2019 年高等工程数学试题答案

一、（15 分）设 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ **，计算** $\rho(A)$、$\max\limits_{\|x\|_2=5}\|Ax\|_2$ **及** $cond_2(A)$ **。**

解：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1=1;\lambda_2=\lambda_3=3$$

$$\rho(A)=3$$

$$\because A\text{是正规矩阵}\quad\therefore\|A\|_2=\rho(A)=3$$

$$\max_{\|x\|_2=5}\|Ax\|_2=5\max_{\left\|\frac{x}{5}\right\|_2=1}\left\|A\frac{x}{5}\right\|_\infty=5\|A\|_2=15$$

$$\because A\text{是正规矩阵}\quad\therefore cond_2(A)=\frac{3}{1}=3$$

二、（10 分）讲述一下求解矩阵 A 的最靠近 λ^* **的特征值的思路、步骤。**

答：

对$A-\lambda^*I$使用逆幂法，求出其按模最小的特征值再加上λ^*。

任取$u_0=v_0\neq0$

$$\begin{cases}u_k=(A-\lambda^*I)^{-1}v_{k-1}\\[2ex] v_k=\dfrac{u_k}{\max(u_k)}\end{cases}\qquad\text{即}\begin{cases}(A-\lambda^*I)u_k=v_{k-1}\\[2ex] v_k=\dfrac{u_k}{\max(u_k)}\end{cases}$$

对$A-\lambda^*I$进行选列主元的三角分解有

$$P(A-\lambda^*I)=LU$$

$$\therefore\begin{cases}Ly_k=Pv_{k-1}\\ Uu_k=y_k\\ v_k=\dfrac{u_k}{\max(u_k)}\end{cases}\qquad\text{有}\begin{cases}\max(u_k)\to\dfrac{1}{\lambda-\lambda^*}\\[2ex] v_k\to\dfrac{x_i}{\max(x_i)}\end{cases}$$

三、（**18 分**） 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&2&6\\0&4&4\end{pmatrix}$，**求** P **使得** $P^{-1}AP$ **为** A **的 Jordan 标准型，同时需要求出** A **的 Jordan 标准型。**

解：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&0&0\\-2&\lambda-2&-6\\0&-4&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$D_3=(\lambda+2)^2(\lambda-8)\qquad D_2=D_1=1$$

$$d_3=(\lambda+2)^2(\lambda-8)\qquad d_2=d_1=1$$

初等因子：$(\lambda+2)^2$，　$(\lambda-8)$

Jordan 标准形：

$$J=\begin{pmatrix}-2&1&\\&-2&\\&&8\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix}-2&1&\\&-2&\\&&8\end{pmatrix},\quad 令P=[p_1\quad p_2\quad p_3]$$

$$\therefore Ap_1=-2p_1\qquad\qquad \therefore p_1=[0\quad 3\quad -2]^T$$

$$Ap_2=p_1-2p_2\qquad\qquad p_2=[\frac{5}{2}\quad -\frac{1}{2}\quad 0]^T$$

$$Ap_3=8p_3\qquad\qquad p_3=[0\quad 1\quad 1]^T$$

$$\therefore P=\begin{pmatrix}0&\frac{5}{2}&0\\3&-\frac{1}{2}&1\\-2&0&1\end{pmatrix},使得P^{-1}AP=J$$

四、（20 分）已知 $A=\begin{pmatrix}2&4&1&1\\1&2&-1&2\\-1&-2&-2&1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，

（1）求 A 的满秩分解；

（2）求 A^{+}；

（3）判断 $Ax=b$ 是否有解，有解时求极小范数解，无解时求极小范数最小二乘解。

解：（1） $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 2\\ -1 & -2 & -2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore F=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

（2） $A^{+}=G^{H}(GG^{H})^{-1}(F^{H}F)^{-1}F^{H}=\dfrac{1}{33}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & 2 & -2\\ 1 & -5 & -6\\ 1 & 6 & 5\end{pmatrix}$

（3） $AA^{+}b=b$　所以有解

极小范数解是 $x=A^{+}b=\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -5\\ 6\end{pmatrix}$

五、(17 分) （1）用单纯形法求解最优化问题

$$\begin{cases}\min & x_1-2x_2+x_3\\ s.t. & 2x_1+x_2-x_3\le 5\\ & 4x_1-2x_2+3x_3\le 2\\ & -x_1+x_2-x_3\le 1\\ & x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$$

解：引入松弛变量 x_4,x_5,x_6 将需要求解的最优化问题转化为同解的标准形

$$\begin{cases} \min & x_1-2x_2+x_3 \\ s.t. & 2x_1+x_2-x_3+x_4=5 \\ & 4x_1-2x_2+3x_3+x_5=2 \\ & -x_1+x_2-x_3+x_6=1 \\ & x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 \ge 0 \end{cases}$$

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	
X4	2	1	-1	1	0	0	5
X5	4	-2	3	0	1	0	2
X6	-1	$\boxed{1}$	-1	0	0	1	1
	-1	2	-1	0	0	0	0

min{5/1, 1/1}=1

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	
X4	3	0	0	1	0	-1	4
X5	2	0	$\boxed{1}$	0	1	2	4
X2	-1	1	-1	0	0	1	1
	1	0	1	0	0	-2	-2

min{4/1}=4

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	
X4	3	0	0	1	0	-1	4
X3	2	0	1	0	1	2	4
X2	1	1	0	0	1	3	5
	-1	0	0	0	-1	-4	-6

$\therefore x=\begin{pmatrix}0 & 5 & 4\end{pmatrix}, f_{\min}=-6$

（2）简单说明一下最优化问题

$$\begin{cases} \min & x_1-2x_2+3x_3 \\ s.t. & 2x_1+x_2-x_3 \ge 5 \\ & 4x_1-2x_2+3x_3 \ge 3 \\ & -x_1+x_2-x_3=2 \\ & x_1,x_2,x_3 \ge 0 \end{cases}$$

的求解思路。（无需具体求解）

答：引入松弛变量x_4,x_5将需要求解的最优化问题转化为同解的标准形

$$\begin{cases}\min & x_1-2x_2+3x_3 \\ s.t. & 2x_1+x_2-x_3-x_4=5 \\ & 4x_1-2x_2+3x_3-x_5=3 \\ & -x_1+x_2-x_3=2 \\ & x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0\end{cases}$$

利用两阶段法求解上述最优化问题：

引入人工变量x_6,x_7,x_8构造第一阶段问题：

$$\begin{cases}\min & x_6+x_7+x_8 \\ s.t. & 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_6=5 \\ & 4x_1-2x_2+3x_3-x_5+x_7=3 \\ & -x_1+x_2-x_3+x_8=2 \\ & x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\ge 0\end{cases}$$

用单纯形法求解上述问题，将人工变量x_6,x_7,x_8变换为非基变量，求出标准形的一个基本可行解。

第二阶段：从第一阶段最后的单纯形表中去掉人工变量对应的列，按标准形的目标函数修正最后一行的判别数和目标函数值，由第一阶段获得的基本可行解出发，用单纯形法求解新的单纯形表格，获得原问题的最优解。

六、(10 分) 用对数障碍内点罚函数法求解$\begin{cases}\min & x_1^2-4x_1+3x_2 \\ s.t. & x_1\ge 2 \\ & x_2\ge 3\end{cases}$。

解： $F(x,\mu)=x_1^2-4x_1+3x_2-\mu\ln(x_1-2)-\mu\ln(x_2-3)$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=2x_1-4-\frac{\mu}{x_1-2}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}=3-\frac{\mu}{x_2-3}=0$$

$$\begin{cases}x_1=2+\sqrt{\dfrac{\mu}{2}} \\ x_2=3+\dfrac{\mu}{3}\end{cases} \qquad \nabla^2F=\begin{bmatrix}2 & 0 \\ 0 & \dfrac{\mu}{(x_2-3)^2}\end{bmatrix}\text{正定}$$

令$\mu\to 0$ 有$\begin{cases}x_1\to 2 \\ x_2\to 3\end{cases}$ 得$f_{\min}=f(2,3)=5$

七、(10 分)　讲述一下基本遗传算法的算法流程。

答：（1）随机初始化 pop-size 个染色体

（2）用交叉算法更新染色体

（3）用变异算法更新染色体

（4）计算所有染色体的目标值

（5）根据目标值计算每个染色体的适应度

（6）通过轮盘赌的方法选择染色体

（7）重复第（2）至第（6）步到终止条件满足

（8）输出最好的染色体作为最优解