Tema 2, 15 noiembrie 2019

Termen de predare: 22 noiembrie 2019, 10:00-11:00 în C210

- **Tema poate fi rezolvată în echipe de câte doi studenţi.**
- **Pentru soluţii redactate în LaTeX se oferă un bonus de 1 punct.**
- **Soluţiile identice sau copiate conduc la anularea punctajelor.**
- **Soluţiile trebuie să conţină numele celui/celor care au redactat-o şi vor fi transmise pe hârtie, nu prin e-mail.**
- **Nu rescrieţi enunţurile! Nu este nevoie de mai mult de $1-2$ pagini pentru fiecare dintre probleme.**
- **ORICE SOLUŢIE COPIATĂ A UNEIA DINTRE PROBLEMELE DE MAI JOS VA FI PENALIZATĂ CU 2 PUNCTE.**

1. Fie $G=(V,E)$ un graf conex şi $c:E\to\mathbb{R}$ o funcţie de cost pe muchiile sale. Adevărat sau fals? (Justificaţi răspunsurile!)

(a) Orice muchie de cost minim din G este conţinută într-un anume arbore parţial de cost c minim din G.

(b) Dacă G are un circuit, C, a cărui muchie de cost minim este unică pe C, atunci acea muchie este conţinută în orice arbore parţial de cost c minim din G.

(c) Dacă o muchie este conţinută într-un arbore parţial de cost c minim din G, atunci acea muchie este de cost minim într-o anumită tăietură a lui G.

(1 + 1 + 1 = 3 puncte)

2. Fie $G=(V,E)$ un graf conex şi $c:E\to\mathbb{R}$ o funcţie de cost pe muchiile sale. Fie T^* un arbore parţial de cost c minim al lui G. Spunem că un subgraf conex H al lui G este c-**extensibil** dacă $T^*_H=(V(H),E(H)\cap E(T^*))$ este un arbore parţial al lui H.

(a) Arătaţi că dacă H este c-extensibil, atunci T^*_H este un arbore parţial de cost c minim al lui H.

(b) Fie H un subgraf c-extensibil al lui G şi G_H graful obţinut din G prin contractarea una câte una a tuturor muchiilor lui H şi menţinerea muchiilor multiple formate noi formate, i. e.,

$$V(G_H)=(V\setminus V(H))\cup\{x_H\}, E(G_H)=\{uv\in E: u,v\notin V(H)\}\cup\{ux_H: uv\in E, u\notin V(H)\ni v\},$$

unde $c(ux_H)=c(uv)$.

Arătaţi că asamblând un arbore parţial de cost minim al lui H (T^*_H) cu un arbore parţial de cost minim al lui G_H obţinem un arbore parţial de cost minim al lui G.

(1 + 2 = 3 puncte)

3. Fie $G=(S,T;E)$ un graf bipartit. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) G nu este nul şi $G - \{x, y\}$ are un **cuplaj perfect**[1], $\forall x \in S, \forall y \in T$.

(ii) G este conex şi orice muchie a lui G aparţine unui cuplaj perfect.

(iii) G nu este nul, $|S| = |T|$ şi $\varnothing \neq A \subsetneq S$, $|N_G(A)| > |A|$. **(1+1+1 = 3 puncte)**

4. Fie $G = (V, E)$ un graf p-regulat bipartit. Considerăm următorul algoritm:

for $(e \in E)$ **do**
  $a(e) \leftarrow 1;$
$E^+ \leftarrow \{e \in E \ : \ a(e) > 0\};$
while ($G^+ = (V, E^+)$ conţine un circuit C) **do**
  fie $C = M_1 \cup M_2$, unde M_1 şi M_2 sunt cuplaje cu $a(M_1) \geqslant a(M_2)$;
  // pentru orice $F \subseteq E$, $a(F) = \sum_{e \in F} a(e)$;
  for $(e \in E(C))$ **do**
    if $(e \in M_1)$ **then**
      $a(e) + +;$
    else
      $a(e) - -;$
  $E^+ \leftarrow \{e \in E \ : \ a(e) > 0\};$
return E^+;

Fie $f(E^+) = \sum_{e \in E^+} a^2(e)$. Arătaţi că

(a) după fiecare iteraţie **while** $f(E^+)$ este un număr întreg care creşte cu cel puţin $|C|$ faţă de valoarea anterioară;

(b) după fiecare iteraţie **while**, pentru orice nod $u \in V$, $\sum_{uv \in E^+} a(uv) = p$;

(c) cât timp există muchii e cu $0 < a(e) < p$, algoritmul continuă; la final $a(e) = p$, $\forall e \in E^+$ şi în E^+ se găsesc muchiile unui cuplaj perfect al lui G;

(d) numărul de iteraţii **while** este finit, la final $f(E^+) = np^2/2 = pm$, iar suma lungimilor tuturor circuitelor procesate este cel mult pm;

(e) un circuit poate fi găsit în complexitatea timp $\mathcal{O}(|C|)$ folosind o parcurgere *dfs*;

(f) complexitatea timp a algoritmului în ansamblu este $\mathcal{O}(pm)$.

(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 puncte)

[1] Un **cuplaj perfect** este un cuplaj care saturează toate nodurile lui G.