Esercitazione 29 Ottobre

Ripasso delle lezioni

Ripassiamo alcune definizioni preliminari:

Definizione. *Una funzione $f(x)$ si dice continua in x_0 se*

$$\lim_{x \to x_0} = f(x_0)$$

Inoltre una funzione si dice continua in un intervallo $[a, b]$ se è continua in ogni punto di $[a, b]$. Ovviamente i limiti per $x_0 = a$ e $x_0 = b$, sono da intendersi solo destro e sinistro. Viceversa, se una funzione non è continua in un suo punto x_0 allora x_0 è un punto di discontinuità per f

Definizione. *Ci sono diverse tipologie di discontinuità:*

(a) x_0 è un punto di discontinuità eliminabile se esiste il limite di f in x_0 e risulta:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

(b) x_0 è un punto di discontinuità di prima specie (o salto) se esistono finiti il limite destro e sinistro di $f(x)$ in x_0 e si ha

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_o^+} f(x)$$

(c) x_0 è un punto di discontinuità di seconda specie se almeno uno tra il limite destro e sinistro non esiste oppure è infinito.

Sia I un intervallo e sia $f(x)$ una funzione definita nell'insieme $I - \{x_0\}$. Se esiste il limite

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

allora, la funzione $\overline{f}(x)$ così definita:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq x_0 \\ l & \text{per } x = x_0 \end{cases}$$

si chiama prolungamento per continuità di $f(x)$ in x_0.

Esercizi

Esercizio: Dire se la funzione $f(x) = \frac{1}{x-2}$ è continua in $x_0 = 2$.

Soluzione: Non essendo definita la funzione nel punto $x_0 = 2$, non può essere continua, non essendoci il valore $f(2)$.

Esercizio: Sia f una funzione definita in $(0, 2)$ dalla seguente espressione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Determina l'insieme dei punti di discontinuità e di continuità.

Soluzione: Essendo f una funzione definita a partire da funzioni continue si ha che sicuramente f è continua negli intervalli $(0, 1)$ e $(1, 2)$. Bisogna perciò valutare solo la continuità nel punto $x_0 = 1$. A tal proposito valutiamo il limite destro e sinistro per $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} 1 = 1$$
$$\lim_{x \to 1^-} x = 1$$

inoltre valendo proprio $f(1) = 1$, si può concludere che la funzione è continua anche in 1 e quindi in tutto l'intervallo $(0, 2)$. Può aiutare a far chiarezza osservare il grafico della funzione.

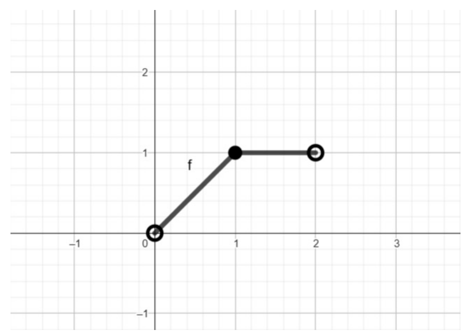

Grafico di $f(x)$

Esercizio: Sia f una funzione definita in $(0, 2)$ dalla seguente espressione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{se } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Determina l'insieme dei punti di discontinuità e di continuità.

Soluzione: Procedendo come nell'esempio sopra, si valuta la continuità in $x_0 = 1$ e si ottiene il seguente risultato

$$f(1) = 2 \neq \begin{cases} \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2 = 2 \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1 \end{cases}$$

perciò la funzione non è continua in 1, ma negli intervalli $(0, 1)$ e $(1, 2)$. Inoltre, in 1 si ha una discontinuità di prima specie.

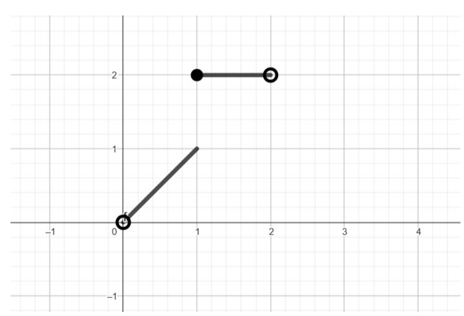

Grafico di $f(x)$

Esercizio: Sia x_0 un numero reale e sia f una funzione definita dalla seguente espressione:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \leq x_0 \\ c & \text{se } x > x_0 \end{cases}$$

Quali condizioni deve rispettare la funzione per essere continua in tutto $\mathbb{R}$?

Soluzione: La funzione è continua in tutti i valori di $\mathbb{R} - \{x_0\}$. Bisogna solo verificare che il limite destro e sinistro in x_0 corrispondano:

$$ax_0 + b = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = c$$

E quindi deve valere che $c = ax_0 + b$. Se tale condizione è soddisfatta la funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$, viceversa ha una discontinuità di prima specie in $x = x_0$

Esercizio: Studiare la continuità della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Soluzione: Lo stesso discorso fatto per la funzione precedente vale anche in questo caso. Si consideri perciò il limite destro e sinistro della funzione

$$\lim_{x \to x_0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = +\frac{\pi}{2}$$

La funzione, dunque, è discontinua e presenta una discontinuità di prima specie.

Esercizio: Si dimostri che la funzione $f(x) = |x|$ è continua.

Soluzione: Basta osservare che

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

poi si procede come nel caso sopra.

Esercizio: Dimostra che la funzione f così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{x} & \text{se } x \in (-1, 0) \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \in (0, 1) \end{cases}$$

è continua in $(-1,1)-\{0\}$ e ammette prolungamento continuo in tutto l'intervallo.

Soluzione: La funzione è continua in $(-1,1)-\{0\}$ poichè definita a partire da composizioni di funzioni continue. Infine valutiamo il limite destro e sinistro di $f(x)$ con $x \to 0$. Se i due limiti sono uguali, per prolungare f in maniera continua basterà definire $\overline{f}$ in 0 uguale al valore dei due limiti.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

Allora si può definire:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (-1,0)\cup(0,1) \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Esercizio: Studia la continuità della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)\cdot 2^{\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Soluzione: Valutiamo il limite:

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\frac{2^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Allora la funzione è discontinua ed in 0 ha una discontinuità di seconda specie.

Esercizio: Verificare che la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$$

è continua solo nel punto $x_0 = 0$.

Soluzione: Per dimostrare la continuità in 0 si ricorre al teorema dei carabinieri esteso alle funzioni.

$$-x^2 \leq f(x) \leq x^2$$
$$\lim_{x\to 0} -x^2 \leq \lim_{x\to 0} f(x) \leq \lim_{x\to 0} x^2$$
$$0 \leq \lim_{x\to 0} f(x) \leq 0$$

e perciò il limite esiste e vale $f(0) = 0$. Infine si può dimostrare che preso un qualsiasi altro punto $x_0 \neq 0 \in \mathbb{R}$ la funzione è discontinua. Per farlo si può ricorrere al teorema di permanenza del segno. Vi sono infatti due casi: o $x_0 \in \mathbb{Q}$ o $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Supponiamo, ad esempio, che $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ allora, $f(x_0) = -x_0^2 < 0$, quindi dovrebbe esistere un intervallo contenente x_0 nel quale la funzione è sempre negativa, ma non vi è alcun intervallo che soddisfa questa condizione in quanto $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ e in ogni valore di $\mathbb{Q}$ la funzione è positiva.

Esercizio: Determina a e b in modo che la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$ secondo la seguente espressione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin(x) + b & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos(x) & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

sia continua in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Soluzione: Dalle condizioni sui limiti destri e sinistri si arriva al seguente sistema:

$$\begin{cases} -1 = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \sin(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} a\sin(x) + b = -a + b \\ a + b = \lim_{x \to +\frac{\pi}{2}^-} a\sin(x) + b = \lim_{x \to +\frac{\pi}{2}^+} \cos(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = -a + b \\ a + b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -b \\ -1 = 2b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Esercizio: Determina degli intervalli per α e β in modo tale che la seguente funzione sia continua in $[-1, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin^2(x) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ |x|^\beta \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$$

Soluzione: Affinché la funzione sia continua, deve valere

$$0 = \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \sin^2(x) \sim x^\alpha \cdot x^2 \sim x^{\alpha+2}$$

Perciò, affinchè il limite tenda effettivamente a zero, deve valere $\alpha + 2 > 0 \Rightarrow \alpha > -2$. Inoltre

$$0 = \lim_{x \to 0^-} \left|x^\beta\right| \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) < \lim_{x \to 0^-} \left|x^\beta\right|$$

quest'ultimo tende a zero solo quando $\beta > 0$.

Ripassiamo ora gli enunciati dei teoremi importanti visti in classe:

Teorema (Teorema dell'esistenza degli zeri)**.** *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, allora esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Teorema (Teorema dell'esistenza dei valori intermedi). *Sia f una funzione continua in un intervallo $[a, b]$, allora f ammette tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Teorema (Teorema di Weierstrass). *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora $f(x)$ assume minimo e massimo in $[a, b]$.*

Grazie ai seguenti teoremi si possono dimostrare i seguenti esercizi.

Esercizio: Sia $f : [a, b] \to [a, b]$ una funzione continua. Allora esiste un punto unito $x_0 \in [a, b]$, cioè un punto tale che $f(x_0) = x_0$.

Soluzione: Definiamo una nuova funzione g a partire da f nel seguente modo:

$$g(x) = x - f(x)$$

Questa funzione agli estremi dell'intervallo vale:

$$g(a) = a - f(a) \quad g(b) = b - f(b)$$

Se uno dei due valori dovesse essere zero, allora si è trovato il punto x_0 cercato; viceversa, poiché $f(x) \in [a, b]$, allora $g(a) < 0$ e $g(b) > 0$ e applicando il teorema degli zeri alla funzione g si trova un valore x_0 tale che $g(x_0) = 0$. Pertanto si ha che $0 = g(x_0) = x_0 - f(x_0)$, ma allora $f(x_0) = x_0$ e quindi x_0 è il valore cercato.

Esercizio: Sia $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polinomio di grado dispari. Verifica che esso ammette una radice reale, ossia che $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $P(x_0) = 0$

Esercizio: Sia $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polinomio di grado pari. Se $a_0 < 0$ e $a_n > 0$, $P(x)$ ammette almeno una radice positiva e una negativa.

Esercizio: Sia $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polinomio di grado pari. Se $a_0 > 0$ e $a_n < 0$, $P(x)$ ammette almeno una radice positiva e una negativa.

Esercizio: Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ non necessariamente chiuso né limitato. Sia $f(x)$ continua in tale intervallo. Se $f(x)$ tende a $+\infty$ per x tendente agli estremi dell'intervallo I, allora esiste il minimo di $f(x)$ su I

Esercizio: Sia $f(x) = [x]$, dove $[x]$ indica il più grande intero minore o uguale a x. Discutere la continuità di f.