①

Funcții spline cubice (continuare)

Fie $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ numere reale, $a = x_1$, $b = x_n$.
Notam cu S_3 multimea functiilor $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ care satisfac:

1) $s|_{[x_i, x_{i+1}]}$ polinom de grad ≤ 3, $i = 1 \dots n-1$

2) $s \in C^2[a,b]$.

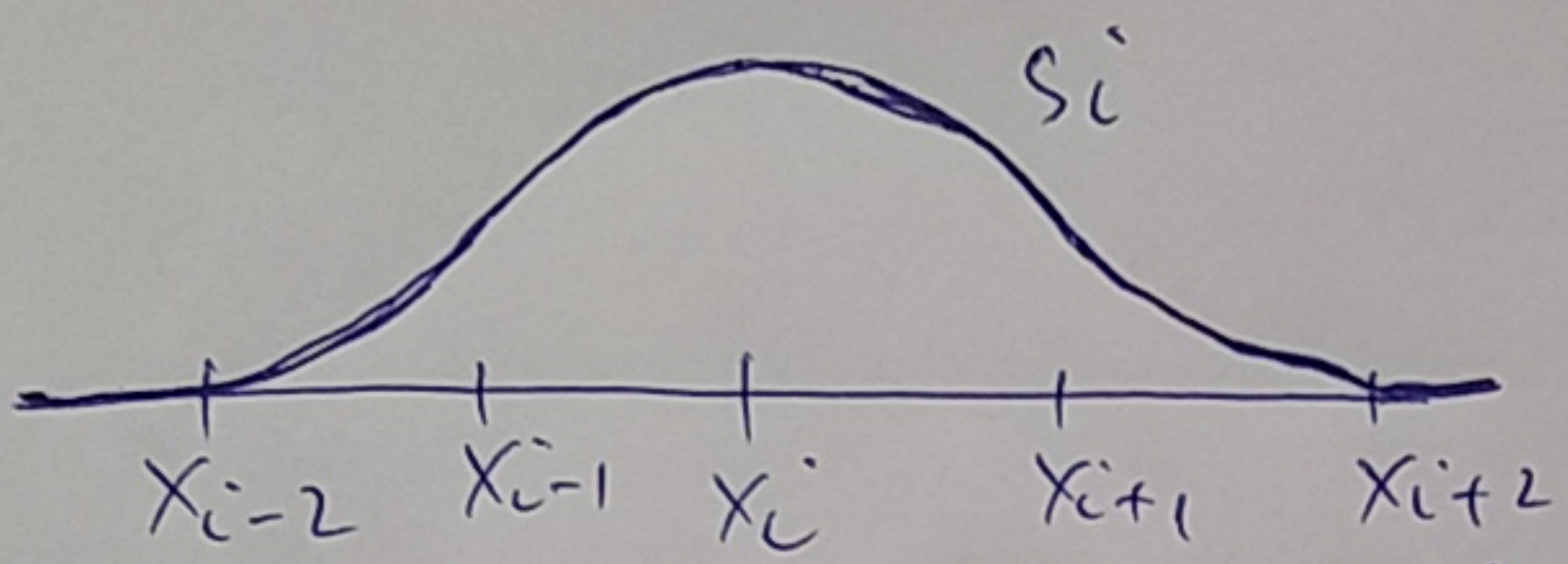
S_3 este multimea functiilor spline cubice pe intervalul $[a,b]$.

S_3 este un spatiu vectorial de dimensiune $\underline{n+2}$.
Să aratam sumar acest lucru. Orice functie $s \in S_3$ va depinde de 4 parametri (coeficienti unui polinom de grad ≤ 3) pe $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 1..n-1$, asadar va depinde de $4(n-1)$ parametri. Acesti parametri trebuie alesi pt. ca cele două conditii 1), 2) (de fapt 2)) de mai sus să fie satisfacute, asadar sunt 3 conditii pe fiecare nod interior $x_2, .., x_{n-2}$ (conditiile de continuitate pt s, s', s'' pe nodurile interioare), deci $3 \cdot (n-2)$ conditii. Raman asadar $4(n-1) - 3(n-2)$ grade de libertate, deci $n+2$ grade de libertate care vor da dimensiunea lui S_3.

Functiile B-spline cubice sunt niste funcții speciale care formează o bază algebrică a lui S_3.

Vor fi asadar n+2 functii B-spline cubice (2)

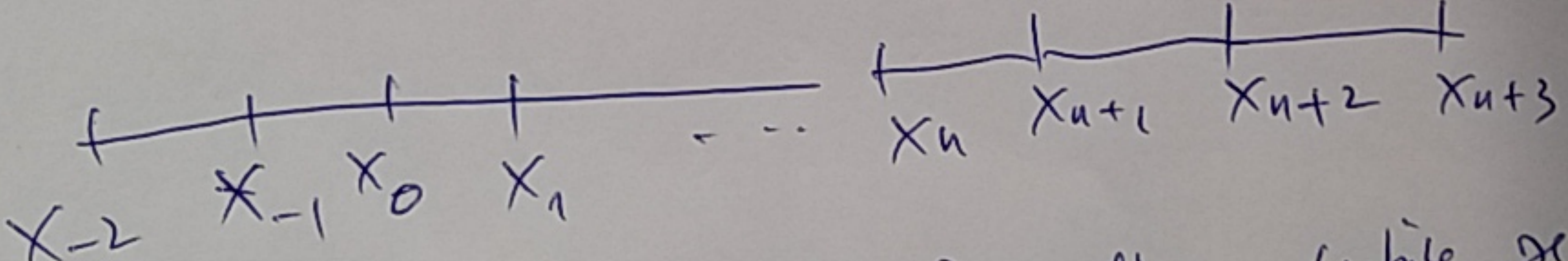
Fiecare functie B-spline cubica S_i $i=1\dots n$ va fi atasata unui nod x_i si va avea suportul $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ iar graficul va avea forma:



Deoarece sunt n astfel de functii, mai trebuie definite 2, S_0 si S_{n+1}. Vom defini noduri auxiliare

$x_{-2} \le x_{-1} \le x_0 \le x_1$ $\quad x_{n+3} \ge x_{n+2} \ge x_{n+1} \ge x_n$

(acestea sunt necesare si pt definirea functiilor S_1, S_2, S_{n-1}, S_n)



Calculul functiilor B-spline cubice se face recursiv. Mai intai calculam

$$B_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

pentru $i = -2, \dots, n+2$

apoi pentru $k=1,2,3$

$$B_{i,k+1}(x)=\frac{x-x_i}{x_{i+k}-x_i}B_{i,k}(x)+\frac{x_{i+1+k}-x}{x_{i+k+1}-x_{i+1}}B_{i+1,k}(x)$$

$$i=-2,\ n+2-k.$$

Aceasta este formula Cox-de Boor pentru noduri adiționale distincte.

Funcțiile B-spline cubice se obțin pentru $k=3$ în formula de mai sus (observați că sunt $n+2$ astfel de funcții generate)

unde $S_i = B_{i-2,4}$, $i=0\dots n+1$

Dacă nodurile $x_{-2}, x_{-1}, x_0\ x_1 \dots x_n\ x_{n+1}\ x_{n+2}\ x_{n+3}$ sunt alese echidistante și $h := x_{i+1}-x_i$ atunci formula de mai sus produce rezultatul

$$S_i(x)=\begin{cases}\frac{1}{6h^3}(x-x_{i-2})^3 & \text{pe } [x_{i-2},x_{i-1}]\\ \frac{1}{6h^3}\left(h^3+3h^2(x-x_{i-1})+3h(x-x_{i-1})^2-3(x-x_{i-1})^3\right) & \text{pe } [x_{i-1},x_i]\\ \frac{1}{6h^3}\left(h^3+3h^2(x_{i+1}-x)+3h(x_{i+1}-x)^2-3(x_{i+1}-x)^3\right) & \text{pe } [x_i,x_{i+1}]\\ \frac{1}{6h^3}(x_{i+2}-x)^3 & \text{pe } [x_{i+1},x_{i+2}]\\ 0 & \text{în rest}\end{cases}$$

pentru $i=0,1,\dots,n,n+1$

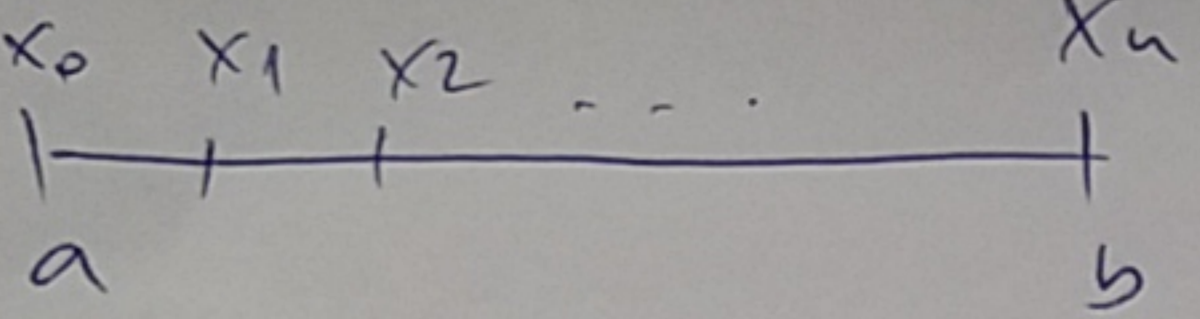
Orice funcție spline $s \in S_3$ se va reprezenta ca și combinație liniară de $s_0, s_1, \dots, s_n, s_{n+1}$ (4)

$$s = \sum_{i=0}^{n+1} c_i s_i$$

unde c_i trebuiesc calculați.

interpolare Lagrange pe porțiuni.

$[a,b]$ Considerăm o diviziune a lui $[a,b]$ în n subintervale



$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad i = 0..n-1$$

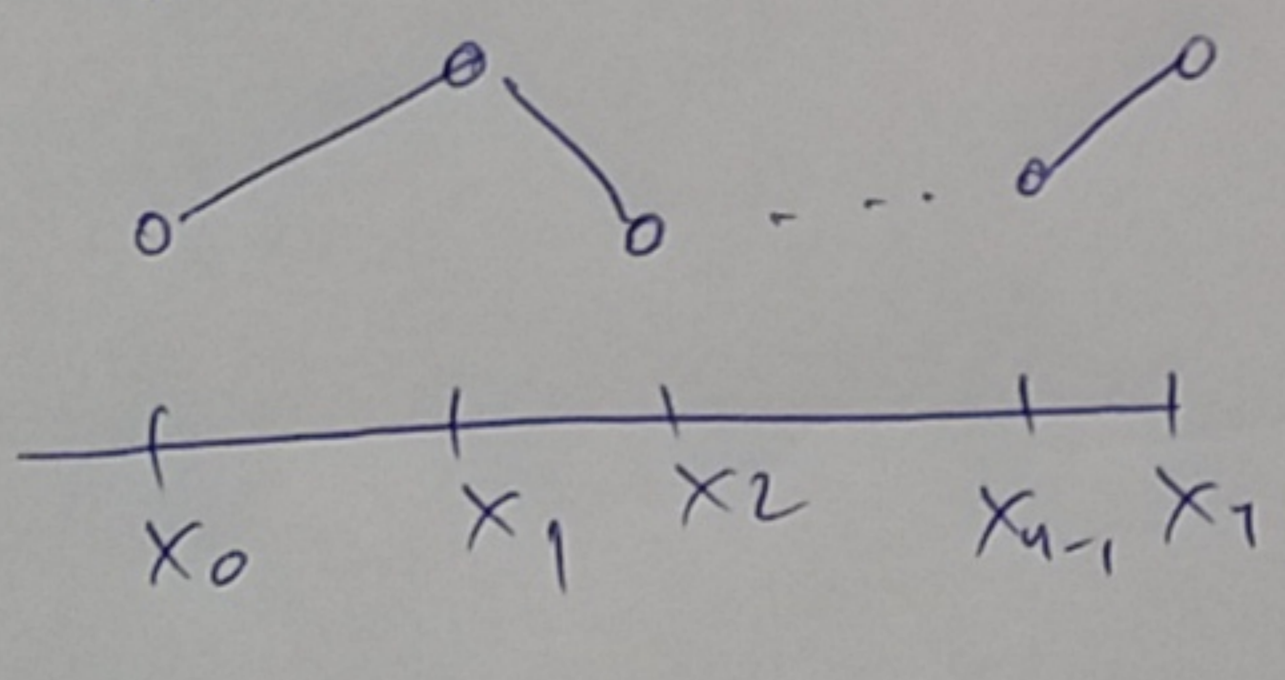
$$h = \max_{j=0..n-1} h_j$$

Notăm $X_h^K = \{ p \in C^0[a,b] \mid p|_{[x_i, x_{i+1}]}$ polinom de grad $\leq K$, $\forall i = 0..n-1 \}$

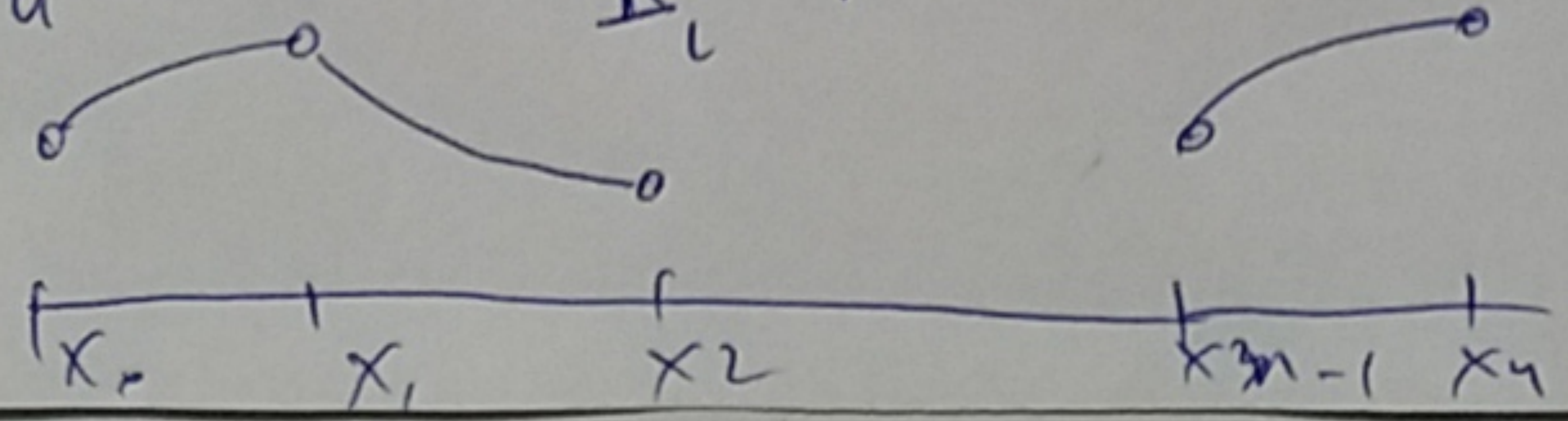
Deci X_h^K conține toate funcțiile continue care restrânse la $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0..n-1$ sunt polinoame de grad $\leq K$.

Ex X_h^1 p continuă, $p|_{I_i}$ liniare $\Rightarrow$

X_h^1 conține toate liniile poligonale



X_h^2 $p|_{I_i}$ polinom de grad ≤ 2



Pentru fiecare $[x_i, x_{i+1}]$ generam $K+1$ noduri echidistante, notate $x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^K$, unde (6)

$x_i^0 = x_i$, $x_i^K = x_{i+1}$.

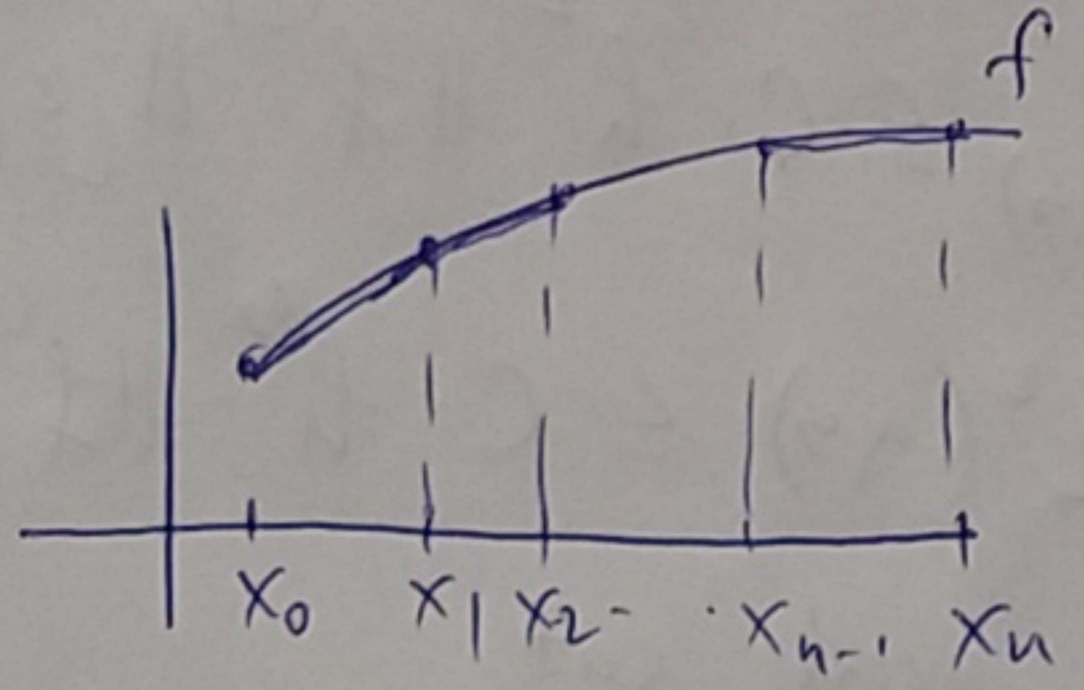
Pentru orice funcție continuă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ notam cu $\Pi_h^K f \in X_h^K$ interpolantul Lagrange pe porțiuni al lui f, adică $\Pi_h^K f(x_i^j) = f(x_i^j)$

$\forall i = 0 \dots n-1$, $\forall j = 0 \dots K$.

Alt fel spus, $\Pi_h^K f|_{I_i}$ este interpolantul Lagrange al lui f pe ~~fiecare pereche~~ nodurile $x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^K$.

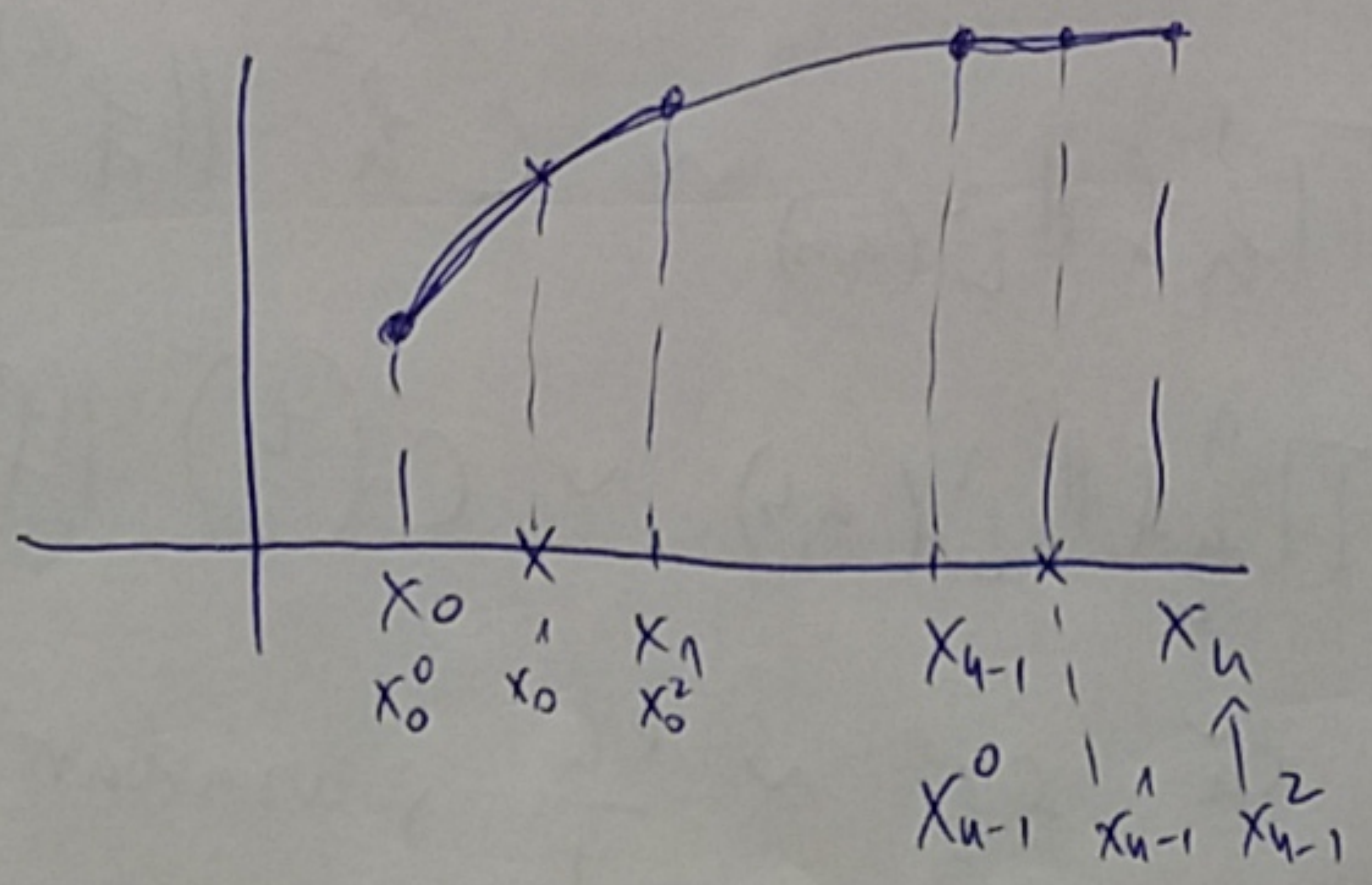
Exemplu

$K=1$



$\Pi_h^1 f$ va fi linia poligonală care unește punctele $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)) \dots (x_n, f(x_n))$.

$K=2$



Teorema (de estimare a erorii în interpolarea Lagrange pe porțiuni) Presupunem că $f \in C^{k+1}_{[a,b]}$. (7)

atunci $\|(f - \Pi_h^k f)^{(m)}\|_{L^2(a,b)} \leq C \cdot h^{k+1-m} \cdot \|f^{(k+1)}\|_{L^2(a,b)}$

$m = 0, 1$.

În teorema de mai sus (m), $(k+1)$ denotă derivatele de ordinul respectiv, iar constanta C este o constantă generală ce nu depinde de f, h

Cazuri particulare.

$k=1$ interpolare cu funcții continue, liniare pe porțiuni

$$\|f - \Pi_h^1 f\|_{L^2(a,b)} \leq C \cdot h^2 \|f^{(2)}\|_{L^2(a,b)}$$

$$\|f' - (\Pi_h^1 f)'\|_{L^2(a,b)} \leq C \cdot h \cdot \|f^{(2)}\|_{L^2(a,b)}.$$

Analiza erorii în acest caz

Notam

$$e_h = \|f - \Pi_h^1 f\|_{L^2(a,b)} \sim C h^2 \cdot \|f^{(2)}\|_{L^2(a,b)}$$

$$e_{\frac{h}{2}} = \|f - \Pi_{\frac{h}{2}}^1 f\|_{L^2(a,b)} \sim C \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot \|f^{(2)}\|_{L^2(a,b)}$$

de aici rezultă că $e_{\frac{h}{2}} \sim \frac{e_h}{4}$, așadar dacă rețeaua inițială $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ e înjumătățită (adică se adaugă și mijloacele tuturor subintervalelor $[x_i, x_{i+1}]$) atunci eroarea în interpolarea Lagrange pe porțiuni se va împărți la 4 (cu aproximație) (vorbim de aproximarea lui f cu $\Pi_h^1 f$ în norma lui $L^2(a,b)$).

Să vedem cât de bine e aproximată derivata f' a lui f cu $(\Pi_h^1 f)'$.

Notam $ep_h = \| f' - (\Pi_h^1 f)' \|_{L^2(a,b)} \sim C h \| f^{(2)} \|_{L^2(a,b)}$

$$ep_{\frac{h}{2}} = \| f' - (\Pi_{\frac{h}{2}}^1 f)' \|_{L^2(a,b)} \sim C \frac{h}{2} \| f^{(2)} \|_{L^2(a,b)}$$

Se observă că $ep_{\frac{h}{2}} \sim \frac{ep_h}{2}$

deci, atunci când rețeaua e înjumătățită, eroarea ep_h se va înjumătăți.

(în aproximarea lui f' cu $(\Pi_h^1 f)'$ în spațiul $L^2(a,b)$)

9

Caz particular $k=2$
interpolarea lui f cu funcții continue, cuadratice pe porțiuni. Conform teoremei

$$\|f - \Pi_h^2 f\|_{L^2(a,b)} \le C h^3 \|f^{(3)}\|_{L^2(a,b)}$$

$$\|f' - (\Pi_h^2 f)'\|_{L^2(a,b)} \le C h^2 \|f^{(3)}\|_{L^2(a,b)}$$

C e o constantă generală ce nu depinde de h, f.

<u>Analiza erorii</u>

$$e_h = \|f - \Pi_h^2 f\|_{L^2} \sim C h^3 \|f^{(3)}\|_{L^2}$$

$$e_{\frac{h}{2}} = \|f - \Pi_{\frac{h}{2}}^2 f\|_{L^2} \sim C \cdot \frac{h^3}{2^3} \cdot \|f^{(3)}\|_{L^2}$$

de unde $e_{\frac{h}{2}} \sim \frac{e_h}{8}$

deci la înjumătățirea rețelei eroarea e_h se va împărți la 8. (aproximativ)

$$ep_h = \|f' - (\Pi_h^2 f)'\|_{L^2} \sim C h^2 \cdot \|f^{(3)}\|_{L^2}$$

$$ep_{\frac{h}{2}} = \|f' - \Pi_{\frac{h}{2}}^2 f'\|_{L^2} \sim C \left(\frac{h}{2}\right)^2 \|f^{(3)}\|_{L^2}$$

$ep_{\frac{h}{2}} \sim \frac{ep_h}{4}$ eroarea în aproximarea derivatei se împarte la 4 la înjumătățirea rețelei.