第四章 线性方程组数值解法（2）
J迭代法，G-S迭代法的敛散性

Jacobi 迭代法的敛散性判断

Jacobi 迭代法的敛散性

将 Jacobi 迭代法写成矩阵迭代形式：

对线性方程组 $Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，将 A 按照对角、下三角、上三角分裂

$$A = D - L - U$$

其中

- D：只包含矩阵 A 的对角元 a_{ii}
- L：只包含矩阵 A 的严格下三角部分元素，并全部取 **负号**（$-a_{ij},\ i > j$）
- U：只包含矩阵 A 的严格上三角部分元素，并全部取 **负号**（$-a_{ij}.\ i < j$）

因此 $Ax = b$ 可以表示成：

$$(D - L - U)x = b$$

改写为迭代格式：

$$Dx = (L + U)x + b$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + c$$

其中 $c = D^{-1}b$（c 对于敛散性判断并不重要）

可以写成标准迭代格式：

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

其中 $B = D^{-1}(L + U)$，可以进一步化简，得到：

$$B = D^{-1}(L + U) = I - D^{-1}A$$

要判断 Jacobi 迭代法是否收敛（Jacobi 法对任意初值收敛），即判断 **矩阵 B 的谱半径是否** $\rho(B) < 1$.

方法总结：

1. 把 A 分解为 $D - L - U$
2. 写出迭代格式进一步得到 Jacobi 迭代矩阵 $B = D^{-1}(L + U) = I - D^{-1}A$
3. 求 B 的谱半径 $\rho(B)$

- 若 $\rho(B) < 1$，则 Jacobi 迭代收敛
- 否则，不收敛

例题 1

> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，判断 Jacobi 迭代法对该矩阵是否收敛。

解答：

- 将 A 分解为 $A = D - L - U$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Jacobi 迭代矩阵 B

$$\begin{aligned} B &= I - D^{-1}A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 求 B 的谱半径判断收敛性

$$\lambda I - B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & \lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - B) = \lambda \cdot (\lambda^2 - \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}) - 0 + 2 \cdot (\frac{3}{2} \times \frac{4}{3}) = \lambda^3 - \frac{2}{3}\lambda + 4$$

特征方程

$$\lambda^3 - \frac{2}{3}\lambda + 4 = 0$$

可以尝试取 $\lambda = -2, -1$

$$f(-1) = 11 > 0, f(-2) = -8 < 0$$

由于 $f(-2) < 0 < f(-1)$，由介值定理可知在 $[-2, -1]$ 范围内存在 λ_1 使得特征方程为 0，且

$$|\lambda_1| > 1$$

因此

$$\rho(B) = \max_i |\lambda_i| \geq |\lambda_1| > 1$$

由此得出结论，**Jacobi 迭代法对该矩阵 A 是发散的**（不收敛）.

G-S 迭代法的敛散性判断

G-S 迭代法的敛散性

和之前的 Jacobi 迭代法一样的$Ax=b$可以表示成：

$$(D-L-U)x=b$$

改写为迭代格式：
与前面 Jacobi 迭代法 不同的是，G-S 法会用到之前更新后的数值。

因此，在矩阵形式的迭代公式中，第 $k+1$ 次迭代时，用"最新"的分量，所以把左边看成矩阵 $D-L$ 乘以 $x^{(k+1)}$，右边只用旧迭代 $x^{(k)}$：

$$(D-L)x=Ux+b$$

$$x^{(k+1)}=(D-L)^{-1}Ux^{(k)}+c$$

其中 $c=(D-L)^{-1}b$.

可以写成标准的迭代格式：

$$x^{(k+1)}=B_{GS}Ux^{(k)}+c$$

其中 $B_{GS}=(D-L)^{-1}U$.

要判断 G-S 迭代法是否收敛（G-S 法对任意初值收敛），即判断 **矩阵 B_{GS} 的谱半径是否** $\rho(B_{GS})<1$.

方法总结：

1. 把 A 分解为 $D-L-U$
2. 写出迭代格式进一步得到 G-S 迭代矩阵 $B_{GS}=(D-L)^{-1}U$
3. 求 B_{GS} 的谱半径 $\rho(B_{GS})$
   - 若 $\rho(B_{GS})<1$，则 G-S 迭代收敛
   - 否则，不收敛

例题 2

> $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-1&1&-1\\-2&-2&1\end{pmatrix}$，判断 G-S 迭代法对该矩阵是否收敛。

- 将 A 分解为 $A=D-L-U$

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\2&2&0\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}0&2&-2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

- G-S 迭代矩阵 B_{GS}

$$B=(D-L)^{-1}U$$

先求 $(D-L)^{-1}$：

$$D-L=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\2&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-2&-2&1\end{pmatrix}$$

$$(D-L)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\4&2&1\end{pmatrix}$$

再求 $(D-L)^{-1}U$：

$$B=(D-L)^{-1}U=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\4&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&-2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&-2\\0&2&-1\\0&8&-6\end{pmatrix}$$

- 求 B 的谱半径判断收敛性

$$\lambda I-B=\begin{pmatrix}\lambda&-2&2\\0&\lambda-2&1\\0&-8&\lambda+6\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(\lambda I-B)&=\lambda\cdot[(\lambda-2)(\lambda+6)+8]-0+0\\&=\lambda\cdot(\lambda^2+4\lambda-4)\end{aligned}$$

特征方程

$$\lambda\cdot(\lambda^2+4\lambda-4)=0$$

求得特征值为：

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=-2+2\sqrt{2},\quad \lambda_3=-2-2\sqrt{2}$$

因此

$$\rho(B_{GS})=\max_i|\lambda_i|=|\lambda_3|=2+2\sqrt{2}>1$$

由此得出结论，**G-S 迭代法对该矩阵 A 是发散的**（不收敛）.
