南京理工大学博士、硕士研究生考试

高等工程数学I(第一阶段) 试题(A) 评分标准

学院（系）：理学院　　　　学期：21 年秋

考试方式：闭卷　　满分分值：100　　考试时间：120 分钟

一、（共 15 分）解：$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+7)(\lambda-2)^2$，知 $\lambda_1=-7$，$\lambda_2=\lambda_3=2$，

因 A 为正规矩阵，所以 $\|A\|_2=\rho(A)=7$。

因 A 可逆，A^{-1} 也为实对称矩阵，进而知 A^{-1} 为正规矩阵，而 A^{-1} 的特征值为 $-\frac{1}{7},\frac{1}{2},\frac{1}{2}$，所以有

$\|A^{-1}\|_2=\rho(A^{-1})=\frac{1}{2}$，$cond_2(A)=\|A\|_2\|A^{-1}\|_2=\frac{7}{2}$。 --------（8 分）

又 $\|\delta A\|_2\le\|A\|_2\times0.001=0.007$，$\Rightarrow\|A^{-1}\|_2\|\delta A\|_2\le0.0035<1$，故

$$\frac{\|X-\overline{X}\|_2}{\|X\|_2}\le\frac{cond_2(A)\frac{\|\delta\|_2}{\|A\|_2}}{1-cond_2(A)\frac{\|\delta\|_2}{\|A\|_2}}\le\frac{3.5\times0.001}{1-3.5\times0.001}\approx3.512\times10^{-3}$$
。--------（7 分）

二、（共 20 分）解：1、解：$\begin{cases}u_0=v_0\ne0\\ v_k=Au_{k-1}\\ m_k=\max(v_k)\\ u_k=\dfrac{v_k}{m_k}\end{cases}$　$k=1,2,\cdots$　取 $u_0=(1,1)^T$，计算结果如表所示：

k	v_k^T		u_k^T		m_k
0	1	1	1	1	
1	5	9	$\frac{5}{9}$	1	9
2	$\frac{11}{3}$	$\frac{65}{9}$	$\frac{33}{65}$	1	$\frac{65}{9}$

--------（10 分）

2．因 $(\lambda I-B)\to\begin{pmatrix}-1 & \lambda-1 & 0\\ \lambda-5 & 4 & 0\\ -1 & 2 & \lambda-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & (\lambda-3)^2 & 0\\ 0 & -(\lambda-3) & (\lambda-3)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-3)^2\end{pmatrix}$

$\therefore d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda-3, d_3(\lambda)=(\lambda-3)^2$，初等因子组为 $\lambda-3,(\lambda-3)^2$，所以 B 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$。 --------（10 分）

三、（共 12 分）解：Jacobi 迭代格式为$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\dfrac{1}{2}[-2 - x_2^{(k)}] \\ x_2^{(k+1)} = -\dfrac{1}{2}[1 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}] \\ x_3^{(k+1)} = -\dfrac{1}{2}[-4 - x_2^{(k)}] \end{cases}$，-------（6 分）Jacobi 迭代矩阵 B_J

的特征方程为$\begin{vmatrix} -2\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2\lambda(4\lambda^2 - 2) = 0$，$\therefore \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \lambda_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \rho(B_J) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$．所以 Jacobi 迭代格式收敛。 -------（6 分）

四、（共 16 分）解：1． $A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\therefore F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$-------（8 分）

2． $F^T A G^T = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$, $(F^T A G^T)^{-1} = \dfrac{1}{44}\begin{pmatrix} 12 & -10 \\ -10 & 12 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$,

所以 $A^+ = G^T (F^T A G^T)^{-1} F^T = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$。 -------（8 分）

五、（共 12 分）解：解：引入松弛变量 x_3, x_4, x_5，转化为标准形$\begin{cases} \min \ -3x_1 - 5x_2 \\ s.t. \ x_1 + x_3 = 4 \\ \quad x_2 + x_4 = 6 \\ \quad 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \\ \quad x_j \ge 0, \ j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	0	1	0	0	4
x_4	0	1^*	0	1	0	6
x_5	3	2	0	0	1	18
	3	5	0	0	0	0

（在主元右上角标以“*”号）-------（6 分）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	0	1	0	0	4
x_2	0	1	0	1	0	6
x_5	3^*	0	0	-2	1	6
	3	0	0	-5	0	-30

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	1	0	1	0	6
x_1	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
	0	0	0	-3	-1	-36

得最优解 $\bar{x}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$，目标函数最优值 $f_{\min}=-36$。-------（6 分）

六、（共 10 分）解：由 $\nabla f(x)=\begin{pmatrix}2x_1\\50x_2\end{pmatrix}$，$\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix}2&0\\0&50\end{pmatrix}$，则有 $\nabla f(x^{(1)})=\begin{pmatrix}4\\100\end{pmatrix}$，

$d^{(1)}=-\begin{pmatrix}2&0\\0&50\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4\\100\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$，-------（5 分）

所以 $x^{(2)}=x^{(1)}+d^{(1)}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，且 $\nabla f(x^{(2)})=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，$\|\nabla f(x^{(2)})\|=0$，故 $x^{(2)}$ 为问题的最优解。-------（5 分）

七、（共 10 分）解：构造罚函数 $F(x,\sigma)=(x_1-2)^2+x_2^2+\sigma[\max\{0,1-x_2\}]^2$

$=\begin{cases}(x_1-2)^2+x_2^2 & x_2\ge 1\\ (x_1-2)^2+x_2^2+\sigma(1-x_2)^2 & x_2<1\end{cases}$，则有 $\frac{\partial F}{\partial x_1}=2(x_1-2)$，$\frac{\partial F}{\partial x_2}==\begin{cases}2x_2 & x_2\ge 1\\ 2x_2+2\sigma(x_2-1) & x_2<1\end{cases}$，

令 $\frac{\partial F}{\partial x_1}=\frac{\partial F}{\partial x_2}=0$，得 $x(\sigma)=\begin{pmatrix}2\\ \dfrac{\sigma}{1+\sigma}\end{pmatrix}$，-------（6 分）$\nabla^2 F(x,\sigma)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2+2\sigma\end{pmatrix}$ 对 $\sigma>0$ 为正定矩阵，所以 $x(\sigma)$ 为 $F(x,\sigma)$ 的极小点。令 $\sigma\to 0$，则有 $x^*=\lim\limits_{\sigma\to\infty}x(\sigma)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，$x^*$ 为约束问题的最优解，最优值为 $f(x^*)=1$。-------（4 分）

八、（共 5 分）解：模拟退火算法：

(1) 任选一个初始解 x_0；$x_i:=x_0$；k:=0；t_0 (初始温度)；

(2) （内循环）若在该温度达到内循环条件，则到(3)；否则，从邻域 $N(x_i)$ 中随机选一 x_j，计算 $\Delta f_{ij}=f(x_j)-f(x_i)$；若 $\Delta f_{ij}\le 0$，则 $x_i:=x_j$；否则若 $\exp(-\frac{\Delta f_{ij}}{t_k})>\text{random}(0,1)$时，则 $x_i:=x_j$；重复(2)；

(3) （外循环）$t_{k+1}=d(t_k)$；$k:=k+1$；若满足停止条件，终止计算；否则，回到(2)。