(18) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$p_A(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda^i$$

Beh: $\alpha_{n-1} = -\operatorname{spur} A$

Beweis:

$$p_A(\lambda) = \det(\underbrace{\lambda I - A}_{B \text{ mit Komponenten } b_{ij}})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \; b_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot b_{\sigma(n),n}$$

Für den Koeffizient von λ^{n-1} ist aus der Summe nur die Identität relevant, denn wenn die Permutation an einer Stelle von der Id. abweicht, dann auch an mind. einer weiteren Stelle (Vertauschungen)

$$\Rightarrow \quad p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - a_{ii}) + O(n-2)$$

Polynom vom Grad $n-2$, hier nicht relevant für α_{n-1}

also z.z.: $\prod_{i=1}^{n} (\lambda - a_{ii})$

$$= \lambda^n - \operatorname{spur} A \, \lambda^{n-1} + O(n-2)$$

Beweis durch Induktion: $\underline{n=2}$

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})$$

$$= \lambda^2 - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + a_{11}a_{22} \quad \checkmark$$

$\underline{n \rightsquigarrow n+1}$

$$(\lambda - a_{n+1,n+1})(\lambda^n - \operatorname{spur} A \, \lambda^{n-1} + O(n-2))$$

$$= \lambda^{n+1} - \operatorname{spur} A \, \lambda^n - a_{n+1,n+1}\lambda^n + O(n-1)$$

$$= \lambda^{n+1} - \lambda^{n} \operatorname{spur} A^{(n+1)} + O(n-1)$$

wobei A um eine dim. Erweitert wurde zu $A^{(n+1)}$

Im Falle $n=1$ gilt $\alpha_{n-1} = -\operatorname{tr} A$ auch:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - a_{11}) = \lambda - a_{11}\lambda^0$$

$$= \lambda - \operatorname{tr} A \quad , \text{ denn } A = (a_{11})$$

$\Rightarrow \quad \alpha_{n-1} = -\operatorname{tr} A$ für $n \in \mathbb{N}$ bel.

Jetzt kann man $p_A(\lambda)$ umschreiben, da man weiß dass die Eigenwerte die Nullstellen sind:

$$p_A(\lambda) = \lambda^n - \operatorname{tr} A \, \lambda^{n-1} + O(n-2)$$

$$= c_n \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) =: \tilde{p}_A(\lambda)$$

Polynomdivision:

$$\lambda^n - \operatorname{tr} A \, \lambda^{n-1} + O(n-2) : (\lambda - \lambda_n) = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}(\lambda_n - \operatorname{tr} A) + O(n-3)$$

$$\underline{-(\lambda^n - \lambda^{n-1}\lambda_n)}$$

$$\lambda^{n-1}(\lambda_n - \operatorname{tr} A) + O(n-2)$$

$$\underline{-(\lambda^{n-1}(\lambda_n - \operatorname{tr} A) + \tilde{O}(n-2))}$$

$$\tilde{\tilde{O}}(n-2)$$

D.h. wir haben als Ergebnis ein Polynom mit gleicher Struktur, und können dies n-mal ausführen:

$$\Big(\big(p_A(\lambda) : (\lambda - \lambda_n)\big) : (\lambda - \lambda_{n-1}) : \ldots \Big) : (\lambda - \lambda_1) = 1$$

Darstellung $\tilde{p}_A(\lambda)$ als Produkt

Also $1 = \lambda^{n-n} + \lambda^{n-1-n}(\lambda_n + \lambda_{n-1} + \dots + \lambda_1 - tr A)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - tr A = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = spur(A)$ ∅ ✓

10/10

Schöner Beweis!