Problema Sturm-Liouville. Funcţia Green

Fie $r \in C^1([0,l])$, $r(x) > 0$, $p \in C([0,l])$, fie $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, \infty)$ cu $a_1 + a_2 > 0$ şi $b_1 + b_2 > 0$ $(l > 0)$.

Definiţie. Se numeşte soluţie a *Problemei Sturm-Liouville*

$$-(r(x)u')' + p(x)u = 0 \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} a_1 u(0) - a_2 u'(0) = 0 \\ b_1 u(l) + b_2 u'(l) = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

o funcţie $\varphi : [0,l] \to \mathbf{R}$ de clasă C^2 care verifică (3.1) şi satisface condiţiile (3.2), numite condiţii la limită.

Observaţie. Ecuaţia (3.1) reprezintă forma autoadjunctă a ecuaţiei diferenţiale liniare de ordin 2. Problema Sturm-Liouville se defineşte pentru orice ecuaţie diferenţială de ordin 2, iar condiţiile (3.2) sunt în general date în capetele unui interval $[0,l]$

Fie

$$\mathcal{D}_L \stackrel{def}{=} \{u \in C^2(0,l) \cap C^1([0,l]) |\ u'' \in L^2(0,l) \text{ şi } u \text{ verifică } (3.2)\}$$

şi

$$L : \mathcal{D}_L \to C((0,l)), L(u) = -(ru')' + pu, \forall x \in [0,l]. \tag{3.3}$$

Ne propunem ca, în continuare, să găsim soluţii pentru problema la limită

$$Lu = f, \quad u \in \mathcal{D}_L \tag{3.10}$$

cu $f \in C(0,l) \cap L^2(0,l)$ şi L definit în (3.3).

Definiţie. Se numeşte funcţie Green a operatorului L relativ la condiţiile (3.2) o funcţie $\mathcal{G} : [0, l] \times [0, l] \to \mathbf{R}$ cu proprietăţile:

(G 1) $\mathcal{G}$ este continuă şi $\mathcal{G}$ este de clasă C^2 în $\{(x, y) \in [0, l] \times [0, l] | 0 \leq x \leq y \leq l\}$ şi în $\{(x, y) \in [0, l] \times [0, l] | 0 \leq y \leq x \leq l\}$ (derivatele parţiale sunt continue la frontieră numai pe direcţii din interiorul celor două triunghiuri).

(G 2) $\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{G}(y, x)$

(G 3) $\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(x + 0, x) - \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(x - 0, x) = -\dfrac{1}{r(x)}, \quad \forall x \in [0, l]$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(x, x + 0) - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(x, x - 0) = \frac{1}{r(x)}, \quad \forall x \in [0, l]$$

(G 4) $L_x \mathcal{G}(x, y) = 0 \ \forall x, y \in [0, l],\ x \neq y.$

(G 5) $a_1 \mathcal{G}(0, y) - a_2 \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(0, y) = 0 \ \forall y \in [0, l]$

$$b_1 \mathcal{G}(l, y) + b_2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(l, y) = 0 \ \forall y \in [0, l]$$

(G 6) $u(x) = \displaystyle\int_0^l \mathcal{G}(x, y) f(y) dy$ este soluţie a (3.10).

Teorema 3.1.4. *Fie L definit în (3.3). Dacă are loc ker $L = \{0\}$ atunci funcţia Green există şi Problema (3.10) are soluţie unică.*

Demonstraţia teoremei va avea în vedere rezolvarea (3.10) şi pentru asta se va folosi metoda variaţiei constantelor. Aceasta conduce la construcţia unei funcţii $\mathcal{G}$ cu proprietăţile dorite.

Înainte de a trece la demonstrarea Teoremei 3.1.4 vom face câteva observaţii simple.

Fie φ_1 soluţie neidentic nulă a

$$Lu = 0,\ a_1 u(0) - a_2 u'(0) = 0, \tag{3.11}$$

şi φ_2 soluţie neidentic nulă a

$$Lu = 0,\ b_1 u(l) + b_2 u'(l) = 0. \tag{3.12}$$

Teorema de existenţă pentru soluţia Problemei Cauchy ne asigură că există φ_1 şi φ_2 de clasă C^2 pe $[0, l]$ neidentic nule care satisfac (3.11), respectiv (3.12).

Definim

$$\mathcal{G}(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{r(0)W(0)}\varphi_1(x)\varphi_2(y) & \text{pentru} \quad 0 \le x \le y \le l \\ -\dfrac{1}{r(0)W(0)}\varphi_1(y)\varphi_2(x) & \text{pentru} \quad 0 \le y \le x \le l \end{cases} \tag{3.16}$$

unde

$$W(x) = W[\varphi_1, \varphi_2](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}$$

Corolar 3.1.4.1. *Fie L definit în (3.3) cu $\ker L = \{0\}$. Atunci $u \in \mathcal{D}_L$ este soluţie a $Lu = \lambda u + f$, $\lambda \in \mathbf{R}$, dacă şi numai dacă $u \in C([0,l])$ şi*

$$u(x) = \lambda \int_0^l \mathcal{G}(x,y)u(y)dy + \int_0^l \mathcal{G}(x,y)f(y)dy, \quad \forall x \in [0,l]. \tag{3.17}$$

Caz particular *Fie L definit în (3.3) cu $\ker L = \{0\}$. Atunci $u \in \mathcal{D}_L$ este soluţie a $Lu = f$, dacă şi numai dacă $u \in C([0,l])$ şi*

$$u(x) = \int_0^l \mathcal{G}(x,y)f(y)dy, \quad \forall x \in [0,l]. \tag{3.17bis}$$

Aplicatie

Folosind funcţia Green găsiţi soluţia Problemei la limită

$$x'' + x = \sin 2t, \quad x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$