FUNZIONI LIPSCHITZIANE

Def. Sia $f = f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a, b]$.
La funzione si dice lipschitziana in $[a, b]$ se $\exists\ L \geq 0$, L costante, t.c.

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$$

$\forall\, x, y \in [a, b]$

Esempi: $f(x) = 5x - 7 \quad f(y) = 5y - 7$

(1) $f(x) = 5x - 7$ è lipshitziana su $\mathbb{R}$,
infatti $f(x) - f(y) = 5(x - y)$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = 5|x - y|$$

Lipshitziana con costante $L = 5$.

(2) $f(x) = x^2$ non è Lipschitziana su $\mathbb{R}$.

$$f(x) - f(y) = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

DOMANDA: la seguente quantità, risulta limitata da una costante L?

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq L \ ? \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \ x \neq y$$

- La risposta è NO, infatti:

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = \frac{|\cancel{(x-y)}(x+y)|}{|\cancel{x-y}|} = |x+y|$$

non è limitato (per $x \to +\infty$ o $y \to +\infty$)

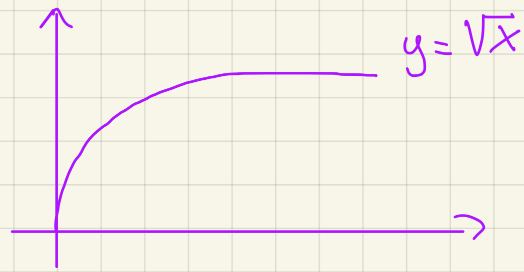
OSS $f(x) = x^2$ è invece lipschitziana se ci troviamo in un intervallo $[a, b]$.

CRITERIO PER STABILIRE SE UNA FUNZIONE È LIPSCHITZIANA.

Se $f = f(x)$ è derivabile in I intervallo limitato di $\mathbb{R}$, allora:

f è lipschitziana in I con costante $L \iff |f'(x)| \leq L$.

Esercizio - Verificare che $f(x)=\sqrt{x}$ non è lipschitziana nell'intervallo $[0,1]$.



Consideriamo $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- La funzione $f(x)=\sqrt{x}$ non è derivabile in $x=0$. Consideriamo allora $I=(0,1]$

Se f non è lipschitziana in $(0,1]$ non lo sarà neanche in $[0,1]$.

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$$

La derivata non è limitata, la funzione non è lipschitziana in $[0,1]$.

<u>OSS:</u> $f(x)=\sqrt{x}$ è invece lipschitziana in $[1,+\infty)$, infatti

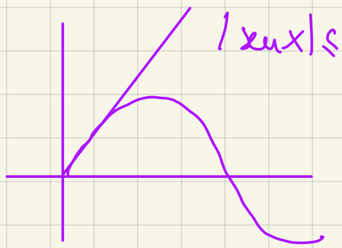
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{per } x \geq 1 \qquad [1, +\infty)$$

$$e \qquad 0 < f'(x) < \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

per $x=1$

Esercizio - $f(x) = \operatorname{sen} x$ è lipschitziana con costante $L=1$, cioè

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$



infatti per le formule di prostaferesi

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| = 2 \left|\operatorname{sen} \frac{x-y}{2}\right| \overbrace{\left|\cos \frac{x+y}{2}\right|}^{\leq 1} \leq$$

$$\leq 2 \left|\operatorname{sen} \frac{x-y}{2}\right| \leq 2 \left|\frac{x-y}{2}\right| \leq |x-y|$$

Abbiamo utilizzato $|\operatorname{sen} x| \leq |x| \ \forall x$ e $|\cos x| \leq 1$

<u>OSS</u> Analogamente si prova che $f(x) = \cos x$ è lipschitziana con costante $L=1$.

OSS: Si può anche dimostrare con il criterio della derivata limitata, poiché:

data $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow$

$$|f'(x)| = |\cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

- FUNZIONE LIPSCHITZIANA:

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \quad \forall x, y \in [a,b]$$

. prendiamo $y = x_0$

$|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$

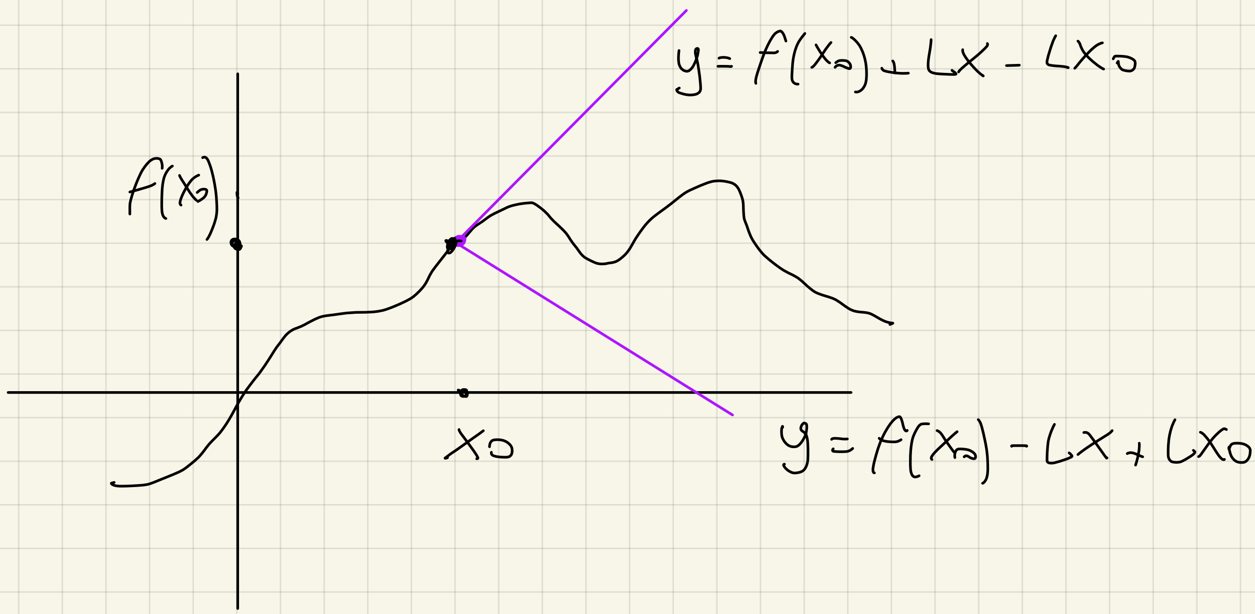
$$|f(x) - f(x_0)| \leq L\,|x - x_0|$$

$$\Leftrightarrow -L\,|x-x_0| \leq f(x) - f(x_0) \leq L\,|x-x_0|$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) - L\,|x-x_0| \leq f(x) \leq f(x_0) + L\,|x-x_0|$$

per $x > x_0$:

$$f(x_0) - Lx + Lx_0 \leq f(x) \leq f(x_0) + Lx - Lx_0$$



FUNZIONI LIPSCHITZIANE: funzioni con crescita limitata.

Per ogni punto $(x_0, f(x_0))$ del grafico della funzione tracciamo le rette di equazioni:

$$y = f(x_0) + Lx - Lx_0$$

$$y = f(x_0) - Lx + Lx_0$$

passanti per x_0 e $f(x_0)$ e con pendenza L (coefficiente angolare) $\Rightarrow$

il grafico della funzione sarà sempre
contenuto nella regione fra le due rette
("CONO")