**2021年高等工程数学 I (第二阶段)期末考试参考答案**

一、(共 10 分) 解：$\lambda I - A \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$，
($A$ 的行列式因子分别为：$1, \lambda, \lambda^3$) 从而 $A$ 的不变因子分别为：$1, \lambda, \lambda^2$. (5 分)
故 $A$ 的初等因子组为：$\lambda, \lambda^2$，所以 $A$ 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (5 分)

二、(共 20 分) 解：(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 11 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 18 \end{pmatrix}$，
令 $A = LU$ 为 Doolittle 分解，则

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

解方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ 得 } y_1 = 4, y_2 = -8, y_3 = 18.$$

进一步计算

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 18 \end{pmatrix}, \text{ 得 } x_3 = 1, x_2 = -1, x_1 = 2. \qquad (10 \text{ 分})$$

(2) G-S 迭代格式为：

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{3}(4 - x_2^{(k-1)} + x_3^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{5}(-12 + 3x_1^{(k)} + x_3^{(k-1)}) \\ x_3^{(k)} = \frac{1}{15}(-2 + 3x_1^{(k)} - 11x_2^{(k)}) \end{cases}$$

因为 $A$ 是严格对角占优矩阵，所以 G-S 迭代法收敛. (10 分)

三、(共 12 分) 解：$A$ 的行盖尔圆盘分别为：

$$G_1 : |z - 10| \le 9, \quad G_2 : |z - 20| \le 2, \quad G_3 : |z - 30| \le 9. \qquad (3 \text{ 分})$$

令 $D = \mathrm{diag}(1, \frac{1}{2}, 1)$， (3 分)
则 $B = D^{-1}AD$ 的行盖尔圆盘为：

$$G_1' : |z - 10| \le 5, \quad G_2' : |z - 20| \le 4, \quad G_3' : |z - 30| \le 5.$$

它们两两不交. 由盖尔圆定理可知 $G_1'$、$G_2'$、$G_3'$ 各恰有 $A$ 的一个特征值. 进一步，由于 $A$ 是实矩阵，所以 $\lambda$ 是 $A$ 的特征值当且仅当 $\overline{\lambda}$ 也是 $A$ 的特征值，即 $A$ 的特征值会关于实轴对称. 注意到 $G_1'$、$G_2'$、$G_3'$ 也关于实轴对称而且各恰有 $A$ 的一个特征值，我们得到 $A$ 有三个互异实特征值. (6 分)

四、(共 18 分) 解：$\|x\|_\infty = 1$.　　(4 分)
注意到 $(xx^T)^2 = 3xx^T$，从而 $xx^T$ 的特征值为：$0,0,0,3$. 由 $xx^T$ 是正规矩阵可知 $\|xx^T\|_2 = \rho(xx^T) = 3$. 故

$$\max_{\|y\|_2=3} \|xx^Ty\| = 3 \max_{\|z\|_2=1} \|xx^Tz\| = 3\|xx^T\|_2 = 9. \qquad (7\text{ 分})$$

$$(xx^T)^+ = x(x^Tx)^{-1}(x^Tx)^{-1}x^T = \frac{1}{9}xx^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (7\text{ 分})$$

五、(共 10 分) 解：引入松弛变量 $x_3$、$x_4$、$x_5$，转化为标准形并建立初始表格：

$$\begin{aligned} \min\quad & -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_2 + x_3 = 3 \\ & 3x_1 + x_2 + x_4 = 12 \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{aligned}$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | $\boxed{1}$ | 1 | 0 | 0 | 3 |
| $x_4$ | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| $x_5$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |

(5 分)

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| $x_4$ | 3 | 0 | −1 | 1 | 0 | 9 |
| $x_5$ | $\boxed{1}$ | 0 | −1 | 0 | 1 | 2 |
| | 1 | 0 | −2 | 0 | 0 | −6 |

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 2 | 1 | −3 | 3 |
| $x_1$ | 1 | 0 | −1 | 0 | 1 | 2 |
| | 0 | 0 | −1 | 0 | −1 | −8 |

所得最优解为 $(x_1, x_2)^T = (2,3)^T$，目标函数的最优值为 $-8$.　　(5 分)

六、(共 10 分) 解：构造罚函数 $F(x,\mu) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1 - \mu\ln(x_1+1) - \mu\ln x_2$，其中 $\mu$ 是很小的正数. 令

$$\frac{\partial F(x,\mu)}{\partial x_1} = x_1 - 1 - \frac{\mu}{x_1+1} = 0, \qquad \frac{\partial F(x,\mu)}{\partial x_2} = x_2 - \frac{\mu}{x_2} = 0.$$

解得 $x(\mu) = (\sqrt{1+\mu}, \sqrt{\mu})^T$.　　(5 分)
同时，当前点的 Hesse 矩阵

$$\nabla^2 F(x(\mu),\mu) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\mu}{(\sqrt{1+\mu}+1)^2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

正定，所以 $x(\mu)$ 为 $F(x,\mu)$ 的极小点. 当 $\mu \to 0$ 时，$x(\mu) \to x^* = (1,0)^T$，$x^*$ 为约束问题的最优解，目标函数的最优值为 $f^* = -\frac{1}{2}$.　　(5 分)

七、(共 15 分) 解：由 $\nabla f(x) = (x_1 - x_2 - 1, -x_1 + 2x_2)^T$ 可知 $\nabla f(x^{(1)}) = (-1, 0)^T$，所以 $d^{(1)} = -\nabla f(x^{(1)}) = (1, 0)^T$. 把 $x^{(1)} + \alpha d^{(1)} = (\alpha, 0)^T$ 代入目标函数，求解

$$\min \quad \frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha,$$

得 $\alpha_1 = 1$，从而

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 d^{(1)} = (1, 0)^T. \qquad (8\text{ 分})$$

可计算 $\nabla f(x^{(2)}) = (0, -1)^T$，于是得到 $\beta_1 = \frac{\|\nabla f(x^{(2)})\|^2}{\|\nabla f(x^{(1)})\|^2} = 1$，所以

$$d^{(2)} = -\nabla f(x^{(2)}) + \beta_1 d^{(1)} = (1, 1)^T.$$

把 $x^{(2)} + \alpha d^{(2)} = (1 + \alpha, \alpha)^T$ 代入目标函数，求解

$$\min \quad \frac{1}{2}(1+\alpha)^2 - (1+\alpha)\alpha + \alpha^2 - (1+\alpha),$$

得 $\alpha_2 = 1$，则有

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \alpha_2 d^{(2)} = (2, 1)^T.$$

可计算 $\nabla f(x^{(3)}) = (0, 0)^T$，$\|\nabla f(x^{(3)})\| = 0$，故极小点为

$$x^* = x^{(3)} = (2, 1)^T. \qquad (7\text{ 分})$$

八、(共 5 分) 解：轮盘赌的选择过程：

(1) 计算所有染色体 $V_i$ 的累积概率 $q_i$，

$$q_0 = 0, \quad q_i = \sum_{j=1}^{i} \mathrm{Eval}(V_j), \quad i = 1, 2, \ldots, \mathrm{pop\_size}.$$

(2) 在 $(0, q_{\mathrm{pop\_size}}]$ 中产生一个随机数 $r$.
(3) 若 $q_{i-1} < r \leq q_i$，则选择染色体 $V_i$.
(4) 重复第 (2) 至第 (3) 步 pop_size 次以获得 pop_size 个染色体.