

南京理工大学博士、硕士研究生考试

高等工程数学 I 试题

时间: 120 分钟

姓 名 _____ 学 号 _____ 学院 (系) _____

注: 所有解答必须写在答题纸上, 标上题号

一、(10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$, 计算 $\text{cond}_\infty(A)$ 和矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ 。

二、(10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 其中 a, b, c 是实数。

- (1) 求 A 的所有可能 Jordan 标准型;
- (2) 给出 A 可对角化条件。

三、(10 分) 用盖尔圆定理证明矩阵 $A = \begin{pmatrix} 9 & i & -1 \\ 1 & i & 1 \\ i & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 有互异特征值。

四、(10 分) 求下列矩阵 A 的 Doolittle 分解 $A=LU$, 并用 LU 分解法求解方程组 $Ax=b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}。$$

五、(10 分) 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

- (1) 求 A 的奇异值分解;
- (2) 计算 A^+ ;
- (3) 求矛盾方程组 $Ax=b$ 的极小范数最小二乘解。

六、(10 分) 令 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 找出实数 a 的最大范围使得 Gauss-Seidel 迭代法和 Jacobi 迭代法求解以 A 为系数的方程组同时收敛。

七、(10 分) 用单纯形法求解问题

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

八、(10 分) 考虑非线性优化问题

$$\begin{cases} \min & (x_1 - 1)(x_2 + 1) \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{cases}。$$

- (1) 求 KKT 点;
- (2) 判断 KKT 点是否是局部最优解。