2.2 Ecuaţii cu nucleu de rang finit

Un alt tip particular important de ecuaţii integrale este cel în care operatorul K are *rang finit*. Această situaţie apare în cazul în care nucleul (numit şi *nucleu degenerat*) are forma

$$k(x,y)=\sum_{j=1}^{N}\varphi_j(x)\psi_j(y) \tag{2.21}$$

cu $\varphi_j,\psi_j:\bar{G}\to\mathbf{R}$ funcţii continue, fiecare din sistemele $\{\varphi_j\}_j$, $\{\psi_j\}_j$ fiind liniar independent (în cazul în care nu sunt, putem aduce nucleul la un nucleu generat de sisteme liniar independente).

Ecuaţia (2.2) revine la

$$u(x)=\lambda\sum_{j=1}^{N}\varphi_j(x)\int_G\psi_j(y)u(y)dy+f(x)=\lambda\sum_{j=1}^{N}c_j\varphi_j(x)+f(x)$$

cu

$$c_j=\int_G\psi_j(y)u(y)dy=(u,\psi_j)=\lambda\sum_{k=1}^{N}c_k(\varphi_k,\psi_j)+(f,\psi_j),\ j=1,\ldots,N.$$

Fie $a_{jk}=(\varphi_k,\psi_j)$, $b_j=(f,\psi_j)$. Se obţine sistemul de ecuaţii liniare

$$c_j=\lambda\sum_{k=1}^{N}a_{jk}c_k+b_j,\quad j=1,\ldots,N. \tag{2.22}$$

Fie $A=[a_{jk}]_{j,k}$, $b=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_N\end{pmatrix}$, $c=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_N\end{pmatrix}$. Atunci (2.22) devine

$$c=\lambda Ac+b. \tag{2.23}$$

Propoziţia 2.2.9. *Fie $(c_1,\ldots,c_n)$ o soluţie a lui (2.23) şi*

$$u(x)=\lambda\sum_{j=1}^{N}c_j\varphi_j(x)+f(x). \tag{2.24}$$

Atunci u este soluţie a (2.2) pentru k definit în (2.21).

Rezolvarea sistemului (2.22) se face prin metode algebrice obişnuite: dacă $\det(I - \lambda A) \neq 0$ soluţia este $c = (I - \lambda A)^{-1} b$ şi substituind în (2.24) componentele vectorului $c = (c_1, \ldots, c_N)$ se obţine

$$u(x) = \frac{\lambda}{\det(I - \lambda A)} \int_G \left[\sum_{j,k=1}^{N} \Gamma_{jk}(\lambda) \varphi_j(x) \psi_k(y) f(y) \right] dy + f(x)$$

Problemă rezolvată. *Să se studieze ecuaţia cu nucleu degenerat*

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (y \sin x + \cos y)\, u(y)\, dy + ax + b. \qquad \lambda \neq \frac{1}{2}$$

Rezolvare. Ecuaţia este echivalentă cu

$$\begin{aligned} u(x) = \lambda \sin x \textstyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} y u(y)\, dy + \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y\, u(y)\, dy + ax + b = \\ = \lambda \sin x\, c_1 + \lambda\, c_2 + ax + b. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Înmulţim (2.27) cu x şi integrăm. Obţinem:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x u(x)\, dx =$$

$$= \lambda c_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin x dx + \lambda c_2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x (ax + b)\, dx. \tag{2.28}$$

Ţinând cont de egalităţile

Ţin

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin x dx = 2, \ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x dx = 0, \ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 dx = \frac{\pi^3}{12},$$

din (2.28) rezultă

$$c_1(1-2\lambda) = \frac{a\pi^3}{12}. \tag{2.29}$$

Înmulţim apoi (2.27) cu $\cos x$ şi integrăm. Obţinem:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x u(x)\, dx =$$

$$= \lambda c_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \sin x dx + \lambda c_2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,(ax+b)\, dx,$$

sau ţinând cont de egalităţile

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \sin x dx = 0,\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx = 2,\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos x dx = 0,$$

deducem

$$c_2(1-2\lambda) = 2b \tag{2.30}$$

Dacă $\lambda \neq \frac{1}{2}$, din (2.27), (2.29) şi (2.30) rezultă

$$u(x) = \frac{a\pi^3\lambda}{12(1-2\lambda)} \sin x + ax + \frac{b}{1-2\lambda}.$$