

# 第三章 矩阵分解与广义逆矩阵 (1)

## LU分解, PLU分解, 满秩分解

### LU 分解 (Doolittle 型)

Doolittle 型 LU 分解：将矩阵  $A$  分解为

$$A = LU$$

其中

- $L$ : 下三角矩阵 (通常主对角线全为 1)
- $U$ : 上三角矩阵

通常应用于求解方程  $Ax = b$ , 经过  $A = LU$  分解后, 可以先求解  $LUx = Ly = b$ , 然后再求解  $Ux = y$  (回代), 能够更加容易求解方程。

一般要求：所有前  $k$  阶主子式 (左上角  $k \times k$  行列式) 非零, 简单说就是消元时每一步主元都不为 0, 就能顺利做 LU 而不用交换行。

LU 分解基本过程：

- 经过一系列初等行变换 (不能交换行) 得到一个上三角矩阵  $U$ ;
- 可以看出下三角矩阵  $L$ :
  - 首先主对角线元素全为 1;
  - 第 1 列元素比例 (从对角线元素 1 开始) 对应 初始矩阵  $A$  的第 1 列元素的比例;
  - 第 2 列元素比例 (从对角线元素 1 开始) 对应 经过初等行变换后第一列主元下方均为 0 时的矩阵的第 2 列元素的比例
  - 以此类推, 得到下三角矩阵  $L$ 。

示例：

求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 13 & -19 \\ -6 & -3 & -6 \end{pmatrix}$  的 LU 分解

- 用初等行变换将第 1 列主元下方全部变为 0

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 13 & -19 \\ -6 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1, r_3+3r_1} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 12 & -24 \end{pmatrix}$$

- 用初等行变换将第 2 列主元下方全部变为 0

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 12 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-4r2} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

此时得到的矩阵是一个上三角矩阵，即  $U$ :

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

变换之前，第 1 列主元及下方元素比例为  $[1, 2, -3]$ ；第 1 次变换后，第 2 列主元及下方元素比例为  $[1, 4]$ 。故下三角矩阵  $L$  为：

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

最终得到 LU 分解：

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$


---

## PLU 分解 (Doolittle 型)

PLU 分解和 LU 分解的关键区别就在于 PLU 分解是带有行交换的：

$$PA = LU$$

其中

- $P$ : 置换矩阵 (从单位矩阵通过交换行得到，代表进行的行交换操作)
- $L$ : 下三角矩阵 (通常主对角线全为 1)
- $U$ : 上三角矩阵

**为什么需要 PLU 分解：**在进行初等行变换时，可能遇到某一步主元为 0。解决方法就是，每一次初等行变换先“选择主元”，通常的做法是将当前列最大元素所在行交换到主元所在行。这些行交换操作最终形成一个置换矩阵  $P$ 。

**示例：**

求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 1 \\ 0.2 & 1 & 2.5 \end{pmatrix}$  的 PLU 分解

- 交换行，并将第 1 列主元下方元素变为 0

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 1 \\ 0.2 & 1 & 2.5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.2 & 1 & 2.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.2 & 1 & 2.5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - \frac{1}{4}r_1, r_3 - \frac{1}{10}r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0.625 & -0.25 \\ 0 & 0.85 & 2.4 \end{pmatrix}$$

- 交换行，并将第 2 列主元下方元素变为 0

$$\begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0.625 & -0.25 \\ 0 & 0.85 & 2.4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0.85 & 2.4 \\ 0 & 0.625 & -0.25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0.85 & 2.4 \\ 0 & 0.625 & -0.25 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - \frac{0.625}{0.85}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0.85 & 2.4 \\ 0 & 0 & -2.0147 \end{pmatrix}$$

此时得到的矩阵是一个上三角矩阵，即  $U$ ：

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0.85 & 2.4 \\ 0 & 0 & -2.0147 \end{pmatrix}$$

可以得到下三角矩阵  $L$ （注意此处应该遵从多次行交换后的最终的比例）：

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.7353 & 1 \end{pmatrix}$$

行变换矩阵  $P$ ：

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

最终得到 PLU 分解：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.7353 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0.85 & 2.4 \\ 0 & 0 & -2.0147 \end{pmatrix}$$


---

## 满秩分解

把一个矩阵  $A$  写成“两个满秩矩阵相乘”的形式，用这两个小一点的矩阵来体现它的秩结构。

设  $A$  是一个  $m \times n$  矩阵， $\text{rank}(A) = r$ 。

若存在矩阵

$$A = FG$$

其中

- $F$  是  $m \times r$  矩阵，且  $\text{rank}(F) = r$ （列满秩）
- $G$  是  $r \times n$  矩阵，且  $\text{rank}(G) = r$ （行满秩）

那么就称  $A = FG$  是  $A$  的满秩分解。

### 满秩分解的基本过程：

- 对矩阵  $A$  进行初等行变换（不要进行交换行），得到矩阵的 行最简阶梯形；

**行最简阶梯形** 的条件：

- 零行（全是 0 的行）排在最下面；
- 每个非零行的第一个非零元是 1。这个 1 叫做该行的 **主元**；
- 主元所在的那一列，其他行都是 0；
- 从上到下看，每一行的主元都在上一行主元的右边（呈阶梯型）
- 取主元在 原矩阵  $A$  中对应的 **列** 构成  $F$ ；
- 取主元在 行最简阶梯形 中对应的 **行** 构成  $G$ ；
- 最终得到  $A = BC$ .

**示例：**

求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$  的满秩分解

- 初等行变换得到 行最简阶梯型

$$\begin{array}{cccc} \left( \begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{r_3+r_1} & \left( \begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right) & \xrightarrow{r_3-2r_2} \left( \begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{r_2 \times \frac{1}{2}} & \left( \begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{r_1+r_2} \left( \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

- 取主元在 原矩阵 中对应的列构成  $F$ :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- 取主元在 行最简阶梯形 中对应的行构成  $G$ :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

最终得到满秩分解：

$$A = FG = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$


---