Esercitazione 24 Settembre

Ripasso delle lezioni

Massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore

Ricordiamo alcune definizioni fondamentali e i risultati principali.

Definizione. *Dato un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$, se esiste un elemento $M \in A$ tale che $M \geq a$ per ogni altro elemento $a \in A$, questo viene definito **massimo** di A. Scritto in simboli:*

$$M \text{ è } \textbf{\textit{massimo}} \text{ di } A \Longleftrightarrow M \in A \text{ e } M \geq a,\ \forall a \in A$$

Definizione.

$$m \text{ è } \textbf{\textit{minimo}} \text{ di } A \Longleftrightarrow m \in A \text{ e } m \leq a,\ \forall a \in A$$

Proposizione. *Il massimo e il minimo, se esistono, sono unici.*

Dimostrazione. La dimostrazione viene fatta solo per il massimo, si potrebbe effettuare una dimostrazione analoga per il minimo. Siano M_1 ed M_2 due massimi per l'insieme A. Per definizione di massimo si avrebbe che:

$$M_1 \geq a,\ \forall a \in A \Longrightarrow M_1 \geq M_2$$

$$M_2 \geq a,\ \forall a \in A \Longrightarrow M_2 \geq M_1$$

e quindi ne segue che $M_1 = M_2$ $\square$

Definizione. *L si dice **maggiorante** per un insieme A se $L \geq a$, $\forall a \in A$. Viceversa l si dice **minorante** per un insieme A se $l \leq a$, $\forall a \in A$.*

Definizione. *L'insieme A si dice **limitato superiormente** se ammette un maggiorante, mentre si dice **limitato inferiormente** se ammette un minorante. Infine l'insieme A si dice **limitato** se è limitato inferiormente e superiormente. In simboli:*

$$A \text{ è limitato } \Longleftrightarrow \exists l, L : l \leq a \leq L,\ \forall a \in A$$

.

Teorema. *Sia A un insieme non vuoto di numeri reali e limitato superiormente. Allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di A.*

Dimostrazione.

$$A = \{a \in A\} \qquad\qquad B = \{b \text{ maggiorante di } A\}$$

A e B sono non vuoti per ipotesi. Allora applicando l'assioma di completezza ai due insiemi A e B, sappiamo esistere un numero reale c tale che:

$$a \leq c \leq b, \forall a \in A \text{ e } b \in B$$

Dato che $c \geq a$ $\forall a \in A$ si ha che c è un maggiorante di A e quindi $c \in B$. Ma $c \leq b$ $\forall b \in B$ e questo implica che c è un minimo dell'insieme B. □

Definizione. *Sia A un insieme non vuoto di numeri reali limitato superiormente. Diremo che $M \in \mathbb{R}$ è l'**estremo superiore** di A se M è il minimo dei maggioranti di A. Vale anche la seguente proprietà:*

$$M \textit{estremo superiore di } A \Longleftrightarrow \begin{cases} M \geq a, \forall a \in A \\ \forall \epsilon > 0 \exists a \in A : M - \epsilon < a \end{cases}$$

Allo stesso modo vale un analogo risultato del teorema precedente nel caso in cui A sia limitato inferiormente. Pertanto vale la seguente definizione.

Definizione. *Sia A un insieme non vuoto di numeri reali limitato inferiormente. Diremo che $m \in \mathbb{R}$ è l'**estremo inferiore** di A se m è il massimo dei minoranti di A. Vale anche la seguente proprietà:*

$$M \textit{estremo inferiore di } A \Longleftrightarrow \begin{cases} m \leq a, \forall a \in A \\ \forall \epsilon > 0 \exists a \in A : m + \epsilon > a \end{cases}$$

Definizione. *Sia A insieme non vuoto. L'estremo superiore viene definito come $+\infty$ se A non è limitato superiormente. Analogamente, se A non è limitato inferiormente, allora l'estremo inferiore viene definito come $-\infty$.*

$$\sup A = +\infty \Longleftrightarrow \forall L, \exists a \in A \textit{ tale che } a > L$$

$$\inf A = -\infty \Longleftrightarrow \forall l, \exists a \in A \textit{ tale che } a < l$$

Esercizi

Esercizio: Fornire l'esempio di un insieme limitato, infine elencarne alcuni maggioranti e alcuni minoranti. Dire poi se l'insieme che si è preso ha un minimo o un massimo.

Soluzione: Si può considerare ad esempio l'insieme dei numeri naturali compresi tra 1 e 5:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Allora alcuni minoranti sono: $0, \frac{1}{2}, -\pi, -\sqrt{2}, \ldots$, mentre alcuni maggioranti sono $7, 120, 3\pi, \ldots$. Infine si ha che A ha minimo (1) e massimo (5).

Esercizio: Cosa si può dire della limitatezza e dell'esistenza di un massimo e minimo di un insieme con un numero di elementi finito.

Soluzione: Un insieme con un numero di elementi finito è sicuramente limitato e ammette massimo e minimo.

Esercizio: Discutere la veridicità delle seguenti frasi:

- Se un insieme ammette minimo allora è limitato inferiormente.
- Se un insieme non ammette minimo allora non è limitato inferiormente.

Soluzione: La prima frase è vera quindi, seppur con poco sforzo ci tocca dimostrarla:

Dimostrazione. Se un insieme A ammette minimo m, allora questo minimo è anche un minorante in quanto vale la proprietà $m \leq a \ \forall a \in A$. Perciò per definizione risulta limitato inferiormente. □

Viceversa il secondo assunto non è vero ed in questo caso basta prendere come controesempio il seguente insieme $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ fatto da frazioni comprese tra 0 e 1, ma per il quale non si ha il minimo.

Come ripasso della teoria e valutare se si sono comprese bene tutte le parti delle dimostrazioni si sono voluti dimostrare teoremi analoghi a quelli fatti a lezione.

Esercizio: Si dimostri che il minimo di un insieme se esiste è unico.

Soluzione: Per assurdo siano m_1 e m_2 due minimi distinti di un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$, allora vale $m_1, m_2 \in A$ e:

$$m_1 \leq a, \, \forall a \in A \Longrightarrow m_1 \leq m_2$$

$$m_2 \leq a, \, \forall a \in A \Longrightarrow m_2 \leq m_1$$

e quindi $m_1 = m_2$ ma ciò va contro l'ipotesi che i due minimi erano distinti.

Esercizio: La passata dimostrazione non è vera in caso in cui anziché due minimi si considerino due minoranti. Dire quale passaggio non vale più.

Soluzione: Se si considerano due minoranti m_1 e m_2, vale ancora la proprietà: $m_1, m_2 \leq a, \, \forall a \in A$ però nulla ci garantisce che m_1 ed m_2 stiano in A e quindi non si possono dedurre le successive disuguaglianze: $m_1 \leq m_2$ e $m_2 \leq m_1$.

Esercizio: Si dimostri che l'unione di due insiemi limitati è un insieme limitato.

Dimostrazione. Svolgiamo la dimostrazione nel caso A e B siano due insiemi superiormente limitati. Siano perciò M_A e M_B due maggioranti per A e B. Se si considera allora $M = \max M_A, M_B$, vale la seguente proprietà:

$$c \in A \cup B \Rightarrow c \in A \text{ o } c \in B \Rightarrow c \leq M_A \leq M \text{ o } c \leq M_B \leq M$$

Perciò comunque sia $c \leq M$ e questo vale per un generico $c \in A \cup B$ e quindi vale per ciascuno. Ciò implica che $A \cup B$ è limitato superiormente. Una dimostrazione analoga vale nel caso in cui A e B siano limitati inferiormente e quindi si può concludere la tesi dell'esercizio. $\square$

Esercizio: Individuare l'estremo superiore e inferiore, il massimo ed il minimo dei seguenti insiemi:

1. $$A = \left\{n^2 - 4, n \in \mathbb{N}\right\}$$

2. $$B = \left\{\frac{n+1}{n^2+2}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

3. $$C = \left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\right\}$$

4. $$D = \left\{x \in \mathbb{Q}, x^3 < 2\right\}$$

5. $$E = \left\{\frac{n}{m}, n, m \in \mathbb{N}, m < n\right\}$$

6. $$F = \left\{7^{\frac{m}{n}}, m, n \in \mathbb{N}, a > 0\right\}$$

Soluzione: A non è limitato superiormente e quindi $\sup A = +\infty$, $\inf A = \min A = -3$.

B è limitato, $\sup B = \max B = \frac{2}{3}$, $\inf A = 0$, non ha minimo. C è limitato, $\sup C = \sqrt{2}$, $\inf A = -\sqrt{2}$, non c'è massimo ne minimo.

D è limitato solo superiormente, $\sup D = \sqrt[3]{2}$, $\inf D = -\infty$, non c'è il massimo.

E è limitato solo inferiormente, $\sup E = +\infty$, $\inf E = 1$, non ha massimo ne minimo.

F è limitato solo inferiormente, $\sup E = +\infty$, $\inf E = 1$, non ha massimo ne minimo.

Esercizio: Ripercorrendo la dimostrazioni dell'esistenza dell'estremo superiore si dimostri l'esistenza dell'estremo inferiore.

Dimostrazione. Sia A non vuoto per ipotesi e limitato inferiormente. Allora posso considerare: $A = \{a \in A\}$, $B = \{b \in \mathbb{R} : b \leq a, \forall a \in A\}$ (in altre parole B è l'insieme dei minoranti). Allora applicando l'assioma di completezza agli insiemi A e B trovo un elemento c tale che:

$$b \leq c \leq a, \forall a \in A \text{ e } b \in B$$

. Dato che $c \leq a, \forall a \in A$ si ha che c è un minorante di A e quindi $c \in B$. Ma $c \geq b$ $\forall b \in B$ e questo implica che c è il massimo dell'insieme B. $\square$

Esercizio: Sia:

$$A = \left\{ \frac{2n-3}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

individuare l'estremo superiore e inferiore. Verificare la proprietà dell'estremo superiore e inferiore ($\forall \epsilon < 0 \exists a \in A : M - \epsilon < a; \forall \epsilon < 0 \exists a \in A : m + \epsilon > a$)

Soluzione: $\sup A = 2$, $\inf A = \min A = -1$. Verificare le proprietà del minimo è semplice in quanto l'insieme A è composto da numeri razionali tutti positivi salvo proprio il -1. Si consideri poi il sup, comunque scelto $\epsilon > 0$ deve valere:

$$2 - \epsilon < \frac{2n-3}{n}$$

$$2n - \epsilon n < 2n - 3$$

$$n > \frac{3}{\epsilon}$$

questo implica che se n è sufficientemente grande, e nello specifico $n > \frac{3}{\epsilon}$ si ha che la prima disuguaglianza è rispettata. Se si dovesse prendere un numero maggiore di 2 non si potrebbe far valere la stessa cosa. Si prenda come esempio il 3

Si lasciano i seguenti esercizi non affrontati in classe.

Esercizio: Due insiemi A e B si dicono *contigui* se esiste c tale che $c = \sup A = \inf B$. Sia B l'insieme costituito da un solo numero $b_0 > 0$. Determina b_0 in modo che gli insiemi:

$$A = \left\{ \frac{n}{n^2+9}, n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad B = \{b_0\}$$

risultino congiunti.

Esercizio: Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, dimostrare le seguenti relazioni:

$$\sup (A \cup B) = \max (\sup A, \sup B)$$

$$\inf (A \cup B) = \min (\inf A, \inf B)$$

Esercizio: Dire se la seguente affermazione è vera: se un insieme $a \in A$ è limitato allora esiste un valore $M \in \mathbb{R}$ tale che: $-M \leq a \leq M \ \forall a \in A$. In caso affermativo si dia una dimostrazione, viceversa si fornisca un controesempio.

Esercizio: Verificare che i seguenti sottoinsiemi sono limitati:

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$A = \left\{ \frac{2n}{n^2+1} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$