Sem8 - X1

Thursday, 9 April 2020 09:58

Greedy – probleme de optimizare

INPUT : - - - - -.
OUTPUT : min / max - - - - .

- problema S (o instanță)
- alegeri disponibile (alegerea x) – cea mai bună la momentul curent
- alegerea x îmi dă o subproblemă S'

Pt. dem. că strategia pt alegeri duce la sol. optimă

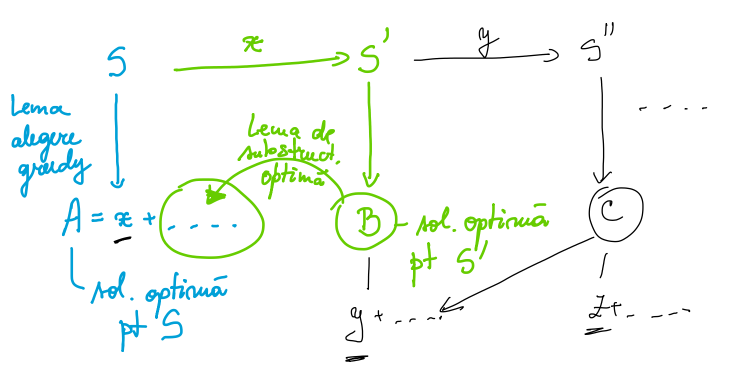
* Lema de alegere greedy
↳ există o sol optimă care conține alegerea x

$\exists A = x + \ldots$

* Lema de substructură optimă

$A = x + (\ldots)$

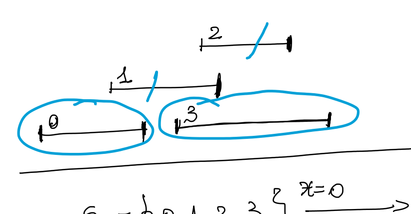
sol. optimă pt subproblema dată de de alegerea x



① alegerea activităților

INPUT : $s[0 \ldots n-1]$ – start
$f[0 \ldots n-1]$ – final – ordonat ↗
$\forall\, 0 \le i < n$, $s[i] \le f[i]$

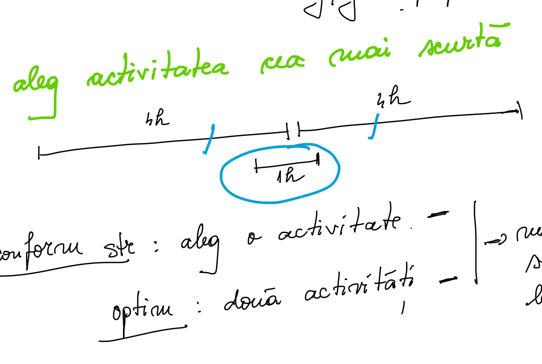
OUTPUT : $A \subseteq \{0, \ldots n-1\}$ a.î. A – nu se suprapun
$|A|$ – max



$S = \{0,1,2,3\} \xrightarrow{x=0} S = \{2,3\} \xrightarrow{x=3} S = \emptyset$
$\{0,3\}$ $\{3\}$ $A = \emptyset$

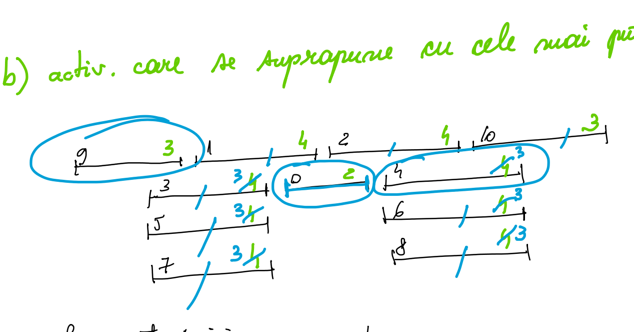
→ Subproblemele : $S \subseteq \{0, \ldots n-1\}$
→ Alegerile : aleg o activitate x
→ subproblema dată de x :
$S' = S \setminus \{y \mid y \text{ se suprapune cu } x\}$

a) aleg activitatea cea mai scurtă



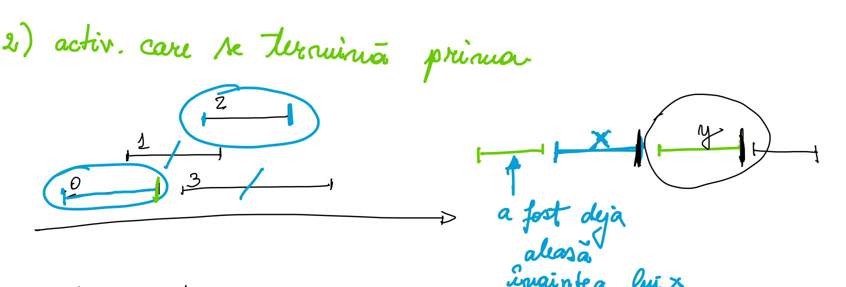
conform str : aleg o activitate –
optim : două activități –
→ nu este str. care duce la optim.

b) activ. care se suprapune cu cele mai puține act.



conform strategiei : 3 activ.
optim : 4 activități

2) activ. care se termină prima




```
A = emptySet;
t = 0; // timpul de final al ultimei activ. alese
for(i=0; i<n; i++)  // f ord ↗
{  if(s[i] >= t) { A = A ∪ singletonSet(i);
                   t = f[i];
                 }
}
print(A);
```

$s[i] > t$ $[s_i, f_i] \cap [s_j, f_j] \ne \emptyset$

$s[i] >= t$ ✓

$[s_i, f_i) \cap [s_j, f_j) \ne \emptyset$] aviz

* Lema alegere greedy
$S \subseteq \{0, \ldots, n-1\}$ – problema de la pasul curent.
x – alegerea greedy

$\exists A \subseteq S$, A – sol. optimă pt S, $x \in A$

Fie B – sol. optimă pt S

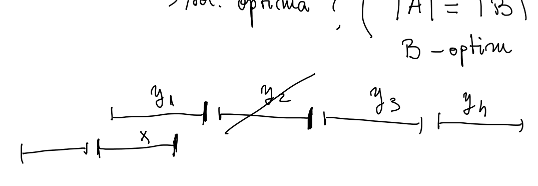
$B = \{ y_1, y_2, y_3, y_4 \}$

$A = \{ x, y_2, y_3, y_4 \}$

$f[x] < f[y_1] \le s[y_2] \le f[y_2] \le s[y_3] \ldots$

$f[x] \le s[y_2]$!

A – sol pt S ? (activ. nu se suprapun) ✓
↳ sol. optimă ? ($|A| = |B|$, B – optim) ⇒ A optim)



* Lema de substructură optimă
$S \subseteq \{0, \ldots, n-1\}$
x – alegerea greedy
$A = \{x\} \cup B$ – sol. optimă pt S

B – sol. optimă pt. $S' = S \setminus \{y \mid y \text{ se suprapune cu } x\}$

---

pp.RA. că B nu este optim pt S'
Fie C sol. optimă pt S'. ⇒ $|C| > |B|$

Construim A' – sol. mai bună decât A (pt. S)
$A' = \{x\} \cup C$
– A' → soluție pt S (activ. nu se suprapun) ✓
$\forall y_1, y_2 \in C$, y_1, y_2 nu se suprapun (C sol pt S')
x și $\forall y \in C$, x și y nu se suprapun ($C \subseteq S'$ ↳ el care nu se suprapun cu x)
↳ mai bună decât A
$|A'| = 1 + |C|$
$|A| = 1 + |B|$
$|C| > |B|$
⇒ $|A'| > |A|$ ⇒

⇒ A' o sol. mai bună pt S decât A
Dar A – sol optimă ⇒ #

⇒ contradicție ⇒ B este sol. optimă pt S'

② plata unei sume de bani cu nr. minim de bancnote.

INPUT : $n \in \mathbb{N}$ – suma de plată,
OUTPUT : A, $|A|$ – minim, $\forall x \in A$, $x \in b$, $\sum_{x \in A} x = n$ // $\ell = \langle \ldots \rangle$

DOMENIUL : b[]=[500, 200, 100, 50, 10, 5, 1]

1) b[]=[1,7,8]

$n = 14 \to 8+1+1+1+1+1+1$ (conform strategiei)
↳ optim : $7+7$

2)

```
plata(n)
{
   b[] = [500, 200, 100, 50, 10, 5, 1];  // ordonat ↘
   A = emptySet;
   i = 0;
   while (n>0)
   {  if(n>b[i]) { n = n-b[i];
                   A = A ∪ singletonSet(b[i]);
                 }
      else i++;
   }
   return A;
}
```

$n = 750 \xrightarrow{500} n = 250 \xrightarrow{500} \xrightarrow{200} n = 50 \xrightarrow{200} \xrightarrow{100} \xrightarrow{50} n = 0$
$A = \{500\}$, NU, $A = \{500, 200\}$, NU, NU, $A = \{500, 200, 50\}$

3) subproblemele : $s \le n$

4) s – suma de plată
x – alegerea greedy (bancnota max < s)

$\exists A$ – sol optimă pt s, $x \in A$ // $\exists \ell = \langle x, \ldots \rangle$

Fie B – sol. optimă pt s
→ $x \in B$ ✓
→ $x \notin B$ → tb dem că este imposibil

pp.RA. că $\exists B$ sol optimă a.î. $\boxed{x \notin B}$

$s = 700$ → $B = \{200, 200, 200, 100\}$
$x = 500$
$A = \{500, 200\}$

! putem alege un nr de bancnote din B a.î. suma lor este x ($m > 1$) (datorită valorilor din b[])

A – înlocuim în B bancnotele alese cu x
↳ A plătește suma s: $\sum_{x \in A} x = \underbrace{\left(\sum_{y \in B} y\right)}_{s} - (\cancel{x}) + \cancel{x} = s$
↳ A sol mai bună decât B
$|A| = |B| - \underbrace{m}_{>1} + 1 < |B|$ ⇒ ($-m+1 > 0$... $\underbrace{\;}_{->0}$)

⇒ contradicție (B – sol. optimă)
⇒ $\nexists$ B sol optimă pt s a.î. $x \notin B$
⇒ toate sol optime pt s îl conțin pe x
⇒ $\exists A$ – sol optimă și $x \in A$.

5) s – suma de plată
x – alegerea
$A = \{x\} \cup B$ – sol optimă pt s

B – sol optimă pt $s' = s - x$
