南京理工大学博士、硕士研究生考试

高等工程数学 I 试题　　时间：120 分钟

注：1. 所有答案按试题序号写在答题纸上；2. 不可使用计算器.

一、（10 分）求矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准形.

二、(20 分) 考虑线性方程组：

$$\begin{pmatrix}3&1&-1\\-3&5&-1\\-3&11&15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-12\\-2\end{pmatrix}.$$

(1) 用 Doolittle 方法求解上面线性方程组.

(2) 写出求解上面线性方程组的 G-S 迭代格式，判断它的敛散性，并说明理由.

三、（12 分）设 $A=\begin{pmatrix}10&8&-1\\1&20&1\\1&8&30\end{pmatrix}$. 写出 A 的所有行盖尔圆盘，并选择下列三个对角矩阵的一个矩阵 D：$\mathrm{diag}\left(\frac{1}{2},1,1\right)$、$\mathrm{diag}\left(1,\frac{1}{2},1\right)$、$\mathrm{diag}\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$，使得 $D^{-1}AD$ 的行盖尔圆盘两两不交，最后请证明 A 有 3 个互异实特征值.

四、（18 分）设 $x=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$，计算 $\|x\|_\infty$、$\max\limits_{\|y\|_2=3}\|xx^Ty\|_2$ 及 $(xx^T)^+$.

五、(10 分)用单纯形法求解问题：

$$\begin{aligned}\min\quad & -x_1-2x_2\\ \text{s.t.}\quad & x_2\le 3\\ & 3x_1+x_2\le 12\\ & x_1+x_2\le 5\\ & x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

六、(10 分) 用对数障碍法求解问题：

$$\begin{aligned}\min\quad & \frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-x_1\\ \text{s.t.}\quad & x_1+1\ge 0\\ & x_2\ge 0.\end{aligned}$$

七、(15 分) 用 FR 共轭梯度法求解如下问题：

$$\min\ f(x)=\tfrac{1}{2}x_1^2-x_1x_2+x_2^2-x_1,$$

初始点为 $x^{(1)}=(0,0)^T$.

附：$\beta_k=\frac{\nabla f(x^{(k+1)})^T[\nabla f(x^{(k+1)})-\nabla f(x^{(k)})]}{\|\nabla f(x^{(k)})\|^2}$，$\beta_k=\frac{\|\nabla f(x^{(k+1)})\|^2}{\|\nabla f(x^{(k)})\|^2}$，$\beta_k=\frac{\|\nabla f(x^{(k+1)})\|^2}{(d^{(k)})^T\nabla f(x^{(k)})}$.

八、(5 分) 在基本遗传算法中，有通过轮盘赌的方法来选择染色体的过程，请问轮盘赌如何实施？