

LEZIONE 11

IL MOMENTO ANGOLARE

ELISABETTA COMINI

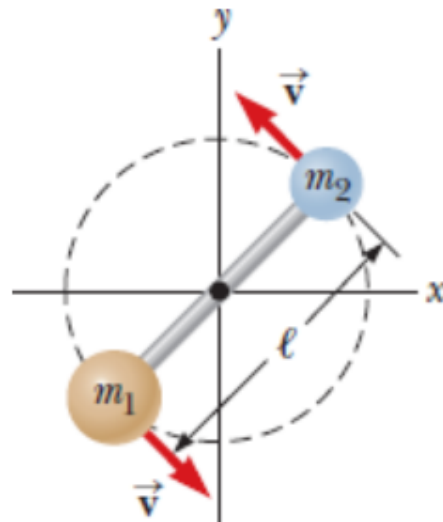
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA –2024/25

ESERCIZI CAPITOLO 11

3. Dati i due vettori $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j}$ e $\vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{j}$ si trovino (a) $\vec{A} \times \vec{B}$ e (b) l'angolo tra \vec{A} e \vec{B} .

7. Se $|\vec{A} \times \vec{B}| = \vec{A} \cdot \vec{B}$, qual è l'angolo tra \vec{A} e \vec{B} .

11. Un'asta rigida leggera lunga, $l = 1.00$ m ruota nel piano xy (Fig. P11.11) intorno al suo asse di simmetria. Due particelle di massa $m_1 = 4.00$ kg e $m_2 = 3.00$ kg sono attaccate ai suoi estremi. Si determini il momento angolare del sistema rispetto all'origine, se la velocità delle particelle è 5.00 m/s.



16. Problema di riepilogo. Un pendolo conico consiste di una massa m che sta ruotando su un'orbita circolare orizzontale, come in Figura P11.16. Durante il moto, l'angolo θ fra il filo di lunghezza l e la verticale rimane costante. Si verifichi che il momento angolare della massa rispetto al centro dell'orbita ha modulo

$$L = \left(\frac{m^2 g \ell^3 \sin^4 \theta}{\cos \theta} \right)^{1/2}$$

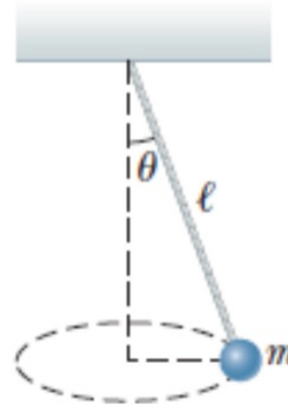


FIGURA P11.16

19. La posizione di una particella di massa 2.00 kg, in funzione del tempo, è individuata dal vettore $\vec{r} = (6.00\hat{i} + 5.00t\hat{j})$ m. Si determini, in funzione del tempo, il momento angolare della particella rispetto all'origine.

15. Problema di riepilogo. Un proiettile di massa m è sparato con velocità iniziale \vec{v}_i formante un angolo θ rispetto all'orizzontale, come mostrato in Figura P11.15. Il proiettile risente dell'attrazione gravitazionale terrestre. Si calcoli il momento angolare del proiettile rispetto all'origine del sistema di coordinate (a) quando il proiettile si trova nell'origine (b) quando si trova nel punto più alto della sua traiettoria (c) un attimo prima che colpisca il terreno. (d) Qual è il momento delle forze che causa la variazione del momento angolare del proiettile?

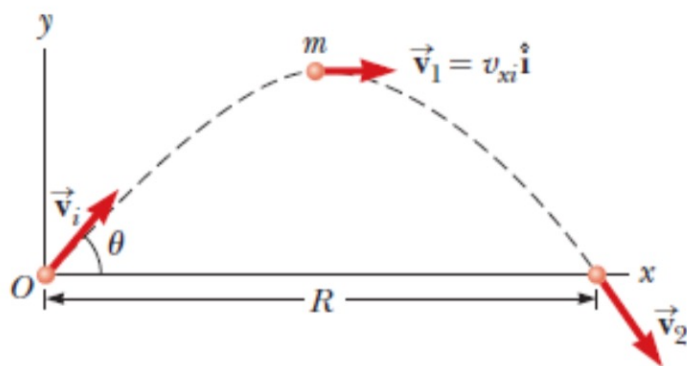


FIGURA P11.15

27. Un punto materiale di massa 0.400 kg è fissato all'estremità (proprio sulla tacca che indica 100 cm) di un metro rigido di massa 0.100 kg . Il metro sta ruotando, con attrito trascurabile, su un piano orizzontale liscio con velocità angolare di 4.00 rad/s . Si determini il momento angolare del sistema se il metro è in rotazione attorno ad un asse che è perpendicolare al piano e che passa (a) per la tacca che indica 50.0 cm e (b) per la tacca che indica 0 cm .

21. Una palla di massa m è fissata all'estremo di un'asta portabandiera che è solidale nel punto P con la parete di un edificio (Fig. P11.21). La lunghezza dell'asta è l e θ è l'angolo che l'asta forma con il piano orizzontale. Si supponga che la palla, non fissata a dovere sull'asta, ad un certo istante inizi a cadere soggetta all'accelerazione di gravità $-\hat{g}\hat{j}$. (a) Si determini, in funzione del tempo, il momento angolare della palla rispetto al punto P . (b) Per quale motivo fisico il momento angolare varia nel tempo? (c) Di quanto cambia nell'unità di tempo?

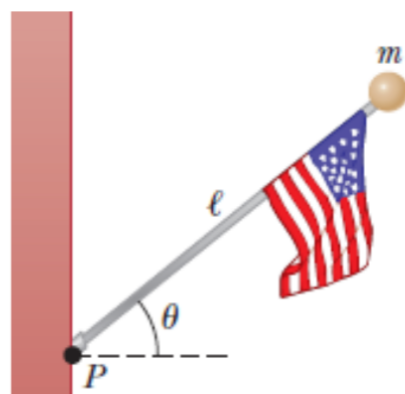


FIGURA P11.21

28. La distanza tra i centri delle ruote di una moto è 155 cm. Il centro di massa del veicolo e del guidatore si trova ad 88.0 cm dal suolo, in direzione orizzontale ed a metà strada tra le due ruote. Si assuma che la massa di ciascuna ruota sia trascurabile rispetto a quella del motociclista. Tenendo presente che il motore mette in moto solamente la ruota posteriore, quale accelerazione in direzione orizzontale della moto farà sì che la ruota anteriore si impenni?

30. Un disco con momento di inerzia I_1 ruota con velocità angolare ω_i attorno ad un asse verticale privo di attrito. Un secondo disco, con momento d'inerzia I_2 , che inizialmente non ruota, cade sul primo disco (Fig. P11.30). Poiché le superfici di contatto sono ruvide, i due raggiungono la stessa velocità angolare ω_f . (a) Si calcoli ω_f . (b) Si calcoli il rapporto tra l'energia cinetica finale e quella iniziale.

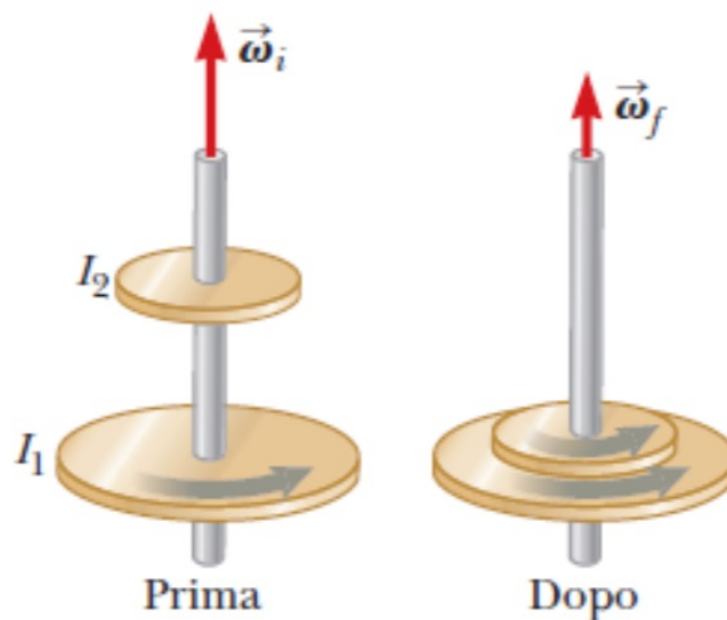
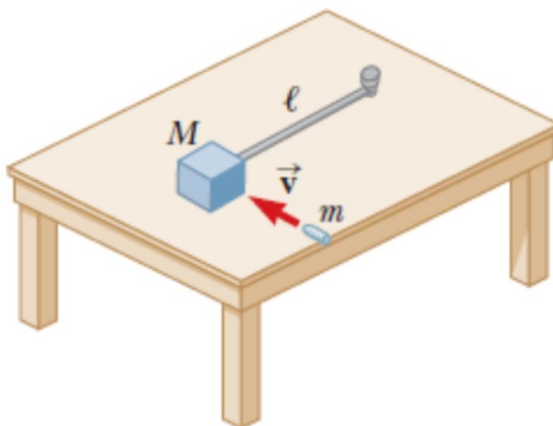


FIGURA P11.30

31. Una giostra di raggio $R = 2.00$ m ha un momento di inerzia $I = 250$ kg \cdot m² e sta ruotando a 10.0 giri/min attorno ad un asse verticale privo di attrito. Un bambino di 25.0 kg salta sulla giostra nella direzione dell'asse e si siede sul bordo. Si determini il nuovo valore della velocità angolare della giostra.

33. Una donna di massa 60.0 kg sta sul bordo sinistro di una piattaforma orizzontale rotante di momento d'inerzia $500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e di raggio 2.00 m . Il sistema è inizialmente fermo e la piattaforma può ruotare senza attrito intorno ad un asse fisso verticale passante per il suo centro. La donna incomincia a camminare lungo il bordo in senso orario (visto dall'alto) ad una velocità costante di 1.50 m/s rispetto al suolo. (a) Per il sistema costituito dalla donna e dalla piattaforma si conserva l'energia meccanica? (b) Si conserva la quantità di moto? (c) Si conserva il momento angolare? (d) In quale verso e con quale velocità angolare ruoterà la piattaforma? (e) Quanta energia chimica del corpo nella donna si è convertita in energia meccanica per mettere in moto se stessa e la piattaforma?

37. Un blocco di legno di massa M , fermo su un piano orizzontale liscio, è fissato ad un'asta rigida di lunghezza l e di massa trascurabile (Fig. P11.37). L'asta è incernierata all'altra estremità. Un proiettile di massa m , che possiede una velocità v , parallela alla superficie del piano e normale all'asta, colpisce il blocco, rimanendovi conficcato. Si determinino (a) il momento angolare del sistema costituito dal blocco e dal proiettile rispetto ad un asse verticale passante per il punto in cui l'asta è incernierata e (b) la frazione dell'energia cinetica iniziale che durante l'urto si è convertita in energia interna.



40. *Perché ciò è impossibile?* Una stazione spaziale, di forma simile ad una gigantesca ruota, ha un raggio $r = 100 \text{ m}$ e momento di inerzia $5.00 \times 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Un equipaggio di 150 astronauti vive sul bordo dell'astronave dove, a causa del fatto che la stazione spaziale è mantenuta in rotazione, è sottoposto ad una accelerazione uguale a g (Fig. P11.29). Uno scienziato, per assicurarsi che il valore di g venga correttamente mantenuto, lancia ogni 15 minuti in aria una pallina e misura il tempo che essa impiega a cadere di un certo tratto. Una sera, 100 astronauti si muovono verso il centro dell'astronave per una riunione di lavoro, ma lo scienziato non può parteciparvi in quanto impegnato negli esperimenti che continuano a dare lo stesso risultato anche mentre è in corso la riunione.

42. Una nave spaziale si trova nello spazio vuoto. Essa è equipaggiata con un giroscopio di momento di inerzia uguale a $I_g = 20.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ rispetto al proprio asse. Il momento di inerzia della nave, rispetto allo stesso asse, è $I_s = 5.00 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. All'istante iniziale né il giroscopio né la nave possiedono moto rotatorio. Il giroscopio, in un tempo trascurabile, può essere posto in moto rotatorio alla velocità di 100 rad/s . Per quanto tempo deve essere posto in rotazione il giroscopio affinché la nave ruoti di 30.0° ?

44. Una corda di massa trascurabile, che passa attraverso una carrucola di massa trascurabile e priva di attrito, porta appeso ad un estremo un casco di banane di massa M ed all'altro una scimmia di uguale massa (Fig. P11.44). La scimmia risale lungo la corda tentando di acchiappare le banane. (a) Si valuti, rispetto all'asse della carrucola, il momento meccanico risultante agente sul sistema scimmia - corda - puleggia - banane. (b) Si determini, poi, il momento angolare totale del sistema sempre rispetto all'asse della carrucola e si descriva il moto del sistema. (c) La scimmia raggiungerà le banane?



49. Tre masse uguali sono fissate su un'asta rigida di massa trascurabile (Fig. P11.49). La sbarra è libera di ruotare in un piano verticale intorno ad un asse privo di attrito perpendicolare alla sbarra e passante per il punto P . All'istante iniziale l'asta, in quiete, è lasciata libera nella posizione orizzontale. Se m e d sono noti, si calcoli: (a) il momento d'inerzia del sistema (sbarretta più masse) rispetto all'asse di rotazione, (b) a $t = 0$, il momento della forza agente sul sistema, (c) a $t = 0$, l'accelerazione angolare del sistema e (d) a $t = 0$, l'accelerazione della massa 3. Si calcolino inoltre (e) l'energia cinetica massima del sistema, (f) la massima velocità angolare dell'asta, (g) il momento angolare massimo del sistema e (h) la velocità massima raggiunta dalla massa 2.

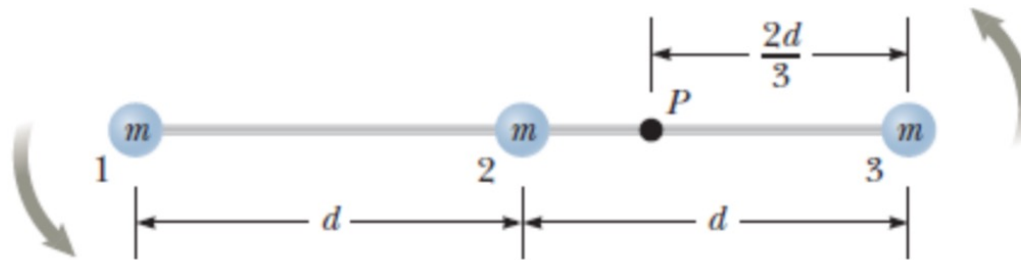


FIGURA P11.49

51. Un proiettile di massa m si muove verso destra con velocità v_i (Fig. P11.51a). Il proiettile colpisce e si attacca all'estremità superiore di una sbarra di massa M e di lunghezza d , inizialmente in quiete, che può ruotare intorno ad un asse, privo di attrito, passante per il suo centro O (Fig. P11.51b). Vogliamo calcolare la variazione relativa di energia cinetica del sistema dovuta all'urto. (a) Qual è il modello di analisi appropriato per descrivere l'urto? (b) Qual è, prima dell'urto, il momento angolare del sistema rispetto ad un asse passante per O ? (c) Quanto vale il momento di inerzia del sistema rispetto ad un asse passante per O dopo l'urto? (d) Se ω è la velocità angolare del sistema prima dell'urto, qual è la velocità angolare dopo l'urto? (e) Si calcoli la velocità angolare del sistema dopo l'urto in funzione delle quantità note. (f) Quanto vale l'energia cinetica del sistema prima dell'urto? (g) Quanto vale l'energia cinetica dopo l'urto? (h) Si calcoli la variazione relativa di energia cinetica a seguito dell'urto.

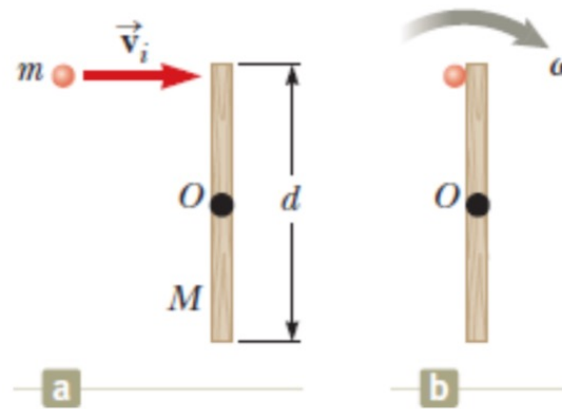


FIGURA P11.51

52. Un disco di massa $m = 50.0$ g, attaccato ad un filo passante per un piccolo foro, giace su un piano orizzontale, privo di attrito (Fig. P11.52); inizialmente la massa compie un moto circolare di raggio $r_i = 0.300$ m alla velocità $v_i = 1.50$ m/s. Il filo viene poi tirato molto lentamente verso il basso e il raggio della circonferenza diminuisce fino ad $r = 0.100$ m. (a) Qual è la velocità del disco quando si trova a percorrere la traiettoria di raggio più piccolo? (b) Si trovi la tensione del filo in tale situazione. (c) Quanto lavoro è stato fatto dalla mano per portare il disco sulla traiettoria di raggio 0.100 m?

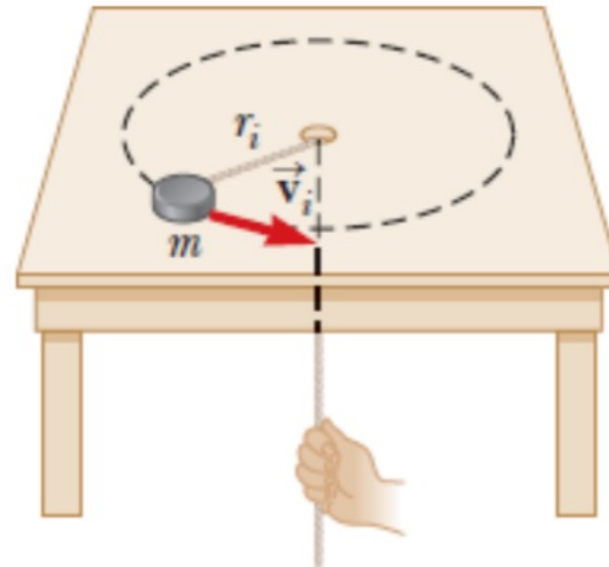
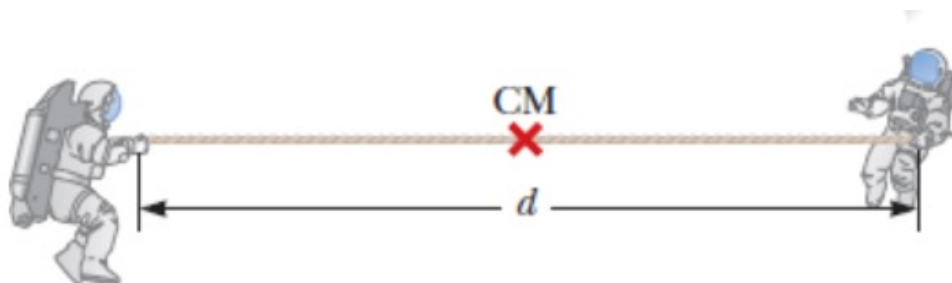


FIGURA P11.52 Problemi 52 e 53

55. Due astronauti (Fig. P11.55), ciascuno di massa 75.0 kg , sono collegati da un cavo di lunghezza 10.0 m e di massa trascurabile. Essi sono isolati nello spazio e orbitano attorno al loro centro di massa con una velocità di 5.00 m/s . Considerando gli astronauti come due punti materiali, si calcoli (a) il modulo del momento angolare del sistema costituito dai due astronauti e (b) l'energia cinetica del sistema. Tirando il cavo, uno degli astronauti riduce la distanza relativa a 5.00 m . Si determinino (c) il nuovo modulo del momento angolare del sistema, (d) i moduli delle velocità degli astronauti, (e) l'energia cinetica del sistema, (f) quanta energia chimica dell'astronauta si è convertita in energia meccanica del sistema nell'accorciare il cavo.



61. Un disco omogeneo è posto in rotazione intorno al suo asse di simmetria con velocità angolare ω_i e, successivamente, è appoggiato e abbandonato su un piano orizzontale scabro (Fig. P11.61). (a) Qual è la velocità angolare del disco una volta che si è instaurato il moto di puro rotolamento? (b) Si determini la frazione dell'energia cinetica persa dall'istante in cui il disco è stato rilasciato all'istante in cui inizia il moto di puro rotolamento. (c) Indicando con μ il coefficiente di attrito dinamico tra il disco e la superficie scabra, si calcoli quanto tempo occorre da quando il disco è stato appoggiato all'istante in cui si instaura il moto di puro rotolamento. (d) In tale intervallo di tempo, qual è stato lo spostamento orizzontale del disco?

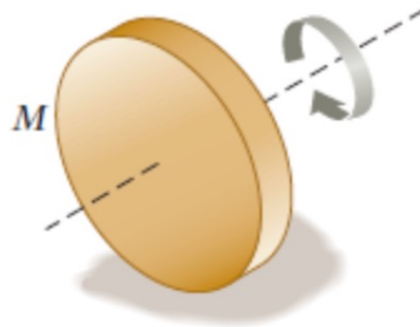
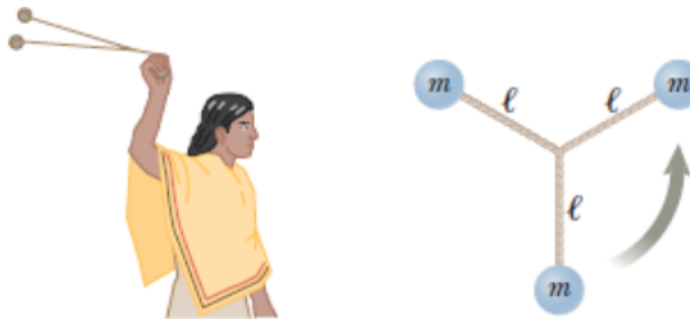


FIGURA P11.61

PER CASA...

57. I nativi americani usavano, per cacciare uccelli ed altri animali, uno strumento chiamato *bola*. Nella sua configurazione tipica, esso è costituito da tre pietre, ciascuna di massa m , fissate alle estremità di tre corde leggere di lunghezza l . Le altre estremità delle corde sono legate insieme a formare una Y. Il cacciatore tiene la bola per una delle pietre, facendo volteggiare le altre sopra la sua testa (Fig. P11.57a). Entrambe le pietre si muovono, con velocità v_o , su di un cerchio di raggio $2l$, giacente in un piano orizzontale. Quando la loro velocità è diretta verso la preda, il cacciatore molla l'estremità della bola che tiene in mano. Mentre la bola è in volo, acquista rapidamente una forma in cui l'angolo tra ciascuna fune e quella adiacente è 120° (Fig. P11.57b). La bola è inoltre soggetta alla forza di gravità, che ne determina il moto in direzione verticale e fa sì che il punto in cui sono unite le tre corde cada con l'accelerazione di gravità \vec{g} . Nel descrivere il moto orizzontale della bola, potete ignorare il suo moto verticale. In termini di m , l e v_o , si calcolino nell'istante in cui la bola viene lanciata (a) il modulo della quantità di moto, (b) la velocità orizzontale del centro di massa, (c) il momento angolare rispetto al centro di massa e (d) la velocità angolare della bola attorno al centro di massa quando ha acquistato la forma ad Y. Si calcolino l'energia cinetica della bola all'istante (e) in cui viene rilasciata dal cacciatore e (f) dopo che ha acquistato la sua forma ad Y. (g) Si discuta come le leggi di conservazione si applicano nell'evolversi della forma della bola. L'idea per questo problema è stata suggerita da Robert Beichner.



63. Un cubo omogeneo di lato $2a$ e di massa M scivola, a velocità costante \vec{v} , su un tavolo orizzontale, privo di attrito (Fig. P11.63a). Giunto alla fine del tavolo, il cubo urta contro un piccolo ostacolo ed inizia a ruotare attorno ad uno dei suoi spigoli come mostrato nella Figura P11.63b. Si trovi il valore minimo di \vec{v} per cui il cubo cade dal tavolo. (*Suggerimento: sul bordo il cubo compie un urto anelastico*).

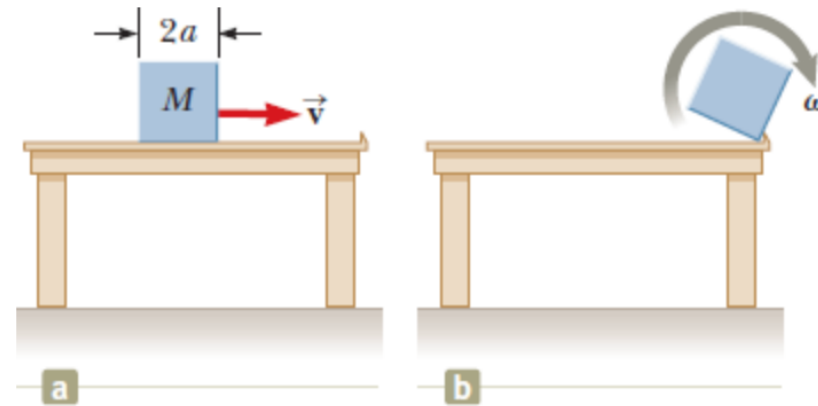


FIGURA P11.63

64. Un cubo di legno di lato $2a$ e di massa M è in quiete sopra un piano orizzontale. Il cubo può solo ruotare intorno al lato AB (Fig. P11.64). Un proiettile di massa m colpisce con velocità v ad altezza $4a/3$ la faccia opposta a quella $ABCD$. Se il proiettile rimane conficcato nel legno, si calcoli la velocità minima per la quale il cubo si ribalta cadendo sulla faccia $ABCD$. Si faccia l'ipotesi $m \ll M$.

