第五章 最优化方法（1）
标准形、单纯形表格法

线性规划问题的标准形

线性规划问题

线性规划问题简述：在若干个线性约束下，让一个线性目标函数尽量“大”或尽量“小”的问题。

1. **决策变量**
   用若干个变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 表示要做的决策
2. **目标函数是线性的**
   想要优化（最大化或最小化）的指标是一个一次函数，比如

   $$\max\ z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

   或

   $$\min\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

3. **约束条件是线性的**
   每个限制都是一次式，例如

   $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 10, \\ -x_1 + 3x_2 &\ge 6, \\ x_1 + x_2 &= 5, \\ x_i &\ge 0. \end{aligned}$$

   这些统称为**线性约束。**

4. **标准抽象形式**
   一般写成矩阵形式：

   $$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \le b, \\ & x \ge 0. \end{array}$$

   或通过变形写成等式 $Ax = b$ 再加上松弛变量。

标准形

任意线性规划问题都可通过变量变换与约束调整，转换为 **标准形**（Standard Form），其形式如下：

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

其中

- A 为 $m \times n$ 矩阵，且 $\operatorname{rank}(A) = m \leq n$；
- b 为 m-维向量；
- x 为决策变量向量；
- c 为目标函数系数向量；
- 所有变量必须满足 $x_i \geq 0$，称为 **非负约束。**

将任意 线性规划问题 转换为 标准形 的步骤：

1. 若原问题为**极大化**目标，即 $\max c^T x$，则乘以 -1 转化为极小化：

$$\max c^T x \quad \Rightarrow \quad \min(-c^T x)$$

2. 若约束右端项 $b_i < 0$，则将该约束两边乘以 -1，使其变成右端为正的等式。
3. 若约束为**不等式**，则：
   - 对于 $\leq$ 约束：**加入松弛变量** $s_i \geq 0$

   $$a_i x \leq b_i \Rightarrow a_i x + s_i = b_i, \quad s_i \geq 0$$

   - 对于 $\geq$ 约束：**加入剩余变量**（surplus Variable）s_i，并含人工变量：

   $$a_i x \geq b_i \Rightarrow a_i x - s_i = b_i, \quad s_i \geq 0$$

4. 若变量允许自由，即 **无非负限制**，例如 x_j 自由，则可写成：

$$x_j = x_j^{'} - x_j^{''}, \quad x_j^{'}, x_j^{''} \geq 0.$$

例题 1

> 将下面的线性规划问题转换为标准形
>
> $$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 7 \\ & -x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 \leq 6 \\ & x_1, x_3, x_4 \geq 0,\ x_2\text{无约束}. \end{array}$$

解答：

令 $x_2 = x_2^{'} - x_2^{''}$，其中 $x_2^{'}, x_2^{''} \geq 0$. 引入剩余变量 $s_1 \geq 0$，引入松弛变量 $s_2 \geq 0$，则标准形为：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -2x_1+3x_2-x_3-3x_4 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1-x_2+3x_3+x_4-s_1=3 \\
& 3x_1+2x_2+2x_4=7 \\
& -x_1+4x_2-3x_3-x_4+s_2=6 \\
& x_1,x_3,x_4,s_1,s_2,x_2^{'},x_2^{''}\geq 0
\end{aligned}
$$

单纯形表格法

单纯形表格法基本步骤

1. **标准化 + 引入松弛变量**
   - 把线性规划化成

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x, \\
\text{s.t.} \quad & Ax=b, \\
& x\geq 0
\end{aligned}
$$

   - 对“≤”约束加松弛变量，使之变成等式。
   - **初始基变量** 一般就是这些**松弛变量**，得到初始基本可行解。
2. **构造初始单纯形表**
   - 每一行是一条约束；
   - 最后一行是目标行，初始目标行系数（也称为 **“检验数”**）计算：

$$
r_j = Z_j - C_j = c_B^\top a_j - C_j,
$$

   其中 c_B 为当前基变量的成本向量，a_j 为第 j 列约束系数，C_j 为第 j 个变量的目标系数。 在初始表中，如果基变量都是松弛变量且其成本为 0，则 $Z_j=0$，于是

$$
r_j = -C_j,
$$

   即“初始目标行的检验数等于原目标函数系数取相反数”。
3. **选换入变量（进基变量）**
   - 看目标行中 **非基变量** 对应的系数；
   - 对最小化问题：选 **最正** 的那个作为换入变量（表示它最有潜力继续降低目标值）。
   - 如果所有这些系数都 ≤ 0（对最小化），说明再也降不下去了 → **当前解最优。**
4. **选换出变量（离基变量）——最小比值检验**
   - 在换入变量所在列中，只看 **正系数** 行，计算

$$
\frac{\text{右端常数}}{\text{该列系数}}
$$

   - 取最小的那个比值对应的行，该行的基变量就是要被换出的变量。
   - 这一步直观上是在算：在不破坏可行性的前提下，新变量最多能增大到多少。
5. **枢轴运算（行变换）**
   - 把“换入变量所在的那一格”作为枢轴元素；
   - 通过行初等变换，使这一列变成单位列：

        - 枢轴所在行：把枢轴化为 1；
        - 其他行（**包括目标行**）：在该列系数变成 0。
    - 更新表后，就得到一个新的基本可行解（基变量换了一组）。
6. **重复 3–5 步，直到满足最优性条件**
    - 对最小化：当目标行中所有非基变量对应的系数（或检验数）**都** ≤ 0 时停止；
    - 此时表中 **右端常数就是最优解的变量值，目标行右端常数就是最优目标值。**

例题 2

> 用单纯形方法求解下列线性规划问题
>
> $$\begin{array}{ll} \min & x_1 - 3x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ & -2x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

解答：

- 初始化单纯形表格（初始基变量为 s_1, s_2, s_3）

  对应标准形：

  $$\begin{array}{ll} \min & x_1 - 3x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} & 3x_1 - x_3 + 2x_3 + s_1 = 7 \\ & -2x_1 + 4x_2 + s_2 = 12 \\ & -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + s_3 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0. \end{array}$$

  初始单纯形表格：

基变量	x_1 **(1)**	x_2 **(-3)**	x_3 **(-1)**	s_1 **(0)**	s_2 **(0)**	s_3 **(0)**	**右端常数**
s_1 (0)	3	-1	2	1	0	0	7
s_2 (0)	-2	4	0	0	1	0	12
s_3 (0)	-4	3	8	0	0	1	10
目标行	-1	3	1	0	0	0	0

- **第 1 次 换基**（x_2 进基、s_2 离基）
    - **选定进基变量**（看目标行最正的系数对应的变量）：

      目标行中最正的系数为 3，对应变量 x_2。因此，x_2 作为 **进基变量。**
    - **选定离基变量**（只看 x_2 对应列的正数系数，找到 $\frac{\text{右端常数}}{\text{系数}}$ 最小比值）：

      发现 s_2 对应的比值 $\frac{12}{4} = 3$ 最小。因此，s_2 作为 **离基变量。**

将 x_2 换到 s_2 的基变量位置， 之后行变换，将 **进基变量** x_2 这一列变为 **单位列**：

基变量	x_1 **(1)**	x_2 **(-3)**	x_3 **(-1)**	s_1 **(0)**	s_2 **(0)**	s_3 **(0)**	**右端常数**
s_1 (0)	$\frac{5}{2}$	0	2	1	$\frac{1}{4}$	0	10
x_2 (-3)	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	3
s_3 (0)	$-\frac{5}{2}$	0	8	0	$-\frac{3}{4}$	1	1
目标行	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{3}{4}$	0	-9

- **第 2 次 换基**（x_3 进基、s_3 离基）
  - **选定进基变量**（看目标行最正的系数对应的变量）：

    目标行中最正的系数为 1，对应变量 x_3。因此，x_3 作为 **进基变量。**
  - **选定离基变量**（只看 x_3 对应列的正数系数，找到 $\frac{\text{右端常数}}{\text{系数}}$ 最小比值）：

    发现 s_3 对应的比值 $\frac{1}{8}$ 最小。因此，s_3 作为 **离基变量。**

将 x_3 换到 s_3 的基变量位置， 之后行变换，将 **进基变量** x_3 这一列变为 **单位列**：

基变量	x_1 **(1)**	x_2 **(-3)**	x_3 **(-1)**	s_1 **(0)**	s_2 **(0)**	s_3 **(0)**	**右端常数**
s_1 (0)	$\frac{25}{8}$	0	0	1	$\frac{7}{16}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{39}{4}$
x_2 (-3)	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	3
x_3 (-1)	$-\frac{5}{16}$	0	1	0	$-\frac{3}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
目标行	$\frac{13}{16}$	0	0	0	$-\frac{21}{32}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{73}{8}$

- **第 3 次 换基**（x_1 进基、s_1 离基）
  - **选定进基变量**（看目标行最正的系数对应的变量）：

    目标行中最正的系数为 $\frac{13}{16}$，对应变量 x_1。因此，x_1 作为 **进基变量。**
  - **选定离基变量**（只看 x_1 对应列的正数系数，找到 $\frac{\text{右端常数}}{\text{系数}}$ 最小比值）：

    发现 s_1 对应的比值 $\frac{78}{25}$ 最小。因此，s_1 作为 **离基变量。**

将 x_1 换到 s_1 的基变量位置， 之后行变换，将 **进基变量** x_1 这一列变为 **单位列**：

基变量	x_1 (1)	x_2 (-3)	x_3 (-1)	s_1 (0)	s_2 (0)	s_3 (0)	右端常数
x_1 (1)	1	0	0	$\frac{8}{25}$	$\frac{7}{50}$	$-\frac{2}{25}$	$\frac{78}{25}$
x_2 (-3)	0	1	0	$\frac{4}{25}$	$\frac{8}{25}$	$-\frac{1}{25}$	$\frac{114}{25}$
x_3 (1)	0	0	1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{10}$
目标行	0	0	0	$-\frac{13}{50}$	$-\frac{77}{100}$	$-\frac{3}{50}$	$-\frac{583}{50}$

经过第 3 次换基后，目标行所有系数都 ≤ 0，已经满足最优性条件。

最优解：

$$x_1^* = \frac{78}{25}, \quad x_2^* = \frac{114}{25}, \quad x_3^* = \frac{11}{10}$$

目标函数最优值：

$$z_{\min} = -\frac{583}{50}$$
