Curs 5

Funcții spline (a se consulta "Metode Numerice" Berbente et all)

Fie tabelul de date

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

$a = x_1$
$b = x_n$

Def $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ se numește interpolant spline polinomial de ordin m al datelor din tabel dacă

1) $s|_{[x_i, x_{i+1})} = P_{m,i}$ polinom de grad $\le m$, $i = 1 \ldots n-1$

2) s derivabilă de $m-1$ ori pe $[a,b]$

3) $s(x_i) = y_i$, $i = 1..n$.

Cazul $m = 1$ Funcția spline de ordin 1 e linia poligonală ce unește punctele $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

Cazul $m = 3$ Interpolantul spline cubic (cel mai utilizat)

Calculul funcției spline cubică.

Din condiția 2 de mai sus $s \in C^2[a,b]$.

Vom avea condițiile de continuitate pentru s, s', s'' în nodurile interioare $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \ldots \quad x_{n-1} \quad x_n$

Vor fi $3(n-2)$ condiții.

Vor mai fi cele n condiții de interpolare (condiția 3 de mai sus)

Așadar, avem $4n-6$ condiții

Deoarece pe fiecare interval $[x_i, x_{i+1})$ s e polinom de grad ≤ 3, vor exista 4 coeficienți de determinat pe fiecare subinterval, așadar $4(n-1)$ coeficienți de determinat per total.

Asadar $4n-6$ conditii, $4n-4$ necunoscute. Pentru ca interpolantul spline cubic să fie unic determinat, mai trebuie adaugate 2 conditii suplimentare.

<u>Interpolantul spline cubic natural</u> (cel mai utilizat)

$$S''(a) = S''(b) = 0$$

<u>interpolantul spline not-a-knot</u>

$$p_1'''(x_2) = p_2'''(x_2)$$
$$p_{n-2}'''(x_{n-1}) = p_{n-1}'''(x_{n-1})$$

unde $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ sunt $p_{3,1}, p_{3,2}, \ldots, p_{3,n-1}$ definiti in cond 1 din def. 1.

Acesta este interpolantul spline calculat de comanda ~~functia~~ spline din Matlab si Octave.

<u>interpolantul 'clamped' spline</u>

$$p_1'(x_1) = \alpha$$
$$p_{n-1}'(x_n) = \beta$$

unde α, β sunt specificate. Si acest interpolant se poate calcula folosind functia spline din Matlab.

Cum se calculeaza interpolantul spline cubic natural? Vom presupune că pt $i = 1 \ldots n-1$ p_i ia forma (vezi Analiza Numerică, G. Grigore)

$$(*)\ p_i(x) = a_i \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} + a_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i} +$$
$$+ \left(y_i - \frac{h_i^2}{6}a_i\right)\frac{x_{i+1}-x}{h_i} + \left(y_{i+1} - \frac{h_i^2}{6}a_{i+1}\right)\frac{x-x_i}{h_i}$$

3

Aici, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1..n-1$ și vom presupune că $a_1 = a_n = 0$.

Se poate verifica direct că $P_i''(x_i) = a_i$ și $P_i''(x_{i+1}) = a_{i+1}$, $i = 1..n-1$, așadar automat condiția S'' continuă (adică $P_i''(x_{i+1}) = P_{i+1}''(x_{i+1})$) $i = 1..n-2$ este satisfăcută.

De asemenea, avem că $P_i(x_i) = y_i$, $P_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ așadar e satisfăcută condiția de interpolare 3.

În plus, $P_1''(x_1) = 0$, $P_{n-1}''(x_n) = 0$.

Rămâne numai să determinăm $a_2, .., a_{n-1}$ așa ca prima derivată a lui S să fie continuă în $x_2, .., x_{n-1}$ adică

$$P_i'(x_{i+1}) = P_{i+1}'(x_{i+1}), \quad i = 1..n-2$$

Prin calcul direct se arată că

$$P_i'(x_{i+1}) = \frac{a_{i+1}}{2} h_i - \frac{y_i}{h_i} + \frac{h_i a_i}{6} + \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i a_{i+1}}{6}$$

$$P_{i+1}'(x_{i+1}) = -\frac{a_{i+1} h_{i+1}}{2} - \frac{y_{i+1}}{h_{i+1}} + \frac{h_{i+1} a_{i+1}}{6} + \frac{y_{i+2}}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1} a_{i+2}}{6}$$

Egalând obținem un sistem pt coeficienții $a_2, .., a_{n-1}$ de ecuații

$$\frac{h_i a_i}{6} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} a_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{6} a_{i+2} = \frac{y_i}{h_i} - y_{i+1}\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right) + \frac{y_{i+2}}{h_{i+1}}$$

$i = 1..n-2$

Acest sistem se completează cu încă 2 ecuații: $a_1 = 0$, $a_n = 0$

Va rezulta un sistem de forma

$$A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b \quad \text{unde}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & 0 \\ \frac{h_1}{6} & \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & & & & \vdots \\ 0 & \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & & & \vdots \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6} \\ 0 & \cdots & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

termen liber $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $b_1 = 0$, $b_n = 0$

în rest $b_{i+1} = \frac{y_i}{h_i} - y_{i+1}\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right) + \frac{y_{i+2}}{h_{i+1}}$

$i = 1 \ldots n-2$

Vom rezolva sistemul $Aa = b$ și vom afla astfel coeficienții $a_2, a_3, \ldots a_{n-2}$ care descriu polinoamele $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ în formula (*).

Obs. Sistemul de mai sus este compatibil determinat pt că A e diagonal dominantă strict pe linii, deci e inversabilă.

Cum se rezolvă eficient sistemul $Aa = b$?

A este tridiagonală

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Se poate arăta că A se scrie sub forma $A = LR$ (a se vedea Metode Numerice Berbente et all)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ l_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & l_n & 1 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda_{n-1} \\ 0 & & & r_n \end{pmatrix}$$

unde coeficienții $l_2, \dots, l_n$, $\lambda_1, \dots \lambda_{n-1}$, $r_1 \dots r_n$ se pot determina direct din condiția

$$A = LR$$

(algoritm pag 14, Metode Numerice Berbente et all)

Se observă că în acest mod $Aa = b$ se rezolvă în $O(n)$ operații.

6

Notăm $H = \{ g \in C^2[a,b] \mid g(x_i) = y_i,\ i = 1..n \}$

Se arată că interpolantul spline cubic natural s satisface

$$\int_a^b |s''(x)|^2 dx = \min_{g \in H} \int_a^b |g''(x)|^2 dx$$

deci s minimizează curbura totală.

Reciproc, dacă $t \in H$ satisface

$$\int_a^b |t''(x)|^2 dx = \min_{g \in H} \int_a^b |g''(x)|^2 dx$$

atunci $t = s$.