1) Se considera vectorii

```
v1=<1 0 0 1>  v2=<0 1 1 1>  v3=<-1 0 0 1>
```

din spatiul Hilbert R^4 cu produsul scalar corespunzator normei euclidiene.
a) Determinati 3 vectori mutual ortogonali in spatiul liniar generat de cei 3 vectori de mai sus.

b) Aflati cea mai buna aproximare Pv a vectorului $v =< 1 \ 2 \ 3 \ 2 >$ in spatiul liniar generat de cei 3 vectori de mai sus. Cum ati verifica faptul ca Pv a fost calculat corect?

c) Dati un exemplu de vector w in R^4 care nu se afla in spatiul liniar generat de cei 3 vectori iar cea mai buna aproximare a lui w in acest spatiu este exact v_1.

2) Fie tabelul de date

```
x| -1 0 1  2
--------------
y|  3 2 2  7
```

Pentru tabelul de mai sus se va aplica metoda de aproximare in sensul celor mai mici patrate cu functii de modelare $1, x^2$. Cea mai buna aproximare in sensul celor mai mici patrate va fi notata $a + bx^2$
a) Descrieti conditiile satisfacute de a si b.
b) Determinati sistemul algebric liniar satisfacut de coeficientii a si b, apoi calculati a si b.
c) Faceti graficul functiei $a + bx^2$ pe intervalul $[-1\ ,\ 2]$ si al punctelor corespunzatoare datelor din tabel.

3) a) Definiti inline functia $f(x) = \dfrac{1}{2 + x^2}$.
b) Calculati coeficientii polinomului Lagrange de interpolare al lui f pe 8 noduri echidistante pe intervalul [1,5] (primul nod este 1, ultimul este 5)
c) Descrieti alegerea eficienta a 8 noduri de interpolare in intevalul $[1, 5]$ pentru minimizarea erorii in interpolarea polinomiala a lui f pe 8 noduri. Calculati coeficientii polinomului Lagrange P2 de interpolare al lui f pe aceste 8 noduri.
d) Faceti graficele celor doua polinoame P1, P2 precum si al functiei f pe intervalul [1,5].

4) Fie ecuatia diferentiala

$$\begin{aligned} &-u''(x) + (1-x)u(x) = x^2 \quad in \ [-2, 1] \\ &u(-2) = u(1) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Pe $[-2, 1]$ fixam reteaua $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ si vom alege ca spatiu finit dimensional pentru problema Galerkin de aproximare spatiul

$$V_h = \{\varphi : [0, 1] \to R | \varphi \ \ continua, \varphi(-2) = \varphi(1) = 0, \varphi|_{[x_i, x_{i+1}]} \ \ liniara, i = 0, 1, 2\}.$$

a) Scrieti problema variationala si problema Galerkin de aproximare corespunzatoare acestei ecuatii.

b) Aratati ca forma biliniara gasita la punctul a) este continua si coerciva.

c) Scrieti formula analitica pentru functiile de baza corespunzatoare nodurilor interioare x_1, x_2.

d) In contextul punctului c) scrieti matricea si termenul liber corespunzatoare problemei Galerkin de aproximare, apoi rezolvati sistemul liniar ce rezulta atunci cand se rezolva problema Galerkin.

e) Notam cu u_h solutia problemei Galerkin de aproximare calculata in punctul d) mai sus. Calculati $u_h(0.5)$ si $u_h(-0.5)$.

1) Se considera vectorul $x = [1\ 2\ 3\ 4]$ si vectorul y definit cu comanda Matlab

```
y=x.^2+1
```

a) Explicati de ce comenzile Matlab

```
polyfit(x,y,2)
polyfit(x,y,3)
```

returneaza ambele coeficientii aceluiasi polinom.
b) Fie tabelul

```
x| 1 2 3 4
-----------
y|
```

cu y definit mai sus. Pentru tabelul de mai sus se va aplica metoda de aproximare in sensul celor mai mici patrate cu functii de modelare $1, x, x^2$. Cea mai buna aproximare in sensul celor mai mici patrate va fi notata $ax^2 + bx + c$
b) Ce conditii satisfac a, b, c?
c) Explicati de ce putem spune fara a efectua vreun calcul ca $a = 1, b = 0, c = 1$.

2) Fie spatiul Hilbert $(L^2(\Omega), ||\ ||_2)$, $\Omega = [-1, 1]$.
a) Determinati 3 vectori mutual ortogonali in subspatiul liniar $G \subset L^2(\Omega)$ generat de functiile $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2$.

b) Fie functia $f \in L^2(\Omega),\ f(x) = x^3$. Aflati cea mai buna aproximare $Pf \in G$ a functiei f in subspatiul G.

c) Verificati ca $f - Pf$ este ortogonal pe G.

3) Pe intervalul $[0, 2]$ se considera diviziunea $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ si funtia $f : [0, 2] \to R,\ f(x) = sin(\pi x)$.
a) Explicati de ce interpolantul Lagrange de ordin 1 pe portiuni asociat diviziunii de mai sus este nul (egal cu 0 peste tot).
b) Notam cu P interpolantul Lagrange al lui f de ordin 2 pe portiuni asociat diviziunii de mai sus. Calculati $P(0.25)$.

4) Fie ecuatia diferentiala

$$\begin{array}{l} -u''(x) + 2u(x) = x^2 \quad in\ \ [0, 4] \\ u(0) = u(4) = 0 \end{array} \tag{1}$$

Pe $[0, 4]$ fixam reteaua $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4$ si vom alege ca spatiu finit dimensional pentru problema Galerkin de aproximare spatiul

$$V_h = \{\varphi : [0, 4] \to R | \varphi\ \ continua, \varphi(0) = \varphi(4) = 0, \varphi|_{[x_i, x_{i+1}]}\ \ polinom\ de\ grad\ \ \leq 1, i = 0, 1, 2\}.$$

a) Scrieti problema variationala si problema Galerkin de aproximare corespunzatoare acestei ecuatii.

b) Aratati ca forma biliniara gasita la punctul a) este continua si coerciva.

c) Scrieti formula analitica pentru functiile de baza corespunzatoare nodurilor interioare x_1, x_2.

d) In contextul punctului c) scrieti matricea si termenul liber corespunzatoare problemei Galerkin de aproximare, apoi rezolvati sistemul liniar ce rezulta atunci cand se rezolva problema Galerkin.

e) Notam cu u_h solutia problemei Galerkin de aproximare calculata in punctul d) mai sus. Calculati $u_h(0.5)$ si $u_h(1.5)$.