Esercitazione 26 Novembre

Ricordiamo alcuni sviluppi di Taylor.

Funzione	**Sviluppo di Taylor**	**Forma in Sommatoria**
e^x	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$
$\sin x$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos x$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \quad \|x\|<1$
$\frac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+x^3+\cdots$	$\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad \|x\|<1$
$\arctan x$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \|x\|\leq 1$
$\sinh x$	$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cosh x$	$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$(1+x)^\alpha$	$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!}+\cdots$	$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n, \quad \|x\|<1$
$\tan x$	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots$	

Esercizio:[dal compito 14/02/2022] Svolgere il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh(x)-\ln(\cos(x))}{\sqrt{1+x^4}-1}$$

Soluzione: Essendo una forma indeterminata, ricorriamo agli sviluppi di Taylor. Inoltre, per maggior chiarezza rispetto all'ordine fino al quale sviluppare, svolgiamo il denominatore, in quanto coinvolge una sola funzione. Sviluppiamo, perciò, la funzione $\sqrt{1+x^4}$:

$$\sqrt{1+x^4}=1+\frac{x^4}{2}-\frac{x^8}{8}+o(x^8) \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{1+x^4}-1=\frac{x^4}{2}+o(x^4)$$

Di conseguenza sappiamo che bisogna sviluppare fino a $o(x^4)$. Perciò, per quanto riguarda il numeratore, utilizziamo gli sviluppi di Taylor fino a x^4:

$$\cosh(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$
$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

Sviluppiamo, ora, il logaritmo $\ln(\cos(x))$ usando la variabile ausiliaria t:

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(t^3) \quad \text{con } t=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

Pertanto otteniamo:

$$\ln(\cos(x)) = \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2}{2} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

Scriviamo il numeratore:

$$1 - \cosh(x) - \ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\right) + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{12} + o(x^4) = \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cosh(x) - \ln(\cos(x))}{\sqrt{1+x^4} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{24} + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \frac{1}{12}$$

Esercizio:[dal compito 13/06/2022] Svolgere il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^x - \sin(x) + x}{x^4}$$

Soluzione: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni coinvolte:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$e^{\sin(x)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

Sostituendo questi sviluppi nel numeratore dell'espressione data:

$$e^{\sin(x)} - e^x - \sin(x) + x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + x + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^4}{8} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) = -\frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

Ora possiamo calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^x - \sin(x) + x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{6}$$

Esercizio:[dal compito 13/06/2022] Svolgere il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} n^4 \left[\sin\frac{1}{n^4} + \cosh\frac{1}{n^2} + \left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{\sqrt{2}} - 2\right]$$

Soluzione: Iniziamo con gli sviluppi di Taylor delle funzioni coinvolte fermandoci a $o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{1}{n^4}\right) &= \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
\cosh\left(\frac{1}{n^2}\right) &= 1 + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\
\left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{\sqrt{2}} &= 1 + \sqrt{2}\cdot\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)
\end{aligned}$$

Ora possiamo scrivere lo sviluppo dell'espressione fra parentesi quadre

$$\sin\frac{1}{n^4} + \cosh\frac{1}{n^2} + \left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{\sqrt{2}} - 2 = \left(\frac{1}{n^4}\right) + \left(1+\frac{1}{2n^4}\right) + \left(1+\sqrt{2}\cdot\frac{1}{n^4}\right) - 2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\left(\frac{1}{n^4} + \frac{1}{2n^4} + \sqrt{2}\cdot\frac{1}{n^4}\right) + o\left(\frac{1}{n^4}\right) = \frac{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Pertanto, il limite diventa:

$$\lim_{n\to+\infty} n^4 \frac{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) = \frac{3}{2} + \sqrt{2}.$$

Ricordiamo ora una definizione importante usata nei limiti sopra.

Definizione ("o-piccolo")**.** *Siano f e g due funzioni definite in un intorno di un punto x_0, con l'eventuale eccezione di x_0. Inoltre si supponga che queste funzioni siano non nulle per $x \neq x_0$. Allora si dice che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$, oppure che $f(x)$ è un "o-piccolo" di $g(x)$, per $x \to x_0$, se $g(x)$ è una funzione infinitesima per $x \to x_0$ e*

$$\lim_{x\to x_0}$$

Ricordiamo alcune proprietà dell'o-piccolo dimostrandole.

Esercizio: Dimostrare le seguenti proprietà con n e $m \in \mathbb{N}$

$$o(x^n)o(x^m) = o(x^{n+m})$$

$$o(x^n + o(x^n)) = o(x^n)$$

Soluzione:

1. Chiamiamo $f(x) = o(x^n)$ e $g(x) = o(x^m)$ allora per definizione vale la seguente proprietà $\frac{f(x)}{x^n} \to 0$ e $\frac{g(x)}{x^m} \to 0$ e allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^{m+n}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} \cdot \frac{g(x)}{x^m} = 0$$

e questo dimostra che $f(x)g(x) = o(x^n)o(x^m) = o(x^{n+m})$

2. Chiamiamo $f(x) = o(x^n + o(x^n))$, allora $\frac{f(x)}{x^n+o(x^n)} \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n + o(x^n)} \cdot \frac{x^n + o(x^n)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n + o(x^n)} \cdot \left(\frac{x^n}{x^n} + \frac{o(x^n)}{x^n}\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

Esercizio: Calcola lo sviluppo di Taylor fino al quarto ordine della funzione $\ln^3(x+1)$ in $x_0 = 0$

Soluzione: Conoscendo lo sviluppo di $\ln^(x+1)$ si può semplicemente considerare il suo cubo

$$\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 = x^3 + 3\,(x)^2\left(-\frac{x^2}{2}\right) + o(x^4) = x^3 - \frac{3}{2}x^4 + o(x^4)$$