第五章 最优化方法（2）
二阶段法

二阶段法

为什么需要二阶段法

标准单纯形法通常要求一开始就有一个“**基本可行解**”（基变量刚好构成单位阵、右端常数 ≥ 0）。
但遇到：

- 有“≥”约束（要减去剩余变量）；
- 有“=”约束；
- 或者加完松弛/剩余变量后仍然凑不出单位阵，

就 **凑不出初始基变量**，必须用 **“二阶段法”。**

二阶段法基本步骤

Phase I：先找一个可行解

1. 对所有约束：
    - $\leq$ 约束：加 **松弛变量**；
    - $\geq$ 约束：减 **剩余变量**，再加 **人工变量**；
    - $=$ 约束：直接加 **人工变量。**
2. 以所有 **人工变量** 为基变量，构造一个 **辅助目标函数**：

$$\min w = \text{所有人工变量之和}$$

3. 用单纯形法求解这个辅助问题：
    - 若最优值 $w^* > 0$：说明人工变量不可能全部变成 0 ⇒ 原问题无可行解；
    - 若 $w^* = 0$：说明找到了一个 **不含人工变量的基本可行解** ⇒ 可作为原问题 Phase II 的起点。

Phase II：在找到的可行解上，优化原来的目标

1. 去掉所有人工变量及 **Phase I** 的目标行；
2. 把 **原来的目标函数** 放入表中（注意，需要 **重新计算目标行检验数**）；
3. 从 **Phase I** 得到的基变量出发，用普通单纯形法迭代，最终得到原问题的最优解。

例题

> 用二阶段法求解如下问题的最优解
>
> $$\begin{aligned} \min \quad & z = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 5, \\ & 4x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3, \\ & -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

解答：

- 化为标准形 + 引入松弛 / 剩余 / 人工变量
    1. 第 1 条为 “≤” 约束，加 **松弛变量** $s_1 \geq 0$：

    $$2x_1 + x_2 - x_3 + s_1 = 5$$

    - 第 2 条为 “≥” 约束，减 **剩余变量** $s_2 \geq 0$，再加 **人工变量** $a_2 \geq 0$：

    $$4x_1 + 3x_2 + x_3 - s_2 + a_2 = 3$$

    - 第 3 条为“=”约束，直接加 **人工变量** $a_3 \geq 0$：

    $$-x_1 + x_2 + x_3 + a_3 = 2$$

    所有变量非负：

    $$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, a_2, a_3 \geq 0$$

    初始基变量就是：

    $$s_1,\ a_2,\ a_3.$$

- **Phase I**：构造辅助问题，消除人工变量
  构造辅助目标函数：

    $$\min w = a_2 + a_3.$$

    对于当前辅助目标函数，并计算 $Z_j - C_j$ 得到目标行检验数，得到单纯形表格如下：

基变量	x_1 (0)	x_2 (0)	x_3 (0)	s_1 (0)	s_2 (0)	a_2 (1)	a_3 (1)	RHS
s_1 (0)	2	1	-1	1	0	0	0	5
a_2 (1)	4	3	1	0	-1	1	0	3
a_3 (1)	-1	1	1	0	0	0	1	2
w	3	4	2	0	-1	0	0	5

    - **第 1 次换基**（x_2 进基、a_2 离基）
        - **选定进基变量**（看目标行最正的系数对应的变量）：
          目标行中最正的系数为 4，对应变量 x_2。因此，x_2 作为 **进基变量。**

- **选定离基变量**（只看 x_2 对应列的正数系数，找到 $\frac{\text{右端常数}}{\text{系数}}$ 最小比值）：

  发现 a_2 对应的比值 $\frac{3}{3}=1$ 最小。因此，a_2 作为 **离基变量。**

将 x_2 换到 a_2 的基变量位置， 之后行变换，将 **进基变量** x_2 这一列变为 **单位列**：

基变量	x_1 **(0)**	x_2 **(0)**	x_3 **(0)**	s_1 **(0)**	s_2 **(0)**	a_2 **(1)**	a_3 **(1)**	**RHS**
s_1 (0)	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	4
x_2 (0)	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1
a_3 (1)	$-\frac{7}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	1
w	$-\frac{7}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	1

- **第 2 次换基**（x_3 进基、a_3 离基）
  - **选定进基变量**（看目标行最正的系数对应的变量）：
    目标行中最正的系数为 $\frac{2}{3}$，对应变量 x_3。因此，x_3 作为 **进基变量。**
  - **选定离基变量**（只看 x_3 对应列的正数系数，找到 $\frac{\text{右端常数}}{\text{系数}}$ 最小比值）：

    发现 a_3 对应的比值 $\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$ 最小。因此，a_3 作为 **离基变量。**

  将 x_3 换到 a_3 的基变量位置， 之后行变换，将 **进基变量** x_3 这一列变为 **单位列**：

基变量	x_1 **(0)**	x_2 **(0)**	x_3 **(0)**	s_1 **(0)**	s_2 **(0)**	a_2 **(1)**	a_3 **(1)**	**RHS**
s_1 (0)	-4	0	0	1	1	-1	2	6
x_2 (0)	$\frac{5}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3 (0)	$-\frac{7}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
w	0	0	0	0	0	-1	-1	1

目标行检验数全部 ≤ 0，Phase I 达到最优解，且 **人工变量** a_2, a_3 **都是非基变量。**

之后进入第二阶段 Phase II，基变量变为 s_1, x_2, x_3。

- **Phase II**：回到原目标函数

$$\min z = 3x_1 - 2x_2 + x_3$$

更新变量系数、去除人工变量并重新计算目标行检验数，得到单纯形表格如下：

基变量	**(3)**	**(-2)**	**(1)**	**(0)**	**(0)**	**RHS**
s_1 (0)	-4	0	0	1	1	6
x_2 (-2)	$\frac{5}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

基变量	x_1 (3)	x_2 (-2)	x_3 (1)	s_1 (0)	s_2 (0)	RHS
x_3 (1)	$-\frac{7}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
z	$-\frac{23}{2}$	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

- **第 1 次换基**（s_2 进基、x_3 离基）
  - **选定进基变量**（看目标行最正的系数对应的变量）：
    目标行中最正的系数为 $\frac{3}{2}$，对应变量 x_3。因此，s_2 作为 **进基变量。**
  - **选定离基变量**（只看 s_2 对应列的正数系数，找到 $\frac{\text{右端常数}}{\text{系数}}$ 最小比值）：

    发现 s_2 对应的比值 $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$ 最小。因此，x_3 作为 **离基变量。**

  将 s_2 换到 x_3 的基变量位置，之后行变换，将 **进基变量** s_2 这一列变为 **单位列**：

基变量	x_1 (3)	x_2 (-2)	x_3 (1)	s_1 (0)	s_2 (0)	RHS
s_1 (0)	3	0	-2	1	0	3
x_2 (-2)	-1	1	1	0	0	2
s_2 (0)	-7	0	2	0	1	3
z	-1	0	-3	0	0	-4

目标行检验数全部 ≤ 0，Phase II 达到最优解。
得到最优解即右边的系数，x_2 为 2，其余变量为 0，最优值即 -4。

最优解：

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 2, \quad x_3^* = 0$$

目标函数最优值：

$$z_{\min} = -4$$
