一、（25 分）已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$，

(1) 试求 $\mathbf{A}$ 的不变因子、初等因子，并写出 $\mathbf{A}$ 的 Jordan 标准形 $\mathbf{J}$，并求相似矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{J}$ 。

(2) 计算 $\mathbf{A}$ 的谱半径 $\rho(\mathbf{A})$，$\|\mathbf{A}\|_1$，$cond_1\|\mathbf{A}\|$.

解：（1）$\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-1 & -3\\ 0 & -2 & \lambda-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2(\lambda-4)\end{bmatrix}$

不变因子 $d_1(\lambda)=1,\ d_2(\lambda)=1,\ d_2(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda-4)$ （5’）

Jordan 标准型 $\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$，对 $\lambda_1=\lambda_2=-1,$ 求解 $(\lambda_1\mathbf{I}-\mathbf{A})x=\mathbf{0},$

得 $p_1=\begin{bmatrix}0\\ -3\\ 2\end{bmatrix}$，再求解 $(\lambda_1\mathbf{I}-\mathbf{A})x=-p_1,$ 得 $p_2=\begin{bmatrix}-5\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$，对 $\lambda_3=4,$ 解

解 $(\lambda_1\mathbf{I}-\mathbf{A})x=\mathbf{0},$ 得 $p_3=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$，故 $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0 & -5 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$。

（10’）

（2） $\rho(\mathbf{A})=4,\ \|\mathbf{A}\|_1=5,\ \mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix},\ cond_1\|\mathbf{A}\|=\|\mathbf{A}\|_1\|\mathbf{A}^{-1}\|_1$=10. （10’）

二、(20 分) 已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$,

（1）求 $\mathbf{A}$ 的满秩分解；

（2）求 $\mathbf{A}^{+}$；

（3）判断 $\mathbf{A}x=b$ 是否有解，有解时极小范数解，无解时求极小范数最小二乘解。

解：（1）$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&2&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$$\therefore \mathbf{F}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\1&2\end{bmatrix}\quad \mathbf{G}=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$$ （5’）

$\therefore \mathbf{A}=\mathbf{FG}$

（2）$\mathbf{A}^{+}=\mathbf{G}^{H}(\mathbf{GG}^{H})^{-1}(\mathbf{F}^{H}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^{H}=\dfrac{1}{15}\begin{bmatrix}5&-4&1\\0&3&3\\-5&7&2\\5&-4&1\end{bmatrix}$ （5’）

（3）$\mathbf{AA}^{+}b=b$ 所以有解

极小范数解是 $x=\mathbf{A}^{+}b=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}$ （10’）

三、(10 分) 用单纯形法求解问题

$$\begin{aligned}&\min\ x_1-2x_2+x_3\\ &s.t\quad x_1+x_2-2x_3+x_4=10,\\ &\qquad 2x_1-x_2+4x_3\le 8,\\ &\qquad -x_1+2x_2-4x_3\le 4,\\ &\qquad x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0.\end{aligned}$$

解：引进松弛变量 x_5,x_6，化为标准型，

$$\begin{aligned}&\min\ x_1-2x_2+x_3\\ &s.t\quad x_1+x_2-2x_3+x_4=10,\\ &\qquad 2x_1-x_2+4x_3+x_5=8,\\ &\qquad -x_1+2x_2-4x_3+x_6=4,\\ &\qquad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\ge 0.\end{aligned}$$ （5 分）

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\
\hline
x_4 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 10 \\
x_5 & 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 8 \\
x_6 & -1 & \boxed{2} & -4 & 0 & 0 & 1 & 4 \\
f & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c|ccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\
\hline
x_4 & 3/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 8 \\
x_5 & 3/2 & 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & 1/2 & 10 \\
x_2 & -1/2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1/2 & 2 \\
f & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\
\hline
x_4 & 3/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 8 \\
x_3 & 3/4 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/4 & 5 \\
x_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 12 \\
f & -9/4 & 0 & 0 & 0 & -3/2 & -7/4 & -19
\end{array}
$$

最优解$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,12,5,8)$， $f_{\min}=-19$ （10 分）

四、（10 分）利用对数障碍罚函数法求解问题

$$
\begin{aligned}
\min\ & \frac{1}{8}(x_1-1)^2+x_2 \\
s.t\ & x_1+1 \ge 0, \\
& x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

解： $F(x,\mu)=\frac{1}{8}(x_1-1)^2+x_2-\mu(\ln(x_1+1)+\ln(x_2))$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=\frac{1}{4}(x_1-1)-\frac{\mu}{x_1+1}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}=1-\frac{\mu}{x_2}=0$$

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{1+4\mu} \\ x_2=\mu \end{cases} \qquad \nabla^2 F=\begin{bmatrix} \frac{1}{4}+\frac{\mu}{(x_1+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{x_2^2} \end{bmatrix} \text{正定}$$

令 $\mu\to 0$ 有$\begin{cases} x_1\to 1 \\ x_2\to 0 \end{cases}$ **得** $f_{\min}=f(1,0)=0$。

五、（10 分）利用最速下降法求解

$\min\ (x_1-1)^2+x_2^2$， 初始点为$x^{(1)}=(1,1)^T$， 迭代两次。

解： $\nabla f(x)=\begin{bmatrix}2(x_1-1)\\2x_2\end{bmatrix}$，$d^{(1)}=-\nabla f(x^{(1)})=\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$, $x^{(1)}+\alpha d^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\1-2\alpha\end{bmatrix}$ ，

求解 $\min f(x^{(1)}+\alpha d^{(1)})=1+(1-2\alpha)^2$ 得 $\alpha=\dfrac{1}{2}$，

则 $x^{(2)}=x^{(1)}+\alpha d^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\nabla f(x^{(2)})=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$,

$\|\nabla f(x^{(2)})\|=0$, $x^{(2)}$ 为最优点。

六、(10 分) 若 $\mathbf{A}\in R^{n\times n}$， 且 $\mathbf{A}$ 对称正定，最大和最小特征值分别为 $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$，现用迭代方法 $x^{(k+1)}=x^{(k)}-\alpha(\mathbf{A}x^{(k)}-b)$ 求解 $\mathbf{A}x=b$ 。

（1）证明迭代法收敛的充要条件是 $0<\alpha<2\lambda_{\max}^{-1}$ 。

（2）问 α 为何值时，迭代法收敛最快？

证明：

（1）迭代矩阵 $\mathbf{B}=\mathbf{I}-\alpha\mathbf{A}$， 若 $\mathbf{A}$ 的特征值为 λ，则 $\mathbf{B}$ 的特征值为 $1-\alpha\lambda$ 。
因为 $\mathbf{A}$ 对称正定，所以 $\mathbf{A}$ 的特征值大于0. 由迭代法收敛的充要条件知， $\mathbf{A}$ 的任意特征值 λ 满足 $|1-\alpha\lambda|<1$，即 $0<\alpha<\dfrac{2}{\lambda}$，所以迭代收敛的充要条件为

$0<\alpha<\dfrac{2}{\lambda_{\max}}$. （5分）

（2）要迭代收敛最快，还需 $|1-\alpha\lambda_{\min}|=|1-\alpha\lambda_{\max}|$ 即 $\alpha=\dfrac{2}{\lambda_{\min}+\lambda_{\max}}$ 。

（5分）

七. (8分) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0.8&-1\\0.1&2&-0.1\\0.2&0.7&3\end{bmatrix}$ 用盖尔圆定理证明 $\mathbf{A}$ 有三个互异实特征值。

解：$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\mathbf{B}=\mathbf{DAD}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0.4&-1\\0.2&2&-2\\0.2&0.35&3\end{bmatrix}$

三个互异盖尔圆。

$G_1:|z|\le 1.4; G_2:|z-2|\le 0.4;$

$G_3=|z-3|\le 0.55$

从而三个特征值位于这三个互不相交的盖尔圆中，同时由于这三个盖尔圆关于实轴对称。同时因为矩阵为实矩阵，若有特征值为复数，则复数特征值成对出现，互为共轭复数，关于实轴对称，那么该特征值及其另一互为共轭的特征值位于同一盖尔圆中，矛盾。

三个互异实特征值分别在[-1.4,1.4],[1.6,2.4],[2.45,3.55]。

八、（7分）简述遗传算法中轮盘赌选择过程的实施方法（见教材）。