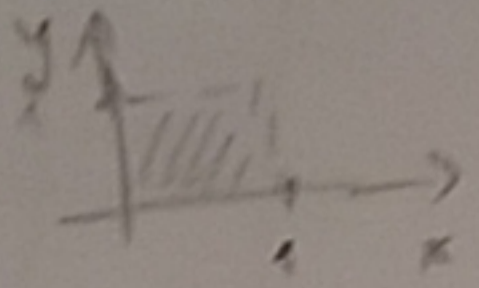
Exemplu metoda elementului finit, cazul 2d

Exemplul se poate consulta mai în detaliu în cartea 'Introducere în metoda elementului finit', Sorin Micu, unde acest exemplu e prezentat.

Considerăm problema Poisson

$\Omega = [0,1]\times[0,1]$, $f \in C(\Omega)$. Aflați $u \in C^2(\Omega)$ așa ca

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases}$$



Formulare variațională a problemei: Aflați $u \in H_0^1(\Omega)$ așa ca

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f v \, dx}_{F(v)} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

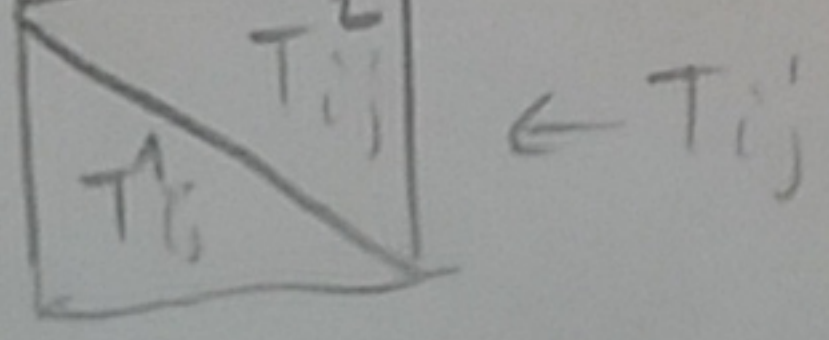
Integralele de mai sus sunt integrale Lebesgue. a este biliniară, continuă, coercivă; F este liniară continuă $\Rightarrow$ conf. T Lax-Milgram problema variațională are soluție unică.

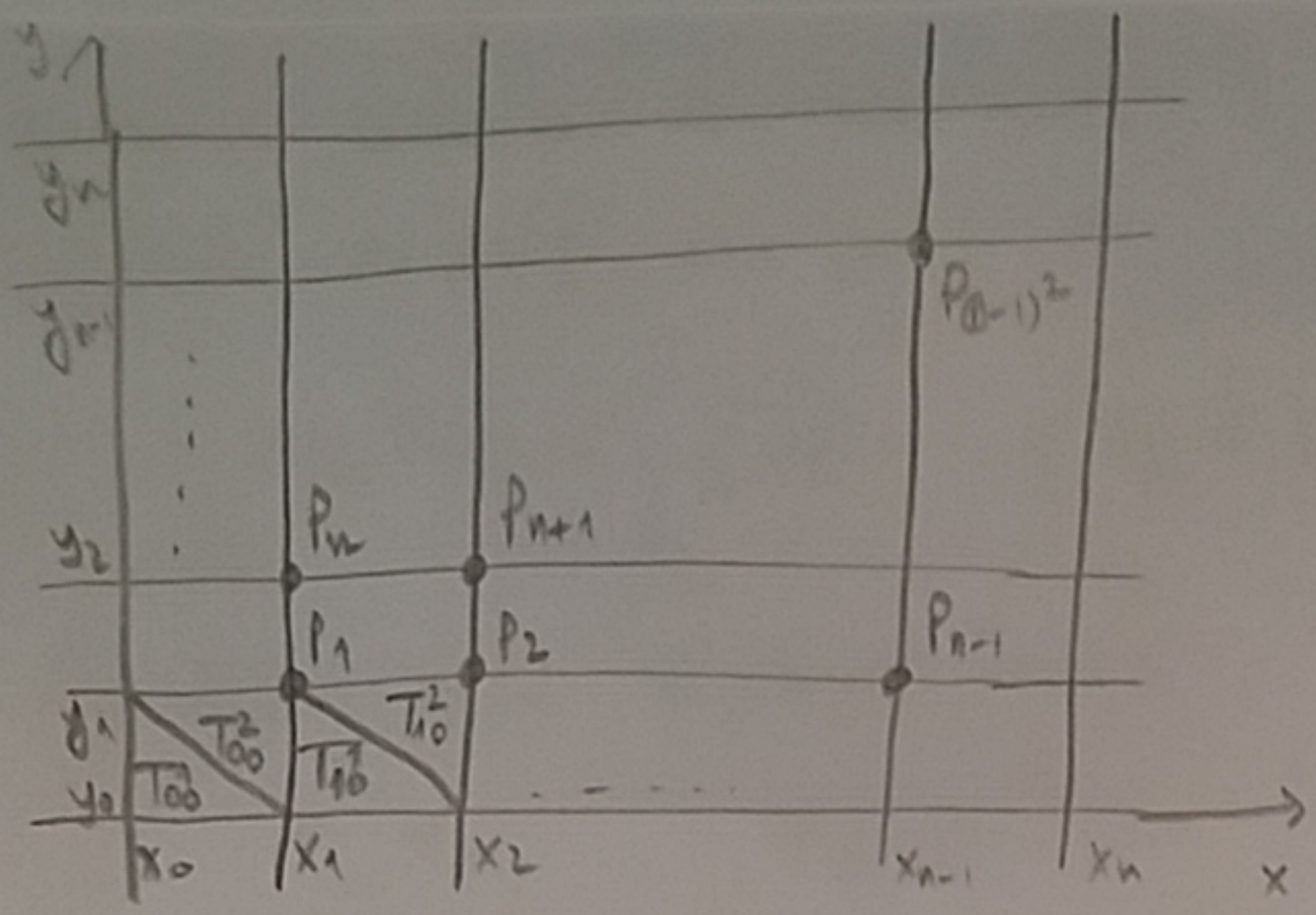
Problema Galerkin de aproximare.

Definirea rețelei 2d pe Ω. Pentru n număr natural nenul împărțim $[0,1]$ în n subintervale de lungime egală

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1 \qquad h = \frac{1}{n}, \quad x_i = ih \qquad \forall\, i,j = 0..n$$
$$0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n = 1 \qquad y_j = jh$$

Notăm $T_{ij} = [x_i, x_{i+1}]\times[y_j, y_{j+1}]$ definim triunghiurile
$i,j = 0..n-1$





Consideram familia de triunghiuri T_h care reunește toate triunghiurile T_{ij}^1, T_{ij}^2 $i,j=0..n-1$ definite anterior. Marimea acestei triangulatii este $\sqrt{2}\,h$. Consideram si toate nodurile interioare $P_1, \ldots, P_{(n-1)^2}$ definite ca in figura de mai sus se poate demonstra că pentru P_K dat vom avea că P_K are coordonate x_i, y_j date de formulele:

$$P_K(x_i, y_j): \quad K = (j-1)(n-1) + i$$

Spre exemplu $j=1, i=1 \Rightarrow K=1$
$j=n-1, i=n-1 \Rightarrow K=(n-1)^2$

Vom defini problema Galerkin folosind elemente continue, liniare pe porțiuni. Definim spațiul de elemente finite

$$V_h = \{ \varphi \in C(\Omega) \mid \varphi|_T \text{ polinom de grad} \le 1, \forall T \in T_h, \varphi|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

Stim că $V_h \subset H_0^1(\Omega)$

Problema Galerkin de aproximare.

Aflați $u_h \in V_h$ așa ca

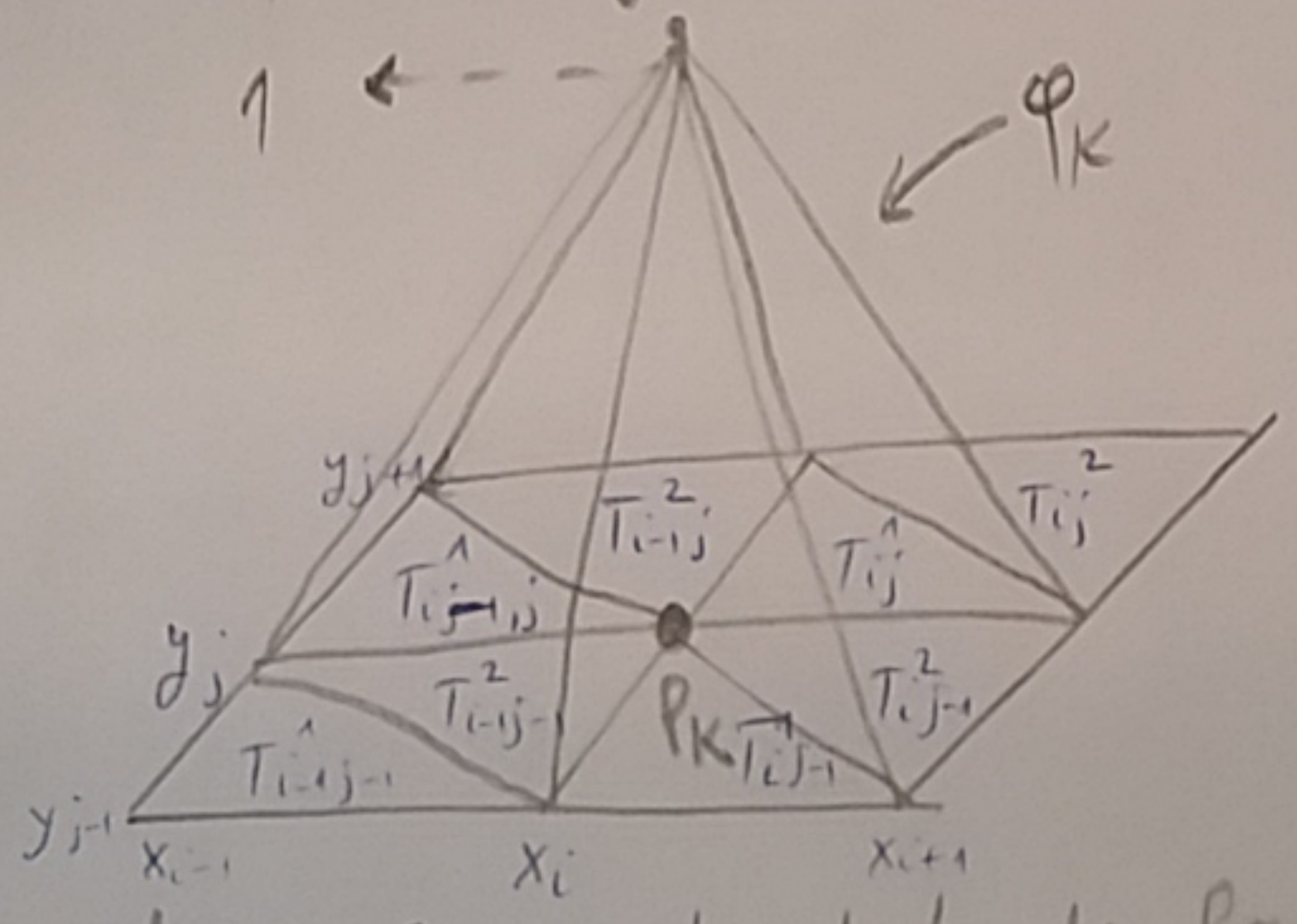
$$\int_\Omega \nabla u_h \nabla v_h = \int_\Omega f v_h \qquad \forall v_h \in V_h.$$

Construim bază algebrică în V_h

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{(n-1)^2}$ numite funcții de bază.

Fiecare astfel de funcție φ_k e atașată unui nod interior P_k, adică $\varphi_k \in V_h$ și

$$\varphi_k(P_j) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$



Din pct de vedere grafic, aceste funcții au forma unui cort, (de aici și numele de funcții cort, 'tent functions')

Analitic, φ_k sunt date de formula analitică pt $P_k(x_i, y_j)$ atașat lui φ_k

$$\varphi_k(x, y) = \begin{cases} 1 + i + j - \frac{x+y}{h}, & (x,y) \in T^1_{ij} \\ 1 + j - \frac{y}{h}, & T^2_{i-1,j} \\ 1 - i + \frac{x}{h}, & T^1_{i-1,j} \\ 1 - i - j + \frac{x+y}{h}, & T^2_{i-1,j-1} \\ 1 - j + \frac{y}{h}, & T^1_{i,j-1} \\ 1 + i - \frac{x}{h}, & T^2_{i,j-1} \\ 0 & \text{in rest} \end{cases}$$

Soluția aproximantă u_h se va scrie sub forma

$$u_h = \sum_{k=1}^{(n-1)^2} c_k \varphi_k$$ unde $c_k,\ k=1 \dots (n-1)^2$ vor

satisface sistemul algebric liniar

$$R \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{(n-1)^2} \end{bmatrix} = L$$

unde $R_{kl} = \int_\Omega \nabla\varphi_l \nabla\varphi_k$ iar $L_k = F(\varphi_k) = \int_\Omega f\varphi_k$

Se poate arăta că

$$R_{kl} = \begin{cases} 4 & \text{dacă } l = k \text{ (adică nodurile } P_k, P_l \text{ sunt identice)} \\ -1 & \text{dacă } P_k, P_l \text{ sunt noduri vecine} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

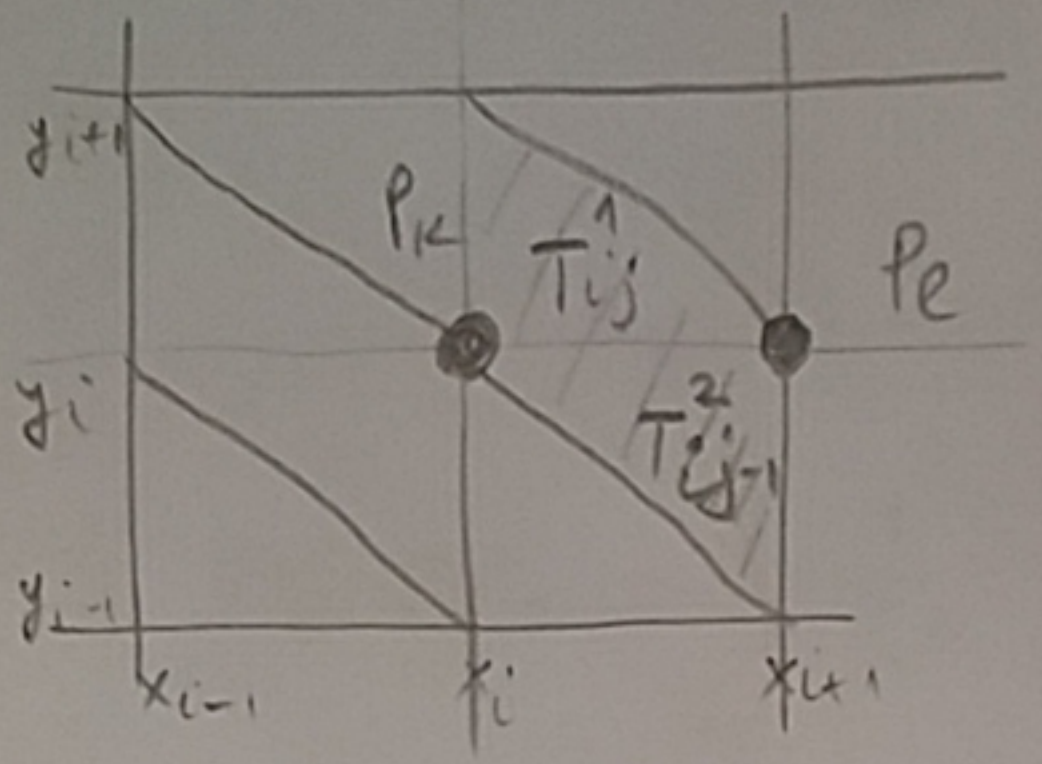
în aceste condiții matricea $R = (R_{kl})_{k,l=1 \dots (n-1)^2}$ va

lua forma

$$R = \begin{pmatrix} A & -I & 0 & \cdots & & 0 \\ -I & A & -I & \cdots & & 0 \\ 0 & -I & A & -I & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & -I \\ & & & & -I & A \end{pmatrix} \leftarrow \dim (n-1)^2$$

unde $$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \dim\ n-1$$

Exemplu de calcul al lui R_{kl} dacă P_k, P_l sunt noduri vecine, ca în figură.



În acest caz suportul funcțiilor φ_K, φ_l se va intersecta numai pe triunghiurile T^1_{ij}, T^2_{ij-1}

Prin urmare, vom avea că

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi_K \nabla\varphi_l = \int_{T^2_{ij-1}} \nabla\varphi_K \nabla\varphi_l + \int_{T^1_{ij}} \nabla\varphi_K \nabla\varphi_l$$

Avem că $P_K(x_i, y_K)$, $P_l(x_{i+1}, y_j)$ așadar, conform formulei analitice, pe triunghiul T^2_{ij-1}

$$\varphi_K(x,y) = 1+i-\frac{x}{h}$$

$$\varphi_l(x,y) = 1-(i+1)-j+\frac{x+y}{h}$$

$$\frac{\partial\varphi_K}{\partial x} = -\frac{1}{h}, \quad \frac{\partial\varphi_K}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_l}{\partial x} = \frac{1}{h}, \quad \frac{\partial\varphi_l}{\partial y} = \frac{1}{h}$$

de unde

$$\int_{T^2_{ij-1}} \nabla\varphi_K \nabla\varphi_l = \int_{T^2_{ij-1}} -\frac{1}{h^2} = -\frac{1}{2}$$

Similar, pe triunghiul T_{ij}^1

$$\varphi_k(x,y) = 1+i+j - \frac{x+y}{h}$$

$$\varphi_l(x,y) = 1-(i+1)+\frac{x}{h}$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = -\frac{1}{h}, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} = -\frac{1}{h}, \quad \frac{\partial \varphi_l}{\partial x} = \frac{1}{h}, \quad \frac{\partial \varphi_l}{\partial y} = 0$$

deci

$$\int_{T_{ij}^1} \nabla\varphi_k \nabla\varphi_l = \int_{T_{ij}^1} -\frac{1}{h^2} = -\frac{1}{2}.$$

Asadar

$$\int_\Omega \nabla\varphi_k \nabla\varphi_l = \int_{T_{ij}^1} \nabla\varphi_k \nabla\varphi_l + \int_{T_{i-1,j}^2} \nabla\varphi_k \nabla\varphi_l = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

Similar se va calcula R_{kl} atunci cand $\varphi_k = \varphi_l$, cu diferenta ca $\int_\Omega \nabla\varphi_k \nabla\varphi_k$ se va sparge in integrale pe cele 6 triunghiuri care compun suportul lui φ_k

$$\int_\Omega \nabla\varphi_k \nabla\varphi_k = \int_{T_{ij}^1} \nabla\varphi_k \nabla\varphi_k + \int_{T_{i-1,j}^2} \nabla\varphi_k \nabla\varphi_k + \int_{T_{i-1,j}^1} \nabla\varphi_k \nabla\varphi_k + \int_{T_{i-1,j-1}^2} \nabla\varphi_k \nabla\varphi_k +$$

$$\int_{T_{i,j-1}^1} \nabla\varphi_k \nabla\varphi_k + \int_{T_{i,j-1}^2} \nabla\varphi_k \nabla\varphi_k$$

Prima si a 4-a sunt egale cu 1, restul cu $\frac{1}{2}$. Spre exemplu

$$\int_{T_{ij}^1} \nabla\varphi_k \nabla\varphi_k = \int_{T_{ij}^1} \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} = 1$$

Per total $\int_\Omega \nabla\varphi_k \nabla\varphi_k = 4$

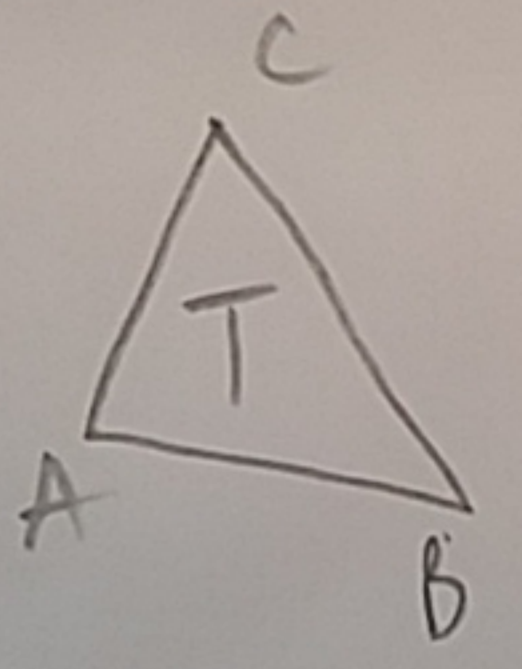
Termenul liber

Trebuie calculată integrala

$$L_k = \int_\Omega f\varphi_k = \int_{T^1_{i,j}} f\varphi_k + \int_{T^2_{i-1,j}} f\varphi_k + \int_{T^1_{i-1,j}} f\varphi_k + \int_{T^1_{i-1,j-1}} f\varphi_k + \int_{T^1_{i,j-1}} f\varphi_k +$$

$$+ \int_{T^2_{i,j-1}} f\varphi_k$$

Fiecare din cele 6 integrale pot fi aproximate folosind, spre exemplu, formula de cuadratură de ordin 2



$$\int_T f(x,y)\,dx\,dy \sim \frac{aria(T)}{12}\left(f(A)+f(B)+f(C)+9f(G)\right)$$

unde G este centrul de greutate al triunghiului T

Aplicand această formulă se obține

$$L_k \sim \frac{h^2}{24}\Big(6f(x_i,y_i)+9f\big(x_i+\tfrac{h}{3}, y_j+\tfrac{h}{3}\big)+9f\big(x_i+\tfrac{2h}{3}, y_j-\tfrac{h}{3}\big)+9f\big(x_i-\tfrac{h}{3}, y_j-\tfrac{h}{3}\big)+9f\big(x_i-\tfrac{2h}{3}, y_j+\tfrac{h}{3}\big)$$
$$+9f\big(x_i+\tfrac{h}{3}, y_j-\tfrac{2h}{3}\big)+9f\big(x_i-\tfrac{h}{3}, y_j+\tfrac{2h}{3}\big)\Big).$$

Se rezolvă sistemul cu matricea R și termenul liber L și se află coeficienții $C_1, \ , C_{(n-1)^2}$