Esercitazione 17 Dicembre

Serie alternate

Teorema (Criterio di convergenza per serie alternate)**.** *Sia data una serie alternata della forma:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$$

dove $a_n > 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$. *Allora se*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0;$$

$$a_{n+1} \le a_n \quad \forall n$$

la serie converge. Se la serie converge, la somma della serie può essere approssimata con un errore inferiore al primo termine non considerato, ovvero:

$$|S - S_N| \le a_{N+1},$$

dove S_N *è la somma parziale fino al termine* N.

Esercizio: Stabilire il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+1} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\log(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Soluzione:

- La seire converge in quanto $a_n = \frac{1}{2n+1}$ è infinitesima per n tendente a $+\infty$.
- La serie è indeterminata in quanto si può osservare come a_n non è infinitesima e se valutiamo le somme parziali otteniamo una successione di uni e zeri alternati.
- Come nel primo caso vale $a_n = \frac{1}{\log(n+1)} \to 0$ e duenque la serie converge.
- In questo caso $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ è infinitesima ma non ho una serie a segni alterni. Anzi, è noto per le seire armoniche che la serie considerata è divergente.

Esercizio:[20-06-24] Determinare per quali valori di α la serie è convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^5}{n^\alpha+1}\left[\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2$$

Soluzione: Per $n \to \infty$, sviluppiamo il logaritmo con Taylor:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pertanto:

$$\left[\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2 \sim \frac{1}{4n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Sostituendo nel termine generale a_n della serie, si ottiene:

$$a_n \sim \frac{n^5}{n^\alpha+1} \cdot \frac{1}{4n^4} = \frac{n}{4(n^\alpha+1)} \sim \frac{1}{4n^{\alpha-1}}.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se il termine equivalente $\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ soddisfa $\alpha - 1 > 1$, cioè $\alpha > 2$. Per $\alpha \leq 2$, il termine generale a_n non tende a zero sufficientemente rapidamente, quindi la serie diverge.

Esercizio:[11-01-21] Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie è convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha+1}{n+1}\left[1 - \sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\right]$$

Soluzione: Utilizziamo la serie di Taylor per $\cos x$ e $(x+1)^\beta$ intorno a $x = 0$:

$$\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Pertanto:

$$\frac{n^\alpha+1}{n+1}\left[1 - \sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\right] \sim \frac{n^\alpha}{n} \cdot \frac{1}{4n^2} \sim \frac{1}{4}n^{\alpha-3}$$

La serie converge se e solo se il termine generale $a_n \sim \frac{1}{4}n^{\alpha-3}$ soddisfa il criterio di convergenza della serie armonica generalizzata. In particolare, la serie converge se:

$$\alpha - 3 < -1 \iff \alpha < 2.$$

Esercizio: Studiare i caratteri delle seguenti serie, per $x > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n+1)!} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Soluzione:

- Si utilizza il criterio del rapporto si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^n}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{x^{n-1}} = \frac{x}{n+2} \to 0$$

tende a zero $\forall x \in \mathbb{R}$. Pertando la serie è sempre convergente.
- Si utilizza nuovamnete il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} = x \cdot \frac{n+1}{n} \to x$$

. Allora per il criterio del rapporto si ha che la serei converge per $x < 1$ e diverge per $x > 1$. Per sapere il comportamento quando $x = 1$ basta sostituire e si ha che a serie divente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ che si sa essere divergente.

Esercizio: Stabilire i caratteri delle seguenti serie al variare di $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} 3^{-2nx} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n+4^n}$$

Soluzione:

- Si applica il criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}} \cdot 3^{-2x} \to 3^{-2x}$$

allora si deve avere che $3^{-2x} < 1 \implies -2x < 0 \implies x > 0$, se viceversa $x = 0$ o maggiore la serie diverge.
- Il termine generale si comporta come una serie geometrica

$$\frac{x^{2n}}{n+4^n} \sim \frac{x^{2n}}{n+4^n} \implies \frac{x^{2n}}{4^n} < 1 \implies -2 < x < 2$$

In tutti gli altri casi la serie risulta divergente.

Esercizio:[29-03-2021] Determina i caratteri delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$$

Soluzione:

- La serie è a segni alterni e perciò valutiamo

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log(n)}{n} \to 0$$

essendo a_n una funzione infinitesima possiamo dedurre la convergenza della serie.

- La serie considerata è maggiore della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ che è divergente. Dunque la seire considerata diverge.
- COnsiderato che
$$\frac{\log(n)}{n^2} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$
La seire è dominata da una serie convergente e pertanto è anchessa convergente.

Esercizio:[08-02-2021] Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n \left(1 - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}}{\sqrt{n}\left(3 - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n}$$

Soluzione: Si applica il criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{e\left(1 - \sin(\frac{1}{n})\right)^n}{\sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}}\left(3 - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \to \frac{e \cdot e^{-1}}{3} = \frac{1}{3}$$

questo perchè $\left(1 - \sin(\frac{1}{n})\right)^n = \left[\left(1 - \sin(\frac{1}{n})\right)^{-\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}}\right]^{-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cdot n} \to e^{-1}$. Poichè il limite risulta essere $\frac{1}{3}$ la serie è convergente secondo il criterio della radice.

Esercizio:[08-02-2021] Sia data la funzione $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definita da

$$F(x) = \int_1^x \arctan\left(\frac{1}{e^t - 1}\right) dt$$

Determinare gli intervalli di monotonia ed intervalli in cui la funzione è concava o convessa. Calcola inoltre

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x \arctan\left(\frac{1}{e^t-1}\right) dt}{e^{x-1} - 1}$$

Soluzione: Della funzione sappiamo il valore $F(1) = 1$, inoltre si calcola facilmente la derivata grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale.

$$F'(x) = \arctan\left(\frac{1}{e^x - 1}\right)$$

Perciò, studiando il segno della derivata prima si ha che

$$\arctan\left(\frac{1}{e^x - 1}\right) \geq 0 \implies \frac{1}{e^x - 1} \geq 0 \implies e^x - 1 > 0 \impliedby x > 0$$

Pertanto la derivata prima è sempre positiva e quindi la funzione sempre crescente. Studiando invece la derivata seconda si ha:

$$F''(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{e^x - 1}\right)^2} \cdot \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{e^{2x} - 2e^x + 2}$$

Essendo che $t^2 - 2t + 2$ è sempre positivo, si ha che la derivata seconda della funzione è sempre negativa. Per valutare poi il limite si utilizza il teorema di de l'Hopital

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x \arctan\left(\frac{1}{e^t - 1}\right) dt}{e^{x-1} - 1} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\arctan\left(\frac{1}{e^x - 1}\right)}{e^{x-1}} = \arctan\left(\frac{1}{e - 1}\right)$$