Rezolvarea Subiectului III - Rolul derivatelor

Marius G.

Cu ce ne ajuta derivatele?

Rolul primei derivate a unei functii f ne este utila in a studia **monotonia** (crescatoare sau descrescatoare) si punctele de extrem pentru f.(adica puncte de maxim si minim)

Rolul derivatei de ordin 2 ne ajuta sa calculam punctele de **inflexiune** (daca ele exista) si pentru a determina daca f este **convexa** sau **concava** pe un interval.

Definitia derivatei cu limita

Spunem despre o functie $f(x)$ ca este derivabila intr-un punct x_0 daca:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

† Daca $L = \{-\infty, \infty\}$, atunci spunem ca f are derivata dar nu este derivabila.
† Daca $L \in \mathbf{R}$(adica este finit) atunci f este derivabila in x_0 si avem ca:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{def}{=} f(x_0)'$$

Reguli de derivare

Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f$ si g functii derivabile. Atunci avem:

(a). $(f + g)' = f' + g'$

(b). $(f - g)' = f' - g'$

(c). $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, unde c este o constanta

(d). $(f \cdot g)' \ = f' \cdot g + f \cdot g'$

(e). $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, \ g(x) \neq 0$

Monotonia unei functii

Fie $f : I \to \mathbf{R}$, o functie derivabila pe I. Avem:

(a). Daca $f(x)' \geq 0$, atunci f este crescatoare (pentru oricare x respecta relatia).

(b). Daca $f(x)' \leq 0$, atunci f este descrescatoare (pentru oricare x respecta relatia).

(c). Daca $f(x)' > 0$, atunci f este strict crescatoare (pentru oricare x respecta relatia).

(d). Daca $f(x)' < 0$, atunci f este strict descrescatoare (pentru oricare x respecta relatia).

(e). Daca $f(x)' = 0$, atunci f este constanta(pentru oricare x respecta relatia).

Punct de extrem

Spunem ca x_0 este punct de extrem(critic), daca respecta relatia $f(x_0)' = 0$.

Punct de inflexiune

Spunem ca x_0 este punct de inflexiune, daca respecta relatia $f(x_0)'' = 0$.

Tabel de variatie(semn)

De cele mai multe ori la Subiectul III, la analiza matematica de clasa a XI - a, trebuie sa facem un tabel. Cum il facem?
$\longrightarrow$ Daca am nevoie de monotonia lui $f(x)$, de puncte de minim/maxim, de aratat inegalitati, trebuie sa fac tabelul de variatie a lui $f(x)'$.
$\longrightarrow$ Daca am nevoie de aratat convexitatea/concavitatea lui $f(x)$ pe un interval / tot domeniul de definitie a lui f sau trebuie sa arat ca are puncte de inflexiune(sau sa le si calculez), trebuie sa fac tabelul de variatie a lui $f(x)''$.

Pasii de urmat pentru tabelul cu $f(x)'$

1). Calculam derivata de ordin 1. ($f(x)'$)

2). Egalam derivata cu 0 ($f(x)' = 0$) si determinam punctele de extrem, daca ele exista.

3). Trasam tabelul si punem pe prima coloana ($x, f(x)', f(x)$), ne uitam in enunt sa vedem pe ce interval este definita functia f si punem cele 2 capete pe primul rand din tabel.

4). Adaugam punctele de extrem(tot pe primul rand) si sub ele(adica pe randul cu $f(x)'$ scriem 0.(pentru ca derivata in punctul de extrem face 0).

5). Trebuie sa punem semnele, daca derivata noastra este de gradul 1 sau 2 ne putem folosi de tabele de variatie de semn din clasa a IX - a sau luam o valoare din intervalul la care trebuie sa atasam un semn si inlocuim in $\mathbf{f(x)}'$, ne intereseaza doar semnul (adica daca e $>$ 0 avem $+$, daca e $<$ 0 avem -) nu si valoarea.

6). Acum trebuie sa trasam sagetele de monotonie si avem: sageata in sus unde avem $+$ si sageata in jos unde avem -.

7). Daca avem sageata sus urmata de sageata jos, atunci avem punct de maxim, daca avem sageata jos urmata de sageata sus avem punct de minim(valorile pentru punctul de minim si cel de maxim o sa se calculeze in **f(x)**.(x - ul il luam de pe primul rand, o sa observam ca este de fapt punctul de extrem calculat la pasul 2).

8). Ideal ar fi sa facem si limitele in cele 2 capete sa fim siguri ca nu "explodeaza" functia intr-un capat.(Pasul acesta este necesar cand lucram cu valori ale lui $f(x)$, pentru exercitii unde trebuie aplicata monotonia **nu** este necesar). Daca avem de ex un capat care nu este infinit vom face limita laterala in acel punct(daca avem de exemplu: $(0, \infty)$ facem limita la stanga in 0 si limita la ∞).

Interpretarea tabelului cu $f(x)'$

Am terminat tabelul, ce fac acum?

Vom interpreta tabelul, aici difera de la exercitiu la exercitiu, dar daca citim cu **atentie** enuntul vom lua punctaj maxim(ne uitam la ultima sectiune pentru diferite exemple).

I. Unde avem + in tabel, f este crescatoare. Daca sunt mai multe intervale in care f este crescatoare o sa unim intervalele prin reuniune ($\cup$).

II. Unde avem - in tabel, f este descrescatoare. Daca sunt mai multe intervale in care f este descrescatoare o sa unim intervalele prin reuniune ($\cup$).

III. Daca avem mai multe puncte de minim/maxim il vom alege pe cel mai mic/mare ca fiind cel global(adica peste toata functia).

Pasii de urmat pentru tabelul cu $f(x)''$

1). Calculam derivata de ordin 1, apoi derivata de ordin 2.

2). Egalam derivata de ordin 2 cu 0 ($f(x)'' = 0$) si determinam punctele de inflexiune, daca ele exista.

3). Trasam tabelul si punem pe prima coloana ($x, f(x)'', f(x)$), ne uitam in enunt sa vedem pe ce interval este definita functia f si punem cele 2 capete pe primul rand din tabel.

4). Adaugam punctele de inflexiune(tot pe primul rand) si sub ele(adica pe randul cu $f(x)''$ scriem 0.(pentru ca derivata in punctul de inflexiune face 0).

5). Trebuie sa adaugam semnele derivatei de ordin 2, luam o valoare din intervalul caruia trebuie sa ii atasam un semn si inlocuim in $f(x)''$ si ne intereseaza doar semnul nu si valoarea.

6). Daca avem + pe randul cu $f(x)''$, pe randul cu $f(x)$ vom trasa un *smile face*
Daca avem - pe randul cu $f(x)''$, pe randul cu $f(x)$ vom trasa un *sad face*

Interpretarea tabelului cu $f(x)''$

I. Unde avem + in tabel(smile face) f este convexa. Daca sunt mai multe intervale in care f este convexa o sa le reunim($\cup$).

II. Unde avem - in tabel(sad face) f este concava. Daca sunt mai multe intervale in care f este concava o sa le reunim($\cup$).

III. Punctele de inflexiune sunt date de $f(x)'' = 0$, daca ne cere valoarea functiei in punctele de inflexiune, inlocuim in $f(x)$ cu punctele respective.

Calculul Asimptotelor

Orizontala

Fie $f : I \to \mathbf{R}$. Spunem ca dreapta $y = l$ este asimptota orizontala la graficul functiei f spre $\pm\infty$, daca $l \in \mathbf{R}$ (adica daca l exista si este diferit de $\pm\infty$), unde

$$l = \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$$

Oblica

Fie $f : I \to \mathbf{R}$. Spunem ca dreapta $y = mx + n$ este asimptota oblica la graficul functiei f spre $\pm\infty$, daca $m, n \in \mathbf{R}$(adica m si n exista si sunt diferite de $\pm\infty$), unde

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - m \cdot x)$$

Daca ne da $m = 0$, inseamna ca avem o asimptota orizontala(ar trebuie sa ne mai uitam odata peste calcule)

Verticale

Fie $f : I \to \mathbf{R}$ si x_0 un punct de acumulare, $a \in \mathbf{R}(\neq \pm\infty)$.
Spunem ca dreapta $x = a$ este asimptota verticala la stanga lui f, daca:

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \to a, x < a} f(x) = \pm\infty$$

Spunem ca dreapta $x = a$ este asimptota verticala la dreapta lui f, daca:

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \to a, x > a} f(x) = \pm\infty$$

Daca avem asimptota verticala la stanga si dreapta atunci, spunem ca dreapta $x = a$ este asimptota verticala la graficului lui f.

Ecuatia tangentei la grafic

Ecuatia tangentei la graficul lui f intr-un punct de abscisa x_0 are formula:

$$y - f(x_0) = f(x_0)'(x - x_0)$$

.

Formule de calcul si anumite observatii

$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$
$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$
$ln(e)=1$, $ln(1)=ln(e^0)=0$, $ln(0)=-\infty(conventie)$
$arctg(0)=0$, $arctg(1)=\frac{\pi}{4}$
Ecuatia $e^x=0$ **NU** are solutii in $\mathbf{R}$.
Ecuatia $e^x=1$ are unica solutie $x=0$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\pm\infty}=0$
$\lim\limits_{x\to\infty}e^x=\infty$ **SI** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

Idei uzuale pentru c - uri

1) Demonstrati ca $a\leq f(x)\leq b, \quad \forall x\in[x_0,x_1]$

   Facem tabelul de variatie si aratam ca a si b sunt efectiv valorile pentru punctele de minim si maxim(cand este un interval mare care contine macar intr-o parte ∞) (aici este necesar sa facem si limitele in capete ca sa spunem ca punctele gasite sun globale).
   Sau daca avem un interval mai mic aratam ca pe intervalul $[x_0,x_1]$ functia f este monotona(crescatoare sau descrescatoare) si ca $f(x_0)=a, f(x_1)=b$, de unde iese concluzia.

2) Aratati ca $f(x)\geq\frac{1}{e}, \quad \forall x\in[x_0,x_1]$

   Facem tabelul si aratam ca punctul de minim pe $[x_0,x_1]$ are valoarea $\frac{1}{e}$.

3) Aratati ca $f(x)\leq 23, \quad \forall x\in[x_0,x_1]$

   Facem tabelul si aratam ca punctul de maxim pe $[x_0,x_1]$ are valoarea *23*.

4) Aratati ca $f(x)\geq x^2-3, \quad \forall x\in[x_0,x_1]$

   Ducem ce e dupa "$\geq$" in partea stanga, adica $f(x)-x^2+3\geq 0$.
   Notam cu $g(x)=f(x)-x^2+3$, facem tabelul de variatie si aratam ca $g(x)'\geq 0, \quad \forall x\in[x_0,x_1]$.

5) Aratati ca $f(x)\leq e^{2x}-2\cdot\pi, \quad \forall x\in[x_0,x_1]$

   Ducem ce e dupa "$\leq$" in partea stanga, adica $f(x)-e^{2x}+2\cdot\pi$.
   Notam cu $g(x)=f(x)-e^{2x}+2\cdot\pi$, facem tabelul de variatie si aratam ca $g(x)'\leq 0, \ \forall x\in[x_0,x_1]$.

6) Determinati multimea de valori ale functiei f.

   Tabel de variatie + limite in capete si multimea de valori este de fapt "pe unde se plimba f -ul " cu ajutorul punctelor de minim,minim(ar trebui sa obtinem puncte globale).

7) Determinati intervalele de monotonie ale functiei f.

   Facem tabel si acolo unde apare + inseamna ca $f(x)$ este crescatoare, si acolo unde apare - inseamna ca $f(x)$ este descrescatoare.(daca sunt mai multe intervale cu + sau - vom reuni ($\cup$) intervalele). **Important!** este sa mentionam in scris pe ce interval e crescatoare/descrecatoare, adica: $\underline{f\text{ este crescatoare}}$ pe $[-12,24]$ si $\underline{f\text{ este descrescatoare}}$ pe $(-\infty,-12)\cup(24,\infty)$.

8) Aratati ca f e convexa pe $\mathbf{R}$.

Daca trebuie sa aratam ca f e convexa/concava pe tot domeniul de definitie, ne asteptam ca f sa nu aiba puncte de inflexiune, adica $f(x)'' = 0$ nu are solutii reale(sau avem derivate de genul $\frac{23}{x^2-3x}$ care nu are puncte de inflexiune).

9) Aratati ca $a \leq f(x) + f(y) \leq b$, pentru $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

Vom face tabelul de variatie si ne asteptam ca $\frac{a}{2}$ sa fie punct de minim si ca $\frac{b}{2}$ sa fie punct de maxim daca f este crescatoare si invers daca f este descrescatoare.
Vom scrie ca:

$$f(x) \text{ pe } [x_0, x_1] \text{ este crescatoare atunci:}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{2} \leq f(x) \leq \frac{b}{2}, \forall x \in \mathbf{R}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{2} \leq f(y) \leq \frac{b}{2}, \forall y \in \mathbf{R}$$
$$\Longrightarrow \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \leq f(x) + f(y) \leq \frac{b}{2} + \frac{b}{2}, \forall x, y \in \mathbf{R}$$
$$\text{adica, } a \leq f(x) + f(y) \leq b, \forall x, y \in \mathbf{R}, \text{de unde reiese si concluzia problemei.}$$

Analog si pentru cand $f(x)$ este descrescatoare pe $[x_0, x_1]$