Departamentul Automatică şi Informatică Industrială
Facultatea Automatică şi Calculatoare
Universitatea Națională de Știință și Tehnologie POLITEHNICA
Bucureşti

Studiu comparativ privind transformatele TFD, TKL, THD și TSD

● Proiect PASTO ●

Autori
Marius-Andrei SAIOC
Maria-Cristina SIMA

Coordonator
Prof. dr. ing. Dan Ștefănoiu

Anul universitar 2023-2024

Curpins

1. Obiectivele proiectului

Prelucrarea semnalelor reprezintă o componentă esențială în domeniul ingineriei și al tehnologiei informației, având aplicații variate în sfera telecomunicațiilor și a procesării imaginilor. Acest capitol își propune să stabilească obiectivele proiectului nostru, care investighează aplicațiile și eficiența a patru transformări ortogonale semnificative: Transformarea Fourier Discretă, Transformarea Karhunen-Loève, Transformata Hartley și Transformata Înclinată (Slant).

Obiectivele proiectului sunt:

- Aprofundarea conceptelor matematice și teoretice ale celor patru transformări ortogonale (Transformata Fourier Discretă, Transformata Karhunen-Loève, Transformata Hartley și Transformata Înclinată Slant), evidențiindu-le caracteristicile și fundamentele fiecăreia
- Implementarea și testarea acestora
- Analiza comparativă a acestora (compararea performanței și eficienței acestor transformări prin determinarea capacității de compresie a fiecăreia)

2. Descrierea transformatelor

Acest capitol prezintă, pe scurt, cele patru transformări ortogonale selectate pentru studiu: Transformarea Fourier Discretă, Transformarea Karhunen-Loève, Transformata Hartley și Transformata Înclinată (Slant).

2.1. Transformarea Fourier Discretă

TFD este o tehnică fundamentală în prelucrarea semnalelor și analiza spectrală, având aplicații larg răspândite în diverse domenii, de la inginerie la fizică și matematică. Principiile ei fundamentale sunt:

- Transformata Fourier Discretă este o versiune discretă a Transformatei Fourier, folosită pentru a analiza frecvențele dintr-un semnal discret
- DFT transformă un set finit de eșantioane de semnal din domeniul timpului într-o reprezentare în domeniul frecvenței, acest proces dezvăluind componentele frecvențiale ale semnalului original

2.2. Transformarea Karhunen-Loève (Hotelling)

Transformarea Karhunen-Loève este o metodă de reducere a dimensionalității care transformă un set de date posibil corelate într-un set de valori necorelate, numite componente principale. KLT este extrem de eficientă în compresia semnalelor și a imaginilor, reducând redundanța și păstrând informațiile esențiale. Matematic, transformarea implică calculul vectorilor și valorilor proprii ale matricei de covarianță, vectorii proprii formând un set de baze ortogonale pentru reprezentarea datelor.

2.3. Transformata Hartley

Transformata Hartley transformă un semnal din domeniul timpului în domeniul frecvenței, similar cu Transformata Fourier, dar prin intermediul unei abordări diferite, care utilizează combinații de sinusuri și cosinusuri într-o singură funcție, fiind cunoscută și sub numele de funcția Hartley. Deși nu este la fel de răspândită ca Transformata Fourier, Transformata Hartley oferă o alternativă valoroasă în anumite aplicații specifice.

2.4. Transformata Înclinată (Slant)

Transformata Înclinată (Slant) este specializată în analiza și prelucrarea semnalelor și imaginilor care prezintă caracteristici direcționale, cum ar fi liniile înclinate sau marginile oblice. Această transformare utilizează un set de funcții înclinate pentru a extrage informații direcționale din date, fiind matematic formulată pentru a aplica aceste funcții asupra semnalelor sau imaginilor. Datorită eficienței sale în reprezentarea caracteristicilor direcționale, transformata este utilă în compresia datelor fractale, permițând o reprezentare mai compactă și mai eficientă din punct de vedere al spațiului de stocare.

3. Modul de implementare al transformatelor

Pentru fiecare transformată în cazul 2D color, s-a aplicat metoda de la cazul 2D alb-negru pentru fiecare canal RGB.

3.1. Implementarea transformării Karhunen-Loève

Pentru a putea implementa această transformată au fost urmați, în principal, pașii din intermediul cursului de Prelucrare Avansată a Semnalelor prin Transformate Ortogonale [1]. Pentru cazul 1D, prima etapă a fost centrarea pe medie a semnalului, realizată prin funcția Matlab ”mean”. În continuare, s-a calculat secvența de auto-corelație, din care s-a extras partea pozitivă, și s-a construit matricea de auto-corelație. Folosind funcția ”eig”, s-a rezolvat problema spectrală. Folosind valorile proprii obținute, s-au ales vectorii proprii principali, cu ajutorul cărora s-au calculat coeficienții transformatei.

Pentru cazul 2D au fost urmărit aceeași pași, cu mențiunea că formula de calcul a matricii de auto-corelație este modificată față de cazul anterior.

3.2. Implementarea transformării Hartley

În implementarea acestei transformate a fost folosită forma matriceală. Plecând de la formula de calcul a transformatei Hartley din cursul de Prelucrare Avansată a Semnalelor prin Transformate Ortogonale, suma de functii cas a fost inlocuită cu o matrice care va înmulți semnalul pentru a obține, fără iterații, întregul vector de coeficienți.

Pentru a obține această matrice de transformare s-a format, mai intâi, două matrici de tip "mesh", și apoi s-a calculat elementul generic pentru ele.

Pentru cazul 2D, conform formulei de calcul din curs, a fost nevoie de construirea a două matrici de transformare diferite, HL și HC. În rest, s-a urmat aceeași metodă prezentată anterior.

3.3. Implementarea transformării Înclinate (Slant)

Pentru implementarea transformatei Slant a fost urmărit algoritmul din cursul de Prelucrare Avansată a Semnalelor prin Transformate Ortogonale. Transformata Slant este aplicată doar pe semnale de dimensiunea 2^n, astfel semnalele lungi au fost împărțite în segmente de 4096, ultimul segment fiind completat cu 0 (la nevoie). Apoi, pentru obținerea matricii Slant, s-a implementat o metodă ce folosește relația recurentă fundamentală din curs. Dacă s-ar aplica transformata folosind forma actuală a matricii, componentele principale nu ar fi grupate, ci răspândite. Astfel, funcțiile Slant (liniile matricii), trebuie enumerate în ordinea crescătoare a benzilor dominante de frecvență. În consecință, înainte de aplicarea transformatei asupra semnalului, s-a aplicat transformata Fourier pe fiecare linie a matricii Slant și s-a efectuat ordonarea.

În cazul imaginilor 2D, s-a folosit același algoritm, aplicat întâi pe fiecare coloană a imaginii, iar după aceea pe fiecare linie a matricii de coeficienți obținută.

4. Rezultate

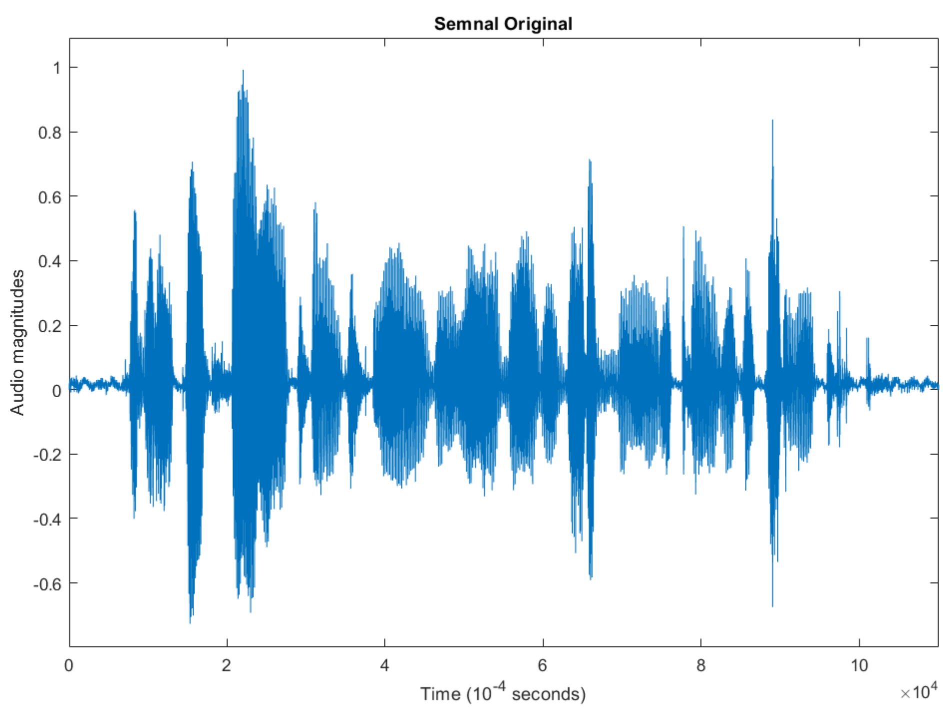
În cadrul celor doua rutine principale, cea de testare a inversabilitatii, respectiv a capacitatii de compresie, semnalele mari au fost impartite in segmente pentru a nu depasi resursele masinii pe care s-a realizat rularea.

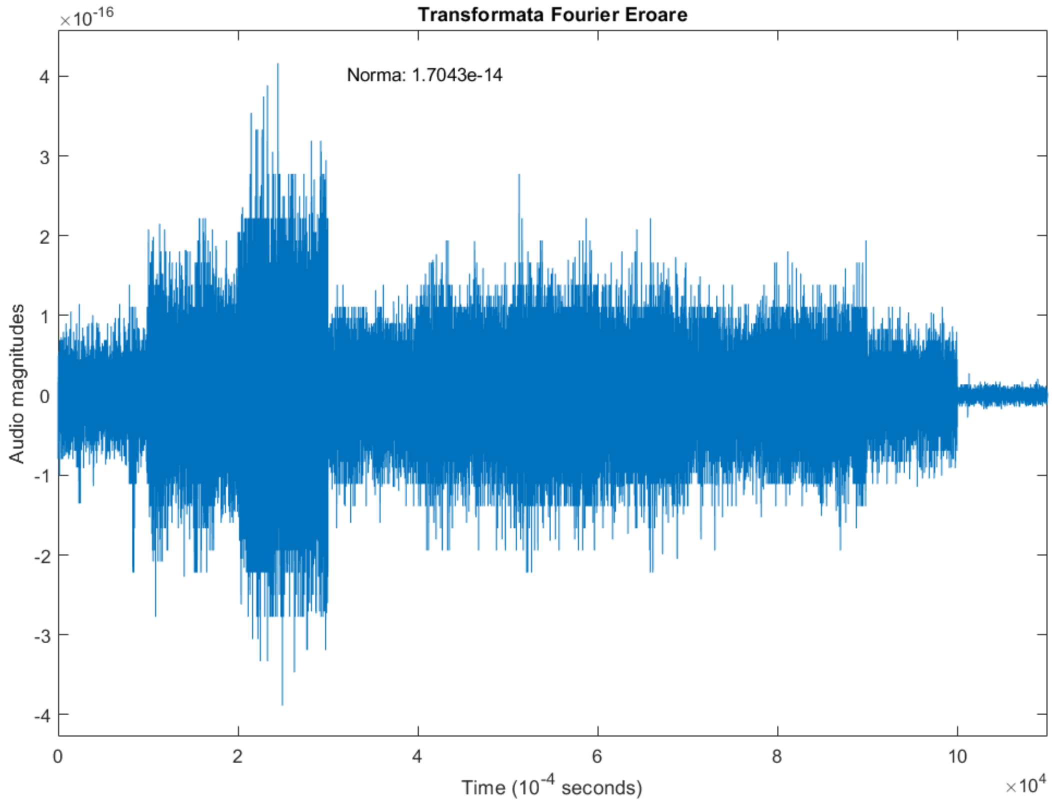
4.1. Inversabilitate

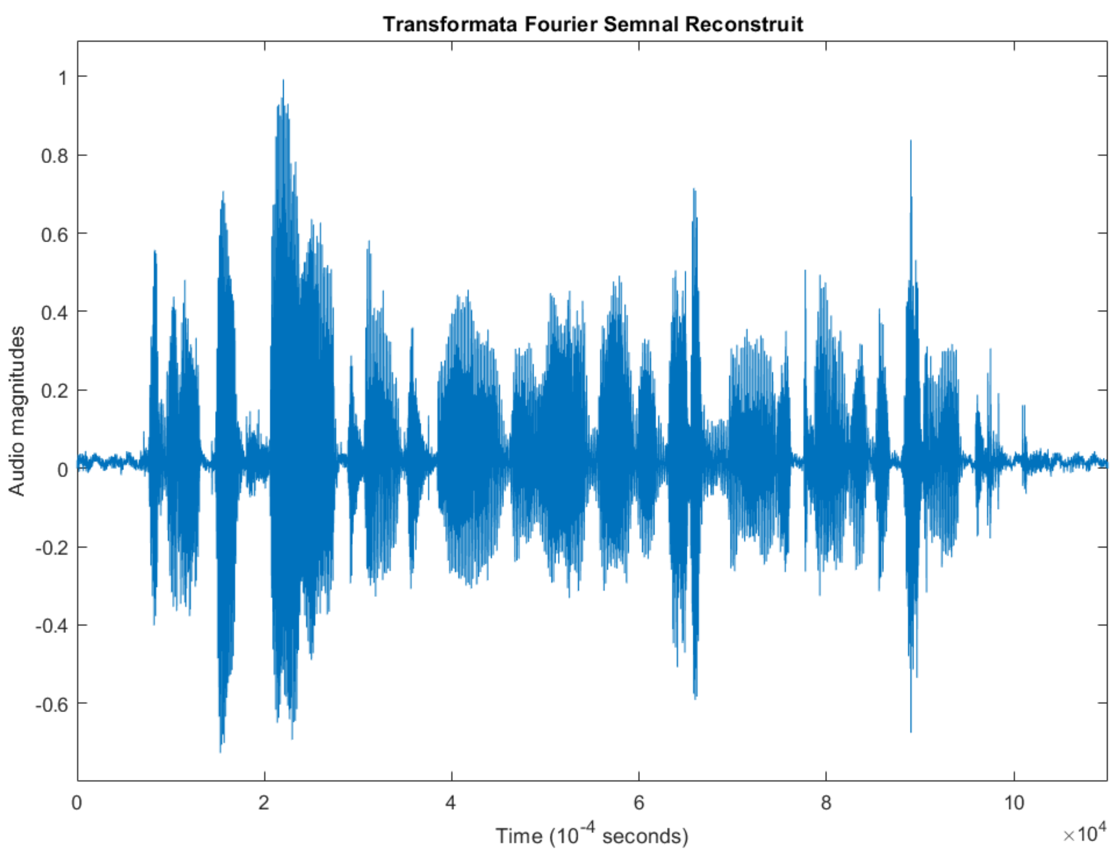
Transformarea Fourier Discretă

Pentru testarea tranformatei Fourier s-au folosit functiile matlab fft si ifft.

Semnal 1D:



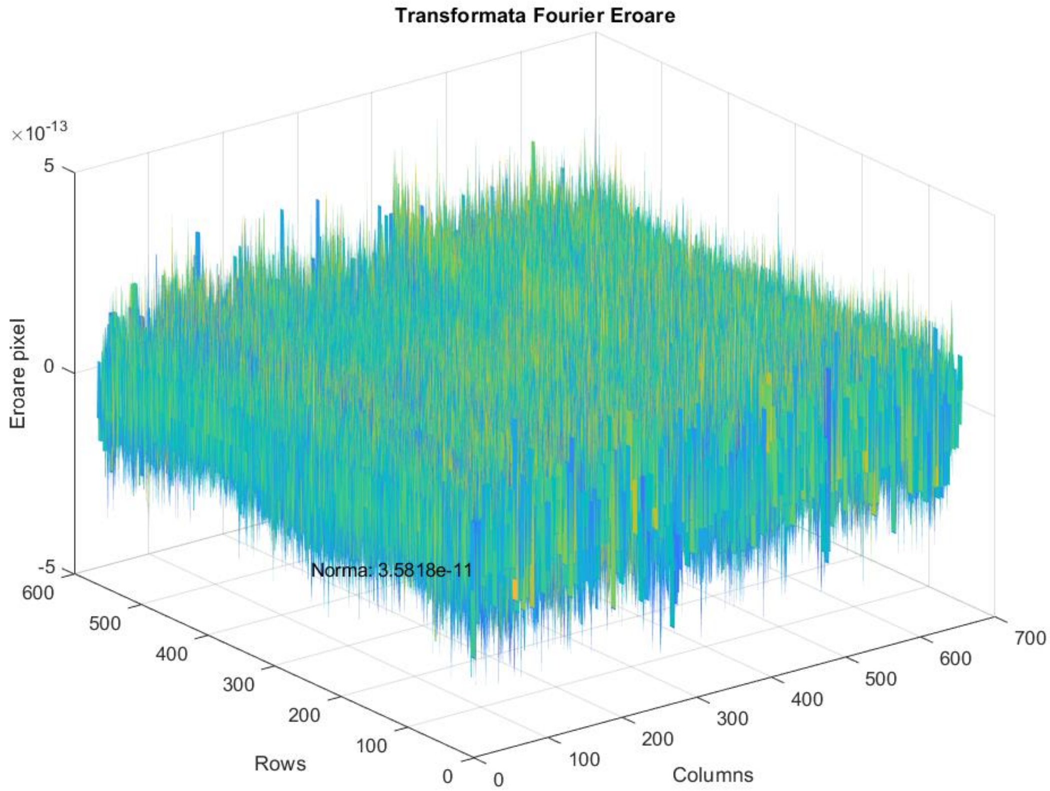

Transformata Fourier Eroare
×10^-16
Norma: 1.7043e-14
Audio magnitudes
Time (10^-4 seconds)
×10^4


Transformata Fourier Semnal Reconstruit
Audio magnitudes
Time (10^-4 seconds)
×10^4

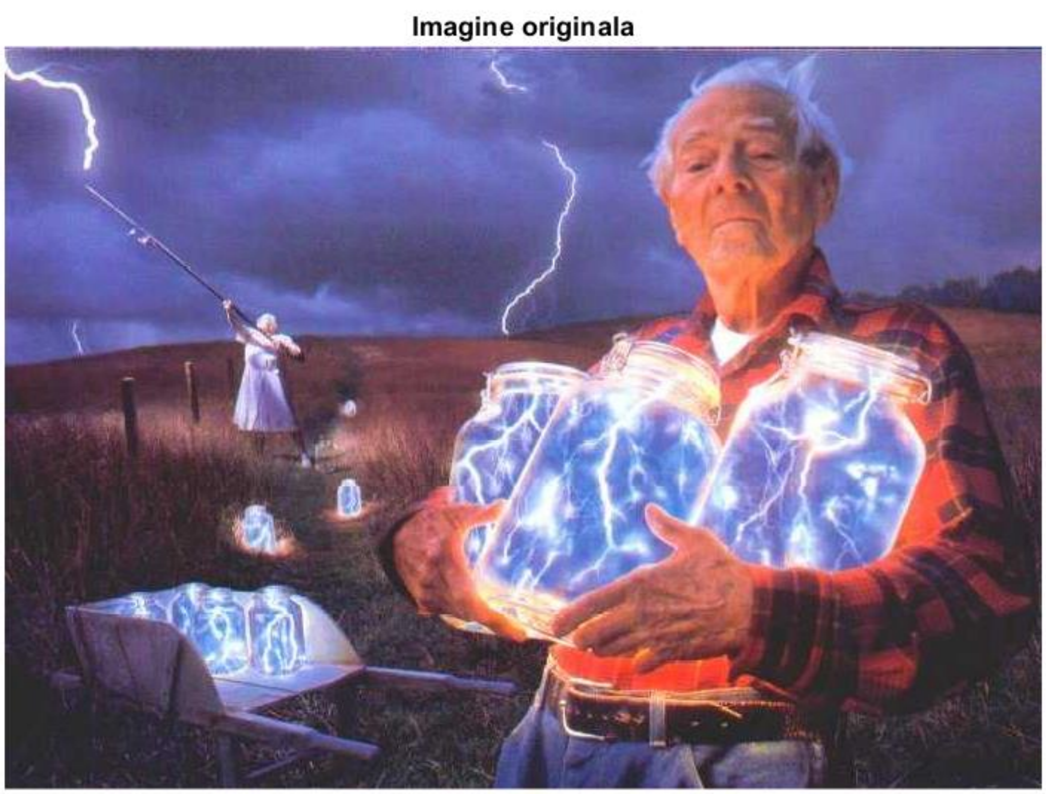
Semnal 2D (imagine alb-negru):

Imagine originala

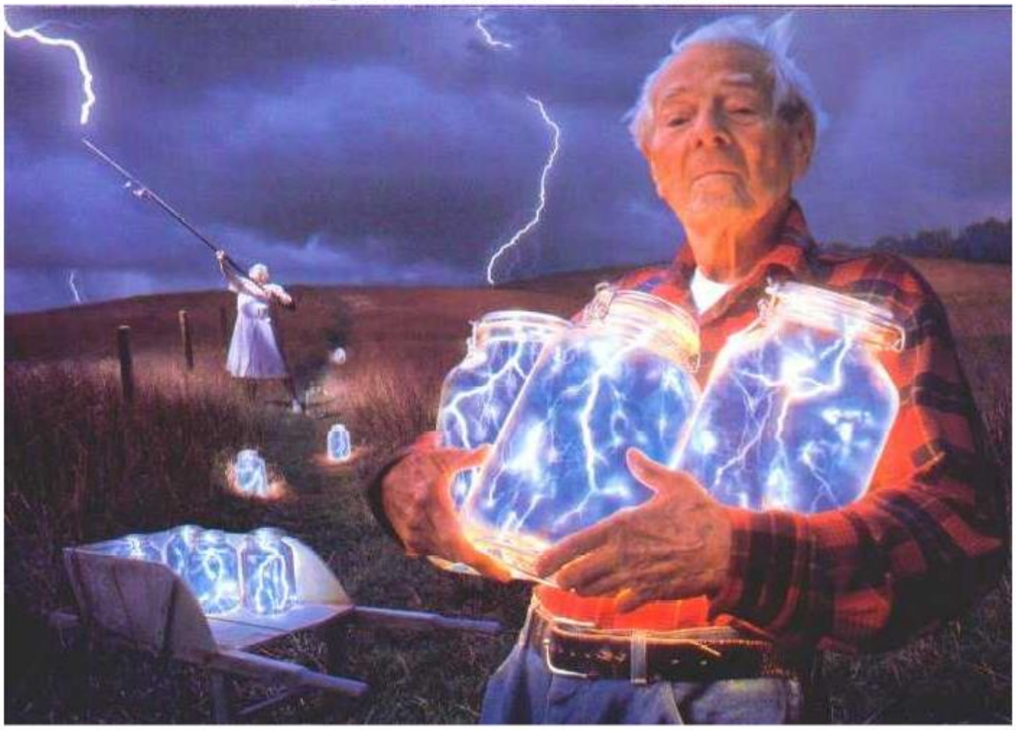
Imagine reconstruita Fourier Discret



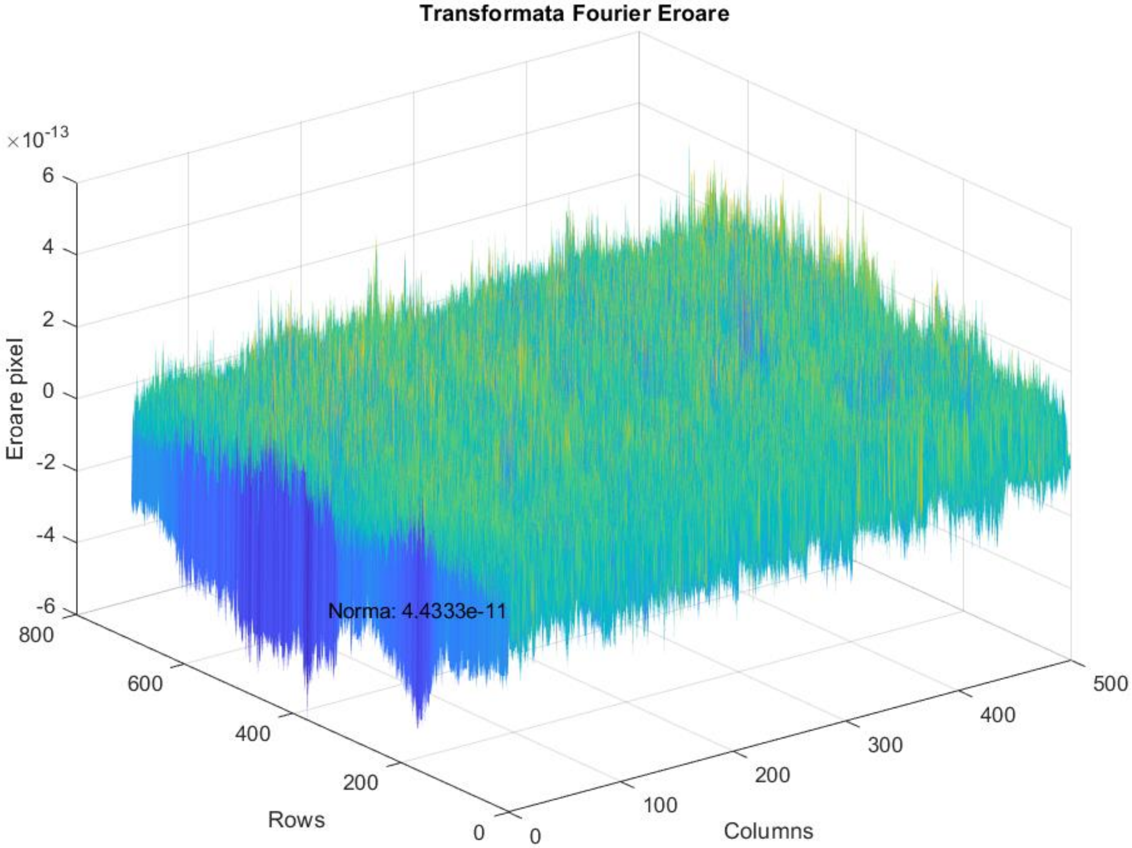
Semnal 2D (imagine color rgb):



Imagine reconstruita Fourier Discret



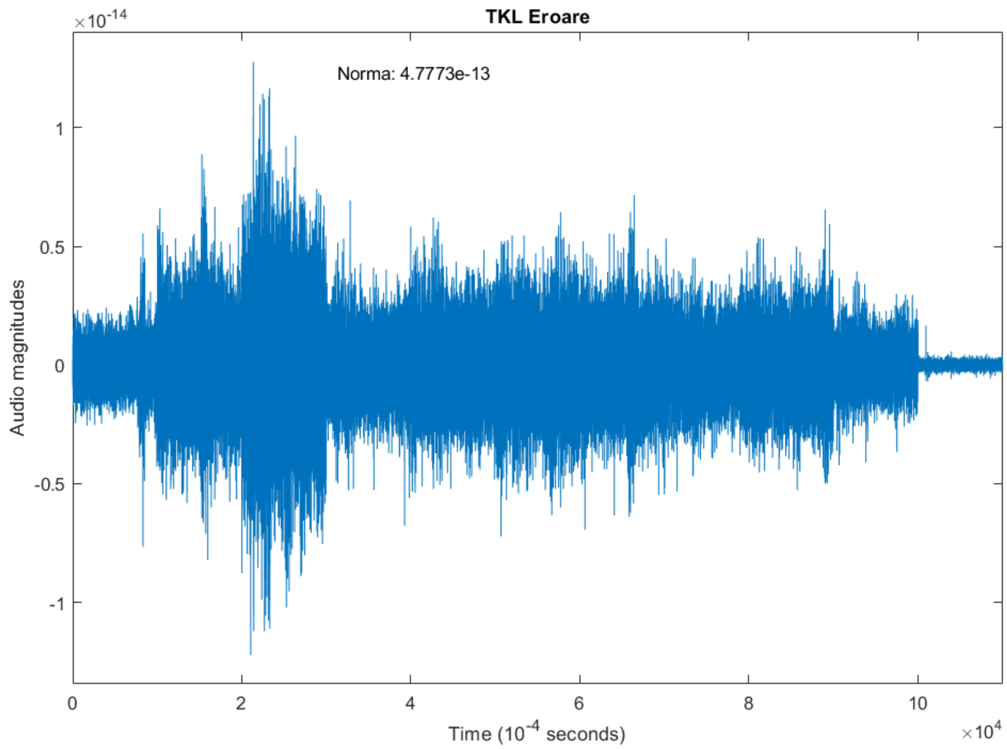
Transformata Fourier Eroare

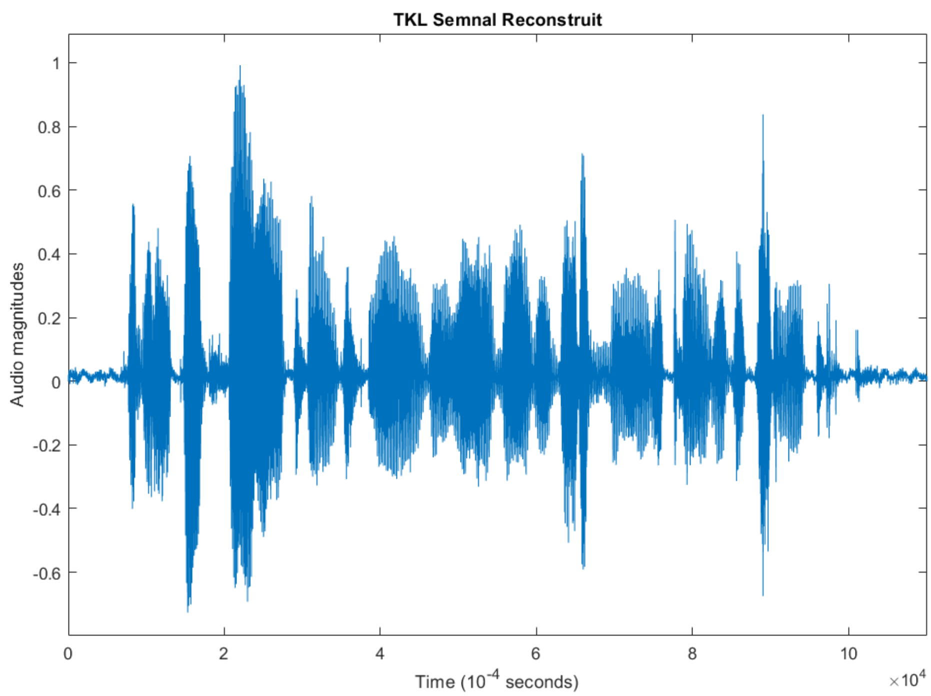


Transformarea Karhunen-Loève (Hotelling)

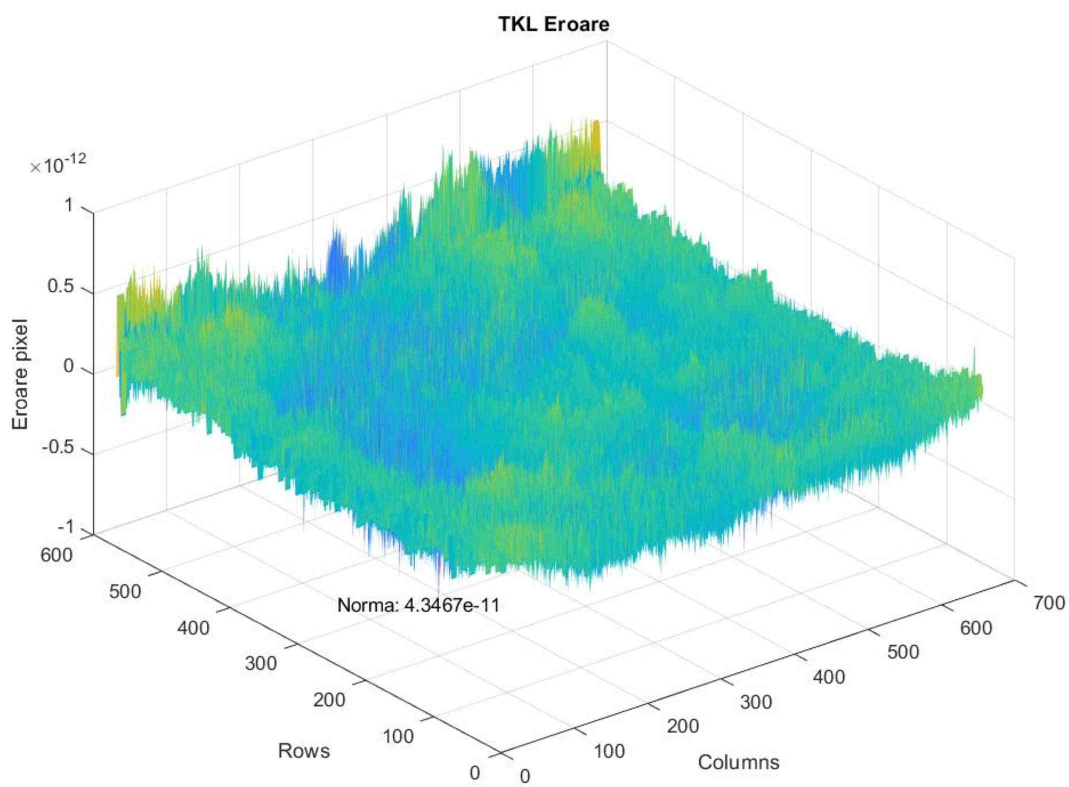
Pentru obținerea semnalului original, coeficienții transformatei Karhunen-Loève au fost înmulțiți cu vectorii proprii obținuți în cadrul rutinei în care s-a efectuat transformarea. Apoi, a fost adăugată și media semnalului original.

Semnal 1D:

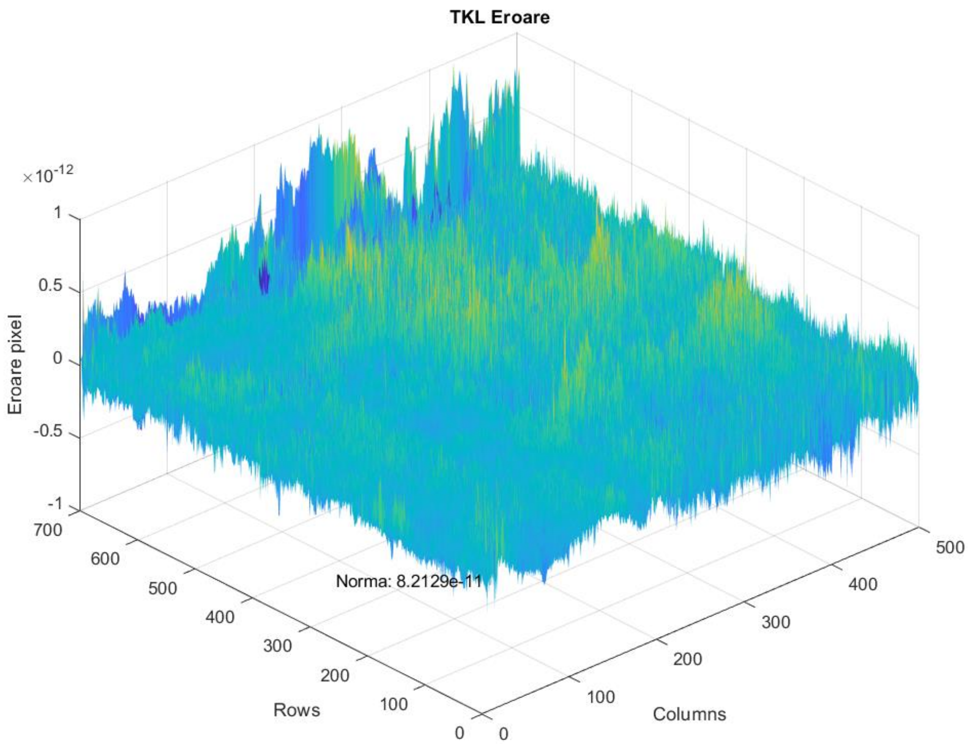




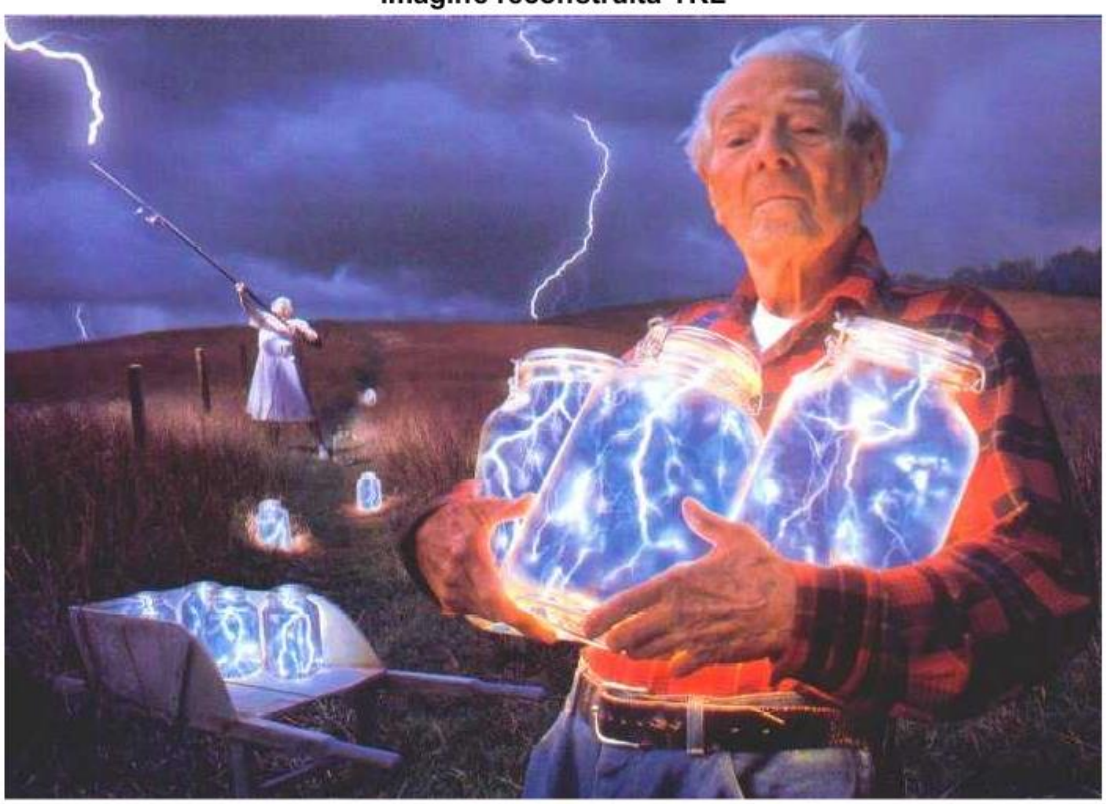
Semnal 2D (Imagine alb-negru):



Semnal 2D (imagine color rgb):



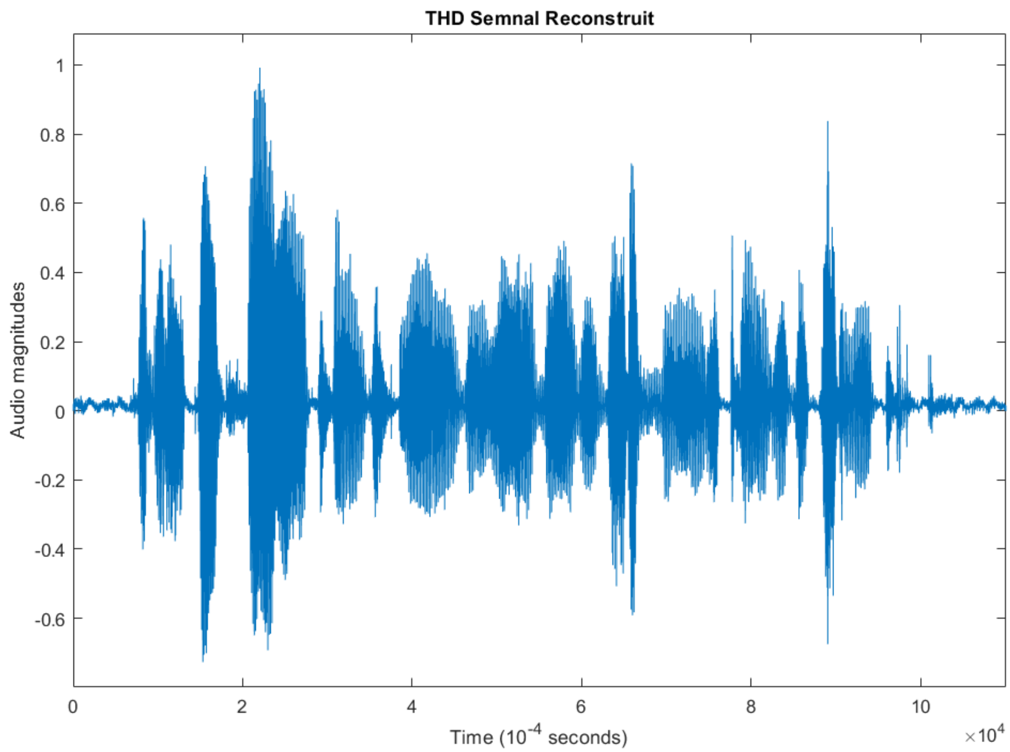
Imagine reconstruita TKL

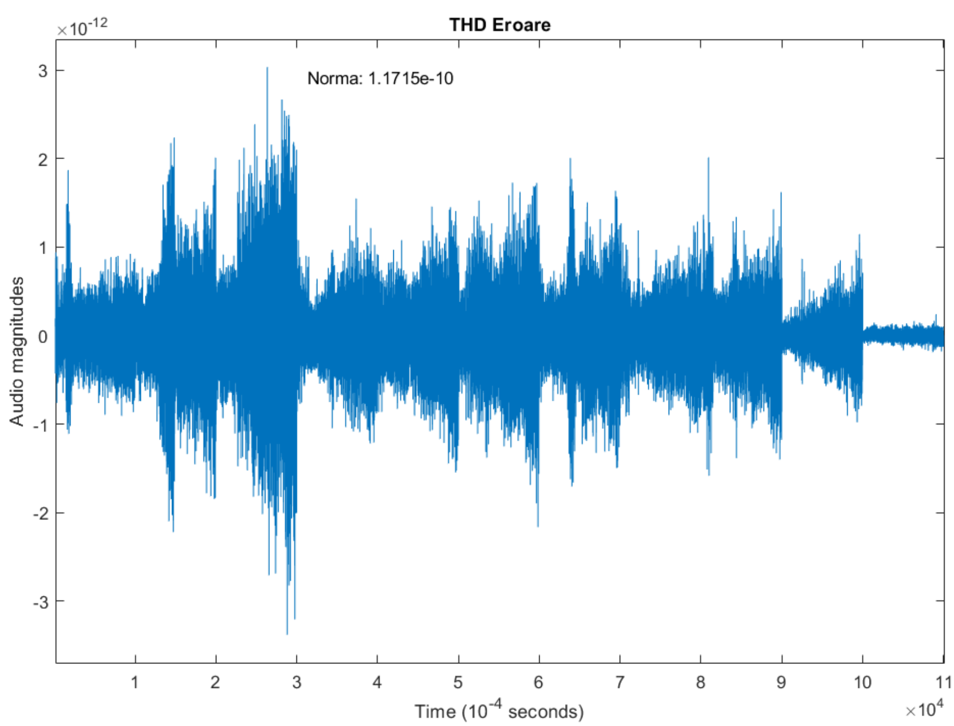


Transformata Hartley

În cadrul transformatei Hartley, s-a folosit forma matriceală atât pentru obținerea coeficientilor transformatei cât și pentru obținerea semnalului original.

Semnal 1D:

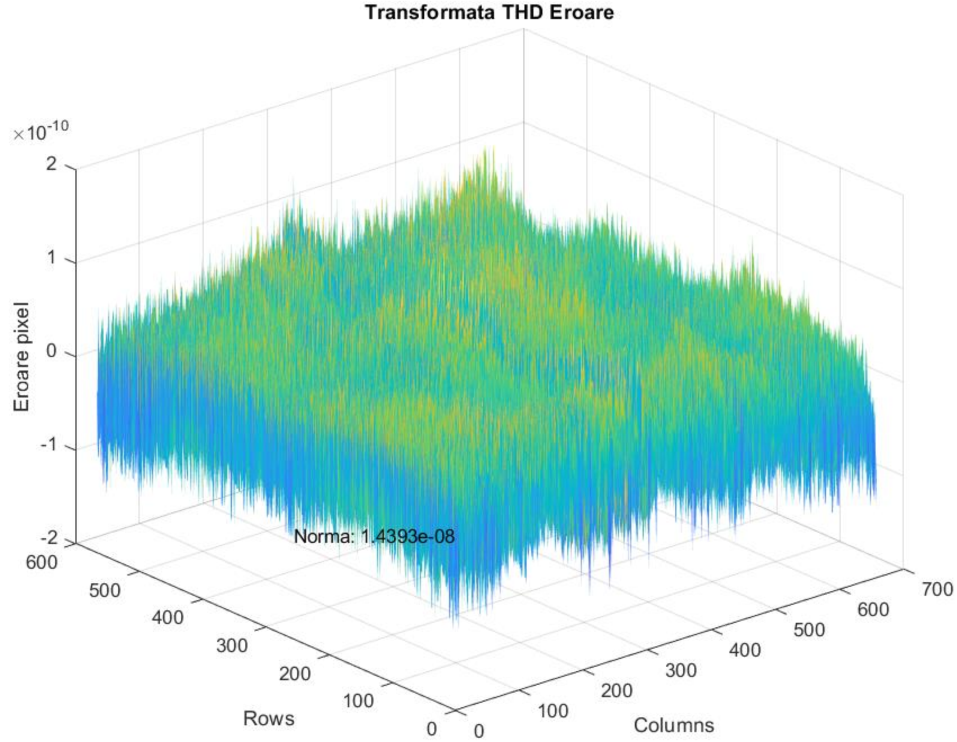




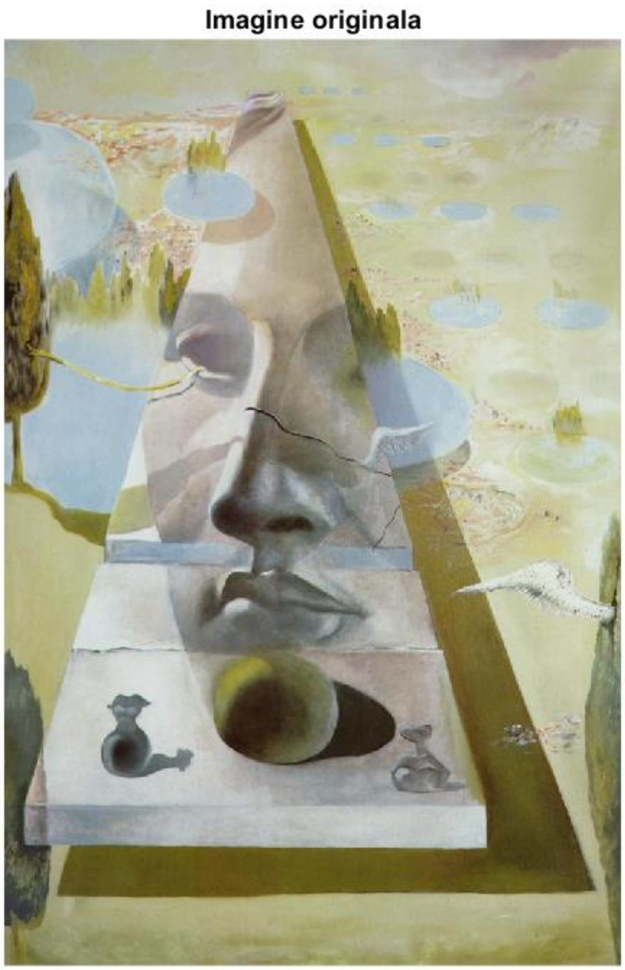
Semnal 2D (Imagine alb-negru):

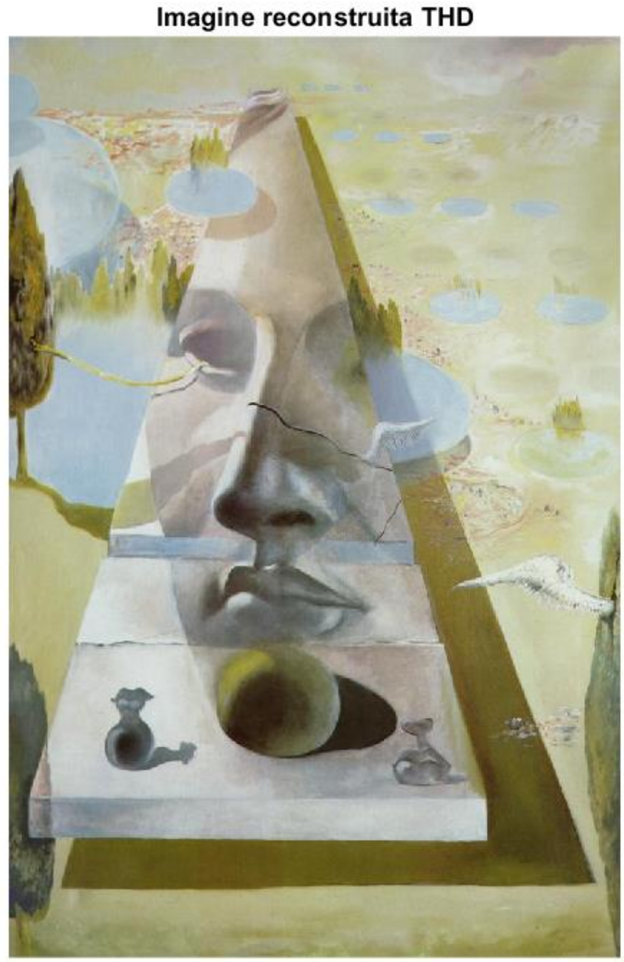
Imagine reconstruita THD

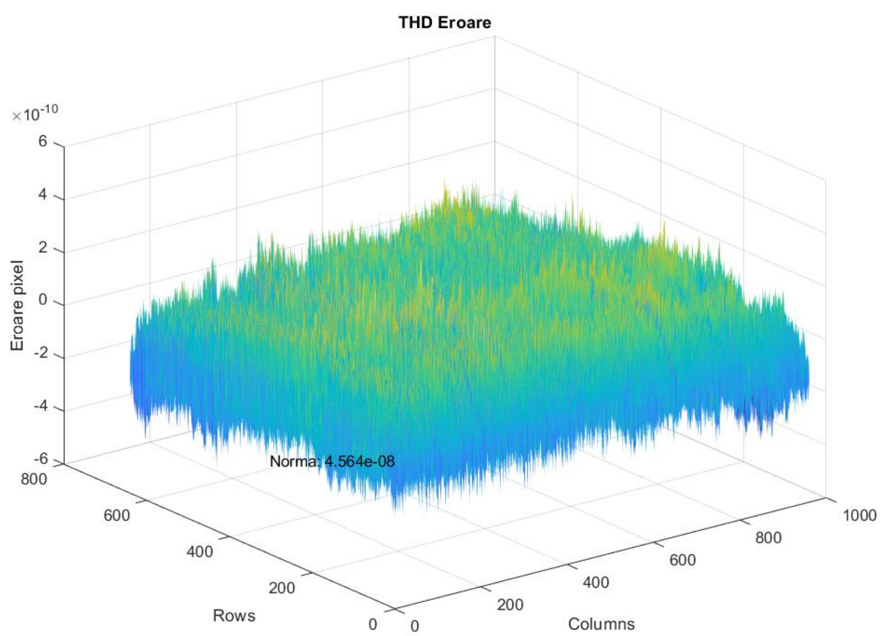
Transformata THD Eroare



Semnal 2D (imagine color rgb):



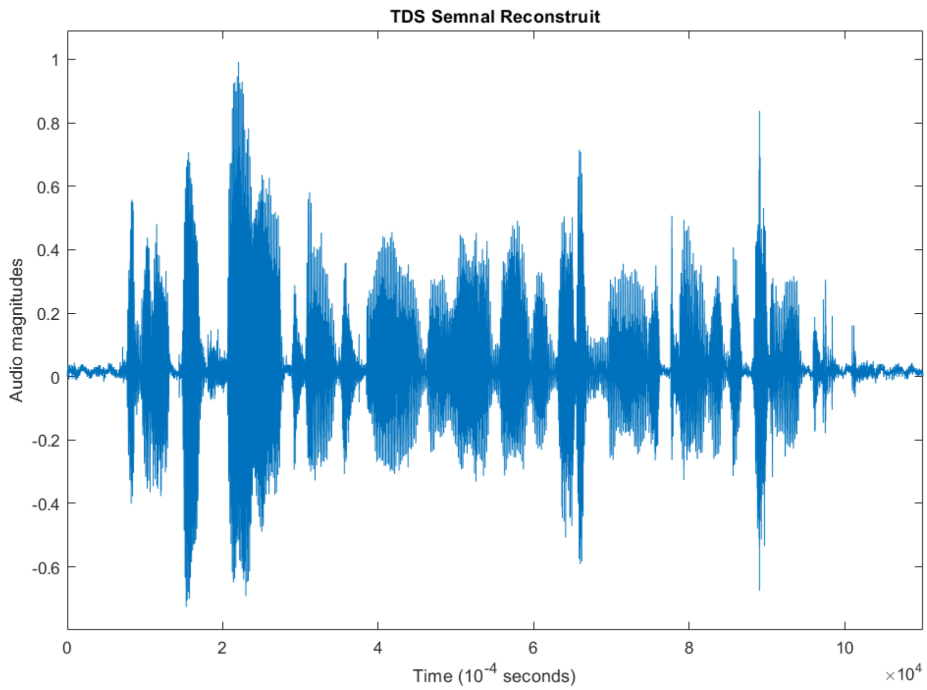


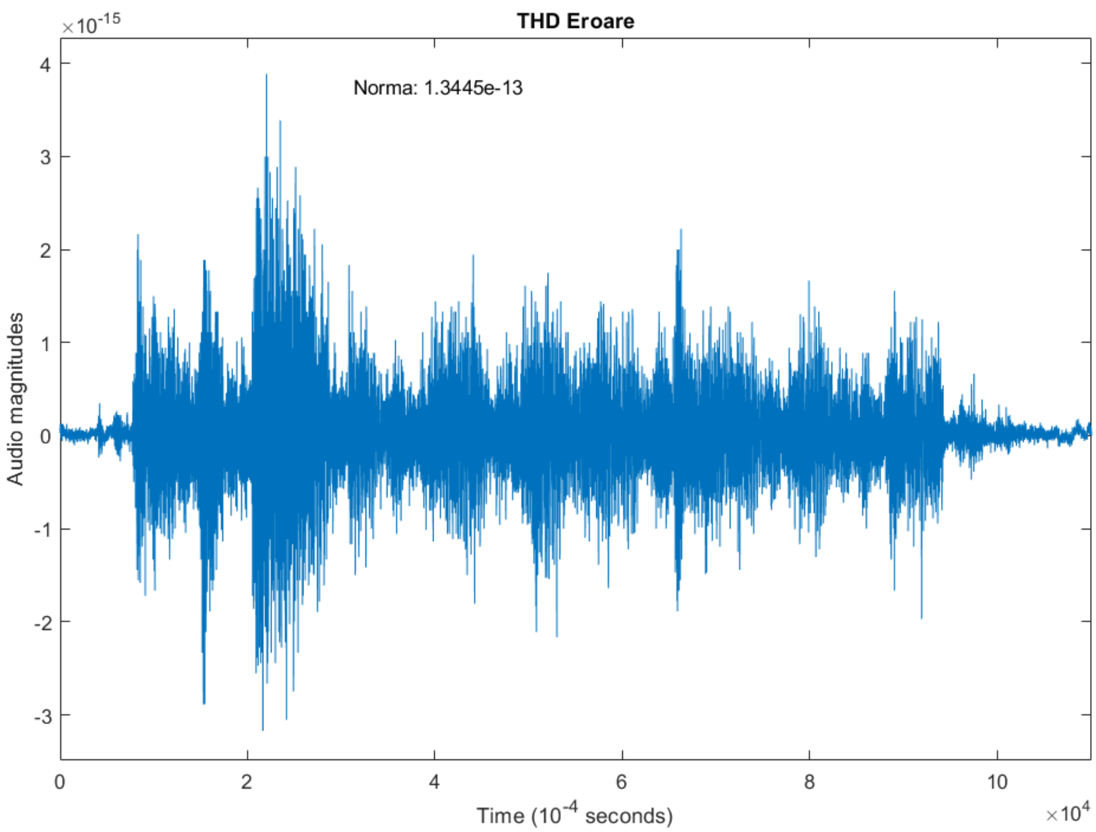


Transformata Slant

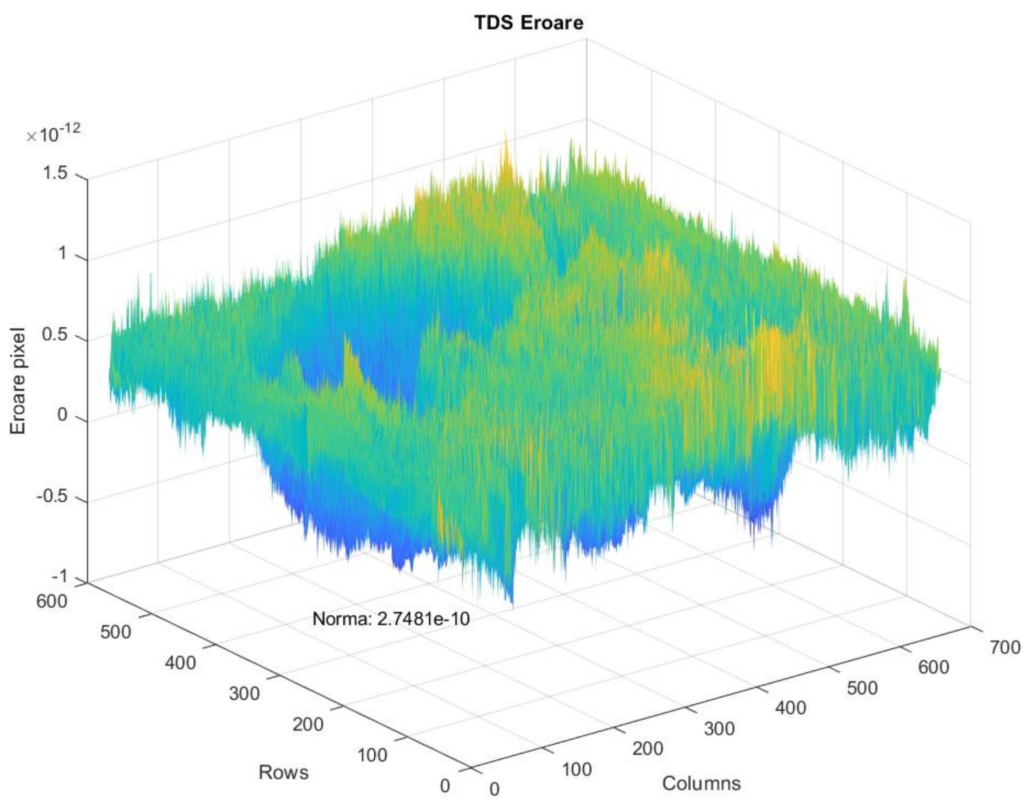
Pentru obținerea semnalului original s-a folosit matricea Slant, care a fost înmulțită cu coeficientii.

Semnal 1D:

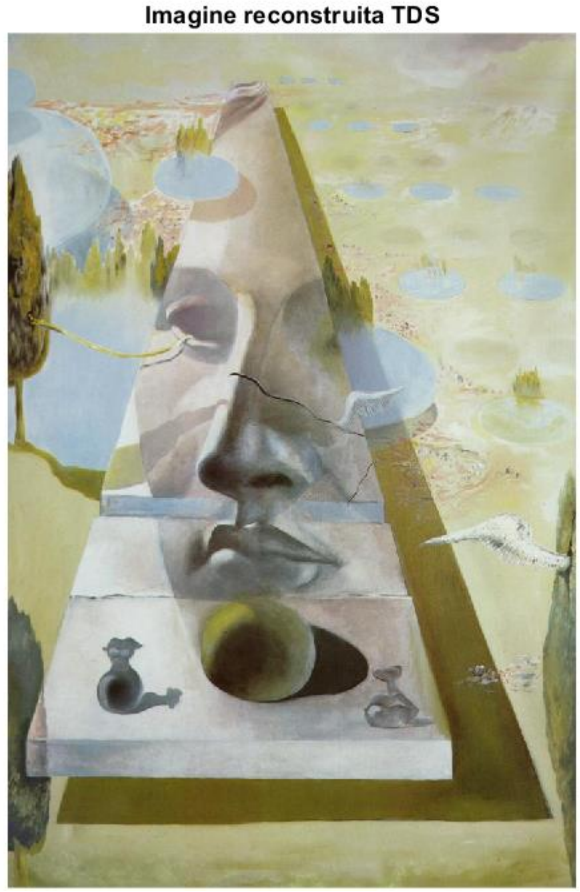


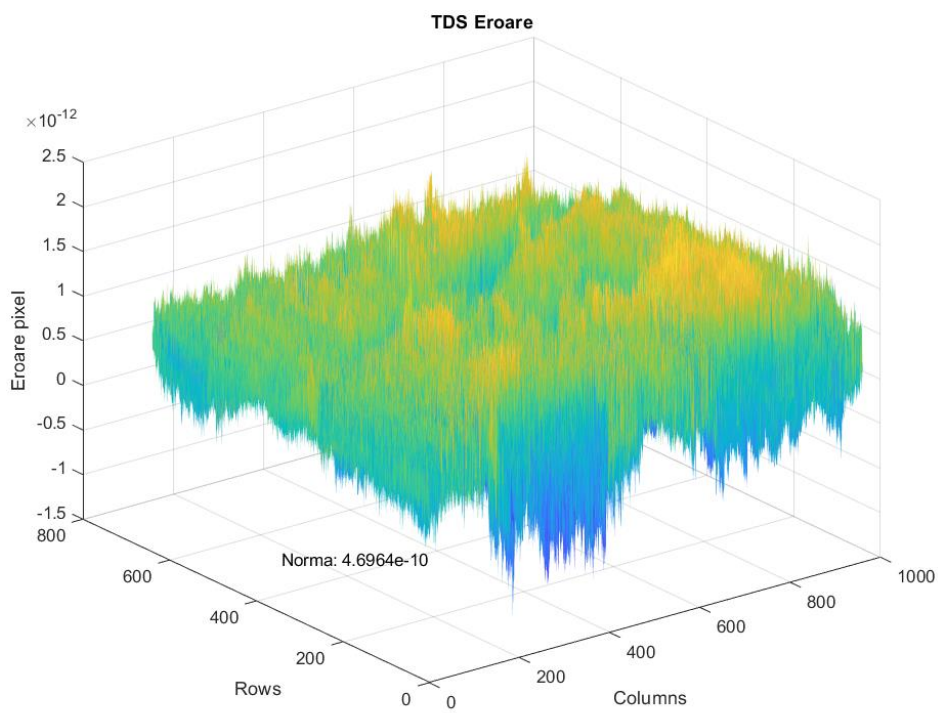


Semnal 2D (Imagine alb-negru):



Semnal 2D (imagine color rgb):





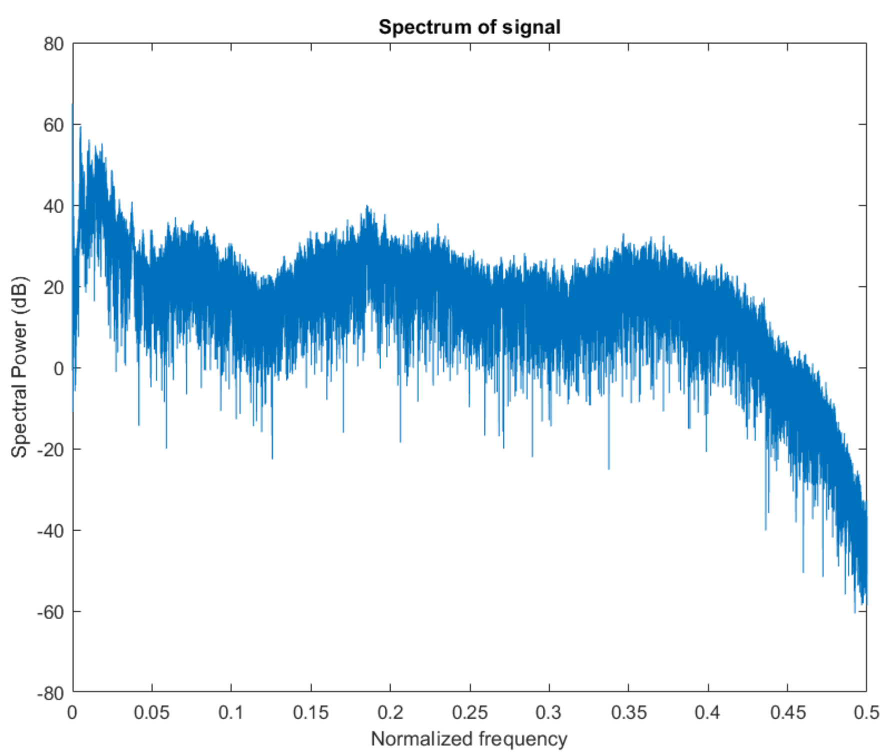
Se poate observa că, în principiu, toate transformatele reconstruiesc semnalul inițial foarte precis, diferența fiind insesizabilă. O mică eroare există, aceasta însă nedepășind valoare de 4.6e-08. Cele mai mici erori sunt în cazul tranformatei Fourier Discretă, funcțiile matlab folosite (fft, ifft) fiind probabil foarte bine optimizate, minimizând erorile numerice. Cele mai mari erori sunt la transformată Hartley. Din punct de vedere al semnalelor de intrare se poate observa că semnalele 2D, și în special cele color, vor genera erorile cele mai mari.

Din punct de vedere al timpului de rulare, chiar dacă nu a fost făcut o măsurătoare exactă, s-a putut observă că transformata deja implementată în matlab, Fourier Discretă, este cea mai rapidă, fiind de asemenea capabilă să proceseze semnale foarte mari, în ciuda unor specificații limitate ale computerului pe care s-au efectuat testele. În cazul celorlalte tranformate a fost nevoie ca semnalele, în special cele 1D, să fie împărțite în bucăți de diferite dimensiuni pentru ca computerul să nu rămână fără memorie. Pentru transformata Slant, cea mai solicitantă parte a algoritmului, din punct de vedere al timpului de execuție a fost calcularea matricei Slant și reordonarea liniilor acesteia. Pentru transformată Hartley, folosindu-se formă matricială, timpul de execuție a fost unul rezonabil, crescând însă exponențial odată cu mărirea dimensiunii semnalului de intrare. Cea mai lentă tranformată a fost transformata Karhunen-Loève, dar doar în cazul semnalelor 1D. Folosirea funcției toeplitz pentru calculul matricei de auto-corelație, și apoi rezolvarea problemei spectrale folosind această matrice a rezultat în timpi de execuție de câteva zeci de ori mai mari decât în cazul celorlalte transformate. În cazul semnalelor 2D, înmulțirea matricei imaginii cu transpusa ei pentru obținerea matricei de auto-corelație, dimensiunea acesteia fiind astfel una relativ redusă, a adus la un timp de execuție mic, comparabil cu al celorlalte transformate.

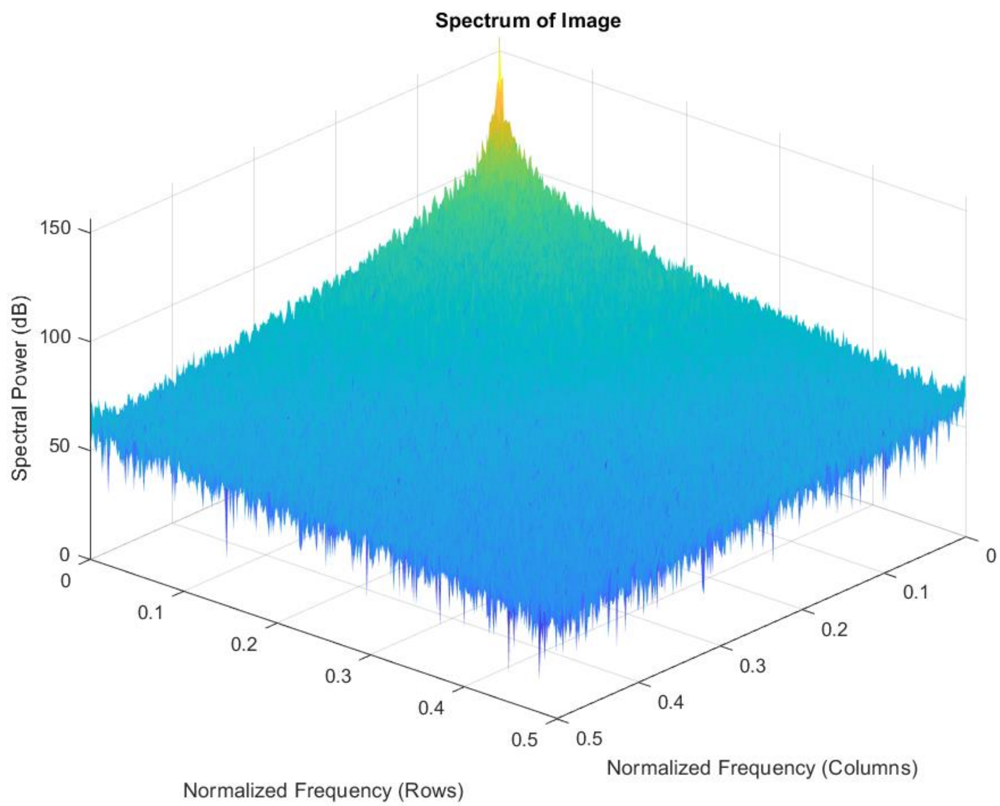
4.2. Capacitate de compresie

Transformata Fourier Discretă

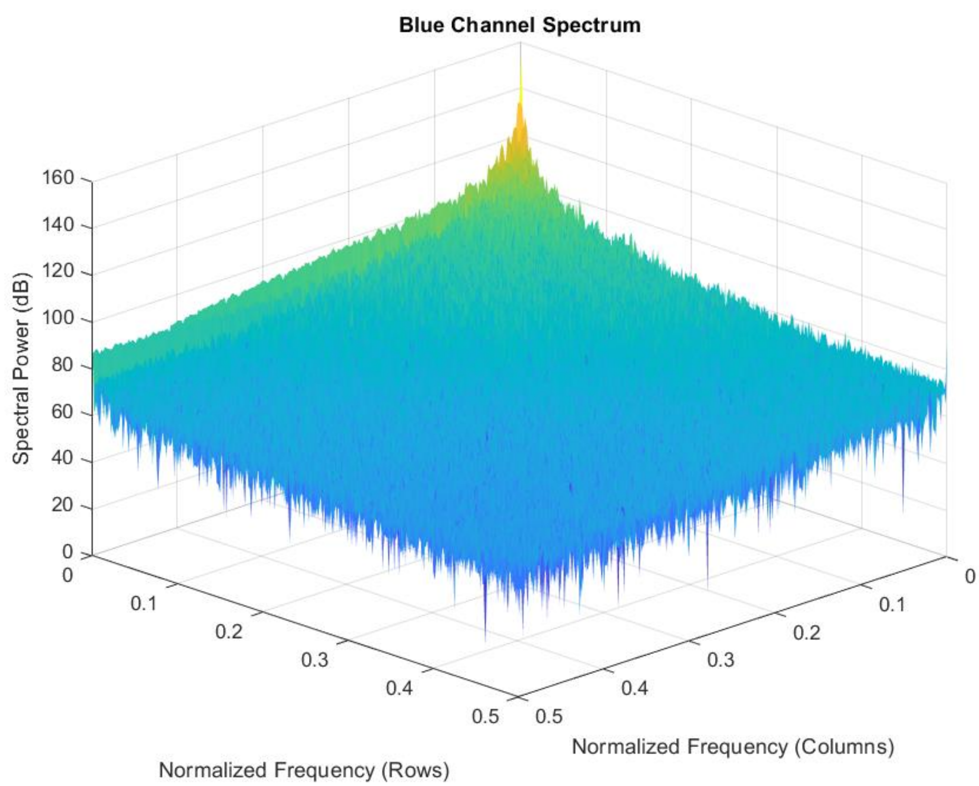
Semnal 1D:

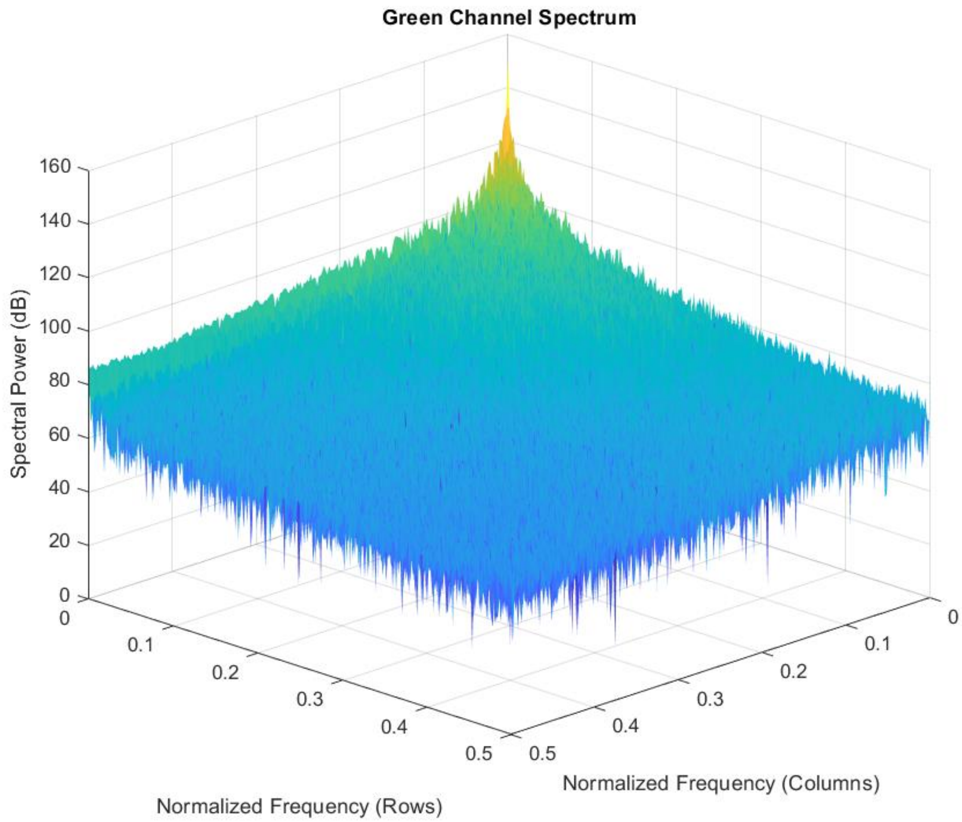


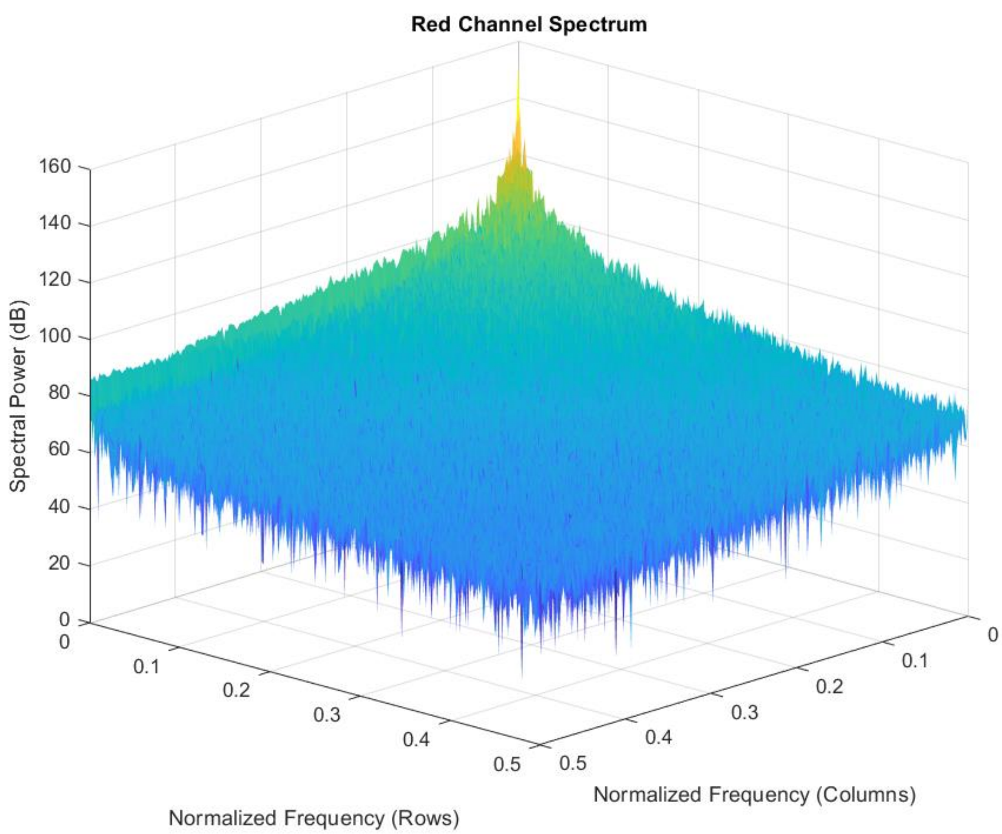
Semnal 2D (Imagine alb-negru):



Semnal 2D (imagine color rgb):

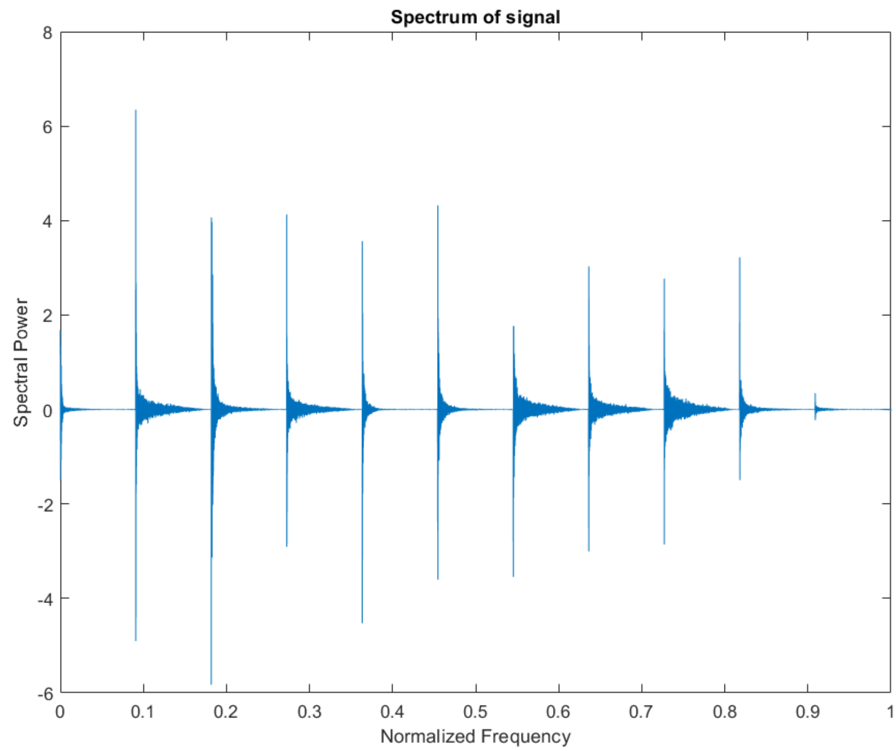



Green Channel Spectrum
Spectral Power (dB)
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Normalized Frequency (Rows)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Normalized Frequency (Columns)

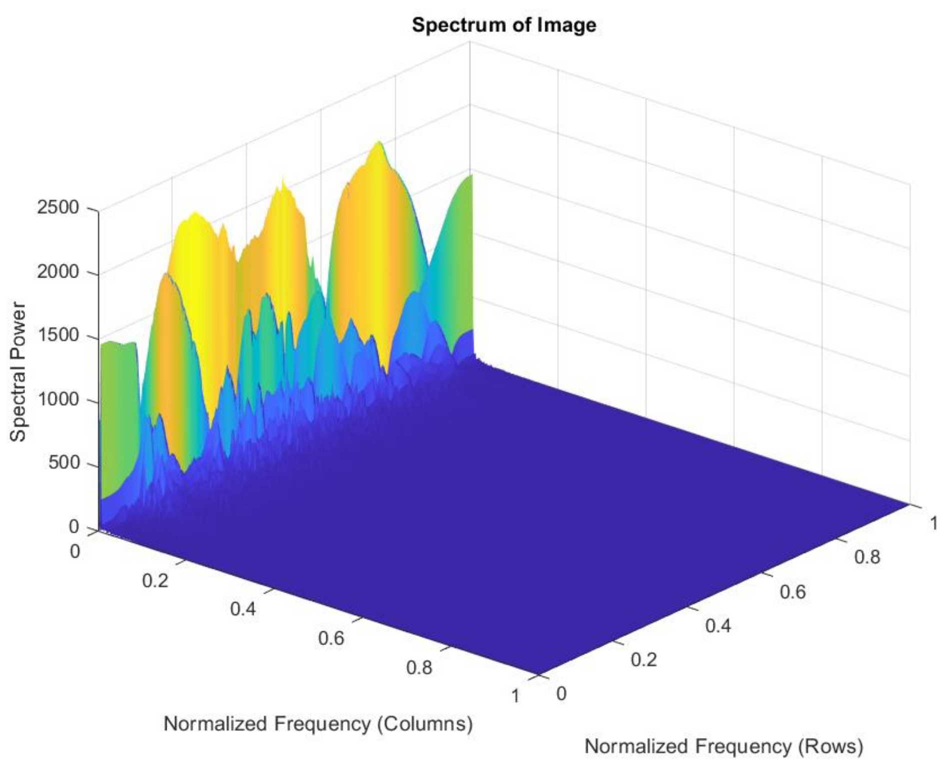

Red Channel Spectrum
Spectral Power (dB)
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Normalized Frequency (Rows)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Normalized Frequency (Columns)

Transformarea Karhunen-Loève (Hotelling)

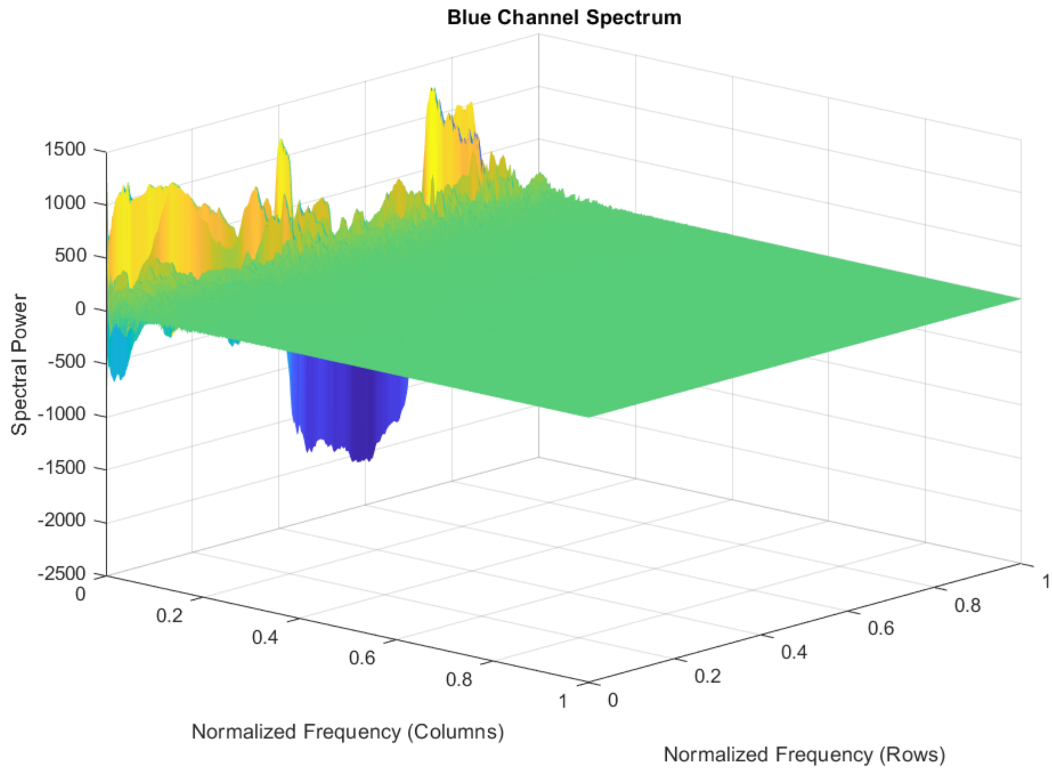
Semnal 1D:

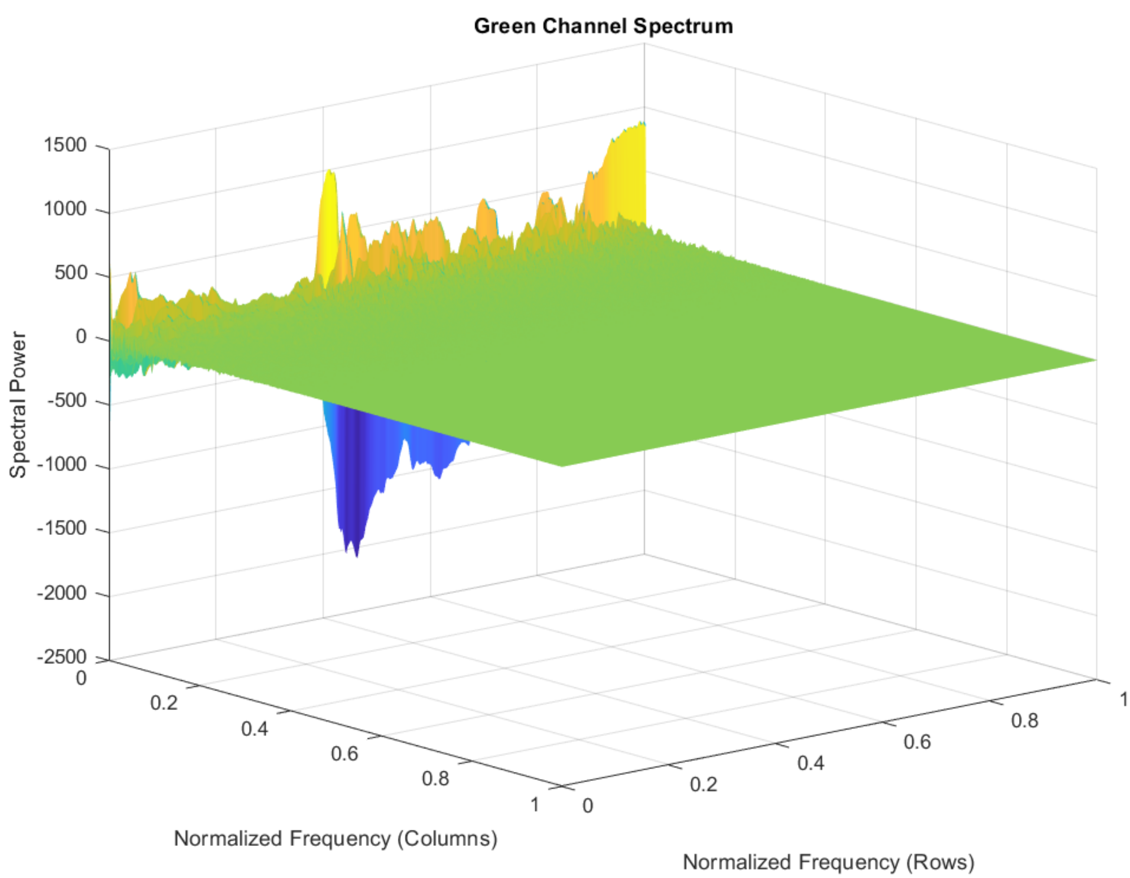


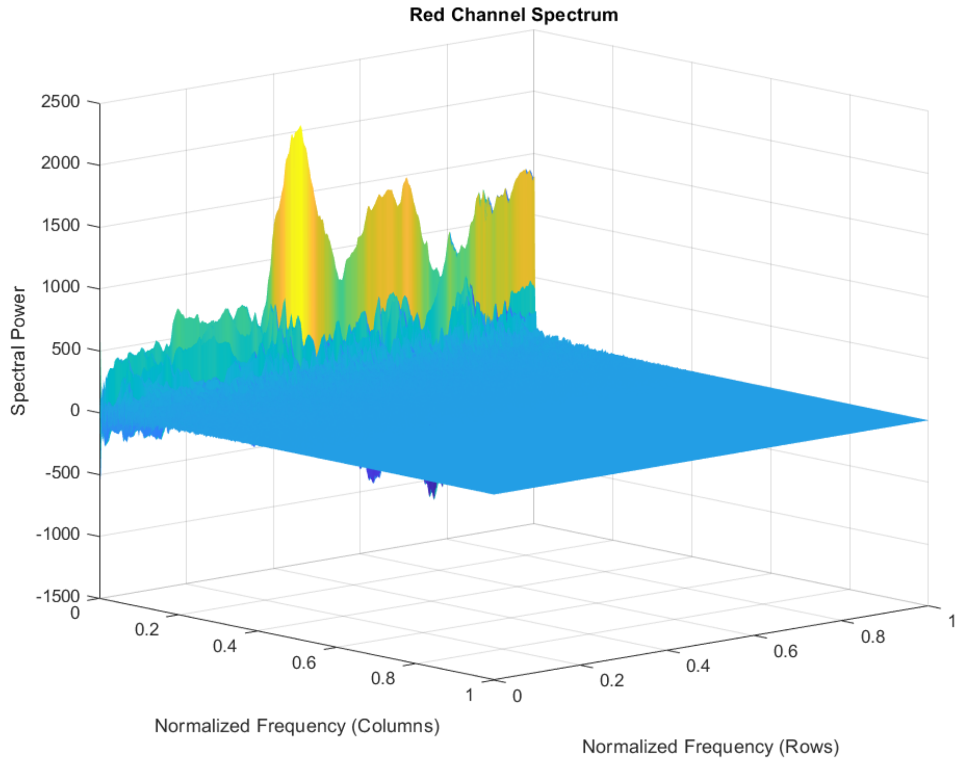
Semnal 2D (Imagine alb-negru):



Semnal 2D (imagine color rgb):

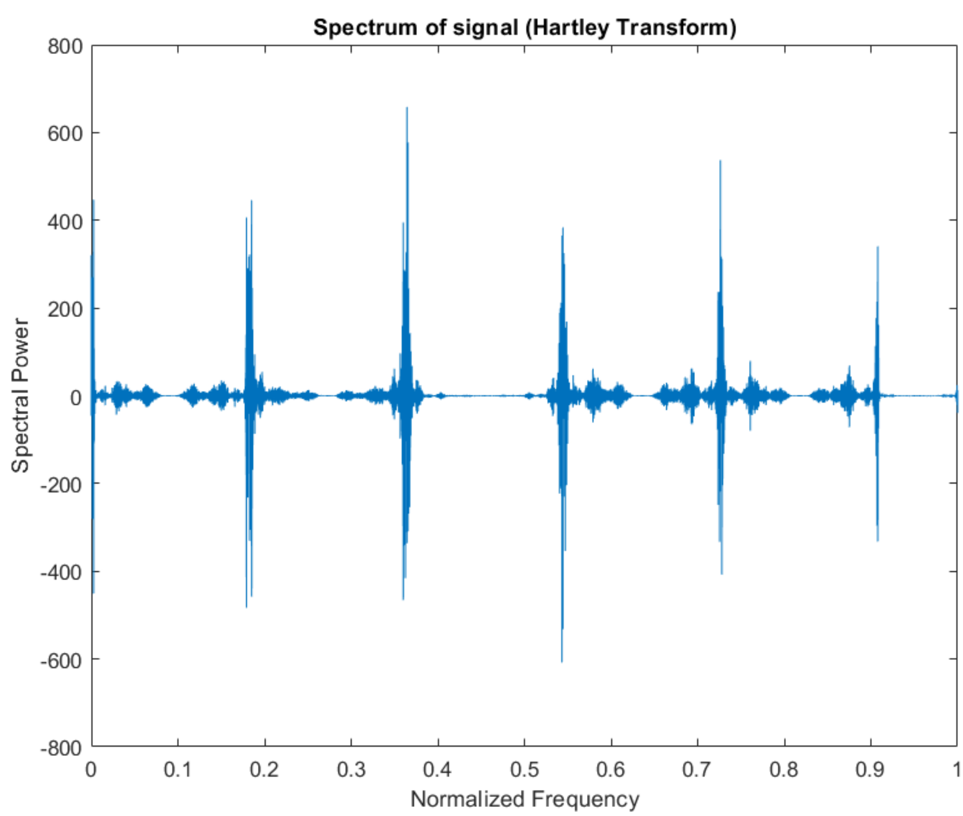




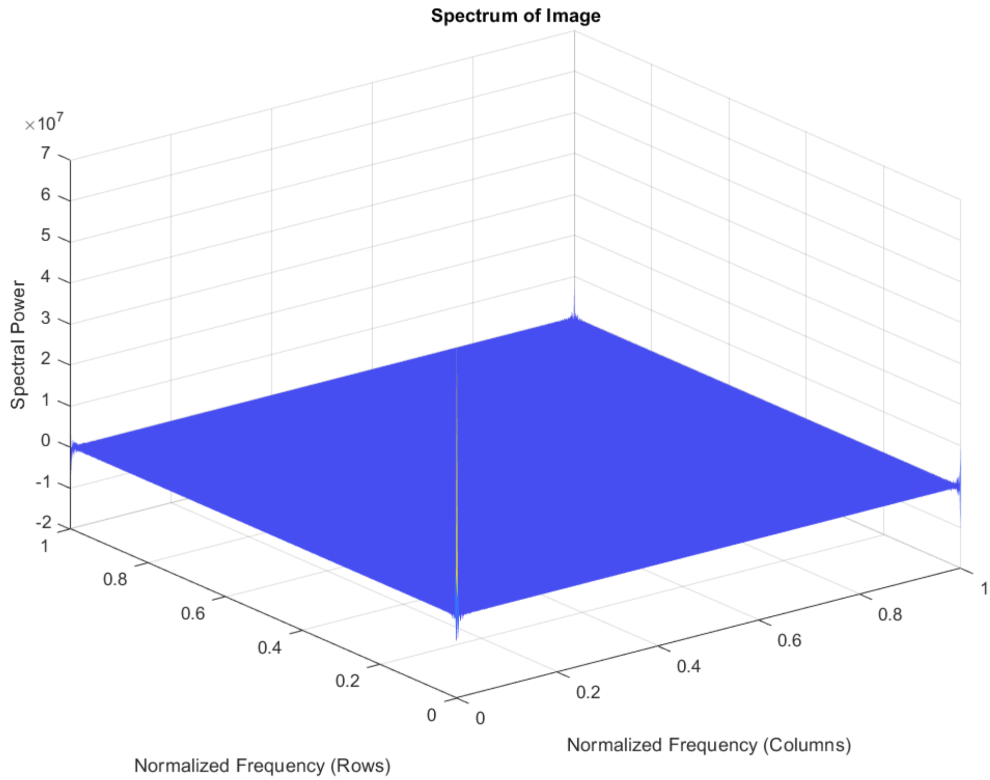


Transformata Hartley

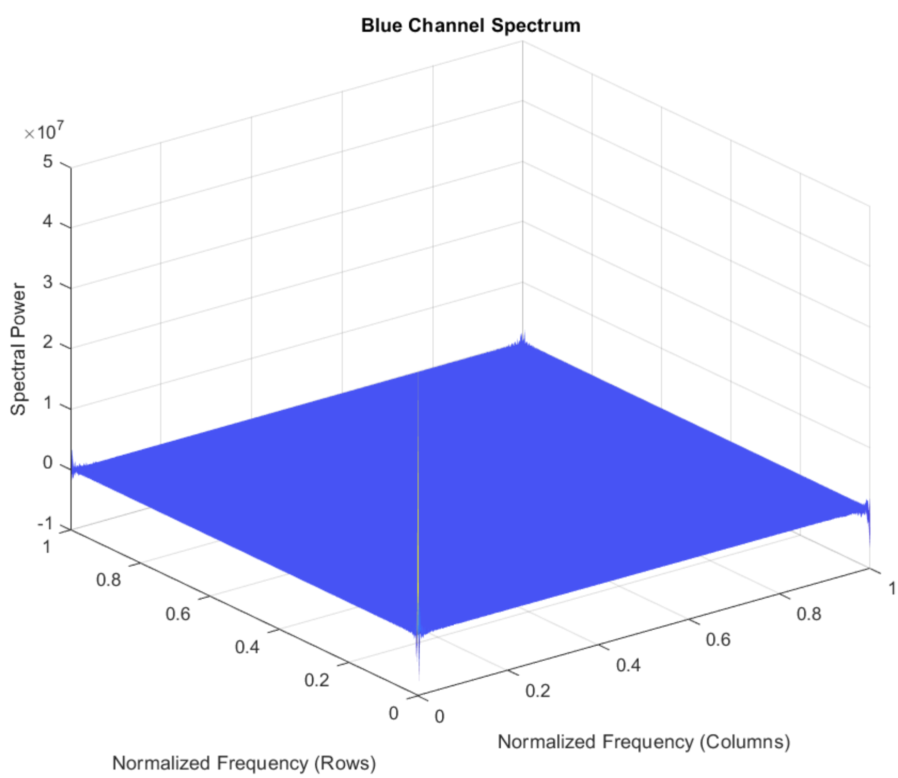
Semnal 1D:

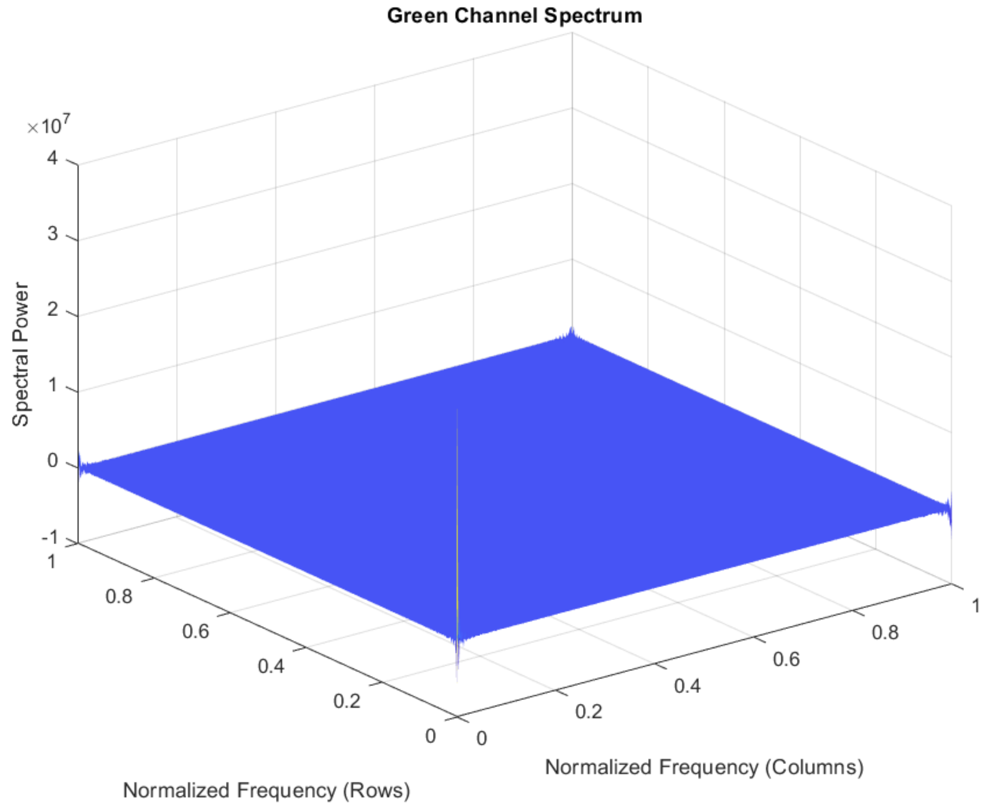


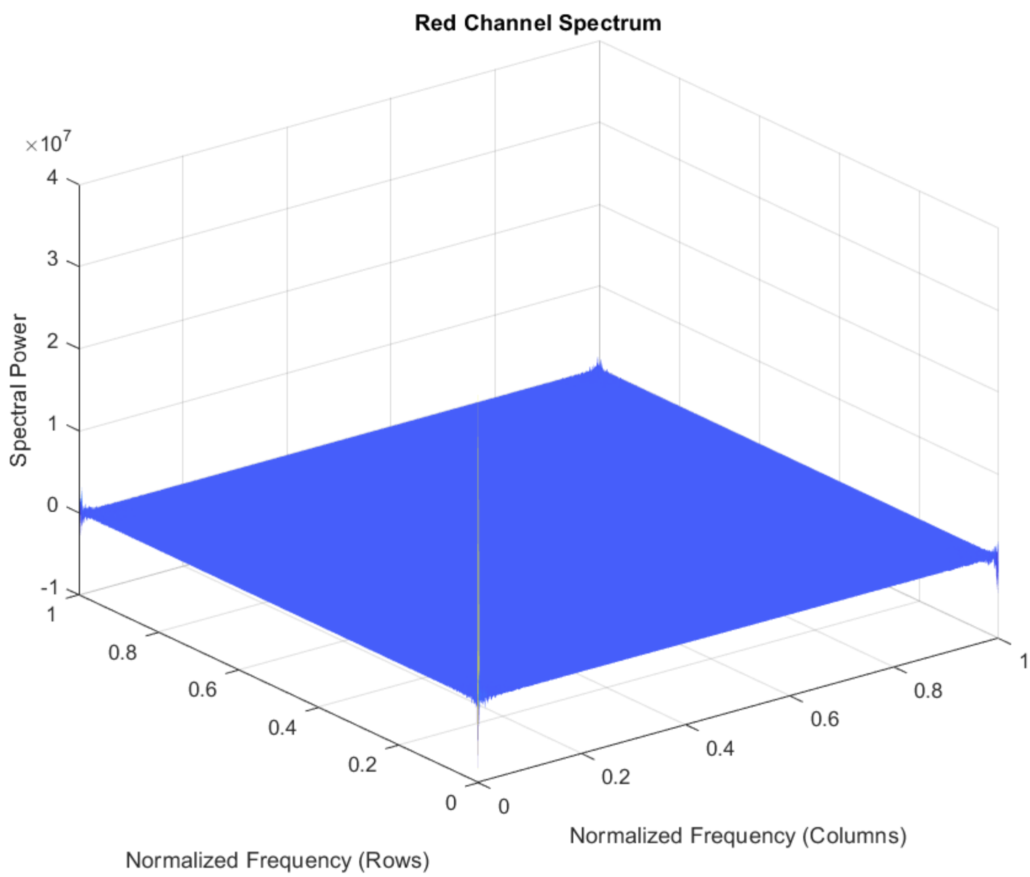
Semnal 2D (Imagine alb-negru):



Semnal 2D (imagine color rgb):

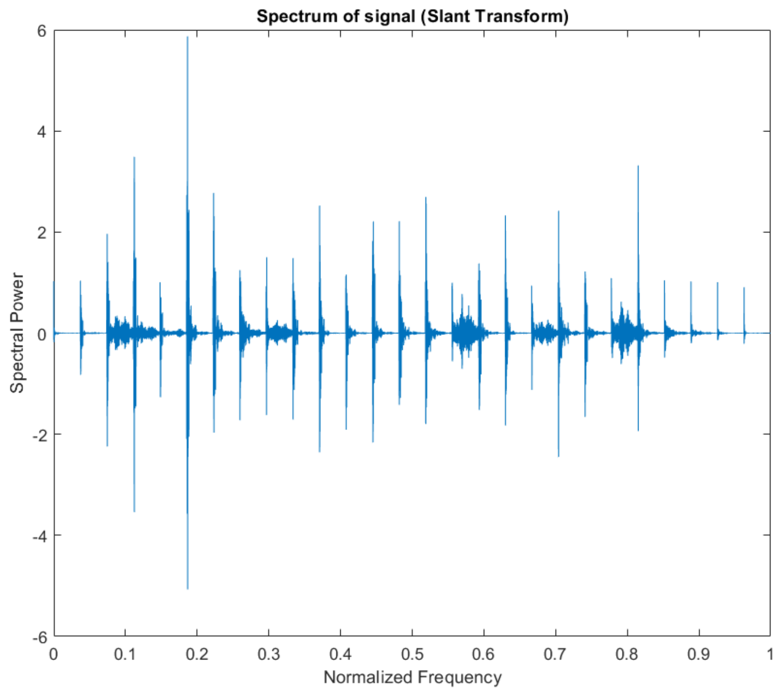



Green Channel Spectrum
×10^7
4
3
2
1
0
-1
Spectral Power
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Normalized Frequency (Rows)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Normalized Frequency (Columns)

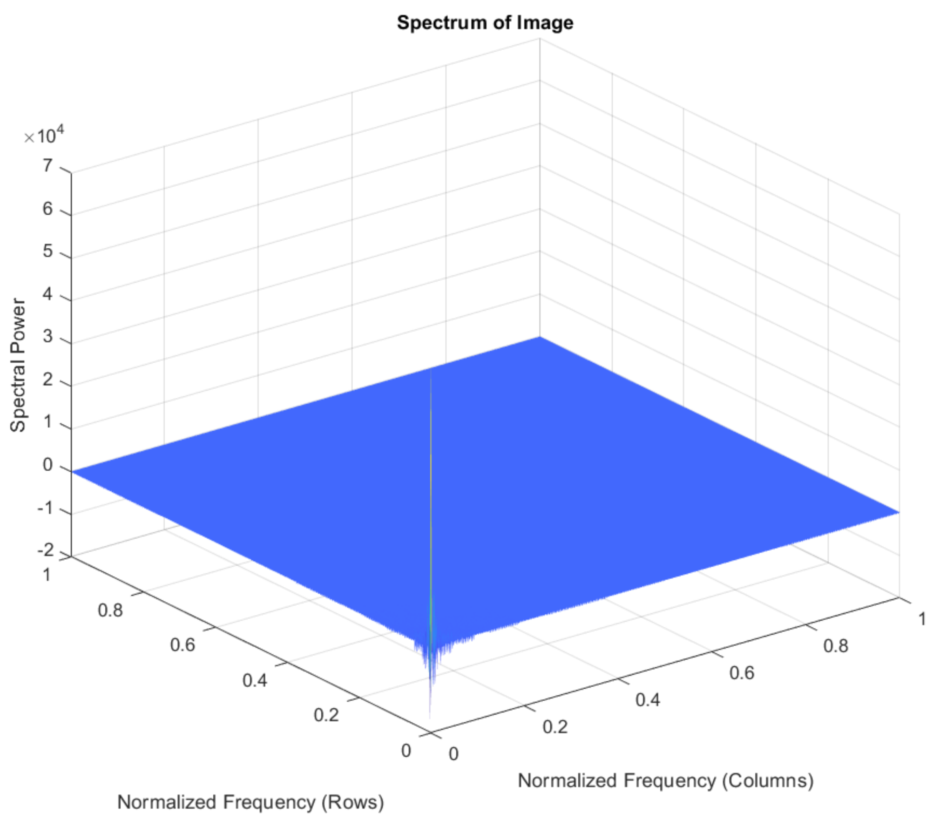

Red Channel Spectrum
×10^7
4
3
2
1
0
-1
Spectral Power
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Normalized Frequency (Rows)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Normalized Frequency (Columns)

Transformata Slant

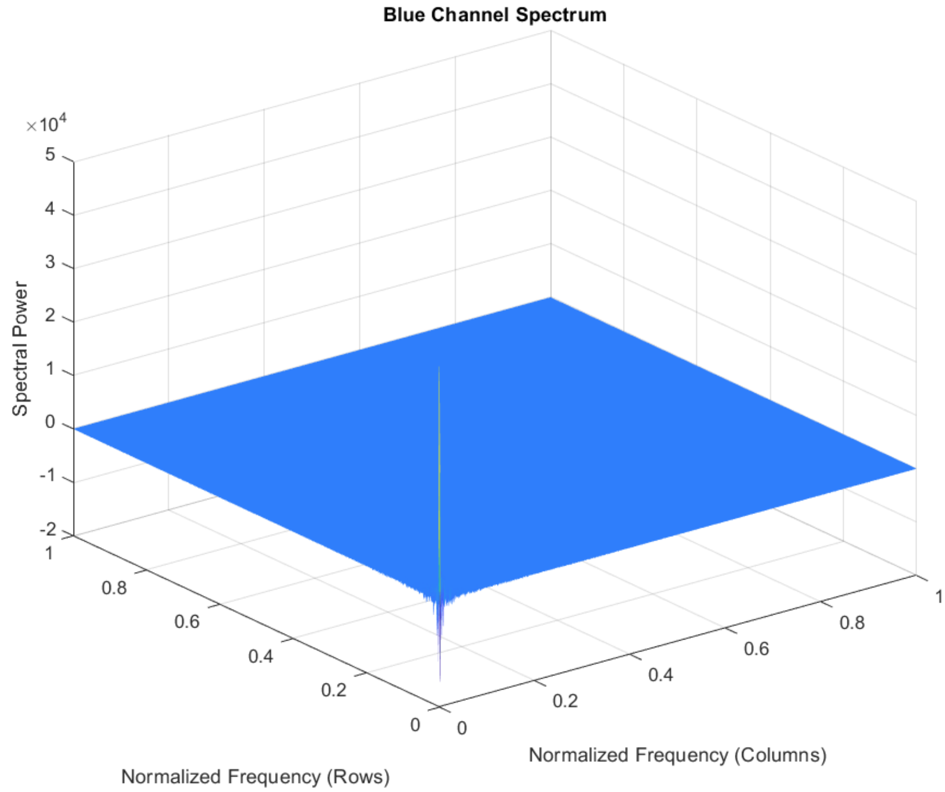
Semnal 1D:

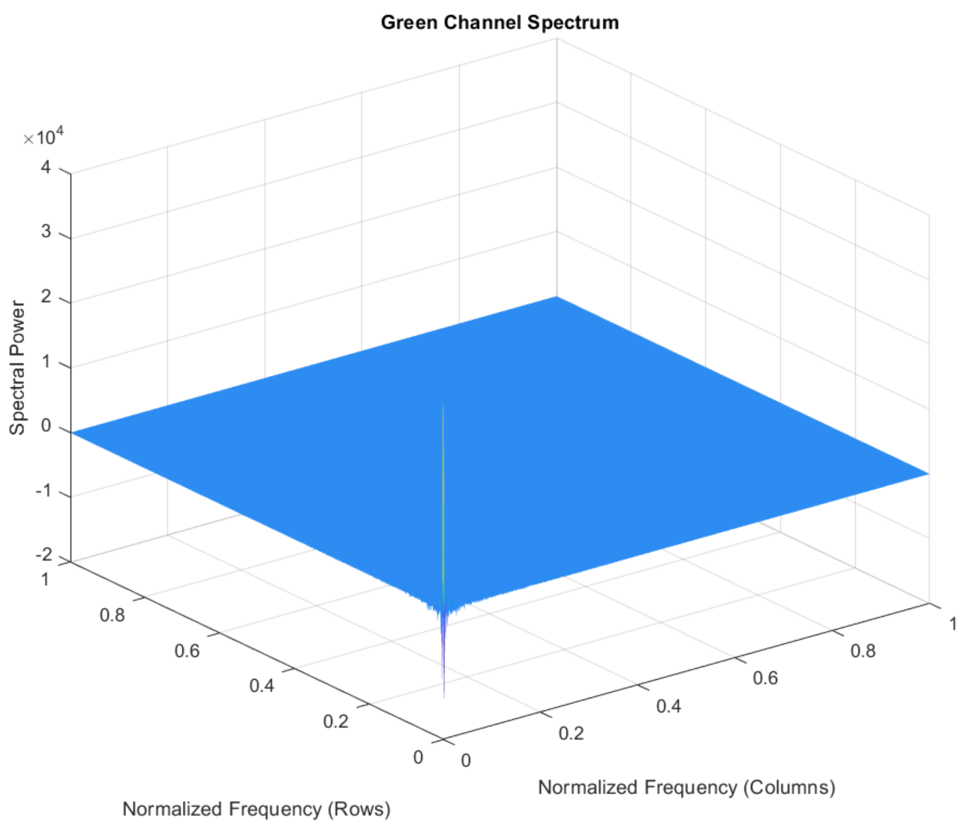


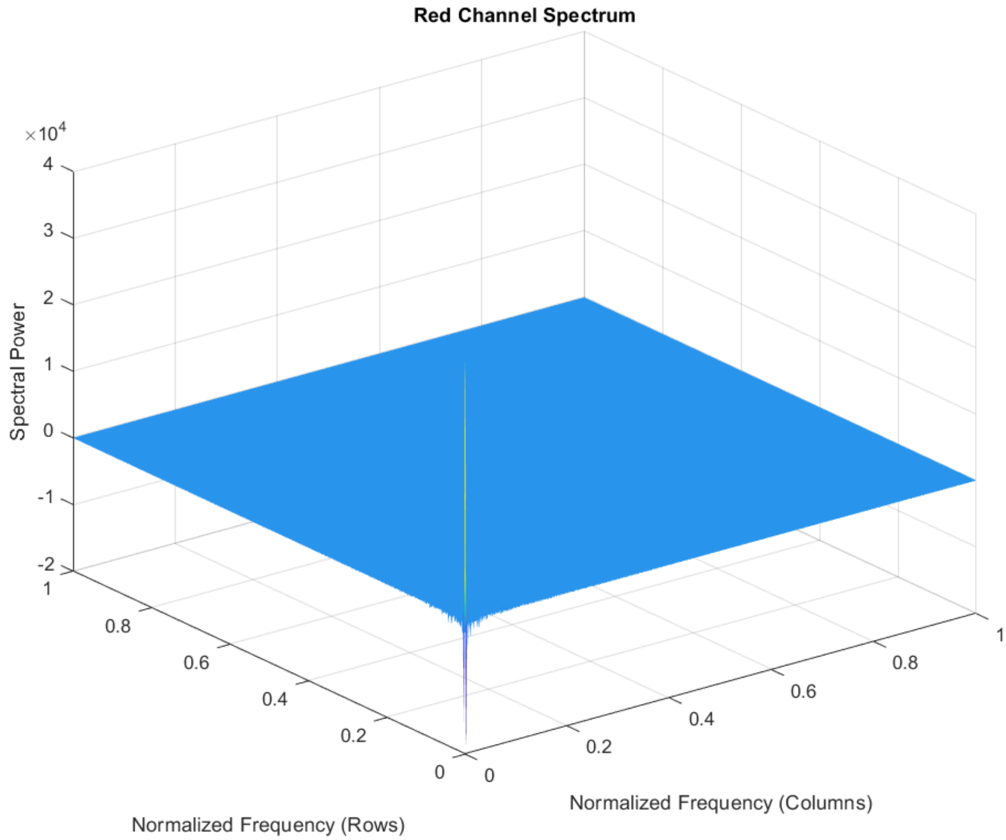
Semnal 2D (Imagine alb-negru):



Semnal 2D (imagine color rgb):





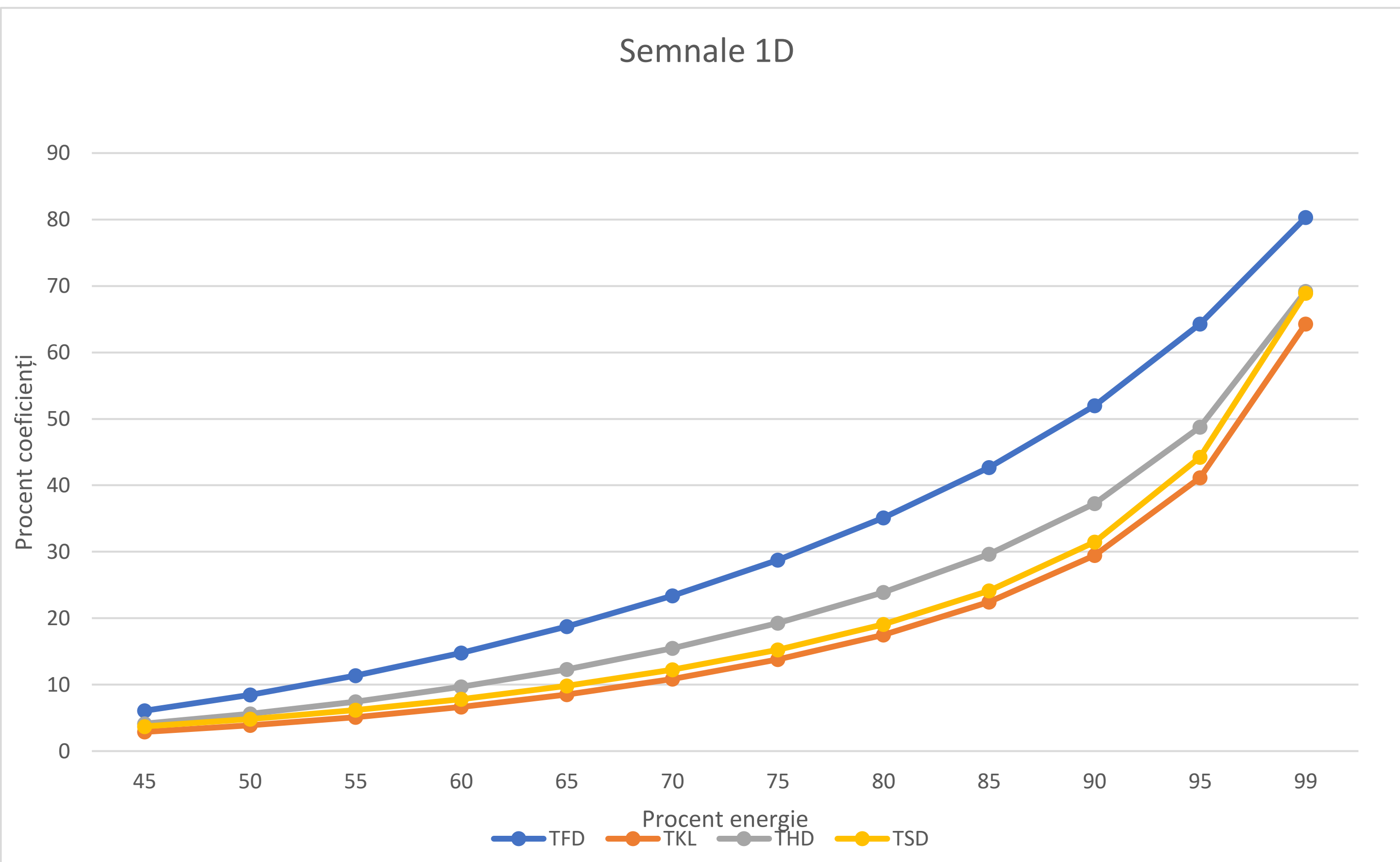


Red Channel Spectrum
×10^4
4
3
2
1
0
-1
-2
Spectral Power
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Normalized Frequency (Rows)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Normalized Frequency (Columns)

Testarea capacității de compresie a tuturor transformatelor s-a efectuat calculând procentul de coeficienți necesari, în cazul fiecărei transformate, pentru a ajunge la un anumit prag energetic (45%, 50%, 55%, 60%, 65%, 70%, 75%, 80%, 85%, 90%, 95%, 99%). Aceste procente au fost incluse în următoarele tabele, generându-se și niște grafice reprezentative:

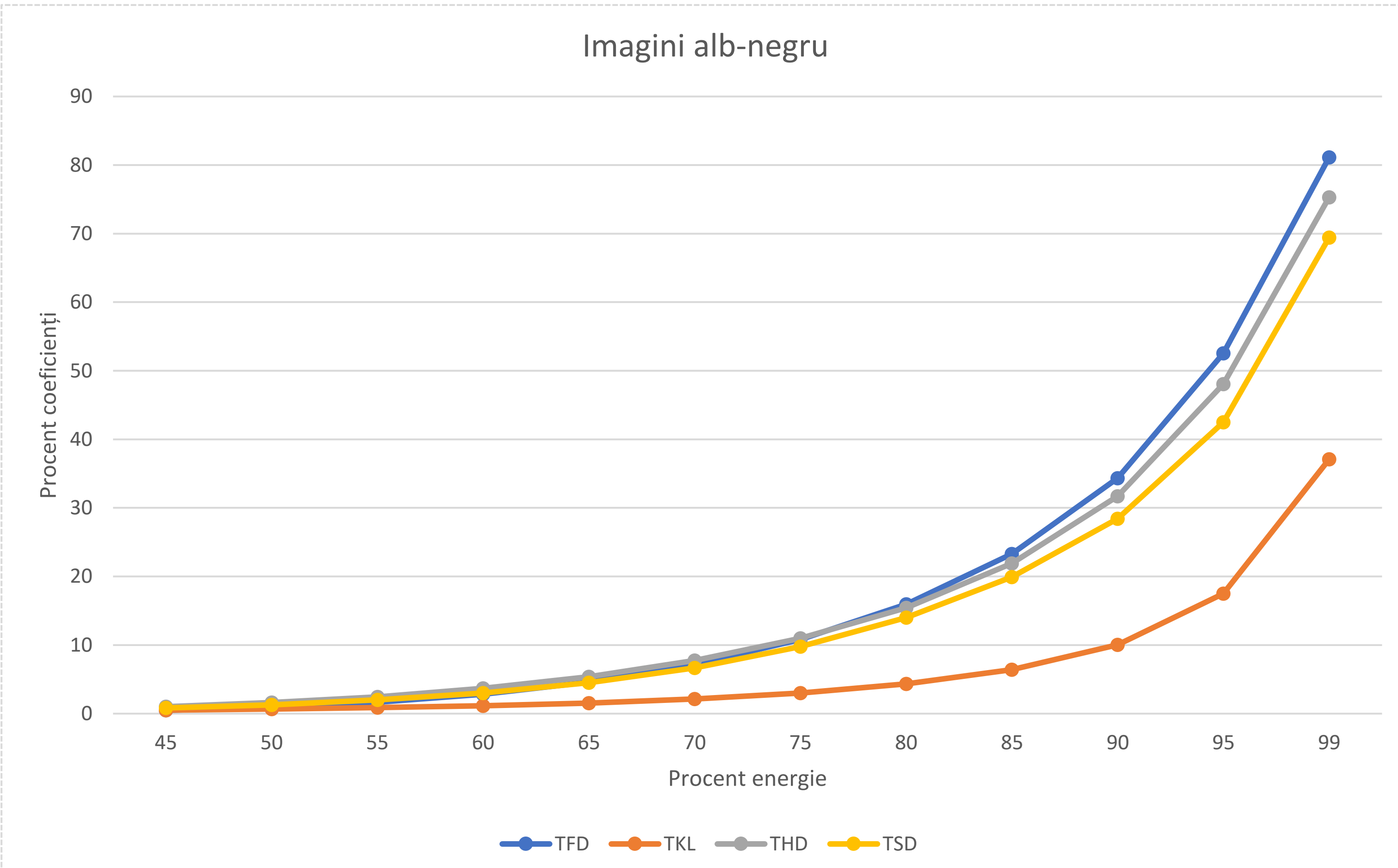
Semnal 1D:

	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	99
TFD	6.08	8.45	11.35	14.76	18.73	23.37	28.77	35.11	42.67	51.97	64.28	80.31
TKL	2.89	3.89	5.12	6.65	8.53	10.86	13.79	17.5	22.43	29.45	41.12	64.29
THD	4.14	5.63	7.46	9.67	12.31	15.46	19.25	23.87	29.65	37.28	48.74	69.21
TSD	3.72	4.82	6.17	7.81	9.81	12.25	15.25	19.06	24.12	31.48	44.21	68.93



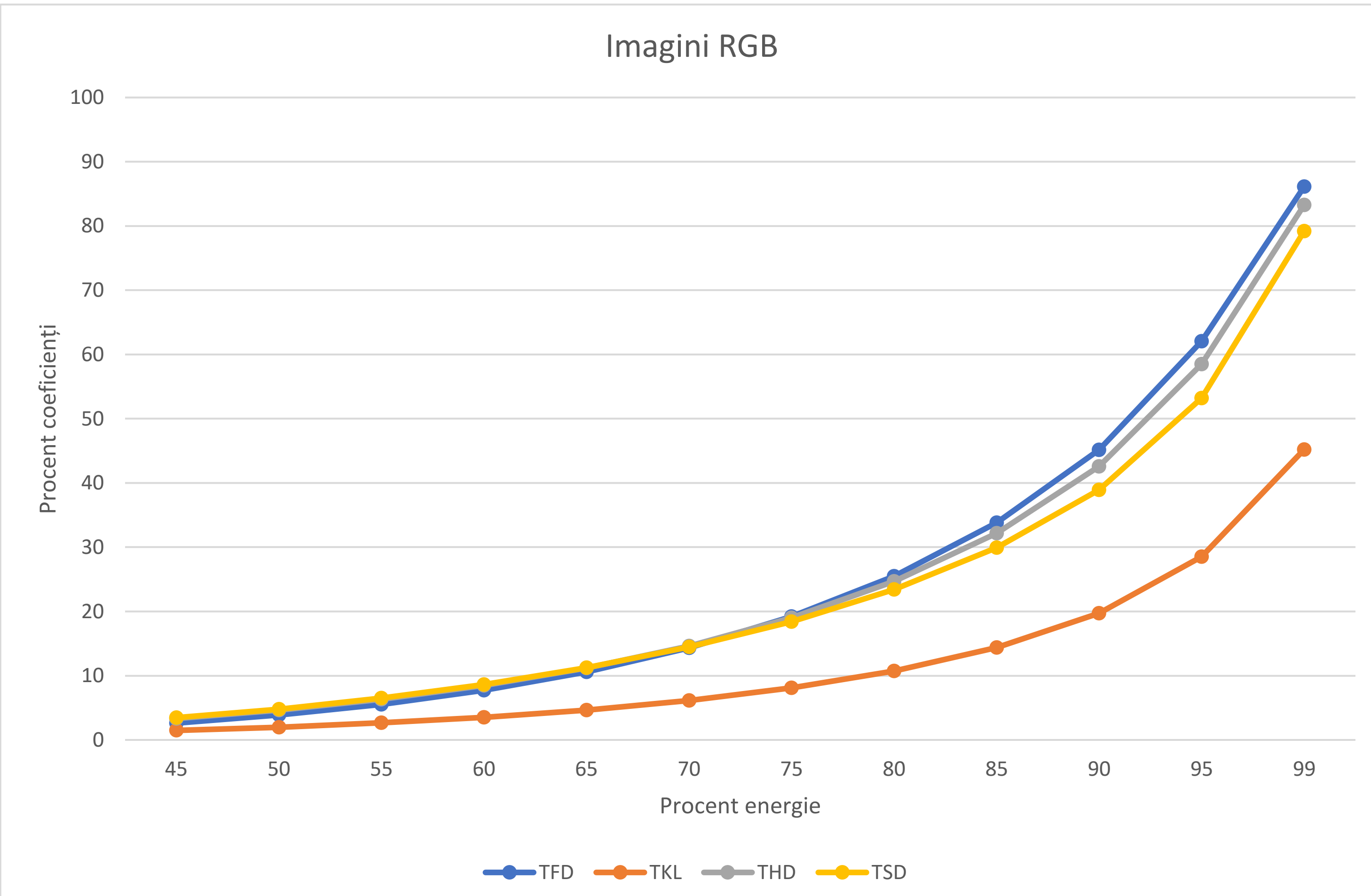
Semnal 2D (imagine alb-negru):

	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	99
TFD	0.48	0.93	1.66	2.82	4.6	7.17	10.8	15.93	23.27	34.32	52.56	81.13
TKL	0.51	0.66	0.87	1.15	1.55	2.14	3.01	4.32	6.43	10.04	17.49	37.09
THD	1.01	1.6	2.46	3.69	5.39	7.74	10.97	15.45	21.91	31.72	48.07	75.3
TSD	0.83	1.29	1.99	3.02	4.52	6.69	9.77	14.02	19.9	28.42	42.51	69.43



Semnal 2D (imagine rgb):

	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	99
TFD	2.62	3.88	5.55	7.73	10.6	14.33	19.18	25.5	33.81	45.16	62.05	86.13
TKL	1.48	1.99	2.65	3.52	4.65	6.13	8.1	10.74	14.39	19.7	28.5	45.21
THD	3.33	4.64	6.32	8.46	11.18	14.63	19.02	24.68	32.17	42.55	58.49	83.28
TSD	3.47	4.8	6.5	8.61	11.23	14.45	18.43	23.43	29.94	38.92	53.19	79.2



După cum se poate observa atât în tabele, cât și în grafice, transformata Karhunen-Loève este cea mai eficientă din punct de vedere al capacității de compresie, fiind capabilă să concentreze aceeași cantitate de energie într-un număr semnificativ redus de coeficienți. Chair dacă există excepții, mai ales la procentele mici de energie (sub 70%), la o privire de ansamblu asupra graficelor, putem afirma că un clasament al eficienței de compresie al tranformatelor este următorul: Karhunen-Loève, Slant, Hartley, Fourier Discret.

Dacă în cazul semnalelor 1D, TKL este relativ aproape ca performanță de Slant și Hartley, Fourier fiind în acest caz cea mai slabă, în cazul imaginilor, atât cele alb-negru cât și cele rgb, TKL are un avantaj considerabil, fiind de 2 sau chiar 3 ori mai eficientă, la anumite niveluri de energie, decât celelalte. Slant și Hartley, pierd astfel concurența pe care i-o făceau TKL-ului în cazul 1D, apropiindu-se în cazul imaginilor destul de mult de performanțele tranformatei Fourier, aceasta din urmă chiar întrecându-le la procentele mici de energie (sub 70%).

5. Concluzie

În concluzie, proiectul nostru a avut ca obiectiv analiza și implementarea a patru transformate ortogonale semnificative: Transformata Fourier Discretă, Transformata Karhunen-Loève, Transformata Hartley și Transformata Slant. În cadrul implementării și testării acestora, am abordat atât semnale 1D, cât și semnale 2D (imaginile alb-negru și cele color RGB).

Transformarea Fourier Discretă (TFD) s-a dovedit a fi rapidă și precisă, având performanțe notabile în procesarea semnalelor. Transformarea Karhunen-Loève (TKL) a evidențiat eficiența sa remarcabilă în compresia semnalelor, fiind superioară celorlalte transformate în ceea ce privește capacitatea de compresie.

Transformata Hartley și Transformata Slant oferă alternative valoroase, fiecare cu avantajele și particularitățile lor. Transformata Hartley, deși nu la fel de răspândită ca TFD, poate prezenta performanțe decente în anumite situații specifice. În schimb, Transformata Slant excelează în analiza și prelucrarea semnalelor și imaginilor cu caracteristici fractale.

În analiza inversabilității, toate transformările au reconstruit semnalul inițial cu precizie, cu erori insesizabile. Cu toate acestea, timpul de rulare a variat, cu TFD fiind cea mai rapidă, iar TKL având o performanță mai lentă, în special în cazul semnalelor 1D.

În evaluarea capacității de compresie, TKL a dominat, reușind să atingă același nivel de energie cu un număr semnificativ mai mic de coeficienți. Slant și Hartley au prezentat performanțe bune, iar TFD a fost cea mai slabă în acest aspect, mai ales în cazul imaginilor.

Astfel, în ansamblu, Transformarea Karhunen-Loève s-a dovedit a fi cea mai eficientă în compresia semnalelor, cu Transformata Înclinată (Slant) și Transformata Hartley oferind alternative valoroase, iar Transformarea Fourier Discretă fiind rapidă și versatilă. Aceste rezultate pot orienta deciziile în alegerea transformărilor potrivite în funcție de cerințele specifice ale aplicațiilor.

Bibliografie

1. Suport de curs PASTO
2. MEI Lab, NIT Rourkela. (2019, February 15). Lecture 21 : Slant Transform [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=DPo5BRng6Po