ANALISI MATEMATICA I (A-L)

16 . 09 . 2024

FRANCESCA MARCELLINI

francesca.marcellini@unibs.it

https://sites.google.com/view/francescamarcellini/home/didattica/202425-a-l

I NUMERI E LE FUNZIONI REALI

PUNTO DI PARTENZA:

Si fissano A PRIORI le REGOLE DEL GIOCO, che, una volta iniziato il gioco, non vengono più cambiate.

REGOLE DEL GIOCO $\longrightarrow$ PRESUPPOSTI DA PRECISARE in un MODELLO MATEMATICO

↳ TEOREMI, LEMMI, PROPOSIZIONE, COROLLARI

↓

POSTULATI O ASSIOMI

↓

TEOREMI, LEMMI, PROPOSIZIONI, COROLLARI

Come punto di partenza, assumiamo:

POSTULATO: ESISTE IL SISTEMA DEI NUMERI REALI

(NUMERI REALI, NOTAZIONE $\mathbb{R}$)

Cioè assumiamo che esista un insieme di $\mathbb{R}$, su cui sia possibile, ad esempio, eseguire le quattro operazioni elementari
$(+, -, \cdot, /)$

o stabilire quale sia il maggiore tra due numeri.

OSS Un INSIEME è un aggregato di elementi.
Un SISTEMA è un INSIEME con STRUTTURA (su cui ad esempio, sia possibile eseguire le quattro operazioni elementari...)

- Il sistema dei numeri reali $\mathbb{R}$, è definito tramite l'insieme delle sue regole, che come abbiamo detto, in matematica si chiamano ASSIOMI.

GLI ASSIOMI DEI NUMERI REALI

1. ASSIOMI RELATIVI ALLE OPERAZIONI

2. ASSIOMI RELATIVI ALL'ORDINAMENTO

3. ASSIOMA DI COMPLETEZZA

① ASSIOMI RELATIVI ALLE OPERAZIONI

Sono definite le operazioni di addizione $(+)$ e moltiplicazione $(\cdot)$ tra coppie di numeri reali e valgono le proprietà (che già conoscete):

- PROPRIETÀ ASSOCIATIVA $(a+b)+c = a+(b+c)$
  $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

- PROPRIETÀ COMMUTATIVA $a+b=b+a$
  $a\cdot b = b\cdot a$

- PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

- ESISTENZA DEGLI ELEMENTI NEUTRI $0, 1$ $a+0=a$
  $a\cdot 1 = a$

- ESISTENZA DEGLI OPPOSTI $(a, -a)$

$$a+(-a)=0$$

- ESISTENZA DEGLI INVERSI $(a\neq 0, a^{-1})$

$$a\cdot(a^{-1})=1$$

OSS Si dimostrano altre proprietà elementari come conseguenza dei precedenti assiomi.

Ad esempio, vale la proprietà:

- $$-(-a) = a$$

Definizione di $-a$: è il numero reale che sommato ad a, dà come risultato 0.

Cioè $$a + (-a) = 0$$

Per la proprietà commutativa vale anche

$$(-a) + a = 0$$

cioè il numero reale a è l'opposto di $(-a)$

da cui: $$-(-a) = a$$

- Per ogni coppia di numeri reali a, b,

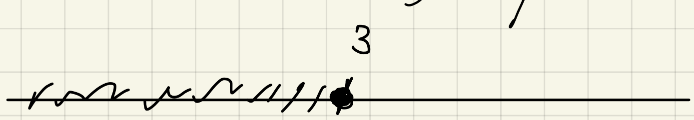
$$(-a)(-b) = ab$$

(2) ASSIOMI RELATIVI ALL'ORDINAMENTO:

è definita la relazione di MINORE o UGUALE $(\leq)$

(esempio: $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 3\}$ cioè

$$A = \{3\} \cup \{\text{numeri reali} < 3\}$$)



DEF : $\overset{DEF}{=}$ TALE CHE

- DICOTOMIA Per ogni coppia di numeri reali a, b, si ha:

$$a \leq b \quad \text{oppure} \quad b \leq a$$

- PROPRIETÀ ASIMMETRICA Se valgono contemporaneamente $a \leq b$ e $b \leq a$, allora

$$a = b$$

- Se $a \leq b$, allora vale anche $a + c \leq b + c$

- Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, allora $a + b \geq 0$ $\quad (*)$
$a \cdot b \geq 0$

OSS Si dimostra anche la PROPRIETÀ TRANSITIVA DELL'ORDINAMENTO

Se $a \leq b$ e $b \leq c$, allora $a \leq c$

OSS Dai precedenti assiomi si dimostrano numerose altre proprietà.
Ad esempio da $(*)$, se $b = a$

$a \cdot a = a^2$ è sempre un numero reale positivo.

(o eventualmente nullo se $a=0$).

Pertanto, non esiste un numero reale positivo t.c.

$$a \cdot a = a^2 = -1$$

Per studiare l'equazione $a^2=-1$ è necessario cambiare il modello matematico, introducendo il sistema dei numeri complessi (notazione $\mathbb{C}$), che studieremo in questo corso.

OSS Si conviene, di non accettare la divisione per 0 nell'ambito dei numeri reali.
(REGOLE DEL GIOCO...)

Infatti

$$\frac{a}{b} = c \iff c \cdot b = a$$

Ma se $b=0$ $\qquad \frac{a}{0} = c \iff c \cdot 0 = a$

Ciò è possibile solo se $a=0$. Due casi:

① Se $a \neq 0$, non è possibile la divisione di a con 0. $\frac{a}{0}$ non è un numero reale

② Se $a=0$ $\qquad \frac{0}{0}=c \iff c\cdot 0=0$

ma ciò è verificato per ogni numero c.

ASSIOMA DI COMPLETEZZA

Siano A e B due insiemi di numeri reali, non vuoti, tali che comunque si scelgano a elemento di A e b elemento di B risulti

$$a \le b$$

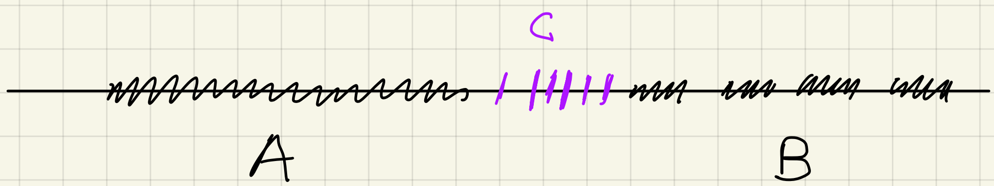
Allora esiste almeno un numero reale c tale che

$$a \le c \le b$$

qualunque siano a in A e b in B.

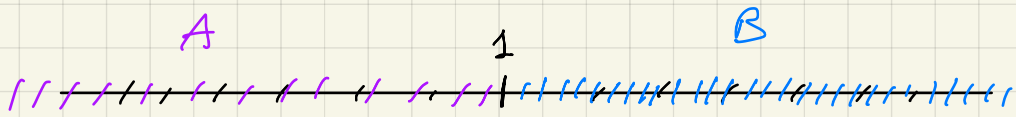
Esempi

①



esistono infiniti c

(2)



$A=\{x\in\mathbb{R} : x\le 1\}$ $\qquad$ $B=\{x\in\mathbb{R} : x\ge 1\}$

$C=1$

(3)

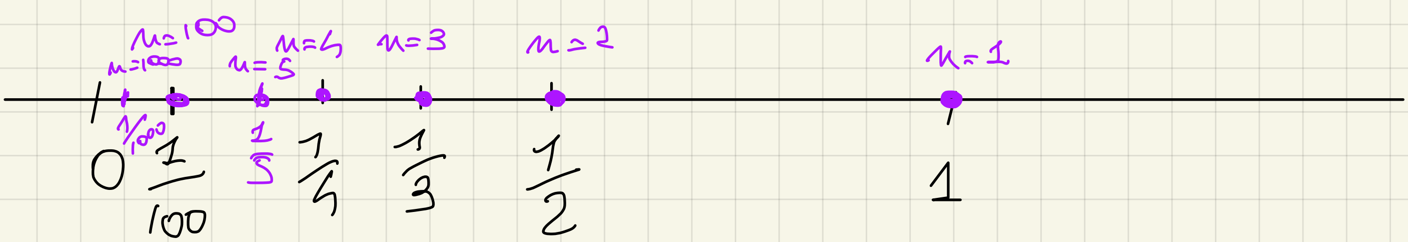
$A=\{x=0\}$ $\qquad$ $B\{x\in\mathbb{R} : x\ge 3\}$

esistono infiniti C

OSS Non tutti gli insiemi hanno il più grande o il più piccolo elemento. Ad esempio:

$$A=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$$
$$=\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\} \qquad \mathbb{N}=\{1,2,3,4,5\ldots\}$$

NUMERI NATURALI (DEF.)



non ha un elemento più piccolo.

(invece c'è il più grande che è 1).

NOTAZIONI:

- INSIEME DEI NUMERI NATURALI

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$$

- INSIEME DEI NUMERI INTERI

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = \{0\} \cup \{\pm n, n \in \mathbb{N}\}.$$

- INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, \ n \neq 0 \right\}$$

OSS Risulta $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

$\mathbb{Q}$ soddisfa tutti gli assiomi relativi alle operazioni e gli assiomi relativi all'ordinamento, ma non soddisfa l'assioma di completezza.

- L'assioma di completezza ci permette di distinguere l'insieme dei numeri reali da quello dei numeri razionali.

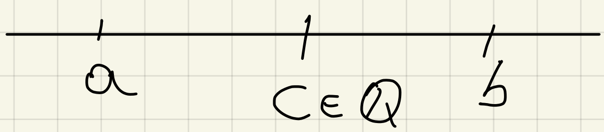
Si dimostra che $\mathbb{Q}$ è DENSO sulla retta reale.
(nel senso che fra due numeri razionali è sempre possibile trovarne un terzo, anzi infiniti).

$$a = \frac{m_1}{n_1} \qquad b = \frac{m_2}{n_2}$$

faccio la media $\displaystyle \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}}{2} =$

$$\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{2 n_1 n_2} \quad \begin{matrix} \in \mathbb{Z} \\ \in \mathbb{Z} \end{matrix} \quad \Rightarrow \in \mathbb{Q}$$

proseguendo:



"RIEMPIO" tutta la retta reale?

Proposizione – $\sqrt{2}$ non si può rappresentare come numero razionale.

Ragioniamo per assurdo e supponiamo che $\sqrt{2}$ si possa rappresentare come numero razionale, cioè

$$(*)\ \sqrt{2} = \frac{m}{n}, \quad \text{con } m, n \in \mathbb{Z}$$

posso suppore che m ed n siano primi tra loro e che (al più) uno fra loro sia pari.

- eleviamo al quadrato $(*)$

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \implies 2n^2 = m^2 \ (**)$$

$2n^2$ pari $\implies$

anche m^2 deve essere un numero pari (cioè 2 divide m^2) $\implies$ anche m deve essere pari

(se m fosse dispari anche m^2 sarebbe dispari) (pensiamo ai fattori)

$\implies$ Quindi posso esprimere m nella forma:

$$m = 2K, \quad K \in \mathbb{Z}$$

da $(**)$ $$\cancel{2}n^2 = m^2 = \underset{2}{\cancel{4}}K^2$$

$\Rightarrow \quad n^2 = 2k^2$

Ripetendo il ragionamento precedente $\Rightarrow$

n^2 deve essere pari e anche n pari.

ASSURDO! Ora risultano sia m che n

pari, ma avevo supposto che fossero primi

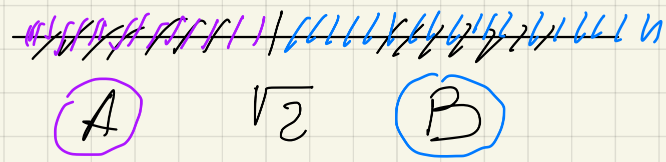
ed (al più) uno tra loro fosse pari.

#

Esempio Limitandoci ai numeri reali positivi, siano:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 2\}$$



$a \leq b \ \forall a \in A$ e $\forall b \in B$

$c^2 = 2$ è l'elemento di separazione fra A e B.

c è un numero IRRAZIONALE.

NOTAZIONE: NUMERI IRRAZIONALI $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (o $\mathbb{Q}^c$)

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

- $\mathbb{Q}$ non soddisfa l'assioma di completezza.

Utilizzeremo quindi $\mathbb{R}$. Costruiremo l'analisi matematica (di questo primo anno) a partire da $\mathbb{R}$ e dall'assioma di completezza.

Esercizio $\sqrt{3}$ è un numero irrazionale.

DIM: Supponiamo per assurdo che $\sqrt{3}$ sia razionale, allora

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n} \qquad \text{con } m, n \in \mathbb{Z} \text{ primi tra loro.}$$

elevo al quadrato

$$\Rightarrow \quad 3 = \frac{m^2}{n^2} \quad \Rightarrow \quad 3n^2 = m^2$$

$\Rightarrow$ allora 3 divide m^2 $\Rightarrow$ 3 divide m.

$$\Rightarrow \quad m = 3k$$

$$\Rightarrow \quad 3n^2 = m^2 = 9k^2 \Rightarrow \quad n^2 = 3k^2$$

$\Rightarrow$ 3 divide m ed n. ASSURDO! #

Esercizio $\sqrt{4}$ è irrazionale?

Ragioniamo per assurdo come prima:

$$\sqrt{4} = \frac{m}{n}, \quad \text{con } m, n \in \mathbb{Z}, \text{ primi tra loro.}$$

$$\Rightarrow \quad 4 = \frac{m^2}{n^2} \quad \Rightarrow \quad 4n^2 = m^2.$$

(4 deve dividere m^2 e quindi anche m,

$\Rightarrow m = 4k \Rightarrow 4n^2 = m^2 = 16k^2 \Rightarrow n^2 = 4k^2$

$\Rightarrow$ 4 deve dividere anche n ...) NO!

posso dire che 4 deve dividere m^2 e

2 deve dividere m

$\Rightarrow m = 2k$

$\Rightarrow 4n^2 = m^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = k^2$

NESSUNA CONTRADDIZIONE!

$\Rightarrow \sqrt{4}$ non è irrazionale. #