Tutoraggio Analisi 1 2024-2025

Mara Barucco

September 2024

Primo Incontro: acquisire il linguaggio specifico

Test Preliminare

Domanda 1. Individua la proposizione equivalente alla frase: "La vita di un uomo non ha prezzo".

(A) Esiste almeno un uomo la cui vita non ha prezzo
(B) Esiste un solo uomo la cui vita non ha prezzo
(C) La vita di tutti gli uomini non ha prezzo
(D) Non esiste uomo per cui la vita non ha prezzo
(E) Nessuna delle precedenti

Domanda 2. Individua la proposizione equivalente alla frase: "Il test è molto selettivo: basta un errore e sei escluso".

(A) Il test è molto selettivo perché con esattamente un errore sei escluso
(B) Il test è molto selettivo perché con almeno un errore sei escluso
(C) Il test è molto selettivo: se sbagli tutto sei escluso
(D) Il test è molto selettivo infatti se non sbagli tutto non sei escluso
(E) Nessuna delle precedenti

Domanda 3. Individua la corretta traduzione in simboli della proposizione "Non esiste alcun numero reale x tale che, per ogni numero reale y, risulti $x \geq y$."

(A) $\nexists x \in \mathbb{R} \,|\, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y$
(B) $\not\forall x \in \mathbb{R} \,|\, \exists y \in \mathbb{R}, x \geq y$
(C) $\forall y \in \mathbb{R}, \nexists x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq y$
(D) $\forall x \in \mathbb{R} \,|\, \nexists y \in \mathbb{R}, x \geq y$
(E) Nessuna delle precedenti

Domanda 4. Individua la proposizione vera tra le seguenti

(A) $\forall x \in \mathbb{R}, \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ per definizione di tangente.
(B) $\forall x \in \mathbb{R}, \log x > 0$, poiché il dominio della funzione log è $x > 0$.
(C) $\nexists x \in \mathbb{R} \,|\, \log x = 0$ poiché il dominio della funzione log è $x > 0$.
(D) $\nexists x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq 0$ poiché il quadrato di un numero reale è sempre positivo.
(E) Nessuna delle precedenti

Domanda 5. Individua le proposizioni equivalenti:

i. Per ogni esercizio esiste almeno uno studente che l'ha sbagliato.
ii. Esiste almeno uno studente che ha sbagliato tutti gli esercizi.
iii. Nessun esercizio è stato risolto correttamente da tutti gli studenti.

(A) Sono tutte equivalenti.
(B) Nessuna è equivalente alle altre.
(C) Solo la prima e la seconda sono equivalenti.
(D) Solo la prima e la terza sono equivalenti.
(E) Solo la seconda e la terza sono equivalenti.

Domanda 6. La negazione di "Esiste un asino che vola" è:

(A) Esiste un asino che cammina.
(B) Nessun asino vola.
(C) Esistono più asini che volano.
(D) Tutti gli asini camminano.
(E) Esiste un asino che non vola.

Domanda 7. La negazione di "Ogni oggetto d'avorio è bianco" è:

(A) Ogni oggetto d'avorio è nero.
(B) Nessun oggetto d'avorio è bianco.
(C) Esiste un oggetto d'avorio che è nero.
(D) Ogni oggetto d'avorio non è bianco.
(E) Esiste un oggetto d'avorio che non è bianco.

Domanda 8. Individua la proposizione falsa:

(A) $\forall x \in (-2,2),\, x^2 \in [0,5)$.
(B) $\forall x \in (-2,2),\, |x^3| \leq 8$.
(C) $\forall x \in [-2,2],\, e^x \in (\frac{1}{e^2}, e^2)$.
(D) $\forall x \in [-2,2],\, x^2+1 \in (0,5]$.
(E) $\exists x \in (-2,2) \mid \log x = 0$.

Quantificatori

Esercizio 1. Per ciascuna delle proposizioni che seguono, precisa se l'articolo indeterminativo "un" ha significato *esistenziale* o *universale*.

A. La vita di un essere umano non ha prezzo.
B. Un uomo è stato derubato, stamattina.
C. Il test è molto selettivo: basta un errore e sei escluso.
D. Un amico si riconosce nei momenti difficili.
E. Per fare un tavolo ci vuole il legno. [...] Per fare il frutto ci vuole un fiore. [...] Per fare un tavolo ci vuole un fiore.

Esercizio 2. Per ciascuna delle proposizioni che seguono, riscrivila in simboli utilizzando i quantificatori (∃,∀, ecc.).

ESERCIZIO SVOLTO

Riscriviamo in simboli la seguente proposizione, utilizzando i quantificatori:
«Per ogni coppia di numeri razionali x e y, tali che $x < y$, esiste un numero razionale z tale che $y > z$ e $x < z$».

Individuiamo le parti che possono essere tradotte in simboli:

$$\underbrace{\text{Per ogni coppia di numeri razionali } x \text{ e } y,}_{\forall x,\, y \in \mathbf{Q}} \quad \underbrace{\text{tali che}}_{|} \quad x < y, \quad \underbrace{\text{esiste un numero razionale } z}_{\exists z \in \mathbf{Q}} \quad \underbrace{\text{tale che}}_{|} \quad y > z \quad \underbrace{\text{e}}_{\wedge} \quad x < z$$

La proposizione data *si* può allora riscrivere simbolicamente nella forma:

$$\forall x, y \in \mathbf{Q} \mid x < y, \exists z \in \mathbf{Q} \mid y > z \wedge x < z$$

1. Per ogni numero razionale q, esiste un intero n tale che n è maggiore di q.

2. Ogni numero naturale divisibile per 14 è divisibile per 7 e per 2.

3. Ogni numero primo dispari è maggiore o uguale a 3.

4. Esiste un numero reale minore di tutti i numeri naturali multipli di 3.

5. Per ogni numero intero, esiste il successivo.

6. Esiste un numero razionale x, tale che il suo quadrato è maggiore di 1.

7. Non esiste alcun numero reale x tale che, per ogni numero reale y, risulti che x è maggiore o uguale a y.

8. Comunque scelti due numeri reali x e y tali che $x = y$ o $x = -y$, il quadrato di x è uguale al quadrato di y.

Esercizio 3. Traduci in linguaggio corrente le seguenti proposizioni e stabiliscine il valore di verità.

ESERCIZIO SVOLTO

Traduciamo in linguaggio corrente le seguenti proposizioni e individuiamone il valore di verità:

a. $\forall y \in \mathbf{N}, \exists x \in \mathbf{N} \mid x > y$ **b.** $\exists x \in \mathbf{N} \mid \forall y \in \mathbf{N}, x \leq y$

a. Individuiamo le traduzioni in linguaggio corrente dei vari simboli:

$$\underbrace{\forall y \in \mathbf{N}}_{\text{Per ogni numero naturale } y}, \underbrace{\exists x \in \mathbf{N}}_{\text{esiste un numero naturale } x} \underbrace{\mid}_{\text{tale che}} \underbrace{x > y}_{x \text{ è maggiore di } y}$$

La proposizione significa quindi:

«Per ogni numero naturale y, esiste un numero naturale x tale che x è maggiore di y»

Evidentemente tale proposizione è *vera*.

b. Ragionando come nel caso precedente si deduce che la proposizione significa:

«Esiste un numero naturale x tale che, comunque si scelga un numero naturale y, x è minore o uguale a y»

Tale proposizione è *vera* in quanto il numero naturale $x = 1$ soddisfa la proprietà espressa dalla proposizione.

1. $\forall x \in \mathbb{N}, x$ è divisibile per 2 e per 5
2. $\exists x \in \mathbb{N} \mid x$ è divisibile per 2 e per 5
3. $\exists x \in \mathbb{N} \mid -1 < x < 2$
4. $\exists x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2$
5. $\exists x \in \mathbb{Q} \mid -1 < x < 1$
6. $\forall x \in \mathbb{Q}, -1 < x < 1$
7. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 \geq 0$
8. $\exists x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 0$
9. $\forall x \in \mathbb{N}, (x+1) \in \mathbb{N}$
10. $\forall x \in \mathbb{N}, (x-1) \in \mathbb{N}$
11. $\exists x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \notin \mathbb{Q}$
12. $\forall x \in \mathbb{Z}, |x| > 0$

13. $\forall x \in \mathbb{Q}, 0 + x = 0$

14. $\forall x \in \mathbb{Q}, 1 \cdot x = 1$

15. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 \neq 2$

16. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 0$

17. $\forall x \in (-3,4), x^2 \in [0,16)$.

18. $\forall x \in (-2,2], |x^3| < 8$.

19. $\forall x \in [-3,3], e^x \in (\frac{1}{e^3}, e^3)$.

20. $\forall x \in [-2,2], x^2 + 1 \in (0,7]$.

21. $\exists x \in (-2,2) \mid \log x = 1$.

22. $\exists x \in \mathbb{N} \mid \forall y \in \mathbb{N}, x + y = y$

23. $\exists x \in \mathbb{N} \mid \forall y \in \mathbb{N}, x + y = x$

24. $\exists x \in \mathbb{N} \mid \forall y \in \mathbb{N}, xy = x$

25. $\exists x \in \mathbb{N} \mid \forall y \in \mathbb{N}, xy = y$

26. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} \mid x + y = y$

27. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} \mid x + y = x$

28. $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \mid xy \leq 0$

29. $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \mid xy > 0$

Esercizio 4. Completa inserendo al posto dei puntini "$\exists x \in \mathbb{N} |$" oppure "$\forall x \in \mathbb{N}$" oppure "$\nexists x \in \mathbb{N} |$", in modo da ottenere una proposizione vera e il più generale possibile. Usare i puntini a destra per motivare la propria scelta, come illustrato negli esempi.

.... $\exists x \in \mathbb{N} | \ldots x+3=5$	un **esempio** è $x=2$ infatti $2+3=5$, ma la proposizione non è vera per tutti i numeri naturali, un **controesempio** è $x=4$, infatti $4+3=7 \neq 5$
.... $\nexists x \in \mathbb{N} | \ldots x+5=3$	perché la soluzione dell'equazione è $x=-2$, ma $-2 \notin \mathbb{N}$
.... $\forall x \in \mathbb{N} \ldots 3x+5x=8x$	per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione $8x=(3+5)x=3x+5x$.
.... $x^2>0$	....
.... $x \cdot 1 = x$	....
.... $x:2=15$	....
.... $x:3=1$	....
.... $x \cdot 0 = 0$	....
.... $x \cdot 3 = 5$	....
.... $x+0=x$	....
.... $x+0=0$	....
.... $x+1=2$	....
.... $x+1=-2$	....
.... $(3x):3=1$	....
.... $3x-3x=0$	....

Esercizio 5. Completa inserendo al posto dei puntini "$\exists x \in \mathbb{R}\,|$" oppure "$\forall x \in \mathbb{R}$" oppure "$\nexists x \in \mathbb{R}\,|$", in modo da ottenere una proposizione vera e il più generale possibile. Usare i puntini a destra per motivare la propria scelta, come nell'esercizio precedente.

. . . . $\sin x = 1$ . . . .

. . . . $\cos x = 2$ . . . .

. . . . $\tan x = 3$ . . . .

. . . . $\arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$ . . . .

. . . . $|\cos x| \leq 1$ . . . .

. . . . $\log 0 = x$ . . . .

. . . . $\log x = 0$ . . . .

. . . . $\arcsin x = 2\pi$ . . . .

. . . . $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ . . . .

. . . . $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . . . .

. . . . $e^{\log x} = x$ . . . .

. . . . $e^{\log |x|} = |x|$ . . . .

. . . . $e^{\log(x^2+1)} = x^2 + 1$ . . . .

........................$\log x > 0$ ....

.... $\log |x| > 0$ ....

.... $|\log x| > 0$ ....

.... $\log(x^2+2) > 0$ ....

.... $|\log(x^2+2)| > 0$ ....

.... $\sqrt{x} = -3$ ....

.... $\sqrt{-3} = x$ ....

.... $\sqrt[3]{x} = -3$ ....

.... $\sqrt[3]{-3} = x$ ....

.... $\sqrt{x} < 0$ ....

.... $\sqrt{x} > 0$ ....

.... $\sqrt{|x|} > 0$ ....

.... $\sqrt{x^2+1} > 0$ ....

Esercizio 6. Scrivi la negazione delle seguenti proposizioni.

ESERCIZIO SVOLTO

Neghiamo la proposizione «in ogni mese dell'anno, c'è almeno un giorno in cui c'è bel tempo».

Utilizzando i simboli dei quantificatori, la proposizione data si può formalizzare così:
«∀ mese dell'anno, ∃ un giorno in cui c'è bel tempo»

La sua negazione è:
«non è vero che, ∀ mese dell'anno, ∃ un giorno in cui c'è bel tempo» [*]

Essa si può riscrivere più semplicemente. Si può infatti fare «sorpassare» la negazione al primo quantificatore, ∀, trasformandolo in ∃:
«∃ un mese dell'anno in cui non è vero che ∃ un giorno in cui c'è bel tempo»

Similmente, la negazione può sorpassare il secondo quantificatore ∃, trasformandolo in ∀:
«∃ un mese dell'anno in cui, ∀ giorno, non è vero che c'è bel tempo»

Pertanto, una forma equivalente a [*], espressa in linguaggio corrente, è:
«esiste almeno un mese dell'anno in cui, tutti i giorni, non c'è bel tempo»

1. Esiste un numero primo la somma delle cui cifre è divisibile per 3.
2. Ogni uomo vive più di 50 anni.

3. Ogni studente sostiene almeno due interrogazioni in un quadrimestre.
4. In ogni città c'è un aeroporto.
5. In ogni scuola è presente un laboratorio di informatica.
6. Non esiste un numero che è primo e pari.
7. Tutti gli insegnanti hanno vinto un concorso.
8. Ogni triangolo non scaleno ha almeno un asse di simmetria.
9. In ogni classe c'è almeno uno studente che è promosso con il massimo dei voti.
10. Esiste almeno un giorno dell'anno in cui tutti non lavorano.
11. Per ogni numero naturale, esiste un numero naturale che lo precede.
12. Esiste un numero reale x tale che, per ogni numero reale y, risulta $x \geq y$.
13. Esiste almeno una città in cui nessun abitante lavora.

Esercizio 7. Scrivi la negazione delle seguenti proposizioni o dei seguenti enunciati aperti, utilizzando le leggi di De Morgan.

LEGGE | Leggi di De Morgan

a. La negazione della proposizione $p \vee q$ è equivalente alla proposizione $\overline{p} \wedge \overline{q}$.
b. La negazione della proposizione $p \wedge q$ è equivalente alla proposizione $\overline{p} \vee \overline{q}$.
Analoghe regole possono essere utilizzate per negare enunciati aperti della forma $p(x) \vee q(x)$ e $p(x) \wedge q(x)$.

• Leggi di De Morgan
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

1. Paolo non studia e non lavora.
2. $a \neq 1$ o $b = 1$
3. Paolo studia o gioca a tennis.
4. $a = 0$ e $b = 10$
5. Il numero n è primo o dispari.
6. Il numero n è maggiore *o* uguale al numero m.
7. Il numero x è tale che $5 \leq x \leq 15$. (Suggerimento: osserva che $5 \leq x \leq 15$ equivale a $x \geq 5 \wedge x \leq 15$)
8. Il numero x è tale che $6 \leq x < 10$.
9. Il numero x è tale che $7 < x < 9$.

10. Il numero x è tale che $12 < x \leq 19$.
11. Il numero x è tale che $x < 5$ o $x \geq 20$.
12. Il numero x è tale che $x \leq 9$ o $x > 18$.
13. Il numero x è tale che $x \leq 3$ o $x \geq 6$.
14. Il numero x è tale che $x < 4$ o $x > 8$.