Esercitazione 15 Ottobre

Esercizi

Ricordiamo i seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{n\to+\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{a_n}-1}{a_n} = \log(a)$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(a_n+1)}{a_n} = 1$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+a_n)^k-1}{a_n} = k$$

Il limite notevole $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1$ si può dimostrare con i seguenti passaggi:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{b}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log\left(n^{\frac{b}{n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{b\log(n)}{n}} \to e^0 = 1$$

Infatti per i confronti fra infiniti vale $\lim_{n\to+\infty} \frac{b\log(n)}{n} = 1$.

Esercizio: Individuare i limiti delle seguenti successioni:

$$\frac{5-4^n}{1+8^n}; \quad \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+3n+2}-5n}; \quad \frac{n^2+(-1)^n}{2n^2+3n+1}; \quad n^2\left(\sqrt[3]{n^3+8}-n\right); \quad \frac{n^2-1-n}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n}}$$

Soluzione:

$$\frac{5-4^n}{1+8^n} = \frac{4^n\left(\frac{5}{4^n}-1\right)}{8^n\left(\frac{1}{8^n}+1\right)} \to 0$$
$$\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+3n+2}-5n} = \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}-5\right)} \to \frac{2}{1-5} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{n^2+(-1)^n}{2n^2+3n+1} = \frac{n^2\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} \to \frac{1}{2}$$

$$n^2\left(\sqrt[3]{n^3+8}-n\right)\cdot\frac{\left(\left(\sqrt[3]{n^3+8}\right)^2+n\left(\sqrt[3]{n^3+8}\right)+n^2\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{n^3+8}\right)^2+n\left(\sqrt[3]{n^3+8}\right)+n^2\right)} = \frac{n^2\left(n^3+8-n^3\right)}{n^2\left(\left(\sqrt[3]{1+\frac{8}{n^3}}\right)^2+\left(\sqrt[3]{1+\frac{8}{n^3}}\right)+1\right)}$$

$$\sim \frac{8n^2}{3n^2} \to \frac{8}{3}$$

$$\frac{n^2-1-n}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n}} = \frac{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)} \to +\infty$$

Si noti come nel primo esercizio si sia ottenuta la convergenza a zero poiché $\frac{4^n}{8^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$. Mentre per calcolare il quarto limite notevole si è utilizzata la scomposizione della differenza di cubi $x^3-1=(x^2+x+1)$. In generale, se si hanno dei limiti di frazioni algebriche si possono considerare sempre i termini di grado massimo. Qualora dovesse essere che il denominatore ha grado maggiore, il limite della successione è 0; viceversa, il limite è $\pm\infty$, mentre se il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore, il limite risulta uguale al rapporto tra i coefficienti dei termini di grado massimo.

Esercizio: Individuare i limiti delle seguenti successioni:

$$\frac{n^3+1}{n-2n^2}; \quad \frac{3n}{\sqrt{n}+\sqrt{n^3-2}}; \quad \frac{n-4n^3}{n^2+3n^3}; \quad \frac{n^2+\sqrt{1-n^3}}{2-\sqrt{1+5n^4}}$$

Soluzione:

$$\frac{n^3+\cancel{1}}{\cancel{n}-2n^2} \to -\infty \quad \frac{3n}{\cancel{\sqrt{n}}+\sqrt{n^3-\cancel{2}}} \to 0 \quad \frac{\cancel{n}-4n^3}{\cancel{n^2}+3n^3} \to -\frac{4}{3} \quad \frac{n^2+\cancel{\sqrt{1-n^3}}}{\cancel{2}-\sqrt{\cancel{1}+5n^4}} \to -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Qualora ci dovessero essere delle radici e i gradi corrispondessero, può essere essenziale ricorrere alla razionalizzazione.

Esercizio: Individuare i limiti delle seguenti successioni:

$$\sqrt{n^2-3n}-n \qquad \sqrt{3+2n}-\sqrt{2+n}$$

Soluzione:

$$\left(\sqrt{n^2-3n}-n\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{n^2-3n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2-3n}+n\right)}=\frac{\cancel{n^2}-3n-\cancel{n^2}}{\left(\sqrt{n^2-\cancel{3n}}+n\right)}\to-\frac{3}{2}$$

$$\left(\sqrt{3+2n}-\sqrt{2+n}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{3+2n}+\sqrt{2+n}\right)}{\left(\sqrt{3+2n}+\sqrt{2+n}\right)}=\frac{\cancel{3}+2n-\cancel{2}-n}{\left(\sqrt{\cancel{3}+2n}-\sqrt{\cancel{2}+n}\right)}\to+\infty$$

Sfruttando i limiti notevoli si possono svolgere i seguenti esercizi:

Esercizio: Individuare i limiti delle seguenti successioni:

$$\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)\sin\left(\frac{5}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}\qquad\frac{\sin^2\left(\frac{3}{n}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\qquad n^4\left(1-2\cos\left(\frac{1}{n}\right)+\cos^4\left(\frac{1}{n}\right)\right)\qquad\frac{n^3}{4}\left(2\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{2}{n}\right)\right)$$

Soluzione:

$$\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{5}{n}\right)}{\frac{5}{n}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{5}{n}\cdot\frac{n^2}{1}\to 10$$

$$\frac{\sin^2\left(\frac{3}{n}\right)}{\left(\frac{3}{n}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{n}{1}\right)^2\to 9$$

$$\frac{\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2}{\frac{1}{n^4}}\to\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

nell'ultimo le strategie utilizzate non funzionano, come spiegheremo meglio in seguito. Va ricordata la formula: $\sin(2n)=2\sin n\cos n$.

$$\frac{n^3}{4}\left(2\sin\left(\frac{1}{n}\right)-2\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{2}{4}\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\frac{\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n^2}}\to\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Come per le frazioni algebriche, anche in questo caso vi sono metodi che velocizzano i passaggi algebrici nel calcolo dei limiti, si può infatti considerare i limiti asintotici. Possiamo perciò adottare le seguenti sostituzioni, considerando sempre a_n una qualunque successione infinitesima.

$$\sin\left(a_n\right)\sim a_n\quad 1-\cos\left(a_n\right)\sim\frac{a_n^2}{2}\quad e^{a_n}-1\sim a_n\quad\log\left(1+a_n\right)\sim a_n\quad a^{a_n}-1\sim\log(a)a_n$$

Se ciò viene svolto per il primo limite dell'esercizio precedente, la soluzione risulta più facilmente:

$$\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)\sin\left(\frac{5}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\left(\frac{5}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 10$$

notiamo nuovamente come questo inizialmente non ci aiuti nel caso dell'ultimo esercizio:

$$\frac{n^3}{4}\left(2\cdot\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right) \to +\infty\cdot 0$$

Esercizio: Individuare i limiti delle seguenti successioni:

$$\frac{1-e^{\frac{3}{n}}}{\sin\frac{2}{n}} \qquad \log\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{n^2}{3n+1} \qquad \frac{e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{2}{n}}}{\log\left(1+\frac{3}{n}\right)}$$

Soluzione: Risolviamo i limiti sfruttando i limiti asintotici:

$$\frac{1-e^{\frac{3}{n}}}{\sin\frac{2}{n}} \sim \frac{\frac{3}{n}}{\frac{2}{n}} = \frac{3}{n}\cdot\frac{n}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\log\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{n^2}{3n+1} \sim \frac{2}{n}\cdot\frac{n^2}{3n+1} = \frac{2n^2}{3n^2+\cancel{n}} \to \frac{2}{3}$$

$$\frac{e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{2}{n}}}{\log\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{e^{\frac{1}{n}}\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)}{\log\left(1+\frac{3}{n}\right)} \sim \frac{e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}} \to 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Risolviamo ora alcuni esercizi relativi al seguente limite:

$$(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \to e$$

Esercizio: Individuare i limiti delle seguenti successioni:

$$\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n \qquad \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{3n} \qquad \left(1-\frac{2}{n}\right)^{2n-1} \qquad \left(1+\frac{3}{2n}\right)^{n-1}$$

Soluzione:

$$\left(\frac{(n+3)+(2-3)}{n+3}\right)^n = \left[\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^{-(n+3)}\right]^{-\frac{n}{n+3}} \sim e^{-\frac{n}{n+3}} \to e^{-1}$$

$$\left(\frac{(n+2)+(-1-2)}{n+2}\right)^{3n} = \left[\left(1-\frac{3}{n+2}\right)^{-\frac{n+2}{3}}\right]^{-\frac{3\cdot(3n)}{n+2}} \to e^{-9}$$

$$\left[\left(1-\frac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}\right]^{-\frac{2\cdot(2n-1)}{n}} \to e^{-4}$$

$$\left[\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{\frac{2n}{3}}\right]^{\frac{3\cdot(n-1)}{2n}} \to e^{\frac{3}{2}}$$

Ricordiamo ora lo sviluppo del fattoriale:

$$\begin{aligned} n! &= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 \\ &= n\cdot(n-1)! \end{aligned}$$

Esercizio: Si individuino i limiti delle seguenti successioni:

$$\frac{n!}{(n+1)!} \qquad \frac{n!}{n^n}$$

Soluzione:

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 1$$

Per il secondo basta valutare l'ordine degli infiniti.

$$\frac{n!}{n^n} \to 0$$

Se si volesse davvero valutare bene il secondo limite dell'esercizio sopra, bisognerebbe utilizzare il criterio del rapporto.

Teorema (Criterio del rapporto)**.** *Sia a_n una successione a termini positivi. Sia*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a$$

Se $a \in [0,1)$, allora la successione a_n converge a zero. Se $a \in (1,+\infty)$, allora la successione diverge a $+\infty$

Esercizio: Calcola i limiti delle seguenti successioni:

$$\frac{(3n)!}{(n!)^3} \qquad \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}}$$

Soluzione: Si utilizza il criterio del rapporto:

$$\frac{(3(n+1)!)!}{((n+1)!)^3} \cdot \frac{(3n)!}{(n!)^3} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{(3n)!}}{((n+1)n!)^3} \cdot \frac{(n!)^3}{\cancel{(3n)!}} =$$
$$= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(n!)^3}{((n+1)n!)^3} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{(n!)^3}}{(n+1)^3\cancel{(n!)^3}} \to 27$$
$$\frac{(n+1)!}{\sqrt{(2(n+1))!}} \cdot \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} = \frac{(n+1)\cancel{n!}}{\sqrt{(2n+2)(2n+1)\cancel{2n!}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{(2n)!}}}{\cancel{n!}} = \frac{(n+1)}{\sqrt{(2n+2)(2n+1)}} \to \frac{1}{2}$$

perciò la prima successione diverge a $+\infty$ mentre la seconda converge a zero.

Fino a qui si sono considerati limiti con successioni a_n che erano frazioni algebriche nell'incognita n. Si possono però considerare altre successioni infinitesime a_n.

Esercizio: Individuare i limiti della seguente successione:

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)\left(e^{\frac{3n^2}{4n+5}-1}\right)}{\log\left(1+\frac{5}{n!}\right)}$$

Soluzione:

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)\left(e^{\frac{3n^2}{4n+5}-1}\right)}{log\left(1+\frac{5}{(n+1)!}\right)} \sim \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{3n^2}{4n+5} \cdot \frac{n!}{5} = \frac{3n^2\cancel{(n!)}}{(4n+5)(n+1)\cancel{n!}} \to \frac{3}{4}$$

Discutiamo ora il comportamento del limite di una successione al variare di un parametro α.

Esercizio: Sia $\alpha > 0$. Si discuta il limite della successione:

$$n^3 \frac{\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{\log\left(1+\frac{2}{3n^2+1}\right)}$$

al variare di α.

Soluzione: Utilizzando i limiti asintotici si arriva alla seguente espressione:

$$n^3 \frac{\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{\log\left(1+\frac{2}{3n^2+1}\right)} \sim n^3 \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{2}{3n^2+1}} = \frac{n^3(3n^2+1)}{2n^\alpha} \sim n^{5-\alpha}$$

Per tale ragione si hanno le seguenti casistiche:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{5-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \in (0,5) \\ 1 & \text{se } \alpha = 5 \\ 0 & \text{se } \alpha \in (5,+\infty) \end{cases}$$