Versuch 243 - Thermisches Rauschen

Marius Mangold

January 14, 2022

1 Grundlagen

1.1 Thermisches Rauschen

Jedes Objekt über 0K(also so ziemlich jedes) hat eine gewisse thermische Energie. Aufgrund dieser kommt es in Leitern zu kleinen Bewegungen der Ladungen. Diese Ladungsbewegungen können wir als Rauschen messen. Meist stört uns dieses Rauschen bei der Messung anderer Größen, in diesem Versuch möchten wir uns jedoch mit diesem beschäftigen.

Da das thermische Rauschen nur die kleine Bewegung von Leitern ist und keine richtige Energiequelle ist, muss der Mittelwert der Spannung verschwinden.

$$< U_R >= \lim_{t' \to \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} U_r(t) dt = 0 \tag{1}$$

Wir können die Rauschspannung jedoch über ihren Effektivwert beschreiben, dieser ist:

$$\sqrt{< U_R^2 >} = \sqrt{\lim_{t' \to \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} U_r^2(t) dt} \tag{2}$$

Über die Nyquist-Beziehung lässt sich dieser Effektivwert berechnen.

$$< U_R^2 >= 4 k_B T R \Delta f \tag{3}$$

Hierbei ist: k_B die Boltzmannkonstante, T die Temperatur, R der Widerstand und Δf die betrachtete Bandbreite.
Wir regulieren hierbei die Bandbreite auf den Messbereich unseres Oszilloskops, während das thermische Rauschen eigentlich über alle Frequenzen gleichmäßig auftritt.

1.2 Messprinzip

Nach der Gleichung (3) können wir die Boltzmannkonstante einfach berechnen. Wir müssen hierfür lediglich den Effektivwert der Rauschspannung bestimmen. Da Rauschspannungen natürlicherweise recht klein sind, müssen wir die Spannungen zum Messen verstärken, in diesem Versuch ungefähr 1000-fach.

Bei dieser Verstärkung kommt es jedoch zusätzlich zur Rauschspannung des Verstärkers, weswegen gilt:

$$\sqrt{\left\langle U_{R+V}^2 \right\rangle} = \sqrt{\left(\left\langle (U_R + U_V)^2 \right\rangle\right.} = \sqrt{\left\langle U_R^2 \right\rangle + \left\langle U_V^2 \right\rangle + 2 \left\langle U_R \right\rangle \left\langle U_V \right\rangle} \tag{4}$$

Da der einfache Mittelwert verschwindet folgt:

$$\left\langle U_{R+V}^2 \right\rangle = \left\langle U_R^2 \right\rangle + \left\langle U_V^2 \right\rangle \tag{5}$$

Wir können daher $\left\langle U_V^2 \right\rangle$ durch eine Nullmessung bestimmen und erhalten schnell$\left\langle U_R^2 \right\rangle$.

Da wir wie bereits erläutert die Bandbreite verringern, muss der Frequenzgang $g(f)$ wie folgt bestimmt werden:

$$g(f) = \left. \frac{U_{aus}}{U_{ein}} \right|_f \tag{6}$$

U_{aus} enspricht hierbei der Ausgangsspannung des Bandfilters, währen U_{ein} der Rauschspannung entspricht.

Wir erhalten nun:

$$d\left\langle U_{\text{aus}}^2 \right\rangle = g(f)^2 d\left\langle U_R^2 \right\rangle = 4k_B T R g(f)^2 df \tag{7}$$

$$< U_{aus}^2 > = 4k_B T R \int_0^\infty g(f)^2 df = 4k_B T R B \tag{8}$$

Zuletzt addieren wir das Verstärkerrauschen und finden:

$$\left\langle U_{aus}^2 \right\rangle = 4k_B T R B + \left\langle U_V^2 \right\rangle \tag{9}$$

woraus die Boltzmannkonstante wie folgt zu bestimmen ist:

$$k_B = \frac{\left\langle U_{aus}^2 \right\rangle - \left\langle U_V^2 \right\rangle}{4TRB} \tag{10}$$

1.3 Vermessug des Frequenzgangs

Um den Frequenzgang zu bestimmen, verwenden wir ein einstellbares Sinussignal. Dieses wird zuerst abgeschwächt, um nicht den Messbereich zu übersteigen, und anschließend, wie vorher, das Rauschen über den Verstärker geschickt. Nach dem Passieren des Bandpassfilters wird das Signal im Oszilloskop betrachtet. Da wir das Eingangssignal kennen, können wir nun den Frequenzgang bestimmen:

$$g(f) = \frac{\sqrt{\frac{\langle U_{aus}^2 \rangle}{D^2}}}{\sqrt{\langle U_{\text{ein}}^2 \rangle}} = \frac{1}{D} \frac{\sqrt{\langle U_{\text{aus}}^2 \rangle}}{\sqrt{\langle U_{\text{aus}}^2 \rangle}} \tag{11}$$

2 Durchführung

2.1 Aufgaben

- Messen Sie die Rauschspannung von sechs verschiedenen Widerständen bei Zimmertemperatur sowie das Eigenrauschen des Verstärkers
- Bestimmen Sie den Frequenzgang der Messelektronik.

2.2 Materialliste

- Batterienetzteil
- Zimmerthermometer
- Verschiedene ohmsche Widerstände in einem gemeinsamen Gehäuse montiert
- Rauscharmer Verstärker mit 1000-facher Verstärkung (60 dB) und zuschaltbarem Bandpassfilter
- Dämpfungsglied 1/1000-fach (-60dB)
- Multimeter Agilent HP34401A
- PC mit Funktionsgenerator, Oszilloskop und Spektrumanalysator

2.3 Vorversuch

Zu Beginn des Versuchs müssen die Geräte für mindestens 15 Minuten vorwärmen, da dies sonst während des Versuchs geschieht und somit die Messung verfälschen würden.
Das Gehäuse mit den einstellbaren Widerständen wird direkt in den Verstärkereingang gesteckt, und der kleinste Widerstand eingestellt. Der Verstärkerausgang auf Kanal 1 des Oszilloskops gelegt. In der Software betrachten wir nun für unterschiedliche Widerstände die Rauschspannung. Screenshots sind im Messprotokoll beigefügt. Anschließend betrachten wir mit den folgenden Einstellungen das Rauschsignal:

- Freq. scale: LOG
- Frequency Range: 0,6 MHz
- Coupling: AC
- Volts/Div.: 5 mV
- Schalten Sie im Menu Options → FFT Options die Option Average ein

Screenshots sind erneut dem Messprotokoll beizufügen.

2.4 Messung der Rauschspannung als Funktion des ohmschen Widerstands

Wir verbinden den Verstärker über ein möglichst kurzes Kabel mit dem Bandfilter und diesen wiederum mit dem Spannungsmessgerät. Über das Programm Effektivwert können wir nun den vermessenen Mittelwert und dessen Standardabweichung einsehen.

Über dieses Setup werden nun die verfügbaren Widerstände über 100 Messpunkte betrachtet, und die erhaltenen Größen im Messprotokoll notiert.

Anschließend wird das Eigenrauschen des Verstärkers bestimmt, indem der Eingang kurzgeschlossen wird.

2.5 Messung des Frequenzgangs des Verstärkers und des Bandfilters

Nun wird eine Schaltung entsprechend der im Messprotokoll beigefügten Abbildung aufgebaut. Wir wählen im Oszilloskop ein Sinussignal mit 100 Hz und der Amplitude $0.2V_{rms}$. Im Circuit-Analyser werden die folgenden Einstellungen getätigt:

- Vertical Scale: 5 dB/div
- V-Range: 0,15 V
- Frequency Range: 1 MHz
- Frequency Start: 100 Hz
- Stellen Sie für die Frequenzschritte 20% ein (Menupunkt Options → Frequency Step Size)
- Wählen Sie aus dem Menupunkt Options, die Option Automatic Voltage Scale und folgen Sie den Hinweisen des erscheinenden Fensters.

Wir starten die Messung und senden uns die Messwerte nach Abschluss zu.

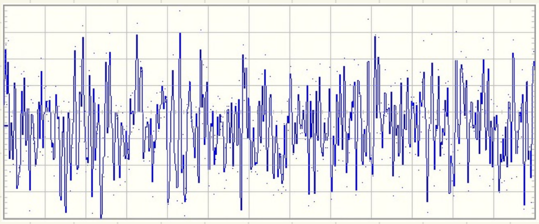
12.01.2022

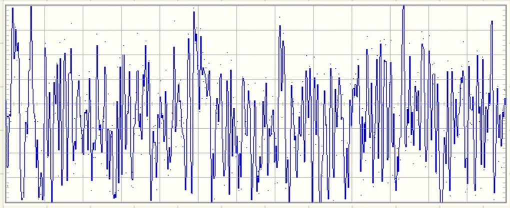
Messprotokoll 243

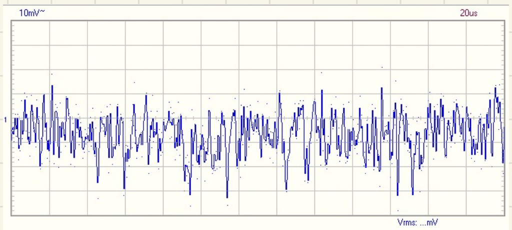
Dorian Karle
Marius Mangold

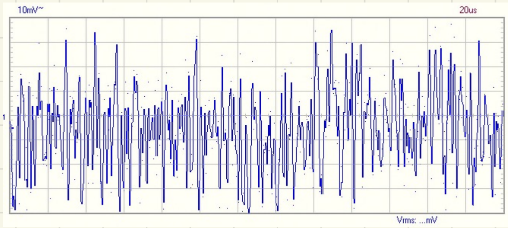
Vorversuch 1:

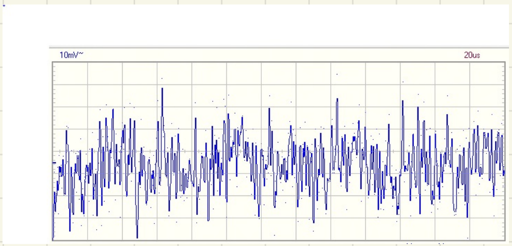
Wir erhielten folgende Ergebnisse für verschiedene Widerstände:







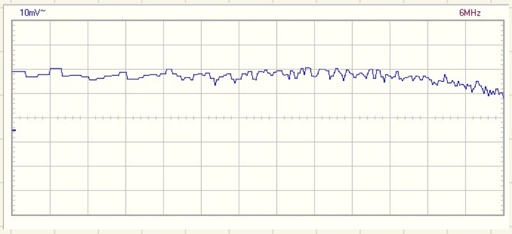




Frequenzspektrum:

mit Bandfilter:

ohne Bandfilter

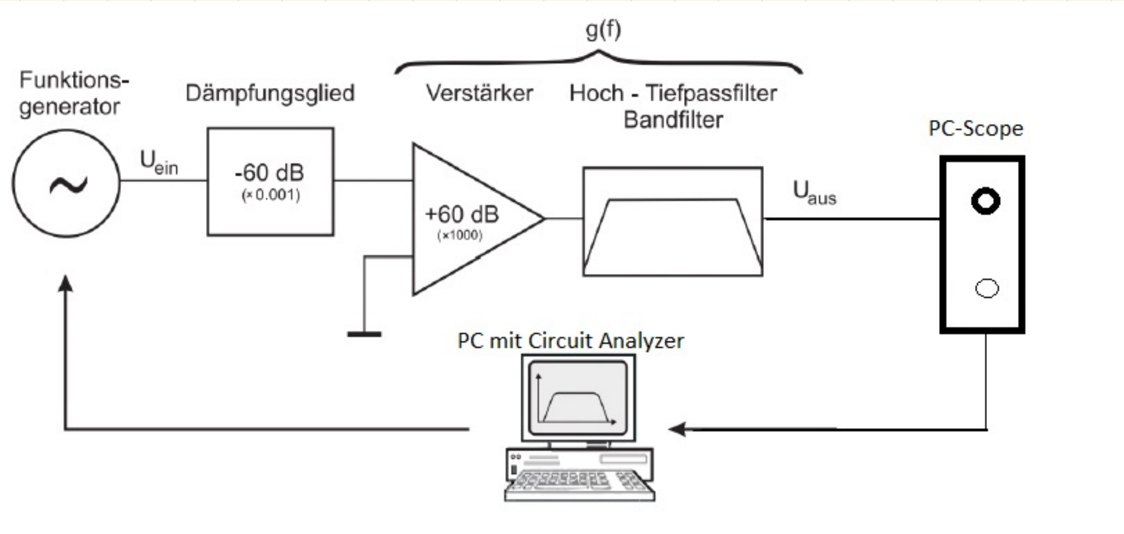


Messung des Rauschspannung als Fkt. des ohmschen widerstand

Zimmertemp: 22,6 °C

R [kΩ]	$\bar{U}$ [mV]	$\Delta\bar{U}$ [mV]
5	2,410	0,00903
10	3,117	0,0114
15	3,697	0,0127
20	4,199	0,0186
25	4,658	0,0166
30	5,069	0,0184
0	0,00537	0,00027

Messung des Frequenzganges des Verstärkers und Bandpassfilters

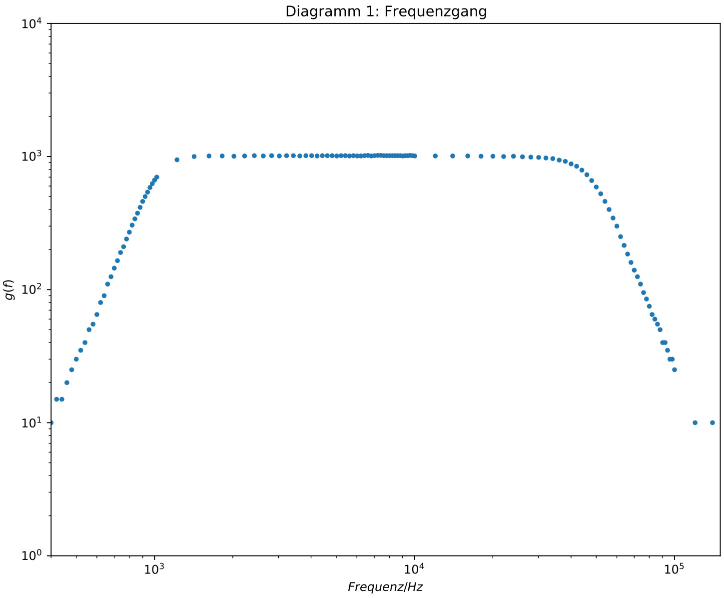


Aufbau

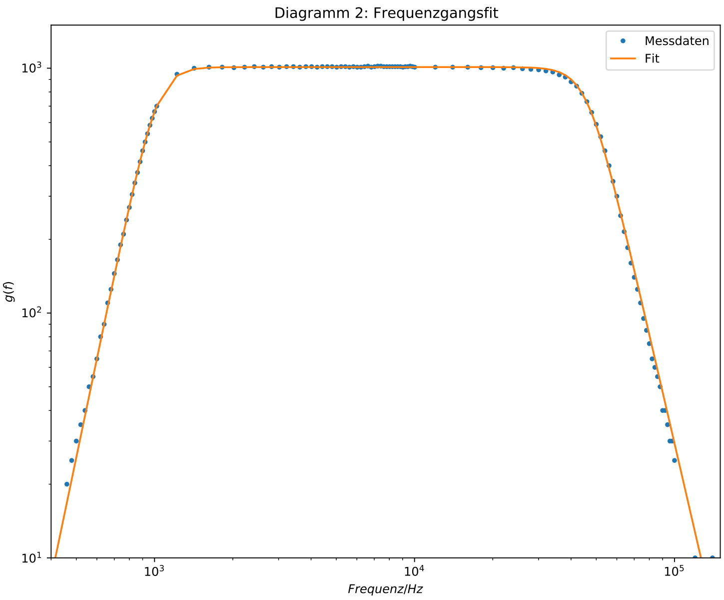
Ergebnisse folgen in Latex.

4 Auswertung

Wir bestachen zu Beginn der Auswertung den Frequenzgang. Hierzu laden wir die Messdaten in Python und tragen sie logarithmisch auf.



Wir legen nun einen Fit durch diese Werte und Integrieren anschließend über ihn.

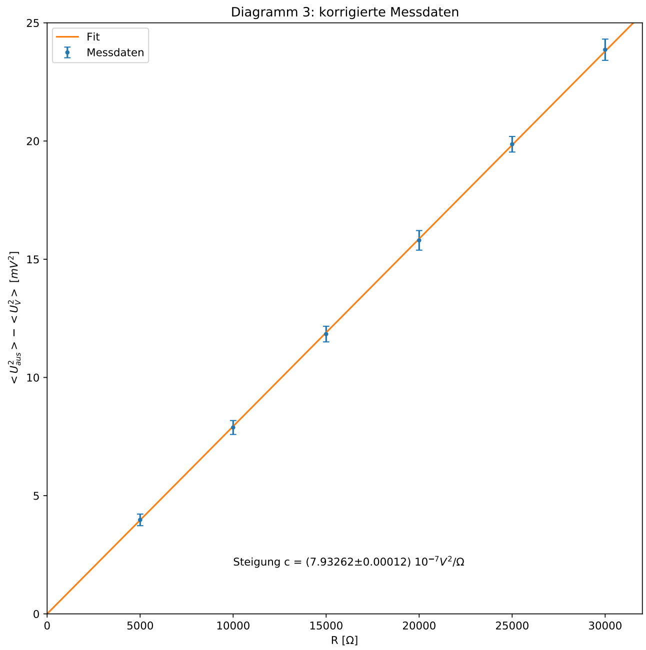


Hierbei erhalten wir:

$$B = \int_0^\infty g(f)^2 df = 4.7169 * 10^{10} \tag{12}$$

Mithilfe dieses Wertes können wir nun die Messung der Rauschspannung auswerten.

Wir tragen die Messwerte per Hand in Python über ein Array ein und berechnen $U_{aus}^2 - U_V^2$. Dies plotten wir gegen den jeweiligen Widerstand, und legen zusätzlich einen Fit an.



Wir lassen uns die Güte des Fits ausgeben und erhalten hervorragende Ergebnisse:

$$\chi^2 = 0.123 \tag{13}$$
$$\chi_{red}^2 = 0.025 \tag{14}$$
$$P > 99.9\% \tag{15}$$

Die steigung des Fits beträgt, wie schon im Diagramm 3 vermerkt:

$$c = (7.93262 \pm 0.00012)10^{-7}\frac{V^2}{\Omega} \tag{16}$$

Über diese Steigung lässt sich nun mithilfe der Formel (10) der Grundlagen die Boltzmannkonstante bestimmen. Hierfür verwenden wir zusätzlich die im Messprotokoll notierte Raumtemperatur von $22.6°C$.

Wir erhalten:

$$k_B = 1.422 * 10^{-23}\frac{J}{K} \tag{17}$$
$$\Delta_{systematisch} = 0.029 * 10^{-23}\frac{J}{K} \tag{18}$$
$$\Delta_{statistisch} = 0.0022 * 10^{-23}\frac{J}{K} \tag{19}$$

wobei wir als Fehler den systematischen und statistischen Fehler quadratisch addieren. Wir erhalten somit:

$$k_B = (1.422 \pm 0.029) * 10^{-23}\frac{J}{K} \tag{20}$$

5 Zusammenfassung und Diskussion

Wir begonnen den Versuch mit dem Vorversuch, in welchem wir das Rauschspektrum zunächst qualitativ betrachteten. Es war zu sehen, wie kleinere Widerstände zu kleineren Rauschspannungen führte, und dass die Frequenzen unabhängig vom gewählten Widerstand waren. Zuletzt war auch das Abfallen des Signales beim Bandpassfilter zu sehen. Wir wurden somit in unserem theoretischen Verständnis und dem Wissen über die korrekte Funktionsweise der Geräte bestätigt.

Als nächstes wurden die sechs Widerstände vermessen. Über etwas mehr als 100 Messungen pro Widerstand konnten wir den Mittelwert und dessen Mitleren Fehler gut bestimmen. Die Später durch die Messwerte gefittete Gerade zeigte eine Fitwahtscheinlichkeit von 99.97% was über allen erwartungen lag. Dementsprechend gut waren auch die Ergebnisse von χ^2 und χ^2_{red}.

Für die Messung des Frequenzgangs des Verstärkers legten wir das Dämpfungsglied auf den Eingang des Verstärkers und ein $0.2V_{rms}$ Sinussignal. Den aufgenommenen Frequenzgang plotteten wir in Python und legten einen Fit an. In Diagramm 2 ist direkt zu sehen, wie gut dieser zu der Vielzahl der Messwerte ohne nennenswerte Ausreiter passt, weswegen wir und das erstellen einer Fitwahrscheinlichkeit sparen können. Schließlich berechneten wir das Integral über das Quadrat der Fitfunktion.

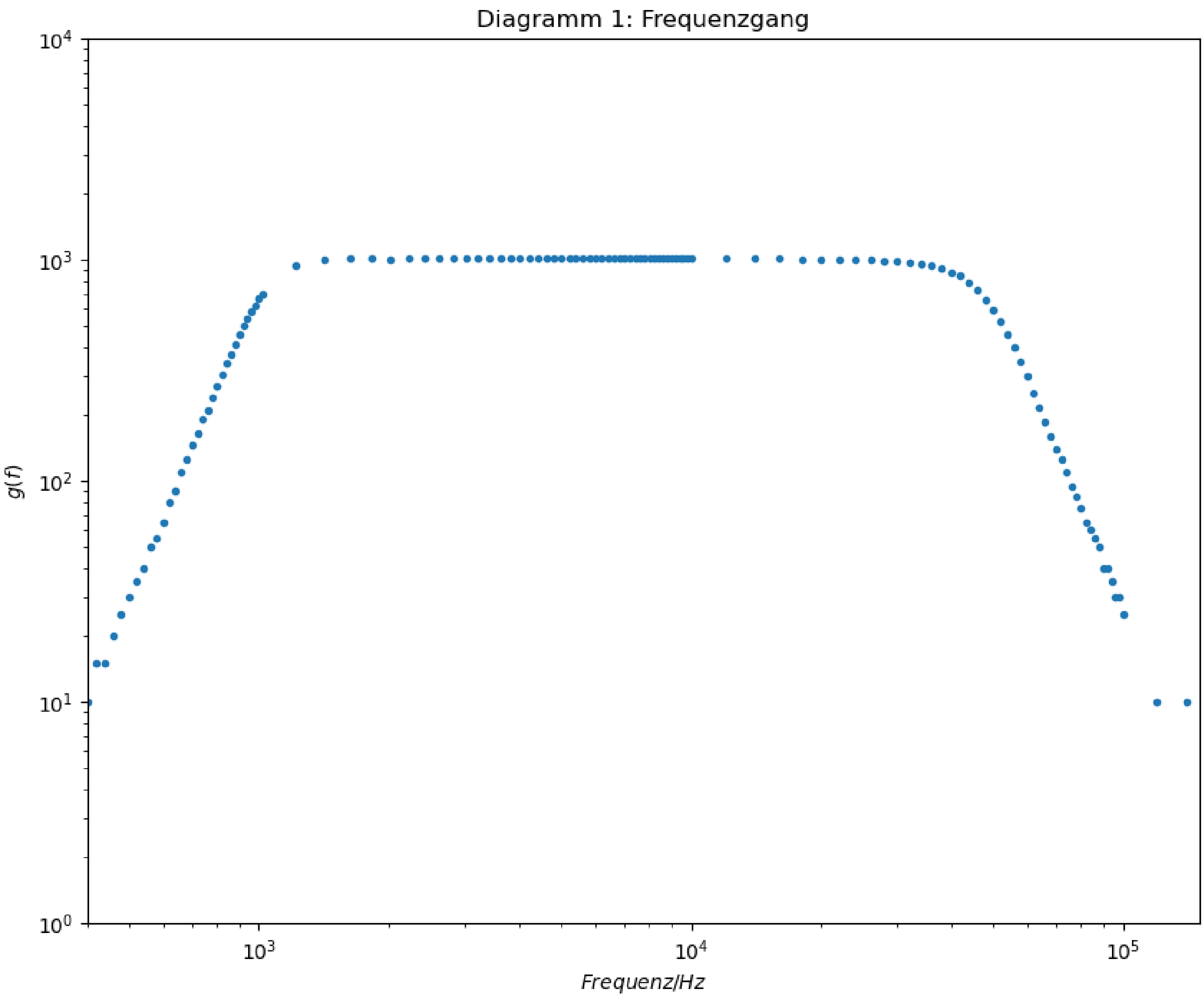
Mit diesem Wert war es uns nun möglich die Boltzmannkonstante zu bestimmen. Wir erhielten:

$$k_B = (1.422 \pm 0.029) * 10^{-23} \frac{J}{K} \tag{21}$$

Da die Boltzmannkonstante eine Definitionsgröße ist, ist die Abweichung einfach aus der Differenz unseres Wertes mit dem Literaturwert zu errechnen, wobei durch unseren Fehler geteilt wird. Wir erhalten eine Umgebung von 1.5 σ. Dies ist grundsätzlich ein sehr guter Wert. Hinzu kommt jedoch noch, dass für das berechnete Integral keine Fehlerrechnung durchgeführt wurde, was den Fehler verstärken und die Abweichung herabsetzten würde. Aufgrund des sehr guten Fits wäre dieser Effekt jedoch wahrscheinlich marginal. Die Abweichung von weniger als 3% vom Literaturwert zeigt uns, dass wir alle Messungen sehr wahrscheinlich gut durchgeführt haben und bestätigt unsere theoretische Erklärung des Versuchs.

Versuch 243: Thermisches Rauschen

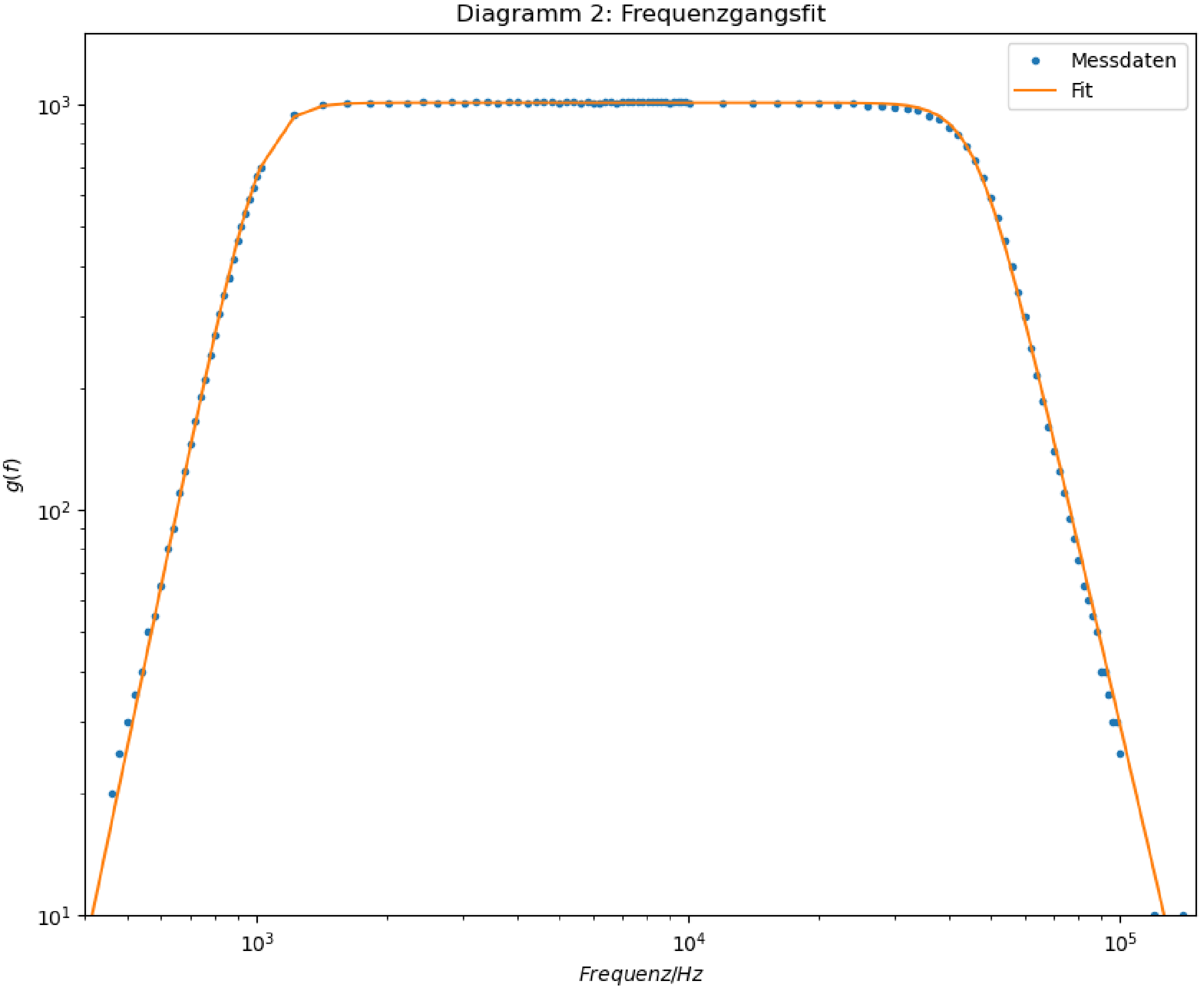
In [1]:
```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

plt.style.use('default')
plt.rcParams["figure.figsize"][0] = 10
plt.rcParams["figure.figsize"][1] = 8
plt.rcParams['errorbar.capsize']=3


f, U_aus = np.loadtxt('243.txt', skiprows=1, usecols=(0,1), unpack=True)

D=1e-3
U_ein=0.20
g=U_aus/(U_ein * D)

plt.loglog(f,g,linestyle="None", marker=".")
plt.axis([4E2, 1.5e5, 10, 1.5E3])
plt.xlabel(r'$Frequenz / Hz$')
plt.ylabel(r'$g(f)$')
plt.title("Diagramm 1: Frequenzgang")
plt.ylim(1,10**4)
plt.savefig('Diagramm1.pdf',format='PDF')
```



In [2]:
```
x=18
y=31
```

```
from scipy.optimize import curve_fit
def fit_func(f, V, W1, W2, n1, n2):
    return V/(np.sqrt(1+1/(f/W1)**(2*n1))*np.sqrt(1+(f/W2)**(2*n2)))

p0 = [1000, 1000, 50000, 5, 5]
popt, pcov = curve_fit(fit_func, f[x:-y], g[x:-y], p0)


plt.loglog(f[x:-y], g[x:-y], linestyle='None', marker='.', label='Messdaten')
plt.loglog(f, fit_func(f, *popt), label='Fit')
plt.axis([4E2, 1.5e5, 10, 1.5E3])
plt.xlabel(r'$Frequenz / Hz$')
plt.ylabel(r'$g(f)$')
plt.title("Diagramm 2: Frequenzgangsfit")
plt.legend(loc='best')


print('Fit: V={} +- {}'.format(popt[0],np.sqrt(pcov[0,0])), 'W1={} +- {}'.format(pop
plt.savefig('Diagramm2.pdf', format='PDF')
```

```
Fit: V=1010.6477188028692 +- 0.9365517087776218 W1=1027.307794990416 +- 1.7219882203
688384 W2=46310.48480685528 +- 79.02065269868703 n1=5.093926773687783 +- 0.046523369
350804034 n2=4.59708873284462 +- 0.034986165554879434
```



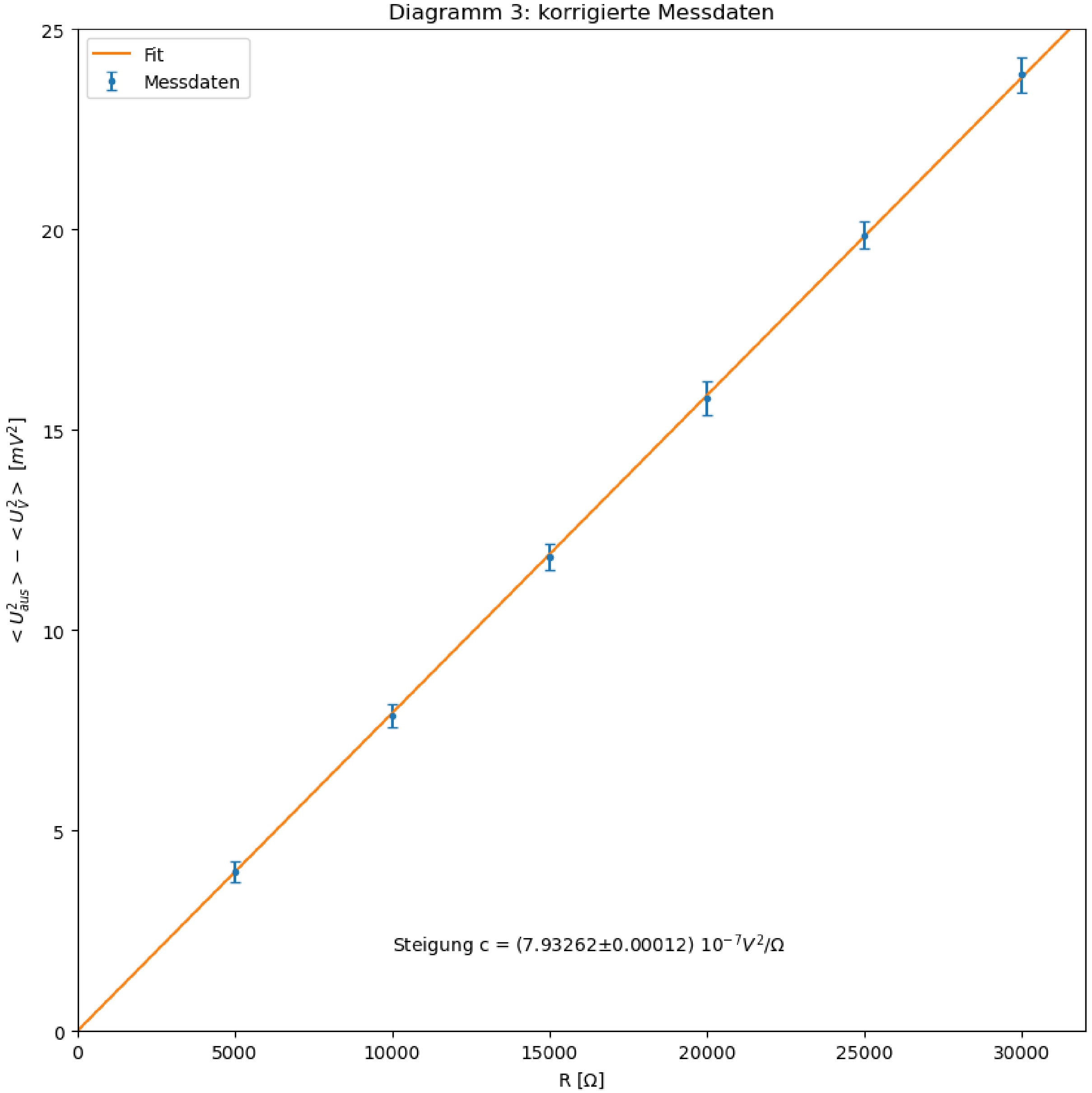
In [3]:

```
import scipy.integrate as integrate

def fit_func_square(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2)**2
B=integrate.quad(fit_func_square, f[x], f[-y], args=tuple(popt))

print('Das Integral beträgt: {value: .4e}'.format(value=B[0]))
```

```
Das Integral beträgt:  4.7169e+10
```

In [4]:
```
R=np.array([5000,10000,15000,20000,25000,30000])
U_aus=np.array([2.410,3.117,3.697,4.199,4.658,5.069])
fehler_U_aus=np.array([0.0093,0.0114,0.0127,0.0186,0.0100,0.0184])
U_V=1.3538
fehler_U_V=0.00582
D=U_aus**2-U_V**2
fehler_D=np.sqrt(2*U_aus*fehler_U_aus+2*U_V*fehler_U_V)

plt.figure(figsize=(10,10))
plt.errorbar(R, D, yerr=fehler_D, fmt='.', label='Messdaten')
plt.axis([0,3.2e4,0,25])
plt.xlabel('R [$\Omega$]')
plt.ylabel('$ <U_{aus}^2 > - <U_{V}^2>$ $[mV^2] $')
plt.title('Diagramm 3: korrigierte Messdaten')

def linear(x, c):
    return c*x
x = np.linspace(0,32000, 10000)
popt, pcov = curve_fit(linear, R, D)
plt.plot(x, linear(x, *popt), label='Fit')
plt.legend(loc='upper left')
plt.annotate('\nSteigung c = (' + str(round(10**4*popt[0], 5))+ '$  \pm $' + str(rou
plt.savefig("OriginalEundCa3Boltzmannkonstante.pdf", orientation = 'landscape')

chisquare = np.sum(((linear(R,*popt)-D)**2/fehler_D**2))
dof= 5
chisquare_red=chisquare/dof
print('chi^2', chisquare, '\n', 'chi_red^2: ', chisquare_red)

from scipy.stats import chi2
prob=round(1-chi2.cdf(chisquare, dof),10)*100
print('Wahrscheinlichkeit P = ' + str(prob) + '%')
plt.savefig('Diagramm3.pdf',format='PDF')
```

```
chi^2 0.12278849767413408
 chi_red^2:  0.024557699534826817
Wahrscheinlichkeit P = 99.97310106%
```



In [5]:

```
T= 22.6+273.15
dT=0.2
k_B = popt[0]/(4*(T)*B[0])*1e-06
print('k_b', k_B, 'J/K')
sys_fehler = k_B*np.sqrt((0.02)**2+(dT/(T))**2)
print('sys: ', sys_fehler, 'J/K')
stat_fehler = k_B*np.sqrt(pcov[0,0])/popt[0]
print('stat: ', stat_fehler, 'J/K')
print('sys+stat',  np.sqrt(sys_fehler**2+stat_fehler**2), 'J/K')
```

```
k_b 1.4215950927108054e-23 J/K
sys:  2.8448149944843233e-25 J/K
stat:  2.1401623883155225e-26 J/K
sys+stat 2.852853887482926e-25 J/K
```

In [6]:

```
k_Lit = 1.380649 *10**-23
sigma = (k_B-k_Lit)/(np.sqrt(sys_fehler**2+stat_fehler**2))
print('Sigmaumgebung:', sigma)
print('Verhältnis Bolzmann-Literatur',k_B/k_Lit)
```

```
Sigmaumgebung: 1.4352677818677917
Verhältnis Bolzmann-Literatur 1.02965713422514
```