THE LIMIT OF TRAIAN LALESCU ' SEQUENCE

LIMITA ŞIRULUI TRAIAN LALESCU

PROF.DARIE GABRIEL
C.A.I.A. „Vasile Adamachi"

ABSTRACT

If we want to have a sustainable development we must know and know well the activity of our predecessors.This article speaks about a romanian mathematician Traian Lalescu and the limit of Traian Lalescu' sequence.

REZUMAT

Pentru o dezvoltare durabilă e obligatoriu să ne cunoaştem foarte bine predecesorii şi activitatea lor. Acest articol vorbeşte despre matematicianul român Traian Lalescu şi limita şirului Traian Lalescu.

INTRODUCERE

Traian Lalescu (*1882-1929)* a fost un matematician de o originalitate deosebită si autorul unor lucrări ce au deschis drumuri noi în literatura de specialitate.

Teza de doctorat susţinută de Traian Lalescu, la Sorbona, despre ecuaţia lui Voltera, constituie prima contribuție românească importantă în domeniul ecuațiilor integrale.

Tot la Paris a obținut și diploma de inginer la Școala Superioară de Electricitate.

Traian Lalescu elaborează o monografie importantă pe plan mondial asupra ecuațiilor integrale : „Introduction a la theorie des equations integrales".

Între 1909-1929 a predat la Facultatea de ştiinţe din Bucureşti, predând cursuri de analiză matematică, mecanică raţională, algebră superioară, teoria numerelor.

Traian Lalescu a avut un rol decisiv în întemeierea Institutului Politehnic din Timișoara al cărui prim rector a fost.

A fost ales membru post-mortem al Academiei Române în anul 1991.

ŞIRUL TRAIAN LALESCU

Numim şir Traian Lalescu şirul $(L_n)_{n\geq 2}$, $L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{e}$ **- Utilizarea inegalităţii mediilor**

Considerăm şirul $e_n = (1+1/n)^n$, $n \geq 1$. Se ştie că $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} n/\sqrt[n]{n!} = e$.

Vom aplica inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică pentru următoarele n+1 numere: $\sqrt[n]{n!}/n$, $\sqrt[n]{n!}/n$, ..., $\sqrt[n]{n!}/n$, $1/e_n$.

Obţinem: $\sqrt[n]{n!} + 1/e_n \geq (n+1)\sqrt[n+1]{\frac{n!}{n^n \cdot e_n}} = \sqrt[n+1]{(n+1)!}$, $n \geq 2$.

Această relaţie conduce la $L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \leq 1/e_n = a_n$ (1)

Vom aplica inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică pentru următoarele n+1 numere: $n/\sqrt[n]{n!}$, $n/\sqrt[n]{n!}$, ..., $n/\sqrt[n]{n!}$, e_n . Obţinem:

$$n^2/\sqrt[n]{n!} + e_n \geq (n+1)\sqrt[n+1]{\frac{n^n \cdot e_n}{n!}} = \frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}. \text{ Deci } \sqrt[n+1]{(n+1)!} \geq \frac{(n+1)^2\sqrt[n]{n!}}{n^2 + e_n\sqrt[n]{n!}}.$$

Atunci $L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \geq \dfrac{(2n+1)\sqrt[n]{n!} - e_n\sqrt[n]{(n!)^2}}{n^2 + e_n\sqrt[n]{n!}} = b_n$ (2)

Din (1) si (2) obţinem $b_n = \dfrac{(2n+1)\sqrt[n]{n!} - e_n\sqrt[n]{(n!)^2}}{n^2 + e_n\sqrt[n]{n!}} \leq L_n \leq 1/e_n = a_n$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{e}$ atunci evident că $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{e}$.

Este rapid că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2n+1}{n}\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} - e_n\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)^2}{1 + e_n\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot\frac{1}{n}} = \frac{1}{e}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{e}$ **-Calculul limitei diferenţei cu ajutorul limitei raportului**

Notăm $x_n = \sqrt[n]{n!}$ .Se arată că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \frac{1}{e}$ (criteriul Cauchy-D'Alembert).

Atunci e evident că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} \cdot \frac{\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1}{\ln \frac{x_{n+1}}{x_n}} \cdot \ln \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} \cdot \ln \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n$.

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!^{n+1}}}{n!\sqrt[n+1]{(n+1)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} = e$.

Am folosit limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \frac{1}{e}$.

În concluzie $\lim_{n\to\infty} L_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} \cdot \ln \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n = \frac{1}{e} \cdot \ln e = \frac{1}{e}$

BIBLIOGRAFIE

1. **Lalescu, S.E. , 2007** –*Traian Lalescu-un nume peste ani*, Editura Curtea Veche, Bucureşti
2. **Aramă, L. , 1978** –*Probleme de calcul diferenţial şi integral*, EdituraTehnică, Bucureşti
3. **Bătineţu-Giurgiu, D.M**. - *O metodă elementară de determinare a limitei şirului lui Traian Lalescu*, G.M. 3/1989
4. **Bătineţu-Giurgiu, D.M**. - *Şiruri Lalescu*, R.M.T. 1,2/1989
5. **Bătineţu-Giurgiu, D.M. -** *Asupra unei note din revista "Recreaţii matematice", RecMat 1/2008*