FUNZIONI

Dati A e B insiemi di numeri reali, una **FUNZIONE** da A in B è una legge che ad ogni elemento di A fa corrispondere uno ed un solo elemento di B.

$$f : A \longrightarrow B$$

A dominio o insieme di definizione

$f(A)$ CODOMINIO

$y = f(x) \iff$ ad ogni elemento $x \in A$, corrisponde tramite la funzione f, l'elemento $y = f(x) \in B$

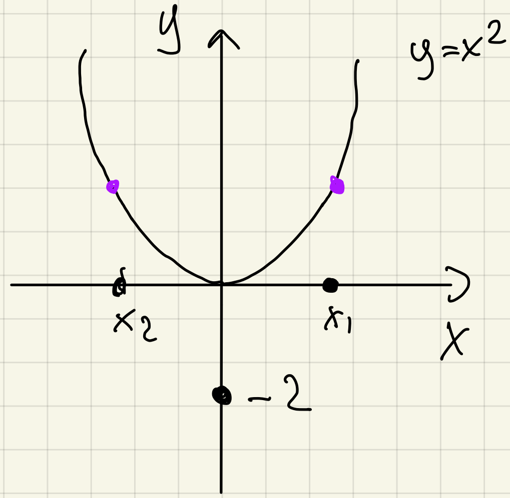
- Valgono le seguenti:

- f si dice **SURIETTIVA** se $\forall y \in B$, esiste almeno un $x \in A$ tale che $y = f(x)$ $[f(A) = B]$

- f si dice INIETTIVA se

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

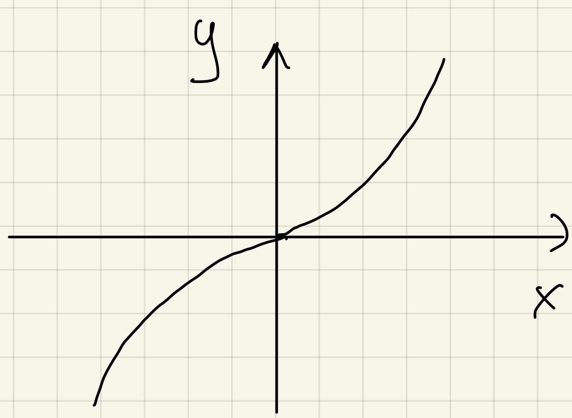
Esempi - ① $f: \overset{A}{\mathbb{R}} \longrightarrow \overset{B}{\mathbb{R}} \quad f(x) = x^2$



non è iniettiva e non è suriettiva.

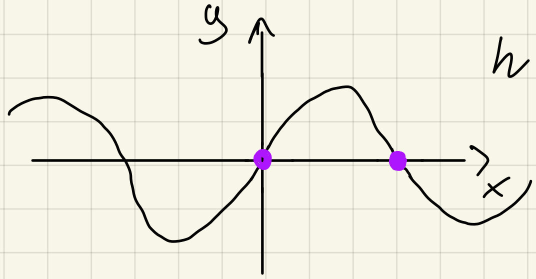
$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$

② $g: \overset{A}{\mathbb{R}} \longrightarrow \overset{B}{\mathbb{R}} \quad g(x) = x^3$



è iniettiva e suriettiva

③ $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad h(x) = \text{sen}\, x$



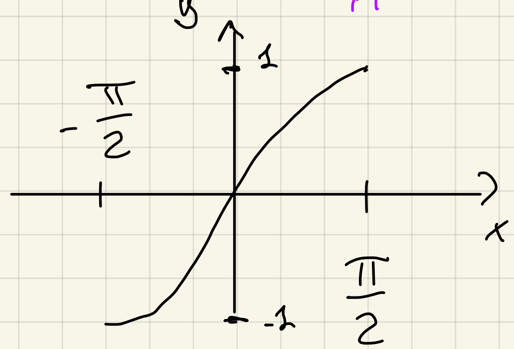
$h(x) = \text{sen}\, x$

in $x_1 = 0$ e $x_2 = \pi$ $\quad \text{sen}\, 0 = \text{sen}\, \pi = 0$

non è iniettiva, non è suriettiva

$$h: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

A



Considero $A \subseteq \mathbb{R}$ e h/A è la restrizione, che risulta essere iniettiva e suriettiva.

- La funzione si dice BIUNIVOCA se è suriettiva ed iniettiva.

Definizione_ $f: A \longrightarrow B$ biunivoca. La funzione ==INVERSA==

$$f^{-1}: B \longrightarrow A$$

è la funzione che ad ogni $y \in B$ fa corrispondere l'unico $x \in A$ t.c. $f(x) = y$.

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A$$

Esempio_ La funzione $f(x) = x^2$ è invertibile per $x \geq 0$

$f: [0,+\infty] \to [0,+\infty]$

$f(x) = x^2$

e la sua inversa è

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

definita in $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

Definizione – f si dice **MONOTONA** in un insieme A, se verifica una delle seguenti condizioni:

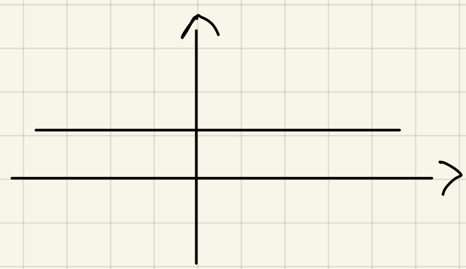
$\forall x_1, x_2 \in A$

- f strettamente crescente $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- f crescente $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- f strettamente decrescente $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- f decrescente $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

CRITERIO DI INVERTIBILITÀ – f è strettamente monotona, allora è anche invertibile.

FUNZIONE LINEARE $\quad y = mx + q$

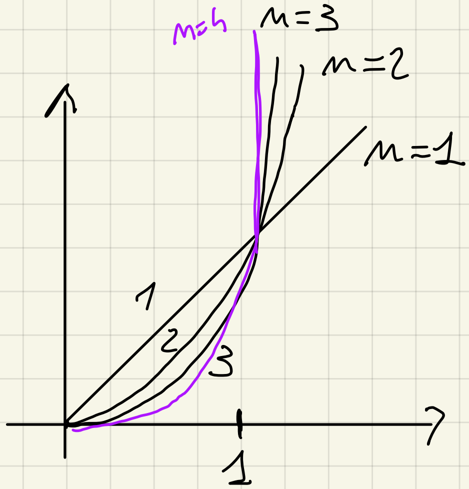
- m è il coefficiente angolare
- se $m = 0$, risulta $y = q$ costante



$y = q$

FUNZIONE POTENZA

$f(x) = x^n$, definita $\forall x \in \mathbb{R}$



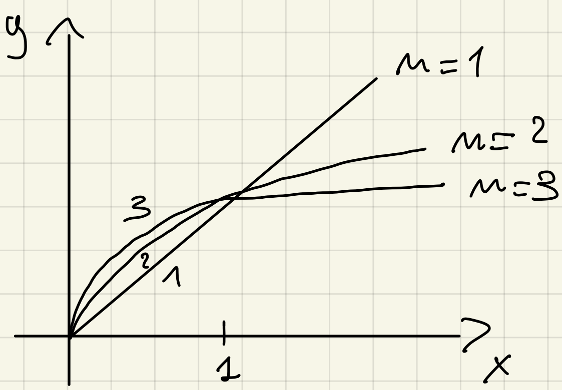
$y = x^n$, $x \geq 0$

- strettamente crescente per $x \geq 0$, cioè:

$$0 \leq x_1 < x_2 \implies x_1^n < x_2^n$$

- è quindi invertibile e l'inversa è

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}, \quad x \geq 0$$



$y = \sqrt[n]{x}$

FUNZIONE ESPONENZIALE

$f(x) = a^x$, a numero reale positivo, definita $\forall x \in \mathbb{R}$.

strettamente crescente $\Downarrow$

strettamente decrescente

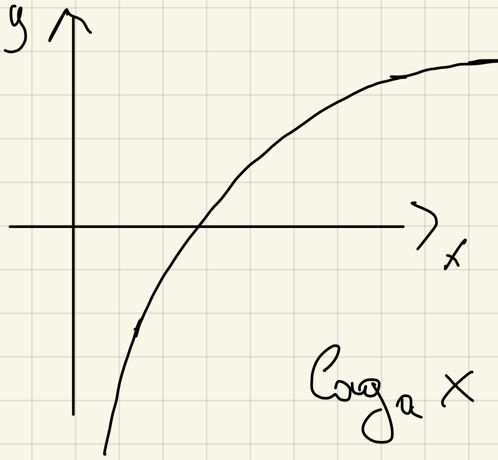
esempio $y = e^x$

- Se $a \neq 1$, allora la funzione esponenziale è invertibile, la funzione inversa è la:

FUNZIONE LOGARITMO

$f(x) = \log_a x$

$$y = \log_a x \iff a^x = y$$



$\log_a x$

$a > 1$

strettamente crescente

$\Downarrow$

esempio $y = \log_e x$

$\log_a x$

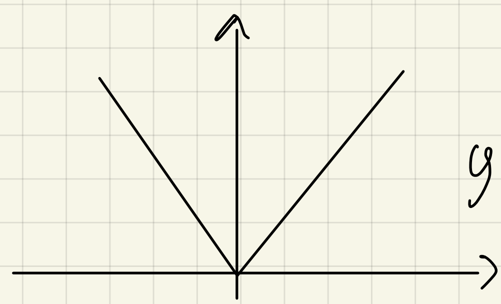
$0 < a < 1$

strettamente decrescente

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

- $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$
- $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \quad \forall x_1, x_2$



$y = |x|$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

$y = \operatorname{sen} x, \cos x$

- $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \qquad -1 \leq \cos x \leq 1$
- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

- È interessante vedere la combinazione di funzioni elementari.

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad , \text{ definita } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- è una funzione PARI, cioè

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \text{DOMINIO}$$

(simmetrica rispetto asse y).

[FUNZIONE DISPARI se $f(-x) = -f(x) \ \forall x \in$ DOMINIO
(simmetrica rispetto all'origine)]

Esempio

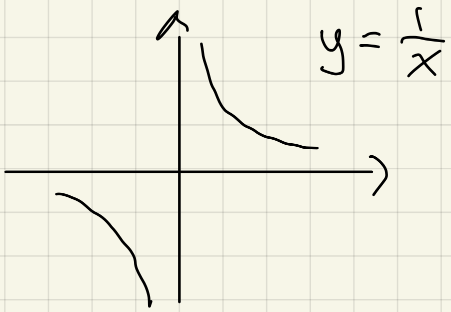
- $y = x$, $y = \operatorname{sen} x$ sono funzioni dispari

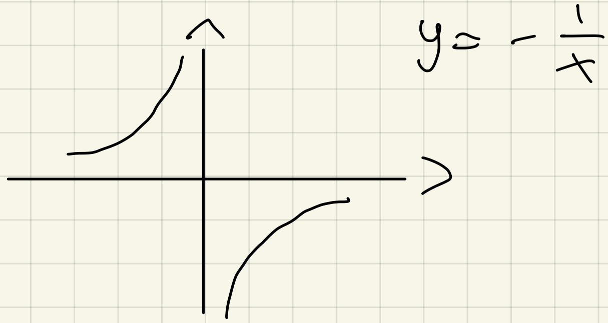
- $y = \cos x$ pari

$f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ è pari, la disegnamo per $x \geq 0$

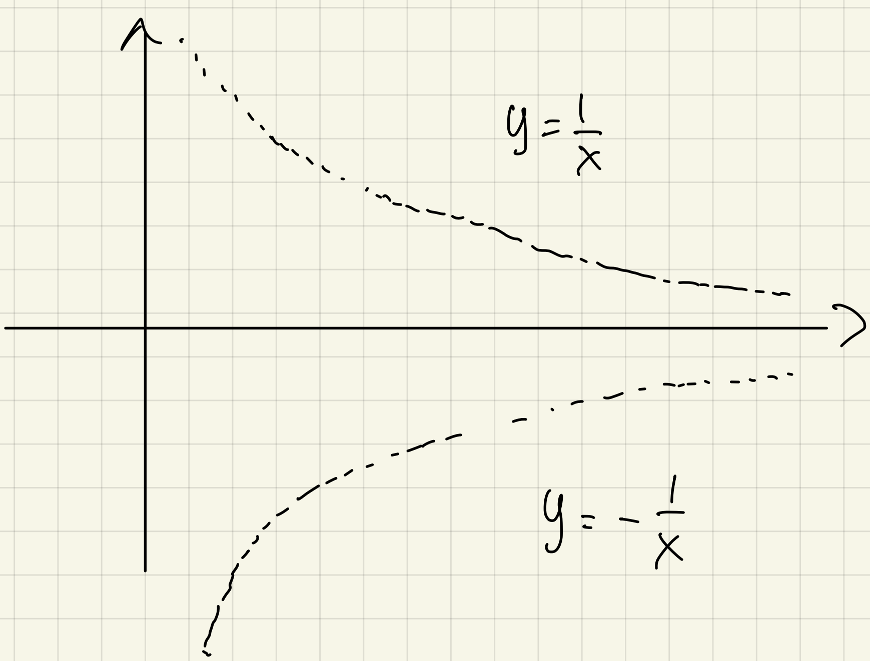
. Osserviamo che $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e dividendo per x: $\Rightarrow \quad -\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \dfrac{1}{x} \quad \forall x > 0$

OSS

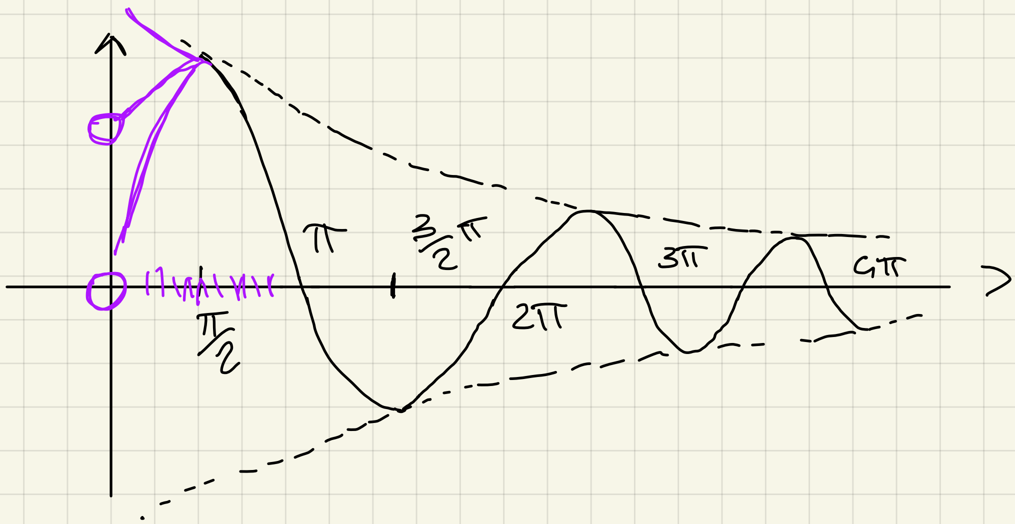




e $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ sarà compresa tra i due rami di iperboli per $x > 0$:



- per $x>0$, $y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ ha lo stesso segno di $\operatorname{sen} x$.



x_n, $x_n \to 0$

$\Downarrow$

$f(x_n)$?

- non è definita per $x=0$. Cosa succede per x "VICINO A ZERO?"

- TENDE A ZERO

- TENDE ALL'INFINITO

- TENDE AD UN VALORE INTERMEDIO ?

Una formulazione rigorosa del comportamento di una funzione $f(x)$, per x "VICINO" ad un punto x_0, in questo caso $x_0=0$,

è quello di considerare una generica successione x_n che converge ad x_0

(x_n è "VICINO" ad x_0 se n è "GRANDE") e la corrispondente successione y_n costituita dai valori assunti dalla funzione $f(x)$

$(y_n = f(x_n),\ \forall n \in \mathbb{N})$

- Se $y_n = f(x_n)$ converge ad un numero ℓ (che è lo stesso $\forall x_n \to x_0$), allora si dice che $f(x)$ ammette limite uguale ad ℓ per $x \to x_0$.

- Tornando all'esempio di $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, calcolo

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} = ?$$

con $x_n \to 0$
$x_n \neq 0\ \forall n$

$\Rightarrow$ è il limite notevole per le successioni, che sappiamo valere 1.

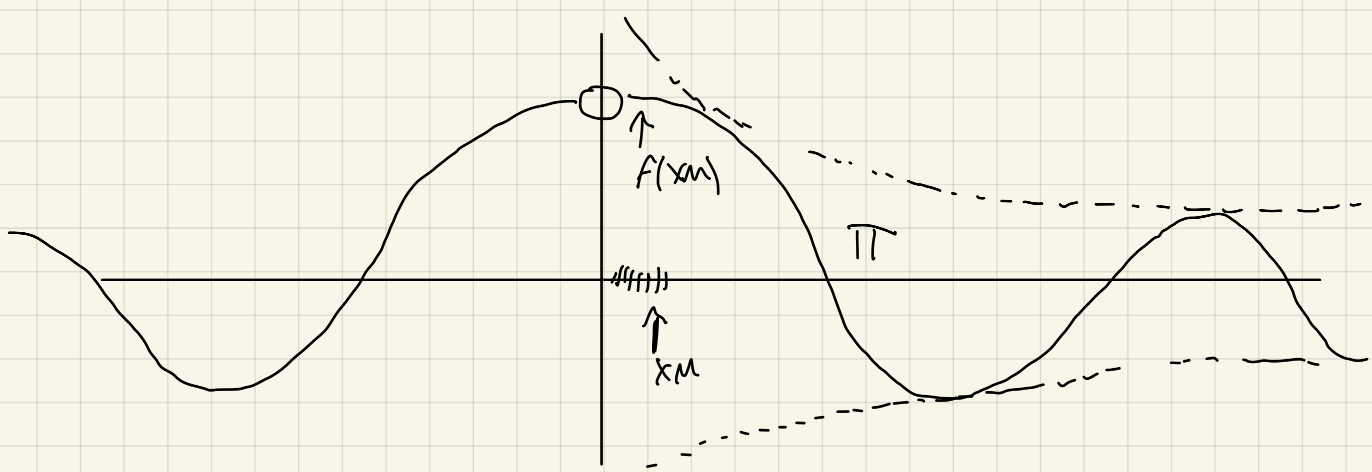
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} = 1$$

$x_n \to 0$
$x_n \neq 0, \forall n,$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$\Rightarrow$ il grafico di $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$



DEFINIZIONE DI LIMITE _ Sia A un intervallo, o unione finita di intervalli e sia $x_0 \in A$ (anche dell'estremo).

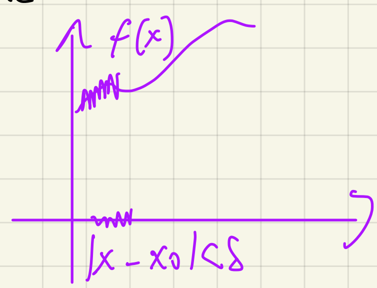
Si dice che $f(x)$ ha limite uguale ad ℓ (tende o converge ad ℓ) per x che tende a x_0, se,

qualunque sia la successione $x_n \to x_0$, con

$x_n \in A$ e $x_n \neq x_0, \forall n$, risulta

$$f(x_n) \to \ell$$

_ Si dimostra che questa definizione è equivalente alla seguente:



DEF.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :$$

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon, \quad \forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta$$

$$\Updownarrow$$

$$x \neq x_0$$

$$\left(\Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \quad \forall x \in A \setminus \{x_0\} \text{ t.c. } \right.$$

$$\left. x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \right).$$

TEOREMA (LEGAME TRA LIMITI DI FUNZIONI E LIMITI DI SUCCESSIONI).

Le seguenti relazioni sono fra loro equivalenti ($x_0, \ell \in \mathbb{R}$).

- $\forall x_n \to x_0 \quad x_n \in A \setminus \{x_0\} \ \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \to \ell$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \underset{x \neq x_0}{x \in A}, \ 0 \neq |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$

- Valgono anche le definizioni con i limiti infiniti:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall x_n \to x_0, x_n \in A \setminus \{x_0\} \ \forall n \in \mathbb{N}$
$$\implies f(x_n) \to +\infty$$
$$\iff \forall M > 0 \ \exists \delta > 0 : f(x) > M, \ \forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta$$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall x_n \to +\infty, x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N}$
$$\implies f(x_n) \to \ell$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists K : |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in A ; x > K$$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall x_n \to +\infty, x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow f(x_n) \to +\infty$

$\iff \forall M > 0, \exists K : f(x) > M, \forall x \in A : x > K$

OSS: è utile considerare il LIMITE DESTRO $(x \to x_0^+)$ e il LIMITE SINISTRO $(x \to x_0^-)$, quando ci si avvicina al punto x_0 per valori di $x \in A$ rispettivamente solo maggiori di x_0, o solo minori.

- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon$
$\forall x \in X \quad 0 < x - x_0 < \delta$

$x_0 < x < x_0 + \delta$

- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon$
$\forall x \in X \quad -\delta < x - x_0 < 0$

$x_0 - \delta < x < x_0$

Esempio. $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$ NON ESISTE

Se esistesse $\ell = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$ dovremmo avere:

$f(x_n) = \operatorname{sen} x_n \to \ell$ qualunque sia la successione $x_n \to +\infty$

Considero allora $\underset{(x_n \to +\infty)}{x_n = 2\pi n} \Rightarrow \underset{f(x_n) \,=}{\operatorname{sen} x_n} = \operatorname{sen} 2\pi n = 0 \to 0$

e considero $\underset{(x_n' \to +\infty)}{x_n' = 2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ e $\underset{f(x_n') \,=}{\operatorname{sen} x_n'} = \operatorname{sen}\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$

x_n e x_n' divergono a $+\infty$, ma $\operatorname{sen} x_n$ e $\operatorname{sen} x_n'$

tendono a limiti diversi.

Esercizio – Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1$$

- devo verificare che $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : \underset{\substack{\parallel \\ |\cos x - 1|}}{|f(x)-\ell|}<\varepsilon$, $\forall x\in X$ $0<\underset{\substack{\parallel \\ |x|}}{|x-x_0|}<\delta$.

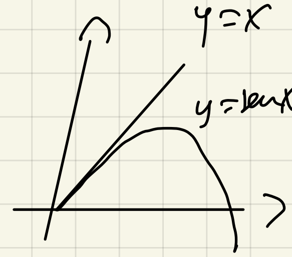
Valuto quindi $\underset{\substack{\parallel \\ |\cos x - \cos 0|}}{|\cos x - 1|}$ $p=x$ $q=0$. Ora, per la formula di PROSTAFERESI:

$$\cos p - \cos q = -2\cdot \operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

applico

$$\Rightarrow \cos x - 1 = -2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$$

OSS Vale la disuguaglianza $|\operatorname{sen} x|\le x$



$$\Rightarrow |\cos x - 1| = 2\underset{\substack{\parallel \\ \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2}}}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} \le \cancel{2}\,\frac{x^2}{\cancel{4}\,2} = \frac{x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow |\cos x - 1|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}<\varepsilon \Leftrightarrow x^2<2\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \underset{\underset{|x-x_0|}{\shortparallel}}{|x|} < \sqrt{2\varepsilon}$$

$|\cos x - 1| < \varepsilon$
$|x| < \delta$

ponendo $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$ risulta che $|x| < \delta$, implica

$|\cos x - 1| < \varepsilon$. #

Esercizio. Utilizzando la definizione di limite, verificare che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

devo verificare che $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ t.c.

$$f(x) > M, \forall x \in X : 0 < |x - x_0| < \delta$$

Quindi $\frac{1}{x^2} > M \Longleftrightarrow x^2 < \frac{1}{M} \Longleftrightarrow \underset{\underset{|x-x_0|}{\shortparallel}}{|x|} < \frac{1}{\sqrt{M}}$

Quindi se $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow f(x) > M \left(\frac{1}{x^2} > M\right)$.

OPERAZIONI CON I LIMITI DI FUNZIONI - Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente di due funzioni, è rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quoziente (se il denominatore è diverso da zero) dei due limiti, purché non sia una delle forme indeterminate

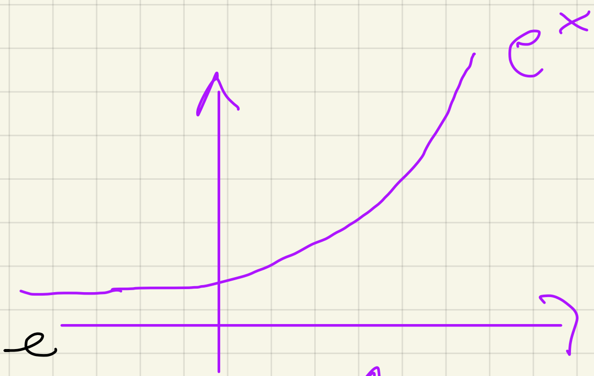
$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

$$\left(1^{+\infty}, \ 1^{-\infty}, \ (+\infty)^0, \ 0^0\right)$$

LIMITI NOTEVOLI

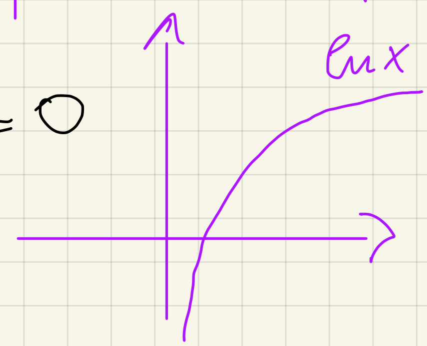
Valgono i limiti notevoli visti per le successioni

- $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ 0 & 0<a<1 \end{cases}$



In particolare $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ e

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$



- $\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0^+} \log x = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\qquad$ • $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{b}{x}\right)^x = e^b$ $\quad \forall b\in\mathbb{R}$

1^∞

In generale: $\left(1+f(x)\right)^{1/f(x)} \to e$

con $f(x)\to 0$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ da cui si ricavano:

- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$(a-b) \cdot (a+b)$ $\quad a^2 - b^2$

infatti: $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$= \underbrace{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+\cos x)}}_{\to 1/2} = \frac{1}{2}.$

$\#$

- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

infatti: $\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} =$

$= \frac{1 - \cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} = \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x \to 0}{1 + \cos x \to 1}}_{\to 0}$

$= 0.$

LIMITI DI FUNZIONI COMPOSTE_ Siano $g: X \to Y$

e $f: Y \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0 \quad e \quad \lim_{y \to y_0} f(y) = l$$

ed esiste $\delta > 0$ tale che risulti $g(x) \neq y_0$

per ogni $x \neq x_0$ dell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Allora:

$$f \circ g : X \to \mathbb{R} \quad [\circ \; f(g(x))]$$

si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = l$$

Applichiamo il precedente risultato:

- $$\lim_{x \to \pm\infty} x \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

per le proprietà dei logaritmi

$$x \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \log \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}_{\to e} \longrightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\log e}$$

$x = \frac{1}{y}$

da cui ponendo $y = \frac{1}{x}$, segue il $\left(\begin{matrix} x \to \pm\infty \\ y \to 0 \end{matrix}\right)$

LIMITE NOTEVOLE:

- $$\lim_{y \to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1 \qquad \frac{0}{0}$$

Si può scrivere anche $1+y=t$, $y = t-1$ $\quad \begin{matrix} y \to 0 \\ t \to 1 \end{matrix}$

$$\left.\lim_{t \to 1} \frac{\log t}{t-1} = 1 \quad \right]$$

Verifichiamo che:

- $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \frac{0}{0}$$

con la sostituzione $y = e^x - 1$, otteniamo

$\Rightarrow e^x = y + 1 \quad x = \ln(y+1)$

$$\left.\frac{e^x - 1}{x} = \frac{y}{\log(1+y)}\right\} \to 1$$

se $x \to 0$ anche $y = e^x - 1 \to 0$

quindi il limite è verificato dato che

$$\frac{y}{\log(1+y)} \longrightarrow 1 \quad \text{per } y \to 0$$

Esercizi:

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^6}{(1-\cos x)^3} =$$

- $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x^6}{x^6}}_{\to 1} \cdot \frac{x^6}{(1-\cos x)^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{1-\cos x} \right)^3$$

$$= 2^3 = 8$$

$$\bullet \lim_{x \to 5} \frac{2 \ln\left(\frac{x}{5}\right)}{x^2 - 25} =$$

$$\bullet \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

$$\bullet \frac{\ln t}{t-1} \xrightarrow[t \to 1]{} 1$$

$$= \lim_{x \to 5} 2 \frac{\ln\left(\frac{x}{5}\right)}{\frac{x}{5} - 1} \frac{\frac{x}{5} - 1}{x^2 - 25} =$$

$$= \lim_{x \to 5} 2 \cdot \frac{1}{5} \frac{x - 5}{(x-5)(x+5)} = \frac{1}{25}.$$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{5^x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{x^2}{5^x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\operatorname{sen} x}_{\text{limitato}} = 0$$

- In generale, date $f(x)$ e $g(x)$ funzioni tali che $f(x)$ sia limitata (cioè $\exists M$ t.c. $|f(x)| \leq M$) e $g(x) \to 0$

$$\Rightarrow \quad -M \leq f(x) \leq M$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{-M g(x)}_{\downarrow 0} \leq \underbrace{f(x) g(x)}_{\Downarrow \; \downarrow 0} \leq \underbrace{M g(x)}_{\downarrow 0}$$

OSS. Poiché vale anche il Teorema dei Carabinieri. Date $f(x), g(x), h(x)$ t.c.

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell. \quad \#$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 \cos\frac{1}{x}}{e^x - 1} =$$

$$\frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x^3}^{\to 0} \overbrace{\cos\frac{1}{x}}^{\text{lim.}}}{\left.\frac{e^x - 1}{x}\right) \to 1} =$$

$$= 0$$

- $$\lim_{x\to 0} \left(\cos^2 x\right)^{1/\operatorname{sen}^2 x} = 1^\infty$$

$$\rightsquigarrow \left(1 + f(x)\right)^{1/f(x)} \to e, \quad f(x) \to 0$$

Poiché $\cos^2 x = 1 \underbrace{- \operatorname{sen}^2 x}_{f(x)}$

$f(x) = -\operatorname{sen}^2 x$ e $f(x) \to 0$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} \left(\cos^2 x\right)^{1/\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\underbrace{\left(1 + f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}}}_{\to e}\right]^{\frac{f(x)}{\operatorname{sen}^2 x}} =$$

• calcolo separatamente il limite dell'esponente e

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}^2 x} = -1$$

$\Rightarrow$ il limite vale e^{-1}.

$$\bullet \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 + 2\sqrt{x}}{x^3 + \operatorname{sen} x^2 + x} \right)^x = 1^\infty$$

$$\frac{x^3 + 2\sqrt{x}}{x^3 + \operatorname{sen} x^2 + x} = 1 + f(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{x^3 + 2\sqrt{x}}{x^3 + \operatorname{sen} x^2 + x} - 1 =$$

$$= \frac{x^3 + 2\sqrt{x} - x^3 - \operatorname{sen} x^2 - x}{x^3 + \operatorname{sen} x^2 + x} =$$

$$= \frac{2\sqrt{x} - \operatorname{sen} x^2 - x}{x^3 + \operatorname{sen} x^2 + x}$$ e $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$

$$\left(\frac{x^3+2\sqrt{x}}{x^3+\operatorname{sen} x^2+x}\right)^x = \left[\left(1+f(x)\right)^{1/f(x)}\right]^{f(x)\cdot x}$$

e separatamente il limite dell'esponente vale:

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{2\sqrt{x}-\operatorname{sen} x^2-x}{x^3+\operatorname{sen} x^2+x} = 0$$

$\Rightarrow$ il limite vale $e^0 = 1$