Esercitazione 2 Dicembre

Teorema (Integrazione per parti). *Se in un intervallo f e g sono due funzioni derivabili con derivata continua, allora:*

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

Esercizio: Svolgere i seguenti integrali per parti:

$$\int \ln(x)dx \qquad \int \sin^2(x)dx$$

Soluzione:

1. Riscrivo l'integrale nel seguente modo $\int \ln(x)dx = \int 1 \cdot \ln(x)dx$ e scelgo $f(x) = \ln(x)$ e $g'(x) = 1$. Allora, applicando la regola di integrazione per parti ottengo:

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - x + c$$

2. Riscrivo l'integrale come $\int \sin^2(x)dx = \int \sin(x) \cdot \sin(x)dx$ ed individuo $f(x) = g'(x) = \sin(x)$ quindi ottengo:

$$\int \sin^2(x)dx = -\cos(x)\sin^2(x) + \int \cos^2(x)dx =$$

$$= -\sin(x)\cos(x) + \int \left(1 - \sin^2(x)\right) dx = -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x)dx$$

Perciò riscrivendo dall'inizio posso risolvere un'equazione dove l'incognita è proprio l'integrale richiesto dall'eserizio

$$\int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x)dx \Longrightarrow$$

$$2\int \sin^(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + x \Longrightarrow \int \sin^2(x)dx = \frac{-\sin(x)\cos(x) - x}{2} + c$$

Il metodo di integrazione per parti si basa sulla formula di derivazione di un prodotto. Invece, il metodo di integrazione per sostituzione, che mostriamo ora, si basa sulla formula di integrazione delle funzioni composte.

Teorema (Integrazione per sostituzione)**.** *Sia f una funzione continua e g una funzione derivabile con derivata continua, allora:*

$$\left[\int f(x)dx\right]_{x=g(x)} = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

$(g'(t))dt = dx$

Esercizio: Calcolare il seguente integrale con il metodo della sostituzione:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-3}dx$$

Soluzione: Applico la seguente sostituzione: $\sqrt{x} = t \implies x = t^2 \implies dx = 2tdt$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-3}dx = \int \frac{2t}{t-3}dt = 2\int \frac{t-3+3}{t-3}dt = 2\int \left(1+\frac{3}{t-3}\right)dt =$$

$$2t + 3\ln|t+3| + c = 2\sqrt{x} + 3\ln\left|\sqrt{x}+3\right| + c$$

Esercizio: Risolvere il seguente integrale definito per sostituzione:

$$\int_1^8 \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$$

Soluzione: Pongo $\sqrt{x+1} = t \implies 1+x = t^2 \implies dx = 2tdt$, per gli estremi vale: $x = 8 \implies t = \sqrt{3}$ e $x = 1 \implies \sqrt{2}$. Applicando il metodo si ottiene:

$$\int_1^8 \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx = \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{2t^2}{t^2-1}dt = 2\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt = 2\,[t]_{\sqrt{2}}^3 + 2\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{1}{t^2-1}dt$$

Il secondo integrale è un integrale di una funzione razionale e perciò si deve impostare il seguente sistema:

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{(A+B)t + A - B}{t^2-1} \implies \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \implies \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Perciò si ha la seguente soluzione:

$$[2t]_{\sqrt{2}}^3 + \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}dt = \left[2t + \ln\frac{|t-1|}{|t+1|}\right]_{\sqrt{2}}^3 = 6 - 2\sqrt{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

In generale si pone:

$$\int f(x, \sqrt[n]{ax+b})dx \qquad \sqrt[n]{ax+b} = t \Longleftrightarrow ax+b = t^n \Longleftrightarrow x = \frac{t^n - b}{a} \Longleftrightarrow dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt$$

Esercizio: Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{e^{5t} - 10e^{4t} + 20e^{3t} + 11e^{2t} - 20e^t}{e^{2t} - 10e^t + 21}$$

Soluzione: Utilizzo la seguente sostituzione: $x = e^t \Longleftrightarrow dx = e^t dt$, raccogliendo e^t al numeratore si arriva al seguente integrale di una razionale:

$$\int \frac{x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 11x - 20}{x^2 - 10x + 21} dx$$

Applico la divisione fra polinomi:

$$\begin{array}{ccccc|l}
x^4 & -10x^3 & +20x^2 & +11x & -20 & x^2 - 10x + 21 \\ \hline
-x^4 & +10x^3 & -21x^2 & & & x^2 - 1 \\
/ & / & -x^2 & +11x & -20 & \\
 & & x^2 & -10x & 21 & \\
 & & / & x & 1 &
\end{array}$$

e arrivo alla seguente scrittura:

$$\int \frac{x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 11x - 20}{x^2 - 10x + 21} dx = \int \left(x^2 - 1\right) dx + \int \frac{x+1}{x^2 - 10x + 21} dx$$

Come sopra devo riscrivere la frazione algebrica come somma di frazioni con i denominatori di grado minore

$$\frac{x+1}{x^2 - 10x + 21} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x - 3A - 7B}{(x-3)(x-7)} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -3A - 7B = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 1 - B \\ -3(1-B) - 7B = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 1 - B \\ -4B = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A = 2 \end{cases}$$

$$\int \left(x^2 - 1\right) dx + \int \frac{2}{x-7} dx - \int \frac{1}{x-3} dx = \frac{x^3}{3} - x + 2\ln|x-7| - \ln|x-3| + c$$

$$\frac{e^{3t}}{3} - e^t + 2\ln\left|e^t - 7\right| - \ln\left|e^t - 3\right| + c$$

Riportiamo ora il risultato principale sugli integrali:

Teorema (Teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$.Si consideri la seguente funzione integrale:*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad x_0 \in [a, b]$$

questa allora è derivabile in $[a, b]$ e la sua derivata vale

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

Esercizio: Calcolare la derivata delle seguenti funzioni integrali:

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{t}dt \quad F(x) = \int_x^1 \sin^2(t)dt \quad F(x) = \int_0^x \cos^2(t)dt$$

Soluzione:

1. Applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale si arriva alla seguente derivata $F'(x) = \sqrt{x}$

2. Non si può applicare direttamente il teorema ma bisogna invertire gli estremi d'integrazione $\int_x^1 \sin^2(t)dt = -\int_1^x \sin^2(t)dt$ e quindi

$$F'(x) = -\sin^2(x)$$

3. Si trova direttamente

$$F'(x) = \cos^2(x)$$

Esercizio: Calcola il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \cos^2(t)dt}{x}$$

Soluzione: Essendo una forma indeterminata zero su zero si può applicare il teorema di de l'Hopital in associazione col teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \cos^2(t)dt}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2(x)}{1} = 1$$

Esercizio: Calcolare la derivata delle seguenti funzioni integrali:

$$F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt \qquad F(x) = \int_{2x}^{3x} \cos^2(t)dt$$

Soluzione:

1. Usando la formula di derivazione della composta si ha il seguente risultato:

$$F'(x) = e^{(\sqrt{x})^2} \cdot D(\sqrt{x}) = \frac{e^x}{2\sqrt{x}}$$

2. Fissando x_0 numero reale arbitrario si ottiene la seguente riscrittura

$$F(x) = \int_{2x}^{x_0} \cos^2(t)dt + \int_{x_0}^{3x} \cos^2(t)dt = \int_{x_0}^{3x} \cos^2(t)dt - \int_{x_0}^{2x} \cos^2(t)dt$$

$$F'(x) = 3cos^2(3x) - 2\cos^2(2x)$$

Esercizio: Data la seguente funzione

$$F(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$$

Scrivere la forma di Mc Laurin arrestata al terzo ordine (resto di Peano).

Soluzione: Dalla formula si ha il seguente sviluppo $F(x) = F(0) + F'(x)x + \frac{F^{(2)(x)}}{2}x^2 + \frac{F^{(3)}(x)}{6}x^3 + o(x^3)$. Calcoliamo perciò le derivate e i loro valori in zero

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \sin(t^2)dt & F(0) &= 0 \\ F'(x) &= \sin(x^2) & F'(0) &= 0 \\ F^{(2)}(x) &= 2x\cos(x^2) & F^{(2)}(0) &= 0 \\ F^{(3)}(x) &= 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2) & F^{(2)}(0) &= 2 \end{aligned}$$

Perciò lo sviluppo diventa

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

Esercizio: Determinare gli intervalli nei quali la funzione

$$F(x) = \int_1^x e^{t^3-3t}dt$$

è convessa. Si scriva inoltre l'equazione della retta tangente al grafico di $F(x)$ nel suo punto di ascissa $x_0 = 1$

Soluzione: Calcolo la derivata seconda per vedere gli intervalli di concavità e convessità

$$F'(x) = e^{x^3-3x}$$

$$F''(x) = e^{x^3-3x}\left(3x^2-3\right)$$

Studiamo, perciò, il segno della derivata seconda

$$F''(x) \geq 0 \implies 3e^{x^3-3x}\left(x^2-1\right) \geq 0 \implies x^2-1 \geq 0 \implies x \leq -1 \cup x \geq 1$$

Perciò la funzione è convessa prima di -1 e dopo 1. Per individuare invece la tangente al grafico di $F(x)$ nel suo punto di ascissa $x_0 = 1$, si può calcolare il coefficeinte angolare della retta sostituento x_0 nella derivata ed infine calcolare il punto di ascissa nulla e utilizzare la formula che individua la retta conoscendo il coefficiente angolare e il punto

$$y = F'(0)(x-x_0) + F(x_0) \implies y = e^{1-3}(x-1) + 0 \implies y = e^{-2}(x-1)$$

Esercizio: Date le funzioni integrali

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1+t^2}{2e^t}dt \qquad G(x) = \int_1^{x} \frac{1+t^4}{e^{t^2}}tdt$$

Calcola $F'(x)$ e $G'(x)$. Sapresti dire che relazione c'è tra F e G?

Soluzione:

$$F'(x) = \frac{1+x^4}{2e^{x^2}}2x = \frac{x+x^5}{e^{x^2}}$$

$$G'(x) = \frac{x+x^5}{e^{x^2}}$$

Allora le due funzioni hanno la stessa derivata e quindi differiscono per una costante. Cioè $F(x) - G(x) = c \ \forall x \in \mathbb{R}$. Visto che poi $F(1) = G(1) = 0$ si trova che $F(1) - G(1) = c \implies 0 = c$. Allora le due funzioni sono uguali.