

第二章 矩阵的标准形与特征值计算 (1) Smith标准型, Jordan 标准型

Smith 标准型

Smith 标准型定义

对于一个整数矩阵 A , 进行一系列初等行列变换可以转换为一个对角矩阵 (P 代表行变换, Q 代表列变换) :

$$PAQ = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_r \\ & & & 0 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

满足:

- 每个 $d_i \neq 0$;
- $d_1 | d_2, d_2 | d_3, \dots, d_{r-1} | d_r$ ($d_1 | d_2$ 表示 d_1 整除 d_2) ;
- d_k 是矩阵 A 的所有 k 阶余子式的最大公因子。

这个对角矩阵就是 A 的 Smith 标准型。

不变因子

Smith 标准型中非零对角线上的数:

$$d_1, d_2, \dots, d_r, (d_1 | d_2 | \cdots | d_r)$$

称为矩阵 A 的 不变因子。

初等因子

将每个不变因子 d_k 进行分解, 然后提取出所有一次幂。

例如:

$$d_1 = \lambda, d_2 = \lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 1)$$

得到所有一次幂:

$$\lambda, \lambda, \lambda + i, \lambda - i$$

这些一次幂就是矩阵 A 的 **初等因子**。

行列式因子

设 A 是一个 $m \times n$ 的整数矩阵。对每个 $k = 1, 2, \dots, r$ (其中 $r = \text{rank}(A)$)，定义：

$$\Delta_k = \text{gcd} \text{ 所有 } k \times k \text{ 子式的行列式.}$$

- Δ_1 : 所有元素 (1×1 子式) 的 gcd
- Δ_2 : 所有 2×2 子矩阵的行列式的 gcd
- ...
- Δ_r : 所有 $r \times r$ 子式的行列式的 gcd (满秩时就是 $|\det A|$)

这串 Δ_k 就叫做矩阵的 **行列式因子序列**。

与不变因子的关系：

如果矩阵的 Smith 标准型对角元 (不变因子) 是

$$d_1, d_2, \dots, d_r \quad (d_1 | d_2 | \dots | d_r),$$

那么有非常重要的关系：

$$\Delta_k = d_1 d_2 \cdots d_k \quad (k = 1, \dots, r).$$

于是可以反过来求不变因子：

$$d_1 = \Delta_1, \quad d_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad d_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \dots$$

这就是所谓的 **gcd 法/行列式因子法**。

不变因子和初等因子求法

初等变换法

步骤：

1. 对矩阵 A 进行一系列初等变换，转换为对角阵 (注意最后还要满足相关性质)；
2. 对角阵上的非 0 元素即 **不变因子**；
3. 将不变因子进行质因数分解，所有质数幂即 **初等因子**。

初等变换的要求：

- 交换两行 / 两列
- 一行 (列) 加「任意多项式倍」的另一行 (列)，比如 $R_i \leftarrow R_i + f(\lambda)R_j$
- 一行 (列) 乘以 -1

示例：

矩阵 A 为:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

初等变换:

- 把 1 移到左上角

交换第 1、3 行: $R_1 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 消去第一列下面的 λ

$R_3 \leftarrow R_3 - \lambda R_1$ (加上“ $-\lambda$ 倍”的第 1 行)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

- 把右边整理成上三角

$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 - \lambda C_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

- 处理右下 2×2 子块

先 $R_3 \leftarrow -R_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

再 $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

此时已经是对角，且满足 $1 \mid \lambda \mid \lambda^2$ ，由此得到 **Smith 标准型**。

不变因子:

$$d_1 = 1, \quad d_2 = \lambda, \quad d_3 = \lambda^2$$

初等因子:

$$\boxed{\lambda, \lambda, \lambda} \quad (\lambda \text{出现三次，带重数}).$$

gcd 法 (行列式因子法)

步骤：

1. 先求出 Δ_1 , 即所有 1 阶余子式的最大公因式。由此得到 $d_1 = \Delta_1$
2. 求出 Δ_2 , 即所有 2 阶余子式的最大公因式。然后可以得到 $d_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$
3. 以此类推, 求得 d_3, \dots, d_r .

示例：

- Δ_1 : 所有 1×1 子式 (元素本身) 的 gcd

矩阵元素有 $\lambda, 0, 1$ 等, 显然

$$\Delta_1 = \gcd(\lambda, 0, 1, \dots) = 1.$$

所以

$$d_1 = \Delta_1 = 1.$$

- Δ_2 : 所有 2×2 子式行列式的 gcd

列举代表性的 2×2 子式 (行列式) :

- 取第 1、2 行与第 1、2 列:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$$

- 取第 1、3 行与第 1、2 列:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \cdot 1 - 0 \cdot 1 = \lambda$$

- 取第 2、3 行与第 1、2 列:

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - \lambda \cdot 1 = -\lambda$$

由 $\lambda^2, \lambda, -\lambda, 0, \dots$ 的最大公因子可知

$$\Delta_2 = \gcd(\lambda^2, \lambda, -\lambda) = \lambda.$$

于是

$$d_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{\lambda}{1} = \lambda.$$

- Δ_3 : 所有 3×3 子式 —— 就是 $\det A$

沿第一行展开行列式:

$$\det A = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} - 0 + 0 = \lambda(\lambda^2 - 0) = \lambda^3.$$

所以

$$\Delta_3 = \det A = \lambda^3, \quad d_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{\lambda^3}{\lambda} = \lambda^2.$$

不变因子:

$$d_1 = 1, \quad d_2 = \lambda, \quad d_3 = \lambda^2$$

初等因子:

$$\boxed{\lambda, \lambda, \lambda} \quad (\lambda \text{出现三次, 带重数}).$$

Jordan 标准型

Jordan 标准型定义

Jordan 标准型由若干个 **Jordan 块** 沿对角线拼接而成。一个大小为 $k \times k$, 对应特征值为 λ 的 Jordan 块形如:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

特点:

- 主对角线上全是同一个特征值 λ ;
- 紧靠主对角线的上一条对角线是 1;
- 其它地方全是 0。

可以通过求 $(\lambda I - A)$ 的初等因子得到矩阵 A 的 Jordan 标准型:

初等因子 \rightarrow 分解出每个特征值对应的 Jordan 块大小 \rightarrow 写出 Jordan 标准型。

初等因子与 Jordan 块的关系

在一个代数闭域 (比如复数域 \mathbb{C}) 中, 一个矩阵 A 的初等因子都形如:

$$(\lambda - \lambda_i)^k$$

每个这样的因子与 Jordan 块对应:

- 每一个初等因子 \rightarrow 一个 Jordan 块;
- 指数 $k \rightarrow$ 这个 Jordan 块的大小 (阶数)。

举例:

初等因子	Jordan 块
$(\lambda - 3)^1$	$J_1(3) = [3]$

初等因子	Jordan 块
$(\lambda - 3)^2$	$J_2(3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
$(\lambda - 5)^4$	$J_4(5)$ (4×4的大块)

例题 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -7 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 求这个矩阵 } A \text{ 的 Jordan 标准型 } J.$$

解答：

- 求 $\lambda I - A$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -1 & 3 \\ 7 & \lambda + 2 & -9 \\ 2 & 1 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

- 此处考虑用 gcd 法求 $\lambda I - A$ 的初等因子

$$d_1 = \Delta_1 = \gcd(\lambda - 3, -1, 3, \dots) = 1$$

列举代表性的 2×2 子式 (行列式) :

- 第 1 行, 第 3 列

$$\begin{vmatrix} 7 & \lambda + 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 2(\lambda + 2) = -2\lambda + 3$$

- 第 3 行, 第 1 列

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ \lambda + 2 & -9 \end{vmatrix} = 9 - 3(\lambda + 2) = -3\lambda + 3 = -3(\lambda - 1)$$

可以发现, $\gcd(-2\lambda + 3, -3(\lambda - 1)) = 1$.

故：

$$\Delta_2 = \gcd(-2\lambda + 3, -3(\lambda - 1), \dots) = 1$$

$$d_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 1$$

求 3×3 子式 (行列式) :

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= (\lambda - 3) \cdot \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -9 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -9 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & \lambda + 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + (7\lambda - 10) + 3(3 - 2\lambda) \\ &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 \end{aligned}$$

故：

$$\Delta_3 = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

$$d_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

不变因子:

$$d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

初等因子:

$$(\lambda - 2)^2, \quad \lambda - 1$$

- 初等因子对应的 Jordan 块

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

- 最终得到 Jordan 标准型

$$J = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$