一、（**10** 分）设 $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$ ，计算 $\|A\|_F$ 、$\max\limits_{\|x\|_\infty=5}\|Ax\|_\infty$ 及 $cond_2(A)$ 。

解：$\|A\|_F=\sqrt{16+9+9+1+1}=\sqrt{36}=6$

$$\max_{\|x\|_\infty=5}\|Ax\|_\infty=5\max_{\left\|\frac{x}{5}\right\|_\infty=5}\left\|A\frac{x}{5}\right\|_\infty=5\|A\|_\infty=20$$

$|\lambda I-A|=0$，$\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=4$

$\mathrm{cond}_2(A)=2$

二、（**5** 分）

(1)简述模拟退火算法的规律，并给出降温的常用方法。

(2)写出求解无约束优化问题 $\min\limits_{x\in R^n} f(x)$ 的牛顿法迭代公式，给出算法收敛阶数。

解：**(1):** 在某个温度下，金属分子停留在能量最小的状态的概率比停留在能量大的状态的概率要大。

降温：**(a):** $t_{k+1}=\alpha t_k$

（**b**）$t_k=\dfrac{M-k}{M}t_0$,其中 M 为温度下降的总次数。

(2): $x_{k+1}=x_k-\left(\nabla^2 f(x_k)\right)^{-1}\nabla f(x_k)$

局部有 **2** 阶收敛速度。

三、**(10** 分**)** 设 $A=\begin{pmatrix}1&3&-3\\1&1&1\\3&3&1\end{pmatrix}$， 试判断使用 **Gauss-Seidel** 迭代法和 **Jacobi** 迭代法求解以 A 为系数的方程组的收敛性。

解：$B_{GS}=-\begin{pmatrix}0&3&-3\\0&-3&4\\0&0&-3\end{pmatrix}$ ，$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=3$ $\rho=3>1$ ，所以 **Gauss-Seidel** 迭代法发散；

$B_J=-\begin{pmatrix}0&3&-3\\1&0&1\\3&3&0\end{pmatrix}$ ， $\lambda_1=0$，$\lambda_2=\sqrt{3}i,\lambda_3=-\sqrt{3}i$ ，$\rho=\sqrt{3}>1$，所以 **Jacobi** 迭代法发散。

四、**(10 分)** 证明矩阵 $A=\begin{pmatrix}9 & 1 & 1\\ 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 有 **3** 个互异特征值。

解：$\begin{array}{l}G_1=\{\lambda:|\lambda-9|\le 2\};\\ G_2=\left\{\lambda:|\lambda|\le\frac{3}{2}\right\};\\ G_3=\{\lambda:|\lambda-3|\le 2\}\end{array}$ ，有相交； 取 $D=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ，则

$$B=D^{-1}AD=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 1 & 1\\ 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 2 & 2\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\bar{G}_1=\{\lambda:|\lambda-9|\le 4\};\bar{G}_2=\{\lambda:|\lambda|\le 1\};\bar{G}_3=\left\{\lambda:|\lambda-3|\le\frac{3}{2}\right\}$$

它们相互分离。若实矩阵 ***A*** 的特征值 λ 为复数，则 $\bar{\lambda}$ 也为特征值，但 $\bar{G}_1,\bar{G}_2,\bar{G}_3$ 关于实轴对称，则 ***A*** 特征值必皆为实数，故在区间 $[-1,1],[1.5,4.5],[5,13]$ 中各有一个特征值。

五、（**10** 分）求下列矩阵的不变因子、初等因子及 **Jordan** 标准形：

$$A=\begin{pmatrix}17 & 0 & -25\\ 0 & 3 & 0\\ 9 & 0 & -13\end{pmatrix}$$

解：$D_3=|\lambda I-A|=(\lambda-3)(\lambda-2)^2$ ，$D_2=D_1=1$

所以，不变因子为：$d_3=(\lambda-3)(\lambda-2)^2,d_2=d_1=1$

初等因子：$(\lambda-3),(\lambda-2)^2$

Jordan 标准形：$J=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

六、(10 分) 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 4 & -4\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ -1\end{pmatrix}$，

(1) 求 A 的满秩分解；

(2) 求 A^{+}；

(3) 判断 $Ax=b$ 是否有解，有解时极小范数解，无解时求极小范数最小二乘解。

解：(1) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 4 & -4\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，**所以**

$$F=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ -1\end{pmatrix}, G=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

(2) $A^{+}=G^{H}(GG^{H})^{-1}(F^{H}F)^{-1}F^{H}=\dfrac{1}{54}\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 4 & 2\\ 2 & -4 & -2\end{pmatrix}$

(3) 因为 $AA^{+}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 2 & 1\\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ **，所以** $AA^{+}b=b$**，**

所以极小范数解为

$$A^{+}b=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}。$$

七、(10 分) 用单纯形法求解问题

$$\begin{cases} \min & -50x_1 - 30x_2 \\ s.t. & 4x_1 + 3x_2 \le 120 \\ & 2x_1 + x_2 \le 50 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：引松弛变量 $x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$，得标准形：

$$\begin{cases} \min & -50x_1 - 30x_2 \\ s.t. & 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 120 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 50 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

初始化表格：

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	4	3	1	0	120
x_4	2	1	0	1	50
	50	30	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	1	1	−2	20
x_1	1	1/2	0	1/2	25
	0	5	0	−25	−1250

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	1	−2	20
x_1	1	0	−1/2	3/2	15
	0	0	−5	−15	−1350

所以 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix}, f^* = -1350$。

八、**(5 分)** 　用外点罚函数法求解$\begin{cases} \min & \frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{6}x_2^2 \\ s.t. & x_1+x_2\ge 1 \end{cases}$的最优解

解：$P(x,\lambda,\sigma)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{6}x_2^2+\sigma\max\{0,1-x_1-x_2\}^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x_1}=\begin{cases} x_1 & x_1+x_2\ge 1 \\ x_1-2\sigma(1-x_1-x_2) & x_1+x_2\le 1 \end{cases} \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_2}=\begin{cases} \frac{1}{3}x_2 & x_1+x_2\ge 1 \\ \frac{1}{3}x_2-2\sigma(1-x_1-x_2) & x_1+x_2\le 1 \end{cases} \end{cases},$$

所以 $\begin{cases} x_1^{(k)}=\dfrac{2\sigma}{1+8\sigma} \\ x_2^{(k)}=3\dfrac{2\sigma}{1+8\sigma} \end{cases}$

$\nabla^2 P=\begin{pmatrix} 1+2\sigma & 2\sigma \\ 2\sigma & \frac{1}{3}+2\sigma \end{pmatrix}$ 为正定阵，所以$\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix}$ 为严格局部极小解

得$\sigma\to+\infty$，$\begin{cases} x_1^*=\dfrac{1}{4} \\ x_2^*=\dfrac{3}{4} \end{cases}$，$f^*=\dfrac{1}{8}$