

Statistik des radioaktiven Zerfalls

mangoldmarius

December 2021

1 Einführung

In diesem Versuch wollen wir uns mit der statistischen Natur des radioaktiven Zerfalls beschäftigen. Dazu werden wir uns zur nächsten mit dem Geiger-Müller-Zählrohr zur Detektion ionisierte Strahlung vertraut machen, um anschließend damit radioaktive Zerfälle bei hoher und niedriger Zählrate zu messen bzw. zu zählen.

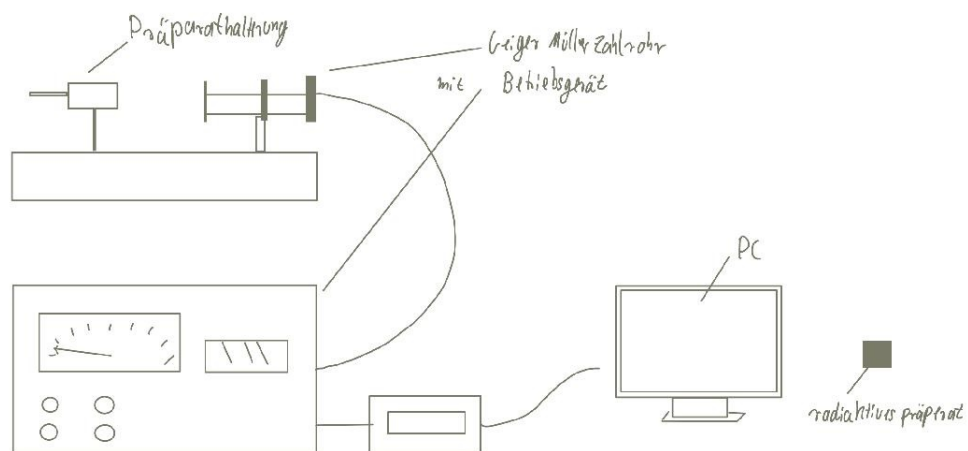


Fig. 1: Der Versuchsaufbau

1.1 Physikalische Grundlagen

1.1.1 Geiger-Müller-Zählrohr

Geiger-Müller-Zählrohre werden zur Detektion ionisierter Strahlung verwendet. Das Zählrohr ist ein Metallzylinder mit axial verlaufendem Draht in der Mitte; zwischen Draht und Zylinder liegt eine Spannung an. Tritt ionisierende Strahlung ein, werden Teilchen des enthaltenen Gasgemischs ionisiert, wobei Elektronen entstehen, die in der Spannung beschleunigt werden und selbst wiederum Teilchen ionisieren, was mehr Elektronen hervorruft. Daher fließt für kurze Zeit ein Strom im Zählrohr, welcher an einem Widerstand einen Spannungspuls verursacht, der gemessen werden kann.

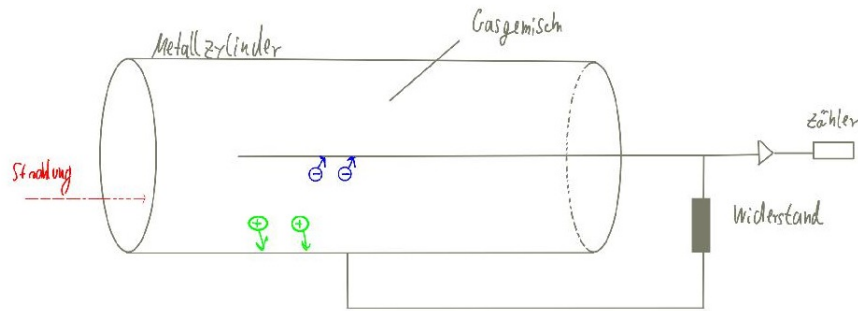


Fig. 2: Das Zählrohr

Was genau passiert, hängt von der angelegten Spannung ab: Die Anzahl der primär erzeugten Elektronen durch die Strahlung ist proportional zu Energie der Strahlung. Bei geringer Spannung erreicht jedoch nur ein Teil dieser Primärelektronen den Draht. Erhöht man die Spannung erreichen alle Elektronen den Draht. Der Strom ist hier proportional zur Energie der Strahlung. Erhöht man die Spannung weiter, so werden die Primärelektronen so stark beschleunigt, dass diese selbst wieder Elektronen durch Ionisation des Gases erzeugen. Die Anzahl dieser Sekundärelektronen ist noch immer proportional zur Energie der Strahlung. Dieser Spannungsbereich heißt Proportionalbereich. Wird die Spannung weiter erhöht, ionisieren auch die Sekundärelektronen wieder das Gasgemisch und es entsteht eine Elektronenlawine durch jedes einfallende Strahlungsteilchen. In diesem sogenannten Plateaubereich wird also jedes Strahlungsteilchen detektiert. Eine weitere Spannungserhöhung erhöht zunächst nicht die Zählrate: daher Plateaubereich.

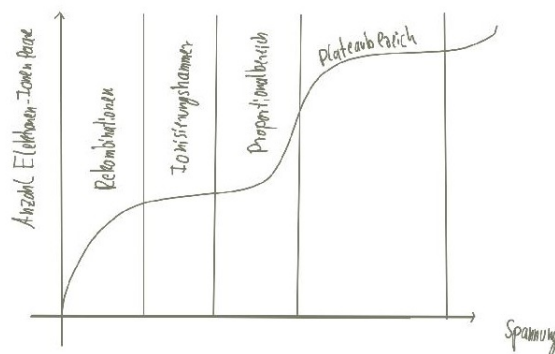


Fig. 3: Spannungsbereiche im Zählrohr

Im Plateaubereich ist der Strompuls also unabhängig von der Energie der Strahlung. Ein Zähler zählt die Pulse und damit die einfallenden Strahlungsteilchen. Nach jeder Detektion kann für eine gewisse Zeit (Totzeit $\approx 10^{-4}$) keine Strahlung detektiert werden, da die positiven Ionen das elektrische Feld abschirmen. Diese Ionen sind schwer und bewegen sich daher nur langsam zur Kathode. Erst wenn Sie diese erreicht haben, kann wieder Strahlung detektiert werden. Beim radioaktiven Zerfall treten statistische Schwankungen auf. Werden n Ereignisse gezählt, beträgt der statistische Fehler \sqrt{n} und der relative Fehler $\frac{1}{n}$.

1.2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Der radioaktive Zerfall ist vollkommen statistisch; vorauszusagen, wann ein einzelnes Atom zerfällt ist unmöglich. Nur über eine große Anzahl von Atomen können präzise Aussagen getroffen werden. Der Zerfall der Atome ist darüber hinaus vollkommen unabhängig voneinander.

1.2.1 Binomialverteilung

Mit der Binomialverteilung lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis, bei n voneinander unabhängigen Versuchen, k -mal eintritt, wobei die einzelne Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis p ist, beschreiben. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit:

$$B(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (1)$$

Die Binomialverteilung ist also diskret und hat zwei Parameter n und p . Da der Zerfall von Atomen unabhängig voneinander ist und es nur zwei mögliche Ausgänge (Zerfall oder kein Zerfall) gibt, ist die Binomialverteilung prinzipiell geeignet, um auf radioaktiven Zerfall angewendet zu werden. Für die Wahrscheinlichkeit p , dass ein Kern verfehlt, gilt:

$$p(t) = 1 - e^{-\lambda} \quad (2)$$

Wobei λ die Zerfallskonstante des Stoffes und t die Zeit ist. Falls die Zerfallskonstante klein ist (was hier der Fall ist), kann p für den Beobachtungszeitraum als konstant angenommen werden. So kann man die Binomialverteilung darauf anwenden. Einige Eigenschaften der Binomialverteilung sind:

Normierung:

$$\sum_{n=0}^n G(k; \mu, \sigma) = 1 \quad (3)$$

Mittelwert:

$$\sum_{n=0}^n k G(k; \mu, \sigma) = np = \mu \quad (4)$$

Varianz:

$$\sum_{n=0}^n k^2 G(k; \mu, \sigma) - \mu^2 = \sigma^2 = np(1-p) \quad (5)$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} \quad (6)$$

1.2.2 Poissonverteilung

Die Binomialverteilung ist in der Praxis allerdings etwas unhandlich. Für den Fall $n \Rightarrow \infty$, wobei der Mittelwert $\mu = np$ jedoch endlich bleiben soll, kann die Binomialverteilung durch die Poissonverteilung angenähert werden:

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \quad (7)$$

Auch die Poissonverteilung ist diskret, doch hier gibt es nur noch einen Parameter, den Mittelwert μ .

Eigenschaften der Poissonverteilung:

Normierung:

$$\sum_{n=0}^n P(k; \mu, \sigma) = 1 \quad (8)$$

Mittelwert:

$$\sum_{n=0}^n k P(k; \mu, \sigma) = \mu \quad (9)$$

Varianz:

$$\sum_{n=0}^n k^2 G(k; \mu, \sigma) - \mu^2 = \sigma^2 \quad (10)$$

Standardabweichung:
$$\sigma = \sqrt{\mu} \quad (11)$$

Die Varianz entspricht also gerade dem Mittelwert; hierauf beruht das Schwankungsgesetz (\sqrt{n}) bei Zählexperimenten.

1.2.3 Gaußverteilung

Wird nun noch der Mittelwert groß, kann man die Poissonverteilung durch die Gaußverteilung approximieren:

$$G(k; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\sigma^2}} \quad (12)$$

Diese Verteilung ist kontinuierlich in \mathbb{R} und hat zwei Parameter: den Mittelwert μ und die Standardabweichung σ . Bei Zählexperimenten würde man hier $\sigma^2 = \mu$ wählen.
Eigenschaften der Gaußverteilung:

Normierung:
$$\int_{-\infty}^{\infty} G(k; \mu, \sigma) dk = 1 \quad (13)$$

Mittelwert:
$$\int_{-\infty}^{\infty} k G(k; \mu, \sigma) dk = \mu \quad (14)$$

Varianz:
$$\int_{-\infty}^{\infty} k^2 G(k; \mu, \sigma) dk - \mu^2 = \sigma^2 \quad (15)$$

Wir vergleichen:

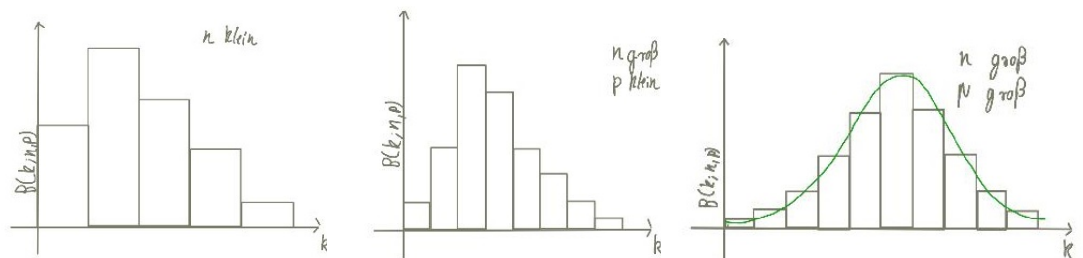


Fig. 4: Binominalverteilung Fig. 5: Poissonverteilung Fig. 6: Gaußverteilung

Die Standardabweichung σ bestimmt die Breite der Gaußverteilung:

Eine Abweichung von μ um mehr als	± 0	± 20	± 30
Wahrscheinlichkeit	31,73%	4,55%	0,27%

Table 0: Wahrscheinlichkeiten für Einzelmessungen

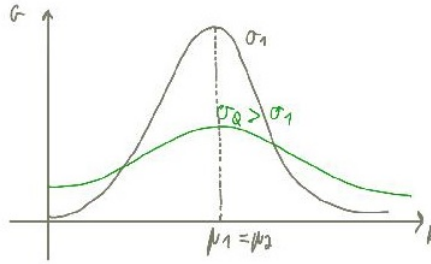


Fig. 7: Verschiedene Standardabweichungen

Wie schon erwähnt ist der Fehler einer gezielten Größe n gerade \sqrt{n} . Daher wird das Ergebnis in der Form $n \pm \sqrt{n}$ angegeben (hier ist \sqrt{n} die Standardabweichung σ und die Resultate aus Tabelle 1 sind anwendbar. Hat man zwei Zählergebnisse k_1 und k_2 und will wissen, ob diese innerhalb der statistischen Schwankungen übereinstimmen, bildet man die Differenz $\Delta = k_1 - k_2 \pm \sqrt{k_1 + k_2}$ (Fehlerfortpflanzung). Weicht Δ um mehr als drei Standardabweichungen von Null ab, so ist die Differenz signifikant.

2 Durchführung des Versuchs

2.1 Messung des Plateaubereichs des Zählrohres

Zunächst wollen wir den Plateaubereich des Zählrohres mit dem internen Zähler messen. Dazu montieren wird zunächst das Präparat in der Halterung und erhöhen solange die Spannung, bis der Zähler sprunghaft anspringt. Diese Spannung ist die Einsatzspannung V_E . Wir stellen die Spannung auf $50V \pm V_E$ ein und bringe das Präparat so nah und das Zählrohr, bis wir etwa 50 bis 100 Zerfälle pro Sekunde messen. Dann messen wir jeweils von V bis $V_E + 150V$ in 25V Schritten die Zerfallszahl über je 30 Sekunden mit dem internen Zähler. Die Werte werden in ein Diagramm eingetragen. Die Mitte des Plateaus (welche sichtbar sein wird) ist ab nun die Arbeitsspannung U_0 .

2.2 Untersuchung des Plateauanstiegs

Jetzt bringen wir das Präparat so dicht wie möglich an das Zählrohr und messen jeweils 1 und 3 Minuten lang die Zerfallsrate bei U_0 und $U_0 + 100V$ mit dem internen Zähler.

2.3 Zerfall bei hoher Zählrate

Wir stellen die Spannung auf U_0 . Das Präparat wird so nah an das Zählrohr gebracht, bis die Zerfallsrate etwa 140 bis 150 Zerfälle pro Sekunde beträgt. Wir schalten das externe Zählgerät und den Computer ein und schließen diese an. An der Statistiksoftware stellen wir die Torzeit auf 500ms ein, und starten die Messungen. Die gemessenen Ereignisse/Torzeit werden direkt in einem Histogramm dargestellt, wobei der Mittelwert μ , die Standardabweichung σ und die theoretisch zu erwartende Standardabweichung $\sigma_{theo} = \sqrt{\mu}$ angezeigt werden. Nun sollen mehr als 2000 Messungen durchgeführt werden. Anschließend wird die Anzahl der Messungen, der Mittelwert und die Standardabweichung notiert.

2.4 Zerfall bei niedriger Zählrate

Nun soll das Präparat so eingestellt werden, dass etwa 40–50 Zerfälle detektiert werden. Die Torzeit wird auf 100ms eingestellt und die Messung wie im vorherigen Abschnitt durchgeführt. Diesmal soll die Anzahl der Messungen $n \geq 5000$ sein.

③ Messprotokoll

Statistik des radioaktiven Zfalls, Versuch 251 von Yannik Fuchs und Moritz Mangold

Geräteliste:

13.12.2021

- Geiger-Müller-Zählrohr mit Betriebsgerät
- externer Impulszähler
- PC mit Drucker
- Präparathalterung
- Radioaktives Präparat

I) Messung der Zählrohrcharakteristik

Wir nehmen das Zählrohr und Betriebsgerät in Betrieb und bringen das Präparat auf die Halterung auf.

Durch das plötzliche Einsetzen akustischer Signale finden wir die Einsatzspannung heraus:

$$V_E = 430 \text{ V}$$

Nun messen wir mit dem internen Zähler im Intervall $[V_E, V_E + 150 \text{ V}]$

die Zählrohrcharakteristik in 25 V-Schritten, wobei bei $V_E + 50 \text{ V}$

ca. 50-100 Ereignisse pro Sekunde auftreten. Die Messzeit beträgt dabei 30 Sekunden

Tabelle 1: Zählrohrcharakteristik

Spannung [V]	Ereignisse	stat. Fehler
V_E	1472	$38,4 \approx 40$
$V_E + 20$	2167	$46,6 \approx 50$
$V_E + 40$	2089	$45,7 \approx 50$
$V_E + 60$	2209	$47,0 \approx 50$
$V_E + 80$	2217	$47,1 \approx 50$
$V_E + 100$	2249	$47,4 \approx 50$
$V_E + 120$	2260	$47,5 \approx 50$
$V_E + 140$	2281	$47,8 \approx 50$
$V_E + 160$	2386	$48,8 \approx 50$

Dabei ergibt sich der statistische Fehler aus der Wurzel der Ergebnisse.

Den Spannungsgler stellen wir auf die Hälfte des Maximums ein. Diesen Spannungswert nennen wir U_0 .

$$U_0 = 520 \text{ V}$$

Messung des Plateauanstiegs

Wir bringen das Präparat sehr nah an das Zählrohr.

Bei den Spannungen U_0 und $U_0 + 100 \text{ V}$ messen wir je 1 und 3 Minuten die Anzahl der Ergebnisse.

Tabelle 2: Plateauanstieg

Spannung [V]	Messdauer [s]	Ereignisse
U_0	60	8459
	180	25153
$U_0 + 100 \text{ V}$	60	8552
	180	25307

Die Spannung stellen wir wieder auf U_0

Verifizierung des statistischen radioaktiven Zerfalls

Das Präparat wird justiert, so dass ca. 140-150 Zfälle pro Sekunde detektiert werden.

Wir beginnen mit dem Computerprogramm Statistik die Messungen

Wir messen bei einer Totzeit von 500 ms $n \geq 2000$ mal mit dem externen Zählgerät

die Anzahl der Zfälle pro Totzeit. Die hierbei vom PC ausgewerkte Verteilung ist in Diagramm 3 beigefügt.

Die ausgegebenen Werte sind in Tabelle 3 notiert.

Tabelle 3: Gaußverteilung radioaktiven Zerfalls

Messungen	2020
Mittelwert	70,632
Standardabweichung	7,424
Theoretische Standardabweichung	7,643

Vergleich der Poisson- und Gauß-Verteilung bei sehr kleinen Zählrate

Wir justieren das Präparat so, dass 42-59 Zefälle pro Sekunde detektiert werden.

Wir messen mit dem externen Zählgerät bei einer Totzeit von 100 ns $n \geq 5000$ mal

die Anzahl der Zefälle pro Totzeit. Die entstandene Verteilung ist in Diagramm 6 beigefügt.

Tabelle 4: Vergleich Poisson- und Gauß-Verteilung

Messungen	9998
Mittelwert	41,927
Standardabweichung	2,183
Theoretische Standardabweichung	2,201

4 Auswertung

4.1 Messung des Plateaubereichs des Zählrohrs

Wir tragen die Ergebnisse aus Tabelle 1 in Diagramm 1 ein, wobei wir die Ereigniszahl über der Spannung aufgetragen; der Fehler der Ereigniszahl ist jeweils \sqrt{n} . Durch diese Punkte legen wir mithilfe von Python in Diagramm 2 eine Ausgleichsgerade (der erste und letzte Messwert wird dabei ignoriert), um den Plateaubereich des Zählrohrs zu visualisieren. Die Mitte des Plateaubereichs identifizieren wir mit $U_0 = 520V$. Hier ist es irrelevant einen Fehler von U_0 zu berechnen, da es nur wichtig ist, sich in etwa in der Mitte des Plateaubereichs aufzuhalten, um diesen nicht wegen der Schwankungen zu verlassen.

4.2 Untersuchung des Plateauanstiegs

Nun wollen wir die Plateauanstiege für 1 und 3 minütige Messungen bestimmen. Die nötigen Werte stammen aus Tabelle 2.

Plateauanstieg: 1 Minute:

$$A_1 = n(U_0 + 100V) - n(U_0) \quad (16)$$

3 Minuten:

$$A_2 = n(U_0 + 100V) - n(U_0) \quad (17)$$

Die Fehler ergeben sich nach Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_{A1} = \sqrt{\sigma_{n(U_0+100V)}^2 + \sigma_{n(U_0)}^2} = \sqrt{n(U_0 + 100V) - n(U_0)} \hat{=} \sigma_{A2} \quad (18)$$

Prozentualer
Plateauanstieg 1 Minute:

$$A_{1pro} = \frac{n(U_0 + 100V) - n(U_0)}{n(U_0)} = \frac{n(U_0 + 100V)}{n(U_0)} - 1 \quad (19)$$

3 Minuten:

$$A_{2pro} = \frac{n(U_0 + 100V)}{n(U_0)} - 1 \quad (20)$$

Die Fehler ergeben sich nach Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_{A1} = \sqrt{\sigma_{n(U_0+100V)}^2 + \sigma_{n(U_0)}^2} = \sqrt{\frac{n(U_0 + 100V)}{n(U_0)^2} - n(U_0)} \hat{=} \sigma_{A2pro} \quad (21)$$

Als Ergebnisse erhalten wir:

$$A_1 = (93 \pm 130) \text{ Zerfälle} \quad (22)$$

$$A_2 = (150 \pm 230) \text{ Zerfälle} \quad (23)$$

$$A_{1pro} = 0,011 \pm 0,006 \quad (24)$$

$$A_{2pro} = 0,016 \pm 0,009 \quad (25)$$

4.2.1 a) Signifikanz

Da sowohl für eine als auch für drei Minuten Messung die Anstiege weniger als 1σ von der Null abweichen, sind die Anstiege beide nicht signifikant und somit statistisch erklärbar.

4.2.2 b) Genauigkeit des Anstiegs

Der prozentuale Fehler des Anstiegs ist

$$\frac{\sqrt{n(U_0 + 100) + n(U_0)}}{(n(U_0 + 100V) - n(U_0))} \quad (26)$$

Wenn wir $n(U_0 + 100V) \approx n(U_0)$ nähern wegen den Ergebnissen aus (a), teilen wir durch Null. Daher betrachten wir den Fehler des prozentualen Anstiegs

$$\sigma_{pro} = \sqrt{\frac{n(U_0 + 100V)}{n(U_0)^2} + \frac{n(U_0 + 100V)^2}{n(U_0)^3}} \approx \sqrt{\frac{2}{n(U_0)}} \leq 0,01 \quad (27)$$

$$\Rightarrow \sqrt{n(U_0)} \geq \frac{\sqrt{2}}{0,01} \quad (28)$$

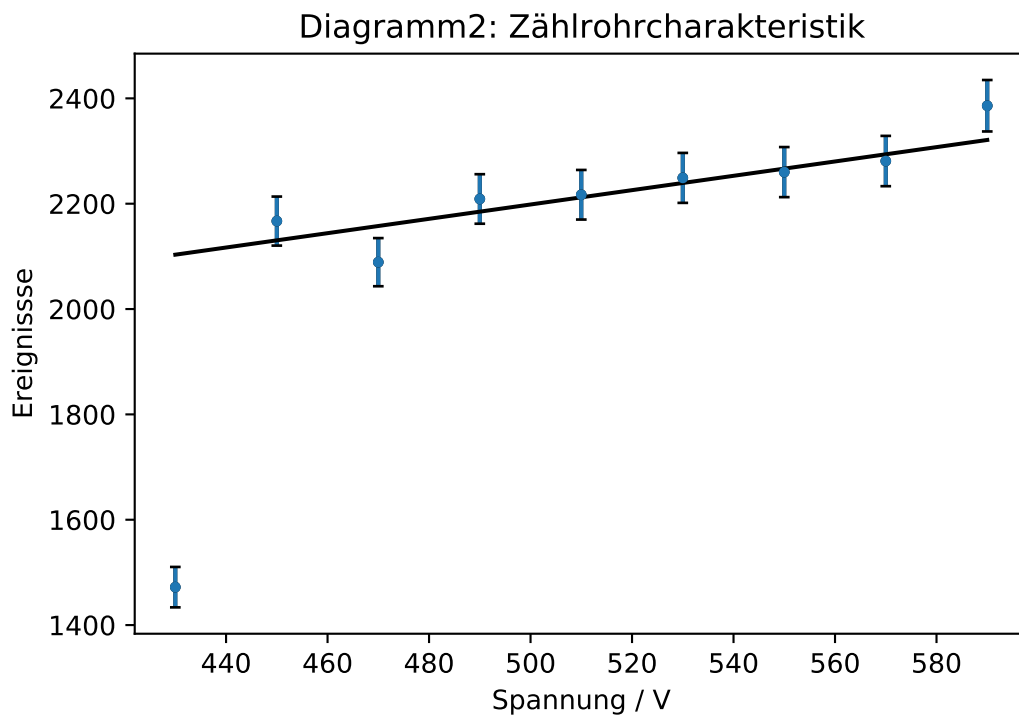
$$\Rightarrow n(U_0) \geq 20.000 \quad (29)$$

Es müssen also mindestens 2000 Zerfälle gemessen werden, um den prozentualen Anstieg auf 1% genau zu kennen und somit um den absoluten Anstieg auf 1% genau zu kennen.

4.2.3 c) Mögliche prozentuale Variation bei gegebenem Vertrauensniveau:

Eine Vertrauensniveau von ca. 68% entspricht dem 1σ -Bereich einer Messung. Die Intervalle ergeben sich also durch $I = [A_{pro} - \sigma_{Apro}, A_{pro} + \sigma_{Apro}]$. Ein Vertrauensniveau von 95 % entspricht dem 2σ -Bereich, weshalb hier die Intervalle $I = [A_{pro} - 2\sigma_{Apro}, A_{pro} + 2\sigma_{Apro}]$ sind. Die prozentualen Plateauanstiege dürfen bei gegebenem Niveau also innerhalb der folgenden Intervalle liegen:

68%	1Minute	$I_{1min,1\sigma} = [-0.01, 0.03]$
68%	3Minuten	$I_{1min,1\sigma} = [-0.003, 0.015]$
95%	1Minute	$I_{1min,1\sigma} = [-0.02, 0.04]$
95%	3Minuten	$I_{1min,1\sigma} = [-0.012, 0.024]$



4.3 Zerfall bei hoher Zählrate

Die erhobenen Daten zur Zerfallsrate bei hoher Aktivität werden in ein Jupyter-Notebook importiert. Insgesamt maßen wir bei einer Torzeit von 500ms $n = 2020$ Messungen. Die Statistiksoftware berechnen Mittelwert μ , experimentelle und theoretische Standardabweichung σ_{exp} und σ_{theo} :

$$\mu = 70,632 \quad (30)$$

$$\sigma_{Exp} = 7,424 \quad (31)$$

$$\sigma_{Theo} = 7,643 \quad (32)$$

Im Jupyter Notebook tragen wir die Häufigkeit einer Messung über der Anzahl der Zerfälle pro Torzeit in Diagramm 4 auf (die Fehler sind die Wurzel der Häufigkeit) (vgl. Histogramm in Diagramm 3) und in Diagramm 5 fitten wir sowohl eine Gaußverteilung als auch eine Poissonverteilung durch diese Messwerte mithilfe von Python. Wir erhalten die folgenden Fitparameter:

Für Gauß	$\mu_G = 70,32 \pm 0,26$	$\sigma_G = 7,83 \pm 0,19$
Für Poisson	$\mu_P = 70,50 \pm 0,27$	

Ein Vergleich dieser Werte mit den experimentellen Befunden findet in “Zusammenfassung und Diskussion” statt. Zur Diskussion der Güte der Fits berechnen wir für beide Fits die χ^2 -Summe, die reduzierte χ^2 -Summe, χ^2_{red} -Summe und die führt Wahrscheinlichkeit P mithilfe von Python:

	χ^2	χ^2_{red}	P
Für Gauß	35,44	1,14	27,0%
Für Poisson	35,89	1,12	29,00%

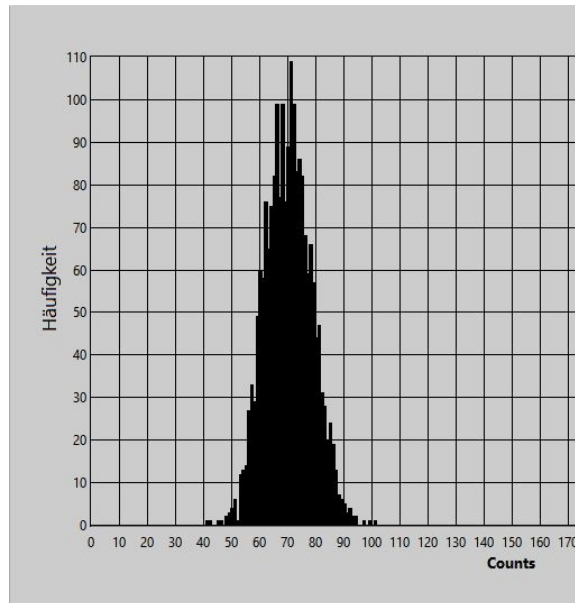
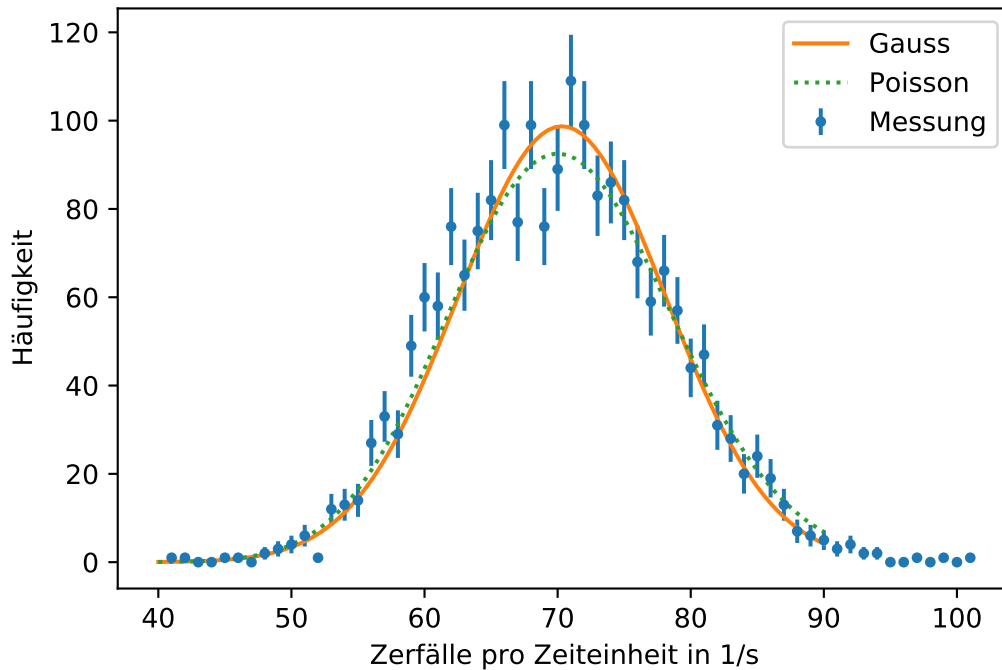


Fig. 3: Histogramm der radioaktiven Zerfälle bei hoher Zerfallsrate

Diagramm5: Statistik des radioaktiven Zerfalls bei hoher Ereignisrate



4.4 Zerfall bei niedriger Zählrate

Die Messung hier verläuft analog zu den vorherigen, mit dem Unterschied, dass die Zählrate hier viel geringer ist (durch größeren Präparat Abstand und geringere Torzeit von 100ms). Hier führen wir insgesamt $n = 9998$ Messungen der Anzahl der Zerfälle pro Tor durch. Die Ergebnisse sind als Histogramm in Diagramm 6 sichtbar. Die Statistiksoftware berechnet für uns wieder Mittelwert μ und experimentelle und theoretische Standardabweichungen σ_{Ex} und σ_{Theo} :

$$\mu = 4,927 \quad (33)$$

$$\sigma_{Exp} = 2,183 \quad (34)$$

$$\sigma_{Theo} = 2,201 \quad (35)$$

Nun gingen wir vollkommen analog zu den vorherigen: in Diagramm 7 ist wieder Häufigkeit über der Anzahl der Zerfälle pro Torzeit aufgetragen und in Diagramm 8 sind wieder Gauß und Poissonverteilung eingefittet mit den Parametern:

Für Gauß	$\mu_G = 4,89 \pm 0,10$	$\sigma_G = 2,16 \pm 0,08$
Für Poisson	$\mu_P = 4,926 \pm 0,015$	

Wieder berechnen wir die χ^2 -Summe, die reduzierte χ^2 -Summe, χ^2_{red} -Summe und die Wahrscheinlichkeit P mithilfe von Python:

	χ^2	χ^2_{red}	P
Für Gauß	112,33	11,23	0,0%
Für Poisson	8,28	0,75	69,00%

In allen Versuchen wurde der Nulleffekt des Zählrohres (ca. 1 Zerfall pro Sekunde) und der Ablesefehler vom Zählrohr (1 Zerfall) vernachlässigt. Darauf wird in Zusammenfassung und Diskussionen“ eingegangen.

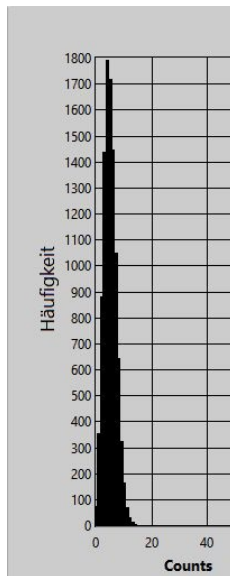
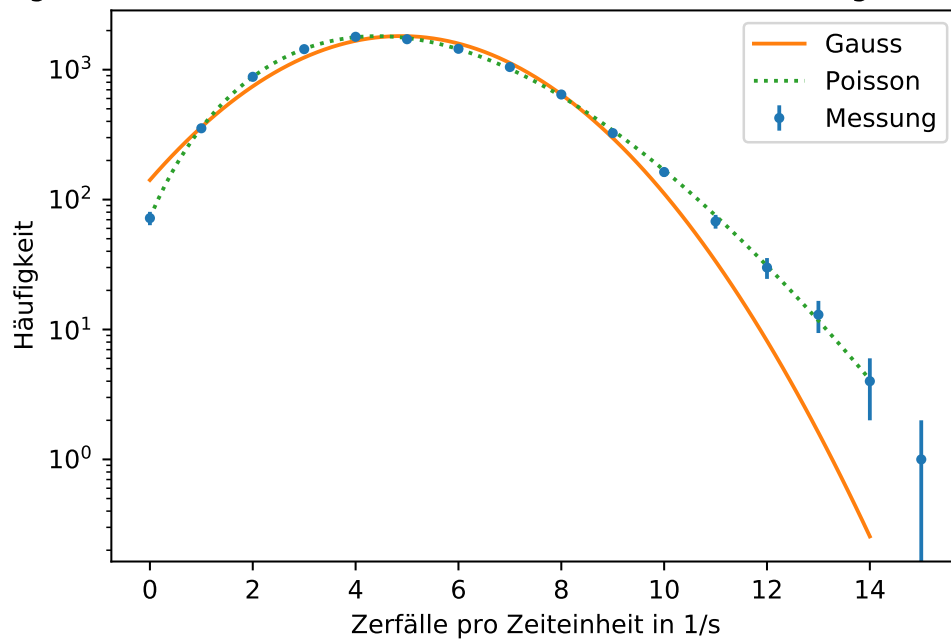


Fig. 6: Histogramm der radioaktiven Zerfälle bei hoher Zerfallsrate

Diagramm 8: Statistik des radioaktiven Zerfalls bei niedriger Ereignisrat



5 Zusammenfassung und Diskussion

5.1 Messung des Plateaubereichs des Zählrohrs

In diesem ersten Teil wollten wir den Plateaubereich des genutzten Zählrohrs ermitteln, um eine sinnvolle Arbeitsspannung wählen zu können. Hierzu maßen wir für verschiedene Spannungen jeweils 30 Sekunden lang die Zerfälle des Präparates. Die Ergebnisse wurden mit Ausgleichsgeraden in Diagramm 2 dargestellt. Man erkennt ein klares Plateau (nahezu horizontal gerade), die Mitte dieses Plateaus wählten wir als zukünftige Arbeitsspannung $U_0 = 520V$. Als Fehler gingen jeweils die statistischen Fehler (Wurzel des Zerfalls Anzahl) ein, der Nulleffekt und der Ablesfehler wurden vernachlässigt, da diese bei Zerfallszahlen von ungefähr 2000 irrelevant sind.

5.2 Untersuchung des Plateauanstiegs

Nun wollten wir die Steigung des Plateaubereichs des Zählrohrs untersuchen, also inwiefern das Plateau ein ebenes Plateau ist. Dazu Maßen wie die Zerfallsanzahl bei U_0 und $U_0 + 100V$ jeweils über eine Minute und über 3 Minuten. Die Messdaten finden sich in Tabelle 2. In die Rechnungen hier gingen wieder nur der statistische Fehler (Wurzel aus der Zerfallszahl) ein, da die Zerfallszahlen noch größer als in 1 waren und somit Nulleffekt und Ablesefehler noch unbedeutender waren. Der Index 1 steht für 1 Minute, 2 steht für 3 Minuten und pro steht für prozentuale Werte. Wir hielten für die Plateauanstiege A:

$$A_1 = (93 \pm 130) \text{ Zerfälle} \quad (36)$$

$$A_2 = (150 \pm 230) \text{ Zerfälle} \quad (37)$$

$$A_{1pro} = 0,011 \pm 0,006 \quad (38)$$

$$A_{1pro} = 0,016 \pm 0,009 \quad (39)$$

Man erkennt sofort, dass die Anstiege um weniger als 1σ von der Null abweichen und somit nicht signifikant sind.

Plateaubereiche sind also tatsächlich ebene Plateaus. Weiter erhielten wir, dass man mindestens 20000 Zerfälle messen muss, um den Plateau-Anstieg auf 1 % genau zu bestimmen. Ferner gaben wir Intervalle für mögliche prozentuale Plateauanstiege (über 100 Volt) für verschiedene Vertrauens Niveaus (diese entsprechen hier Abweichungen von 1σ bzw. 2σ) an.

5.3 Zerfall bei hoher Zerfallsrate

In den folgenden zwei Versuchsreihen wollten wir die statistische Natur des radioaktiven Zerfalls untersuchen, zunächst bei hoher Zerfallsrate und im letzten Teil bei niedriger Zerfallsrate. Für die Messung bei hoher Zerfallsrate warten wir insgesamt $n = 2020$ mal die Zerfallszeit über 1 Totzeit von 500 Millisekunden, wobei das Präparat nah am Ziel war. Die Ergebnisse wurden zunächst von einer Statistiksoftware ausgewertet und in einem Histogramm (Diagramm 3) dargestellt. Die Software berechnete auch Mittelwert μ , experimentelle und theoretische Standardabweichung σ_{Ex} und σ_{Theo} :

$$\mu = 70,632 \quad (40) \quad \sigma_{Exp} = 7,424 \quad (41) \quad \sigma_{Theo} = 7,643 \quad (42)$$

Alles in Einheiten von Zerfällen pro Zeit. Auch werteten wir die Messwerte selbst per Python aus und fitten eine Gauß und eine Poissonverteilung in die Werte (siehe Diagramm 5) welche die folgenden Parameter haben:

Für Gauß	$\mu_G = 70,32 \pm 0,26$	$\sigma_G = 7,83 \pm 0,19$
Für Poisson	$\mu_P = 70,50 \pm 0,27$	

Als Fehler gingen wieder nur die statistischen Wurzel-Fehler ein, da auch hier die systematischen Fehler noch vernachlässigbar sind aufgrund der hohen Zerfallsrate. Man erkennt, dass die Mittelwerte aus Gauß- und Poissonverteilung jeweils um weniger als 2σ voneinander abweichen und somit die Unterschiede nicht signifikant sind. Man erkennt jedoch auch, dass der Poissonmittelwert sehr nah am experimentellen Mittelwert μ liegt (Abweichung um weniger als $0,1\sigma$). Vor allem die Poissonverteilung scheint hier also nah an der Realität zu liegen. Da die Poissonverteilung einparametrig ist, ist der Vergleich des Mittelwerts hier vollkommen ausreichend. Auch sieht man, dass die Gauß Standardabweichung σ_G um weniger als 1σ von σ_{Theo} abweicht und um weniger als 2σ von σ_{Ex} abweicht. Alle ermittelten Standardabweichungen stimmen hier also innerhalb der Fehler überein (nimmt man für σ_{Ex} und σ_{Theo} ähnliche Fehler wie für σ_G an, so stimmen σ_{Ex} und σ_{Theo} sehr gut überein und auch die Charakteristik eines Zähl experiments (Wurzelfehler) ist hier in der Realität bestätigt.). Für weitere Aussagen berechnen wir die χ^2 -Summe, die reduzierte χ^2 -Summe und die Wahrscheinlichkeit P:

Man sieht, dass beide Verteilungen sehr ähnliche Werte aufweisen, jedoch auch, dass diese bei beiden nicht hervorragend gut sind: Das heißt die reduzierte χ^2 -Summe ist relativ hoch

Für Gauß	35,44	1,14	27,0%
Für Poisson	35,89	1,12	29,00%

und die Fitwahrscheinlichkeit unter 30% und . Sowohl Gauß als auch Poissonverteilung scheint die experimentellen Befunde also ähnlich zu beschreiben, wobei die Poissonverteilung etwas präziser erscheint. Dass die Poissonverteilung nicht gut passt, ist etwas verwunderlich, da mit n größer als 2000 Messungen der Limes $n \Rightarrow \infty$ gut erfüllt sein sollte, und da der Mittelwert offensichtlich endlich ist. Unter diesen Voraussetzungen sollte die Poissonverteilung für ein Zählexperiment (wie der radioaktive Zerfall) geeignet sein. Nach mehrfachem Überprüfen des Berechnungsprozesses lassen sich die schlechten Ergebnisse von meiner Seite nur über die, in der Auswertungsgrafik erscheinenden, Senken in der Nähe des Maximums erklären, welche eine große Abweichung hervorrufen. Leider haben wir dies während des Versuches nicht gemerkt, sonst hätten wir Korrekturen am Aufbau oder eine Zweitmessung durchführen können. Ein möglicher Fehler könnte in der Distanz der Probe zum Geiger-Müller Zähler liegen. Ist diese zu kurz, kann die Totzeit des Zählers die Messwerte stören. Die Gaußverteilung stellt hier ebenfalls keine gute Näherung dar, obwohl der Mittelwert mit $\mu \approx 70$ groß ist, was die Voraussetzungen an die Gaußverteilung ist. Der experimentelle Sachverhalt lässt sich also hier durch beide Modelle nur schlecht beschreiben. Man erkennt hier nur eingeschränkt die statistische Natur des radioaktiven Zerfalls.

5.4 Zerfall bei niedriger Zerfallsrate

Nun betrachten wir den gleichen Sachverhalt bei geringer Zerfallsrate (bewerkstelligt durch kleinere Torzeit von 100ms und größerem Präparatabstand). Hier maßen wir insgesamt $n = 9998$ Messungen. Das dabei entstandene Histogramm ist im Diagramm 6 sichtbar (hier kennt man bereits, dass das Ergebnis weniger symmetrisch als in 3 ist. Die vom Statistikprogramm berechneten Werte sind:

$$\mu = 4,927 \quad (43)$$

$$\sigma_{Exp} = 2,183 \quad (44)$$

$$\sigma_{Theo} = 2,201 \quad (45)$$

In Einheit Zerfälle pro Torzeit. Hier fällt schon jetzt auf, dass die theoretische und experimentelle Standardabweichung nahezu perfekt übereinstimmen, was den Zählcharakter des Versuchs bestätigt. Wieder finden wir eine Gauß und eine Poissonverteilung durch die Messwerte (Diagramm 8) mithilfe von Python. Schon im Diagramm sieht man, dass die Poissonverteilung die Messung deutlich besser darstellt als die Gaußverteilung (verdeutlicht durch die logarithmische Skala). Die Fitparameter sind:

Für Gauß	$\mu_G = 4,89 \pm 0,10$	$\sigma_G = 2,16 \pm 0,08$
Für Poisson	$\mu_P = 4,926 \pm 0,015$	

In die Rechnungen gingen wieder lediglich der statistische Wurzelfehler ein. Hier hätte man jedoch wenigstens den Ablesefehler berücksichtigen müssen, da dieser ein Zerfall beträgt, was bei einem Mittelwert von ungefähr vier durchaus signifikant ist. Auf diesen Einfluss wird gleich eingegangen werden. Man erkennt, dass die drei Mittelwerte wieder innerhalb ihrer Fehler (Abweichungen kleiner als 2σ) gut übereinstimmen, wobei wieder ersichtlich ist, dass der Poissonmittelwert deutlich näher am experimentellen Mittelwert liegt als der Gauß Mittelwert. Auch sieht man, dass die Gauß-standardabweichung gut mit σ_{Ex} und σ_{Theo} übereinstimmt (welche untereinander wie schon erwähnt auch sehr gut übereinstimmen). Bisher sind die Ergebnisse also ähnlich wie in 3.. Jedoch berechneten wir wieder χ^2 , χ_{red}^2 P :

	χ^2	χ_{red}^2	P
Für Gauß	112,33	11,23	0,0%
Für Poisson	8,28	0,75	69,00%

Bei Betrachtung dieser Resultate erkennt man jedoch schnell, dass die Gaußverteilung die experimentellen Daten nur schlecht da stellt: Die reduzierte χ^2 -Summe ist groß und die fitwahrschein-

lichkeit ist 0%!

Die Poissonverteilung scheint deutlich besser zu sein. Hier ist die reduzierte χ^2 -Summe deutlich geringer und die fitwahrscheinlichkeit von 69% deutlich besser. Die Realität stimmt hier also deutlich besser mit der Poissonverteilung überein, was zu erwarten war, da der Mittelwert mit $\mu \approx 5$ nicht groß genug ist, um eine Gaußverteilung zu legitimieren. Jedoch scheint auch die Poissonverteilung weniger gut zu passen, als noch bei der hohen Zerfallsrate. Dies ist verwunderlich, da hier mit $n \approx 10000$ der Limes besser erfüllt ist als bei 3. und der Mittelwert offensichtlich endlich ist. Auch handelt es sich nach wie vor um ein Zählexperiment, weshalb die Poissonverteilung eigentlich geeignet sein sollte. Hier vermuten wir, dass diese Abweichung dadurch erklärt werden könnte, dass der signifikante Ablesefehler vernachlässigt wurde.

Somit haben wir zumindest bei niedriger, weniger bei großer Zerfallsrate die statistische Natur des radioaktiven Zerfalls bestätigt. Wir fassen zusammen, dass die Poissonverteilung die geeignete Verteilung ist, um diese Prozesse zu beschreiben, theoretisch sollte auch Gaußverteilung bei großen Zerfallsraten guten Gewissens herangezogen werden können, dies ist aus unseren Ergebnissen jedoch nicht ersichtlich. Auch fanden wir raus, dass der Plateaubereich des Geiger-Müller Zählers in guter Näherung eben ist und somit präzise Messungen von Zufallszahlen innerhalb dieses Spannungsbereiches möglich sind, auch wenn die Spannung dabei leichten Schwankungen unterworfen ist

Die einfachste und wahrscheinlich auch einzig umsetzbare Methode unsere Ergebnisse zu verbessern wäre das Totzeit-Zerfallsrate verhältnis zu überprüfen und das Experiment über einen längeren Zeitraum zu vermessen.

Ein weiterer kleiner Fehler ist uns bei der Skalierung der Histogramme unterlaufen. Diese wurde, anders als im Kapitel "Durchführung" beschrieben, leider nicht korrekt angepasst.

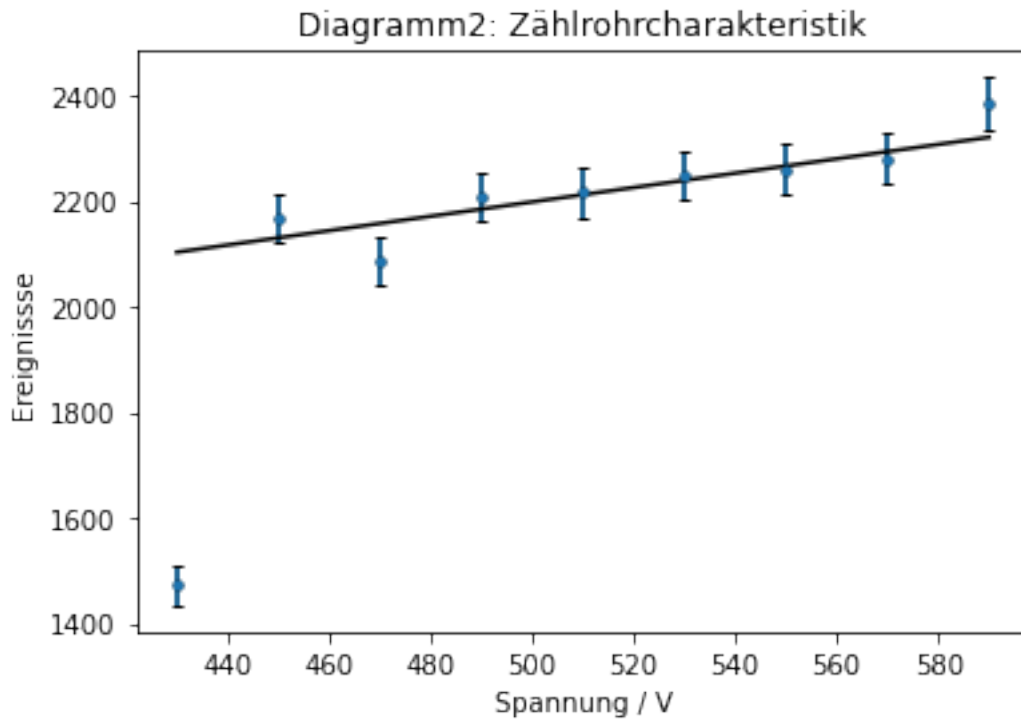
6 Anhang: Pythonskript

```
[1]: %matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit

#Zaehlrohrspannung:
U=np.array([430,450,470,490,510,530,550,570,590])
#gezaehlte Ereignisse
N=np.array([1472,2167,2089,2209,2217,2249,2260,2281,2386])
Fehler_N=np.sqrt(N)

plt.errorbar(U, N, Fehler_N, fmt=".", c = "k", barsabove = False, capsize = 2)
plt.xlabel("Spannung / V")
plt.ylabel("Ereignisse")
plt.title("Zaehlrohrcharakteristik")

#Nun wird eine lineare Funktion an die Messwerte ab dem 2. bis zum vorletzten
  ↳Datenpunkt angefitet
def linear(x,a,b):
    return a*x+b
popt, pcov=curve_fit(linear, U[1:7], N[1:7])
plt.errorbar(U, N, Fehler_N, fmt=".")
plt.xlabel('Spannung / V')
plt.ylabel("Ereignisse")
plt.title("Diagramm2: Zählrohrcharakteristik")
plt.plot(U, linear(U,*popt), c = "k")
plt.savefig("Zählrohrcharakteristik.pdf", format="pdf")
```



```
[2]: #Nun wird die Messung mit hoher Rate geplottet, und durch Gauss- und
      ↳Poisson-Verteilung angenähert:
anzahl, häufigkeit = np.loadtxt("2000Messungen.dat", unpack = True)
fehler = np.sqrt(häufigkeit)

def gaussian (x, A_g, mu_g, sig) : #A: Fläche der Gaussfunktion
    return A_g/(np.sqrt(2*np.pi)*sig)*np.exp(-(x-mu_g)**2/2/sig**2)

from scipy.special import gamma
def poisson (x ,A_p, mu_p) :
    return A_p*np.exp(-mu_p)*mu_p**x/gamma(x+1)

#Nun werden Gaussfunktion (Index g) und Poissonverteilung (Index p) an die
↳Messdaten ab 10-fachem Auftreten angefitet
popt_g, pcov_g = curve_fit(gaussian, anzahl[8: -11], häufigkeit [8: -11]
                           , p0=[2000,75,8], sigma = fehler[8:-11])

popt_p, pcov_p = curve_fit(poisson, anzahl[8:-11], häufigkeit [8:-11],
                           p0=[2000,75], sigma = fehler[8:-11])

plt.errorbar(anzahl, häufigkeit, fehler, fmt=".", label = "Messung")
plt.xlabel("Zerfälle pro Zeiteinheit in 1/s")
plt.ylabel('Häufigkeit')
```

```

plt.title('Diagramm5: Statistik des radioaktiven Zerfalls bei hoher_
→Ereignisrate')
x=np.linspace(40,90,100)
plt.plot(x, gaussian(x,*popt_g), label = "Gauss")
plt.plot(x, poisson(x,*popt_p), label = "Poisson", linestyle=":")
plt.legend()
plt.savefig("hoheRate.pdf", format = "pdf")

print("Gaussfit:")
print ("A=", popt_g[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov_g[0][0]))
print ("mu_g=", popt_g[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov_g[1][1]))
print ("sig=", popt_g[2], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov_g[2][2]))
print ("Poissonfit:")
print ("Ap=", popt_p[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov_p[0][0]))
print ("mu_p=", popt_p[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov_p[1][1]))

```

Gaussfit:

A= 1938.09950857238 , Standardfehler= 62.03128253266144

mu_g= 70.32286128821674 , Standardfehler= 0.26135741471557355

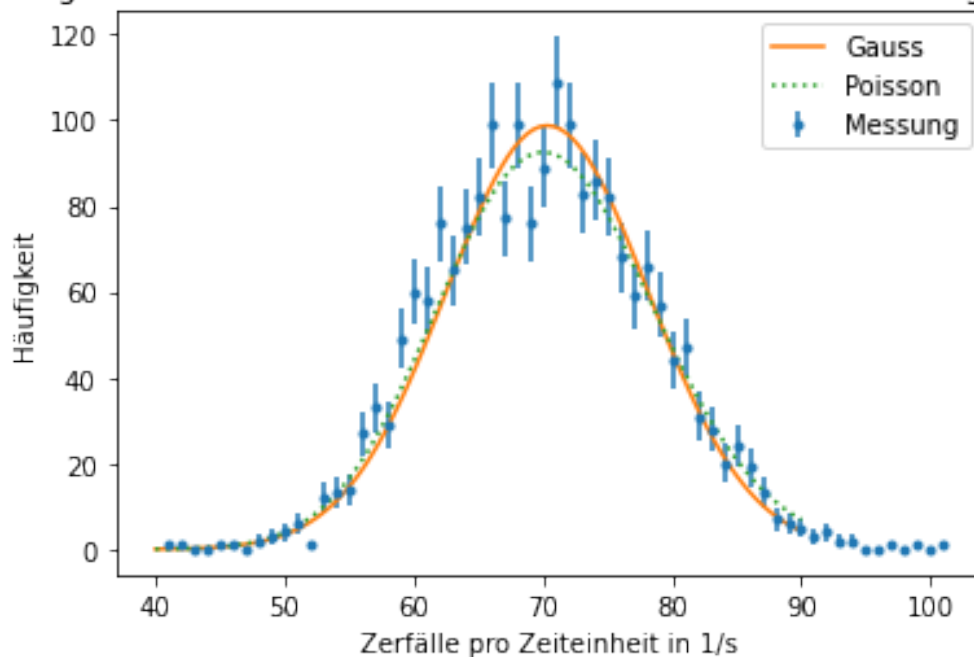
sig= 7.831944489396239 , Standardfehler= 0.19237049138156412

Poissonfit:

Ap= 1946.1296990975309 , Standardfehler= 63.00756144594182

mu_p= 70.50453689327122 , Standardfehler= 0.26964645324525816

Diagramm5: Statistik des radioaktiven Zerfalls bei hoher Ereignisrate



```
[28]: #Berechnung der Chi-Werte als Maß der Güte der Fits
#Gauss:
chi2_g=np.sum((gaussian(anzahl[8:-11],*popt_g) -häufigkeit[8:-11])**2/fehler[8:
→-11]**2)
dof_g=len(anzahl[8:-11])-3 #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red_g=chi2_g/dof_g
print("chi Gauss hoheRate =", chi2_g)
print("chi reduziert Gauss hoheRate =",chi2_red_g)
#Poisson:
chi2_p=np.sum((poisson(anzahl[8:-11],*popt_p)
-häufigkeit[8:-11])**2/fehler[8:-11]**2)
dof_p=len(anzahl[8:-11])-2 #poisson hat nur 2 Parameter
chi2_red_p=chi2_p/dof_p
print("chi Poisson hoheRate =", chi2_p)
print("chi reduziert Poisson hoheRate =",chi2_red_p)
#Berechnung der Fitwahrscheinlichkeiten
from scipy.stats import chi2
print("Fitwahrscheinlichkeiten")
#Gauss:
prob_g=round(1-chi2.cdf(chi2_g,dof_g),2)*100
#Poisson:
prob_p=round(1-chi2.cdf(chi2_p,dof_p),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit Gauss hoheRate=", prob_g,"%")
print("Wahrscheinlichkeit Poisson hoheRate=", prob_p,"%")
```

```
chi Gauss hoheRate = 35.44046637364291
chi reduziert Gauss hoheRate = 1.1432408507626746
chi Poisson hoheRate = 35.88663410011728
chi reduziert Poisson hoheRate = 1.121457315628665
Fitwahrscheinlichkeiten
Wahrscheinlichkeit Gauss hoheRate= 27.0 %
Wahrscheinlichkeit Poisson hoheRate= 28.999999999999996 %
```

```
[3]: #Nun wird die Messung mit niedriger Rate geplottet, und durch Gauss- und
→Poisson-Verteilung angenähert:
anzahl, häufigkeit =np.loadtxt("10000Messungen.dat", unpack = True)
fehler = np.sqrt(häufigkeit)

def gaussian (x, A_g, mu_g, sig) : #A: Fläche der Gaußfunktion
    return A_g/(np.sqrt(2*np.pi)*sig)*np.exp(-(x-mu_g)**2/2/sig**2)

from scipy.special import gamma
def poisson (x ,A_p, mu_p) :
    return A_p*np.exp(-mu_p)*mu_p**x/gamma(x+1)

#Erneut werden Gaußfunktion (Index g) und Poissonverteilung (Index p) an die
→Messdaten ab 10-fachem Auftreten angefitet
```

```

popt_g, pcov_g = curve_fit(gaussian, anzahl[0:-3], häufigkeit [0:-3]
                           , p0 =[4900,5,2.1], sigma = fehler[0:-3])

popt_p, pcov_p = curve_fit(poisson, anzahl[0:-3], häufigkeit [0:-3],
                           p0=[5000,5], sigma = fehler[0:-3])

plt.errorbar(anzahl, häufigkeit, fehler, fmt=".", label = "Messung")
plt.xlabel("Zerfälle pro Zeiteinheit in 1/s")
plt.ylabel('Häufigkeit')
plt.title('Diagramm 8: Statistik des radioaktiven Zerfalls bei niedriger_
→Ereignisrate')
x=np.linspace(0,14,100)
plt.yscale('log')
plt.plot(x, gaussian(x,*popt_g), label = "Gauss")
plt.plot(x, poisson(x,*popt_p), label = "Poisson", linestyle=":")
plt.legend()
plt.savefig("niedrigeRate.pdf", format = "pdf")

print("Gaussfit:")
print ("A=", popt_g[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov_g[0][0]))
print ("mu_g=", popt_g[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov_g[1][1]))
print ("sig=", popt_g[2], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov_g[2][2]))
print ("Poissonfit:")
print ("Ap=", popt_p[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov_p[0][0]))
print ("mu_p=", popt_p[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov_p[1][1]))

```

Gaussfit:

A= 9838.551426726328 , Standardfehler= 446.77226187914806

mu_g= 4.88765015414593 , Standardfehler= 0.1010286865882455

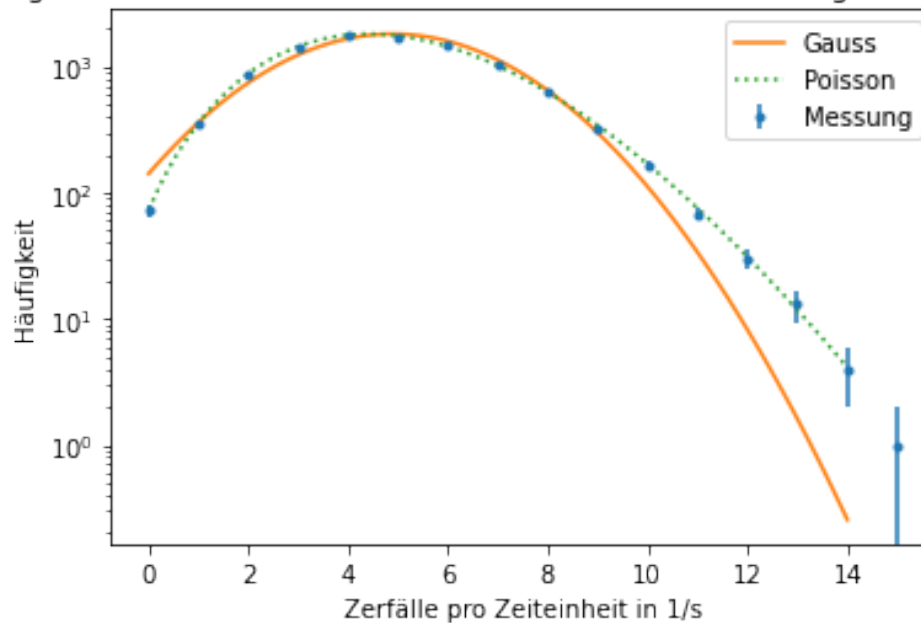
sig= 2.163601878906233 , Standardfehler= 0.07694290820946116

Poissonfit:

Ap= 9992.15107134776 , Standardfehler= 64.73520971765423

mu_p= 4.925822308130008 , Standardfehler= 0.014491109838808738

Diagramm 8: Statistik des radioaktiven Zerfalls bei niedriger Ereignisrate



```
[32]: #Berechnung der Chi-Werte als Maß der Güte der Fits
#Gauss:
chi2_g=np.sum((gaussian(anzahl[0:-3],*popt_g) -häufigkeit[0:-3])**2/fehler[0:
    ↳-3]**2)
dof_g=len(anzahl[0:-3])-3 #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red_g=chi2_g/dof_g
print("chi Gauss niedrigeRate=", chi2_g)
print("chi reduziert Gauss niedrigeRate=",chi2_red_g)
#Poisson:
chi2_p=np.sum((poisson(anzahl[0:-3],*popt_p)
    -häufigkeit[0:-3])**2/fehler[0:-3]**2)
dof_p=len(anzahl[0:-3])-2 #poisson hat nur 2 Parameter
chi2_red_p=chi2_p/dof_p
print("chi Poisson niedrigeRate =", chi2_p)
print("chi reduziert Poisson niedrigeRate =",chi2_red_p)

#Berechnung der Fitwahrscheinlichkeiten
from scipy.stats import chi2
print("Fitwahrscheinlichkeiten")
#Gauss:
prob_g=round(1-chi2.cdf(chi2_g,dof_g),2)*100
#Poisson:
prob_p=round(1-chi2.cdf(chi2_p,dof_p),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit Gauss niedrigeRate=", prob_g,"%")
print("Wahrscheinlichkeit Poisson niedrigeRate=", prob_p,"%")
```

chi Gauss niedrigeRate= 112.32646410522828
chi reduziert Gauss niedrigeRate= 11.232646410522829
chi Poisson niedrigeRate = 8.28399915250632
chi reduziert Poisson niedrigeRate = 0.7530908320460291
Fitwahrscheinlichkeiten
Wahrscheinlichkeit Gauss niedrigeRate= 0.0 %
Wahrscheinlichkeit Poisson niedrigeRate= 69.0 %