

V27

## Der Zeeman-Effekt

Marius Hötting  
Marius.Hoetting@udo.edu

Hubertus Kaiser  
Hubertus.Kaiser@udo.edu

Durchführung: 04.12.2018

Abgabe: DATUM

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Theorie</b>	<b>3</b>
1.1 Aufspaltung der Energieniveaus im homogenen Magnetfeld . . . . .	4
1.2 Auswahlregeln . . . . .	5
1.3 normaler Zeeman-Effekt . . . . .	5
1.4 anomaler Zeeman-Effekt . . . . .	6
<b>2 Fehlerrechnung</b>	<b>8</b>
<b>3 Versuchsaufbau</b>	<b>9</b>
3.1 Lummer-Gehrcke-Platte . . . . .	9
<b>4 Durchführung</b>	<b>11</b>
<b>5 Auswertung</b>	<b>12</b>
<b>6 Diskussion</b>	<b>13</b>
<b>Literatur</b>	<b>14</b>

# 1 Theorie

Grundsätzlich besitzt ein Hüllenelektron den Bahndrehimpuls  $\vec{j}$  und den Eigendrehimpuls  $\vec{s}$ , auch Spin genannt. Die Ladung  $e_0$  und die Masse  $m_0$  des Elektrons stellt eine Verbindung zwischen den Drehimpulsen und dem magnetischen Moment her. Für das auf die Drehimpulseinheit  $\hbar$  ( $m=0$ ) bezogene magnetische Moment ergibt sich folgender Wert:

$$\mu_z = -\frac{1}{2}e_0\frac{\hbar}{m_0} =: \mu_B \quad (1)$$

Dieser Wert wird auch als Bohrsches Magneton  $\mu_B$  bezeichnet. Durch einsetzen in die obige Gleichung ergibt sich das magnetische Moment zum Bahndrehimpuls

$$\vec{\mu}_l = -\mu_B \frac{\vec{l}}{\hbar} = -\mu_B \sqrt{l(l+1)} \vec{l}_e. \quad (2)$$

Dabei beschreibt  $l$  die Drehimpulsquantenzahl, die die Werte  $0, 1, \dots, n-1$  annimmt. Somit ist diese abhängig von der Hauptquantenzahl  $n$ . Die letzte Variable der Gleichung  $\vec{l}_e$  steht für den Einheitsvektor in Richtung des Bahndrehimpulses  $\vec{l}$ . Aufgrund des Stern-Gerlach-Versuchs ergibt sich die Abhängigkeit zwischen Eigendrehimpuls und dem magnetischen Moment zu

$$\vec{\mu}_s = -g_S \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{s} = -g_S \mu_B \sqrt{s(s+1)} \vec{s}_e \quad (3)$$

$\vec{s}_e$  stellt den Einheitsvektor in Richtung des Eigendrehimpulses dar. Die Variable  $g_S$  beschreibt den Landé-Faktor. Für Elektron gilt  $g_S \approx 2$ . In der Konfiguration  $l=1$  und  $s=\frac{1}{2}$  gilt  $\vec{\mu}_S = 2\vec{\mu}_l$ , weshalb diese als magnetische Anomalie des Elektrons bezeichnet wird.

Um Auswahlregeln für Übergänge zwischen Niveaus zu definieren, muss die Wechselwirkung der Elektronen untereinander betrachtet werden. Im allgemeinen Fall ist dieses sehr kompliziert, weshalb zwei Grenzwerte betrachtet werden. Bei einem Atom mit einer geringen Kernladungszahl sind die einzelnen Bahndrehimpulse  $\vec{l}$  so groß, dass diese sich zu einem Gesamtbahndrehimpuls  $\vec{L}$  addieren. Dabei werden nur nicht abgeschlossene Schalen betrachtet, da abgeschlossene Schalen keinen Gesamtdrehimpuls aufweisen. Die Werte 0, 1, 2 oder 3 unterscheiden dabei zwischen den Elektronenorbitalen S, P, D oder F. Der Betrag des Bahndrehimpulses lautet:

$$|\vec{L}| = \sqrt{L(L+1)}\hbar \quad (4)$$

Auch aus den einzelnen Eigendrehimpulsen ergibt sich durch Addition ein Gesamteigendrehimpuls  $\vec{S}$ , der Werte im Intervall  $[-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}-1, \dots, -\frac{1}{2}, 0]$  annimmt. Sein Betrag ergibt sich zu:

$$|\vec{S}| = \sqrt{S(S+1)}\hbar \quad (5)$$

Unter der Voraussetzung eines nicht zu hohen anliegenden Magnetfelds ergibt sich der Gesamtdrehimpuls

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (6)$$

Diese Kombination wird auch als LS-Kopplung oder auch Russell-Saunders-Kopplung bezeichnet. Der dazugehörige Betrag ergibt sich zu

$$|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar. \quad (7)$$

Für den zweiten Grenzfall wird angenommen, dass ein schweres Atom vorliegt. In diesem Fall sind die Wechselwirkungen zwischen dem Bahn- und dem Eigendrehimpuls so groß, dass die Wechselwirkungen untereinander vernachlässigt werden können. Somit ergibt sich für jedes Elektron ein Gesamtdrehimpuls

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \quad (8)$$

Somit sind weder Gesamtbahndrehimpuls noch Gesamteigendrehimpuls für diesen Fall definiert. Den Gesamtdrehimpuls für alle Hüllenelektronen ist damit die Summe der Gesamtdrehimpulse der einzelnen Elektronen. Bezeichnet wird dieser Grenzfall als j-j-Kopplung. Experimentell ist zu beobachten, dass ein fließender Übergang zwischen den angenommenen Grenzfällen besteht, wodurch auch Atome 'mittlerer' Nuklidzahl beschrieben werden können.

## 1.1 Aufspaltung der Energieniveaus im homogenen Magnetfeld

Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  besitzt das magnetische Moment

$$\vec{\mu}_J = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S. \quad (9)$$

Die Richtung des magnetischen Moments  $\vec{\mu}_J$  und des Gesamtdrehimpulses  $\vec{J}$  fallen nicht zusammen. Mit einer quantenmechanischen Rechnung kann gezeigt werden, dass die senkrechte Komponente  $\vec{\mu}_\perp$  eine Präzessionsbewegung beschreibt und damit im zeitlichen Mittel verschwindet. Für den Betrag des magnetischen Moment gilt

$$|\vec{\mu}_J| \approx \mu_B g_J \sqrt{J(J+1)}. \quad (10)$$

Dabei beschreibt  $g_J$  den Landé-Faktor, der wie folgt definiert ist:

$$g_J = \frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (11)$$

Mit Hilfe der Quantenmechanik ergibt sich die sogenannte Richtungsquantelung. Diese besagt, dass eine diskrete Winkelverteilung vorliegen muss. Genauer gesagt, existieren nur Winkel zwischen  $\vec{\mu}$  und  $\vec{B}$ , die die Relation

$$\mu_{Jz} = -m g_J \mu_B \quad (12)$$

erfüllen. Die Orientierungsquantenzahl  $m$  nimmt Werte von  $-J, -J+1, \dots, J-1, J$  an. Somit beschränkt die Orientierungsquantenzahl die Anzahl der möglichen Winkel auf  $2J+1$ . Die zusätzlich Energie die das jeweilige magnetische Moment erfährt beträgt:

$$E_{mag} = m g_J \mu_B B \quad (13)$$

In Abbildung 1 ist die zuvor theoretisch abgehandelte Aufspaltung der Energieniveaus mit dem Gesamtdrehimpuls  $J = 2$  mit und ohne Magnetfeld dargestellt.

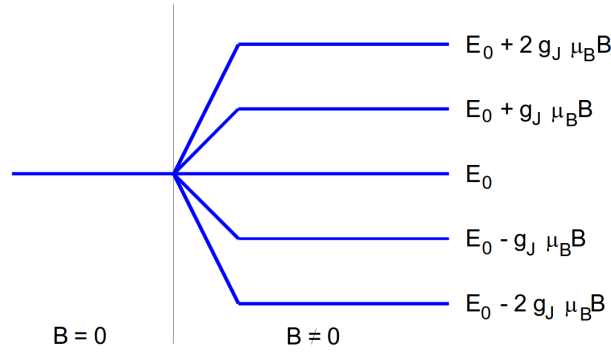


Abbildung 1: Aufspaltung der Energieniveaus ( $J = 2$ ), verursacht durch ein B-Feld[1].

## 1.2 Auswahlregeln

Um eine Aussage über mögliche Übergänge der neuen Niveaus treffen zu können, werden sogenannte Auswahlregeln benötigt. Ausgangspunkt ist dabei die zeitabhängige Schrödingergleichung. Diese wird gelöst und normiert. Mit der Erkenntnis, dass die Dichteverteilung eine zeitabhängige Größe ist, mit der mathematischen Beschreibung des gesamten Dipolmoments und mit der Wellenfunktion des Atoms folgen schließlich die Auswahlregeln:

$$\Delta m = 0 \quad \text{und} \quad \Delta m = \pm 1 \quad (14)$$

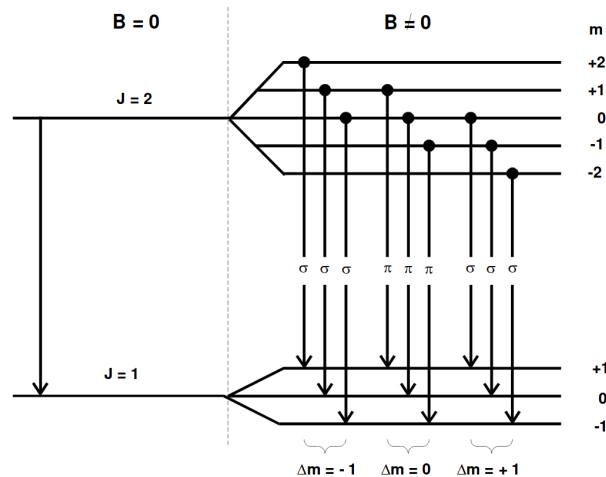
Die Auswahlregeln erzeugen dabei verschiedene Eigenschaften im Bereich der emittierten Strahlung aufweisen. Aufgrund der Winkelabhängigkeit der Strahlungsintensität, schwingt der Dipol mit der Auswahlregel  $\Delta m = 0$  zwar parallel zum angelegten B-Feld, strahlt aber nicht in dieser Richtung ab. Somit ergibt sich die maximale Intensität senkrecht zur Feldrichtung. Zusammenfassend ergibt sich also eine linear polarisierte Welle parallel zum B-Feld. In dem Fall  $\Delta m = -1$  erzeugt der Dipol eine zirkularpolarisierte Schwingung um die Feldausrichtung des B-Feld. Bei  $\Delta m = +1$  entsteht ebenfalls eine zirkularpolarisierte Schwingung, jedoch in entgegengesetzter Richtung.

## 1.3 normaler Zeeman-Effekt

Beim normalen Zeeman-Effekt bezieht man sich auf den Fall  $S = 0$ . Alle zuvor getroffenen Aussagen, besonders über die Energiedifferenz und die Auswahlregeln, gelten weiterhin. Die getroffene Einschränkung bewirkt lediglich, dass die für jedes  $J$  gilt:

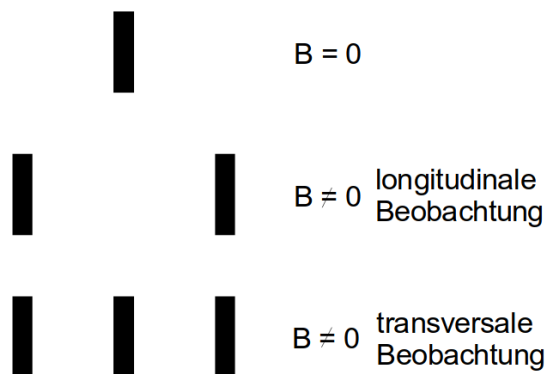
$$g_J = 1 \quad \text{und} \quad \Delta E_{mag} = m \mu_B B \quad (15)$$

Dies hat zur Folge, dass der Abstand zwischen allen Niveaus äquidistant ist. In Abbildung 2 ist ein Beispiel für den normalen Zeeman-Effekt dargestellt.



**Abbildung 2:** Aufspaltung der Energieniveaus und Polarisation der Spektrallinien beim normalen Zeeman-Effekt[1].

Aufgrund der drei Auswahlregeln, sind die Übergänge in drei Gruppen aufzuteilen. In einer Gruppe erfüllen die Übergänge die gleiche Auswahlregel. Wegen der unterschiedlichen Polarisation, bedingt durch die Auswahlregel, sind nicht alle Linien an jedem Beobachtungspunkt sichtbar. Bei  $\Delta m = 0$  bleibt die Energie konstant beim Übergang. Dieser Fall wird als  $\pi$ -Komponente bezeichnet und erzeugt eine linear polarisierte Spektrallinie in Feldrichtung. Diese ist nur bei Beobachtung senkrecht zu Feldausrichtung möglich, da dann die Intensität maximal wird. Somit ist sie longitudinal nicht zu beobachten. Im Fall  $\Delta m = \pm 1$  sind die Energien um  $E = \mu_B B$  verschoben. Die Spektrallinien sind zirkularpolarisiert um die Feldrichtung und erscheinen in transversale Beobachtungsrichtung linearpolarisiert. Somit sind die als  $\sigma_{\pm}$ -Komponente bezeichneten Spektrallinien in jeder Beobachtungsrichtung sichtbar. Zur Verdeutlichung ist in Abbildung 3 das Aufpaltungsbild sowohl longitudinal als auch transversal dargestellt.



**Abbildung 3:** Intensität der emittierten Strahlung aus longitudinaler und transversaler Sicht[1].

## 1.4 anomaler Zeeman-Effekt

Dieser tritt weitaus häufiger auf als der normale Zeeman-Effekt, da für diesen die Spinkomponente ungleich Null ist. Durch die Quantenmechanik kann erneut gezeigt werden, dass sich die

Auswahlregel nicht ändern. Der größte Unterschied besteht lediglich darin, dass die Energieunterschiede zwischen den Übergängen nicht mehr äquidistant sind. Grund dafür ist der Landé-Faktor, der zu einem linienreicheren Spektrum führt.

## 2 Fehlerrechnung

Dieses Kapitel listet kurz und bündig die benötigten und aus den Methoden der Statistik bekannten Formeln für die Fehlerrechnung auf. Die Schätzung der Standardabweichung ist

$$\Delta X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} . \quad (16)$$

Der Mittelwert ist

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (17)$$

Der Fehler des Mittelwertes ist

$$\Delta \bar{X} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} . \quad (18)$$

Für fehlerbehaftete Größen, die auch in folgenden Formeln verwendet werden, muss die Fehlerfortpflanzung nach Gauß berücksichtigt werden.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 \cdot (\Delta X_i)^2} \quad (19)$$

Bei der linearen Regressionsrechnung sind die Parameter  $m$  und  $b$  der Ausgleichsgerade  $y = mx + b$  wie folgt gegeben:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad b = \bar{y} - m\bar{x} . \quad (20)$$

Dabei sind  $x_i$  und  $y_i$  linear abhängige Messgrößen. Der Fehler dieser Parameter wiederum errechnet sich aus

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \quad \sigma_b^2 = \frac{\sigma^2 \bar{x}^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} . \quad (21)$$

Relative Abweichungen einer Messgröße  $x$  gegenüber Literaturwerten  $x_{\text{Lit}}$  werden nach der Vorschrift

$$R_x = \frac{x - x_{\text{Lit}}}{x_{\text{Lit}}} \quad (22)$$

berechnet.



### 3 Versuchsaufbau

Mit dem in Abbildung 4 dargestellten Versuch wird der normale und der anomale Zeeman-Effekt nachgewiesen.

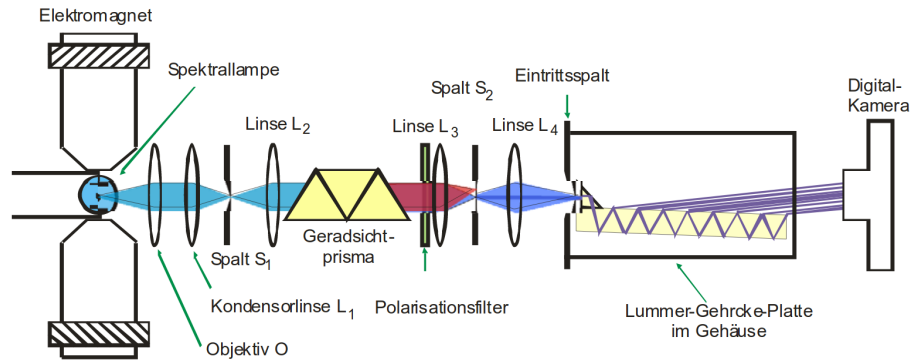


Abbildung 4: Aufbau des durchgeführten Versuchs[1].

Für den Versuch wird eine Cd-Lampe verwendet. Anhand der blauen Spektrallinien kann der anomale und anhand der roten Spektrallinien der normale Zeeman-Effekt beobachtet werden. Ursache für die Aufspaltung der Niveaus ist ein Elektromagnet. Die abgestrahlten Spektrallinien werden fokussiert und parallelisiert. Mit einem Geradsichtprisma erfolgt eine Aufspaltung parallel zur optischen Achse in Abhängigkeit der Wellenlänge  $\lambda$ . Um zwischen den  $\pi$ - und  $\sigma_{\pm}$ -Komponenten zu unterscheiden, wird ein Polarisationsfilter verwendet. Schlussendlich wird die Spektrallinie auf eine Lummer-Gehrcke-Platte gelegt und das Interferenzmuster mit einer Digitalkamera aufgezeichnet.

#### 3.1 Lummer-Gehrcke-Platte

Bei Lummer-Gehrcke-Platte werden planparallel Platten für ein maximales Auflösungsvermögen verwendet. Über ein Prisma wird der Lichtstrahl in die planparallelen Platten gelenkt. Innerhalb dieser, wird der Strahl mehrfach reflektiert. Jedoch tritt bei jeder Reflexion ein kleiner Teil des Lichts aus den Platten aus. Dadurch entstehen mehrere Strahlenbündel die untereinander interferieren. In Abbildung 5 ist die Zeichnung eine Lummer-Gehrcke-Platte dargestellt.

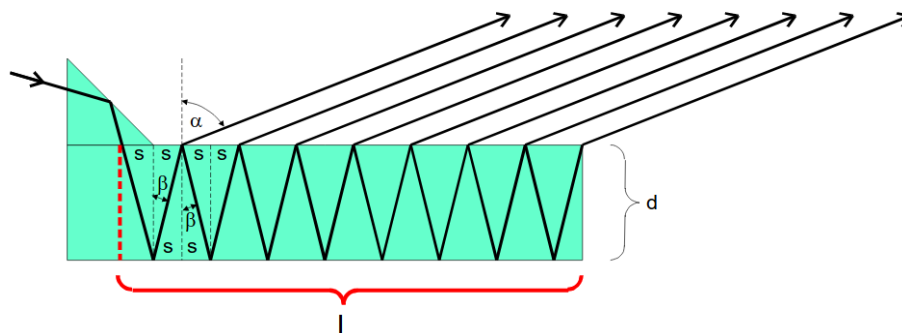


Abbildung 5: Aufbau einer Lummer-Gehrcke-Platte[1].

Für konstruktive Interferenz muss die Bedingung

$$2d \cos \theta = n\lambda \quad (23)$$

erfüllt sein. Dabei bezeichnet  $d$  die Dicke der Lummer-Gehrcke-Platte,  $n$  die Interferenzordnung,  $\theta$  der Einfallswinkel des Lichts und  $\lambda$  die Wellenlänge. Unter Verwendung von monochromatischem Licht erzeugt die Lummer-Gehrcke-Platte einen Interferenzstreifen mit dem Gangunterschied  $\lambda$ . Das eingeschaltete Magnetfeld verursacht jedoch eine Verschiebung der Wellenlänge  $\delta\lambda$  und dadurch eine Verschiebung des Interferenzstreifens  $\delta s$ . Damit es zu keiner Überlagerung kommt, darf eine maximale Wellenlängendifferenz von

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda^2}{2d} \sqrt{\frac{1}{n^2 - 1}} . \quad (24)$$

Das Auflösungsvermögen kann wie folgt bestimmt werden

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{L}{\Delta\lambda} (n^2 - 1) . \quad (25)$$

Dabei beschreibt  $L$  die Länge der Lummer-Gehrcke-Platte und  $n$  den Brechungsindex.

## 4 Durchführung

Im ersten Teil der Durchführung wird das Magnetfeld geeicht. Dazu wird mit einer Hallsonde die magnetische Flussdichte in Abhängigkeit der angelegten Stromstärke vermessen.

Der zweite Teil besteht aus der Justage des Versuchsaufbaus. Dafür wird mit einem Objektiv und einer Kondensorlinse das emittierte Licht auf einen Spalt fokussiert. Danach wird der Lichtstrahl auf einen Kollimator und anschließend auf Geradsichtprisma gelenkt. Hier ist zu beachten, dass der Durchmesser des Strahl nicht die breite des Primas überschreitet, da dies sonst ein Intensitätsverlust zur Folge hätte. Mit einer weiteren Linse wird erneut auf einen Spalt fokussiert. Ist dieser komplett geschlossen werden auf diesem die Spektralfarben Rot, Blau und Grün abgebildet. Durch eine Öffnung und Verschiebung des Spalts, kann somit einer dieser Spektrallinien ausgewählt werden. Zu diesem Zeitpunkt wird der Polarisator im Strahlengang platziert, wodurch zwischen den Übergängen  $\Delta m = 0$  und  $\Delta m = \pm 1$  unterschieden werden kann. Nach dem Lummer-Gehrcke-Prisma wird zur Aufnahme der Aufspaltung der Spektrallinien eine Digitalkamera optimal justiert. Nach dieser Justage, die mit der grünen Spektrallinie durchgeführt worden ist, wird anschließend die blaue und die rote Spektrallinie vermessen. Für jede einzelnen Messung wird dabei ein Bild ohne Magnetfeld und jeweils ein Bild mit der  $\pi$ - und  $\sigma$ -Aufspaltung aufgenommen.

## **5 Auswertung**

## 6 Diskussion

## Literatur

- [1] *TU Dortmund - Fachbereich Physik : Fortgeschrittenenpraktikum Anleitung zu Versuch Nr. 23.* [http://129.217.224.2/HOMEPAGE/Anleitung\\_FPBSc.html](http://129.217.224.2/HOMEPAGE/Anleitung_FPBSc.html). Mai 2017.