第三章 矩阵分解与广义逆矩阵（2）
奇异值分解，广义逆 A+

奇异值分解

复杂度较高，暂时不掌握

广义逆 A^+

广义逆 A^+ 的定义

给一个矩阵 A（可以是方阵、也可以是长方阵、甚至奇异矩阵），我们希望找一个“类似逆矩阵”的东西 A^+，使得在一定意义下它“尽量像” A^{-1}。

最基本的广义逆定义：
矩阵 B 若满足

$$ABA = A,$$

就叫 B 是 A 的一个**广义逆**（记作 $A^{(1)}$ 之类）。

在数值分析/线性代数里，常用的是满足 4 个条件的 **Moore–Penrose 伪逆**（通常就写 A^+）：

$$\begin{aligned}
&(1)\quad AA^+A = A,\\
&(2)\quad A^+AA^+ = A^+,\\
&(3)\quad (AA^+)^T = AA^+,\\
&(4)\quad (A^+A)^T = A^+A.
\end{aligned}$$

满足这 4 条的伪逆是**唯一的。**它有一些重要性质：

- 如果 A 是可逆方阵，则 $A^+ = A^{-1}$；
- 求最小二乘解 $Ax = b$ 时，正规方程的解可以写成 $x = A^+b$。

用满秩分解求 A^+

1. 先对 A 进行满秩分解：

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n},\quad \operatorname{rank}(A) = r.$$

   做一个**满秩分解**：

$$A = FG$$

其中

- F 是 $m \times r$ 矩阵，列满秩（rank = r）；
- G 是 $r \times n$ 矩阵，行满秩（rank = r）。

2. **给 F 和 G 找“左右逆”**：
   - 对列满秩的 F（$m \times r$，$m \geq r$），可以构造它的 **左逆**：
   $$F^{\ell} = (F^T F)^{-1} F^T, \quad F^{\ell} F = I_r.$$
   - 对行满秩的 G（$r \times n$，$n \geq r$），可以构造它的**右逆**：
   $$G^r = G^T (G G^T)^{-1}, \quad G, G^r = I_r.$$
3. **由 $A = FG$ 得到 A^+**：
$$A^+ = G^r F^{\ell} = G^T (G G^T)^{-1} (F^T F)^{-1} F^T.$$

可以验证它满足 Moore–Penrose 的 4 条性质，因此就是 A 的伪逆。
直观理解：

- F^{ℓ} 先把 $\mathbb{R}^m$ 压到秩为 r 的“核心空间”；
- 再由 G^r 把这个核心空间映射回 $\mathbb{R}^n$，完成“反向映射”。

总结成一行公式：

当 A 有满秩分解 $A = FG$（$\text{rank}(A) = r$）时，其伪逆（广义逆 A^+）可以写成：

$$A^+ = G^T (G G^T)^{-1} (F^T F)^{-1} F^T$$

用广义逆 A^+ 求解矛盾方程组

求解方法

原理：方程组 $Ax = b$ 有解等价于 $AA^+ b = b$ 成立。

因此，可以通过求 $A^+ b$ 作为方程组的特解。也就是先通过 $A^+ = G^T (G G^T)^{-1} (F^T F)^{-1} F^T$ 求得广义逆（前提是已经满秩分解得到了 F 和 G），然后乘上 b 向量得到特解 $A^+ b$ 。

极小范数最小二乘解（特解）：$A^+ b$

全部最小二乘解（通解）：$A^+ b + (I - A^+ A) y$

例题 1

> 用满秩分解法求矛盾方程组
>
> $$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \end{cases}$$
>
> 的 全部最小二乘解 和 极小范数最小二乘解。

解答：

由题意得：

$$A=\begin{pmatrix}2&4&1&1\\1&2&-1&2\\-1&-2&-2&1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}10\\6\\-7\end{pmatrix}$$

- 满秩分解求得 F 和 G

  求得行最简阶梯型:

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

  取主元对应 **原矩阵** 的列得到 F，取主元对应 **行最简阶梯型** 的行得到 G:

$$F=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\\-1&-2\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

- 通过公式求广义逆 A^+

$$A^+=G^T(GG^T)^{-1}(F^TF)^{-1}F^T$$

  此处省略一万步.......求得 A^+:

$$A^+=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&2&-2\\1&-5&-6\\1&6&5\end{pmatrix}$$

- **极小范数最小二乘解** A^+b

$$A^+b=\begin{pmatrix}1\\2\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

- **全部最小二乘解** $A^+b+(I-A^+A)y$

$$A^+b+(I-A^+A)y=\begin{pmatrix}1\\2\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}+\frac{1}{11}\begin{pmatrix}9&-4&-1&-1\\-4&3&-2&-2\\-1&2&5&5\\-1&-2&5&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$
