Esercitazione 12 Novembre

Esercizi

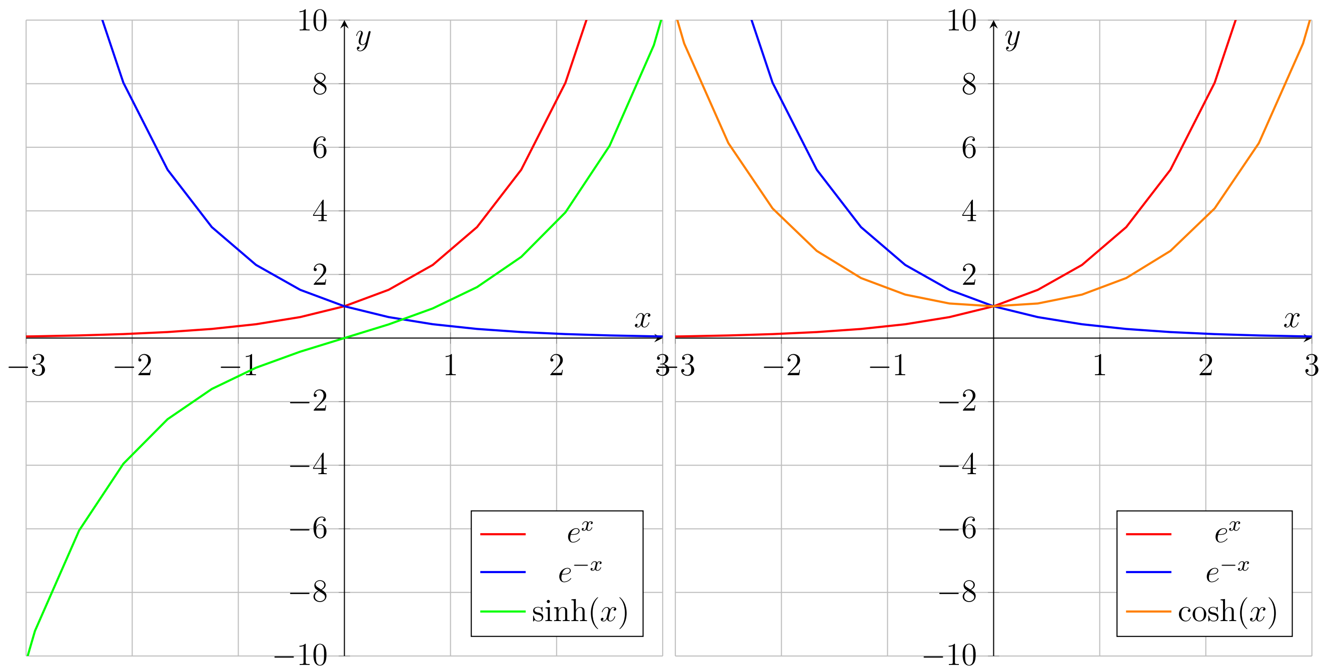
Definiamo ora le **funzioni iperboliche**:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \qquad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Si possono anche determinare le loro inverse. Si consideri il caso del seno iperbolico, si può invertire la funzione $y = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ponendo $e^x = \alpha$, si trova $\alpha^2 - 2y\alpha - 1 = 0$ e quindi essendo $\alpha > 0$, $\alpha = e^x = y + \sqrt{1+y^2}$, perciò si conclude che $x = \log(y + \sqrt{1+y^2})$. Tale funzione è detta settore seno iperbolico. Allo stesso modo si può fare con il cosh.

$$\text{settsinh}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2}) \quad \text{settcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1})$$

Riportiamo qui sotto i grafici delle funzioni iperboliche $\sinh(x)$ e $\cosh(x)$.



Esercizio: Sfruttando le definizioni, dimostra la proprietà:

$$\sinh^2(x) - \cosh^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Soluzione: Calcoliamo $\cosh^2(x) - \sinh^2(x)$:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Quindi, l'identità è verificata:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio: Verifica che:

$$D\sinh(x) = \cosh(x) \qquad D\cosh(x) = \sinh(x) \qquad D\tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

sfruttando la definizione delle funzioni iperboliche e le regole di derivazione delle funzioni note

Soluzione:

$$D\sinh(x) = D\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

$$D\cosh(x) = D\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

$$D\tanh(x) = D\left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right) = \frac{D\sinh(x)\cdot\cosh(x) - \sinh(x)\cdot D\cosh(x)}{\cosh^2(x)}$$

Sostituendo le derivate trovate in precedenza, $D\sinh(x) = \cosh(x)$ e $D\cosh(x) = \sinh(x)$

$$\frac{\cosh(x)\cdot\cosh(x) - \sinh(x)\cdot\sinh(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

Esercizio: Trovare i valori di a e b affinché la funzione, così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2 + 2x + a) & x \geq 0 \\ 2e^{bx} & x < 0 \end{cases}$$

risulti derivabile nel suo dominio

Soluzione: Per garantire che la funzione sia derivabile nel suo dominio, dobbiamo analizzare due condizioni: la continuità e la derivabilità in $x = 0$. La funzione è continua in $x = 0$ se i limiti destro e sinistro sono uguali a $f(0)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \log(a) = 2 = 2e^{b\cdot 0} = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

Pertanto, per la continuità in $x = 0$, è necessario che:

$$\log(a) = 2 \implies a = e^2$$

Per garantire che la funzione sia derivabile in $x = 0$, dobbiamo uguagliare le derivate destro e sinistro in $x = 0$. La derivata della funzione per $x \geq 0$ è $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+a}$ La derivata della funzione per $x < 0$ è $f'(x) = 2be^{bx}$ Pertanto deve valere:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{2}{a} = 2b = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$$

Poiché $a = e^2$, otteniamo:

$$b = \frac{1}{e^{-2}} = e^{-2}$$

Esercizio: Trovare i valori di a e b affinché la funzione, così definita:

$$f(x) = \begin{cases} a\log(x) + bx & x \geq 0 \\ x^2 + \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

risulti derivabile nel suo dominio

Soluzione: Per garantire che la funzione sia derivabile nel suo dominio, dobbiamo analizzare due condizioni: la continuità e la derivabilità in $x = 0$. La funzione è continua in $x = 0$ se i limiti destro e sinistro sono uguali a $f(0)$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = a\log(0) + b \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0^2 + \frac{1}{0} = \infty$$

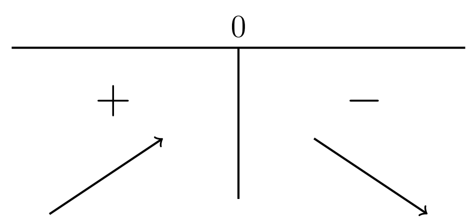
Poiché la funzione non è continua in $x = 0$, non è derivabile nel suo dominio.

Esercizio: Trovare i punti di massimo o minimo e i flessi della seguente funzione:

$$f(x) = e^{1-x^2}$$

Soluzione: Per trovare i punti di massimo, minimo e i flessi, calcoliamo la derivata prima e seconda di $f(x)$ e studiamo il loro segno.

$$f'(x) = e^{1-x^2} \cdot (-2x) = -2x \cdot e^{1-x^2}$$



Studiando il segno si ha il seguente risultato:

$$f'(x) \geq 0 \Longrightarrow -2x \cdot e^{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

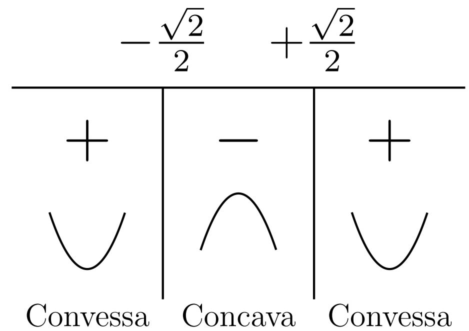
Questo ci fa capire la monotonia della funzione grazie alla tabella mostrata a fianco.
Calcoliamo ora $f(0) = e^{1-0^2} = e$. Quindi, il punto $(0, e)$ è un punto di massimo assoluto della funzione. Calcoliamo ora la derivata seconda per determinare i punti di flesso.

$$f''(x) = -2 \cdot e^{1-x^2} + (-2x) \cdot \left(-2x \cdot e^{1-x^2}\right) = -2e^{1-x^2} + 4x^2e^{1-x^2} = 2e^{1-x^2}(2x^2 - 1)$$

Studiando il segno della derivata seconda si trova:

$$f''(x) = 2e^{1-x^2}(2x^2 - 1) \geq 0$$

$$(2x^2 - 1) \geq 0 \Longrightarrow x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \cup x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Calcolando il valore di $f(x)$ nei punti trovati:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = e^{1-\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = e^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Quindi, i punti di flesso sono:$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right)$.

Esercizio: Trovare i punti di massimo o minimo e i flessi della seguente funzione:

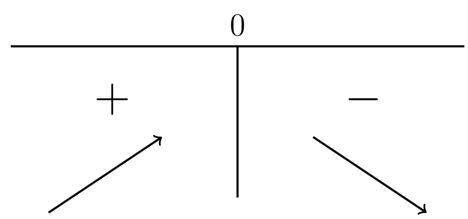
$$f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}$$

Soluzione: Usiamo la regola del quoziente per calcolare la derivata di $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)(-2x) - (1 - x^2)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2}.$$

ora poniamo $f'(x) \geq 0$ per studiare la monotonia.

$$\frac{-4x}{(x^2 + 1)^2} \geq 0 \Longrightarrow x \leq 0.$$



Rappresentando la situazione tramite la tabella a fianco si trova un massimo assoluto in $x = 0$. Calcoliamo allora $f(0) = \frac{1-0^2}{0^2+1} = 1$
Quindi, il punto $(0, 1)$ è il punto di massimo assoluto. Per determinare i punti di flesso, calcoliamo la derivata seconda $f''(x)$. Utilizziamo la derivata della funzione $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$ usando il quoziente:

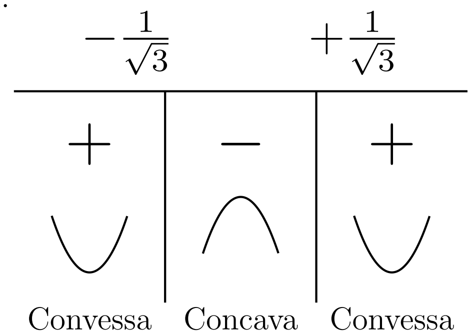
$$f''(x) = \frac{(x^2 + 1)^2(-4) - (-4x)(2(x^2 + 1)(2x))}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-4(x^2 + 1)^2 + 16x^2(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{-4(x^2+1)+16x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{12x^2-4}{(x^2+1)^3}.$$

Studiamo il segno di $f''(x) \geq 0$.

$$12x^2 - 4 \geq 0 \Longrightarrow x^2 - \frac{1}{3} \geq 0 \Longrightarrow x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}} \cup x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Calcoliamo il valore di $f(x)$ in questi punti:



$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2},$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{2}.$$

Quindi, i punti di flesso sono:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right).$$

Esercizio: Trovare i punti di massimo o minimo e i flessi della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{e^x}$$

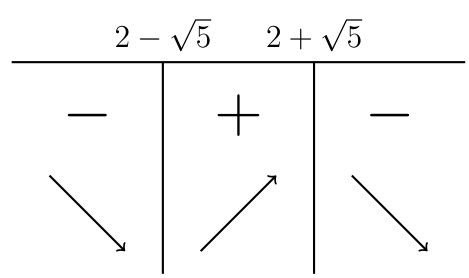
Soluzione: La funzione è del tipo quoziente, quindi usiamo la formula di derivazione del quoziente.

$$f'(x) = \frac{e^x(2x-2)-(x^2-2x-3)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(2x-2-x^2+2x+3)}{e^{2x}} = \frac{e^x(-x^2+4x+1)}{e^{2x}}$$

Semplificando, otteniamo:

$$f'(x) = \frac{-x^2+4x+1}{e^x}$$

Ora risolviamo la disequazione $f'(x) \geq 0$ per trovare i punti critici:



$$\frac{-x^2+4x+1}{e^x} \geq 0 \Longrightarrow x^2 - 4x - 1 \leq 0$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2^2-(-1)(1)} = 2 \pm \sqrt{5}$$

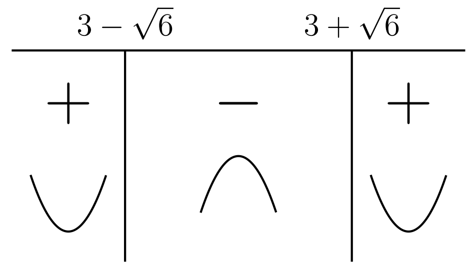
Quindi, i punti critici sono:

$$x_1 = 2 - \sqrt{5}, \quad x_2 = 2 + \sqrt{5}$$

Calcoliamo ora la derivata seconda per determinare i punti di flesso.

$$f''(x) = \frac{e^x(-2x+4) - (-x^2+4x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{-2x+4+x^2-4x-1}{e^x} = \frac{x^2-6x+3}{e^x}$$

Studiando il segno della derivata seconda, risolviamo la disequazione:



$$\frac{x^2-6x+3}{e^x} \geq 0 \longrightarrow x^2-6x+3 \geq 0$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{(-3)^2-(1)(3)} = 3 \pm \sqrt{6}$$

$$x \leq 3-\sqrt{6} \cup x \geq 3 \pm \sqrt{6}$$

I punti di flesso sono quindi $x = 3-\sqrt{6}$ e $x = 3+\sqrt{6}$.

Esercizio: Trovare i punti di massimo o minimo e i flessi della seguente funzione:

$$f(x) = e^x\sqrt{2-x}$$

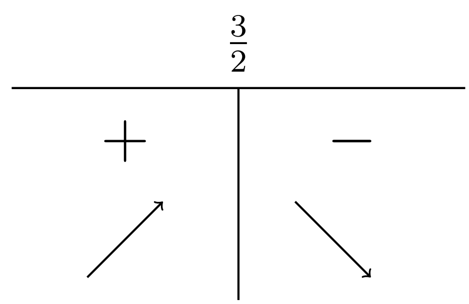
Soluzione: La funzione è definita nel dominio

$$D = (-\infty, 2]$$

Calcoliamo la derivata prima utilizzando la regola del prodotto e la derivata della radice:

$$f'(x) = e^x\sqrt{2-x} + e^x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} = \frac{e^x\left[2(2-x)-1\right]}{2\sqrt{2-x}} = \frac{e^x(3-2x)}{2\sqrt{2-x}}$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:



$$f'(x) \geq 0 \implies 3-2x \geq 0 \implies x \leq \frac{3}{2}.$$

Nel dominio D_f, segue che $f'(x)$ cambia segno in $x = \frac{3}{2}$:

$x = \frac{3}{2}$ è un punto di massimo relativo. Inoltre va evidenziato come $x = 2$ è un punto di non derivabilità.
Calcoliamo ora la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2\sqrt{2-x}\left[e^x(3-2x)-2e^x\right] + \frac{1}{\sqrt{2-x}}e^x(3-2x)}{\left(2\sqrt{2-x}\right)^2} =$$

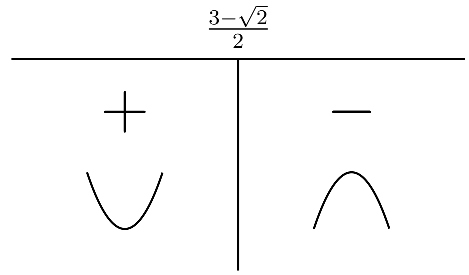
$$\frac{e^x\left[2(1-2x)(2-x)+3-2x\right]}{4\left(\sqrt{2-x}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{e^x(4x^2-12x+7)}{4\left(\sqrt{2-x}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Studiamo il segno di $f''(x)$ risolvendo:

$$f''(x)\geq 0 \implies 4x^2-12x+7\geq 0$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-28}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{2}}{2}$$

$$x\leq\frac{3-\sqrt{2}}{2}\cup x\geq\frac{3+\sqrt{2}}{2}$$



Dal momento che il secondo valore è oltre 2 si considera solo $x\leq\frac{3-\sqrt{2}}{2}$. Per cui si ha il seguente grafico, con un unico punto di flesso in $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$.