Grafuri Neorientate

Marius Ghiniei

March 25, 2025

1 Definiție

Se numește **graf neorientat** perechea ordonată de mulțimi $G = (X, U)$, unde:

- X este o mulțime finită și nevidă numită **mulțimea nodurilor (vârfurilor)**;
- U este o mulțime de perechi neordonate de forma $[x, y]$, cu $x, y \in X$, numită **mulțimea muchiilor** grafului.

Numărul nodurilor se notează cu n, iar numărul muchiilor cu m.

2 Reprezentarea grafică

Nodurile sunt reprezentate prin puncte sau cercuri numerotate, iar muchiile prin linii care unesc nodurile corespunzătoare.

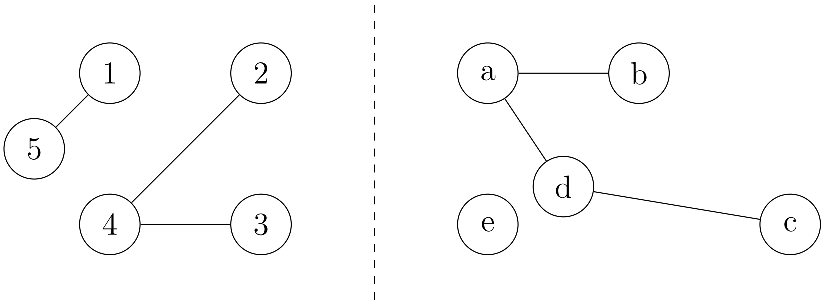

Figure 1: Exemplu de grafuri neorientate.

3 Terminologie

3.1 Nod (vârf)

Nodurile sunt punctele unui graf și formează mulțimea X.

- Exemplu: $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ pentru un graf cu 5 noduri.
- Exemplu: $X = \{a, b, c, d, e\}$ pentru un alt graf cu noduri litere.

3.2 Muchie

Muchiile sunt legături între noduri, reprezentate ca perechi $[x, y] = [y, x]$.

- Exemplu: $U = \{[a, b], [a, d], [c, d]\}$ pentru un graf neorientat.

3.3 Adiacență

Două noduri x și y sunt **adiacente** dacă există muchia $[x, y]$.

- Exemplu: În graful 2, a este adiacent cu b și d.

3.4 Incidență

Două muchii sunt **incidente** dacă au un nod comun.

- Exemplu: Muchia $[a, d]$ este incidentă cu $[c, d]$ (nod comun d).

3.5 Gradul nodurilor

Gradul unui nod x este numărul de muchii incidente cu x, notat $d(x)$.

- Exemplu: În graful 2, $d(a) = 2$, $d(d) = 2$.

3.6 Nod izolat

Un **nod izolat** este un nod de grad 0 (fără muchii incidente).

- Exemplu: În graful 2, nodul e este izolat.

3.7 Nod Terminal

Un varf cu gradul 1 se numeste **terminal**.

- Exempplu: In graful 2, nodul b este terminal.

3.8 Graf Partial

Un **graf partial** al unui graf neorientat $G = (X, U)$, are aceasi multime de varfuri ca si G, iar multimea muchiilor este o submultime a lui U sau chiar U.
Un **graf parțial** al grafului G se obține păstrând vârfurile şi eliminând eventual nişte muchii (se pot elimina şi toate muchiile sau chiar nici una).

3.9 Subgraf

Fie $G = (X, U)$ un graf neorientat. Un **subgraf** al grafului G, se obține ştergând eventual anumite vârfuri şi odată cu acestea şi muchiile care le admit ca extremitate (nu se pot şterge toate vârfurile deoarece s-ar obține un graf cu mulțimea vârfurilor vidă).

3.10 Graf nul

Un graf neorientat se numește **graf nul** dacă mulțimea muchiilor este vidă. Într-un graf nul toate vârfurile sunt izolate.

3.11 Graf Complet

Fie $G = (X, U)$ un graf neorientat. Graful G se numește **graf complet** dacă oricare două vârfuri distincte ale sale sunt adiacente.

- Într-un graf complet cu n vârfuri sunt $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ muchii și fiecare vârf are gradul $n - 1$.

3.12 Graf regulat

Un graf în care toate nodurile au acelaşi grad se numește **graf regulat**.

3.13 Elemente de conexitate

Se numește **lanț** o succesiune de vârfuri $L = [x_1, x_2, \ldots, x_k]$ cu proprietatea că oricare două vârfuri consecutive sunt adiacente.

- Vârfurile x_1şi x_k se numesc extremitățile lanțului. Numărul $k - 1$ se numește **lungimea lanțului** și este numărul de muchii din care este format.

- Lanțul care conține numai vârfuri distincte, două câte două, este **lanț elementar**.

- Lanțul care conține numai muchii distincte este **lanț simplu**. Dacă muchiile unui lanț nu sunt distincte se numește **lanț compus**.

Se numește **ciclu** un lanț simplu în care primul vârf este identic cu ultimul. Dacă toate vârfurile sunt distincte, mai puțin primul și ultimul, se numește **ciclu elementar**.

- **Lungimea** unui ciclu este egală cu numărul de muchii din ciclu.

- Lungimea minimă a unui ciclu este 3.

- Un graf neorientat care nu conține niciun ciclu se numește **aciclic**.

3.14 Graf conex

Un graf neorientat se numește **graf conex** dacă pentru oricare două vârfuri x și y diferite ale sale, există cel puțin un lanț care le leagă, adică x este extremitatea inițială și y este extremitatea finală (adică pot să ajung de la x la y).

- Un graf cu un singur nod este, prin definiție, conex.

3.15 Componenta conexă

Se numește **componentă conexă** a unui graf $G = (X, U)$ un subgraf $G^{'} = (X^{'}, U^{'})$, conex, al lui G care are proprietatea că nu există nici un lanț în G care să lege un vârf din $X^{'}$ cu un vârf din $X–X^{'}$.

- Subgraful $G^{'}$ este conex și maximal cu această proprietate (dacă s-ar mai adăuga un vârf nu ar mai fi conex.)

- Un graf este **conex** dacă admite o singură componentă conexă.

3.16 Arbore

Se numește **arbore** un graf conex și aciclic.

- Un arbore cu n vârfuri are $n - 1$ muchii.

- Un arbore este un graf conex și minimal cu această proprietate; dacă s-ar mai elimina o muchie, graful nu ar mai fi conex.

- Un arbore este un graf aciclic și maximal cu această proprietate; dacă s-ar mai adăuga o muchie, s-ar obține un ciclu.

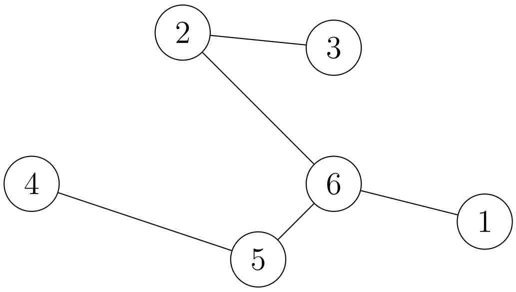

Figure 2: Exemplu de Arbore

3.17 Graf Hamiltonian

Se numește **graf hamiltonian** un graf care conține un ciclu hamiltonian. Se numește **ciclu hamiltonian** un ciclu elementar care conține toate vârfurile grafului.

- Un G un graf neorientat. Dacă are $n \geq 3$ vârfuri şi gradul oricărui vârf verifică inegalitatea $d(x) \geq \dfrac{n}{2}$ atunci G este **hamiltonian**.

3.18 Graf Eulerian

Se numește **graf eulerian** un graf care conține un **ciclu eulerian**. Se numește ciclu eulerian un ciclu care conține toate muchiile grafului.

- Un graf $G = (X, U)$, fără vârfuri izolate, este **eulerian** dacă şi numai dacă este conex şi gradele tuturor vârfurilor sale sunt numere **pare**.

4 Formule pentru grafuri neorientate

- Un graf cu n varfuri m muchii admite 2^m grafuri partiale si $2^n - 1$ subgrafuri.
- Numărul maxim de muchii: $m_{\max} = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Suma gradelor nodurilor este egala cu dublul numarului de muchii: $\sum d(x) = 2m$.
- Numărul total de grafuri neorientate cu n vârfuri este: $2^{C_n^2} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
- Numărul minim de muchii pentru a evita noduri izolate: $\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

- Numărul minim de muchii pentru a elimina toate nodurile izolate: $C_{n-1}^2 + 1$.
- **Teorema de caracterizare:** Un graf neorientat complet cu n vârfuri $(n \geq 3), n$ este impar, este **hamiltonian** și **eulerian**.
- **Teorema de caracterizare:**Un graf neorientat complet cu n vârfuri $(n \geq 3)$, n este par, este **hamiltonian** și **NU** este eulerian (ar avea toate gradele impare), atunci numărul **minim** de muchii de elimant este $\frac{n}{2}$.