Esercitazione 08 Gennaio

Esercizio:[21-01-2022] Calcolare il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-3\left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)-\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right](n+1)!\,(n+\log(n))^4}{n!}$$

Soluzione: Per comprendere al meglio l'ordine al quale conviene sviluppare il limite, valutiamo prima il fattore

$$\frac{(n+1)!\,(n+\log(n))^5}{n!} \sim \frac{(n+1)\cancel{n!}n^5}{\cancel{n!}} \sim n^6$$

Pertanto sviluppiamo i termini del fattore $\left[2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-3\left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)-\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]$ fino al sesto ordine.

$$\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1-\frac{1}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$
$$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}-\frac{1}{6n^6}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$
$$\sin^2\left(\frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{120n^5}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)^2 = \frac{1}{n^2}-\frac{1}{36n^6}-\frac{1}{3n^4}+\frac{1}{60n^6}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

Pertanto il fattore ha come sviluppo

$$\left[2\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-3\left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)-\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]=$$

$$2\left(1-1+\frac{1}{2n^4}\right)-3\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{6n^6}-\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{36n^6}-\frac{1}{3n^4}+\frac{1}{60n^6}\right)\right)+o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

$$\frac{1}{n^4}-3\left(\frac{1}{3n^4}-\frac{1}{6n^6}-\frac{1}{36n^6}-\frac{1}{60n^6}\right)+o\left(\frac{1}{n^6}\right)=\frac{1}{2n^6}+\frac{1}{12n^6}+\frac{1}{20n^6}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)=\frac{19}{30n^6}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

In virtù di quanto indicato sopra si ha la seguente soluzione per l'esercizio

$$\left(\frac{19}{30n^6}+o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)\cdot n^6 \to \frac{19}{30}$$

Esercizio:[03-09-2021] Calcola l'integrale:

$$\int_0^1 \frac{e^{4t}+6e^{3t}+13e^{2t}+e^t}{e^{2t}+6e^t+13}dt$$

Soluzione: Utilizzo la seguente sostituzione: $x = e^t \iff dx = e^t dt$, gli estremi di integrazione variano nel seguente modo $t = 0 \iff x = 1$; $t = 1 \iff x = e$. Pertanto raccogliendo e^t al numeratore si arriva al seguente integrale di una razionale:

$$\int_1^e \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 1}{x^2 + 6x + 13} dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x^2 + 6x + 13} \right) dx$$

Poiché $x^2 + 6x + 13$ ha determinante negativo devo ricondurmi ad un integrale della forma $\arctan(x)$

$$\left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{(x+3)^2 + 4} dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e + \frac{1}{4} \cdot 2 \int_1^e \frac{D\left(\frac{x+3}{2}\right)}{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 + 1} dx =$$

$$\left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+3}{2} \right) \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{e+3}{2} \right) - \frac{1}{2} \arctan(2)$$

Esercizio: Enuncia il Criterio del rapporto per le successioni. Stabilire per quali delle seguenti successioni può essere applicato efficacemente:

$$a_n = n^2 + 3 \qquad b_n = \frac{n^n}{(n+1)!} \qquad c_n = \frac{\sin(n)}{2n+3}$$

In caso affermativo discutere la convergenza o divergenza della successione, in caso negativo specificare per quali ragioni il criterio non può essere applicato o non risulta efficace e si discuta comunque il carattere della successione.

Soluzione: L'enunciato è abbastanza corto, non bisogna però dimenticarsi di nessuna delle ipotesi. Per completezza lo riportiamo qui sotto.

Teorema (Criterio del Rapporto)**.** *Sia a_n una successione a termini positivi. Sia*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \to a$$

Se $a \in [0, 1)$, allora la successione a_n converge a zero. Se $a \in (1, +\infty)$ la successione a_n diverge a $+\infty$.

Ora il criterio si può applicare alla prima e seconda successione in quanto sono successioni a termini positivi. Pertanto valutiamole tramite il criterio.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^2 + 3}{n^2 + 3} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 + 2n + 4}{n^2 + 3} = 1$$

In questo primo caso il criterio del rapporto non ci aiuta a discutere la convergenza o divergenza della successione, risultando quindi inefficace. Possiamo comunque valutare immediatamente che la successione è divergente.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \to 1 \cdot e = e$$

Pertanto il criterio ci aiuta a dedurre che la successione è divergente. Infine, sebbene non si possa applicare il criterio alla terza successione in quanto non è a termini positivi, si deduce facilmente grazie al Teorema dei Carabinieri e alla disuguaglianza $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ che la successione converge a 0.

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{2n+3} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{2n+3} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+3} \implies$$

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{2n+3} \leq 0 \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{2n+3} = 0$$

Esercizio: Enuncia il teorema dell'esistenza dell'estremo superiore. Vale anche un analogo risultato per l'estremo inferiore. In caso affermativo si enunci questo risultato. Individuare l'estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi numerici:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x = (-2)^n + 3, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$$

Soluzione: Sì, vale un risultato analogo.

Teorema (Esistenza dell'estremo inferiore)**.** *Sia A un insieme non vuoto di numeri reali limitato inferiormente. Allora esiste il massimo dell'insieme dei minoranti di A. Quest'ultimo viene chiamato estremo inferiore di A.*

$\inf(A) = 2 \quad \sup(A) = e, \inf(B) = -\infty, \sup(A) = +\infty$

Esercizio:[21-01-2022] Studiare il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{e^x}$$

Determinare l'insieme di definizione, eventuali asintoti, intervalli di monotonia e convessità. Disegnare il grafico qualitativo della funzione f(x) in accordo con i risultati trovati.

Soluzione: La funzione è definita per ogni valore reale, poiché il denominatore e^x è sempre positivo e diverso da zero per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi, il dominio è $\mathbb{R}$. Non ci sono asintoti verticali poiché e^x non si annulla mai. Studiamo il limite per $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)^2}{e^x} = \frac{+\infty}{0} = +\infty$$

Si ha perciò un'asintoto orizzontale in $y = 0$. Valutiamo la possibile esistenza di un asintoto obliquo calcolando

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x-1)^2}{xe^x} = +\infty$$

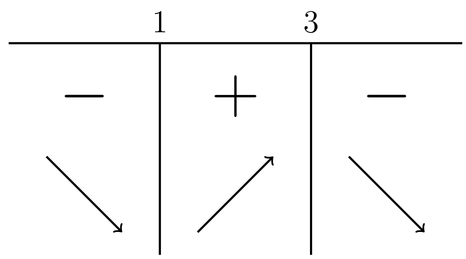
Pertanto non è presente alcun asintoto obliquo. Calcoliamo, ora, la derivata prima con la regola del quoziente:

$$f'(x) = \frac{2(x-1)e^x - (x-1)^2 e^x}{e^{2x}} = \frac{2(x-1) - (x-1)^2}{e^x} = \frac{2x - 2 - x^2 + 2x - 1}{e^x} =$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{e^x} = -\frac{(x-1)(x-3)}{e^x}$$

Studiamo il segno della derivata si ha

$$f'(x) \geq 0 \implies 1 \leq x \leq 3$$



e pertanto la funzione ha un minimo assoluto in 1 e un massimo relativo $x = 3$.

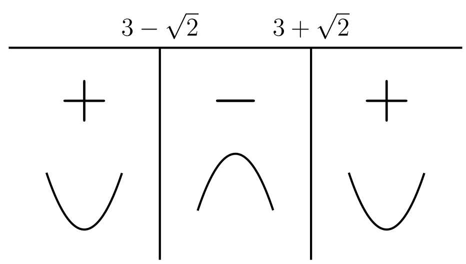
Calcoliamo or ala derivata seconda

$$f''(x) = \frac{e^x[-2x+4] - e^x[-x^2+4x-3]}{e^{2x}} = \frac{-2x+4+x^2-4x+3}{e^x} = \frac{x^2-6x+7}{e^x}$$

Studiando il segno si ha che

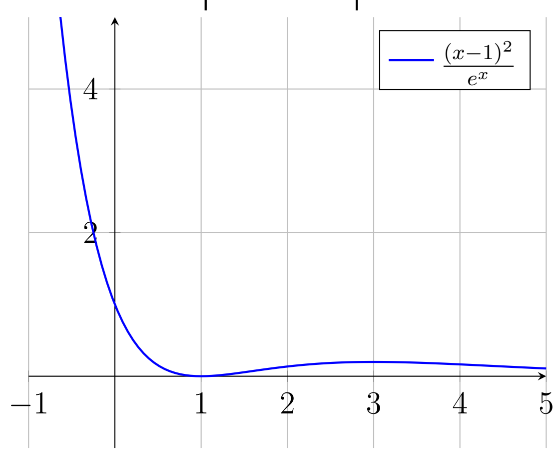
$$f''(x) \geq 0 \implies x^2 - 6x + 7 \geq 0 \implies$$

$$x \leq 3 - \sqrt{2} \quad \cup \quad x \geq 3 + \sqrt{2}$$



Pertanto si hanno du punti di flesso in $x = 3 \pm \sqrt{2}$.

Riportiamo ora il grafico qualitativo della funzione nel quale sono riassunti tutti i risultati ottenuti in precedenza.



Esercizio:

[21-01-2022]Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \left(\frac{n+4}{3n-1}\right)^{2n}$$

(a) al variare del parametro $x > 0$;

(b) al variare del parametro $x < 0$;

Soluzione:

(a) Per $x > 0$ si può applicare il criterio della radice valutanto

$$\sqrt{a_n} = x\left(\frac{n+4}{3n-1}\right)^2 \to x \cdot \frac{1}{9}$$

perciò se $x > 9$ la serie diverge, se $0 < x < 9$ la serie converge. Per $x = 9$ il criterio della radice non ci aiuta a stabilire il carattere della serie e perciò valutiamo il termine

$$9^n \cdot \left(\frac{n+4}{3n-1}\right)^{2n} = \left(\frac{3n+12}{3n-1}\right)^{2n}$$

Perciò ci si riconduce alla successione $(1+\epsilon_n)^{\frac{1}{\epsilon_n}}$ con $\epsilon_n = \frac{3n+12}{3n-1} - 1 = \frac{13}{3x-1}$, perciò

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \left[(1+\epsilon_n)^{\frac{1}{\epsilon_n}}\right]^{2n\cdot\epsilon_n} \to e^{\frac{26}{3}}$$

essendo la successionone non è infinitesima si ha che la serie è divergente.

(b) Essendo la serie a termini alterni si utilizza il criterio di Leibiniz considerando il termine generale $a_n = |x|^n \left(\frac{n+4}{3n-1}\right)^{2n}$ Per quanto detto sopra si ha che a_n è infinitesima solo nel caso in cui $-9 < x < 0$. Pertanto la serie è convergente solo per quei valori, viceversa per $x \leq -9$ la serie è indeterminata.