第三章 矩阵分解与广义逆矩阵（1）LU分解，PLU分解，满秩分解

LU 分解（Doolittle 型）

Doolittle 型 LU 分解：将矩阵 A 分解为

$$A = LU$$

其中

- L：**下三角矩阵**（通常主对角线全为 1）
- U：**上三角矩阵**

通常应用于求解方程 $Ax = b$，经过 $A = LU$ 分解后，可以先求解 $LUx = Ly = b$，然后再求解 $Ux = y$（回代），能够更加容易求解方程。

一般要求：所有**前 k 阶主子式（左上角 k×k 行列式）非零**，简单说就是消元时每一步主元都不为 0，就能顺利做 LU 而不用交换行。

LU 分解基本过程：

- 经过一系列初等行变换（**不能交换行**）得到一个上三角矩阵 U；
- 可以看出下三角矩阵 L：
  - 首先主对角线元素全为 1；
  - 第 1 列元素比例（从对角线元素 1 开始）对应 初始矩阵 A 的第 1 列元素的比例；
  - 第 2 列元素比例（从对角线元素 1 开始）对应 经过初等行变换后第一列主元下方均为 0 时的矩阵的第 2 列元素的比例
  - 以此类推，得到下三角矩阵 L。

示例：

> 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 13 & -19 \\ -6 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ 的 LU 分解

- 用初等行变换将第 1 列主元下方全部变为 0

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 13 & -19 \\ -6 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1,\ r_3 + 3r1} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 12 & -24 \end{pmatrix}$$

- 用初等行变换将第 2 列主元下方全部变为 0

$$\begin{pmatrix}2&5&6\\0&3&-7\\0&12&-24\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-4r2}\begin{pmatrix}2&5&6\\0&3&-7\\0&0&4\end{pmatrix}$$

此时得到的矩阵是一个上三角矩阵，即 U：

$$U=\begin{pmatrix}2&5&6\\0&3&-7\\0&0&4\end{pmatrix}$$

变换之前，第 1 列主元及下方元素比例为 $[1,2,-3]$；第 1 次变换后，第 2 列主元及下方元素比例为 $[1,4]$。故下三角矩阵 L 为：

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-3&4&1\end{pmatrix}$$

最终得到 LU 分解：

$$A=LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5&6\\0&3&-7\\0&0&4\end{pmatrix}$$

PLU 分解（Doolittle 型）

PLU 分解和 LU 分解的关键区别就在于 PLU 分解是带有行交换的：

$$PA=LU$$

其中

- P：**置换矩阵**（从单位矩阵通过交换行得到，代表进行的行交换操作）
- L：**下三角矩阵**（通常主对角线全为 1）
- U：**上三角矩阵**

为什么需要 PLU 分解：在进行初等行变换时，可能遇到某一步主元为 0。解决方法就是，每一次初等行变换先“选择主元”，通常的做法是将当前列最大元素所在行交换到主元所在行。这些行交换操作最终形成一个置换矩阵 P。

示例：

> 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}0.5&1&0\\2&1.5&1\\0.2&1&2.5\end{pmatrix}$ 的 PLU 分解

- 交换行，并将第 1 列主元下方元素变为 0

$$\begin{pmatrix}0.5&1&0\\2&1.5&1\\0.2&1&2.5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}2&1.5&1\\0.5&1&0\\0.2&1&2.5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.2 & 1 & 2.5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-\frac{1}{4}r_1,\, r_3-\frac{1}{10}r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0.625 & -0.25 \\ 0 & 0.85 & 2.4 \end{pmatrix}$$

- 交换行，并将第 2 列主元下方元素变为 0

$$\begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0.625 & -0.25 \\ 0 & 0.85 & 2.4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0.85 & 2.4 \\ 0 & 0.625 & -0.25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0.85 & 2.4 \\ 0 & 0.625 & -0.25 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{0.625}{0.85}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0.85 & 2.4 \\ 0 & 0 & -2.0147 \end{pmatrix}$$

此时得到的矩阵是一个上三角矩阵，即 U：

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0.85 & 2.4 \\ 0 & 0 & -2.0147 \end{pmatrix}$$

可以得到下三角矩阵 L（注意此处应该遵从多次行交换后的最终的比例）：

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.7353 & 1 \end{pmatrix}$$

行变换矩阵 P：

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

最终得到 PLU 分解：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.7353 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0.85 & 2.4 \\ 0 & 0 & -2.0147 \end{pmatrix}$$

满秩分解

把一个矩阵 A 写成“两个**满秩**矩阵相乘”的形式，用这两个小一点的矩阵来体现它的秩结构。

设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵，$\operatorname{rank}(A) = r$。
若存在矩阵

$$A = FG$$

其中

- F 是 $m \times r$ 矩阵，且 $\operatorname{rank}(F) = r$（列满秩）
- G 是 $r \times n$ 矩阵，且 $\operatorname{rank}(G) = r$（行满秩）

那么就称 $A = FG$ 是 A 的**满秩分解**。

满秩分解的基本过程：

- 对矩阵 A 进行初等行变换（不要进行交换行），得到矩阵的 **行最简阶梯形**；

  行最简阶梯形 的条件：

  - 零行（全是 0 的行）排在最下面；
  - 每个非零行的第一个非零元是 1。这个 1 叫做该行的 **主元**；
  - 主元所在的那一列，其他行都是 0；
  - 从上到下看，每一行的主元都在上一行主元的右边（呈阶梯型）
- 取主元在 **原矩阵** A 中对应的 **列** 构成 F；
- 取主元在 **行最简阶梯形** 中对应的 **行** 构成 G；
- 最终得到 $A = BC$.

示例：

> 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ 的满秩分解

- 初等行变换得到 **行最简阶梯型**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xRightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{r_2\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 取主元在 **原矩阵** 中对应的列构成 F：

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- 取主元在 **行最简阶梯形** 中对应的行构成 G：

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

最终得到满秩分解：

$$A = FG = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
