Esercitazione 22 Ottobre

Ripasso delle lezioni

Ricordiamo le definizioni di limite per le funzioni.

Definizione. *Sia $x_0 \in A$. Per semplicità si immagini A come un intervallo o un'unione di intervalli, così che x_0 risulti interno ad A. Si dice che $f(x)$ ha limite uguale a l (tende o converge ad l) per x che tende a x_0, se, qualunque sia la successione $x_n \to x_0$ con $x_n \in A$ e $x_n \neq x_0$ $\forall n$, risulta $f(x_n) \to l$. In simboli:*

$$\forall x_n \to x_0, x_n \in A - \{x_0\}, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f(x_n) \to l$$

Si dimostra che questa definizione è equivalente alla seguente:

Definizione.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \epsilon, \forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta$$

Valgono anche le definizioni con i limiti infiniti:

Definizione.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty &\Longleftrightarrow \forall x_n \to x_0, x_n \in A - \{x_0\}, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f(x_n) \to +\infty \\ &\Longleftrightarrow \forall M > 0,\ \exists \delta > 0 : f(x) > M, \forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} f(x) = l &\Longleftrightarrow \forall x_n \to +\infty, x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f(x_n) \to l \\ &\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists k > 0 : |f(x) - l| < \epsilon, \forall x \in A : x > k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty &\Longleftrightarrow \forall x_n \to +\infty, x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f(x_n) \to +\infty \\ &\Longleftrightarrow \forall M > 0,\ \exists k > 0 : f(x) > M, \forall x \in A : x > k\end{aligned}$$

Sono stati poi definiti il limite destro e il limite sinistro, che valgono quando ci si avvicina al punto per valori solo maggiori o minori.

Definizione.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \epsilon, \forall x \in A : 0 < x - x_0 < \delta (x_0 < x < x_0 + \delta)$$
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \epsilon, \forall x \in A : -\delta < x - x_0 < 0 (x_0 - \delta < x < x_0)$$

Esercizi

Esercizio: Utilizzando la definizione di limite, verificare che:

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{5}$$

Soluzione:

$$\left|\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{5}\right| = \frac{2}{5}\left|\frac{3-x}{2x-1}\right|$$

Bisogna ora quantificare il valore del denominatore per i valori di x vicini a 3. Si ha perciò che se, ad esempio, $2 < x < 4$ allora $3 < 2x - 1 < 7$, e quindi:

$$\frac{2}{5}\left|\frac{3-x}{2x-1}\right| < \frac{2}{35}|x-3|$$

infine ciò deve essere minore di ϵ

$$\frac{2}{35}|x-3| < \epsilon$$

$$|x-3| < \frac{35}{2}\epsilon$$

Questo conclude la dimostrazione in quanto si ha che se pongo $\delta = \min\left(1, \frac{35}{2}\epsilon\right)$ se $|x-3| < \delta$ risulta $\left|\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{5}\right| < \epsilon$

Esercizio: Utilizzando la definizione, verificare che:

$$\lim_{x\to +\infty} x - 2\sqrt{x} = +\infty$$

Soluzione: Fissiamo $M > 0$ e risolviamo la disequazione $x - 2\sqrt{x} > M$, sostituendo $t = \sqrt{x}$ si ha $t^2 - 2t - M > 0$ che ha per soluzione $t < 1 - \sqrt{1+M}$ e $t > 1 + \sqrt{1+M}$. Poiché ci interessano i valori di $x \to +\infty$, ci concentriamo sull'intervallo $t > 1 + \sqrt{1+M}$. Risostituendo $t = \sqrt{x}$ si ha: $\sqrt{x} > 1 + \sqrt{1+M}$, si può inoltre supporre che le due quantità siano positive e perciò si ottiene che $x > \left(1 + \sqrt{1+M}\right)^2$. Possiamo porre pertanto $k = \left(1 + \sqrt{1+M}\right)^2$ ed è verificata la condizione $x - 2\sqrt{x} > M$.

Esercizio: Utilizzando la definizione, verificare che:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + x + |x|}{x} = 2$$

Soluzione: Fissiamo $\epsilon > 0$, dal momento che si sta considerando il limite destro in zero si può supporre la $x > 0$ e pertanto $|x| = x$, $\left|\frac{x^2+x+|x|}{x} - 2\right| = |x + 2 - 2| = |x| < \epsilon$ Allora basta considerare $\delta = \epsilon$ e per i valori di $0 < x < \delta$ si ha

$$\left|\frac{x^2 + x + |x|}{x} - 2\right| < \epsilon$$

Esercizio: Utilizzando la definizione di limite verifica che:

$$\lim_{x \to -\infty} -x^2 + x = -\infty$$

Soluzione: Fissiamo $M > 0$, allora si cerca $k > 0$ tale che

$$-x^2 + x < -M$$

$$x^2 - x - M > 0$$

per ogni $x < -k$. Risolvendo ora la disequazione si arriva al seguente risultato:

$$x < \frac{1 - \sqrt{1 + 4M}}{2} \quad \text{e} \quad x > \frac{1 + \sqrt{1 + 4M}}{2}$$

interessandoci i valori di x a $-\infty$. Si conclude scegliendo $k = -\frac{1-\sqrt{1+4M}}{2}$.

Per le funzioni valgono alcuni limiti notevoli analoghi a quelli delle successioni: Di conseguenza, per il teorema della composta, valgono anche risultati simili per $f(x) \to 0$ e quindi i rispettivi limiti asintotici.

$$\begin{array}{ccc}
\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 & \frac{\sin(f(x))}{f(x)} \to 1 & \sin(f(x)) \sim f(x) \\
\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{1}{2} & \frac{1 - \cos(f(x))}{f(x)^2} \to \frac{1}{2} & 1 - \cos(f(x)) \sim \frac{1}{2} f(x)^2 \\
\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e & (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} \to e & \\
\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 & \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} \to 1 & e^{f(x)} - 1 \sim f(x) \\
\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log(a) & \frac{a^{f(x)} - 1}{f(x)} \to \log(a) & a^{f(x)} - 1 \sim \log(a) f(x) \\
\lim_{x \to 0} \frac{\log(x + 1)}{x} = 1 & \frac{\log(f(x) + 1)}{f(x)} \to 1 & \log(f(x) + 1) \sim f(x)
\end{array}$$

Esercizio: Si calcolino i seguenti limiti di funzione:

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x - x^2 \qquad \lim_{x \to +\infty} x - \sqrt{x} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x^2 + 1)}{2^x} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + e^{2x}}{x - x^2}$$

Soluzione: Per risolvere i seguenti limiti basta confrontare gli infiniti e si ottengono direttamente i seguenti risultati: $+\infty, +\infty, 0, -\infty$

Esercizio: Si calcolino i seguenti limiti di funzione:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\sqrt{x+1}}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(x^3+1\right)}{x} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\log\left(\sqrt{x}+1\right)}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{2x}} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-1}{x}$$

Soluzione: La maniera di procedere più rapida è utilizzare i limiti asintotici

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\log\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1\log(x+1)}{2x} = \frac{1}{2}\\
&\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(x^3+1\right)}{x} \sim \frac{x^3}{x} \to 0\\
&\lim_{x\to 0^+}\frac{\log\left(\sqrt{x}+1\right)}{x} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} \to +\infty\\
&\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{2x}} \sim \frac{x}{2x} \to \frac{1}{2}\\
&\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-1}{x} \sim \log(2)\frac{3x}{x} = \log(2)
\end{aligned}$$

Si noti che per $x \to 0$ le potenze di x con minore esponente sono quelle che contano maggiormente. Infatti le varie potenze di x tendono a zero con maggiore rapidità quanto maggiore è l'esponente.

Per analizzare altre situazioni si possono considerare i seguenti limiti:

Esercizio: Si calcolino i seguenti limiti di funzione:

$$\lim_{x\to +\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(x\right)}{\sin^2\left(x\right)} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2\left(x\right)}{\cos(x)-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x+x^2)}{x} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(2x)}{\log(3x)} \qquad \lim_{x\to 0+}\frac{\log(x+x^3)}{\log(x)} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\cos(x)\right)}{x^2}$$

Soluzione:

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim x\cdot\frac{1}{x} \to 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} \sim \frac{2x}{3x} \to 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)} \sim \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x^2} \to \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(x)}{\cos(x)-1} \sim \frac{x^2}{-\frac{1}{2}x^2} \to \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x+x^2)}{x} \sim \frac{-x+x^2}{x} \to -1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(2x)}{\log(3x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(x)+\log(2)}{\log(x)+\log(3)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\log(x+x^3)}{\log(x)} = \lim_{x\to 0+}\frac{\log(x(1+x^2)))}{\log(x)} = \lim_{x\to 0+}\frac{\log(x)+\cancelto{0}{\log(1+x^2)}}{\log(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+(\cos(x)-1))}{x^2} \sim \frac{\cos(x)-1}{x^2} \sim -\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x^2} \to -\frac{1}{2}$$

Concentriamoci ora sul limite

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad (1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} \to e$$

Esercizio: Si calcolino i seguenti limiti di funzione:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x \qquad \lim_{x\to+\infty} x\log\left(1-\frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2\left[\log(x^2+2)-2\log(x)\right] \qquad \lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$$

Soluzione:

$$\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x = \left(\frac{x+1+2-1}{x+1}\right)^x = \left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x = \left[\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{1}}\right]^{\frac{x}{x+1}} \to e$$

$$x\log\left(1-\frac{1}{x}\right) = \log\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \log\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1} \to e^{-1}$$

$$x^2\left[\log(x^2+2)-2\log(x)\right] = x^2\log\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right) = \log\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{x^2} = \log\left[\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{2}}\right]^{\frac{2}{x^2}\cdot x^2} \to e^2$$

$$(\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2(x)}} = (1+(\cos(x)-1))^{\frac{1}{\sin^2(x)}} = \left[(1+(\cos(x)-1))^{\frac{1}{\cos(x)-1}}\right]^{\frac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)}} \to e^{-\frac{1}{2}}$$

Esercizio: Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} x^x \qquad \lim_{x\to 0^+} x^{\log(x)}$$

Soluzione: Per i seguenti limiti si trasforma l'espressione algebrica in un esponenziale:

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{\log((x^x)} = \lim_{x\to 0} e^{x\log((x)} \to e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\log(x)} = \lim_{x\to 0} e^{\log\left(x^{\log(x)}\right)} = \lim_{x\to 0} e^{\log(x)\log(x)} \to e^{+\infty} \to +\infty$$

Nel calcolo del primo limite abbiamo utilizzato il limite notevole $\lim_{x\to 0} x\log(x) = 0$.

Esercizio: Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{\log(1+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x^2-1}}$$

Soluzione: Alcuni dei seguenti limiti si risolvono per sostituzione. Nel primo caso si adotta la seguente sostituzione $y = x-1$ e dunque si avrà $x = y+1$

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}} = \lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{2}{y}} = e^2$$

Per il secondo si adotta ancora la sostituzione $y = x-1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

Per l'ultimo invece utilizziamo i limiti asintotici:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\log(1+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x^2-1}} \sim \frac{\cancel{\sqrt{x-1}}}{\cancel{\sqrt{x-1}}\sqrt{x+1}} \to \frac{1}{2}$$

Esercizio: Si calcolino i seguenti limiti di funzione:

$$\lim_{x\to +\infty} e^{\sqrt{x^x+x}} - e^{\sqrt{x^2-1}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)+\log(1-x)}{x^2}$$

Soluzione:

$$e^{\sqrt{x^x+x}} - e^{\sqrt{x^2-1}} = e^{\sqrt{x^x+x}}\left(1 - e^{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^x+x}}\right)$$

Razionalizzando l'esponente si ottiene la seguente espressione:

$$\left(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^x+x}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^x+x}\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^x+x}\right)} = \frac{x^2-1-x^2-x}{\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^x+x}\right)} \to -\frac{1}{2}$$

quindi, sostituendo,

$$e^{\sqrt{x^x+x}}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) \to +\infty$$

Per il secondo limite, invece, utilizziamo le proprietà dei logaritmi:

$$\frac{\log(1+x)+\log(1-x)}{x^2} = \frac{\log\left((1+x)(1-x)\right)}{x^2} = \frac{\log(1-x^2)}{x^2} \sim -\frac{x^2}{x^2} \to -1$$