Esercitazione 1 Ottobre

Ripasso delle lezioni ed esercizi

Ricordiamo che l'equazione di secondo grado della forma

$$z^2 + 1 = 0$$

non ha soluzione nell'ambito dei numeri reali. Per questo nasce la necessità di introdurre un altro insieme numerico che comprende anche tutti i numeri reali. Questo insieme viene detto dei **numeri complessi** e si denota con il seguente simbolo $\mathbb{C}$. Pertanto si introduce l'**unità immaginaria** $i = \sqrt{-1}$. Un numero complesso poi può essere rappresentato tramite tre forme.

1. **algebrica**
2. **trigonometriaca**
3. **esponenziale**

Nella forma algebrica il numero è espresso nella forma

$$z = a + ib \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

Inoltre a prende il nome di **parte reale** e b **coefficiente della parte immaginaria**

Esercizio: Eseguire le seguenti operazioni fra numeri complessi

$$\left(\frac{1}{2} - 6i\right) - \left(\frac{3}{2} + 6i\right) - 2i \qquad (2 - 5i)(i + 1)$$

$$\left(\frac{1}{4} - i\right)^2 \qquad \overline{(1+i)^5}$$

Soluzione: $-1 - 14i$, $-3i + 7$, $-\frac{15}{16} - \frac{1}{2}i$ e $\overline{-4 + 4i} = -4 - 4i$

Esercizio: Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri in forma algebrica

$$\frac{4i}{1 - 2i} \qquad \frac{1}{i}$$

Soluzione: Dobbiamo procedere in questo modo:

$$\frac{4i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = -\frac{8}{5} + \frac{4}{5}i$$

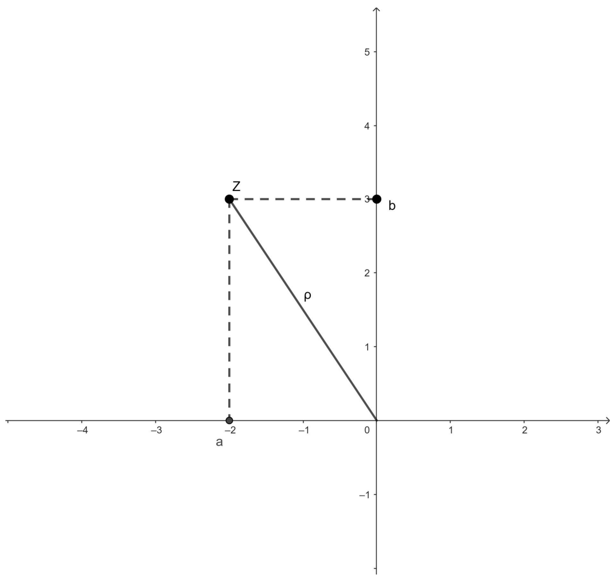
$$\frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{1} = -i$$

Esercizio: Facendo riferimento alla forma algebrica, caratterizza i numeri $\mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Esercizio: Calcolare le prime dieci potenze di i. Si nota una ricorrenza? quanto vale i^{273}?

Definizione. *A partire da un numero complesso $z = a + ib$. Si definisce il suo **coniugato** $\overline{z} = a - ib$ e il suo **modulo** $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$*

Un numero complesso $z = a + ib$ può essere rappresentato geometricamente in un piano cartesiano come il punto (a, b) nel seguente modo



Esercizio: A partire da un numero complesso generico, cosa si può dire della rappresentazione nel piano del suo coniugato.

A partire dalla rappresentazione se chiamiamo θ l'angolo orientato tra l'asse delle ascisse e il punto z, si ottiene la seguente uguaglianza $z = a + ib = \rho \cos\theta + i \sin\theta$. Perciò possiamo rappresentare il numero complesso z in un'altra forma, detta forma trigonometrica

$$z = \rho \cos\theta + i\rho \sin\theta$$

ρ come detto in precedenza è il **modulo** del numero complesso, mentre θ viene chiamato argomento. Inoltre per quanto detto sopra valgono le seguenti formule:

$$\begin{cases} a = \rho \cos\theta \\ b = \rho \sin\theta \end{cases} \implies \begin{cases} a^2 = \rho^2 \cos^2\theta \\ b^2 = \rho^2 \sin^2\theta \end{cases} \implies a^2 + b^2 = \rho^2$$

$$\sin\theta = \frac{b}{\rho}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{\rho}, \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} \text{ se } a \neq 0$$

La forma trigonometrica associata alla rappresentazione dei numeri complessi nel piano cartesiano da un significato geometrico interessante per quanto riguarda la moltiplicazione, la divisione e quindi l'elevamento a potenza e la radice.

Riprendiamo quanto visto in classe, siano $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, allora

$$z_2 \cdot z_1 = \rho_1\rho_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)((\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)) =$$
$$\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2) =$$
$$\rho_1\rho_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\right] =$$
$$\rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

Questa formula ci aiuta a visualizzare cosa succede quando moltiplico due numeri complessi; infatti, l'angolo del prodotto altro non è che la somma degli angoli dei fattori e il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli dei fattori.

Ricordiamo infine la formula per calcolare le radici-$n$esime di un numero complesso. Sia perciò $z^n = w$ con w noto e tale che la sua scrittura in forma trigonometrica sia: $w = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$. Allora posto $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ dalla formula sul prodotto si ricava

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = r^{\frac{1}{n}} \\ \theta = \frac{\alpha+2k\pi}{n} \end{cases} \quad \text{con } k = 0, 1, \ldots n-1$$

Esercizio: Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri:

$$-1 + i\sqrt{3}, \qquad -1 + i\sqrt{3}, \qquad -\sqrt{3} + i, \qquad 2 - 2i$$

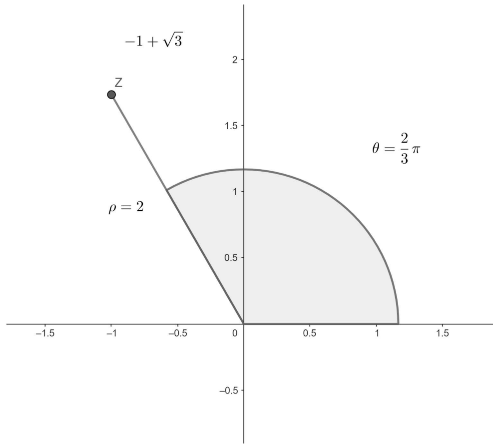
Soluzione: Ci sono due strategie per procedere, una algebrica calcolandosi il modulo e l'argomento dei numeri complessi e l'altra grafica, che consiste nel rappresentare i numeri complessi nel piano cartesiano e dedurre dal grafico l'angolo e il modulo. Forniamo due esempi, partiamo dal numero $-1 + i\sqrt{3}$ e procediamo con il primo metodo:

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\rho} = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{b}{\rho} = +\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Avendo trovato valori noti delle funzioni goniometriche deduciamo che $\theta = \frac{2}{3}\pi$, quindi $-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

Per quanto riguarda il numero $-1+i\sqrt{3}$ procediamo a rappresentarlo nel piano cartesiano e infine deduciamo, se possibile, la sua forma trigonometrica: $-1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$



Per gli ultimi due numeri si hanno invece le seguenti scritture:

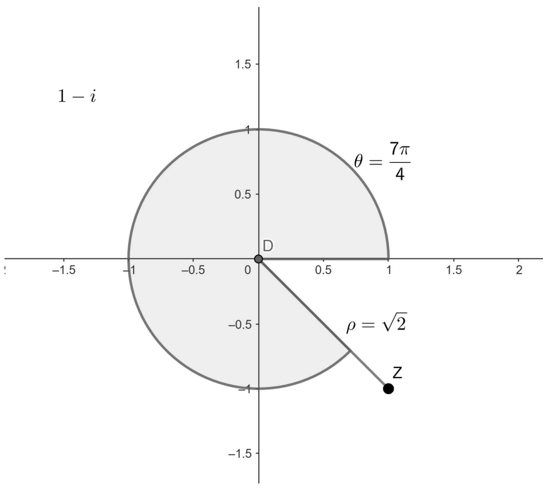
$$\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi\right)$$

$$2-2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$

Esercizio: Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri:

$$\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

Sfruttando la conoscenza sul prodotto o potenza dei numeri complessi capiamo che è conveniente sviluppare una potenza di un numero complesso con un indice elevato in forma trigonometrica, e non in forma algebrica. Si pensi al seguente caso: $(i-1)^{13}$. Non è conveniente sviluppare tutti i tredici termini. Bensì, dopo aver rappresentato il numero nel piano complesso:



Si trova facilmente:

$$(i-1)^{13} = (\sqrt{2})^{13})\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\cdot 13\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\cdot 13\right)\right) =$$

$$4\sqrt{2}\left(\cos\frac{91}{4}\pi + i\sin\frac{91}{4}\right) = 64\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = 64\sqrt{2}(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}2i) = 64 - 64i$$

Esercizi stile compito

I seguenti esercizi sono simili a quelli che potrebbero capitare in un eventuale scritto.

Esercizio: Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$z^6 + 7z^3 - 8 = 0$$

Soluzione: Sostituiamo $w = z^3$ e scomponiamo:

$$w^2 + 7w - 8 = (w+8)(w-1)$$

Perciò individuiamo le soluzioni $w_1 = -8$ e $w_2 = 1$, ora si vogliono trovare le soluzioni delle seguenti equazioni $z^3 = w_1$ e $z^3 = w_2$, per fare ciò si scrivano w_1 e w_2 in forma trigonometrica e si applichi la formula per le radici n-esime.

$$w_1 = 8\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right)$$
$$w_2 = 1\left(\cos(0) + i\sin(0)\right)$$

$$z_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right) \qquad z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i \qquad z_4 = 1\,(1) = 1$$

$$z_2 = 2(-1) = -2 \qquad z_2 = 1\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z_3 = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}i \qquad z_3 = 1\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

Esercizio: Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$iz^4 - \left|\sqrt{3} + i\right| z = 0$$

Soluzione: Prima cosa da fare è calcolare il modulo del numero complesso $\sqrt{3} + i$. Questo grazie alle formule ricordate nella prima parte, risulta essere $\left|\sqrt{3} + i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ e perciò l'equazione assume la forma

$$iz^4 - 2z = 0$$

$$z(iz^3 - 2) = 0$$

Perciò si ha che $z = 0$ oppure $z^3 = \frac{2}{i} = -2i$. $-2i = 2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)$ e dalla formula usata nel precedente esercizio si arriva alle seguenti soluzioni.

$$z_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right) = \sqrt[3]{2}i$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

Esercizio: Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$z^3 = (1+i)^{12}$$

Soluzione: Per calcolare rapidamente $(1+i)^{12}$ si può scrivere il numero in forma trigonometrica. Senza utilizzare formule si può notare dalla rappresentazione del numero nel piano cartesiano $\rho = \sqrt{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$. Perciò:

$$(1+i)^{12} = (\sqrt{2})^{12}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}12\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}12\right)\right) = 64(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi)) = 64(-1) = -64$$

Sfruttando poi la scrittura trigonometrica del numero -64 si possono ricavare le sue radici terze.

$$z_k = \sqrt[3]{64}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_1 = 4\left(\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$z_2 = 4\left(\cos\left(\pi\right) + i \sin\left(\pi\right)\right) = 4(-1) = -4$$

$$z_3 = 4\left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right) = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 - 2\sqrt{3}i$$

Esercizio: Risolvere nel campo complesso la seguente equazione:

$$4z^2 - 4z + 3 - 2\sqrt{3}i = 0$$