Tutoraggio Analisi 1 2024-2025

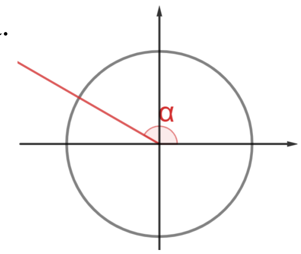
Mara Barucco

September 2024

Secondo Incontro: ripassiamo la goniometria

Test Preliminare

Domanda 1. Sapendo che l'angolo α rappresentato nella figura è un angolo notevole, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.



(A) $\cos\alpha = -\sqrt{2}/2$ e $\sin\alpha = \sqrt{2}/2$
(B) $\cos\alpha = -1/2$ e $\sin\alpha = \sqrt{3}/2$
(C) $\cos\alpha = 1/2$ e $\sin\alpha = -\sqrt{3}/2$
(D) $\cos\alpha = -\sqrt{3}/2$ e $\sin\alpha = 1/2$
(E) $\cos\alpha = -\sqrt{2}/2$ e $\sin\alpha = -\sqrt{3}/2$

Domanda 2. Sia $\alpha = 19\pi/6$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(A) $\sin\alpha = 1/2$
(B) $\cos\alpha = \sqrt{3}/2$
(C) $\tan\alpha = \sqrt{3}$
(D) $\cot\alpha = \sqrt{3}$
(E) Nessuna delle precedenti

Domanda 3. Individua quale tra le seguenti relazioni risulta corretta $\forall x \in \mathbb{R}$

(A) $\sin(\pi + x) = \sin x$
(B) $\cos(\pi/2 - x) = -\sin x$
(C) $\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$
(D) $\tan(\pi + x) = -\tan x$
(E) $\sin(2\pi - x) = \sin x$

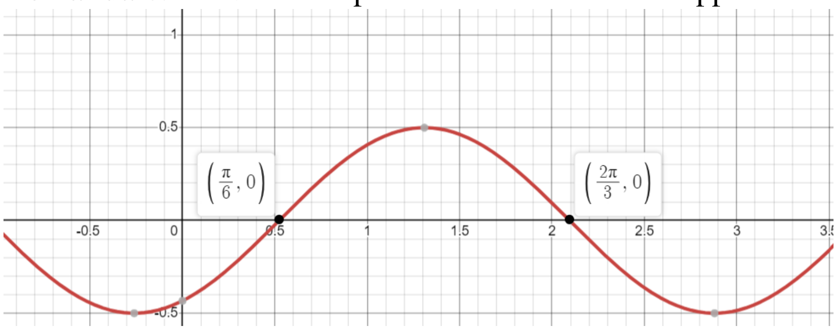
Domanda 4. Sia $f(x) = \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x$. Allora si ha

(A) $f(x) = \sin(\sqrt{2}x) - \cos(\sqrt{2}x)$
(B) $f(x) = 2\sin(x - \pi/4)$
(C) $f(x) = \sqrt{2}\cos(x + \pi/4)$
(D) $f(x) = \sin(x + \pi/4)$
(E) Nessuna delle precedenti

Domanda 5. Individua l'identità vera.

(A) $2\sin x = \sin 2x$.
(B) $\cos x + \cos y = \cos(x+y)$.
(C) $\cos(x+y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.
(D) $\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$.
(E) $\cos x + \sin x = 1$

Domanda 6. Individua l'espressione della funzione rappresentata:



(A) $2\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6})$
(B) $\frac{1}{2}\sin(x - \frac{\pi}{6})$
(C) $\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{\pi}{3})$
(D) $2\tan(x + \frac{\pi}{6})$
(E) Nessuna delle precedenti.

Domanda 7. Seleziona l'affermazione vera

(A) $10\sin x + 7 - 6(\sin x - 1) = 3(\sin x + 3)$ è sempre verificata.
(B) $2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 0$ ha le stesse soluzioni di $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$.
(C) $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 0$ ha le stesse soluzioni di $\sin(2x + \frac{\pi}{5}) = \sin(5x + \frac{\pi}{2})$
(D) $\sin 4x - \cos 4x - 1 = 0$ ha le stesse soluzioni di $4\sin^2 x + 2\sin x \cos x + 4cos^2 x = 3$
(E) Nessuna delle precedenti.

Domanda 8. Trovare le soluzioni alla seguente disequazione in $[0, 2\pi)$:

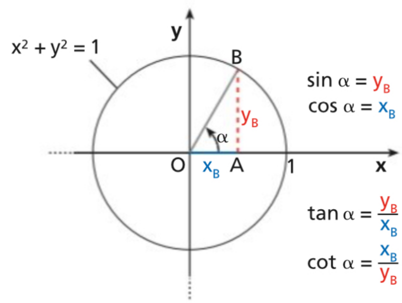
$$\frac{\sin(x)}{2\cos(x) - 1} \geq 0$$

(A) $[0, \pi/3) \cup [\pi, 5\pi/3)$
(B) $[0, \pi/6] \cup [\pi, 11\pi/6]$
(C) $[0, \pi] \cap (-\pi/3, \pi/3) = [0, \pi/3)$
(D) $[0, 2\pi]$
(E) Nessuna delle precedenti

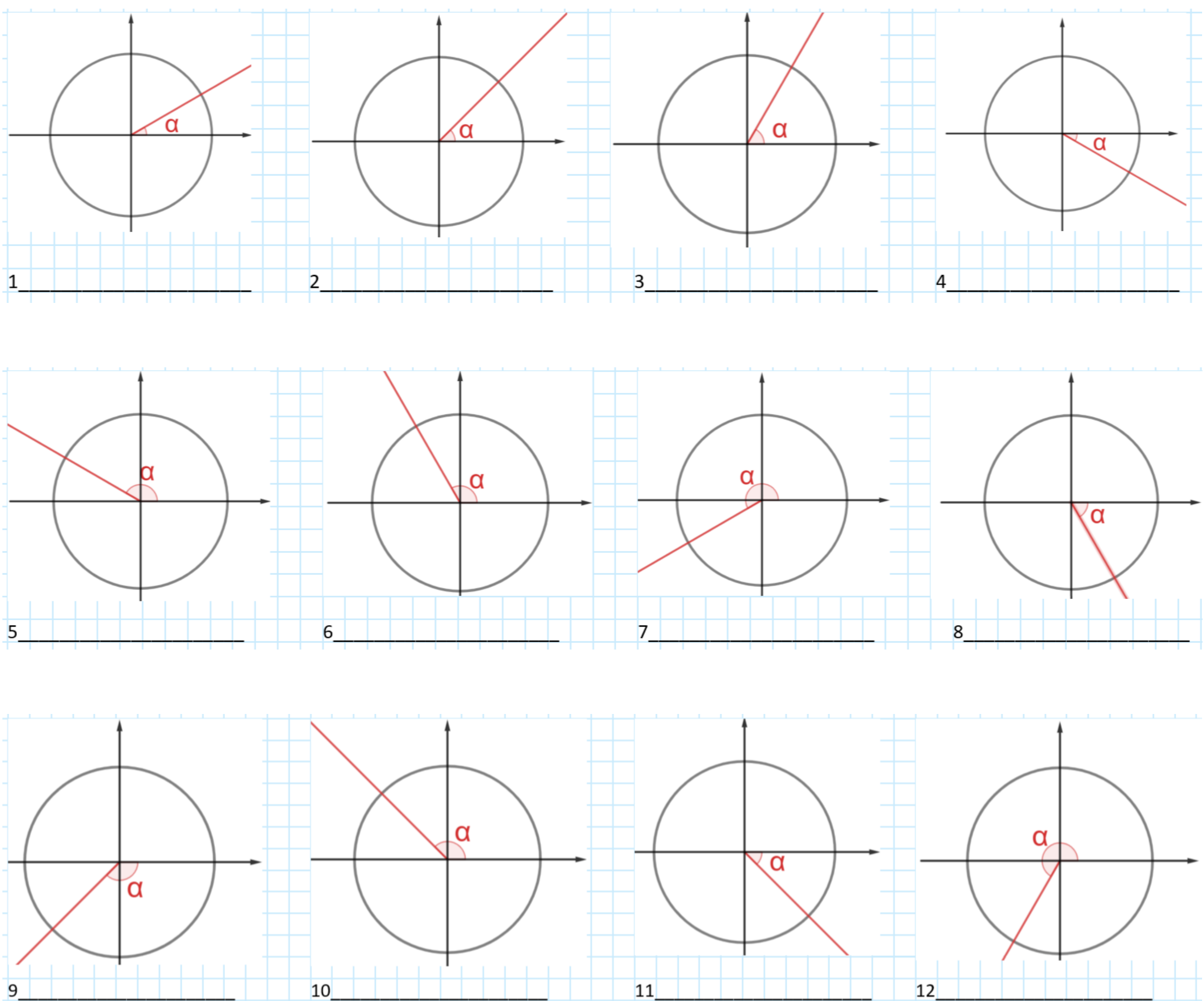
Angoli notevoli, archi associati, angolo aggiunto

Funzioni goniometriche

- Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il suo lato termine e la circonferenza goniometrica. Si dice:
  - **seno di α** ($\sin\alpha$) il valore dell'ordinata di B;
  - **coseno di α** ($\cos\alpha$) il valore dell'ascissa di B;
  - **tangente di α** ($\tan\alpha$) il rapporto fra l'ordinata e l'ascissa di B; è definita per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);
  - **cotangente di α** ($\cot\alpha$) il rapporto fra l'ascissa e l'ordinata di B; è definita per $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).



Esercizio 1. Riconosci l'angolo α rappresentato sulla circonferenza goniometrica. Scrivi anche il valore corrispondente di $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ e $\cot\alpha$.



Formule di addizione *da cui si ricavano tutte le altre*.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Esercizio 2. Completa le seguenti tabelle calcolando le quantità richieste.

$x(^\circ)$	$x(\text{rad})$	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$
60°				
45°				
135°				
120°				
210°				
240°				
-135°				
-120°				
540°				
2010°				
	$\frac{\pi}{6}$			
	$\frac{3\pi}{4}$			
	$\frac{5\pi}{4}$			
	$\frac{5\pi}{6}$			
	$-\frac{\pi}{3}$			
	$-\frac{7\pi}{6}$			
	$\frac{7\pi}{3}$			
	$-\frac{2025\pi}{6}$			

x	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$
$\alpha+\frac{\pi}{2}$			
$\frac{\pi}{2}-\alpha$			
$\alpha-\frac{\pi}{2}$			
$\alpha+\pi$			
$\pi-\alpha$			
$\alpha-\pi$			
$\alpha+\frac{3\pi}{2}$			
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$			
$\alpha+2\pi$			
$2\pi-\alpha$			

β	$2\sin\beta$	$2\cos\beta$
$x+\frac{\pi}{4}$		
$x-\frac{\pi}{4}$		
$x+\frac{\pi}{3}$		
$x-\frac{\pi}{3}$		
$x+\frac{\pi}{6}$		
$x-\frac{\pi}{6}$		
$x+\frac{2\pi}{3}$		
$x-\frac{2\pi}{3}$		
$x+\frac{3\pi}{4}$		
$x-\frac{3\pi}{4}$		

Esercizio 3. Individua l'angolo aggiunto e riscrivi le seguenti espressioni lineari in $\sin x$ e $\cos x$ come funzione di $\rho \sin(x+\alpha)$ per un'opportuna scelta del coefficiente e dell'angolo.

$f(x)$	ρ	α	$\rho \sin(x+\alpha)$
$\sin x + \cos x$			
$\sin x - \cos x$			
$2\sin x + 2\cos x$			
$5\sin x + 5\cos x$			
$\sqrt{3}\sin x + \cos x$			
$\sin x + \sqrt{3}\cos x$			
$\sin x - \sqrt{3}\cos x$			
$-\sin x - \cos x$			
$-\sqrt{3}\sin x + \cos x$			

Identità, equazioni e disequazioni

Esercizio 4. Per ciascuna delle seguenti equazioni, determinare il numero di soluzioni reali distinte negli intervalli indicati (mettendo 0 se non ci sono soluzioni e ∞ se le soluzioni sono infinite). Nel caso in cui ci sia un numero finito di soluzioni reali, indicare in ordine crescente le 4 soluzioni più piccole:

Equazione	Intervallo	Sol	x_1	x_2	x_3	x_4
$\cos x = 0$	$[0, 3\pi]$					
$\cos x = -1/2$	$[0, 2\pi]$					
$\sin x = 1/2$	$[0, 2\pi]$					
$\tan x = \sqrt{3}$	$[0, 2\pi]$					
$\sin x = -\sqrt{3}/2$	$[0, 4\pi]$					
$\cos x = \sin x$	$[0, 2\pi]$					
$\sin x \cdot \cos(x) = 1$	$[2\pi, 4\pi]$					
$4\cos^2 x = 3$	$[0, 2\pi]$					
$\cos^3 x = \cos x$	$[0, 2\pi]$					
$2\cos^2 x + 5\sin x = 4$	$[-2\pi, 0]$					
$1 + (2/\sqrt{3})\sin x \cos x = 2\cos^2 x$	$[0, 2\pi]$					
$3\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^2 2x$	$[0, 2\pi]$					
$\cos^4 x + \sin^2 x = 2\cos 2x - 1$	$[0, 2\pi]$					
$2(\cos x + \sin x) = \sqrt{6}$	$[0, 3\pi]$					
$\cos 3x = 3x^2 + 1$	$\mathbb{R}$					

Esercizio 5. Trovare le soluzioni, contenute nell'intervallo $[0, 2\pi]$, delle seguenti disequazioni

Disequazione	Soluzione
$\sin x > 0$	
$2\cos x < 1$	
$\tan x < \sqrt{3}$	
$2\sin x > 1$	
$4\cos^2 x < 3$	
$4\sin^2 x > 3$	
$\tan^2 x \geq \tan x$	
$\tan x \geq \sin 2x$	
$\sin^4 x - 6\sin^2 x + 5 > 0$	
$3 \leq \cos 2x + 5\sin x$	
$2(\cos x - 1) \leq \sin^2 x$	
$\cos x < \sin 2x$	
$\cos x + \sin x < 1$	
$\cos x < \cos 1$	
$\sin x + \sin 2x + \sin 3x \geq 0$	
$\sin x \geq \sin(2x + 1)$	

Funzioni goniometriche e trasformazioni

Esercizio 6. Rappresenta in grafici delle seguenti funzioni, in alcuni casi è conveniente semplificare l'espressione data per poterla rappresentare.

1. $f(x) = 2\sin x - 1$
2. $f(x) = \sin 2x - 1$
3. $f(x) = |\sin 2x| - 1$
4. $f(x) = |2\sin x - 1|$
5. $f(x) = 2\sin|x| - 1$
6. $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{6})$
7. $f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1$
8. $f(x) = -|\tan x|$
9. $f(x) = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$
10. $f(x) = \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{3})$
11. $f(x) = 4\sin x - 1$

12. $f(x) = 4\sin x - 1$

13. $y = \frac{-\sin 2x}{\cos x}$

14. $y = 2\sin\frac{3}{2}x\cos\frac{3}{2}x - 1$

15. $y = \frac{\sin 2x}{1-\sin^2 x} + 1$

16. $y = \cos^2 x - \sin^2 x - 1$

17. $y = 2\sin 2x\cos 2x$

18. $y = \frac{\sin 2x - \cos x}{2\cos x}$

19. $y = \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}$

20. $y = \frac{\sin 2x}{\cos x - \sin x}$

21. $y = -\sin x - \sqrt{3}\cos x$