

第五章 最优化方法 (7) 外点罚函数法、内点罚函数法

外点罚函数法

算法思想

原问题是带不等式约束的极小化：

$$\min f(x), \quad g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

外点法把“违反约束”这件事当成一种“罚款”：点越不满足约束，罚得越重。于是构造一个无约束的罚函数：

$$F(x, \mu) = f(x) + \mu \sum_{i=1}^m \varphi(g_i(x)),$$

其中 $\varphi(\cdot) \geq 0$ 且当 $g_i(x) \geq 0$ 时为 0，常见选法是

$$\varphi(g_i(x)) = \max\{0, -g_i(x)\}^2 \quad \text{或} \quad \max\{0, -g_i(x)\}.$$

算法过程

1. 取一列逐渐增大 的罚参数 $\mu_k \rightarrow +\infty$ ；

2. 对每个 μ_k ，求无约束极小点：

$$x^{(k)} = \arg \min_x F(x, \mu_k);$$

3. 在合适条件下， $x^{(k)}$ 会渐渐逼近原约束问题的最优解。

例题

用外点罚函数法求解下列问题：

$$\min f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2, \quad \text{s.t. } g(x) = 4 - x_1 - x_2 \geq 0.$$

解答：

- 构造罚函数

把约束改写成“违反量” $x_1 + x_2 - 4$ ，于是可取平方罚函数

$$F(x, \mu) = f(x) + \mu[\max\{0, x_1 + x_2 - 4\}]^2.$$

- 若不用罚函数，直接看约束：

无约束时

$$\min(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$$

的极小点是 $(3, 2)$ ，但此时 $x_1 + x_2 = 5 > 4$ ，但是 **不满足约束**。

- 用罚函数看逼近过程

若 $x_1 + x_2 > 4$ ，此时

$$F(x, \mu) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + \mu(x_1 + x_2 - 4)^2.$$

这是一个无约束二次函数，其极小点由

$$\nabla F = 0$$

得

$$\begin{cases} 2(x_1 - 3) + 2\mu(x_1 + x_2 - 4) = 0, \\ 2(x_2 - 2) + 2\mu(x_1 + x_2 - 4) = 0. \end{cases}$$

两式相减得 $x_1 - 3 = x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2 + 1$ 。代回任一式可得

$$x_1 = \frac{5\mu + 3}{2\mu + 1}, \quad x_2 = \frac{3\mu + 2}{2\mu + 1}.$$

当 $\mu \rightarrow +\infty$ 时：

$$x_1(\mu) \rightarrow \frac{5}{2}, \quad x_2(\mu) \rightarrow \frac{3}{2},$$

趋于约束问题的最优解

$$x^* = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}).$$

验证： $x_1 + x_2 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$ ，恰好在约束边界上。

内点罚函数法（障碍函数法）

算法思想

对于

$$\min f(x), \quad g_i(x) \geq 0,$$

要求最终解在**可行域内部**，不允许走到外面，因此构造一种在约束边界附近会“炸掉”的函数作为**障碍**，典型是对数障碍：

$$B(x, \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \ln g_i(x), \quad \mu > 0.$$

注意：只有在 $g_i(x) > 0$ 时才有意义，这就强迫 x 始终待在可行域内部。

算法过程

1. 选一列逐渐 **减小** 的参数 $\mu_k \rightarrow 0$;
2. 对每个 μ_k , 在可行域内部求无约束极小点:

$$x^{(k)} = \arg \min_{g_i(x) > 0} B(x, \mu_k);$$

3. 在合适条件下, $x^{(k)}$ 会沿着所谓“中心路径”收敛到原问题的最优解。

因为始终在**可行域内部 (内点)** 游走, 所以叫内点/障碍函数法。

例题

用对数障碍函数法求解下列问题:

$$\min f(x) = \frac{1}{2}(x_1 + 1)^2 + x_2, \quad \text{s.t. } \begin{cases} x_1 - 1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

解答:

- 构造对数障碍函数

把约束写成 $g_1(x) = x_1 - 1 \geq 0$, $g_2(x) = x_2 \geq 0$.

对数障碍函数为

$$F(x, \mu) = \frac{1}{2}(x_1 + 1)^2 + x_2 - \mu \ln(x_1 - 1) - \mu \ln x_2, \quad \mu > 0.$$

- 对固定 μ 求无约束极小点

求梯度为 0:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = (x_1 + 1) - \frac{\mu}{x_1 - 1} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 1 - \frac{\mu}{x_2} = 0. \end{cases}$$

第二个方程直接给出

$$x_2 = \mu$$

第一个方程:

$$(x_1 + 1)(x_1 - 1) - \mu = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{1 + \mu}$$

取正根以满足 $x_1 > 1$.

因此, 对于任意 $\mu > 0$, 障碍子问题的极小点为

$$x_1(\mu) = \sqrt{1 + \mu}, \quad x_2(\mu) = \mu$$

•

当 $\mu \rightarrow 0$ 时:

$$x_1(\mu) \rightarrow \sqrt{1} = 1, \quad x_2(\mu) \rightarrow 0,$$

收敛到原问题的最优解

$$x^* = (1, 0).$$

验证: $x_1 = 1 \geq 1, x_2 = 0 \geq 0$, 正好在约束边界上。
