação

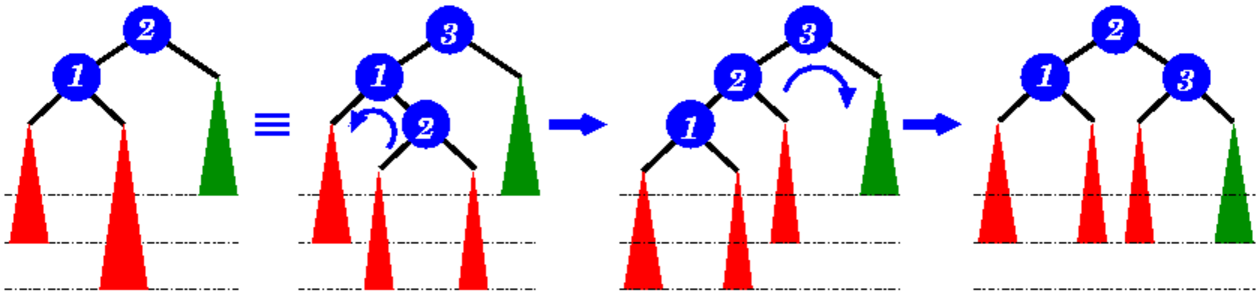




- Caso 4 resolvido com rotação semelhante

Árvores AVL - Rebalancemento

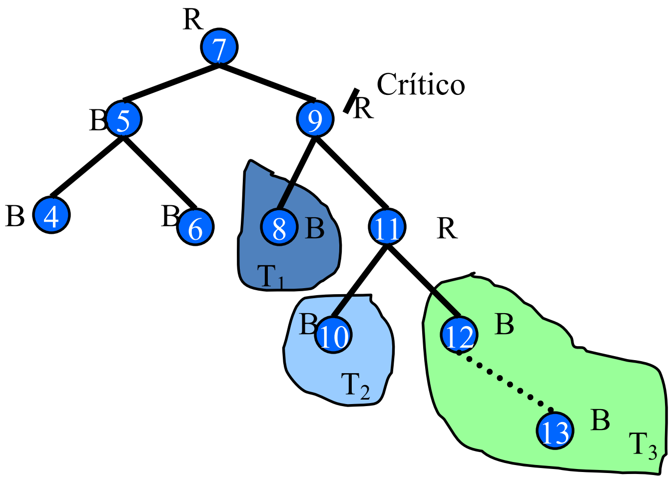
- Caso 2 : resolvido com duas rotações



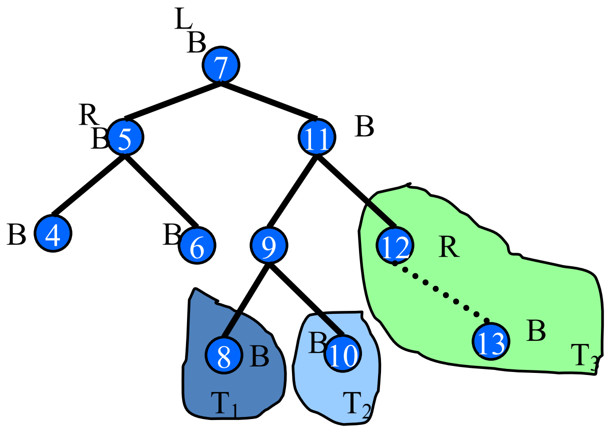
rotação à esquerda rotação à direita

- Caso 3 é resolvido com as rotações inversas

Árvores AVL - Algoritmo de Inserção - Exemplos

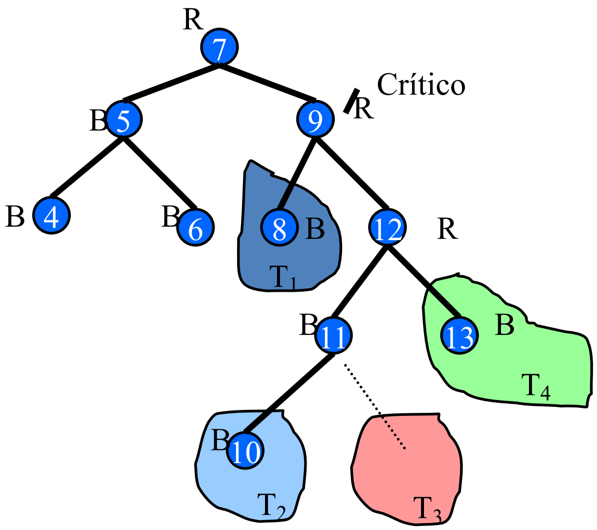


antes do balanceamento

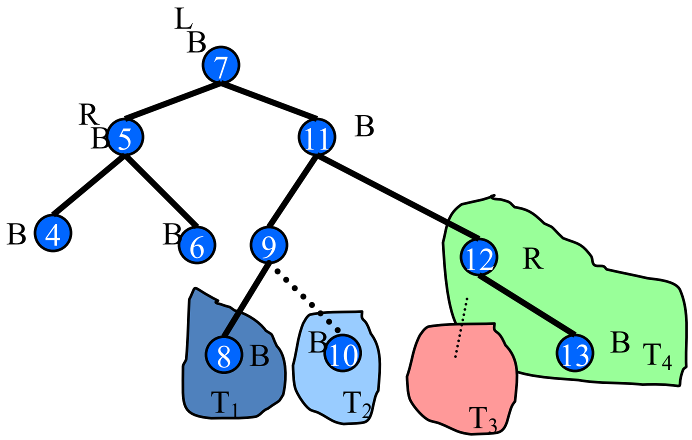


após o balanceamento

Árvores AVL - Algoritmo de Inserção - Exemplos



antes do balanceamento



após o balanceamento

Árvores AVL - Algoritmo de Inserção

```
void InsertAVL ( AVLNode *root, void *elm,
          void (*Compare)(void *a, void *b))
{
  int level;   char direction[MAX];
  AVLNode path[MAX], *t;
   if ( root == NULL ) {
       root = NewNode( elm);
       return;
   }
   level = 0;   direction[level] = 'L';
   path[level] = root; t = root;
   while (inserted == FALSE) {
     if ( Compare(t, elm) < 0 ) {
         level++;  path[level] = t;
         direction[level] = 'L';
         if( t->left != NULL ) {
              t = t->left;
          } else {
             new = NewNode(elm);
             t->left = new;
             inserted = TRUE;
          }
     } else if(Compare(t,elm) >=0 ) {
```

```
     } else if(Compare(t,elm) >=0 ) {
         level++;  path[level] = t;
         direction[level] = 'R';
         if( t->right != NULL ) {
              t = t->right;
          } else {
             new = NewNode(elm);
             t->right = new;
             inserted = TRUE;
          } /* fi */
   }  /* elihw *
   UpdateBalancing(root, direction, path, level,
                          Compare);
}
```

Árvores AVL - Algoritmo de Inserção

```
void UpdateBalancing ( char  *direction , AVLNode*path,
                          int level, void (*comp)(void *, void *))
{
  int mark = 0, i = level, found=FALSE;
  AVLNode x, y; char d;
  while(i>0 && found == FALSE){
    if(path[i]->bf != Balanced) {
      mark = i; found = TRUE;
    } /* fi */
    i++;
  } /* elihw */
  for (i=mark+1; i<level; i++) {
   if(comp(path[i]->data, elm) <0) {
      path[i]->bf = LeftHeavy;
   } else  {
      path[i]->bf = RightHeavy;
   }
  }
  if ( mark = 0 ) {
     return;
  } else {
     d = direction[mark];
     x = path[mark];
     y = path[mark+1];
     if ( x->bf != d ) {
       x->bf = Balanced;
       return;
     }
     if ( y->bf == d ) {
      BalanceCase1( x, y, path[mark-1] );
      return;
    }
    BalanceCase2(x, y, path[mark-1] );
  } /* fi mark=0 */

}
```

Árvores AVL - Algoritmo de Inserção

```
void BalanceCase1 ( AVLNode *x, AVLNode *y, AVLNode *father, char direction)
{
   if (direction == 'L') {
     x->left = y->right;
     y->right = x;
   } else {
     x->right = y;
     y->left  = x;
   }
   x->bf = y->bf = 'B';
   if ( x = father->left ) {
      father->left = y;
   } else {
      father->right = y;
   }
}
```

Árvores AVL - Algoritmo de Inserção

```
void BalanceCase1 ( AVLNode *x, AVLNode *y,
                    AVLNode *father, char direction)
{
  AVLNode *z;
  if (direction == 'L') {
    z = y->right;
    y->right = z->left;
    z->left = y;
    x->left = z->right;
    z->right = x;
  } else {
    z = y->right;
    y->left  = z;
    z->right = y;
    x->right = z->left;
    z->left = x;
  }
  if ( x = father->left ) {
     father->left = z;
  } else {
     father->right = z;
  }
```

```
  if ( z->bf == direction ) {
    y->bf = z->bf = 'B';
    if ( direction = 'L' ) {
      x->bf = 'R';
    } else {
      x->bf = 'L';
    }
  } else {
    if ( z->bf = 'B') {
     x->bf = y->bf =z->bf = 'B';
    } else {
     x->bf = z->bf = 'B';
     y->bf = direction;
    }
  }
}
```

Árvores Rubro Negras

- Árvore binária com um atributo extra: a cor do nó (preto ou vermelho) e com a ligação com o pai.

```
struct _redblack_node {
    enum { red, black } colour;
    void *item;
    struct redblack_node *left,  *right, *parent;
}RBNode;
```

- Definição: árvore binária de busca com as seguintes propriedades:

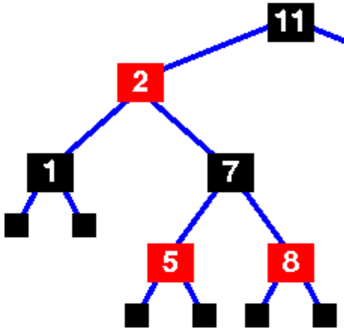
1. cada nó é vermelho ou preto.
2. Cada nó folha é preto.
3. Se um nó e vermelho, seus dois filhos são pretos.
4. Cada caminho entre um nó e seus nós folhas descendentes contém o mesmo número de nós pretos.

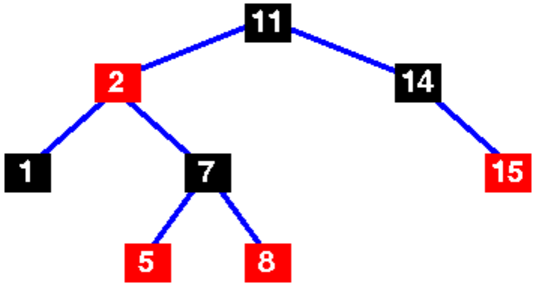
Árvores Rubro-Negras

- São árvores balanceadas segundo um critério ligeiramente diferente do usado em árvores AVL
- A todos os nós é associada uma cor que pode ser vermelha ou negra de tal forma que:
  - Nós externos (folhas ou nulos) são negros
  - Todos os caminhos entre um nó e qualquer de seus nós externos descendentes percorre um número idêntico de nós negros
  - Se um nó é vermelho (e não é a raiz), seu pai é negro
- Observe que as propriedades acima asseguram que o maior caminho desde a raiz uma folha é no máximo duas vezes maior que o de o qualquer outro caminho até outra folha e portanto a árvore é aproximadamente balanceada

Árvores Rubro Negras

- raiz e sempre preto
- raiz subárvores inexistentes também são preto



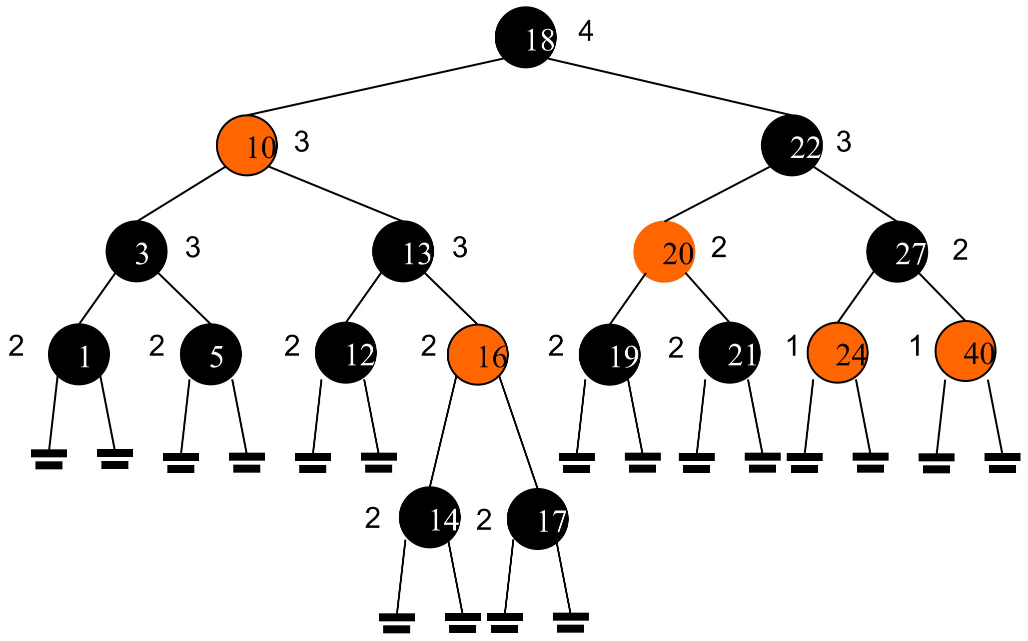


Vantagem:

Rebalanceamento é feito em um passo único

Árvores Rubro-Negras

- Altura negra de um nó = número de nós negros encontrados até qualquer nó folha descendente



Árvores Rubro-Negras

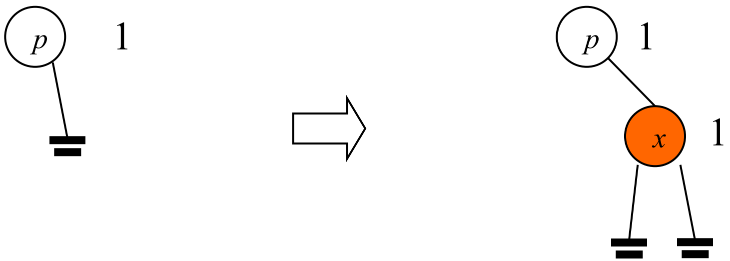
- Lema 1: Um nó x de uma árvore rubronegra tem no mínimo 2an(x) – 1 nós internos, onde an(x) é a altura negra de x
- Prova por indução
  - Caso base: Um nó de altura 0 (i.e., nó-folha) tem 0 = 20 – 1 nós internos
  - Caso genérico: Um nó x de altura h > 0 tem 2 filhos com altura negra an(x) ou an(x) – 1, conforme x seja vermelho ou negro. No pior caso, x é negro e as subárvores enraizadas em seus 2 filhos têm 2an(x) – 1 – 1 nós internos cada e x tem 2(2an(x) – 1 – 1)+1 = 2an(x) – 1 nós internos

Árvores Rubro-Negras

- Lema 2: Uma árvore rubro-negra com n nós tem no máximo altura 2 log2 (n+1)
  - Prova: Se uma árvore tem altura h , a altura negra de sua raiz será no mínimo h/2 (pelo critério 3 de construção) e a árvore terá n ≥ 2h/2 – 1 nós internos (Lema 1)
- Como conseqüência, a árvore tem altura O(log n) e as operações de busca, inserção e remoção podem ser feitas em O(log n)

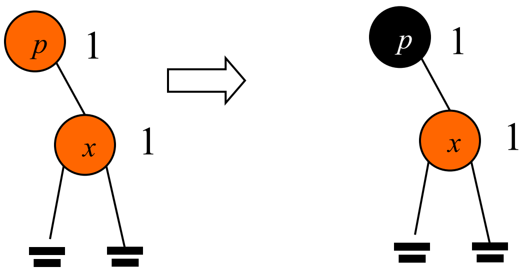
Inserção em Árvore Rubro-Negra

- Ao contrário da árvore AVL, agora temos agora vários critérios para ajustar simultaneamente
- Ao inserir um nó x numa posição vazia da árvore (isto é, no lugar de um nó nulo) este é pintado de vermelho. Isto garante a manutenção do critério (2), já que um nó vermelho não contribui para a altura negra



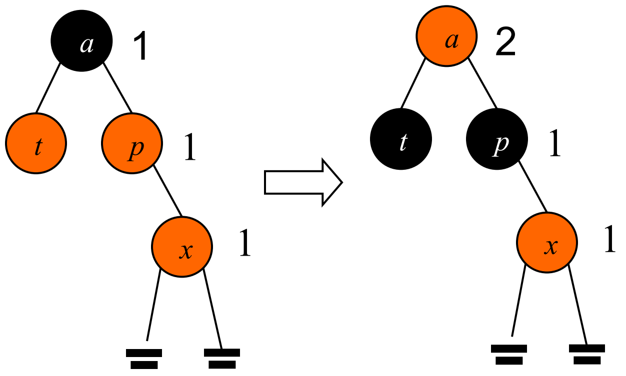
Inserção em Árvore Rubro-Negra

- [Caso 0] Se x não tem pai ou se p, o pai de x, é negro, nada mais precisa ser feito já que o critério (3) também foi mantido
- [Caso 1] Suponha agora que p é vermelho. Então, se p não tem pai, então p é a raiz da árvore e basta trocar a cor de p para negro



Inserção em Árvore Rubro-Negra

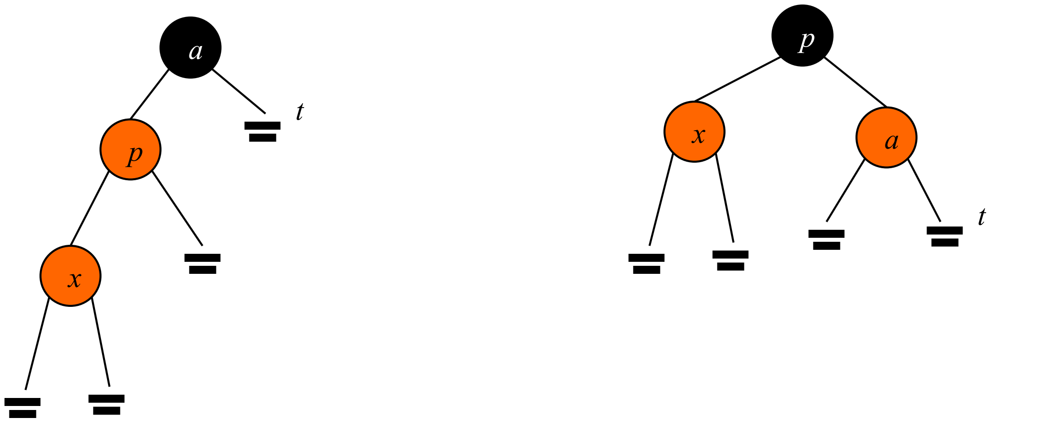
- [Caso 2] Suponha agora que p é vermelho e a, o pai de p (e avô de x) é preto. Se t, o irmão de p (tio de x) é vermelho, ainda é possível manter o critério (3) apenas fazendo a recoloração de a, t e p



Obs.: Se o pai de *a* é vermelho, o rebalanceamento tem que ser feito novamente

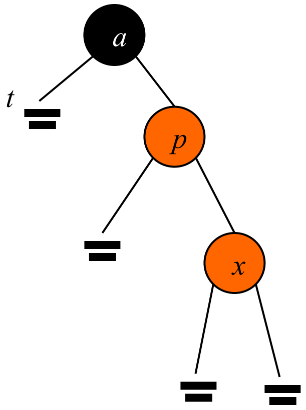
Inserção em Árvore Rubro-Negra

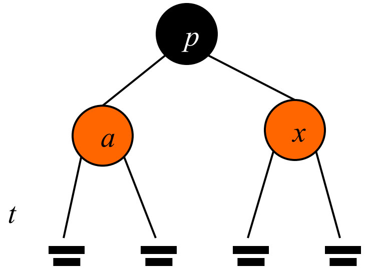
- [Caso 3] Finalmente, suponha que p é vermelho, seu pai a é preto e seu irmão t é preto. Neste caso, para manter o critério (3) é preciso fazer rotações envolvendo a, t, p e x. Há 4 subcasos que correspondem às 4 rotações possíveis:
  - [Caso 3a] Rotação Direita



Inserção em Árvore Rubro-Negra

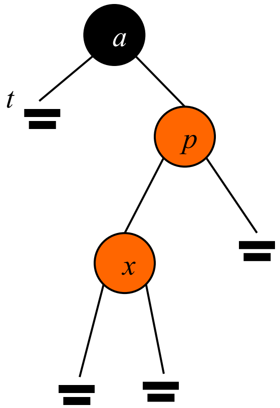
- [Caso 3b] Rotação Esquerda

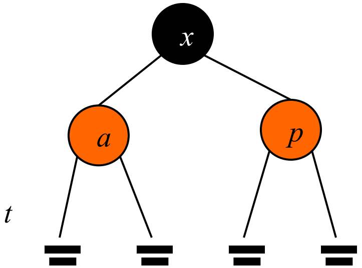




Inserção em Árvore Rubro-Negra

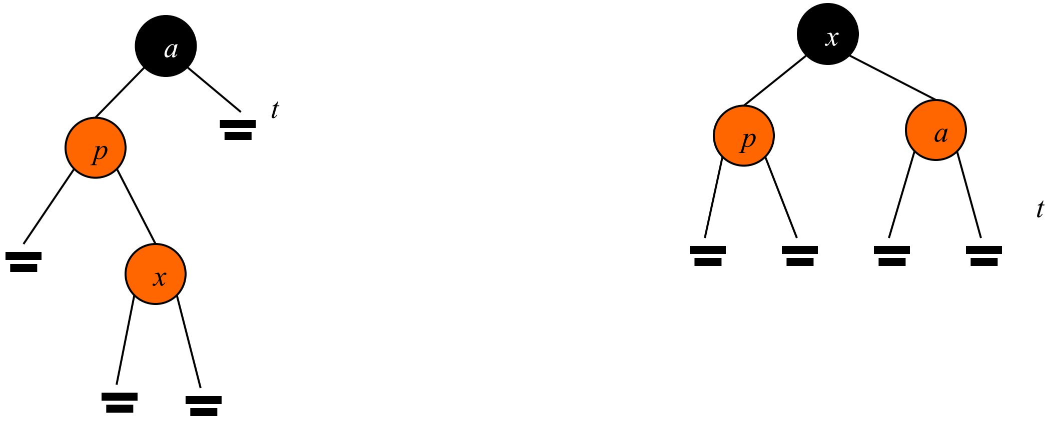
- [Caso 3c] Rotação Dupla Esquerda





Inserção em Árvore Rubro-Negra

- [Caso 3d] Rotação Dupla Direita



Inserção em Árvore Rubro-Negra

```
proc InsereRN (Chave v, var ArvoreRN a, p, x) {
 se x = Nulo então {
  x = Aloca (NoArvoreRN)
  x->Esq, x->Dir, x->Val, x->Cor = Nulo, Nulo, v, Vermelho
 } senão {
  se v < x->val então
   InsereRN (v, p, x, x->Esq)
  senão se v > x->val então
   InsereRN (v, p, x, x->Dir)
 }
 Rebalanceia (a, p, x)
}
```

Inserção em Árvore Rubro-Negra

proc Rebalanceia (var ArvoreRN a, p, x) {
se x->Cor = Vermelho e p ^{1} Nulo então
se p->Cor = Vermelho então
se a = Nulo então % Caso 1
p->cor := Negro
senão se a->Cor = Negro então
se a->Esq ^{1} Nulo e a->Dir ^{1} Nulo e a->Esq->Cor = Vermelho
e a->Dir->Cor = Vermelho então % Caso 2
a->Cor, a->Esq->Cor, a->Dir->Cor = Vermelho, Negro, Negro
senão
se p = a->Esq
se x = p->Esq então RotacaoDireita (a) % Caso 3a
senão RotacaoDuplaDireita (a) % Caso 3d
senão
se x = p->Dir então RotacaoEsquerda (a) % Caso 3b
senão RotacaoDuplaEsquerda (a) % Caso 3c

Inserção em Árvore Rubro-Negra

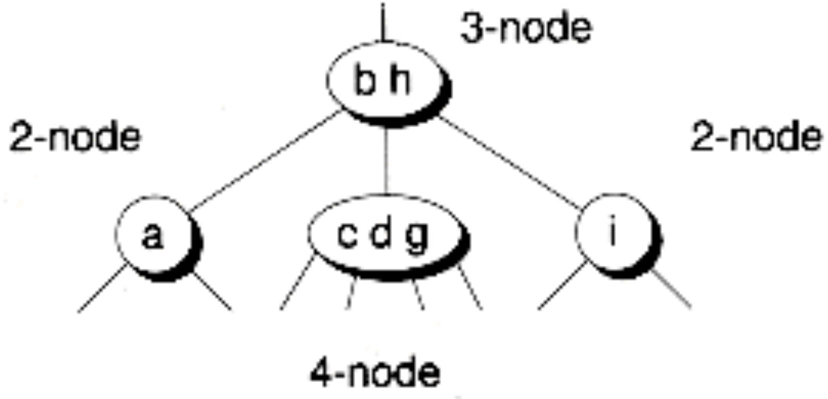
```
proc RotacaoDireita (var ArvoreRN T) {
  T, T->Esq, T->Esq->Dir = T->Esq, T->Esq->Dir, T
  T->Cor, T->Dir->Cor =  T->Dir->Cor, T->Cor
}
proc RotacaoEsquerda (var ArvoreRN T) {
  T, T->Dir, T->Dir->Esq = T->Dir, T->Dir->Esq, T
  T->Cor, T->Esq->Cor =  T->Esq->Cor, T->Cor
}
proc RotacaoDuplaDireita (var ArvoreRN T) {
  RotacaoEsquerda (T->Esq)
  RotacaoDireita (T)
}
proc RotacaoDuplaEsquerda (var ArvoreRN T) {
  RotacaoDireita (T->Dir)
  RotacaoEsquerda (T)
}
```

Complexidade da Inserção em Árvore Rubro-Negra

- Rebalanceia tem custo O(1)
- RotacaoXXX têm custo O(1)
- InsereRN tem custo O(log n)

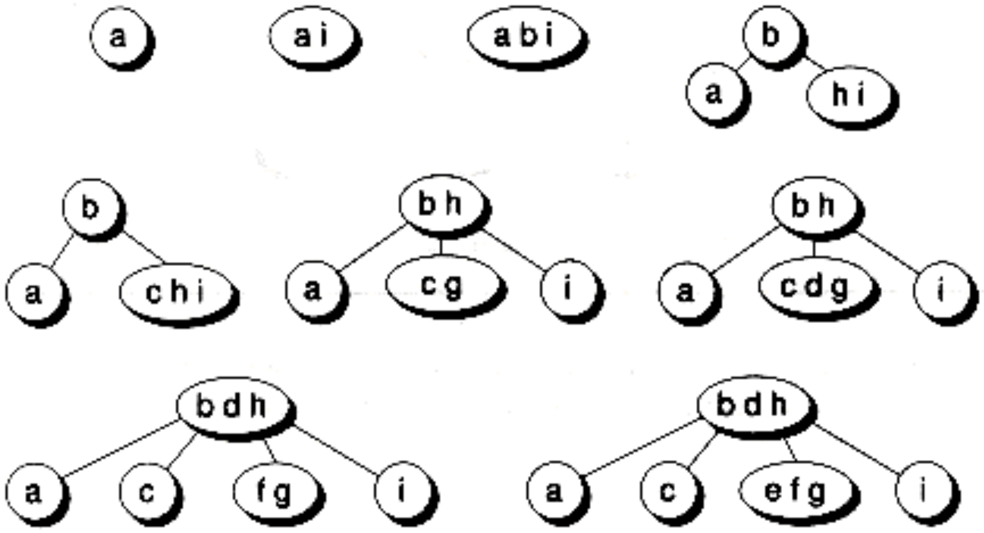
Árvores 2-3-4

- É uma árvore onde cada nó pode ter mais do que uma chave
- Na verdade, uma árvore 2-3-4 é uma árvore B onde a capacidade de cada nó é de até 3 chaves (4 ponteiros)



Árvores 2-3-4

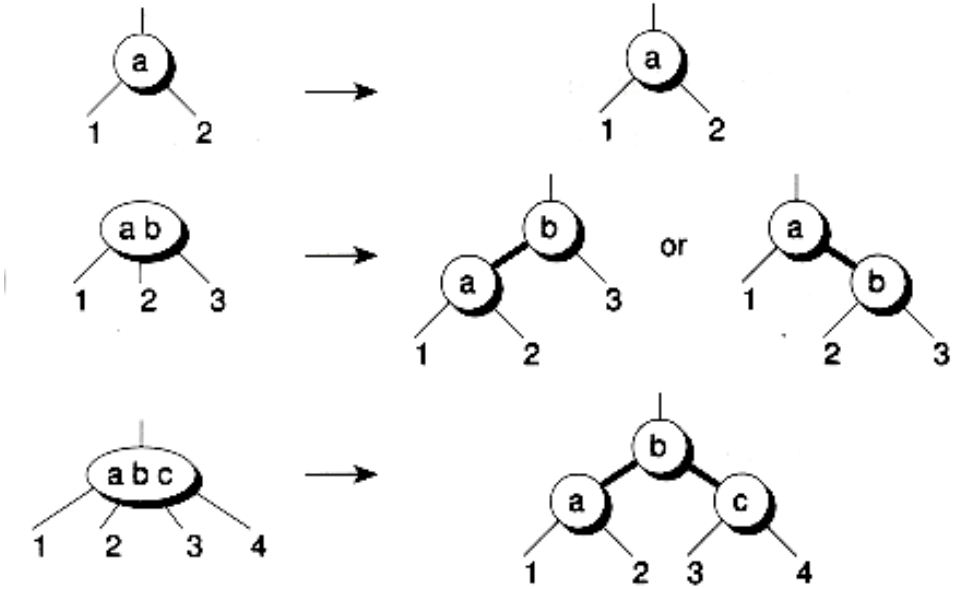
- Exemplo de inserção em árvores 2-3-4



Insertion sequence: a-i-b-h-c-g-d-f-e

Árvores 2-3-4

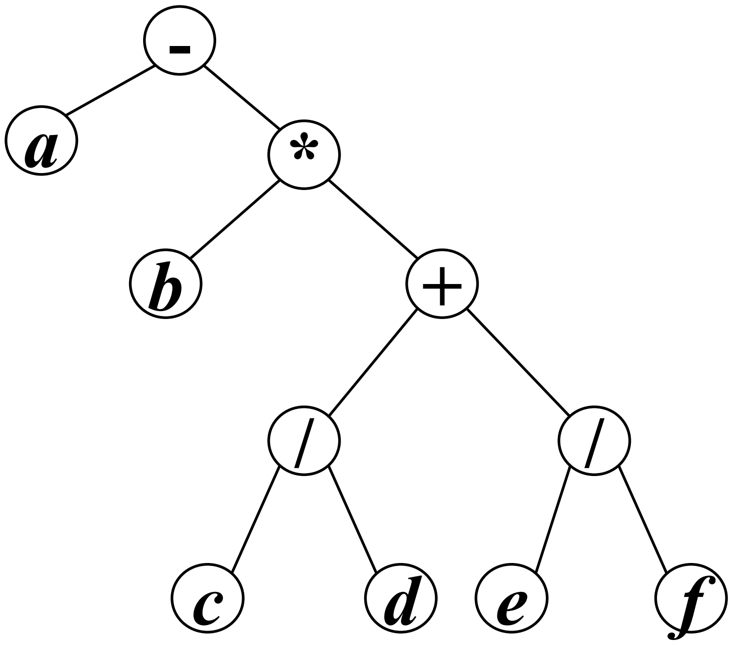
- Na verdade, uma árvore 2-3-4 pode ser implementada como uma árvore binária Rubro-Negra



Aplicações

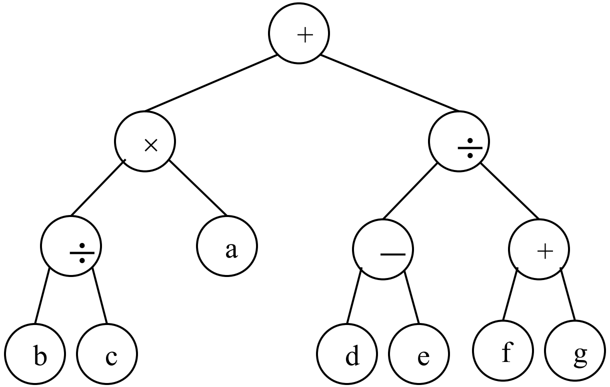
- Representação de expressões
- Exemplo:
- a-b(c/d+e/f) corresponde a arvore

- Caminhamento em:
- Preordem – prefixada
- Posordem - posfixada
- Simetrico - infixa



Aplicação: Expressões

- Uma aplicação bastante corriqueira de árvores binárias é na representação e processamento de expressões algébricas, booleanas, etc



(((b/c) * a)+((d-e)/(f+g)))

Avaliando uma Expressão

- Se uma expressão é codificada sob a forma de uma árvore, sua avaliação pode ser feita percorrendo os nós da árvore

```
proc Avalia (Arvore T) {
 se T->Val é uma constante ou uma variável então
  retornar o valor de T->Val
 senão {
  operando1 = Avalia (T->Esq)
  operando2 = Avalia (T->Dir)
  se T->Val = "+" então
   retornar operando1 + operando2
  senão se T->Val = "–" então
   retornar operando1 – operando2
  senão se T->Val = "*" então
   retornar operando1 * operando2
  senão se T->Val = "/" então
   retornar operando1 / operando2
 }
}
```

Resultados em Arvores Binárias

- Numero de folhas em uma arvore binária é igual ao número de nós de grau dois mais 1
  - Prova por indução no numero de nós

- Arvore binária completa de altura h possui 2h+1-1 nós

- Arvore binária completa de altura h possui 2h folhas

Aplicação – Código de Huffman

- Problema: Codificar uma mensagem (seqüência de caracteres) como uma seqüência de bits
- Dadas as probabilidades de aparecimento dos caracteres. Por exemplo:
  - caracteres a, b, c, d, tem probabilidades de aparecimento .12, .4, .15, .08, .25
- Para decodificar a mensagem o código deve possuir a propriedade de prefixo, isto é não existe caractere cujo código seja prefixo do código de outro

Aplicação – Exemplo de Códigos

- Duas codificações possíveis:

- A codificação da mensagem bcd e 001010011 com o código 1, e 1101001 com código 2.

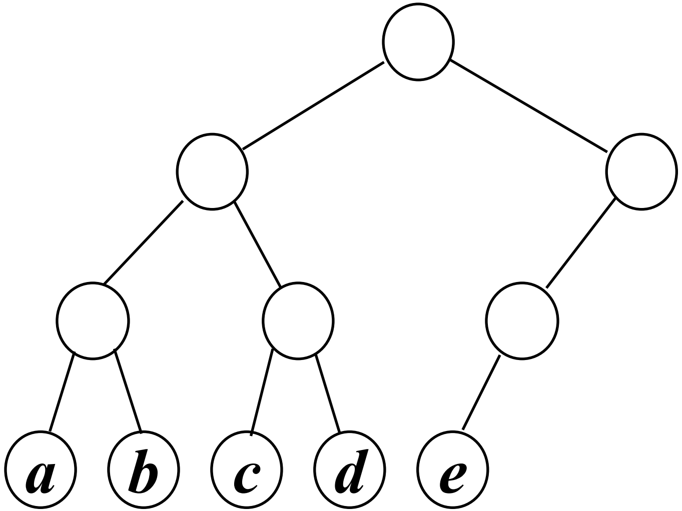
Aplicacao – Comprimento do Codigo

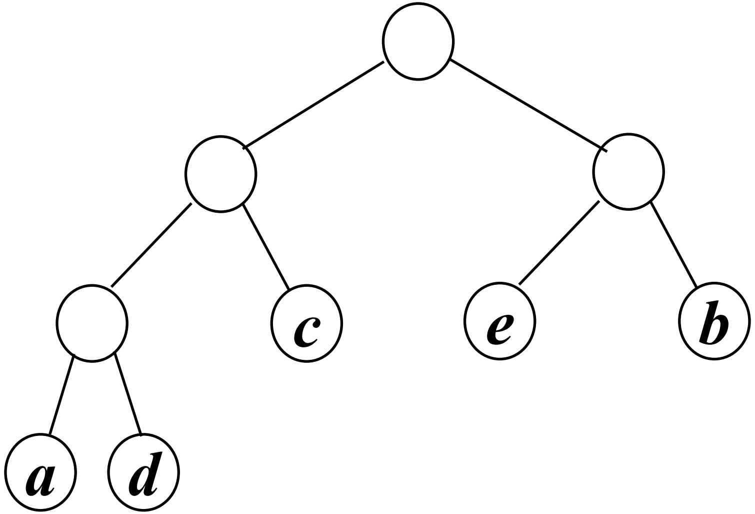
- Comprimento do código é a média ponderada dos comprimentos dos códigos para cada caractere
  - Por exemplo: código 1 tem comprimento 3, e código 2 possui 2.2
- Código de comprimento menor codificam mensagens com menos bits
- Objetivo: encontrar código com o menor comprimento possível

Propr. de Prefixo e Arv. Binarias

- Códigos binários correspondem a caminhos em uma arvore
  - Comece na raiz
  - Descendo pra direita adicione 1 ao código e descendo para a esquerda adicione zero
- Códigos para caminhos que vão ate as folhas possuem a propriedade de prefixo

Exemplos: - Códigos e Arvores

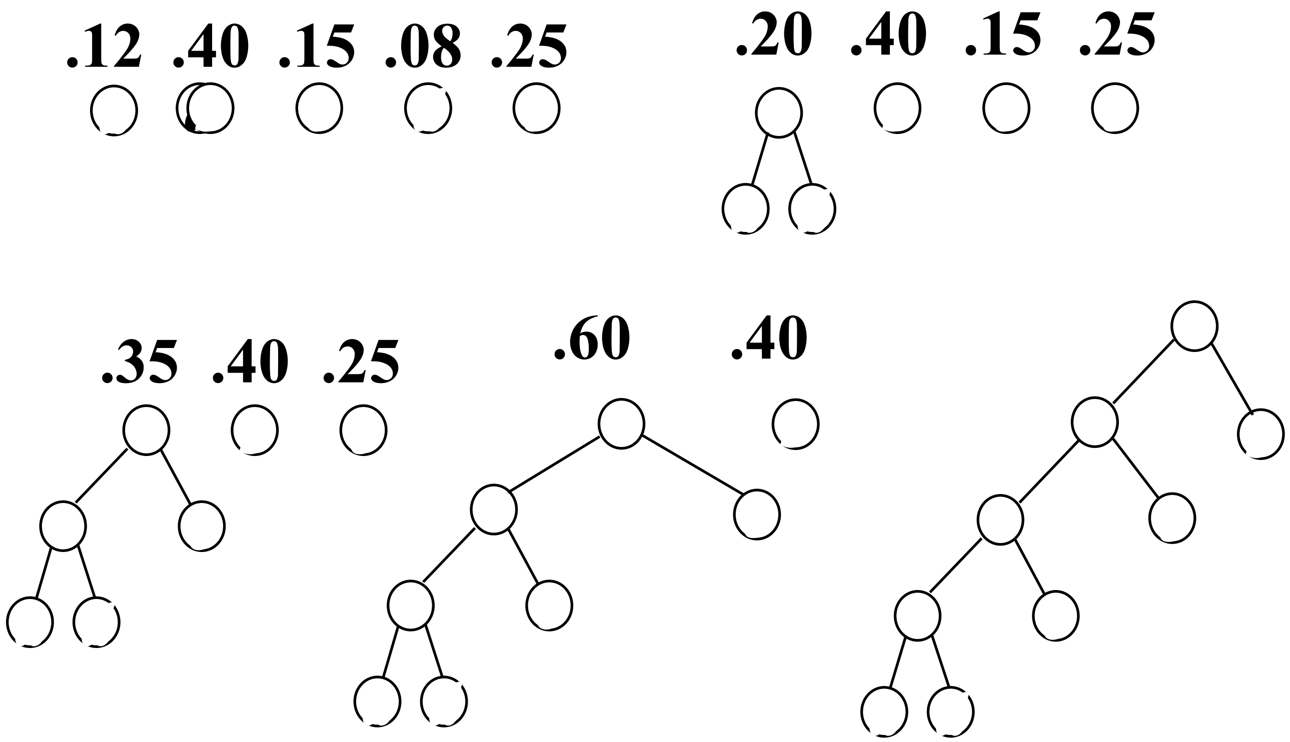




Construção da Árvore

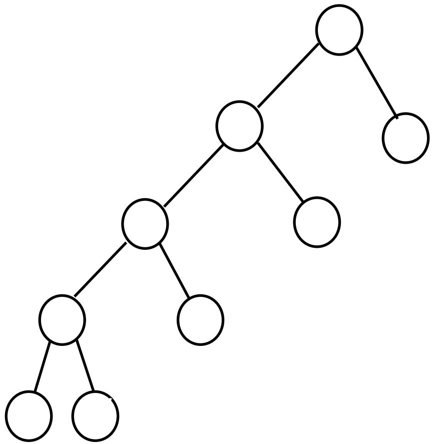
- Considere uma floresta de árvores, uma para cada caractere do código
- A probabilidade de cada árvore é igual a soma das probabilidades de suas folhas
- Cada passo do algoritmo combina as duas árvores com probabilidade mínima em uma só
- Quando há somente uma árvore esta é a arvore que gera códigos de comprimento mínimo

Exemplo de Código de Huffman



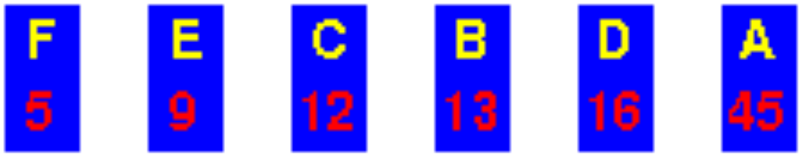
Exemplo de Código de Huffman

- O código ée:
  - a 0000
  - b 1
  - c 001
  - d 0001
  - e 01
- Com comprimento 2.15



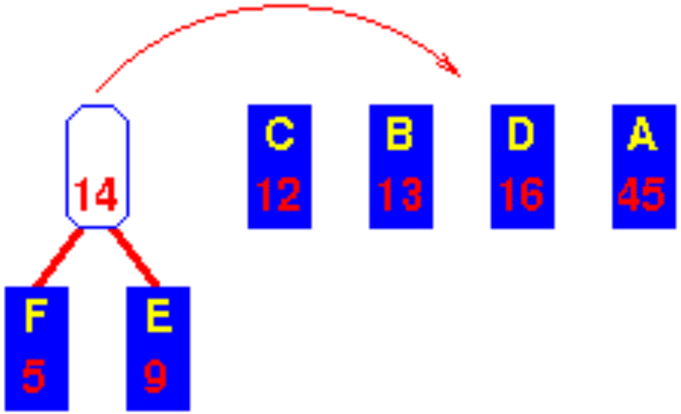
Huffman –Exemplo Codificação

1 - Cria árvores com um caractere em cada uma, ordenados pela probabilidade



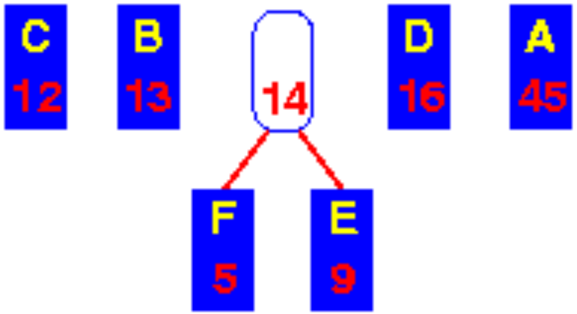
2 - Combina árvores de menor probabilidade

3 - Reordena as árvores



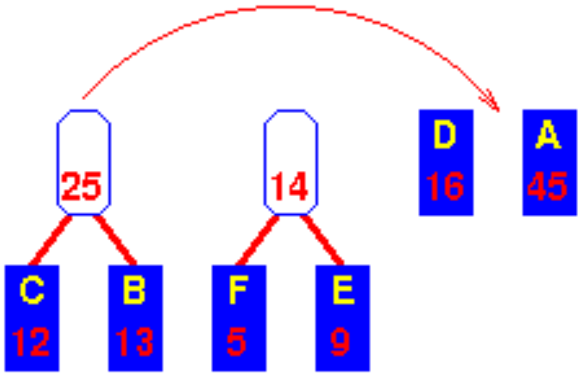
Huffman –Exemplo Codificação

Após reordenamento das árvores ...



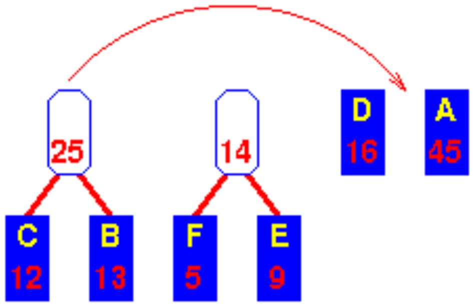
2 - Combina as de menor prob.

3 - Reordena novamente



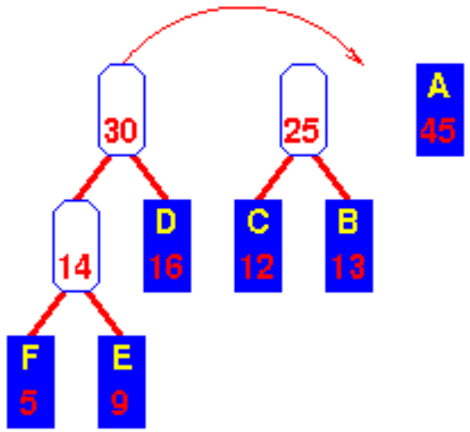
Huffman –Exemplo Codificação

Após a reordenação ...

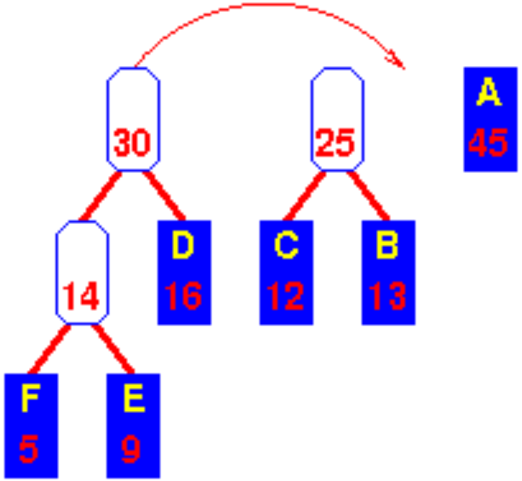


Agora as duas menores são A de 14 e a D

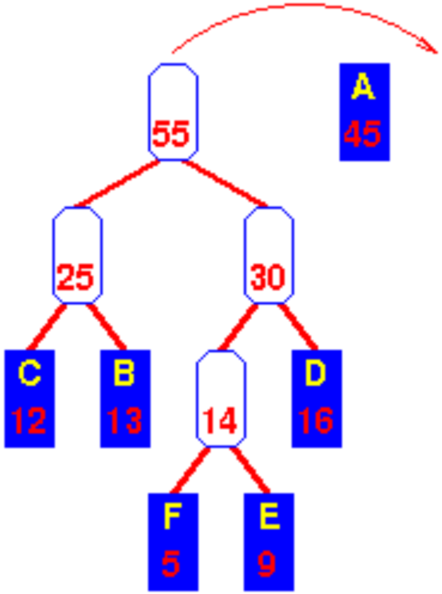
Combina e reordena



Huffman –Exemplo Codificação



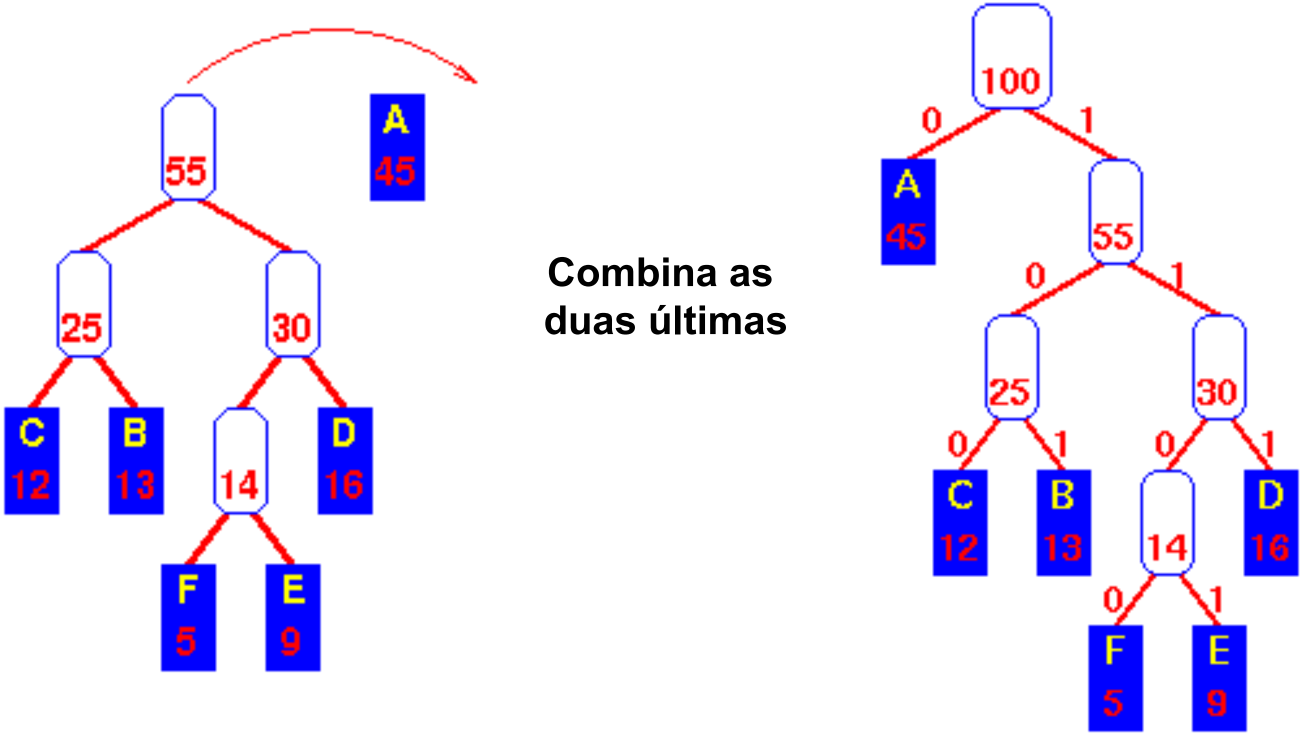
Apos a reordenação ...



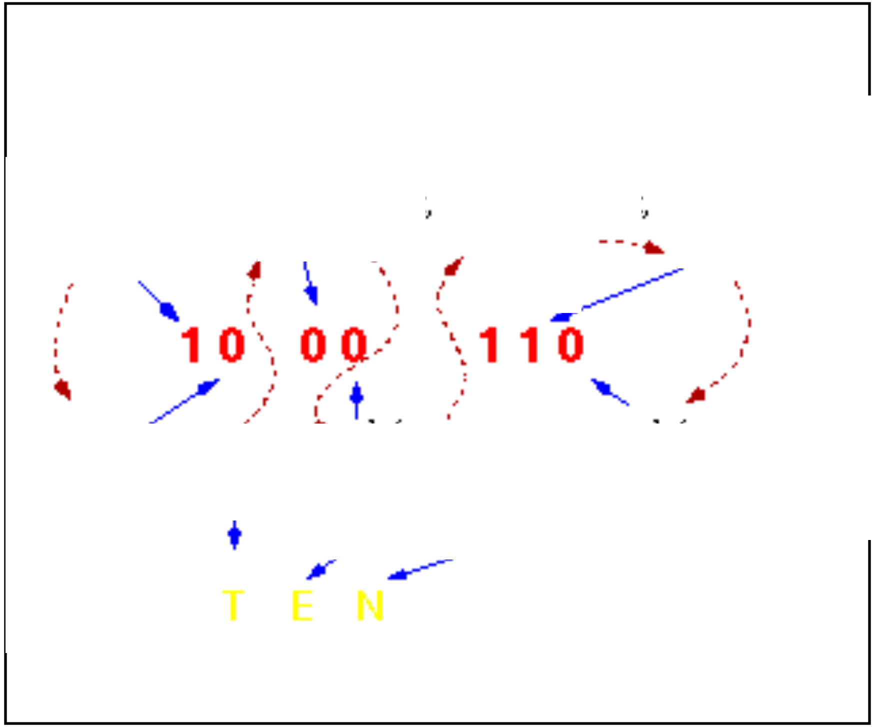
Agora as menores são a de 25 e a de 30

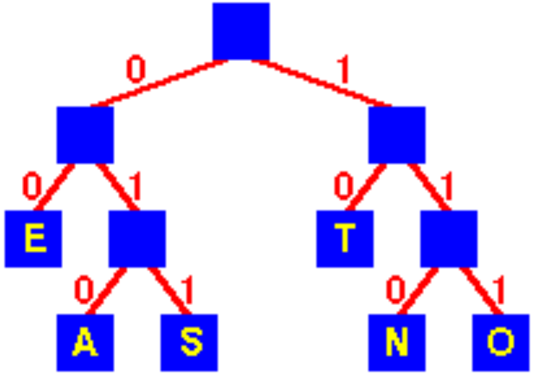
Combina e reordena

Huffman –Exemplo Codificação



Huffman –Exemplo Decodificação





Árvores de Busca de Altura Ótima

- É fácil ver que podemos garantir uma árvore de altura ótima para uma coleção de chaves se toda vez que temos que escolher uma chave para inserir, optamos pela mediana:

```
proc InserirTodos (i, n, A [i .. i+n–1], var Árvore T) {
 se n = 1 então Inserir (A [i], T)
 senão {
  j = Mediana (i, n, A)
  trocar  A[i] com A [j]
  m = Particao (i, n, A)
  Inserir (A [i+m], T)
  InserirTodos (i, m, A, T->Esq)
  InserirTodos (i+m+1, n–m–1, A, T->Dir)
 }
}
```

Árvores de Busca de Altura Ótima

- Sabendo que tanto Mediana quanto Particao podem ser feitos em O(n) o algoritmo InsereTodos executa em tempo O(n log n)
- O algoritmo pode ser reescrito de forma mais sucinta se admitimos que o array A se encontra ordenado
- Nem sempre, entretanto, podemos garantir que conhecemos todas as chaves de antemão
- O que esperar em geral?
  - Percebemos que a altura da árvore final depende da ordem de inserção
  - Temos n! possíveis ordens de inserção
  - Se todas as ordens de inserção são igualmente prováveis, no caso médio teremos uma árvore de altura ≈ 1 + 2.4 log n

Altura de Árvores Binárias de Busca – Caso Médio

- Eis uma explicação intuitiva para o fato de que no caso médio, a altura de uma árvore binária de busca é O(log n)
- Considere uma coleção ordenada de n chaves
  - Vemos que se escolhemos a k'ésima chave para inserir primeiro, teremos à esquerda do nó raiz uma subárvore com k – 1 nós e à direita uma subárvore com n – k nós
  - No melhor caso k = n / 2
  - No pior caso, k = 1 ou k = n
  - Admitamos que o caso médio corresponde a k = n/4 ou k=3n/4 (estamos ignorando tetos, pisos, etc)

Altura de Árvores Binárias de Busca – Caso Médio

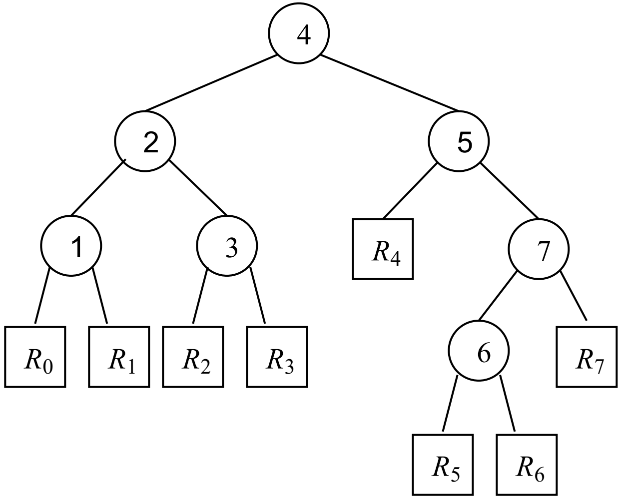
- Em qualquer caso, a subárvore com 3n/4 nós vai dominar a altura da árvore como um todo
- Resolvendo a recursão (novamente ignorando o fato que 3n/4 nem sempre é um inteiro), temos
  - $$\begin{aligned} H(1) &= 1 \\ H(n) &= 1 + H(3n/4) \\ &= 2 + H(9n/16) \\ &= 3 + H(27n/64) \\ &= \ldots \\ &= m + H((3/4)^m n) \\ \therefore m &= \frac{\log_2 n}{\log_2 4/3} \approx 2.4 \log_2 n \\ H(n) &= 1 + 2.4 \log_2 n \end{aligned}$$

Árvores Binárias de Busca Ótimas

- Dada uma árvore binária de busca, um dado importante é o número total de comparações que precisamos fazer durante a busca de uma chave
  - Se a chave buscada é uma chave sk pertencente à árvore, o número de comparações é o nível da chave na árvore, isto é, lk
  - Se a chave x sendo buscada não pertence à árvore, o número de comparações corresponde à subárvore vazia (também chamada de nó externo) que encontramos durante o processo de busca
    - Cada subárvore nula Ri corresponde a um intervalo entre duas chaves da árvore, digamos si e si+1, isto é, si < x < si+1 para algum i entre 1 e n
    - Os casos extremos R0 e Rn correspondem a x < s1 e sn < x
    - O número de comparações para encontrar x, portanto, é o nível dessa subárvore nula (a que chamaremos de l'k) menos 1

Árvore de Busca Ótima

- Comprimento de Caminho Interno: I(T) = Σ1≤i≤n li
- Comprimento de Caminho Externo E(T) = Σ0≤i≤n (l'i –1)
- No exemplo,
  I(T)=1+2*2+3*3+4=18
  E(T)=2+5*3+2*4=25
- Em geral, E(T)=I(T)+n
- Árvores completas minimizam tanto E(T) quanto I(T)



Árvore de Busca Ótima para Freqüências de Acesso Dadas

- Admitindo probabilidade uniforme no acesso de quaisquer chaves, as árvores completas são ótimas
- Entretanto, se a distribuição não é uniforme, precisamos empregar um algoritmo mais elaborado
- Sejam
  - fk a freqüência de acesso à k'ésima menor chave, armazenada em T no nível lk,
  - f'k a freqüência de acesso a chaves que serão buscadas nos nós externos Rk, armazenados em T no nível l'k,
- Então, o custo médio de acesso é dado por

Árvore de Busca Ótima para Freqüências de Acesso Dadas

- O algoritmo para construção de árvores ótimas baseia-se no fato de que subárvores de árvores ótimas são também ótimas
  - se assim não fosse, poderíamos substituir uma subárvore não ótima por uma ótima e diminuir o custo da árvore ótima, o que é um absurdo
- O algoritmo consiste de testar todas as n chaves como raízes da árvore e escolher aquela que leva ao custo mínimo
  - As subárvores são construídas de forma recursivamente idêntica

Árvore de Busca Ótima para Freqüências de Acesso Dadas

- Seja T(i, j) a árvore ótima para as chaves {si+1, si+2,... sj}
- Seja F(i, j) a soma de todas as freqüências relacionadas com T(i, j), isto é,

$$F(i,j) = \sum_{i<k\leq j} f_k + \sum_{i\leq k\leq j} f'_k$$

- Assumindo que T(i, j) foi construída escolhendo sk como raiz, então prova-se que

$$c(T(i,j)) = c(T(i,k-1)) + c(T(k,j)) + F(i,j)$$

- Portanto, para encontrar o valor de k apropriado, basta escolher aquele que minimiza a expressão acima

Árvore de Busca Ótima para Freqüências de Acesso Dadas

- Seria possível em computar recursivamente c(T(0,n)) usando como caso base c(T(i,i))=0
- No entanto, esse algoritmo iria computar cada c(T(i,j)) e F(i,j) múltiplas vezes
- Para evitar isso, valores já computados são armazenados em duas matrizes: c[0 .. n, 0 .. n] e F[0 .. n, 0 .. n]
- Podemos também dispensar a construção recursiva e computar iterativamente o custo de todas as n(n+1)/2 árvores envolvidas no processo
  - As árvores com d nós depende apenas do custo de árvores com 0, 1, 2 ... e até d – 1 nós
  - Computar F(i,j) também não oferece dificuldade

Árvore de Busca Ótima para Freqüências de Acesso Dadas

```
proc CustoArvoreOtima (n, f [1 .. n], f '[0 .. n]) {
 array c [0 .. n, 0 .. n], F [0 .. n, 0 .. n]
 para j desde 0 até n fazer {
  c [j, j] = 0
  F [j, j] = f ' [j]
 }
 para d desde 1 até n fazer
  para i desde 0 até n – d fazer {
   j = i + d
   F [i, j] = F [i, j – 1] + f [j] + f ' [j]
   tmp = inf
   para k desde i + 1 até j fazer
    tmp = min(tmp, c [i, k – 1] + c [k, j])
   c [i, j] = tmp + F [i, j]
  }
}
```

Árvore de Busca Ótima para Freqüências de Acesso Dadas

- O algoritmo para computar o custo da árvore ótima tem complexidade O(n3)
- O algoritmo para criar a árvore ótima é trivial, bastando para isso usar como raízes os nós de índice k que minimizam o custo de cada subárvore (pode-se armazenar esses índices numa terceira matriz)
- É possível obter um algoritmo de complexidade O(n2) utilizando a propriedade de monotonicidade das árvores binárias de busca
  - Se sk é a raiz da árvore ótima para o conjunto {si ...sj } então a raiz da árvore ótima para o conjunto {si ...sj, sj+1} é sq para algum q≥k
  - (Analogamente, q≤k para {si – 1 , si ...sj})