Geometria Affine.

(A, V, f)

punti
vettori $\rightarrow$ TRASLAZIONE.

$$\forall \bar{v} \in V : \tau_v : \begin{cases} A \rightarrow A \\ P \rightarrow P + \bar{v} \end{cases}$$

$$[P; W] = \{ P + \bar{v} \mid \bar{v} \in W \}$$ sottospazio lineare.

punto $\quad W \leq V$

$$\dim [P; W] := \dim W$$

$n = \dim V$

$$[P; \{\underline{0}\}] = \{P\}$$

$\dim [P; W] =$

0	$\rightarrow$	punti.
1	$\rightarrow$	rette
2	$\rightarrow$	piani
3	$\rightarrow$	solidi
$n-1$	$\rightarrow$	iperpiani.

Def: Dati 2 sottospazi lineari $\Pi = [P; W]$
$\Sigma = [Q; U]$

si dice $\Pi // \Sigma \iff W \subseteq U$ oppure $U \subseteq W$

Π parallelo a Σ

N.B. Se ~~Π~~ $\dim \Pi = \dim \Sigma \Rightarrow \Pi // \Sigma \iff U = W$

$A // B \qquad B // C$

$A = [P; U]$
$B = [Q; W]$
$C = [R; T]$

con $U \subseteq W$ o $W \subseteq U$
$W \subseteq T$ o $T \subseteq W$

NON È DETTO.

~~dobbiamo avere~~

$T \cancel{W} \subseteq U$ o $\cancel{U \subseteq W}$ $U \subseteq T$

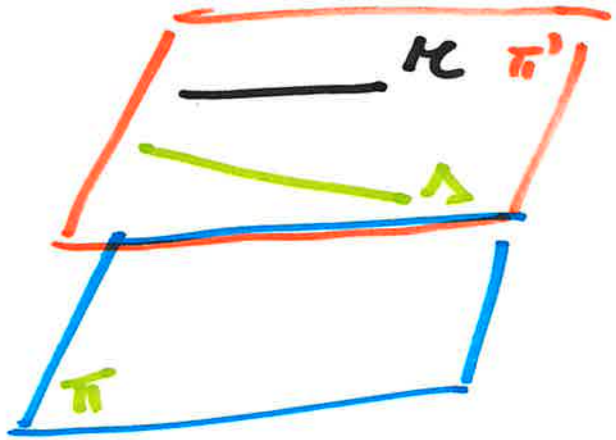
$\rightarrow$ ma questo in generale è falso!

Se A, B, C hanno la stessa dimensione $\Rightarrow$

$A // B$ & $B // C \Rightarrow A // C$

ma in generale se le dim. non sono uguali può essere

$A // B$, $B // C$ ma $A \not\parallel C$



Il parallelismo __fra rette__ è una relazione di equivalenza.

Il parallelismo "in generale" __no__

__OSS__: Siano $A // B$ due sottospazi $\Rightarrow$ vale una delle seguenti 3 possibilità:
1) $A \subseteq B$
2) $B \subseteq A$
3) $A \cap B = \emptyset$.

$A=[P;\mathcal{U}]$ $\qquad$ $\mathcal{U}\subseteq W$ $\quad$ o $\quad$ $W\subseteq\mathcal{U}$

$B=[Q;W]$

Supponiamo $\mathcal{U}\subseteq W$. Se $A\cap B=\emptyset \Rightarrow$ <u>FINE</u>

Se $A\cap B\neq\emptyset \Rightarrow \exists\, R\in A\cap B$ con R punto.

$\Rightarrow$ $A=[R;\mathcal{U}]$, $B=[R;W]$ scegliendo come origine R

$\Rightarrow \forall X\in A\ \exists\, \bar{u}\in\mathcal{U}: X=R+\bar{u}$ ma $\mathcal{U}\subseteq W\Rightarrow \bar{u}\in W$

$\Rightarrow \exists\, \bar{u}\in W: X=R+\bar{u} \Rightarrow X\in B=[R;W]\Rightarrow A\subseteq B$.

~~Scambiando~~ Se $W\subseteq\mathcal{U}$ stessa dim, scambiando i ruoli di A e B.

$\square$

$\Gamma = (O, \mathcal{B})$

punto $\quad$ base di $V_n(\mathbb{K})$

$\forall\, P \in A$ abbiamo $\Phi_\Gamma(P) \in \mathbb{K}^n$

vettore delle componenti di $\overrightarrow{OP}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ}$ ha componenti rispetto la base $\mathcal{B}$

$$\Phi_\Gamma(Q) - \Phi_\Gamma(P).$$

$$(A, V_n(\mathbb{K}), f) \underset{\Gamma}{\cong} (\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n; f:(x,y) \to y-x)$$

$$AG(n, \mathbb{K}) = A^n\mathbb{K} = A_n\mathbb{K}$$

come si rappresentano i sottospazi in $AG(n, \mathbb{K})$?

$$[P; \mathcal{U}] = \{ (p_1 \dots p_n) + (u_1 \dots u_n) \mid (u_1 \dots u_n) \in \mathcal{U} \}.$$

in coordinate

$$= (p_1 \dots p_n) + \mathcal{U} \quad \text{con } \mathcal{U} \leq \mathbb{K}^n$$

Sia $AX = B$ un sistema lineare compatibile.
n incognite.

$$\Rightarrow S = \hat{X} + \operatorname{Ker}(A) \qquad \text{ove } \hat{X} = \text{sol. particolare}$$

$$\operatorname{Ker}(A) = \{ y \mid Ay = \underline{0} \}.$$

$$= [\hat{X}; \operatorname{Ker}(A)] \qquad \text{ove } \hat{X} \text{ coord. di un punto in } AG(n, \mathbb{K}).$$

$$\operatorname{Ker}(A) \leq \mathbb{K}^n.$$

In particolare l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare $AX = B$ compatibile è un sottospazio lineare di dimensione $n - rk(A)$ con origine una soluzione particolare $\hat{X}$ del sistema (un punto di coord. $\hat{X}$) e sottospazio di traslazione le soluzioni del sistema omogeneo associato $AY = \underline{0}$ (i vettori le cui componenti sono soluzioni del sistema $AY = \underline{0}$).

Vale anche il viceversa.

Sia $\Pi = [P; W]$ un sottospazio affine. Allora $\exists$ un sistema lineare $AX = B$ in n incognite tale che i punti di Π corrispondono alle soluzioni di $AX = B$.

Siano $W = \mathcal{L}(\overline{w}_1 \dots \overline{w}_k)$ con

$$\overline{w}_1 = (w_{11} \dots w_{1n})$$
$$\vdots$$
$$\overline{w}_k = (w_{k1} \dots w_{kn})$$

e $(\overline{w}_1 \dots \overline{w}_k)$ base di W.

Sia inoltre $P = (p_1 \dots p_n)$ l'origine di π

$$X \in \pi = [P; W] \iff \overrightarrow{PX} \in W \iff$$

$$(x_1 - p_1 \dots x_n - p_n) \in \mathcal{L}(\overline{w}_1 \dots \overline{w}_k).$$

$$\iff$$

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} x_1-p_1 & \cdots & x_n-p_n \\ w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & & \\ w_{k1} & \cdots & w_{kn} \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{k1} & \cdots & w_{kn} \end{pmatrix} = k$$

$\downarrow$

si calcola il rango imponendo che $\forall$ minore $(k+1)\times(k+1)$ abbia determinante $=0$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} x_1-p_1 & \cdots & x_{k+1}-p_{k+1} \\ w_{11} & \cdots & w_{1k+1} \\ \vdots & & \\ w_{k1} & \cdots & w_{1k+1} \end{vmatrix}}_{M_1} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} (x_i - p_i) M_{1i} (-1)^{1+i} = 0$$

$\uparrow$

eq. di I grado in x_i $\quad i=1\ldots k+1$

Equazione di una retta.

$$r = [P; W_1] \qquad P = (p_1 \dots p_n)$$

$$W_1 = \mathcal{L}((\ell_1 \dots \ell_n)) \qquad (\ell_1 \dots \ell_n) \neq \underline{0}$$

$$X = (x_1 \dots x_n) \in r \iff$$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 & \dots & x_n - p_n \\ \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_n \end{pmatrix} = 1$$

$$(x_1 - p_1)\ell_2 = (x_2 - p_2)\ell_1 \longrightarrow \frac{(x_1 - p_1)}{\ell_1} = \frac{(x_2 - p_2)}{\ell_2}$$

$$(x_1 - p_1)\ell_3 = (x_3 - p_3)\ell_1 \qquad \text{se} \quad \ell_1 \neq 0$$

$$\vdots$$

$$(x_1 - p_1)\ell_n = (x_n - p_n)\ell_1$$

$$(*)\quad \frac{(x_1-p_1)}{l_1}=\frac{(x_2-p_2)}{l_2}=\frac{(x_3-p_3)}{l_3}=\dots=\frac{(x_n-p_n)}{l_n}$$

Con un abuso di notazione consideriamo la scrittura (*) anche con $l_i=0$, interpretando un termine

$$\frac{(x_i-p_i)}{0}=\dots$$

come l'equazione $\boxed{x_i=p_i}$.

$n=2.$

$$\frac{(x-x_P)}{l}=\frac{(y-y_P)}{m}$$

(l,m) parametri direttori

$(l,m)\neq(0,0)$

se $l=0 \rightarrow x = x_p$

se $m=0 \rightarrow y = y_p$

se $l,m \neq 0 \rightarrow y = \frac{m}{l} x + \left(\frac{y_p}{m} - \frac{m}{l} x_p \right)$

$\frac{m}{l} \rightarrow$ a = coeff. angolare

$\left(\frac{y_p}{m} - \frac{m}{l} x_p \right) \rightarrow b$

$$y = ax + b$$

$\underline{n=3}$

$$\frac{x-x_p}{l} = \frac{y-y_p}{m} = \frac{z-z_p}{n}$$

→ Una retta è descritta da 2 equazioni indipendenti!

$3-2=1$

→ Una retta è intersezione di 2 piani non //

$n=2$ retta per 2 punti:

$$P=(x_p, y_p) \qquad Q=(x_q, y_q).$$

$$r=[P; \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})] \qquad PQ=(x_q-x_p, y_q-y_p)$$

$$\frac{x-x_p}{x_q-x_p}=\frac{y-y_p}{y_q-y_p}$$

$$\begin{vmatrix} x-x_p & y-y_p \\ x_q-x_p & y_q-y_p \end{vmatrix}=0 \sim \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\parallel$$

$$\begin{vmatrix} x-x_p & y-y_p & 0 \\ x_p & y_p & 1 \\ x_q-x_p & y_q-y_p & 0 \end{vmatrix}$$

$AX = B$ sistema lineare compat.

$\downarrow$

$$(A \mid -B)\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{0} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

$$(A \mid -B)\,\hat{X} = \underline{0} \qquad \hat{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

considero le soluzioni di questo sistema con in più la condizione $x_{n+1} = 1$

ovvero con $x_{n+1} \neq 0$ e del tipo $\hat{X} \cdot \frac{1}{x_{n+1}}$

Sia $\Pi = [P; W]$ uno spazio lineare descritto dal sistema lineare $AX = B$.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$Q \in \Pi : \quad AQ = B$$

riscriviamo il sistema come $(A \mid -B)\hat{X} = \underline{0}$

con $\hat{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$ e $x_{n+1} = 1$

studiamo le prime n componenti di $\hat{X}$ quando risolviamo il sistema $(A \mid -B)\hat{X} = \underline{0}$

1) $x_{n+1} = 0 \Rightarrow$ questo è come risolvere

$$(A \mid -B)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow (A \mid \underline{0})\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0} \rightarrow A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{0}$$

→ stiamo trovando i vettori del sottospazio W di traslazione.

2) $x_{n+1} \neq 0$ $$(A \mid -B)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_{n+1} B$$

$$A \begin{bmatrix} \frac{x_1}{x_{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{x_{n+1}} \end{bmatrix} = B \qquad \xi_i = \frac{x_i}{x_{n+1}}$$

In altre parole ad ogni soluzione di

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = B$$ corrispondono ∞^1 soluzioni di $(A|-B)\hat{X} = \underline{0}$

e ad ogni insieme di ∞^1 soluzioni proporzionali di $(A|-B)\hat{X} = \underline{0}$ con $x_{n+1} \neq 0$ corrisponde una soluzione di

$$AX = B.$$

Es.

$ax + by + c = 0 \rightarrow$ NON OMOGENEO

$a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0 \rightarrow$ OMOGENEO

$\rightarrow$ soluzioni con $x_3 = 0$

$\rightarrow \mathcal{L}((-b, a, 0))$

e $\mathcal{L}((-b, a))$

dir. della retta.

→ soluzioni con $x_3 \neq 0$

→ sono tutte del tipo

$\mathcal{L}((x, y, 1))$

con $$a\frac{x_1}{x_3}+b\frac{x_2}{x_3}+c=0$$

$$\frac{x_1}{x_3}=x \quad \frac{x_2}{x_3}=y$$

corrispondono ai punti della retta.

DA TUTTE LE SOLUZIONI DI

$$a x_1+b x_2+c x_3=0$$

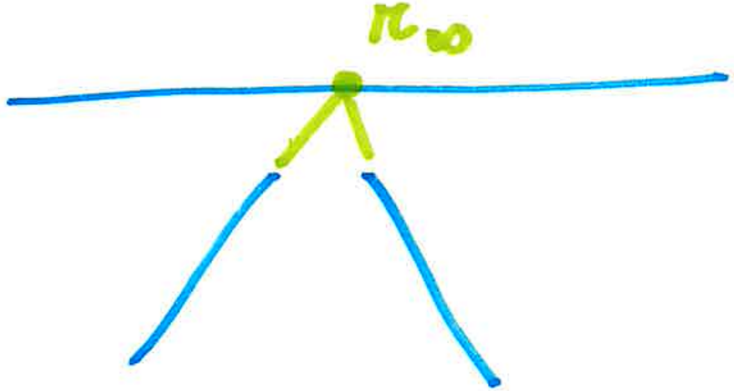
CHE FORMANO UN SOTT. VETTORIALE DI

DIM $=2$

possiamo individuare

→ 1) I punti di r_0 che corrispondono di sottospazi di dim $= 1$ con generatore con $x_3 \neq 0$

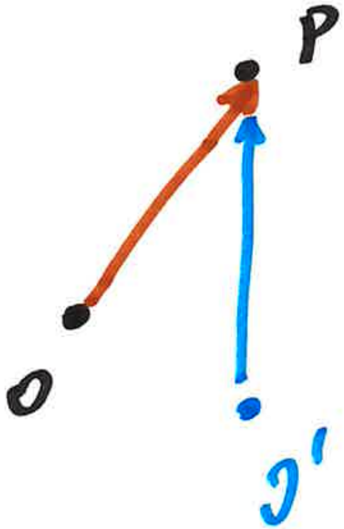
→ 2) La direzione della retta che corrisponde al sottospazio di dim $= 1$ con generatore $x_3 = 0$.



(A, V_n, f)

$\mathcal{B} = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$

$\Gamma = (P, \mathcal{B})$



$\vec{OP} \in V_n(\mathbb{K}) =$

$= p_1\bar{v}_1 + \dots + p_n\bar{v}_n$

$(p_1 \dots p_n)$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_p & y-y_p & 0 \\ x_p & y_p & 1 \\ x_q-x_p & y_q-y_p & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x-x_p & y-y_p \\ x_q-x_p & y_q-y_p \end{vmatrix}$$

$\hookrightarrow (x,y,1) \in \mathcal{L}((x_p, y_p, 1), (x_q, y_q, 1))$

$x-x_p$

$(A|-B)\hat{x}=0$ sistema di rk $=1$

$a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0 \qquad x_3 = 1$

$$(A \,|\, -B)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_{n+1} B$$

$x_{n+1} \neq 0$

$$A\begin{bmatrix} \frac{x_1}{x_{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{x_{n+1}} \end{bmatrix} = B$$

ξ

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\frac{x-x_p}{x_q-x_p} = \frac{y-y_p}{y_q-y_p}} \qquad \begin{vmatrix} x-x_p & y-y_p \\ l & m \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_p & y_p & 1 \\ l & m & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_p & y-y_p & 0 \\ x_p & y_p & 1 \\ l & m & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\frac{x-x_p}{l} = \frac{y-y_p}{m}} \qquad r = [P; \mathcal{L}((l,m))]$$

$n=2$

Teorema in $AG(2,\mathbb{K})$ due rette disgiunte sono sempre parallele.

$$r \cap s = \emptyset \Rightarrow r \parallel s.$$

DIM:

$r: \quad ax+by+c=0 \qquad (a,b) \neq (0\,0)$

$s: \quad a'x+b'y+c'=0 \qquad (a',b') \neq (0\,0)$

$$r \cap s = \emptyset \iff \begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \text{ incompat.}$$

$$\iff 1 \leq rk\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \leq 2$$

il sistema è incompatibile $\Leftrightarrow$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1 \text{ e } \operatorname{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow$ $ax+by=0$ è equivalente a

$a'x+b'y=0$

$\Rightarrow$ lo sp. di traslazione = direzione di r

è uguale allo sp. di traslazione di s

$\Rightarrow r \parallel s$. $\square$

$$\begin{cases} a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0 \longrightarrow W_2 \text{ sp. di dim} = 2 \\ a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 = 0 \longrightarrow U_2 \text{ sp. di dim} = 2 \end{cases}$$

$\dim(W_2 \cap U_2) = 1$ per Grassmann.

$W_2 \cap U_2 = \mathcal{L}((\alpha, \beta, \gamma))$

se $\gamma \neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}((\alpha, \beta, \gamma))$ corrisponde al punto $\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\right)$ comune fra le 2 rette.

se $\gamma = 0 \Rightarrow \mathcal{L}((\alpha, \beta, 0))$ corrisponde alla direzione $\mathcal{L}((\alpha, \beta))$ comune fra le 2 rette

$\Rightarrow r \parallel s$.

<u>Def</u>: Sia r una retta; si dice punto improprio di r ~~il~~ la direzione r_∞ di r.
Si dice punto proprio un punto di r.

Def: Sia $P \in AG(2, \mathbb{k})$. Si dice fascio proprio di centro P l'insieme di tutte le rette passanti per P.

Si dice fascio improprio di direzione (ℓ, m) l'insieme di tutte le rette con tale direzione.

$\downarrow$

insieme di tutte le rette per il punto improprio $L((\ell, m))$.

Le rette di un fascio sono ∞^1 e soddisfano una condizione lineare.

$$P = (x_P, y_P) \Rightarrow \quad ax + by + c = 0$$

$$\downarrow$$

$$(*) \quad ax_P + by_P + c = 0$$

eq. nelle incognite (a, b, c)

FASCIO PROPRIO $\quad \alpha(x-x_P)+\beta(y-y_P)=0$

(*) ha ∞^2 soluzioni

ma eq. proporzionali non nulle

danno la stessa retta.

FASCIO IMPROPRIO $\quad ax+by+c=0$

(ℓ, m)

$$a\ell+bm=0$$

$$\{(-\alpha m, \alpha\ell) \mid \alpha \in \mathbb{K}\} \quad \alpha\neq 0$$

$$-\alpha m x+\alpha \ell y+\beta=0$$

$$\equiv$$

$$mx+\ell y+\beta=0$$

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0$$

$$(x_P, y_P, 1)$$

$$a x_P + b y_P + c = 0 \Rightarrow c = -a x_P - b y_P$$

$$\cancel{a(x_1 +}$$

$$a(x_1 - x_P) + b(x_2 - y_P) = 0$$

$$(l, m, 0)$$

$$a l + b m = 0$$

$$\alpha(-m x_1 + l x_2) + c x_3 = 0$$

__OSS__: Siano $r: ax + by + c = 0$

$s: a'x + b'y + c' = 0$

allora tutte le rette del fascio $r \neq s$.

- proprio se $r \cap s \neq \emptyset$
- improprio se $r // s$

che contiene r ed s si ottengono come

$$\alpha(ax+by+c)+\beta(a'x+b'y+c')=0$$

$$(\alpha,\beta)\neq(0,0).$$

DIM supponiamo $P \in r \cap s \Rightarrow \forall \alpha,\beta:$

$P = (x_P, y_P)$ $\quad \alpha(ax_P+by_P+c)+\beta(a'x_P+b'y_P+c')=0$

$\Rightarrow P \in \alpha r+\beta s.$

sia ora $Q \neq P$ basta far vedere che
la retta $\overline{PQ}$ è di eq. comb. lineare
di r ed s.

$$\alpha(a x_q + b y_q + c) +$$
$$\beta(a' x_q + b' y_q + c') = 0$$

almeno uno fra $a x_q + b y_q + c$ e
$a' x_q + b' y_q + c$
è $\neq 0$ perché $r \cap s = P \neq Q$.

ci ricaviamo (α, β) e dunque l'eq.
della retta per P e Q.

Se il fascio è improprio $\Rightarrow$

$r: ax+by+c=0$ e almeno uno fra c e c' è $\neq 0$

$s: ax+by+c'=0$

$\Downarrow$

$c' \neq 0$

$\Rightarrow$ $\cancel{r+\lambda s: \lambda(ax+by)+(c+c')}$

$r+\lambda s: \quad a(1+\lambda)x+b(1+\lambda)y+$

$+c+\lambda c'=0$

per $\lambda \neq -1 \rightarrow$ retta parallela ad r ed s.

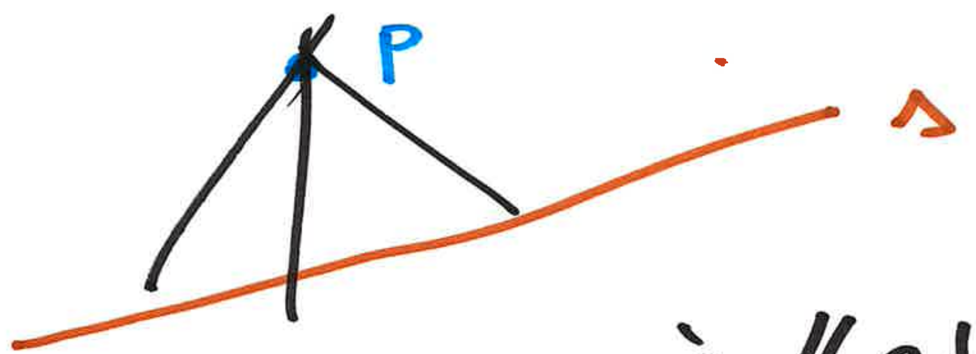
(per $\alpha=-1$ avremmo $0+c+\lambda c'=0$)

Se vogliamo che passi per $Q=(x_Q, y_Q)$

$$a x_q + b y_q + c = 0$$

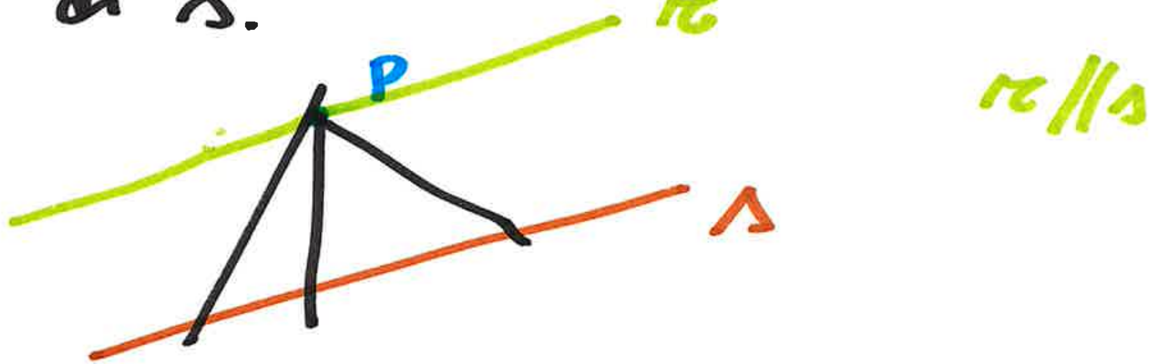
$$c = -a x_q - b y_q \qquad \#$$

<u>OSS</u>: Ci sono tante rette in un fascio proprio quanti punti in una retta +1



$P \notin s.$

OGNI RETTA PER P che non è // ad s interseca s in un punto $\Rightarrow \exists$ una biiezione fra tutte le rette per P ~~che non intersecano~~ non // s ed i punti di s.

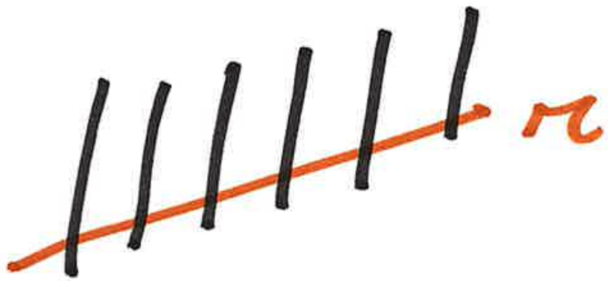


esiste una biiezione fra le rette del fascio per P e i punti di $s \cup \{s_\infty\}$.

Sia $\mathcal{F}$ un fascio improprio di rette.

Sia r una retta non del fascio $\Rightarrow$

$\exists$ una biiezione fra gli elementi di $\mathcal{F}$ e i punti di r.



$\underline{n=3}$

posizione reciproca di 2 piani nello spazio.

Un piano ha dim $= 2 \Rightarrow$ in $AG(3, \mathbb{K})$ è descritto da 1 equazione lineare

$$ax + by + cz + d = 0$$

1 $\pi = [P; \mathcal{L}((a\ b\ c), (d\ e\ f))]$

$P = (x_P\ y_P\ z_P)$

$$\begin{vmatrix} x - x_P & y - y_P & z - z_P \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

perchè corrisponde a

$$\vec{PX} \in \mathcal{L}((a\ b\ c), (d\ e\ f))$$

con $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 2$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_P & y_P & z_P & 1 \\ a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Nello spazio per 3 punti non allineati passa uno ed un solo piano.

$P = (x_P, y_P, z_P) \quad Q = (x_q, y_q, z_q) \quad R = (x_R, y_R, z_R)$

$\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ sono linearm. indip.

$\overrightarrow{PX} \in \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$

$$\begin{vmatrix} x-x_P & y-y_P & z-z_P \\ x_Q-x_P & y_Q-y_P & z_Q-z_P \\ x_R-x_P & y_R-y_P & z_R-z_P \end{vmatrix} = 0$$

$rk = 2$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_P & y_P & z_P & 1 \\ x_Q & y_Q & z_Q & 1 \\ x_R & y_R & z_R & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Intersezione di 2 piani

$$\begin{array}{l} \pi \\ \sigma \end{array} \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

$AX=B$

$(a,b,c) \neq (000)$
$(a'b'c') \neq (000)$

$rk\,A$	$rk\,(A\|B)$	# sol.	
1	1	∞^2	$\pi = \sigma$
* 1	2	0	$\pi // \sigma$ e $\pi \cap \sigma = \emptyset$
2	2	∞^1	$\pi \cap \sigma = r$

$\left.\begin{array}{l}\pi = \sigma \\ \pi // \sigma \text{ e } \pi \cap \sigma = \emptyset\end{array}\right\} \pi // \sigma$

*: i sistemi omogenei associati a π e σ sono equivalenti.

Intersezioni di 1 piano e 1 retta.

$r \subseteq AG(3, \mathbb{K})$ è descritta da un sistema di rango 2 compatibile

$\rightarrow$ r corrisponde all'intersezione di 2 piani non paralleli.

$$r \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \qquad rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2$$

$$\pi : a''x+b''y+c''z+d''=0$$

$$r := [P; W_1] \qquad \pi = [Q; W_2]$$

rk A	rk $A \mid B$	# sol.		
2	2	∞^1	$r \subseteq \pi$	$r /\!/ \pi$
* 2	3	0	$r /\!/ \pi$; $r \cap \pi = \emptyset$.	
3	3	1	$r \cap \pi = \{P\}$.	

*: Il sistema omogeneo della retta è eq. al sistema omogeneo cui si aggiunge l'eq. del piano $\Rightarrow$ ogni soluzione del sist. omogeneo della retta (= direzione della retta) è sol. del sist. omogeneo del piano.

$\Rightarrow W_1 \subseteq W_2$

Intersezione di 2 rette in $AG(3, \mathbb{K})$.

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad r = [P; U_1]$$

$$s \begin{cases} a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0 \end{cases} \qquad s = [Q; W_1]$$

$$rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} = 2$$

$rk(A)$	$rk(A\|B)$	# sol.	
2	2	∞^1	$r = s$
△ 2	3	0	$r // s$ $r \cap s = \emptyset$.
3	3	1	$r \cap s = \{P\}$.
* 3	4	0	r ed s sono sghembe.

△ i sistemi omogenei di r ed s sono equivalenti $\Rightarrow r // s$

* i sistemi omogenei di r ed s non sono equivalenti $\rightarrow$ r ed s non sono contenute in un medesimo piano $\Rightarrow$

oss che $r \cap s = \emptyset$ ma se r ed s fossero nel medesimo piano $\Rightarrow r // s$; d'altro canto r ed s hanno direzioni diverse $\Rightarrow$ ↯ $\Rightarrow$ non esiste un piano che contiene r ed s.