南京理工大学博士、硕士研究生考试

高等工程数学I 试题(A) 评分标准

学院（系）： 理学院　　　　学期： 18年秋

考试方式： 闭卷　　满分分值： 100　　考试时间： 120 分钟

一、(共15分)解：因 A 为实对称矩阵，知 A 为正规矩阵，又

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-1)^2$$，知 $\lambda_1 = 4$，$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$，所以有 $cond_2(A) = 4$。

-------（9分）于是 $\dfrac{\|X-\overline{X}\|_2}{\|X\|_2} \le \dfrac{cond_2(A)\dfrac{\|\delta\|_2}{\|A\|_2}}{1-cond_2(A)\dfrac{\|\delta\|_2}{\|A\|_2}} \le 10^{-4} \Rightarrow \dfrac{4}{1-4\dfrac{\|\delta\|_2}{\|A\|_2}}\dfrac{\|\delta\|_2}{\|A\|_2} \le 10^{-4}$

$\Rightarrow \dfrac{\|\delta\|_2}{\|A\|_2} \le \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{1.0001}\times 10^{-4} \le \dfrac{1}{4}\times 10^{-4} = 2.5\times 10^{-5}$。 -------（6分）

二、(共12分)解：(1)固定步数：即在每一温度迭代相同的步数。-------（4分）
(2)由接受和拒绝的比率控制迭代步数：给定一个迭代步数上限 U 和一个接受次数指标 r，在温度 t 实施退火过程，当接受次数等于 r 时，不再迭代，否则一直迭代到步数上限 U。或者给定一个接受指标 R 和迭代步数下限 L，在温度 t 实施退火过程，迭代到步数 L 时，开始计算接受次数与总次数的比率，一旦比率超过 R，不再迭代，否则一直迭代到步数上限 U。-------（6分）

三、(共10分)解：$P(x,\mu) = x - \mu\ln x^2 - \mu\ln(x+1)$

$P'(x,\mu) = 1 - \dfrac{2\mu}{x} - \dfrac{\mu}{x+1} = 0$ -------（4分）

$\Rightarrow x_1(\mu) = \dfrac{3\mu - 1 + \sqrt{9\mu^2 + 2\mu + 1}}{2} \to 0$

$x_2(\mu) = \dfrac{3\mu - 1 - \sqrt{9\mu^2 + 2\mu + 1}}{2} \to -1$，$P''(x,\mu) = \dfrac{2\mu}{x^2} + \dfrac{\mu}{(x+1)^2} > 0$

所以 $(-1,0)$ 的局部极小点为 $x = -1$，$(0,+\infty)$ 的局部极小点为 $x = 0$ -------（6分）

四、(共20分)解：1. $\begin{pmatrix} -6 & 4 & 12 & 8 \\ 10 & -7 & 0 & 7 \\ -5 & 1 & -5 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -6 & 4 & 12 & 8 \\ -5 & 1 & -5 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & \dfrac{1}{5} & 12 & \dfrac{61}{5} \\ 0 & -\dfrac{5}{2} & -5 & -\dfrac{5}{2} \end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}10 & -7 & 0 & 7\\ 0 & -\frac{5}{2} & -5 & -\frac{5}{2}\\ 0 & \frac{1}{5} & 12 & \frac{61}{5}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}10 & -7 & 0 & 7\\ 0 & -\frac{5}{2} & -5 & -\frac{5}{2}\\ 0 & 0 & \frac{62}{5} & \frac{62}{5}\end{pmatrix}$，-------（7 分）等价方程组为

$\begin{cases}10x_1-7x_2=7\\ -\frac{5}{2}x_2-5x_3=-\frac{5}{2}\\ \frac{62}{5}x_3=\frac{62}{5}\end{cases}$，回代得 $x_3=1, x_2=-1, x_1=0$. --------（3 分）

2．Gauss-Seidel 迭代格式为$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{2}(1+x_2^{(k)}-3x_3^{(k)})\\ x_2^{(k+1)}=1-x_1^{(k+1)}-x_3^{(k)}\\ x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{2}(1-x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)})\end{cases}$， -------（6 分）

Gauss-Seidel 迭代矩阵 G_s 的特征方程为$\begin{vmatrix}2\lambda & -1 & 3\\ \lambda & \lambda & 1\\ \lambda & \lambda & -2\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow-\lambda(2\lambda+1)^2=0$，

$$\therefore\ \lambda_1=0, \lambda_2=\lambda_3=-\frac{1}{2}, \Rightarrow \rho(G_s)=\frac{1}{2}<1$$

所以 Gauss-Seidel 迭代格式收敛。 --------（4 分）

五、（共 12 分）解：1．因$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix}\lambda-3 & -1 & 1\\ 2 & \lambda & -2\\ 1 & 1 & \lambda-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -2(\lambda-2)\\ 0 & 2-\lambda & (\lambda-2)(4-\lambda)\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-2) & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2\end{pmatrix}$，所以 A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$。 --------（8 分）

2．因为 $\Delta_1=3\neq0, \Delta_2=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix}=2\neq0$，所以 A 能进行 Doolittle 分解。--------（4 分）。

六、（共 15 分）解：1． $A\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\therefore F=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}, G=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ ----

----（7 分）

2． $(GG^H)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, (F^HF)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, 所以

$$A^{+}=G^{H}(GG^{H})^{-1}(F^{H}F)^{-1}F^{H}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2&-2&2&2\\-1&3&-1&1\\1&-3&1&-1\end{pmatrix}$$ 。 --------（8 分）

七、（共 10 分）解：$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}2(x_1-4)\\2(x_2-4)\end{pmatrix}$，$\nabla g_1(x)=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$，$\nabla g_2(x)=\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$

$2(x_1-4)+\lambda_1+\lambda_2=0$

$2(x_2-4)+\lambda_1+3\lambda_2=0$

$-x_1-x_2+4\ge 0$

$-x_1-3x_2+9\ge 0$

$\lambda_1\ge 0, \lambda_2\ge 0$

$\lambda_1(-x_1-x_2+4)=0$

$\lambda_2(-x_1-3x_2+9)=0$ --------（5 分）

(a) $\lambda_1=\lambda_2=0, x_1=4, x_2=4$ (舍)

(b) $\lambda_1\ne 0,\lambda_2\ne 0$，$\begin{cases}-x_1-x_2+4=0\\-x_1-3x_2+9=0\\2(x_1-4)+\lambda_1+\lambda_2=0\\2(x_2-4)+\lambda_1+3\lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}\\x_2=\frac{5}{2}\\\lambda_1=6\\\lambda_2=-1\end{cases}$ (舍)

(c) $\lambda_1=0,\lambda_2\ne 0$，$\begin{cases}-x_1-3x_2+9=0\\2(x_1-4)+\lambda_2=0\\2(x_2-4)+3\lambda_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{33}{10}\\x_2=\frac{19}{10}\end{cases}$ (舍)

(d) $\lambda_1\ne 0,\lambda_2=0$，$\begin{cases}-x_1-x_2+4=0\\2(x_1-4)+\lambda_1=0\\2(x_2-4)+\lambda_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\\x_2=2\\\lambda_1=4\end{cases}$

所以 K-K-T 点 $x=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$，$\lambda_1=4, \lambda_2=0$ --------（5 分）

八、（共 10 分）解：标准形为$\begin{cases}\min\ -4x_1-6x_2-18x_3\\ s.t.\ \ x_1+3x_3+x_4=3\\ \quad x_2+2x_3+x_5=5\\ \quad x_i\ge 0\ (i=1,2,3,4,5)\end{cases}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	1	0	3^*	1	0	3
x_5	1	0	2	0	1	5
	4	6	18	0	0	0

（在主元右上角标以“*”号）--------（5 分）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	1
x_5	$-\frac{2}{3}$	1^*	0	$-\frac{2}{3}$	1	3
	-2	6	0	-6	0	-18

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	$\frac{1}{3}^*$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	1
x_2	$-\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	1	3
	2	0	0	-2	-6	-36

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	3	1	0	3
x_2	0	1	2	0	0	5
	0	0	-6	-4	0	-42

所以 $x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$， $f^* = -42$ -------（5 分）