Dr. Michael Lehn
Constantin Greif

Wintersemester 2023/2024
Blatt 05

Übungen zur Höheren Mathematik III

— $\sum$ 40 Punkte —

17. Gegeben sei die Gleichung:

$$6x_1^2 + 9x_2^2 + 12x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_2x_3 - 18x_2 + 18x_3 + 63 = 0.$$

a) Geben Sie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ an, so dass sich die Gleichung als

$$x^T Ax + b^T x + c = 0$$

formulieren lässt.

b) Bestimmen Sie Konstanten a, b, c, d, e, f, g sowie eine orthogonale Matrix T, so dass für

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} := T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\begin{aligned} 6x_1^2 + 9x_2^2 + 12x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_2x_3 - 18x_2 + 18x_3 + 63 = 0 \\ \Leftrightarrow a\tilde{x}_1^2 + b\tilde{x}_2^2 + c\tilde{x}_3^2 + d\tilde{x}_1 + e\tilde{x}_2 + f\tilde{x}_3 + g = 0. \end{aligned}$$

(10 Punkte)

18. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A. Zeigen Sie

$$\operatorname{spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

in dem Sie den Koeffizienten von λ^{n-1} des charakteristischen Polynoms untersuchen. Sie dürfen ausnutzen, dass ein Polynom $P(z) = \sum_{i=0}^{n} c_i z^i$ in $\mathbb{C}$ vom Grad $n \geq 1$ immer als $P(z) = c_n \prod_{i=1}^{n}(z - \zeta_i)$ dargestellt werden kann.

(10 Punkte)

19. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume folgender Matrizen. Geben Sie außerdem bei jedem Eigenwert die geometrische und algebraische Vielfachheit an.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

(10 Punkte)

20. Berechnen Sie mit Hilfe einer Diagonalisierung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \\ -6 & -6 & -7 \end{pmatrix}^{1001} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \\ -6 & -6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \\ -6 & -6 & -7 \end{pmatrix}}_{\text{1001 Faktoren}}$$

(10 Punkte)