MASSIMO, MINIMO, ESTREMO SUPERIORE, ESTREMO INFERIORE

Def. M massimo di A $(M = \max A)$ $\iff \begin{cases} M \in A & (1) \\ M \geq a, \ \forall a \in A & (2) \end{cases}$

Il massimo di un insieme di numeri reali A quindi, se esiste, è un numero M dell'insieme A, che è maggiore o uguale ad ogni altro elemento dell'insieme A.

Def. m minimo di A $(m = \min A)$ $\iff \begin{cases} m \in A & (1) \\ m \leq a, \ \forall a \in A & (2) \end{cases}$

Il minimo di A analogamente, se esiste, è un numero m di A, che è minore o uguale ad ogni altro elemento dell'insieme A.

Proposizione – Il massimo e il minimo, se esistono, sono unici.

DIM: Siano, ad esempio, M_1 e M_2, due massimi per l'insieme A.

Ma allora, per definizione di massimo,

(1) $M_1 \geq a \quad \forall a \in A$ (2) $M_2 \geq a \quad \forall a \in A$.

Sempre per definizione, M_1 e M_2 sono elementi di A.

Quindi da (1) se $a = M_2$, ottengo

$$M_1 \geq M_2$$

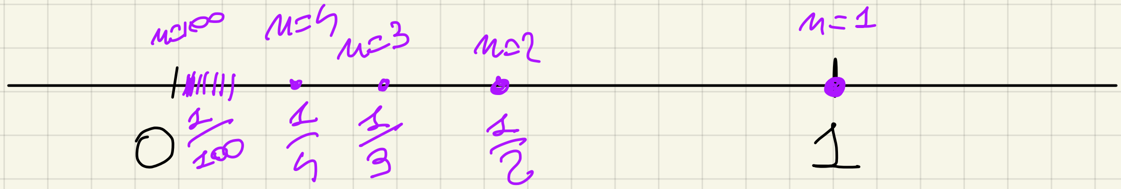
e da (2) se $a = M_1$, ottengo

$$M_2 \geq M_1.$$

Segue $M_1 = M_2$. #

OSS: Un insieme finito ammette sempre massimo e minimo, ma consideriamo i seguenti insiemi:

(1) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \underset{n=1}{1}, \underset{n=2}{\frac{1}{2}}, \underset{n=3}{\frac{1}{3}}, \underset{n=4}{\frac{1}{4}}, \dots, \frac{1}{n} \dots \right\}$



Il più grande elemento di A è 1, che è il massimo, il più piccolo non c'è.

② $B = \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} =$

$$= \left\{ \underset{n=1}{0}, \underset{n=2}{\frac{1}{2}}, \underset{n=3}{\frac{2}{3}}, \underset{n=4}{\frac{3}{4}}, \underset{n=5}{\frac{4}{5}}, \dots \dots, \dots, \underset{n=100}{\frac{99}{100}} \right\}$$

0 è il minimo.

Il massimo non c'è.

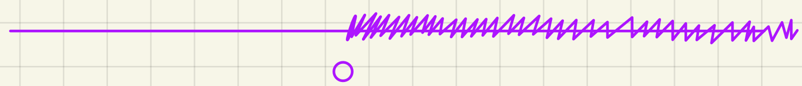
Def. L si dice MAGGIORANTE per un insieme A se

$$L \geq a \quad \forall a \in A.$$

l si dice MINORANTE per un insieme A se

$$l \leq a \quad \forall a \in A$$

NON sempre un insieme A ammette maggioranti o minoranti.



Esempio Considero l'insieme A che contiene tutti i numeri reali positivi.
Lo 0 ed un qualsiasi numero negativo sono minoranti per l'insieme A.

L'insieme A non ha maggioranti.

Def. L'insieme A si dice LIMITATO SUPERIORMENTE se ammette un maggiorante.

Analogamente A si dice LIMITATO INFERIORMENTE se ammette un minorante

A si dice LIMITATO se è limitato superiormente ed inferiormente.

- in simboli: A limitato $\iff \exists\, l, L$ t.c.

$$l \leq a \leq L \quad \forall a \in A$$

o equivalentemente si dimostra che

A limitato $\iff \exists\, M$ t.c. $|a| \leq M \quad \forall a \in A$

$$-M \leq a \leq M$$

$$|a| \leq M$$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

se $a \geq 0$ $\quad a \leq M$

se $a < 0$ $\quad -a \leq M$

$\quad a \geq -M$

$\implies -M \leq a \leq M$

TEOREMA DI ESISTENZA DELL'ESTREMO SUPERIORE

Sia A un insieme non vuoto di numeri reali e limitato superiormente. Allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di A.

Dim: $A = \{a \in A\}$ $\qquad$ $B = \{b \text{ maggiorante di } A\}$

per Hp A non vuoto

(A non vuoto) $\qquad$ (B non vuoto)

per Hp A è limitato superiormente

$a \le b \quad \forall a \in A$ e $\forall b \in B$

Applichiamo l'assioma di completezza ai due insiemi A e B, quindi esiste c numero reale t.c.

$$a \le c \le b \qquad \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B$$

$a \le c \ \ \forall a \in A \Rightarrow$ c è un maggiorante e quindi $c \in B$, l'insieme dei maggioranti.

- Ma $c \le b$ quindi (minore uguale di ogni altro elemento di B) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ c è un minimo

$\Rightarrow$ c è il minimo dei maggioranti.

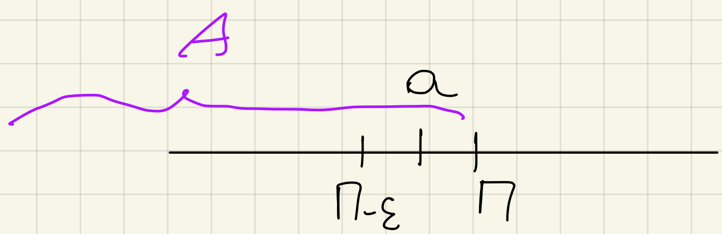
Allora possiamo dare la seguente definizione:

Def Sia A un insieme non vuoto di numeri reali e limitato superiormente. Diremo che $M \in \mathbb{R}$ è l'**ESTREMO SUPERIORE** di A se M è il minimo dei maggioranti di A.

IN SIMBOLI:

M ESTREMO SUPERIORE DI A

$$\overset{\text{def.}}{\iff} \begin{cases} M \geq a \quad \forall a \in A & \text{(1) } M \text{ è un maggiorante} \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : M - \varepsilon < a & \text{(2) } M \text{ è il MINIMO DEI MAGGIORANTI} \end{cases}$$



M è il minimo dei maggioranti, $M - \varepsilon$ non è un maggiorante.

Analogamente:

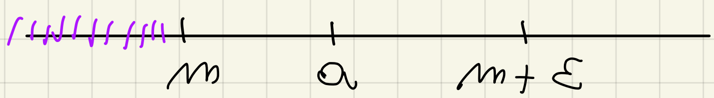
Def. Sia A un insieme non vuoto di numeri reali e limitato inferiormente. Diremo che m è l'ESTREMO INFERIORE di A se m è il massimo dei minoranti.

m ESTREMO INFERIORE di A

$$\Longleftrightarrow$$

m è un minorante — (1) $m \leq a \quad \forall a \in A$

m è il massimo dei minoranti — (2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \text{ t.c. } m + \varepsilon > a$



$m+\varepsilon$ non è più un minorante

$\Rightarrow$ Quindi se un insieme è limitato superiormente, allora esiste l'estremo superiore ed è un numero reale. Se un insieme è limitato inferiormente, allora esiste l'estremo inferiore ed è un numero reale.

Altrimenti:

Def. A insieme non vuoto. L'estremo superiore è $+\infty$ se A non è limitato superiormente. Se analogamente, A non è limitato inferiormente, l'estremo inferiore di A è $-\infty$.

$$\sup A = +\infty \overset{\text{DEF.}}{\iff} \forall L,\ \exists a \in A \text{ t.c. } a > L$$

$$\inf A = -\infty \overset{\text{DEF.}}{\iff} \forall \ell,\ \exists a \in A \text{ t.c. } a < \ell$$

- ogni insieme non vuoto di numeri reali ammette sia estremo superiore che inferiore. (che sono finiti se l'insieme è limitato superiormente ed inferiormente).

Esempi:

(1) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ dove $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots, n \dots\}$

(2) $B = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

(3) $C = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

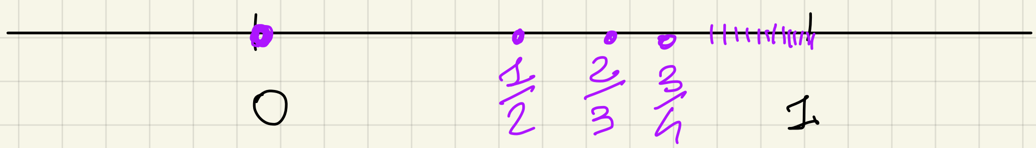
(4) $D = \left\{ (-1)^n \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

(5) $E = \left\{ (n+5)^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$.

(1) $A=\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\} = \left\{\underset{n=1}{1}, \underset{n=2}{\frac{1}{2}}, \underset{n=3}{\frac{1}{3}}, \underset{n=4}{\frac{1}{4}}, \dots\dots, \underset{n=100}{\frac{1}{100}}\right\}$

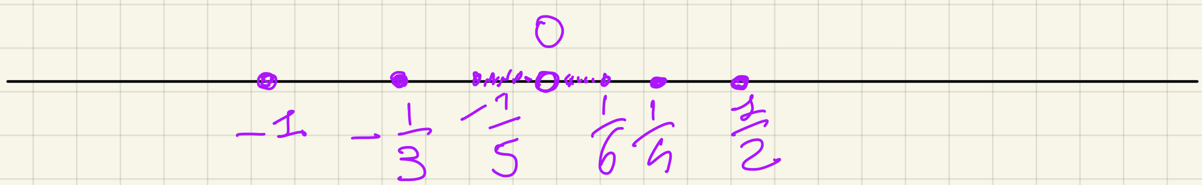
$\max A = \sup A = 1$ $\qquad$ $\inf A = 0$, $\min A$ non esiste

(2) $B=\left\{\frac{n-1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\} = \left\{1-\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\} = \left\{\underset{n=1}{0}, \underset{n=2}{\frac{1}{2}}, \underset{n=3}{\frac{2}{3}}, \underset{n=4}{\frac{3}{4}}, \dots\dots\dots, \underset{n=100}{\frac{99}{100}}\right\}$



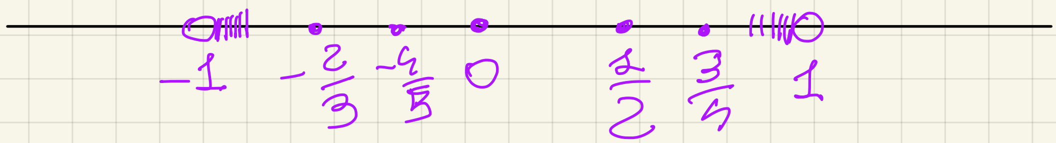
$\min B = \inf B = 0$ $\qquad$ $\sup B = 1$, $\max B$ non esiste

(3) $C=\left\{\frac{(-1)^n}{n} : n\in\mathbb{N}\right\} = \left\{\underset{n=1}{-1}, \underset{n=2}{\frac{1}{2}}, \underset{n=3}{-\frac{1}{3}}, \underset{n=4}{\frac{1}{4}}, \dots \dots\right\}$



$\min C = \inf C = -1$ $\qquad$ $\max C = \sup C = \frac{1}{2}$

(4) $D = \left\{ (-1)^n \dfrac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \underset{n=1}{0}, \underset{n=2}{\tfrac{1}{2}}, \underset{n=3}{-\tfrac{2}{3}}, \dots \right\}$



$\inf D = -1 \quad \sup D = 1$ max e min non esistono

(5) $E = \left\{ (n+5)^2 : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \underset{n=1}{6^2}, \underset{n=2}{7^2}, \dots \dots \right\}$

$\min E = \inf E = 6^2 \quad \sup E = +\infty$, max E non esiste.

OSS

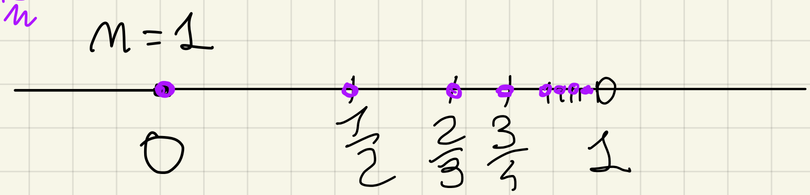
ASSIOMA DI COMPLETEZZA (PUNTO DI PARTENZA)

$\Downarrow$

ESISTENZA DELL'ESTREMO SUPERIORE

Esercizio Riprendiamo l'esercizio (2) precedente, dove

$$B=\left\{ \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{=1-\frac{1}{n}} : n\in \mathbb{N} \right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{99}{100}, \dots \right\}$$



- $\min B = 0$

dato che $\frac{n-1}{n} \geq 0$ e $\frac{n-1}{n} = 0$ per $n = 1$.

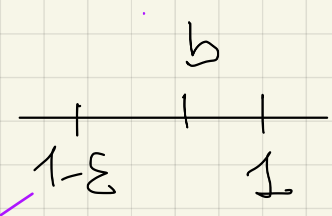
quindi è minore o uguale di ogni elemento dell'insieme e appartiene all'insieme.

- $\sup B = 1$

$$\begin{cases} 1 \geq b \quad \forall\, b \in B & (1) \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, b \text{ t.c. } 1-\varepsilon < b & (2) \end{cases}$$

(1) 1 è un MAGGIORANTE

(2) 1 è il MINIMO DEI MAGGIORANTI



(1) $1 \geq \frac{n-1}{n} \iff \cancel{n} \geq \cancel{n}-1 \iff 0 \geq -1$ O.K.

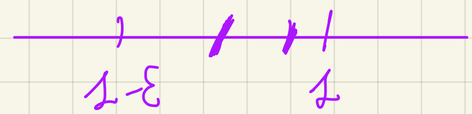
(2) Fissiamo $\varepsilon > 0$. Abbiamo che

$$1-\varepsilon < \frac{n-1}{n} \iff \cancel{1} - \varepsilon < \cancel{1} - \frac{1}{n} \iff \varepsilon > \frac{1}{n}$$

$$\iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Quindi, per ogni ε fissato, consideriamo

$\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon}$ t.c. $\frac{n-1}{n} > 1-\varepsilon$



(se $\varepsilon = 1$, scegliamo $\bar{n} = 2$, se $\varepsilon = 0{,}001 = \frac{1}{1000}$ possiamo prendere $\bar{n} > 1000$)

- devo poter trovare ε positivo.

$\Rightarrow$ 1 è l'estremo superiore, ma non è un massimo, perchè non appartiene all'insieme.