一、（15 分）设 $x=\begin{pmatrix}-1\\ i\\ 2\end{pmatrix}$ 及 $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\ -2&0&2\\ 0&2&2\end{pmatrix}$ ，计算 $\|x\|_1$、$\max\limits_{\|x\|_\infty=4}\|Ax\|_\infty$ 及 $cond_2(A)$、。

解： $\|x\|_1=1+1+2=4$ 。

$$\max_{\|x\|_\infty=4}\|Ax\|_\infty=\max_{\left\|\frac{1}{4}x\right\|_\infty=1}\|Ax\|_\infty=\max_{\|y\|_\infty=1}4\|Ay\|_\infty=4\|A\|_\infty=16$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\ 2&\lambda&2\\ 0&-2&\lambda-2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1=-2;\ \lambda_2=\ \ \lambda_3=$$

$$cond_2(A)=\frac{4}{2}=2$$

二、（8 分）给出遗传算法中变异运算的常用方法。

解：（1）单点、多点变异法。对二进制编码随机选一个或多个变异位，将父代在变异位的基因由 1 变为 0 或 0 变为 1.

（2）2-opt 法。随机产生两个变异位，然后将两个变异位的基因按逆序排，其他位基因保持不变，产生后代。

（3）对实数码，采用 X=V+Md，其中 M 使得 X 可行的[0,M]的随机数，若找不到可行，令 M=0。

三、(10 分) 用倒数障碍内点罚函数法求解 $\begin{cases}\min & x_1^2-6x_1+2x_2+9\\ s.t. & x_1\ge 3\\ & x_2\ge 3\end{cases}$ 。

解：$P(x,\sigma)=x_1^2-6x_1+2x_2+9+\sigma\left(\frac{1}{x_1-3}+\frac{1}{x_2-3}\right)$

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=2x_1-6-\frac{\sigma}{(x_1-3)^2}=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}=2-\frac{\sigma}{(x_2-3)^2}=0$$

$$\begin{cases}x_1=3+\sqrt[3]{\frac{\sigma}{2}}\\ x_2=3+\sqrt{\frac{\sigma}{2}}\end{cases}\quad 令\ \sigma\to 0\quad\begin{cases}x_1\to 3\\ x_2\to 3\end{cases}$$

四、**(12 分)** 证明矩阵 $A=\begin{pmatrix}20 & 5 & 0.8\\ 4 & 10 & 1\\ 1 & 2 & 10i\end{pmatrix}$ 有互异特征值。

解： $D=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$B=D^{-1}BD=\begin{pmatrix}20 & 5 & 0.8\\ 4 & 10 & 0.5\\ 2 & 4 & 10i\end{pmatrix}$

$$|\lambda-20|\le 5.8,\quad |\lambda-10|\le 4.5,\quad |\lambda-10i|\le 6$$

相互隔离，故 **A** 有三个互异特征值。

五、（**15** 分）求下列矩阵的不变因子、初等因子及 **Jordan** 标准形：

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 0\\ 8 & 6 & 5\end{pmatrix}$$

解：$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+3 & -3 & 2\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ -8 & -6 & \lambda-5\end{vmatrix}$

$D_3=(\lambda+1)(\lambda-1)^2 \qquad D_2=D_1=1$

$d_3=(\lambda+1)(\lambda-1)^2 \qquad d_2=d_1=1$

初等因子：$(\lambda+1) \qquad (\lambda-1)^2$

Jordan 标准形：

$$J=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & 1\\ & & 1\end{pmatrix}$$

六、(20 分) 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ -1 & 4 & 5 & 3\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}4\\ -2\\ -2\end{pmatrix}$，

（**1**）求 **A** 的满秩分解；

（**2**）求 A^+；

（**3**）判断 $Ax=b$ 是否有解，有解时求通解及极小范数解，无解时求最小二乘解及极小范数最小二乘解**.**

解：（1）$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&2&2&2\\-1&4&5&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&2&2&2\\0&4&4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

（2）$A^{+}=\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix}5&2&-1\\1&1&1\\-4&-1&2\\6&3&0\end{pmatrix}$

（3）$AA^{+}b=\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}\neq b$ $\qquad x=A^{+}b=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$

七、**(10 分)** 用单纯形法求解问题

$$\begin{cases}\min & -10x_1-6x_2-4x_3\\ s.t. & x_1+x_2+x_3\le 100\\ & 10x_1+4x_2+5x_3\le 600\\ & 2x_1+2x_2+6x_3\le 300\\ & x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$$

解：引入松弛变量 x_4,x_5,x_6

$$\begin{cases}\min & -10x_1-6x_2-4x_3\\ s.t. & x_1+x_2+x_3+x_4=100\\ & 10x_1+4x_2+5x_3+x_5=600\\ & 2x_1+2x_2+6x_3+x_6=300\\ & x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0\end{cases}$$

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	
X4	1	1	1	1	0	0	100
X5	$\boxed{10}$	4	5	0	1	0	600
X6	2	2	6	0	0	1	300
	10	6	4	0	0	0	0

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	
X4	0	$\boxed{3/5}$	1/2	1	−1/10	0	40
X1	1	2/5	1/2	0	1/10	0	60
X6	0	6/5	5	0	−1/5	1	180
	0	2	−1	0	−1	0	−600

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	
X2	0	1	5/6	5/3	−1/6	0	200/3
X1	1	0	1/6	−2/3	1/6	0	100/3
X6	0	0	4	−2	0	1	100
	0	0	−8/3	−10/3	−2/5	0	−2200/3

$$x=\begin{pmatrix}\frac{100}{3} & \frac{200}{3} & 0\end{pmatrix},\ f_{\min}=-\frac{2200}{3}$$

八、**(10 分）用 FR 共轭梯度法求解** $\min 2x_1^2+x_2^2$ 初始点取为 $x^{(1)}=(2,2)^T$ 。

解： $\nabla f(x)=\begin{pmatrix}4x_1\\2x_2\end{pmatrix}$

step 1. $d^{(1)}=-\nabla f\left(x^{(1)}\right)=\begin{pmatrix}-8\\-4\end{pmatrix}$ $\qquad x=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}-8\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-8\alpha\\2-4\alpha\end{pmatrix}$

$$\min_{\alpha} 2(2-8\alpha)^2+(2-4\alpha)\Rightarrow\alpha=\frac{5}{18}$$

$$x^{(2)}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{9}\\\frac{8}{9}\end{pmatrix}\qquad \nabla f\left(x^{(2)}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{8}{9}\\\frac{16}{9}\end{pmatrix}$$

step 2. $\beta=\frac{\left\|\nabla f\left(x^{(2)}\right)\right\|}{\left\|\nabla f\left(x^{(1)}\right)\right\|}=\frac{4}{81}$ $\qquad d^{(2)}=-\nabla f\left(x^{(2)}\right)+\beta d^{(1)}=\frac{40}{81}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

$$x=\begin{pmatrix}-\frac{2}{9}\\\frac{8}{9}\end{pmatrix}+\alpha\frac{40}{81}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\qquad \min_{\alpha}\left(2\frac{2}{9}-\frac{40}{81}\alpha\right)^2+\left(\frac{8}{9}-\frac{160}{81}\alpha\right)\Rightarrow\alpha=$$

$$x^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\qquad \nabla f\left(x^{(3)}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\qquad x^{(3)}\text{为极小值点。}$$