Esercitazione 10 Dicembre

Definizione (Ridotta o Somma parziale). *Si consideri una successione a_n di numeri reali. Posto*

$$s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

s_k si chiama somma parziale o ridotta k-esima.

Definizione (Somma della serie). *Il limite della successione delle ridotte s_k si indica come somma della serie e si scrive*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} s_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} a_k$$

- *Se tale limite è infinito allora si dirà che la serie diverge.*
- *Se il limite non esiste si dirà che la serie è indeterminata.*
- *Se il limite esiste ed è finito allora si dirà che la serie è convergente.*

Vale anche il seguente risultato.

Teorema (Condizione necessaria per la convergenza). *Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente, allora la successione a_n tende a zero per $n \to +\infty$.*

Valgono le seguenti proprietà sulle serie:

1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sono due seire convergenti e $c \in \mathbb{R}$, allora anche la seire

   $$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$$

   e $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ sono convergenti e si ha:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

2. Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è divergente e $c \neq 0$ allora anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ è divergente.

Vi sono risultati su alcune serie note.

1. La serie geometrica

   $$\sum_{n=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$

   Nel caso in cui si abbia $x \geq 1$ la seire diverge e nel caso in cui $x \leq -1$ la serie risulta indeterminata.

2. La seire armomica
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$
converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$

Esercizio: Calcolare la somma delle seguenti serie geometriche:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$$

Soluzione: Calcoliamo la somma di ciascuna serie geometrica utilizzando la formula generale per le serie geometriche convergenti:

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$
- Questa è una serie geometrica priva del termine $n = 0$. Sottraiamo il primo termine della precedente:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 - 1 = 1$$
- La serie $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n$ ha $|x| = 3 \geq 1$, quindi diverge.
- $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 5$$
- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}+1$$

Per valutare la convergenza delle serie si hanno i seguenti criteri.

Teorema (Criterio del rapporto)**.** *Data* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *con* $a_n > 0$ $\forall n$. *Supponiamo che esista il limite*
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$
se $0 \leq l < 1$ *allora la serie converge, se* $1 < l < +\infty$ *allora la serie diverge.*

Teorema (Criterio della radice)**.** *Data* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, *con* $a_n > 0$ $\forall n$. *Supponiamo che esista il limite*
$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$
Allora, se $0 \leq l < 1$ *la serie converge, se* $1 < l < +\infty$ *la serie diverge.*

Teorema (Criterio mediante confronto asintotico). *Date* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *con* $a_n \geq 0$ *e* $b_n \geq 0$ *se*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$$

allora

- *se* $0 < l < +\infty$ *le serie hanno lo stesos carattere, cioè o divergono entrambe o convergono.*
- *se* $l = 0$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge, allora* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*
- *se* $l = +\infty$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverge, allora* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge*

Esercizio: Stabilire il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$$

Soluzione:

- Confrontiamo il termine generale $a_n = \frac{n}{n^3+1}$ con $b_n = \frac{1}{n^2}$ per $n \to \infty$. Si ha:

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} \sim \frac{n^3}{n^3} = 1$$

  Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, anche la serie data converge per il criterio del confronto.
- Confrontiamo il termine generale $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ con $b_n = \frac{1}{n}$:

  $$a_n = \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = b_n.$$

  Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, la serie data diverge per il criterio del confronto asintotico.
- Per il termine generale $a_n = \sqrt[n]{n}$, osserviamo che:

  $$\sqrt[n]{n} = n^{1/n} \to 1 \quad \text{per } n \to \infty.$$

  Poiché il termine generale non tende a zero, la serie diverge poichè è a termini non negativi e non soddisfa la condizione necessaria di convergenza.

Esercizio: Stabilire i caratteri delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+n^2}{n+1} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n-1}{3n^2+2} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{\log(n)+n^3} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Soluzione:

- $$a_n = \frac{n^3+n^2}{n+1} \sim \frac{n^3}{n} = n^2 \quad \text{per } n \to \infty.$$
  Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ diverge, anche la serie data diverge.
- $$a_n = \frac{5n-1}{3n^2+2} \sim \frac{5}{3n} \quad \text{per } n \to \infty$$
  Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, anche la serie data diverge.
- $$a_n = \frac{n+2}{\log(n)+n^3} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \quad \text{per } n \to \infty.$$
  Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, anche la serie data converge per il criterio del confronto.
- Utilizziamo il criterio del rapporto:
  $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \text{per } n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \to e^{-1} < 1.$$
  Poiché il limite per $n \to +\infty$ è minore di 1 la serie converge.

Esercizio: Stabilire i caratteri delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n)}{n^2+2} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n^2}}{n^n}$$

Soluzione:

- Si ha come limite asintotico
  $$a_n \sim \frac{\log(n)}{n^2} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$
  Quindi, poiché la serie è dominata da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Per il criterio del confronto, anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Applichiamo il criterio della radice:
  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n^2}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^{n^2}}}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = \infty.$$
  Poiché il limite è maggiore di 1, la serie diverge per il criterio della radice.

Esercizio: Stabilire i caratteri delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n \cdot n!} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^5}$$

Soluzione:

- Applichiamo il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}}{\frac{n^n}{2^n\cdot n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}\cdot 2^n\cdot n!}{n^n\cdot 2^{n+1}\cdot(n+1)!} = \frac{(n+1)^n(n+1)}{2(n+1)n^n} = \frac{(n+1)^n}{2n^n}$$

Per $n\to\infty$, osserviamo che $\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$. Pertanto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{e}{2} < 1$$

Poiché il limite è minore di 1, la serie converge.

- Applichiamo il criterio della radice al termine $a_n = \frac{2^n}{n^5}$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^5}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n^5}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Poiché il limite è maggiore di 1, la serie diverge.

Esercizio: Stabilire i caratteri delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Soluzione:

- Applichiamo il **criterio della radice**, che ci chiede di calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n-1} \sim \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$$

Poiché il limite è $\frac{1}{3} < 1$, la serie converge.

- Applichiamo applicare il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$$

Per $n\to\infty$, questa espressione tende a 4, quindi il rapporto è maggiore di 1. Poiché il limite del rapporto è maggiore di 1, la serie diverge secondo il criterio del rapporto.

Esercizio: Stabilire al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{\alpha n}}{n!}$$

Soluzione: Applichiamo il criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{\alpha(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{n^{\alpha n}}{n!}} = \frac{(n+1)^{\alpha(n+1)}}{(n+1)\cdot n^{\alpha n}} = \frac{(n+1)^{\alpha(n+1)}}{(n+1)\cdot n^{\alpha n}} = \frac{(n+1)^{\alpha n+\alpha}}{(n+1)\cdot n^{\alpha n}} = \frac{(n+1)^{\alpha n+\alpha-1}}{n^{\alpha n}}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha n} \to e^{\alpha}$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \to e^{\alpha}(n+1)^{\alpha-1}$$

Se $\alpha < 1$ allora il limite è zero e dunque la serie è convergente. Viceversa se $\alpha = 1$ il limite è e e se $\alpha > 1$ è $+\infty$, perciò per $\alpha \geq 1$ la serie diverge.

Esercizio:[11-01-23] Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n \cdot n!} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}+1} - 1\right)$$

Soluzione:

- La prima seire si è già discussa in precedenza.
- Utilizzo lo svilupo di $(x+1)^{\alpha} = 1 + \alpha x$ ottenendo:

$$\left[\left(\frac{1}{n^3}+1\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right] \sim \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

  perciò la serie converge per il criterio del confronto dei limiti dal momento che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge.

Esercizio:[16-07-24] Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n$$

Soluzione:

- La serie converge per il confronto dei limiti, infatti si ha che $\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \frac{1}{2n^4}$, perciò il termine generale

$$a_n = n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim n \cdot \frac{1}{2n^4} \sim \frac{1}{2n^3}$$

  Poichè la seire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge, si ha la convergenza della seire presa in considerazione.

- Si scrive $\left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right) = (1+\epsilon_n)$ con $\epsilon_n = \frac{2n-2}{n^2-n+2}$, perciò

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left[(1+\epsilon_n)^{\frac{1}{\epsilon_n}}\right]^{\epsilon_n\cdot n} = e^2$$

Perciò la seire diverge essendo a termini non negativi e non essendo a_n infinitesima.