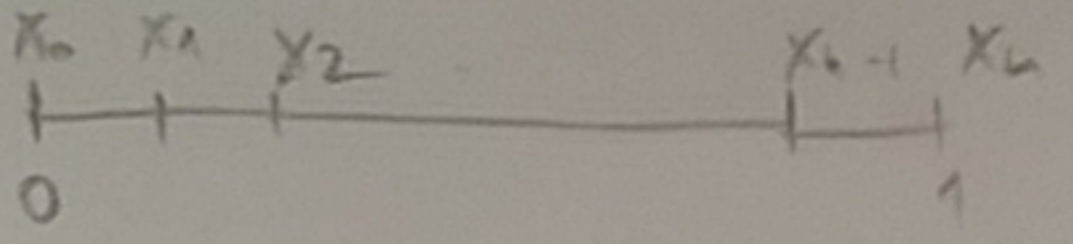
Curs 10

Exemplu MEF cazul 1d (vezi S. Micu, Introducere în Metoda elementului finit) 1

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{în } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}, \quad f \text{ funcție continuă}$$



$h = \frac{1}{n}$, $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0 \dots n$

Vom aproxima u folosind funcții continue, liniare pe porțiuni, nule în capete.

Definim

$$V_h = \{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ continuă}, \ \varphi|_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ liniară}, \ \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$$

$V_h \subset V = H_0^1(\Omega)$

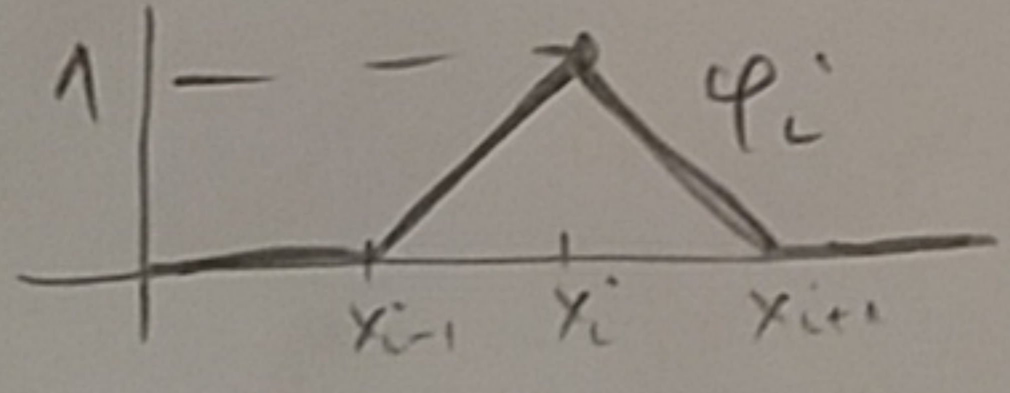
Problema Galerkin: aflați $u_h \in V_h$ așa ca

$$\int_\Omega u_h' v_h' = \int_\Omega f v_h \quad \forall v_h \in V_h.$$

În acest caz $\dim V_h = n-1$

Definim următoarea bază algebrică în V_h

Pt. fiecare nod interior x_i definim $\varphi_i \in V_h$



adică $\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases}$, $j = 1 \dots n-1$

Formulă analitică pt φ_i

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h} & [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h} & (x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Soluția aproximantă u_h se scrie

$$u_h = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_{n-1}\varphi_{n-1}$$

unde coeficienții $c_1, \dots, c_{n-1}$ satisfac sistemul

$$A\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = F$$

cu $A = (A_{ij})_{i,j=1..n-1}$ $\qquad A_{ij} = \int_0^1 \varphi_j'\varphi_i'\,dx$

și $F = (F_i)_{i=1..n-1}$ $\qquad F_i = \int_0^1 f\varphi_i\,dx$

Evident că dacă x_i și x_j nu sunt noduri vecine atunci $\varphi_j'\varphi_i' = 0$ și ca atare, în acest caz $A_{ij} = 0$

Dacă x_i, x_j sunt noduri vecine, spre exemplu x_i, x_{i+1} atunci vom avea că

$$A_{i\,i+1} = \int_0^1 \varphi_{i+1}'\varphi_i' = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}'\varphi_i' = \int_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{1}{h^2}\,dx = -\frac{1}{h}$$

Similar $A_{i+1,i}$

Dacă x_i, x_j sunt noduri identice, $i = j$, vom avea că

$$A_{ii} = \int_0^1 \varphi_i'\varphi_i' = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_i')^2 + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_i')^2 = \frac{2}{h}$$

Se poate deduce așadar că în cazul nodurilor echidistante matricea A va avea forma $\longrightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & \dots & & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ 0 & \dots & & 0 & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} \end{pmatrix}$$

Matricea e inversabilă, tridiagonală iar sistemul care rezultă poate fi rezolvat foarte eficient

Termenul liber F_i

$$F_i = \int_0^1 f \varphi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \cdot \varphi_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f \varphi_i =$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \, \frac{x - x_{i-1}}{h} \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f \, \frac{x_{i+1} - x}{h} \, dx$$

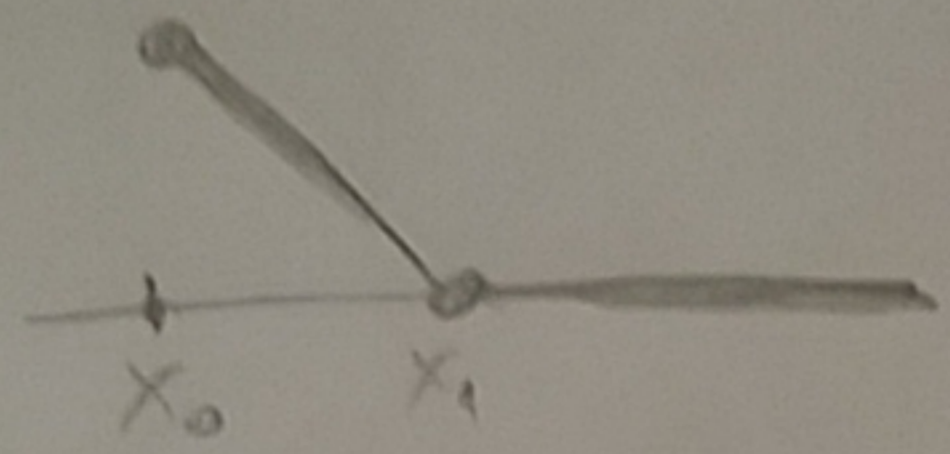
Fiecare din cele 2 integrale se aproximează folosind o metodă de cuadratură care ar trebui să aibă un ordin de convergență mai mare ca ordinul MEF în acest caz (adică 2). Formule concrete de cuadratură vor fi ilustrate la laborator.

Se rezolvă sistemul și se află coeficienții

$c_1, \dots, c_{n-1}$

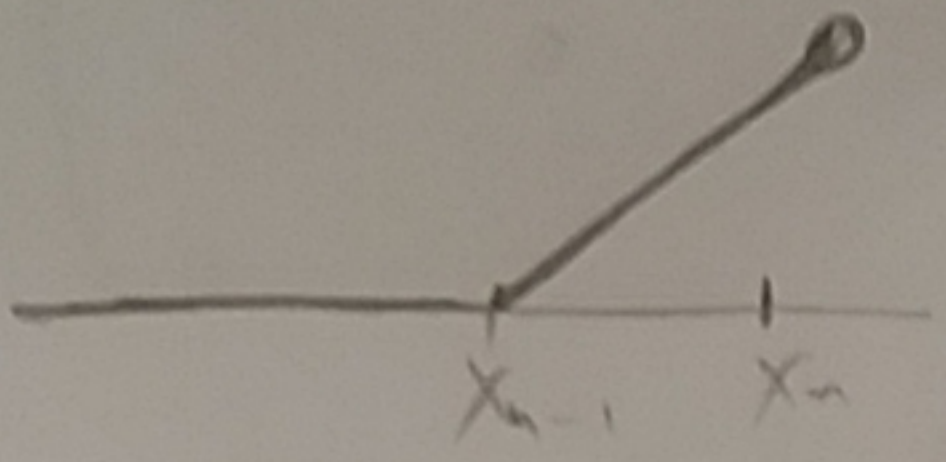
În practică, pentru a trata simplu și condiții nenule la frontieră se mai adaugă în baza $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ 2 funcții atașate nodurilor x_0, x_n, anume

φ_0



$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h} & [x_0, x_1] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

φ_n



$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{h} & [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

iar soluția u_h se scrie sub forma

$$u_h = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \dots + c_{n-1}\varphi_{n-1} + c_n\varphi_n$$

unde $c_0 = c_n = 0$

Matricea A și termenul liber F se calculează după formulele anterioare, adică

$$A = (A_{ij})_{i,j=0..n}$$

$$F = (F_j)_{j=0..n}$$

$$A_{ij} = \int_0^1 \varphi_j' \varphi_i', \quad F_i = \int_0^1 f \varphi_i \quad i,j = 0..n$$

cu mențiunea că prima și ultima linie a lui A vor fi puse egale cu

$$(1, 0, \dots, 0)$$

$$(0, 0, \dots, 1)$$

iar în termenul liber F prima și ultima componentă vor fi egalate cu 0. Așadar,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & \cdots & & 0 \\ & & & & & & \\ 0 & \cdots & & & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Această formă a sistemului este echivalentă cu forma găsită anterior, în sensul că rezolvând găsim $c_0 = c_n = 0$ iar $c_1, \dots, c_{n-1}$ sunt identici cu cei ce se obțin rezolvând sistemul 6

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & \cdots & 0 \\ & & & & \\ & & & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \end{bmatrix}$$

După cum am spus anterior, această formă a problemei este foarte utilă în momentul în care condițiile la frontieră nu mai sunt nule

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{pe } [0,1] \\ u(0) = \alpha, & u(1) = \beta \end{cases}$$

În acest caz căutăm $u_h \in X_h^1$ (funcție continuă, liniară pe porțiuni $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0 \dots n-1$), astfel ca $u_h(0) = \alpha$, $u_h(1) = \beta$ și

$$\int_0^1 u_h v_h = \int_0^1 f v_h \quad \forall v_h \in V_h$$

u_h se va scrie

$$u_h = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n$$

unde $c_0, c_1, \dots, c_n$ vor satisface sistemul cu matricea A construită anterior

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & 0 \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & \dots & & & 0 \\ & & & \dots & & & & \\ & & & \dots & & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} \\ 0 & & & \dots & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

și termen liber

7

$$F = \begin{bmatrix} \alpha \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ \beta \end{bmatrix}$$

așadar, valorile lui u în 0 și 1 se vor introduce în locul lui F_0 respectiv F_n

<u>Exemplu</u>

$$\begin{cases} -u'' + u' + u = f & \text{în } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \qquad f \text{ continuă}$$

Formulare variațională: Înmulțim cu $v \in H_0^1(0,1)$ și integrăm

$$\int_0^1 -u''v + u'v + uv = \int_0^1 f v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Integrăm prin părți $\Rightarrow$

$$\underbrace{\int_0^1 u'v' + u'v + uv}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 f v}_{F(v)}$$

a biliniară (evident)

a coercivă

$$a(u,u) = \int_0^1 u' \cdot u' + u'u + u^2 = \int_0^1 (u')^2 + u^2 = \|u\|^2_{H^1}$$

deoarece $\int_0^1 u'u = 0$ (TEMĂ!) dacă $u \in H_0^1(0,1)$

a continuă

$$|a(u,v)| = \left|\int_0^1 u'v' + u'v + uv\right| \le$$

$$\le \left|\int_0^1 u'v' + uv\right| + \left|\int_0^1 u'v\right| \le$$

$$\le \|u\|_{H_0^1} \cdot \|v\|_{H_0^1} + \|u'\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \le$$

$$\le \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} + \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} =$$

$$= 2 \|u\|_{H_0^1} \cdot \|v\|_{H_0^1}$$

f liniară și continuă (TEMĂ!)

Așadar cf T. Lax-Milgram problema variațională și pb Galerkin vor avea soluție unică.

Dacă alegem pt pb Galerkin V_h ca în exemplul anterior atunci sistemul ce trebuie rezolvat va avea matricea

$A = (A_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ cu

$$A_{ij} = \int_0^1 \varphi_j'\varphi_i' + \varphi_j'\varphi_i + \varphi_j\varphi_i$$

La fel ca în exemplul anterior avem că

$$\int_0^1 \varphi_j'\varphi_i' = \begin{cases} 0 & |i-j|>1 \\ \frac{2}{h} & i=j \\ -\frac{1}{h} & |i-j|=1 \end{cases}$$

9)

$$\int_0^1 \varphi_j \varphi_i \, dx = \begin{cases} 0 & |i-j|>1 \\ \frac{h}{6} & |i-j|=1 \\ \frac{2h}{3} & i=j \end{cases}$$

$$\int_0^1 \varphi_j' \varphi_i' = \begin{cases} 0 & |i-j|>1 \\ 0 & i=j \\ -\frac{1}{2} & j=i-1 \\ \frac{1}{2} & j=i+1 \end{cases}$$

Termenul liber F se calculează exact ca în exemplul precedent