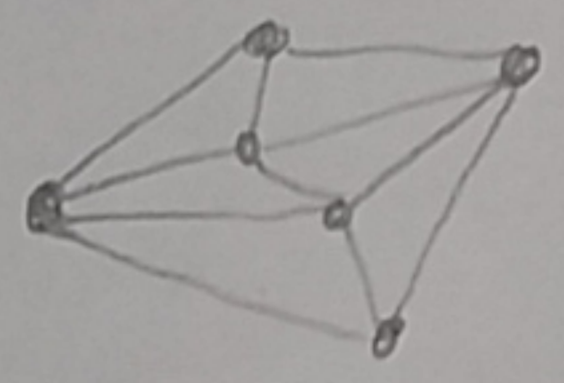
Curs 7

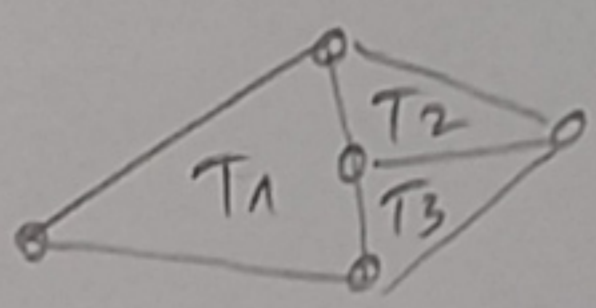
interpolantul Lagrange pe porțiuni (cazul 2d)

Presupunem că Ω e un poligon. Atunci el poate fi partiționat într-o reuniune de triunghiuri

$$\Omega = \bigcup_{T \in T_h} T \quad , \; T_h \leftarrow \text{familia de triunghiuri care acoperă } \Omega$$

Vom presupune că aceste triunghiuri au interioarele mutual disjuncte și fiecare 2 triunghiuri fie nu se intersectează, fie se intersectează într-un varf comun fie pe o muchie întreagă comună.





nu se admite o astfel de situație pt că T_1 și T_2 nu se intersectează pe o muchie întreagă a lui T_1

Vom genera o întreagă familie $(T_h)_{h>0}$ de astfel de rețele de triunghiuri, cu h din ce în ce mai mic, unde pt. un anumit T_h, h va reprezenta lungimea celei mai mari muchii din T_h.

Vom presupune că familia $(T_h)_h$ este quasi uniformă, adică dacă pt fiecare T_h notam cu r = cea mai mică rază a unui cerc înscris într-unul din triunghiurile rețelei, atunci există $\rho>0$ independent de T_h așa ca

$$r > \rho h$$

Geometric, această condiție va impune o limită superioară și una inferioară pentru unghiurile din triunghiurile fiecărui T_h (adică unghiurile din rețea nu pot fi arbitrar de mici sau de mari)

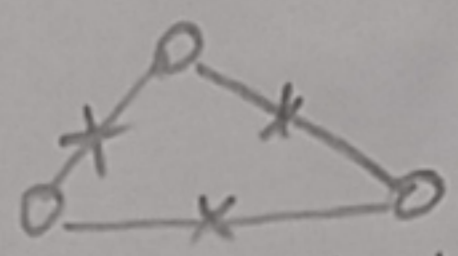
Triunghiurile împreună cu gradul k al polinoamelor ce vor fi folosite pt aproximare se numesc elemente. 2

Elemente liniare

3 noduri

(polinom de grad 1 în 2 variabile, determinat de 3 constrangeri)

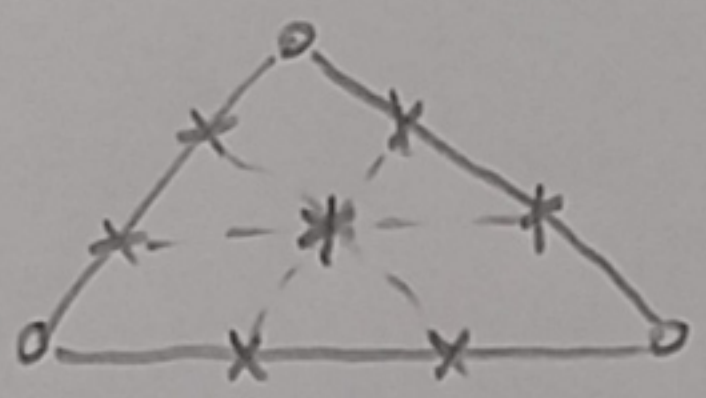
Elemente cuadratice



(polinom de grad 2 în 2d determinat de 6 constrangeri)

6 noduri, nodurile suplimentare sunt pe mijlocul muchiilor

Elemente cubice

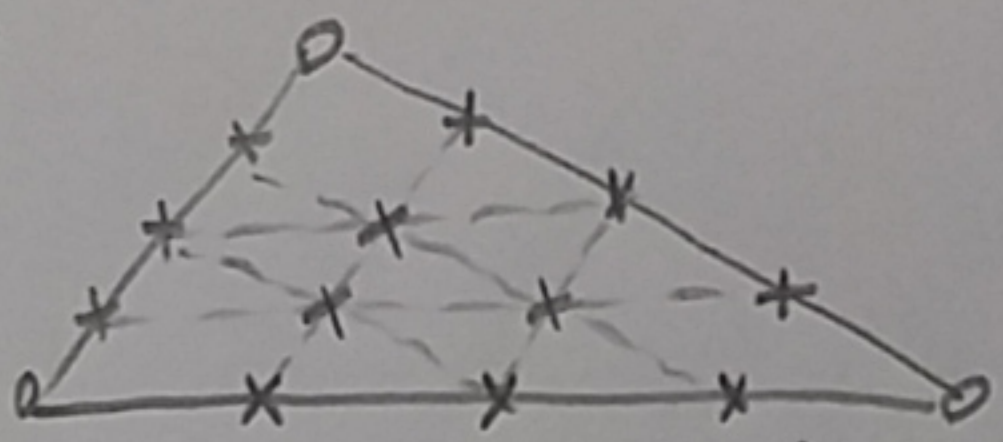


grad 3 în 2d → 10 constrangeri

10 noduri: nodurile initiale, nodurile de pe muchii sunt echidistante, + centrul de greutate

---

Elemente de ordin 4



15 noduri (cele de pe muchii sunt echidistante)

Să presupunem că folosim elemente de ordin k. Fie $f \in C(\bar{\Omega})$. $\Pi_h^k f \in C(\bar{\Omega})$ e interpolantul Lagrange de ordin k pe reteaua T_h dacă $\Pi_h^k f|_T$ este interpolantul Lagrange de ordin k al lui f pe nodurile corespunzătoare în T elementului de ordin k.

Teoremă: Dacă $f \in C^{k+1}(\Omega)$ atunci

$$\|f - \Pi_h^k f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \cdot h^{k+1} \|f^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\|\nabla f - \nabla \Pi_h^k f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \cdot h^{k} \|f^{(k+1)}\|_{L^2(\Omega)}$$

unde constanta C nu depinde de f sau h, ∇ simbolizează $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ iar derivatele se calculează în sens slab, discutăm despre aceasta în cele ce urmează.

Metoda elementului finit

Elemente de analiză matematică

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $d = 1, 2, 3$ domeniu deschis, mărginit cu frontieră de clasă C^2 (sau poligon/poliedru convex)

$L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f$ măsurabilă, $\int_\Omega |f|^p dx < \infty \}$

se identifică în L^p funcțiile egale apt

integrala este în sensul Lebesgue

$L^2(\Omega) \to \int_\Omega |f|^2 dx < \infty$

$L^2(\Omega)$ este sp Hilbert cu produsul scalar

$$(u, v) = \int_\Omega u v \, dx$$

norma $$\|u\|_{L^2} = \left(\int_\Omega u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$C_0^\infty(\Omega)$ = funcții de clasă C^∞ cu suport compact pe Ω

$L^1_{loc}(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f$ măsurabilă, $\int_K |f| dx < \infty$ $\forall K \subset \Omega$, K compact$\}$

se identifică și aici funcțiile egale apt.

$u \in L^1_{loc}(\Omega)$ are derivată slabă în raport cu x dacă există o funcție (notată $\frac{\partial u}{\partial x}$) $\in L^1_{loc}(\Omega)$ așa ca

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Similar definim $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ în sens slab

$H^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega)$ așa ca să existe $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega) \}$

pt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ similar pt 1d, 3d

Se arată că dacă $u \in H^1(\Omega)$ atunci u va avea o valoare bine-def pe $\partial\Omega$.

Formula de integrare prin părți

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x} = \int_{\partial\Omega} u v n_x \, ds - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} v, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

n_x este componenta în direcția x a versorului normal exterior n la Ω similar pt $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

Notăm $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ în 2d

$H^1(\Omega)$ este spațiu Hilbert cu produsul scalar

$$(u,v)_1 = \int_\Omega uv + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \, dx$$

$$\|u\|_1^2 = \int_\Omega u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\frac{\partial u}{\partial x}\|_{L^2}^2 + \|\frac{\partial u}{\partial y}\|_{L^2}^2$$

Notăm

$$H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

$H_0^1(\Omega)$ este și el sp. Hilbert cu același produs scalar

Să mai că $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ așa ca măsura$(\Gamma_1) > 0$ ⑥

și notăm

$H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\Gamma_1} = 0 \}$

și acesta e spațiu Hilbert cu același produs scalar ca și $H^1(\Omega)$.

Inegalitatea Poincaré - Friederics

pt $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ (deci și pt $u \in H^1_0(\Omega)$)

avem că

$$\|\nabla u\|_{L^2} := \left(\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \geq C \, \|u\|_{L^2}$$

unde constanta C nu depinde de u.

<u>Consecință</u> în spațiile $H^1_0(\Omega)$, $H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ normele $\|u\|_1$, $\|\nabla u\|_{L^2}$ sunt norme echivalente. există $C(F)$ o constantă, așa ca

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \geq C(F) \, \|u\|_1 .$$

Metoda elementului finit, problema abstractă

Fie V un spațiu Hilbert (în practică el poate fi $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega)$)

$\| \|_V \to$ norma lui V, $(,)_V$ produs scalar pe V.

Vom considera o formă biliniară

$$a : V \times V \to \mathbb{R}$$

care, în plus, satisface

1) a continuă, adică există $c_1 > 0$

așa ca $|a(u,v)| \leq c_1 \cdot \|u\|_V \|v\|_V$, $\forall u, v \in V$

2) a coercivă adică există $c_2 > 0$

așa ca $a(u,u) \geq c_2 \|u\|_V^2$, $\forall u \in V$.

Problema Variațională

Pentru $a : V \times V \to \mathbb{R}$ biliniară, continuă, coercivă și $F : V \to \mathbb{R}$ funcțională continuă aflați $u \in V$ așa ca

$$a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V.$$

Problema Galerkin de aproximare

Pentru $V_h \subset V$ subspațiu finit dimensional al lui V aflați $u_h \in V_h$ așa ca

$$a(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

Exemplu Pentru $f \in C(\bar{\Omega})$ aflați $u \in C^2(\bar{\Omega})$ așa ca

$$-\Delta u = f \text{ pe } \Omega$$
$$u = 0 \text{ pe } \partial\Omega.$$

$-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$, înmulțim cu $v \in H_0^1(\Omega)$

$-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} v - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} v = f v$ integram pe Ω

(*) $\displaystyle\int_\Omega -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} v = \int_\Omega f v$

Folosind formula de integrare prin părți prezentată anterior putem scrie

$$\int_\Omega -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v = \int_\Omega -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) v = \underbrace{-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v\, n_x}_{=0 \text{ pt că } v|_{\partial\Omega} = 0} + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$= \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}$, similar pt $\displaystyle\int_\Omega -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} v$

Formula (*) de mai sus devine

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \int_\Omega f v \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

Notam $V = H_0^1(\Omega)$,

$a : V \times V \to \mathbb{R}$ $\quad a(u,v) = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$

$F(u) = \int_\Omega f u \, dx$. Se poate arata că

a este biliniară, continuă și coercivă, F continuă,

și atunci rezultă că $u \to$ soluția problemei inițiale este și soluția problemei variaționale

aflați $u \in H_0^1(\Omega)$ așa ca

$$\underbrace{\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f v}_{F(v)} \qquad \forall v \in \underbrace{H_0^1(\Omega)}_{V}$$

---

arătam că

a continuă

$$|a(u,v)| = \left| \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + uv - uv \right| =$$

$$= |(u,v)_{H^1} - (u,v)_{L^2}| \leq |(u,v)_{H^1}| + |(u,v)_{L^2}| \leq$$

$$\leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq 2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

arătam a coercivă

$$a(u,u) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq C(F)\|u\|_{H^1}$$

conform inegalitatii Poincaré-Friederics