Esercitazione 07 Ottobre

Ripasso delle lezioni

Ricordiamo le definizioni di limite di successioni.

Definizione. *Diremo che il numero reale a è il limite della successione a_n e si scrive:*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a$$

se, qualunque sia $\epsilon > 0$ esiste un numero ν tale che:

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \quad \textit{per ogni } n > \nu$$

In simboli:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \nu : |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > \nu$$

Similmente vale:

Definizione. *Una successione a_n a limite $+\infty$ (si dice anche che la successione diverge a $+\infty$) e si scrive*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

se, qualunque sia $M > 0$, esiste un numero ν tale che:

$$a_n > M \qquad \textit{per ogni } n > \nu.$$

Inoltre una definizione similare vale per $-\infty$. In simboli:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \Longleftrightarrow \forall M > 0, \exists \nu : a_n > M \quad \forall n > \nu$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty \Longleftrightarrow \forall M > 0, \exists \nu : a_n < -M \quad \forall n > \nu$$

Teorema (Unicità del limite)**.** *Se esiste il limite $a \in \mathbb{R}$ della successione a_n, tale limite è unico.*

Dimostrazione. Ragionando per assurdo si supponga che $a_n \longrightarrow a$ e $a_n \longrightarrow b$ e $a \neq b$. Allora per la definizione di limite:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \exists \nu_1 \text{ tale che } |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > \nu_1 \\ \exists \nu_2 \text{ tale che } |a_n - b| < \epsilon \quad \forall n > \nu_2 \end{aligned}$$

Se prendo quindi $\epsilon = \frac{|a-b|}{2}$ e ponendo $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, valgono le seguenti disuguaglianze. $|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \epsilon + \epsilon = |a - b|$ Ma questo è assurdo. $\square$

Esercizi

Per comprendere profondamente la definizione di limite di una successione, si ragioni su successioni semplici per comprendere il significato delle variabili all'interno della definizione. Una successione non è da considerarsi come un sottoinsime di $\mathbb{R}$ bensì come una legge che associa ad ogni numero naturale n un numero reale a_n. Può aiutare immaginarsi che vi sia una certa "successione" temporale e che quindi a_1 è il primo termine, a_2 è il secondo termine (e viene dopo), a_3 viene ancora successivamente e così via.

Si pensi alla successione $a_n = \frac{1}{n}$ essa tende a zero non tanto perché è fatta tutta da numeri vicini a zero, infatti il primo termine della successione è 1. Quello che succede però è che via via che si hanno termini successivi della successione i valori $\frac{1}{n}$ diventano via via sempre più piccoli. Questo rimpicciolirsi si traduce nel fatto che il suo limite è zero.

Cosa centrano però ϵ e ν in tutto questo? Le due variabili rendono oggettivo e indiscutibile il fatto intuitivo che la nostra successione tenda effettivamente a zero. ϵ ci individua una sorta di intervallo vicino (arbitrariamente) al nostro limite (zero in questo caso). Si considerino alcuni valori di $\epsilon > 0$: $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{280000}$. Questi valori dentano i seguenti tre intervalli aperti $\left(0 - \frac{1}{2}; 0 + \frac{1}{2}\right)$, $(-2; 2)$ e $\left(-\frac{1}{280000}; \frac{1}{280000}\right)$. Ora, se è vero che il limite della successione è zero, deve succedere che da un certo valore dell'indice n della successione, ciascun (ma PROPRIO TUTTI) termine successivo stia in tale intervallo. Risulta perciò chiaro che più l'intervallo è piccolo, più è difficile individuare questo indice. L'indice di cui si è parlato prende il nome di ν e dipende dalla scelta fatta su ϵ. Considerando le scelte di ϵ fatte e perciò gli intervalli che ne derivano si cerca di individuare gli ν relativi. Quindi ci si chiede da quale indice in poi tutti i terini della successione stanno nell'intervallo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$? Questo accade in realtà già dal terzo indice in poi e perciò ν può essere preso uguale a 3 o anche uguale a qualsiasi valore successivo a 3 e di conseguenza si ha che a_n se $n > 3$ stanno nell'intervallo considerato. Se invece si considera l'intervallo $(-2; 2)$ allora si ha che tutti i termini della successione, fin dal primo, appartengono all'intervallo e quindi ν può essere preso uguale a 1. Infine se si prende l'intervallo $\left(-\frac{1}{280000}; \frac{1}{280000}\right)$, è più difficile individuare il valore di ν, infatti per molti termini i valori della successione sono fuori dall'intervallo considerato, però se si considera un ν sufficientemente alto si può comunque soddisfare la definizione di limite. Alcuni esempi di ν che vanno bene in questo caso sono: $\nu = 1000000$, $\nu = 123000000000$, oppure stando il più bassi possibile $\nu = 280000$.

Esercizio: Si consideri nuovamente la successione $a_n = \frac{1}{n}$. Se si cambiassero i primi 1000000 termini della successione in 700, ottenendo la seguente successione:

$$\begin{cases} a_n = 700 & \text{se } n \leq 1000000 \\ a_n = \frac{1}{n} & \text{se } n > 1000000 \end{cases}$$

il limite cambierebbe? Se no trovare possibili ν per gli intervalli considerati sopra.

Soluzione: Il limite non cambia, per ciascun intervallo basta considerare un $\nu \geq 1000000$, non si può infatti prenderlo più piccolo in quanto i primi termini sono tutti 700 e quindi fuori dagli intervalli considerati.

Esercizio: Se si cambiassero, non i primi 1000000 termini, bensì tutti i termini pari in 700 ottenendo la successione:

$$\begin{cases} a_n = 700 & \text{se } n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ a_n = \frac{1}{n} & \text{se } n = 2k-1, k \in n \end{cases}$$

Soluzione: Questa successione non ammette limite né 0 né 700, per vedere questo basta considerare l'intervallo $(-5, 5)$, non esiste nessun valore di ν degli n per cui la successione sta da ν in poi tutta nell'intervallo.

Proponiamo ora alcuni esercizi di carattere teorico.

Esercizio: Si consideri la successione

$$a_n = \frac{n}{2n+5}$$

Dimostrare mediante la definizione che tale successione ha limite $\frac{1}{2}$.

Soluzione: Si tenga ϵ generico e si discuta la disuguaglianza:

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{cioè} \quad \left| \frac{n}{2n+5} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{2n-(2n+5)}{2\,(2n+5)} \right| = \left| \frac{-5}{2\,(2n+5)} \right| = \frac{5}{2\,(2n+5)} < \epsilon$$

l'ultima disuguaglianza ottenuta va interpretata come una disequazione nell'incognita n e perciò

$$4n + 10 > \frac{5}{\epsilon}, \qquad 4n > \frac{5}{\epsilon} - 10, \quad n > \frac{5}{4\epsilon} - \frac{5}{2}$$

ponendo perciò $\nu = \frac{5}{4\epsilon} - \frac{5}{2}$ abbiamo verificato ciò che volevamo, cioè per ogni $\epsilon > 0$ esiste un ν per cui $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$ per ogni $n > \nu$.

Esercizio: Utilizzando la definizione di limite si dimostri che

$$a_n = \frac{n-4}{3n+1}$$

tende a $\frac{1}{3}$.

Soluzione:

$$\left| \frac{n-4}{3n+1} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3(n-4)-(3n+1)}{3\,(3n+1)} \right| = \left| \frac{-13}{3\,(3n+1)} \right| = \frac{13}{3\,(3n+1)} < \epsilon$$

$$9n + 3 > \frac{13}{\epsilon}, \qquad 9n > \frac{13}{\epsilon} - 3, \quad n > \frac{13}{9\epsilon} - \frac{1}{3}$$

Esercizio: Utilizzando la definizione di limite si dimostri che

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2-1)=+\infty$$

Soluzione:

$$n^2-1>M, \qquad n^2>M+1, \qquad n>\sqrt{M+1}$$

perciò se si fissa $\nu=\sqrt{M+1}$ è soddisfatta la definizione di limite.

Esercizio: Si mostri tramite la definizione che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+4}{n}\right)\neq\frac{1}{2}$$

Soluzione:

$$\left|\frac{n+4}{n}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{3(n+4)-(n)}{3n}\right|=\left|\frac{2n+12}{3n}\right|=\frac{2n+12}{3n}<\epsilon$$

$$2n+12<3n\epsilon, \qquad 2n-3n\epsilon<-12, \quad n(2-\epsilon)<-12$$

Ora se ϵ è sufficientemente piccolo ($\epsilon<2$) si ha

$$n<\frac{-12}{2-\epsilon}$$

essendo però che $n\in\mathbb{N}$ la disuguaglianza non è rispettata per alcun n.

Esercizio: Si dimostri tramite la definizione di limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+4}{n}\right)=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(5-n^2\right)=-\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^2-2n-3\right)=+\infty$$

Soluzione: Suggerimento: nell'ultimo caso serve risolvere una disequazione di secondo grado nell'incognita n.

Ricordiamo il seguente teorema:

Teorema. *Supponiamo* $\lim_{n\to+\infty}a_n=a$ *e* $\lim_{n\to+\infty}b_n=b$ *allora:*

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$$

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{a}{b}\ \textit{(se } b_n,b\neq 0\textit{)}$$

valgono inoltre analoghe proprietà per successioni divergenti nei casi specificati di seguito. Sia $a \in \mathbb{R}$.

$a_n \to a$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n + b_n \to +\infty$
$a_n \to a$	$b_n \to -\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n + b_n \to -\infty$
$a_n \to +\infty$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n + b_n \to +\infty$
$a_n \to -\infty$	$b_n \to -\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n + b_n \to +\infty$
$a_n \to a > 0$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to +\infty$
$a_n \to a < 0$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to -\infty$
$a_n \to +\infty$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to +\infty$
$a_n \to +\infty$	$b_n \to -\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to -\infty$
$a_n \to -\infty$	$b_n \to -\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to +\infty$
$a_n \to a$	$b_n \to \pm\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n/b_n \to 0$
$a_n \to a > 0$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n/b_n \to +\infty$
$a_n \to a < 0$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n/b_n \to -\infty$
$a_n \to a \neq 0$	$b_n \to 0$	$\Longrightarrow$	$\lvert a_n/b_n \rvert \to +\infty$
$a_n \to \pm\infty$	$b_n \to 0$	$\Longrightarrow$	$\lvert a_n/b_n \rvert \to +\infty$

Non sono presenti nella tabella sopra proposta le seguenti situazioni, che vengono dette orme indeterminate: $+\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, \infty^0, 0^0$.

Esercizio: Calcola il limite delle seguenti successioni:

$$\frac{3n-1}{n+3}, \qquad \frac{n^4+5}{n^5+7n-1}, \qquad \sqrt{n-1}-n, \qquad \sqrt{4n^2+1}-2n-1$$

Soluzione:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(3-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{3-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n}} = 3$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4+5}{n^5+7n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4\left(1+\frac{5}{n^4}\right)}{n^5\left(1+\frac{7}{n^4}-\frac{1}{n^5}\right)} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n-1}-n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n-1}-n\right)\frac{\left(\sqrt{n-1}+n\right)}{\left(\sqrt{n-1}+n\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1-n^2}{\left(\sqrt{n-1}+n\right)} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-1\right)}{n\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n}+1\right)} = -\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{4n^2+1}-2n-1\right)\frac{\left(\left(\sqrt{4n^2+1}+2n-1\right)\right.}{\left(\sqrt{4n^2+1}+2n-1\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2+1-4n^2-2n-1}{\left(\sqrt{4n^2+1}+2n-1\right)} = -\frac{1}{2}$$

Limiti notevoli

Ricordiamo alcuni limiti notevoli visti in classe:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ 1 & a=1 \\ 0 & -1<a<1 \\ \text{non esiste} & a\leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & b>0 \\ 1 & b=0 \\ 0 & b<0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1, \quad \forall a>0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{b}{n}} = 1, \quad \forall b\in\mathbb{R}$$

Inoltre, si hanno i seguenti limiti relativi alle funzioni trigonometriche:

$$a_n \to 0 \Longrightarrow \sin(a_n) \to 0$$
$$a_n \to 0 \Longrightarrow \cos(a_n) \to 1$$

se si considera ad esempio la successione $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ e $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$. Valgono anche i seguenti:

$$a_n \to 0, a_n \neq 0 \ \ \forall n \Longrightarrow \frac{\sin(a_n)}{a_n} \to 1$$
$$a_n \to 0, a_n \neq 0 \ \ \forall n \Longrightarrow \frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} \to \frac{1}{2}$$

Dal primo si può dimostrare il secondo.

Dimostrazione.

$$\frac{(1-\cos(a_n))}{a_n^2} = \frac{(1-\cos(a_n))\,(1+\cos(a_n))}{a_n^2\,(1-\cos(a_n))} = \frac{1-\cos^2(a_n)}{a_n^2\,(1+\cos(a_n))} =$$
$$= \frac{\sin^2(a_n)}{a_n^2} \cdot \frac{a_n^2}{(1+\cos(a_n))} = \frac{1}{2}$$

Infatti $\frac{\sin^2(a_n)}{a_n^2} \to 1$ e $(1+\cos(a_n)) \to 2$ $\square$

Esercizio: Si calcolino i limiti delle seguenti successioni:

$$n\sin\frac{1}{n},\qquad \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{3}{n}\right)},\qquad \frac{1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)}{\sin\left(\frac{3}{n^2}\right)},\qquad n^2\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)$$

Soluzione:

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \cancelto{1}{\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}} \cdot n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \cancelto{1}{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} \cdot \cancelto{1}{\frac{\frac{3}{n}}{\sin\left(\frac{3}{n}\right)}} \cdot \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)}{\sin\left(\frac{3}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \cancelto{\frac{1}{2}}{\frac{1-\cos\left(\frac{3}{n}\right)}{\left(\frac{3}{n}\right)^2}} \cdot \cancelto{1}{\frac{\left(\frac{3}{n^2}\right)}{\sin\left(\frac{3}{n^2}\right)}} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{n^2}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \cancelto{\frac{1}{2}}{\frac{1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)}{\left(\frac{2}{n}\right)^2}} \cdot 2^2 = 2$$

Si ha anche un certo ordine nelle successioni che divergono a $+\infty$, alcune di esse infatti divergono con maggiore rapidità. Per questo si può stilare una sorta di ordine crescente tra gli infiniti:

$$\log n;\ \ n^b;\ \ a^n;\ \ n!;\ \ n^n$$

Esercizio: Si calcolino i limiti delle seguenti successioni:

$$\sqrt[n]{\pi};\ \ \sqrt[n]{2n};\ \ \frac{2^{n+1}+1}{3^n+1};\ \ (3^n+4^n-5^n);\ \ n^{-e};\ \ \frac{2^n-4^n}{3^n-n!}$$

Soluzione:

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\pi}=1$ per il limite notevole relativo alla radice n-esima

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}$ sempre per il limite notevole relativo alla radice n-esima

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}+1}{3^n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot 2^n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{3^n\left(1+\frac{1}{3^n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\left(1+\frac{1}{3^n}\right)} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}(3^n+4^n-5^n) = \lim_{n\to+\infty}5^n\left(\frac{3^n}{5^n}+\frac{4^n}{5^n}-1\right) = -\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-e} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n-4^n}{3^n-n!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\left(\frac{2^n}{4^n}-1\right)}{n!\left(\frac{3^n}{n!}-1\right)} = 0$$