南京理工大学博士、硕士研究生考试

高等工程数学 试题　　时间：120 分钟

姓　名＿＿＿＿＿　学　号＿＿＿＿＿　学院（系）＿＿＿＿＿

请写出详细的证明和求解过程

一、(15 分) 设 $x=\begin{pmatrix}-1\\ i\\ 2\end{pmatrix}$ 及 $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&0&2\\0&2&2\end{pmatrix}$，计算 $\|x\|_1$、$\max\limits_{\|x\|_\infty=4}\|Ax\|_\infty$ 及 $cond_2(A)$。

二、(8 分) 给出遗传算法中变异运算的常用方法。

三、(10 分) 用倒数障碍内点罚函数法求解 $\begin{cases}\min & x_1^2-6x_1+2x_2+9\\ s.t. & x_1\ge 3\\ & x_2\ge 3\end{cases}$。

四、(12 分) 证明矩阵 $A=\begin{pmatrix}20&5&0.8\\4&10&1\\1&2&10i\end{pmatrix}$ 有 3 个互异特征值。

五、(15 分) 求下列矩阵的不变因子、初等因子及 Jordan 标准形：

$$A=\begin{pmatrix}-3&3&-2\\0&-1&0\\8&6&5\end{pmatrix}$$

六、(20 分) 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&2&2&2\\-1&4&5&3\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix}$，

(1) 求 A 的满秩分解；

(2) 求 A^+；

(3) 判断 $Ax=b$ 是否有解，有解时求通解及极小范数解，无解时求最小二乘解及极小范数最小二乘解。

七、(10 分) 用单纯形法求解问题

$$\begin{cases}\min & -10x_1-6x_2-4x_3\\ s.t. & x_1+x_2+x_3\le 100\\ & 10x_1+4x_2+5x_3\le 600\\ & 2x_1+2x_2+6x_3\le 300\\ & x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$$

八、(10 分) 用 FR 共轭梯度法求解 $\min 2x_1^2+x_2^2$　初始点取为 $x^{(1)}=(2,2)^T$。

附录：

$$\beta=\frac{\left\|\nabla f\left(x^{(k+1)}\right)\right\|^2}{\left(d^{(k)}\right)^T\nabla f\left(x^{(k)}\right)}\qquad \beta=\frac{\left\|\nabla f\left(x^{(k+1)}\right)\right\|^2}{\left(d^{(k)}\right)^T\left[\nabla f\left(x^{(k+1)}\right)-\nabla f\left(x^{(k)}\right)\right]}\qquad \beta=\frac{\left\|\nabla f\left(x^{(k+1)}\right)\right\|^2}{\left\|\nabla f\left(x^{(k)}\right)\right\|^2}$$

$$\beta=\frac{\nabla f\left(x^{(k+1)}\right)^T\left[\nabla f\left(x^{(k+1)}\right)-\nabla f\left(x^{(k)}\right)\right]}{\left\|\nabla f\left(x^{(k)}\right)\right\|^2}$$