Esercitazione 17 Settembre

Ripasso delle lezioni

I numeri reali e l'assioma di completezza

Rivediamo assieme l'assioma di completezza mostrato in classe.

Assioma (Assioma di completezza). *Siano A e B due insiemi di numeri reali, non vuoti, tali che comunque si scelgano $a \in A$ e $b \in B$ risulti che*

$$a \leq b$$

Allora esiste almeno un numero reale c (detto elemento di separazione) tale che

$$a \leq c \leq b$$

qualunque siano $a \in A$ e $b \in B$.

Ripasso di insiemistica

Per indicare un qualsiasi insieme, solitamente si utilizzano le lettere maiuscole: A, B, C ecc. Per indicare invece gli elementi di un insieme si utilizzano le lettere minuscole: $a, b, c, \ldots, x, y$, ecc. Inoltre se x è un elemento di un insieme S allora si utilizza la seguente notazione:

$$x \in S$$

e si legge x "appartiene" a S. Viceversa se x non appartiene a S si usa il seguente simbolo $x \notin S$. Consideriamo poi S un insieme e P una proprietà su S. L'insieme degli elementi di S per cui vale la proprietà P si indica con

$$\{x \in S : P\}$$

(il simbolo ":" si legge "tale che"). Se una proprietà è falsa per tutti gli elementi di S allora essa determina l'*insieme vuoto*, che si indicare con il simbolo $\emptyset$.
Se X e Y sono due sottoinsiemi di S, la loro *unione* $(X \cup Y)$ è il sottoinsieme di S degli elementi che appartengono ad almeno uno degli insiemi:

$$X \cup Y = \{x \in S : x \in S \text{ oppure } x \in Y\}$$

.

L'*intersezione* $(X \cap Y)$ di X e Y invece è il sottoinsieme di S degli elementi che appartengono ad entrambi gli insiemi:

$$X \cap Y = \{x \in S : x \in X \text{ e } x \in Y\}$$

Si dice che X è *contenuto* in Y, o equivalentemente è un *sottoinsieme* di Y, se ogni elemento di X è anche un elemento di Y, si usa inoltre la seguente notazione:

$$X \subseteq Y \Longleftrightarrow (x \in X \Longrightarrow x \in Y)$$

Inoltre si diche che X è *contenuto strettamente* in Y se $X \subset Y$ e se $X \neq Y$ e si scrive $X \subset Y$. Per definizione si ha che $Y \subseteq Y$ e $\emptyset \subseteq Y$. L'*insieme delle parti* di S si indica con $P(S)$ ed è un insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi di S. Il *complemento* di Y rispetto ad X è il sottoinsieme di S determinato dagli elementi di X che non appartengono a Y. Tale complemento si indica con la scrittura $X - Y$ e dunque soddisfa

$$X - Y = \{x \in S : x \in X \text{ e } x \notin Y\}$$

In particolare il *complementare* di un sottoinsieme X di S è $S - X$ e si indica con X^C e risulta

$$X^C = \{x \in S : x \notin X\}$$

Ricordiamo infine alcuni insiemi numerici importanti: l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z} = \{\cdots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ e l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Vale naturalmente la seguente relazione:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Inoltre, vale la seguente caratterizzazione dei numeri razionali:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{m}{n}, n \text{ e } m \in N, n \neq 0\right\}$$

Esercizi

Esercizio: Sia $S = \{1, 2, 3\}$. Quali delle seguenti diciture sono corrette:

$$1 \in S, \qquad 2 \notin S, \qquad \{1\} \in S, \qquad \{1\} \subseteq S$$

Soluzione: La prima è corretta, la seconda è sbagliata in quanto l'elemento 2 appartiene all'insieme S, la terza è falsa poiché $\{1\}$ è un insieme e non un elemento, quindi la scrittura è formalmente sbagliata e l'ultima è corretta. Si possono avere insiemi i cui elementi sono a loro volta insiemi, ad esempio l'insieme delle parti. Per fare un esempio in cui la scrittura $\{1\} \in S$ potrebbe avere senso potremmo considerare il seguente insieme: $S = \{a, 2, \{1\}\}$.

Esercizio: Dato l'insieme $S = \{a, b\}$, quali delle seguenti scritture sono corrette:

$$a \in S, \qquad \{b\} \in S, \qquad b \subseteq S, \qquad \{a\} \subseteq S$$

Soluzione: La prima e l'ultima sono le uniche formalmente corrette.

Esercizio: Rappresenta per elencazione i seguenti insiemi di numeri:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 3k\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 3k + 1\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 3k - 2\}$$

Come variano questi insiemi se al posto di $\mathbb{N}$ si sostituisse $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$?

Soluzione: Gli insiemi mostrati sopra sono i seguenti: $\{3, 6, 9, \dots\}; \{4, 7, 10, 13, \dots\}; \{1, 4, 7, 10, \dots\}$. Mostriamo alcuni cambiamenti solo per quanto riguarda l'insieme A, cambiamenti analoghi si hanno per gli insiemi B e C.

$$\{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 3k\} = \{x \in \mathbb{Q} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 3k\} = \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 3k\} = \{3, 6, 9, \dots\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{Z} : x = 3k\} = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{Q} : x = 3k\} = \mathbb{N}$$

$$\{x \in \mathbb{Q} : \exists k \in \mathbb{Q} : x = 3k\} = \mathbb{Q}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Q} : x = 3k\} = \mathbb{Q}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{R} : x = 3k\} = \mathbb{R}$$

Esercizio: Rappresenta tramite proprietà caratteristica i seguenti insiemi:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} \qquad B = \{3, 5, 7, 9, \dots\}$$

$$C = \{2, 4, 8, 16, \dots\} \qquad D = \{1, 4, 9, 25, \dots\}$$

Soluzione: $A = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k - 1\}; B = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k + 1\}, C = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : x = 2^k\}, D = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : x = k^2\}$

Esercizio: Rappresenta per proprietà caratteristica i seguenti insiemi:

$$A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$$

$B =$ l'insieme dei nuermi che al quadrato sono minori o uguali a se stessi

Soluzione:

$$\left\{x \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}) : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x\}$$

Esercizio: Indichiamo con N_p e N_d rispettivamente l'insieme dei numeri pari e quello dei numeri dispari. Se ne indichi una caratterizzazione per mezzo di una loro proprietà. In quale relazione sono i seguenti insiemi con N_p e N_d?

$$A = \left\{n \in \mathbb{N} : n^2 \in N_p\right\}, \qquad B = \left\{n \in \mathbb{N} : n^2 \in N_d\right\}$$
$$C = \left\{n \in \mathbb{N} : n^3 \in N_p\right\}, \qquad D = \left\{n \in \mathbb{N} : n^3 \in N_d\right\}$$

Soluzione:

$$N_p = \{x \in \mathbb{N} : x = 2k, k \in \mathbb{N}\} \qquad N_p = \{x \in \mathbb{N} : x = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\}$$

$A = C = N_p$, $B = D = N_d$

Esercizio: Si considerino i seguenti insiemi:

$$A = \{x \in N_p : 0 < x < 10\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} : x|12\}$$

($x|12$ sta per: "x divide 12") Si dica se sono vere le seguenti espressioni:

$$A \subset B \qquad A \cup B = \{2, 4\} \qquad A \cap B = B \cap \{12\} \qquad B - A = \{1, 3, 12\}$$

Soluzione: $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, perciò delle quattro affermazioni è vera solo l'ultima.

Adesso riportiamo alcuni esercizi utili a comprendere meglio i processi dimostrativi degli enunciati.

Esercizio: Verificare che:

$$X \subseteq Y \Longleftrightarrow X \cup Y = Y$$

Dimostrazione. Dovendo dimostrare la doppia implicazione dobbiamo dividere la dimostrazione in due parti nelle quali dimostreremo ciascuna implicazione.

$\Longrightarrow$ Dal momento che $X \subseteq Y$ allora ogni elemento di x appartiene a Y. Perciò, preso un elemento $x \in X \cup Y$ si ha che $x \in X \Rightarrow x \in Y$ oppure $x \in Y$ e dunque $x \in Y$, perciò $X \cup Y \subseteq Y$, ma anche il viceversa è vero $Y \subseteq X \cup Y$ e questo ci fa concludere che $X \cup Y = Y$.

$\Longleftarrow$ Dal momento che $X \cup Y = Y$ e per definizione $X \subseteq X \cup Y$ allora $X \subseteq X \cup Y = Y \Rightarrow X \subseteq Y$ □

Esercizio: Dire se per $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ varrebbe l'assioma di completezza.

Soluzione: Sia per $\mathbb{N}$ che per $\mathbb{Z}$ vale l'assioma di completezza. Mentre per $\mathbb{Q}$ non vale. Difatti basta considerare i seguenti insiemi: $A = \left\{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\right\}$ $B = \left\{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{2}\right\}$.

Esercizio: Verifica che l'insieme dei numeri decimali limitati è denso in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Si può procedere come si è fatto per i numeri $\mathbb{Q}$. Si considerino due numeri decimali limitati x e y. Se mostriamo che la loro media è un numero decimale limitato si può concludere che l'insieme dei numeri decimali limitati è denso in $\mathbb{R}$.

Essendo x e y decimali limitati si può indicare con n_x e n_y il numero delle loro cifre decimali. Allora per le proprietà della somma $x+y$ ha al massimo il numero di cifre decimali di x o di y. Quindi, idicato con n_{x+y} il numero di cifre decimali della somma, vale la seguente relazione $n_{x+y} = \max n_x, n_y$. Infine dividendo $x+y$ per 2 si ottiene al massimo una cifra decimale aggiuntiva e quindi $\frac{x+y}{2}$ ha al massimo $n_{x+y}+1$ cifre decimali e perciò è anch'esso decimale limitato □

Esercizio: Dire se per due insiemi A e B disgiunti ($A \cap B = \emptyset$) si può far valere l'assioma di completezza (fornire la dimostrazione o un controesempio).

Soluzione: Se l'affermazione fosse vera dovremmo procedere ad una dimostrazione. Fortunatamente l'affermazione è falsa e quindi ci basta mostrare n-un controesempio. Basta considerare i seguenti insiemi:

$$A = \{7, 20\} \qquad\qquad B = \{13\}$$

chiaramente i due insiemi sono disgiunti, però valgono le seguenti disuguaglianze $7 < 13 < 20$ e quindi non sono rispettate le condizioni richieste dall'assioma di completezza.

Esercizio: Per qualunque sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ si può trovare un altro insieme B per cui sono rispettate le ipotesi dell'assioma di completezza?

Soluzione: L'affermazione è falsa, infatti se l'insieme A non è limitato superiormente né inferiormente (si può pensare semplicemente a $\mathbb{Z}$) non trovo nessun altro insieme B formato da elementi tutti maggiori di ciascun elemento di A o tutti minori di ciascun elemento di A.

Esercizio: Si considerino le seguenti coppie di insiemi:

$$A_1 = \left\{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}; \qquad A_2 \left\{\frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\};$$

$$B_1 = \left\{\frac{2n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad B_2 = \{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\};$$

$$C_1 = \left\{-n^2 + 4n, n \in \mathbb{N}\right\}; \qquad C_2 \left\{\frac{4n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\};$$

Dire se esistono e quanti sono gli elementi di separazione.