Rok akademicki	Termin	Kierunek	Prowadzący	Grupa	Sekcja
2013/2014	Czwartek N	INF 2 SSM	Dr inż. Ewa Starzewska-Karwan	OS1	17
11:15 – 14:15					

Sprawozdanie z ćwiczenia numer 1

Data wykonania ćwiczenia 10.10.2013

Temat ćwiczenia:

Program Simnon – odpowiedzi i portrety fazowe układów dynamicznych.

Skład podsekcji:

Paweł Paduszyński

Marius Rejdak

Zadanie 1

Temat

Wykorzystując program Simnon wykreślić:

- Odpowiedzi czasowe dla zadanych wymuszeń i przedstawić na jednym wykresie,
- Wykres fazowy wymuszenia i odpowiedzi (na płaszczyźnie (u,y)) dla ostatniego wymuszenia (dotyczy wymuszenia sinusoidalnego

Dla podanego układu:

$$K(p) = \frac{5p}{1+5p}$$

- czas całkowania $t_{max} = 40$,
- wymuszenia: *u(t) = 1, 0.025t, sin(0.5t)*

Rozwiązanie analityczne dla wymuszenia u(t) = 1

$u(t) = 1(t) \ \Rightarrow U(p) = 1$

$Y(p) = \frac{p}{\frac{1}{5}+p} \qquad i \qquad \frac{p}{a+p} \leftrightarrow e^{-at} - z\ transformaty\ Laplace'a - Carsona$

$y(t) = e^{-\frac{1}{5}t}\,1(t)$

Opis modelu

$K(p) = \frac{5p}{1+5p}$

Metodą kolejnych całkowań:

$5y' + \ y = 5u'$

$5y' = 5u' \ - y \qquad\qquad x' = -y$

$5y' = 5u' + x$

$równanie\ wyjścia: y = u + \frac{1}{5}x$

$równanie\ stanu: x' = \ -u - \frac{1}{5}x$

Kody źródłowe

test1.t

```
continuous system test1
time t
output y1
state x1
der dx1
u=1
dx1=-u-0.2*x1
```

```
y1=u+0.2*x1
end
```

test2.t

```
continuous system test2
time t
output y2
state x2
der dx2
u=0.025*t
dx2=-u-0.2*x2
y2=u+0.2*x2
end
```

test3.t

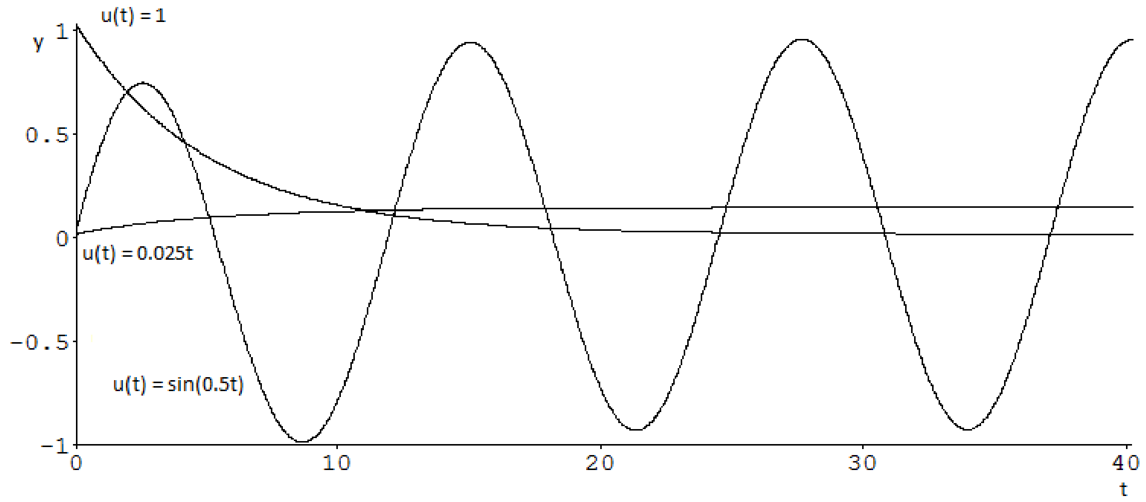
```
continuous system test3
time t
output y3
state x3
der dx3
u=sin(0.5*t)
dx3=-u-0.2*x3
y3=u+0.2*x3
end
```

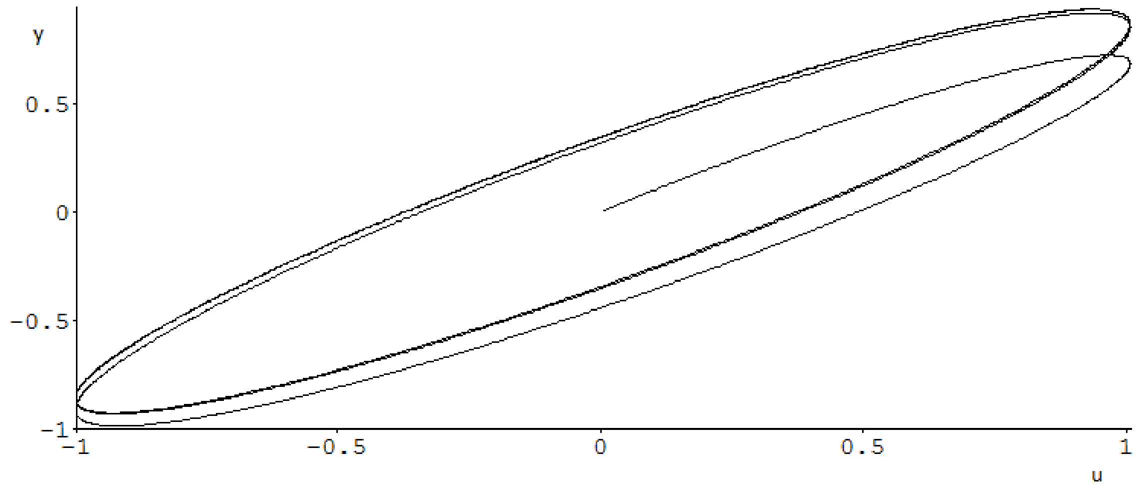
pokaz.t

```
macro pokaz
split 2 1
axes h 0 40 v -1 1
syst test1
store y1
simu 0 40 0.01
show y1
syst test2
store y2
simu
show y2
syst test3
store y3 u
simu
show y3
ashow y3(u)
end
```

Test1.t, test2.t, test3.t są opisami modelów układów ciągłych dla kolejnych wymuszeń u(t). Pokaz.t jest makrem użytym do wykonania symulacji oraz wyrysowania wykresów.

Wykres





Analizując oba wykresy można wywnioskować że mniej więcej po czasie t=25 układ z wymuszeniem sinusoidalnym staje się stabilny, wchodząc w cykl graniczny, przybierając kształt elipsy na wykresie fazowym.

Zarówno z rozwiązania analitycznego dla wymuszenia u(t)=1(t), jak i wykresów utworzonych w programie Simnon wynika, że układy pobudzone wymuszeniem 1(t) oraz 0,025t wchodzą w stan ustalony.

Zadanie 2

Temat

Zbudować model podanego układu liniowego i makropolecenie do wykreślania jego portretu fazowego.

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -0.000075x_1 - 0.02x_2 \end{cases}$$

- czas całkowania $t_{max} = 0.2$

Rozwiązanie analityczne (w zależności od wartości początkowych zmiennych stanu)

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -0.000075x_1 - 0.02x_2 \end{cases}$$

Wstawiając pierwsze równanie do drugiego i po uszeregowaniu względem stopnia pochodnej otrzymujemy:

$$x_1'' + 0.02x_1' + 0.000075x_1 = 0$$

Równania charakterystyczne:

$$\lambda^2 + 0.02\lambda + 0.000075 = 0$$

$$(\lambda + 0.005)(\lambda + 0.015) = 0$$

Pierwiastkami równania charakterystycznego są punkty $\lambda_1 = -0.005$ oraz $\lambda_2 = -0.015$

$$x_1 = C_1e^{-0.005t} + C_2e^{-0.015t}$$

$$x_2 = x_1' \Rightarrow x_2 = -0.005C_1e^{-0.005t} - 0.015C_2e^{-0.015t}$$

Uwzględniając warunki początkowe $x_1(0) = x_{10}$ oraz $x_2(0) = x_{20}$ otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_{10} \\ -0.005C_1 - 0.015C_2 = x_{20} \end{cases}$$

Korzystamy z metody wyznaczników do rozwiązania układu równań:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -0.005 & -0.015 \end{vmatrix} = -0.015 + 0.005 = -0.01$$

$$W_{C1} = \begin{vmatrix} x_{10} & 1 \\ x_{20} & -0.015 \end{vmatrix} = -0.015x_{10} - x_{20}$$

$$W_{C2} = \begin{vmatrix} 1 & x_{10} \\ -0.005 & x_{20} \end{vmatrix} = x_{20} + 0.005x_{10}$$

$$C_1 = \frac{W_{C1}}{W} = \frac{-0.015x_{10} - x_{20}}{-0.01} = 1.5x_{10} + 100x_{20}$$

$$C_2 = \frac{W_{C2}}{W} = \frac{x_{20} + 0.005x_{10}}{-0.01} = -100x_{20} - 0.5x_{10}$$

Wstawiając wyprowadzone wzory na C_1 i C_2 do rozwiązań ogólnych otrzymujemy rozwiązanie układu spełniające uwzględniające warunki początkowe zmiennych stanu:

$$x_1 = (1.5x_{10} + 100x_{20})e^{-0.005t} + (-100x_{20} - 0.5x_{10})e^{-0.015t}$$

$$x_2 = x_1' \Rightarrow x_2 = (-0.0075x_{10} - 0.5x_{20})e^{-0.005t} + (1.5x_{20} + 0.0075x_{10})e^{-0.015t}$$

Punkt równowagi oraz stabilność układu

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -0.000075x_1 - 0.02x_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Aby znaleźć punkt równowagi rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x_1' = 0 \\ x_2' = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Wstawiając równania (1) do równania (2) otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -0.000075x_1 - 0.02x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Punkt P(0,0) jest punktem równowagi układu.

Aby sprawdzić stabilność układu skorzystaliśmy z kryterium stabilności Hurwitza.

Ponieważ układ jest liniowy, to kolejne pochodne cząstkowe pochodnych równań stanu przyjmują wartości współczynników odpowiednich (czyli tych po których różniczkujemy) zmiennych stanu występujących w równaniu.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.000075 & -0.02 \end{bmatrix}$$

$$\det(pI - A) = \det\left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.000075 & -0.02 \end{bmatrix}\right) =$$
$$= \begin{vmatrix} p & -1 \\ 0.000075 & p + 0.02 \end{vmatrix} = p^2 + 0.02p + 0.000075$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 > 0 \\ a_1 = 0.02 > 0 \\ a_2 = 0.000075 > 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = 0.02 * 0.000075 - 0 * 1 = 0$$

Układ jest stabilny.

Kod źródłowy programów

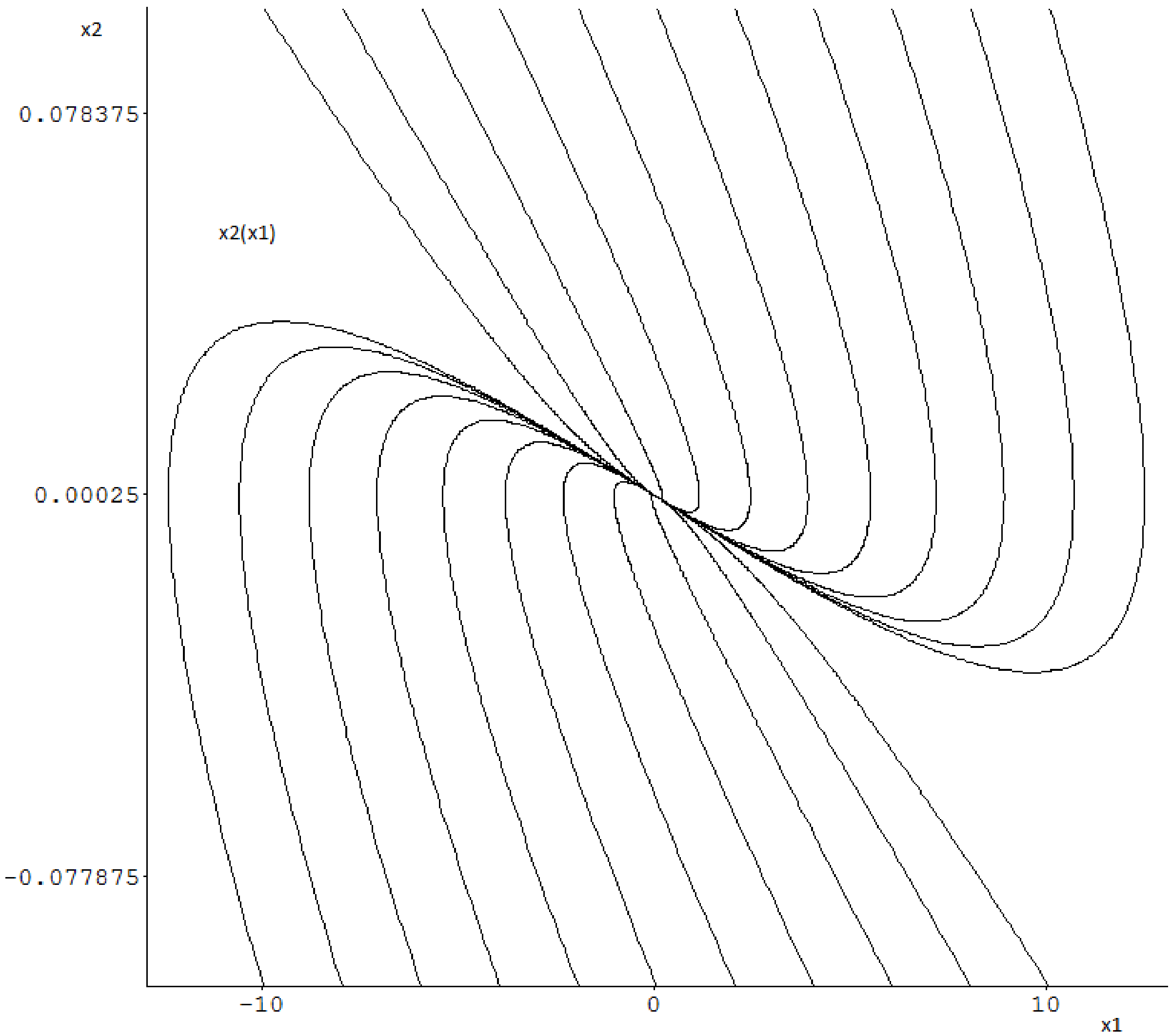
test.t

```
continuous system test
time t
state x1 x2
der dx1 dx2
dx1=x2
dx2=-0.000075*x1-0.02*x2
end
```

automat.t

```
macro automat
syst test
store x1 x2
simu 0 1000 1
split 1 1
axes h -13 13 v -0.1 0.1
for i=-10 to 10 step 2
init x1:i
init x2:0.1
simu
show x2(x1)
next i
for i=-10 to 10 step 2
init x1:i
init x2:-0.1
simu
show x2(x1)
next i
end
```

Wykres



Analityczne sprawdzenie stabilności układu metodą Hurwitza zgadza się z wykresem, zatem układ jest stabilny. W punkcie równowagi (0,0) zachodzi stabilność typu węzeł.

Zadanie 3

Temat

Zbudować model podanego układu i makropolecenie do wykreślenia jego portretu fazowego:

Układ nieliniowy opisany równaniami Lotki-Voltery (tzn. układ ekologiczny)

$$x_1' = k_1x_1 - k_3x_1x_2$$
$$x_2' = -k_2x_2 + k_4x_1x_2$$

- czas całkowania $t_{max} = 20$,

-parametry: $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = 0.00005$, $k_4 = 0.000001$

Podstawiając parametry k otrzymaliśmy układ równań:

$$x_1' = x_1 - 0.00005x_1x_2$$
$$x_2' = -x_2 + 0.000001x_1x_2$$

Punkt równowagi populacji oraz stabilność układu

$$x_1' = x_1 - 0.00005x_1x_2 \qquad (1)$$
$$x_2' = -x_2 + 0.000001x_1x_2$$

Aby znaleźć punkt równowagi rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x_1' = 0 \\ x_2' = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Wstawiając równania (1) do równania (2) otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x_1 - 0.00005x_1x_2 = 0 \\ -x_2 + 0.000001x_1x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(1 - 0.00005x_2) = 0 \\ -x_2(1 - 0.000001x_1) = 0 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy równanie o postaci $\begin{cases} x_1(a - bx_2) = 0 \\ -x_2(c - dx_1) = 0 \end{cases}$

Po rozwiązaniu powyższego układu otrzymujemy dwa rozwiązania:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} oraz \begin{cases} x_1 = 1000000 \\ x_2 = 20000 \end{cases}$$

Punktami krytycznymi tego układu są (0,0) – punkt siodłowy oraz (1000000,20000) – punkt równowagi.

Aby określić stabilność układu zastosowaliśmy pierwszą metodą Lapunova i następującą funkcję Lapunova.

$$\dot{L}(x,y) = x_1\frac{dF}{dx_1}(a - bx_2) + x_2\frac{dG}{dx_2}(-c + dx_1)$$

Zastosowując to do naszego modelu otrzymujemy:

$$\frac{dF}{dx_1} = d - \frac{c}{x_1}$$
$$\frac{dF}{dx_2} = b - \frac{a}{x_2}$$

Rozwiązanie L(x,y) do naszego modelu:

$$L(x_1, x_2) = dx_1 - c\log x_1 + bx_2 - a\log x_2$$

Z tego wynika, że L(x,y) jest stałe na krzywych rozwiązania modelu gdy x, y > 0. Z tego wyciągamy wnioski że układ w punkcie (1000000,20000) posiada stabilność typu centrum.

Kod źródłowy programów

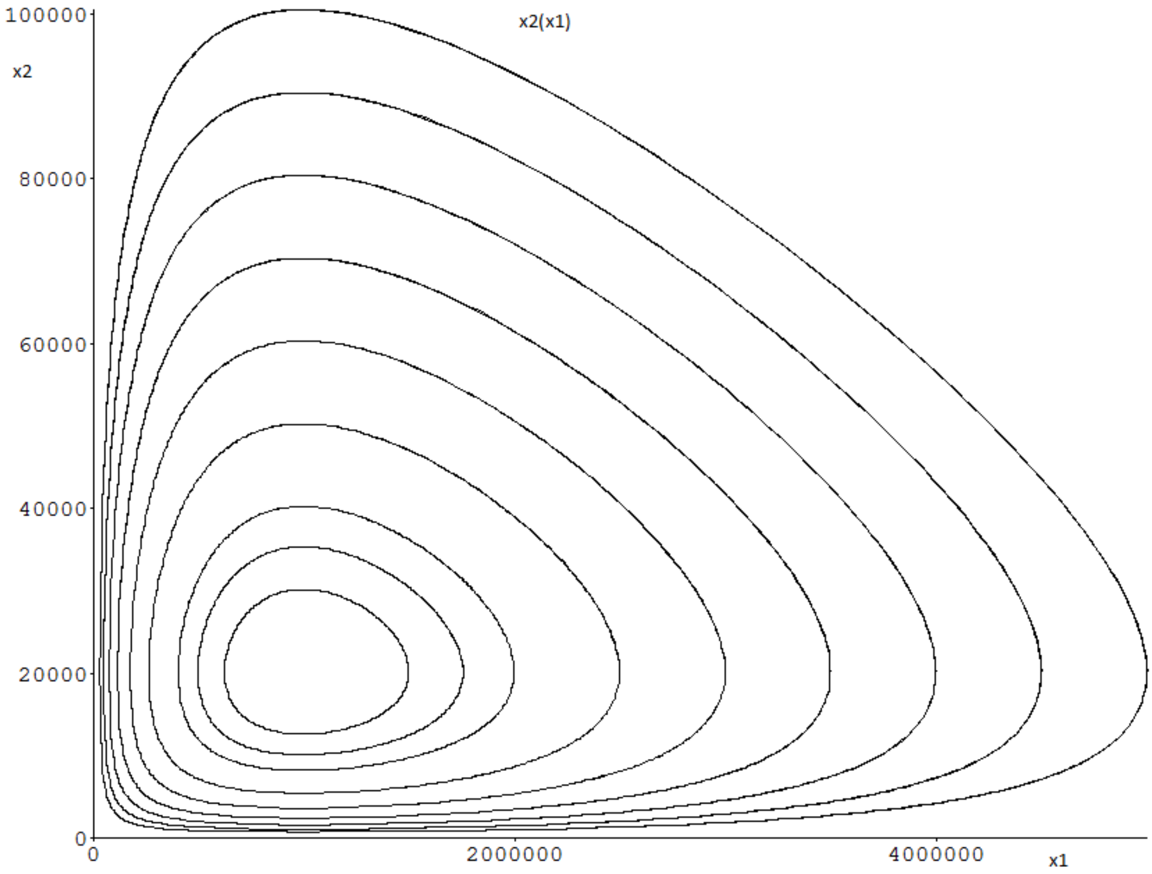
automat.t

```
macro automat
syst test
store x1 x2
simu 0 20 0.01
split 1 1
axes h 0 5e6 v 0 1e5
for i=0 to 5e6 step 5e5
init x1:i
init x2:2e4
simu
show x2(x1)
next i
end
```

test.t

```
continuous system test
state x1 x2
der dx1 dx2
dx1=k1*x1-k3*x1*x2
dx2=-k2*x2+k4*x1*x2
k1:1
k2:1
k3:0.00005
k4:0.000001
end
```

Wykres



Zarówno rozwiązanie analityczne jak i wykres potwierdzają że dla danego układu w punkcie (1000000,20000) zachodzi stabilność typu centrum.