Esercitazione 19 Novembre

Ripasso delle lezioni

Ricordiamo un teorema importante che utilizza la derivabilità di una funzione.

Teorema. *Siano f e g derivabili in un intorno di un punto x_0 tali che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad e \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se risulta $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 e purché esista il secondo limite.

Esercizi

Esercizio: Studia il grafico della funzione:

$$f(x) = e^{x-1} - |x|$$

Determinare l'insieme di definizione, eventuali asintoti, intervalli di monotonia. Disegnare il grafico qualitativo della funzione $f(x)$ in accordo con i risultati trovati.

Soluzione: La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è continua essendo una composizione di funzioni continue e definite su tutto $\mathbb{R}$. Inanzi tutto valutiamo la funzione con la seguente impostazione:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - x & \text{se } x \geq 0 \\ e^{x-1} + x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Valutiamo ora i limiti agli estremi del dominio.

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x-1} + x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} e^{x-1} - x = +\infty$$

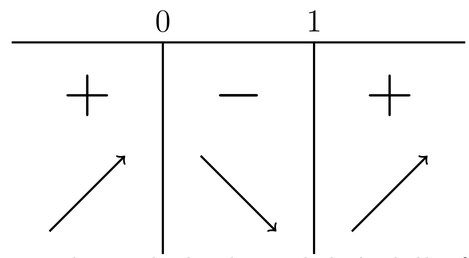
Infatti l'esponenziale tende a 0 per x tendente a $-\infty$, mentre per x tendente a $+\infty$ l'esponenziale vince sulla polinomiale per il confronto tra infiniti. Bisogna perciò valutare eventuali asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x-1} + x}{x} = 1 \qquad m = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-1} - x}{x} = +\infty$$

Allora ho l'asintoto obliquo per $x \to -\infty$ e va calcolato $q = \lim_{x \to -\infty} e^{x-1} + x - x = 0$, perciò l'asitonto obliquo è la bisettrice del primo e terzo quadrante $y = x$. Calcoliamo ora la derivata prima di $f(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 1 & \text{se } x \geq 0, \\ e^{x-1} + 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Analizziamo il segno della derivata. Per $x > 0$, $e^{x-1} - 1 \geq 0 \implies e^{x-1} \geq e^0 \implies x \geq 1$ e $e^{x-1} - 1 < 0$ per $0 < x < 1$, quindi $f(x)$ è crescente per $x > 1$ e decrescente per $0 < x < 1$. Per $x < 0$, $e^{x-1} + 1 > 0$ e dunque la funzione è sempre crescente in $(-\infty, 0)$.



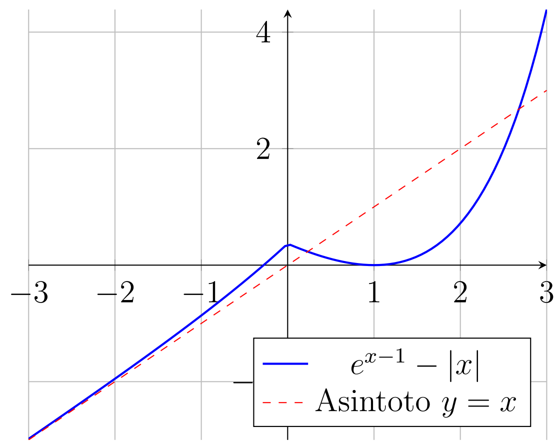
Riassumiamo la situazione nel grafico qui a fianco. Valutando la derivabilità della funzione nel punto $x = 0$ si ottiene il seguente risultato:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \frac{1}{e} - 1 \neq \frac{1}{e} + 1 \lim_{x \to 0^+} f'(x)$$

Perciò, la funzione non è derivabile in $x = 0$. Calcoliamo ora la deirvata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{se } x \geq 0, \\ e^{x-1} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Perciò la derivata seconda è sempre positiva e di conseguenza la funzione è sempre convessa. Riportiamo ora i riultait ottenuti nel grafico qualitativo a fianco.



Esercizio: Studia il grafico della funzione:

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - 2e^x + 3\right)$$

Determinare l'insieme di definizione, eventuali asintoti, intervalli di monotonia. Disegnare il grafico qualitativo della funzione $f(x)$ in accordo con i risultati trovati.

Soluzione: L'insieme di definizione della funzione è determinato dalla condizione di positività dell'argomento del logaritmo: $e^{2x} - 2e^x + 3 > 0$. Ponendo $t = e^x > 0$, il termine diventa $t^2 - 2t + 3 > 0$. Studiando il segno del trinomio, si trova un delta negativo: $\frac{\Delta}{4} = 1 - 3$ da cui si conclude che il trinomio è sempre positivo. Pertanto, $e^{2x} - 2e^x + 3 > 0$ è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, e quindi $f(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$. Calcoliamo, ora, i limiti agli estremi del dominio. Per $x \to +\infty$, il termine dominante nell'argomento del logaritmo è e^{2x}:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) \sim \lim_{x \to +\infty} \ln(e^{2x}) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln(3)$$

Pertanto, $y = \ln(3)$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Mentre per , per $x \to +\infty$, $f(x)$ può ammettere asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^{2x} - 2e^x + 3)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^{2x})}{x} = 2$$

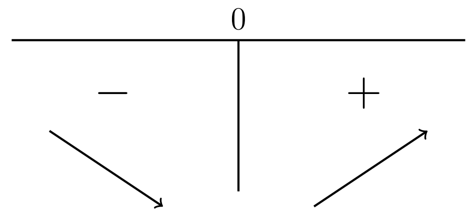
$$q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(e^{2x}\right) - 2x = \ln(1) = 0.$$

L'asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è dunque $y = 2x$. Calcoliamo ora la derivata prima. Deriviamo $f(x)$ usando la regola della derivata del logaritmo:

$$f'(x) = \frac{D(e^{2x} - 2e^x + 3)}{e^{2x} - 2e^x + 3} = \frac{2e^{2x} - 2e^x}{e^{2x} - 2e^x + 3} = \frac{2e^x(e^x - 1)}{e^{2x} - 2e^x + 3}$$

Studiando il segno di $f'(x)$ si ottiene:

$$\frac{2e^x(e^x - 1)}{e^{2x} - 2e^x + 3} \geq 0 \implies e^x - 1 \geq 0 \implies x \geq 0$$



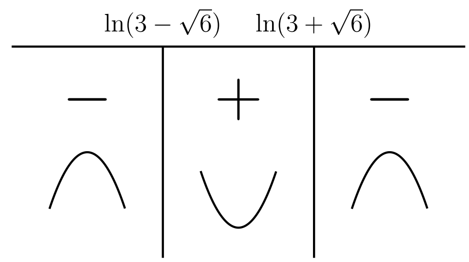
Perciò, la funzione $f(x)$ è decrescente per $x < 0$ e crescente per $x > 0$, minimo relativo in $x = 0$. Calcoliamo $f(0) = \ln(e^0 - 2e^0 + 3) = \ln(2)$.
Deriviamo $f'(x)$ per studiare la concavità calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{(4e^{2x} - 2e^x)(e^{2x} - 2e^x + 3) - (2e^{2x} - 2e^x)^2}{(e^{2x} - 2e^x + 3)^2} = \frac{-2e^x(e^{2x} - 6e^x + 3)}{(e^{2x} - 2e^x + 3)^2}$$

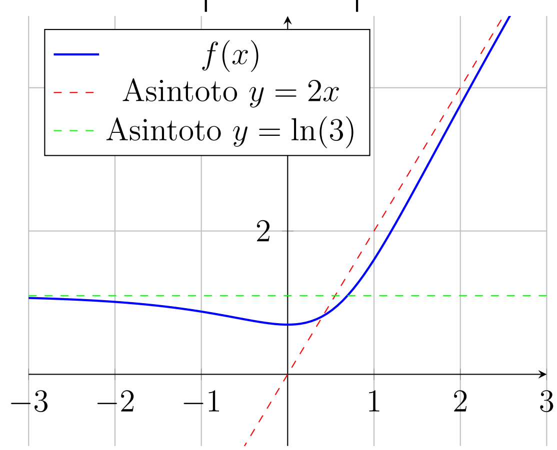
Perciò consideranto il segno della derivata seconda:

$$\frac{-2e^x(e^{2x} - 6e^x + 3)}{(e^{2x} - 2e^x + 3)^2} \geq 0 \implies e^{2x} - 6e^x + 3 \leq 0$$

$$e^x = 3 \pm \sqrt{6} \implies \ln(3 - \sqrt{6}) \leq x \leq \ln(3 + \sqrt{6})$$



Quindi ho due punti di flesso in $x = \ln(3 \pm \sqrt{6})$. Riepilogando, dunque, la funzione è asintotica a $y = \ln(3)$ per $x \to -\infty$ e a $y = 2x$ per $x \to +\infty$, con un minimo relativo in $(0, \ln(2))$. Il grafico è il seguente.



Esercizio: Studia il grafico delle funzioni:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{e^x}$$

$$g(x) = |f(x)|$$

Determinare l'insieme di definizione, eventuali asintoti, intervalli di monotonia. Disegnare il grafico qualitativo delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ in accordo con i risultati trovati.

Soluzione: Studiamo preliminarmente $f(x)$. Questa è definita per tutti gli $x \in \mathbb{R}$. Studiamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x-3}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x-3}{e^x} = +\infty \quad (\text{domina } x^2e^{-x}).$$

Quindi, c'è l'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$. Non vi è invece asintoto obliquo in quanto:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x-3}{xe^x} = -\infty$$

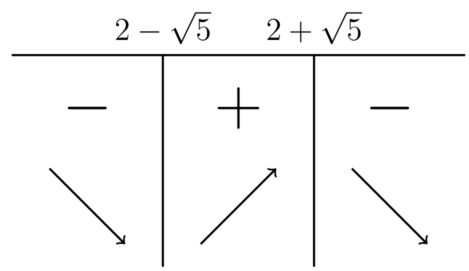
Calcoliamo, ora, la derivata di $f(x)$ con la regola del quoziente:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)e^x - (x^2-2x-3)e^x}{e^{2x}} = \frac{(2x-2)-(x^2-2x-3)}{e^x} = \frac{-x^2+4x+1}{e^x}$$

Studiandone il segno troviamo il seguente risultato:

$$\frac{-x^2+4x+1}{e^x} \geq 0 \implies -x^2+4x+1 \geq 0 \implies 2-\sqrt{5} \leq x \leq 2+\sqrt{5}$$

Quindi, $f(x)$ è decrescente in $(-\infty, 2-\sqrt{5}) \cup (2+\sqrt{5}, +\infty)$ e crescente in $(2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5})$ e presenta un minimo e un massimo relativo.



Calcoliamo la derivata seconda di $f(x)$.

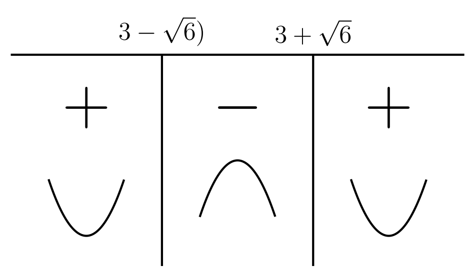
$$f''(x) = \frac{(-2x+4)e^x - (-x^2+4x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{(-2x+4)-(-x^2+4x+1)}{e^x} =$$

$$= \frac{-2x+4+x^2-4x-1}{e^x} = \frac{x^2-6x+3}{e^x}$$

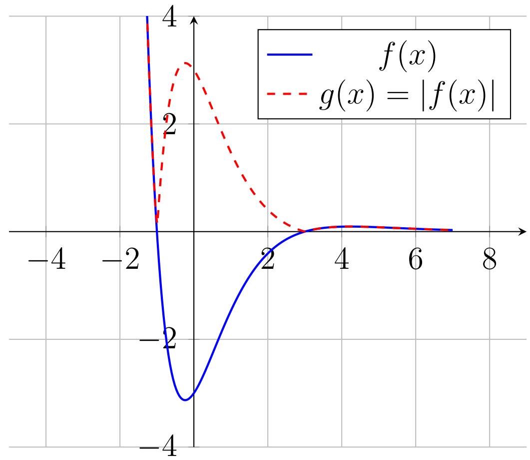
Ora, studiamo il segno di $f''(x)$ per determinare la concavità della funzione.

$$f''(x) \geq 0 \implies x^2-6x+3 \geq 0 \implies$$

$$x \leq 3-\sqrt{6} \vee x \geq 3+\sqrt{6}$$



Pertanto, la funzione $f(x)$ è concava verso l'alto in $(-\infty, 3-\sqrt{6}) \cup (3+\sqrt{6}, +\infty)$ e concava verso il basso in $(3-\sqrt{6}, 3+\sqrt{6})$. La funzione $f(x)$ presenta, quindi, un punto di flesso in $x = 3-\sqrt{6}$ e $x = 3+\sqrt{6}$, un minimo assoluto in $x = 2-\sqrt{5}$ e un massimo relativo in $x = 2+\sqrt{5}$. Se si considera invece $g(x)$, viste le proprietà del modulo, si hanno su minimi assoluti in $x = 2 \pm \sqrt{5}$ e questi rappresentano anche due punti di non derivabilità. Riportiamo qui a fianco i grafici qualitativi di $f(x)$ e $g(x)$:



Esercizio: Studia il grafico della funzione:

$$f(x) = \sin(x) - x$$

Determinare l'insieme di definizione, eventuali asintoti, intervalli di monotonia. Disegnare il grafico qualitativo della funzione $f(x)$ in accordo con i risultati trovati. Disegnare inoltre il grafico della funzione $g(x) = |f(x)|$ e determinarne la derivabilità nel punto $x_0 = 0$.

Soluzione: L'insieme di definizione della funzione è $\mathbb{R}$, poiché sia il seno che la funzione identità sono definiti su tutto l'insieme dei numeri reali. Si osservi che la funzione è dispari in quanto:

$$f(-x) = \sin(-x) - (-x) = -\sin(x) + x = -f(x)$$

Pertanto, basta studiare la funzione per $x \geq 0$. Calcoliamo, perciò, il limite a $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\sin(x) - x) = -\infty$$

Si possono avere asintoti obliqui e perciò valutiamo:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x) - x}{x} = -1 \qquad q = \lim_{x\to+\infty} \sin(x) - x + x = \lim_{x\to+\infty} \sin(x)$$

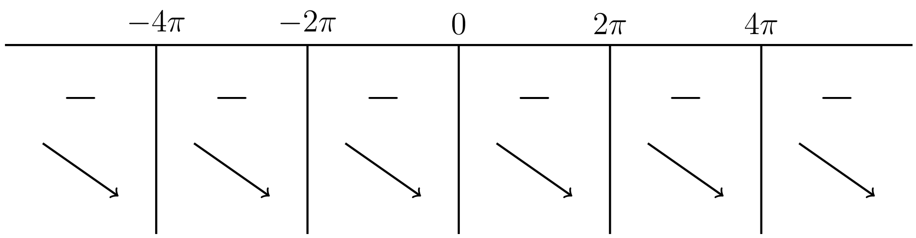
L'ultimo limite non è definito e quindi non si ha alcun asintoto obliquo. Deriviamo $f(x)$:

$$f'(x) = \cos(x) - 1$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) = \cos(x) - 1 \geq 0 \implies x = 2k\pi$$

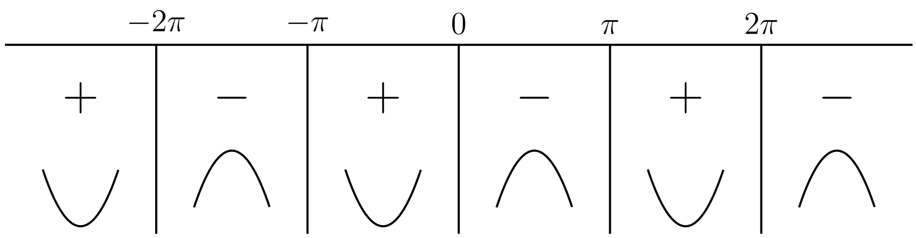
Essendo la derivata sempre decrescente se non in punti isolati, questi ultimi risultano né di massimo né di minimo, ma semplicemente stazionari e si ha il seguente grafico della derivata.



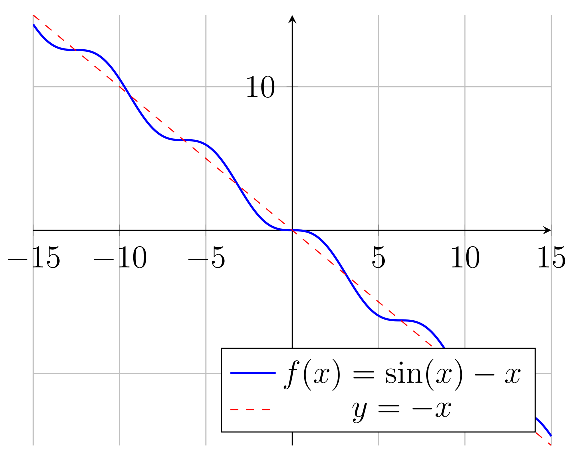
Ora studiamo il segno della derivata seconda:

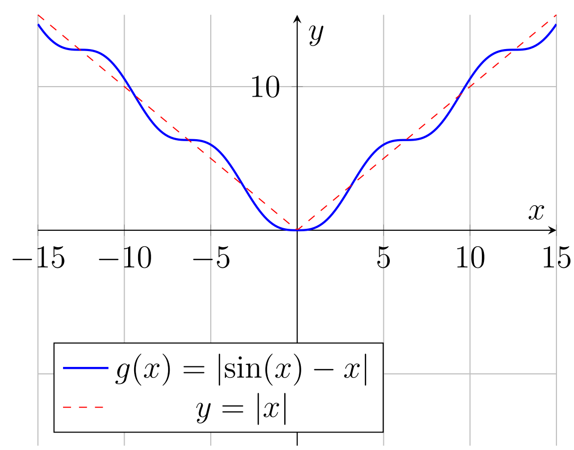
$$f''(x) = -\sin(x) \geq 0 \implies x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Perciò si ha il seguente grafico:



Grazie allo studio della derivata seconda si può notare come ci siano infiniti punti di flesso in corrispondenza di $x = k\pi$. Il grafico qualitativo della funzione presenta perciò molteplici punti stazionari e punti di flesso. Abbiamo deciso di inserire anche la retta $y = x$ in maniera da vedere come la funzione ha effettivamente tale andamento, ma non si può definire chiaramente come asintoto in quanto la funzione non si avvicina indefinitamente ma continua ad oscillare. Il grafico di $g(x) = |f(x)|$ si deduce facilmente dal grafico di $f(x)$.





Per studiare la derivabilità nel punto $x_0 = 0$ di $g(x)$ possiamo considerare la derivata destra e sinistra:

$$\lim_{x \to 0^+} D(-\sin(x) + x) = \lim_{x \to 0^+} -\cos(x) + 1 = 0 = \lim_{x \to 0^-} +\cos(x) - 1 = \lim_{x \to 0^-} D(\sin(x) - x)$$

Dal seguente risultato si può osservare che la funzione è derivabile nel punto $x_0 = 0$

Esercizio: Calcola i seguenti limiti applicando il teorema di L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{x}\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^3}{x}\qquad \lim_{x\to0^+}\frac{\log(x)}{\log(\sin(x))}\qquad \lim_{x\to0}\frac{\log(\sqrt{1+x^2})}{1-\cos(x)}\qquad \lim_{x\to+\infty}xe^{-x}$$

Soluzione:

1.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}}{1}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{2}=+\infty$$

2.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^3}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{3(\log x)^2\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3(\log x)^2}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3(\log x)^2}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{6\log x}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x}=0$$

3.
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log(x)}{\log(\sin(x))}\overset{H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(x)}{x\cos(x)}=1$$

4.
$$\lim_{x\to0}\frac{\log(\sqrt{1+x^2})}{1-\cos(x)}\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot2x\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\sin(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{\sin(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin(x)}=1$$

5.
$$\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

Esercizio: Calcola i seguenti limiti applicando il teorema di L'Hôpital

$$\lim_{x\to0^+}x\log(x)\qquad \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\arcsin(x)}-\frac{1}{x}\right)\qquad \lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin(x))^{\tan(x)}$$

Soluzione:

1.
$$\lim_{x\to0^+}x\log(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\log(x)}{\frac{1}{x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-x=0$$

2.
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\arcsin(x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x-\arcsin(x)}{x\arcsin(x)}\overset{H}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin(x)}\overset{H}{=}$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=0$$

3.
$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}}.$$

Calcoliamo il limite dell'esponente $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ usando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

Quindi:
$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/\sqrt{x}} = e^0 = 1$$

4.
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{\tan(x)}$$

Scriviamo $(\sin(x))^{\tan(x)} = e^{\tan(x)\ln(\sin(x))}$. Calcoliami il limite dell'esponente:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x)\ln(\sin(x)) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin(x))}{\frac{1}{\tan(x)}} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin(x)}\cos(x)}{-\frac{1}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -\sin(x)\cos(x) = 0$$

Quindi:
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{\tan(x)} = e^0 = 1.$$