南京理工大学博士、硕士研究生考试

高等工程数学I(第二阶段) 试题(A) 评分标准

学院（系）： 理学院 学期： 20年秋

考试方式： 闭卷 满分分值： 80 考试时间： 120 分钟

一、（10 分）

解：$A^{-1}=\frac{1}{0.15}\begin{pmatrix}-0.6 & 0.7\\ 0.3 & -0.1\end{pmatrix}$ ， $\|A\|_\infty=0.9, \|A^{-1}\|_\infty=\frac{1.3}{0.15}$, $cond_\infty(A)=\|A\|_\infty\cdot\|A^{-1}\|_\infty=0.9\cdot\frac{1.3}{0.15}=7.8$ （5 分）

因 $\rho(A)\le\|A\|_\infty<1, \sum_{k=0}^{+\infty}A^k$ 收敛，且

$$\sum_{k=0}^{+\infty}A^k=(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}0.9 & -0.7\\ -0.3 & 0.4\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{0.15}\begin{pmatrix}0.4 & 0.7\\ 0.3 & 0.9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3} & \frac{14}{3}\\ 2 & 6\end{pmatrix}。$$ （5 分）

二、（10 分）

解：$\lambda I_4-A=\begin{pmatrix}\lambda I_3-B & 0\\ 0 & \lambda-1\end{pmatrix}$,其中$\lambda I_3-B=\begin{pmatrix}\lambda-1 & -a & -b\\ 0 & \lambda-1 & -c\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$。

先计算λI_3-B的各阶行列式因子：

$D_3=(\lambda-1)^2(\lambda-2);\quad D_1=1$；

所有(可能)非零二阶子式有：$D_{1,1}=D_{2,2}=(\lambda-1)(\lambda-2)$,

$D_{3,3}=(\lambda-1)^2, D_{3,2}=-c(\lambda-1), D_{3,1}=ac+b(\lambda-1)$， $D_{2,1}=-a(\lambda-2)$,

得出 $D_2=\begin{cases}1, & a\ne 0\\ \lambda-1, & a=0\end{cases}$ 。-----------（3 分）

（1）当$a\ne 0$时，B 的不变因子有$d_1=1, d_2=1, d_3=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$，B 的初等因子组：$(\lambda-1)^2, \lambda-2$，A 的初等因子组：$(\lambda-1)^2, \lambda-2, \lambda-1$，此时 A 的 Jordan 标

准型为$J_A=\begin{pmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 1\end{pmatrix}$。 （3 分）

当$a=0$时，B 的不变因子有$d_1=1,d_2=\lambda-1,d_3=(\lambda-1)(\lambda-2)$，B 的初等因子组：$\lambda-1,\lambda-1,\lambda-2$，A 的初等因子组：$\lambda-1,\lambda-1,\lambda-2,\lambda-1$，此时 A 的 Jordan 标准型为$J_A=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 1\end{pmatrix}$。 （3 分）

（2）A 可对角化的条件是$a=0$。 （1 分）

三、(10 分）解：A的三个盖尔圆：$G_1:|z-9|\le 2,G_2:|z-i|\le 2,G_3:|z-3|\le 2$，$G_1$孤立，$G_2$和$G_3$相交。 （3 分）

取$D=diag\{1,2,2\}$（或等价的$D=diag\{\frac{1}{2},1,1\}$或其他可行的选取） （2 分）

$B=D^{-1}AD=\begin{pmatrix}9 & 2i & -2\\ \frac{1}{2} & i & 1\\ \frac{i}{2} & 1 & 3\end{pmatrix}$，B 的 3 个盖尔圆为：

$G_1`:|z-9|\le 4,G_2`:|z-i|\le\frac{3}{2},G_3`:|z-3|\le\frac{3}{2}$，$G_1`,G_2`,G_3`$互不相交。因为 A 和 B 有相同的特征值，所以根据盖尔圆定理，A 在$G_1`,G_2`,G_3`$中各有一个特征值，这 3 个特征值互异。 （5 分）

四、(10 分）

解：$(A\vdots I_3)\xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{高斯消元}}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U & \tilde{L}\end{pmatrix}$，其中$U=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ & & 1\end{pmatrix}$，

$\tilde{L}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$。令$L=\tilde{L}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$，得到 Doolittle 分解:A=LU。 （4 分）

先求$Ly=b$，得$y_1=1,y_2=-\frac{1}{2},y_3=1$。 （3 分）

再求$Ux=y$，得$x_3=1,x_2=-\frac{2}{3},x_1=\frac{1}{3}$。 （3 分）

五、(10 分)

解：(1) $A^TA=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&4\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\2&4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&10&0\\10&20&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

首先酉对角化 A^TA：由 $\det(\lambda I_3-A^TA)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-25)=0$，得 $\lambda_1=1,\lambda_2=25,\lambda_3=0$。

由 $(\lambda_i I_3-A^TA)p_i=0, i=1,2,3$，求得分别对应 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=25$，$\lambda_3=0$ 的单位特征向量： $p_1=(0,0,1)^T$， $p_2=(\frac{\sqrt5}{5},\frac{2\sqrt5}{5},0)^T$， $p_3=(\frac{2\sqrt5}{5},-\frac{\sqrt5}{5},0)^T$。

得到酉阵 $V=\begin{pmatrix}p_1&p_2&p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt5}{5}&\frac{2\sqrt5}{5}\\0&\frac{2\sqrt5}{5}&-\frac{\sqrt5}{5}\\1&0&0\end{pmatrix}$，使得 $V^TA^TAV=\begin{pmatrix}\Sigma^2&0\\0&0\end{pmatrix}$，其中

$\Sigma=\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}$。 （3 分）

令 $V_1=\begin{pmatrix}p_1&p_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt5}{5}\\0&\frac{2\sqrt5}{5}\\1&0\end{pmatrix}$，

计算 $U_1=AV_1\Sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\2&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt5}{5}\\0&\frac{2\sqrt5}{5}\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt5}{5}\\1&0\\0&\frac{2\sqrt5}{5}\end{pmatrix}$。扩充 U_1 为 3 阶酉阵

$U=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt5}{5}&\frac{2\sqrt5}{5}\\1&0&0\\0&\frac{2\sqrt5}{5}&-\frac{\sqrt5}{5}\end{pmatrix}$，得到 A 的奇异值分解 $A=U\begin{pmatrix}\Sigma&0\\0&0\end{pmatrix}V^T$。 （3 分）

(2) $A^+=V\begin{pmatrix}\Sigma^{-1}&0\\0&0\end{pmatrix}U^T=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt5}{5}&\frac{2\sqrt5}{5}\\0&\frac{2\sqrt5}{5}&-\frac{\sqrt5}{5}\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac15&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{\sqrt5}{5}&0&\frac{2\sqrt5}{5}\\\frac{2\sqrt5}{5}&0&-\frac{\sqrt5}{5}\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&4\\0&25&0\end{pmatrix}$

(2 分)

(3) $Ax=b$ 的极小范数最小二乘解为：

$A^+b=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&4\\0&25&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}2\\4\\25\end{pmatrix}$。 （2 分）

六、(10 分)

解：记 $A=L+D+U, L=\begin{pmatrix} & & \\ -1 & & \\ 0 & -1 & \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}, U=\begin{pmatrix} & -1 & 0 \\ & & \alpha \\ & & \end{pmatrix}$。用

Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解 $Ax=b$ 的迭代矩阵分别是

$B_J=\mathrm{I}_3-D^{-1}A, B_G=\mathrm{I}_3-(L+D)^{-1}A$。（3 分）

由 $0=\det(\lambda\mathrm{I}_3-B_J)=\det(D^{-1})\det((\lambda-1)D+A)=\frac{1}{4}\lambda(4\lambda^2+\alpha-1)$ 求得 B_J 的特征值

为 $\lambda_1=0, \lambda_{\pm}=\begin{cases}\pm\frac{\sqrt{1-\alpha}}{2}, & \alpha\le 1\\ \pm\frac{i\sqrt{\alpha-1}}{2}, & \alpha>1\end{cases}$，其谱半径为 $\rho(B_J)=\frac{\sqrt{|1-\alpha|}}{2}$；

由 $0=\det(\mu\mathrm{I}_3-B_G)=\det((L+D)^{-1})\det((\mu-1)(L+D)+A)=2\det((L+D)^{-1})\mu^2(4\mu+\alpha-1)$

求得 B_G 的特征值为 $\mu_1=\mu_2=0, \mu_3=\frac{1-\alpha}{4}$，其谱半径为 $\rho(B_G)=\frac{|1-\alpha|}{4}$。（4 分）

Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法收敛的充要条件是其谱半径小于 1，即

$\begin{cases}\rho(B_J)=\frac{\sqrt{|1-\alpha|}}{2}<1\\ \rho(B_G)=\frac{|1-\alpha|}{4}<1\end{cases}$，即 $-3<\alpha<5$。(3 分)

七、(10 分)

解：首先将问题化为标准型：第二个约束不等式左边减去剩余变量 x_4，得到

$$\begin{aligned}\min\quad & 3x_1-2x_2+x_3\\ s.t.\quad & 2x_1-3x_2+x_3=1\\ & 2x_1+3x_2-x_4=8\\ & x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0\end{aligned}$$ 。（2 分）

约束方程中没有现成的(单位)基矩阵(虽然 x_3 可以作为基变量)，需要添加一个

人工变量 x_5，并用两阶段法或大 M 法求解：

$$\begin{aligned}\min\quad & 3x_1-2x_2+x_3\\ s.t.\quad & 2x_1-3x_2+x_3=1\\ & 2x_1+3x_2-x_4+x_5=8\\ & x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0\end{aligned}$$ 。（1 分）

这里用两阶段法求解。第一阶段用单纯形表格法求解：

$$\begin{aligned} \min \quad & x_5 \\ s.t. \quad & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$ 。

初始基变量是 x_3, x_5，目标函数 $g = x_5 = 8 - 2x_1 - 3x_2 + x_4$ (利用第二个约束方程)，

即 $g + 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 8$，所以第一阶段的单纯形初始表格如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
x_3	2	-3	1	0	0	1
x_5	2	$\boxed{3}$	0	-1	1	8
g	2	3	0	-1	0	8

以方框中的元素为主元（x_2 是入基变量，x_5 是出基变量）进行高斯消元，使得主列变成单位向量（主元变为 1），得到

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
x_3	4	0	1	-1	1	9
x_2	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
g	0	0	0	0	-1	0

因为判别数都非正，人工变量变为非基变量，第一阶段结束（x_2，x_3 是基变量）。

——————————————————————————————————（4 分）

将最后的表格中人工变量 x_5 所在的列去掉，将最后一列换为原目标函数 f 的判别数，开始第二阶段：

	x_1	x_2	x_3	x_4	右端项
x_3	4	0	1	-1	9
x_2	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
f	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$

该表中的判别数均非正，现有的基本可行解即为最优解，即 $(x_1, x_2, x_3) = (0, \frac{8}{3}, 9)$ 时，$f_{\min} = \frac{11}{3}$。　（3 分）

八、(10 分)

解：(1) 记目标函数 $f(x) = (x_1 - 1)(x_2 + 1)$，约束函数 $g_1(x) = x_1 - x_2, g_2(x) = x_2$，它们的梯度分别是:

$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix} x_2+1 \\ x_1-1 \end{pmatrix},\quad \nabla g_1(x)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \nabla g_2(x)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 。$$

设 Lagrange 函数 $L(x,v_1,v_2)=f(x)-v_1g_1(x)-v_2g_2(x)$,其中 v_1,v_2 是乘子。

KKT 条件:

$$\begin{cases} x_1-x_2\geq 0 \\ x_2\geq 0 \\ v_1\geq 0, v_2\geq 0 \\ v_1(x_1-x_2)=0 \\ v_2x_2=0. \end{cases}$$

求解得到 KKT 点 $x^*=(0,0), v_1=1, v_2=0$ 。（5 分）

（2）Lagrange 函数的 Hesse 矩阵为

$$\nabla^2 L(x^*,v_1,v_2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}。$$

注意到 g_1,g_2 都是 x^* 的积极约束，且 $v_1>0, v_2=0$ 。设 $d=(d_1,d_2)^T\in G(x^*,v_1,v_2)$（KKT 点处的方向集），则

$$\begin{cases} d^T\nabla g_1(x^*)=0 \\ d^T\nabla g_2(x^*)\geq 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} d_1-d_2=0 \\ d_2\geq 0 \end{cases},$$

所以 $d=(d_2,d_2), \forall d_2>0$，从而

$$d^T\nabla^2 L(x^*,v_1,v_2)d=2d_2{}^2>0, \forall d=(d_2,d_2)\in G(x^*,v_1,v_2) 。$$

所以 $x^*=(0,0)$ 是局部最优解， $f(x^*)=-1$。（5 分）