# Tema 3, 20 decembrie 2019

**Termen de predare: 10 ianuarie 2020, 12:00-14:00 în C210**

- **Tema poate fi rezolvată în echipe de câte doi studenţi.**
- **Pentru soluţii redactate în LaTeX se oferă un bonus de 1 punct.**
- **Soluţiile identice sau copiate conduc la anularea punctajelor.**
- **Soluţiile trebuie să conţină numele celui/celor care au redactat-o şi vor fi transmise pe hârtie, nu prin e-mail.**
- **Nu rescrieţi enunţurile! Nu este nevoie de mai mult de $1-2$ pagini pentru fiecare dintre probleme.**
- **ORICE SOLUŢIE COPIATĂ A UNEIA DINTRE PROBLEMELE DE MAI JOS VA FI PENALIZATĂ CU 2 PUNCTE.**

**1.** Fie $G = (V, E)$ un digraf, $c : E \to \mathbb{R}_+$ şi $X, Y \subseteq V$ două submulţimi disjuncte de noduri din $G$. Avem două funcţii $\sigma : X \to \mathbb{R}_+$ (oferta) şi $\theta : Y \to \mathbb{R}_+$ (cererea). $R = (G, X, Y, c)$ este o **e-reţea**; o funcţie $x : E \to \mathbb{R}$ este un **e-flux fezabil** în **e-reţeaua** $R = (G, X, Y, c)$ dacă

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant c_{ij}, \forall ij \in E,$$

$$\sum_j x_{ij} = \sum_j x_{ji}, \forall i \in V \setminus (X \cup Y),$$

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} \leqslant \sigma_i, \forall i \in X$$

$$\sum_j x_{ji} - \sum_j x_{ij} \geqslant \theta_i, \forall i \in Y$$

Presupunem că cererea totală este cel mult egală cu oferta totală, i. e., $\sigma = \sum_{i \in X} \sigma_i \geqslant \sum_{j \in Y} \theta_j = \theta$. Arătaţi că există un e-flux fezabil în $R$ dacă şi numai dacă pentru orice $S, T \subseteq V$ astfel ca $S \cup T = V$ şi $S \cap T = \varnothing$, avem

$$\sum_{i \in S, j \in T} c_{ij} \geqslant \sum_{j \in Y \cap T} \theta_j - \sum_{i \in X \cap T} \sigma_i.$$

**(4 puncte)**

**2.** La Departamentul de Informatică există $p$ studenţi ($\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_p\}$) care doresc să absolve cu o diplomă de licenţă şi $k$ profesori ($\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$). Lucrările de licenţă ale studenţilor sunt evaluate de echipe formate din câte $r$ profesori.

Pentru subiectul unei lucrări de licenţă un profesor poate specializat sau nu; se cunoaşte mulţimea, $\mathcal{P}_i \subsetneq \mathcal{P}$ ($\mathcal{P}_i \neq \varnothing$), a profesorilor competenţi în a judeca lucrarea de licenţă a studentului $S_i$, pentru orice $i$. Fiecare profesor $P_l$ poate participa în cel mult $n_l$ astfel de echipe de evaluare.

Fiecare student trebuie să-şi prezinte lucrarea unei echipe de $r(\leqslant k)$ profesori, $a(\leqslant r)$ fiind specializaţi în proiectul respectiv, iar $(r-a)$ nu.

(a) Descrieţi un model cu o reţea de transport pentru a organiza ca mai sus echipele de evaluare formate din profesori (fiecare profesor trebuie asignat unei mulţimi de lucrări de licenţă).

(b) Caracterizaţi existenţa unei soluţii pentru această problemă în termenii existenţei unui anumit flux maxim în reţeaua de mai sus. (Caracterizarea trebuie demonstrată!)

(c) Care este complexitatea timp necesară pentru a decide dacă există soluţii?

**(1 + 1 + 1 = 3 puncte)**

**3.** Considerăm următoarea problemă de decizie:
**3AN**
**Instanţă:** $G = (V, E)$ un graf cu $\Delta(G) \leqslant 3$ şi $k \in \mathbb{N}^*$.
**Întrebare:** Există $U \subseteq V$, $|U| \leqslant k$ a. î. $\{u, v\} \cap U \neq \varnothing$, $\forall uv \in E$?

Considerăm şi o instanţă a problemei **3SAT**: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o mulţime de variabile booleene, $\mathcal{C} = C_1 \wedge C_2 \ldots \wedge C_m$ o mulţime de clauze disjunctive peste $X$, fiecare clauză având exact trei literali: $C_j = v_{j_1} \vee v_{j_2} \vee v_{j_3}$, $\forall j = \overline{1, m}$.

Fie $k_i$ numărul de apariţii ale lui $x_i$ (ca literal pozitiv sau negativ) în $\mathcal{C}$ (indexăm aceste apariţii: prima, a doua etc). Definim următoarele grafuri şi mulţimi de muchii disjuncte:

(1) un circuit de lungime $2k_i$, $G_i = (V_i, E_i)$, pentru fiecare variabilă booleană $x_i$, unde $V_i = \{a_{i,1}, f_{i,1}, a_{i,2}, f_{i,2}, \ldots, a_{i,k_i}, f_{i,k_i}\}$ and $E_i = \{a_{i,h}f_{i,h}, f_{i,h}a_{i,h+1} \ : \ 1 \leqslant h \leqslant k_i\}$ (notaţie modulo $k_i$);

(2) un graf $H_j = (W_j, E(H_j)) \cong K_3$, pentru fiecare clauză $C_j$, unde $W_j = \{w_{j,1}, w_{j,2}, w_{j,3}\}$;

(3) $A = \{a_{i,l}w_{j,k} \ : \ \text{dacă } v_{j_k} = x_i \text{ este a } l\text{-a apariţie a lui } x_i \text{ în } C_j\}$;

(4) $F = \{f_{i,l}w_{j,k} \ : \ \text{dacă } v_{j_k} = \overline{x}_i \text{ este a } l\text{-a apariţie a lui } x_i \text{ în } C_j\}$;

La final definim graful $G = (V, E)$:

$$V = \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} W_j\right), E = \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} E(H_j)\right) \cup A \cup F.$$

Dovediţi că **3SAT** se poate reduce în timp polinomial la **3AN** (cu instanţa $G$ de mai sus şi $k = 5m$) arătând că

(a) există doar două mulţimi de noduri de cardinal minim care acoperă muchiile lui $G_i$, cardinalul acestora fiind $k_i$, anume: $\{a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,k_i}\}$ and $\{f_{i,1}, f_{i,2}, \ldots, f_{i,k_i}\}$.

(b) Dacă $U$ acoperă muchiile lui $G$ şi $|U| = 5m$, atunci

  (b1) $|U \cap W_j| \geqslant 2$, $\forall j = \overline{1, m}$;

  (b2) $\left|U \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right)\right| \geqslant 3m$;

  (b3) $|U \cap W_j| = 2$, $\forall j = \overline{1, m}$ şi $|U \cap V_i| = k_i$, $\forall i = \overline{1, n}$.

  (b4) următoarea funcţie de adevăr satisface toate clauzele din $\mathcal{C}$: pentru orice $i$, $t(x_i) = true$ dacă şi numai dacă $U \cap V_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,k_i}\}$.

(c) Presupunem că $t : X \to \{true, false\}$ este o funcţie de adevăr care satisface toate clauzele din $\mathcal{C}$. Construim $U$ astfel:

- pentru fiecare variabilă booleană $x_i$ cu $t(x_i) = true$ adăugăm la $U$ mulţimea $\{a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,k_i}\}$;
- pentru fiecare variabilă booleană $x_i$ cu $t(x_i) = false$ adăugăm la $U$ mulţimea $\{f_{i,1}, f_{i,2}, \ldots, f_{i,k_i}\}$;
- pentru fiecare clauză $C_j$ adăugăm la $U$ toate nodurile din $W_j$ mai puţin unul care corespunde unui literal adevărat în $C_j$.

Arătaţi că $U$ are proprietatea cerută şi că $|U| = 5m$.

**(1 + (1 + 1 + 1 + 1) + 1 = 6 puncte)**

**4.**

(a) Arătaţi că orice graf $G$ are o $\chi(G)$-colorare în care cel puţin una din clasele de colorare este o mulţime stabilă maximală.

(b) Fie $G = (V, E)$ un graf şi $x, y \in V$ două noduri neadiacente ($xy \notin E$). Arătaţi că

$$\chi(G) = \min\{\chi(G + xy), \chi(G|xy)\},$$

unde $G|xy$ este rezultatul operaţiei de contracţie a perechii $(x, y)$ în $G$.

**(1 + 1 = 2 puncte)**