第五章 最优化方法（7）
外点罚函数法、内点罚函数法

外点罚函数法

算法思想

原问题是带不等式约束的极小化：

$$\min f(x), \quad g_i(x) \geq 0,\ i = 1, \dots, m.$$

外点法把“**违反约束**”这件事当成一种“罚款”：点越不满足约束，罚得越重。于是构造一个**无约束的罚函数**：

$$F(x, \mu) = f(x) + \mu \sum_{i=1}^{m} \varphi(g_i(x)),$$

其中 $\varphi(\cdot) \geq 0$ 且当 $g_i(x) \geq 0$ 时为 0，常见选法是

$$\varphi(g_i(x)) = \max\{0, -g_i(x)\}^2 \quad 或 \quad \max\{0, -g_i(x)\}.$$

算法过程

1. 取一列逐渐 **增大** 的罚参数 $\mu_k \to +\infty$；
2. 对每个 μ_k，求**无约束极小点**：

$$x^{(k)} = \arg\min_x F(x, \mu_k);$$

3. 在合适条件下，$x^{(k)}$ 会渐渐逼近原约束问题的最优解。

例题

> 用外点罚函数法求解下列问题：
>
> $$\min f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2, \quad \text{s.t. } g(x) = 4 - x_1 - x_2 \geq 0.$$

解答：

- 构造罚函数

  把约束改写成“违反量” $x_1 + x_2 - 4$，于是可取平方罚函数

$$F(x, \mu) = f(x) + \mu[\max\{0, x_1 + x_2 - 4\}]^2.$$

- 若不用罚函数，直接看约束：
  无约束时

$$\min(x_1-3)^2+(x_2-2)^2$$

  的极小点是 $(3,2)$，但此时 $x_1+x_2=5>4$，但是 **不满足约束。**

- 用罚函数看逼近过程

  若 $x_1+x_2>4$，此时

$$F(x,\mu)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2+\mu(x_1+x_2-4)^2.$$

  这是一个无约束二次函数，其极小点由

$$\nabla F=0$$

  得

$$\begin{cases}2(x_1-3)+2\mu(x_1+x_2-4)=0,\\2(x_2-2)+2\mu(x_1+x_2-4)=0.\end{cases}$$

  两式相减得 $x_1-3=x_2-2\Rightarrow x_1=x_2+1$。代回任一式可得

$$x_1=\frac{5\mu+3}{2\mu+1},\quad x_2=\frac{3\mu+2}{2\mu+1}.$$

当 $\mu\to+\infty$ 时：

$$x_1(\mu)\to\frac{5}{2},\quad x_2(\mu)\to\frac{3}{2},$$

趋于约束问题的最优解

$$x^*=(\tfrac{5}{2},\tfrac{3}{2}).$$

验证：$x_1+x_2=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$，恰好在约束边界上。

内点罚函数法（障碍函数法）

算法思想

对于

$$\min f(x),\quad g_i(x)\geq 0,$$

要求最终解在**可行域内部**，不允许走到外面，因此构造一种在约束边界附近会“炸掉”的函数作为**障碍**，典型是对数障碍：

$$B(x,\mu)=f(x)-\mu\sum_{i=1}^{m}\ln g_i(x),\quad \mu>0.$$

如果使用的是 倒数障碍：

$$B(x,\mu)=f(x)+\mu\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(x)},\quad \mu>0.$$

注意：只有在 $g_i(x) > 0$ 时才有意义，这就强迫 x 始终待在可行域内部。

算法过程

1. 选一列逐渐 **减小** 的参数 $\mu_k \to 0$；
2. 对每个 μ_k，在可行域内部求无约束极小点：
$$x^{(k)} = \arg\min_{g_i(x)>0} B(x, \mu_k);$$
3. 在合适条件下，$x^{(k)}$ 会沿着所谓"中心路径"收敛到原问题的最优解。

因为始终在**可行域内部（内点）**游走，所以叫内点/障碍函数法。

例题

> 用对数障碍函数法求解下列问题：
> $$\min f(x) = \frac{1}{2}(x_1+1)^2 + x_2, \quad \text{s.t. } \begin{cases} x_1 - 1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

解答：

- 构造对数障碍函数

  把约束写成 $g_1(x) = x_1 - 1 \geq 0,\ g_2(x) = x_2 \geq 0$。

  对数障碍函数为
$$F(x,\mu) = \frac{1}{2}(x_1+1)^2 + x_2 - \mu\ln(x_1-1) - \mu\ln x_2, \quad \mu > 0.$$

- 对固定 μ 求无约束极小点

  求梯度为 0：
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = (x_1+1) - \dfrac{\mu}{x_1-1} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 1 - \dfrac{\mu}{x_2} = 0. \end{cases}$$

  第二个方程直接给出
$$x_2 = \mu$$

  第一个方程：
$$(x_1+1)(x_1-1) - \mu = 0 \ \Rightarrow\ x_1 = \sqrt{1+\mu}$$

  取正根以满足 $x_1 > 1$.

  因此，对于任意 $\mu > 0$，障碍子问题的极小点为
$$x_1(\mu) = \sqrt{1+\mu}, \quad x_2(\mu) = \mu$$

当 $\mu \to 0$ 时：
$$x_1(\mu) \to \sqrt{1} = 1, \quad x_2(\mu) \to 0,$$

收敛到原问题的最优解

$$x^* = (1, 0).$$

验证：$x_1 = 1 \geq 1, x_2 = 0 \geq 0$，正好在约束边界上。

如果改用 倒数障碍函数：
解答：

- **构造倒数障碍函数**

  对本题，取

$$F(x, \mu) = \frac{1}{2}(x_1 + 1)^2 + x_2 + \mu\Big(\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2}\Big), \quad \mu > 0,$$

  定义域为 $x_1 > 1$，$x_2 > 0$。

- **对固定 μ 求无约束极小点**

  求梯度为 0：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_1} = (x_1 + 1) - \dfrac{\mu}{(x_1 - 1)^2} = 0, \\ \dfrac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_2} = 1 - \dfrac{\mu}{x_2^2} = 0. \end{cases}$$

  由第二个方程得到

$$x_2^2 = \mu \;\Rightarrow\; x_2 = \sqrt{\mu} \quad (\text{取正根以保证 } x_2 > 0).$$

  第一个方程可写成

$$(x_1 + 1)(x_1 - 1)^2 = \mu.$$

  对任意给定的 $\mu > 0$，这是一个关于 x_1 的三次方程，解出满足 $x_1 > 1$ 的那一支即为极小点 $x_1(\mu)$。

- **考察 $\mu \to 0^+$ 时的极限**

  当 $\mu \to 0^+$ 时，右端 $\mu \to 0$，而左端 $(x_1 + 1)(x_1 - 1)^2 \geq 0$。要使等式成立，只能有 $(x_1 + 1)(x_1 - 1)^2 \to 0$。在可行域内 $x_1 > 1$，因此极限点必满足

$$x_1 \to 1^+.$$

  同时有

$$x_2(\mu) = \sqrt{\mu} \to 0^+.$$

  于是倒数障碍法得到的点列 $(x_1(\mu), x_2(\mu))$ 仍然收敛到

$$x^* = (1, 0),$$

  与对数障碍函数法和原始问题的最优解一致。