Laborator 3

Polinoamele Cebasev

1) Definiti inline functia Runge $f(x) = 1/(1 + x^2)$.
2) Creati 9 numere echidistante in intervalul [-5,5], primul egal cu -5 ultimul egal cu 5. Stocati valorile in vectorul x.
3) Evaluati functia Runge in x si stocati valorile obtinute in y.
4) Calculati coeficientii polinomului Lagrange de interpolare a datelor (x,y).
5) Faceti graficul acestui polinom si al functiei Runge pe intervalul [-5,5].
6) Refaceti calculele de mai sus inlocuind x cu 5*z unde z stocheaza radacinile polinomului Cebasev de grad 9. Faceti graficul functiei Runge, si al celor doua polinoame interpolante (pe noduri echidistante si pe noduri calculate cu polinoame Cebasev.) Care interpolant aproximeaza mai bine graficul lui f intre nodurile de interpolare?

Interpolantul spline cubic natural

Fie tabelul de date

```
x | x1 x2 ... xn
------------------------
y | y1 y2 ... yn
```

Interpolantul spline cubic natural $s : [a, b] \to R$ are proprietatea ca

1. $s(x_i) = y_i$, $i = 1..n$
2. $s|_{[x_i,x_{i+1}]} = p_i$ este polinom de grad cel mult 3.
3. $s \in C^2[x_1, x_n]$
4. $s''(x_1) = s''(x_n) = 0$

La curs au fost date formulele pentru p_i $i = 1..n-1$ depinzand de niste coeficienti $a_1, a_2, ...a_n$, unde $a_1 = a_n = 0$. S-a arata de asemenea ca acesti coeficienti satisfac un sistem de forma

$$Aa = b$$

unde $a = [a_1, ..., a_n]'$ este vectorul necunoscutelor iar matricea A si termenul liber b sunt date de niste formule. La final, dupa rezolvarea sistemului $Aa = b$ se va cunoaste formula analitica a fiecarui polinom p_i, altfel spus se va cunoaste formula analitica a interpolantului s pe fiecare interval $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1..n-1]$.

Evaluarea unei astfel de functii intr-o valoare data x0 se poate face prin detectarea intervalului $[x_i, x_{i+1}]$ in care se afla valoarea $x0$ si apoi se pune $s(x0) = p_i(x0)$.

Cerinta 1 Scrieti un cod care sa calculeze coeficientii $a = [a_1, ..., a_n]$ coespunzatori unui tabel arbitrar dat

```
x | x1 x2 ... xn
------------------------
y | y1 y2 ... yn
```

codul va arata asa

```
%========================
function a=natsplinecoef(x,y)

%construieste matricea A conform formulelor

%construieste vectorul b conform formulelor
a=A\b;

end
%==========================
```

Cerinta 2 Scrieti un cod care, dat fiind un tabel arbitrar

```
x | x1 x2 ... xn
------------------------
y | y1 y2 ... yn
```

si un vector xval de valori arbitrare intre x_1 si x_n, va evalua interpolantul spline cubic natural corespunzator acestui tabel in toate valorile din xval iar valorile obtinute se vor stoca in vectorul yval.

Codul ar trebui sa arate asa

```
%========================
function yval=natspline(x,y,xval)

%initializam yval
yval=xval;

%determinam coeficientii interpolantului spline
a=natsplinecoef(x,y);

  for(i=1:length(xval))
    %determinam indexul primului interval [x_k,x_(k+1)] in care se afla xval(i)
    k=sum(x<=xval(i));

    if(k==n) k=n-1; end%***
```

```
    %evaluam s in xval(i).Atentie!!! p_k trebuie inlocuit cu formula corespunzatoare
    %prezentata la clasa.
    yval(i)= p_k (xval(i))
  end

end
%==========================
```

Cerinta 3 Verificati codul pe tabelul x=[1 2 3 4 5] y=[1 1.2 1.4 1 2] si xval [1.5 2.5 3.5]
Comanda natspline(x,y,xval) ar trebui sa returneze valori identice cu cele returnate de comenzile matlab

```
pp=csape(x,y,'second');%aflam coef lui s pe fiecare subinterval, apoi evaluam in xval
yval=ppval(pp,xval)
```

Cerinta 4 Faceti graficul interpolantului spline cubic natural pentru valorile din tabelul x=[1 2 3 4 5] y=[1 1.2 1.4 1 2] Reprezentati si punctele interpolate.

Cerinta 5 Dupa cum s-a vazut la curs, interpolantul spline cubic natural rezulta prin impunerea a doua conditii suplimentare

$$s''(x_1) = s''(x_n) = 0$$

pentru a obtine un sistem compatibil determinat.

Alte conditii produc alti interpolanti spline, de pilda, daca in loc de $s''(x_1) = s''(x_n) = 0$ vom impune 2 conditii

$$p_1'''(x_2) = p_2'''(x_2), p_{n-2}'''(x_{n-1}) = p_{n-1}'''(x_{n-1}) \tag{1}$$

acesta e interpolantul evaluat cu comanda matlab
spline(x,y,xval)
iar daca vom impune alte doua conditii de tipul

$$s'(x_1) = k_1, s'(x_n) = k_n \tag{2}$$

unde k_1, k_n sunt date atunci interpolantul care rezulta este evaluat in xval cu comanda matlab

```
spline(x, [k1,y,kn],xval)
```

Trebuie spus ca pentru calculul concret al acestor interpolanti, codul nostru presupune numai modificarea primei si ultimei linii din matricea A si a primei si ultimei componente din termenul liber b.
Vom incerca sa vedem care e diferenta intre interpolantii spline de diferite tipuri.
Corespunzator tabelului

x=[1 2 3 4 5]
y=[1 1.2 1.4 1 2]
xval=1:0.1:5

evaluati interpolantul spline cubic natural in xval si de asemenea interpolantul spline in xval calculat cu conditiile suplimentare (**??**) (folositi comanda spline).
Apoi calculati norma $|| \ ||_\infty$ a diferentei dintre cei doi vectori produsi.