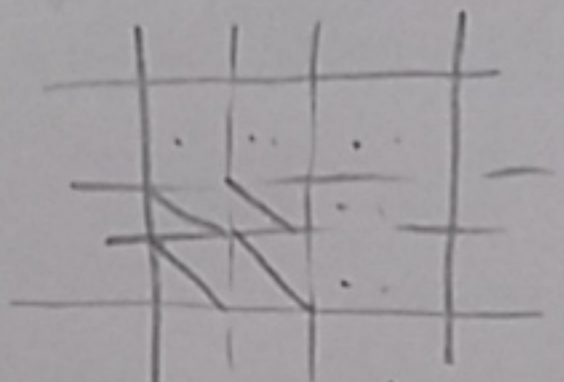
Curs 12

In cursul precedent am prezentat un exemplu de rezolvare a problemei Galerkin în cazul 2d pe un pătrat cu o rețea uniformă.



Această situație simplifică foarte mult calculele deoarece în acest caz funcțiile de bază $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ în cazul liniar sunt date de o formulă analitică ce permite calculul derivatelor parțiale $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}$ și, ulterior, determinarea matricii R a sistemului algebric liniar ce trebuie calculat. Și termenul liber al sistemului este relativ ușor de aproximat folosind o formulă de cuadratură pentru că funcțiile de bază φ_i sunt cunoscute.

Cum se procedează în cazul general, adică atunci când domeniul Ω este un poligon (în alte situații Ω va fi aproximat cu un poligon)?

Vom considera pe Ω o familie de rețele triunghiulare (triangulații) quasiuniforme $(T_h)_h$, vezi cursul 7, adică în aceste rețele ce devin din ce în ce mai fine pe măsură ce h tinde la 0 nu se admit unghiuri arbitrar de mici sau de mari.

Asociat fiecărei rețele T_h vom considera spațiul X_h^1, spațiul funcțiilor continue care sunt polinoame de grad ≤ 1 pe fiecare triunghi $T \in T_h$.

Vom nota $V_h = \{\varphi \in X_h^1 \mid \varphi|_{\partial\Omega} = 0\}$.

Revenim la problema Poisson din cursul precedent

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases} \qquad f \in C(\Omega).$$

Problema Galerkin este:

aflați $u_h \in V_h$

așa că $\displaystyle\int_\Omega \nabla u_h \nabla v_h dx = \int_\Omega f v_h dx \quad \forall v_h \in V_h$.

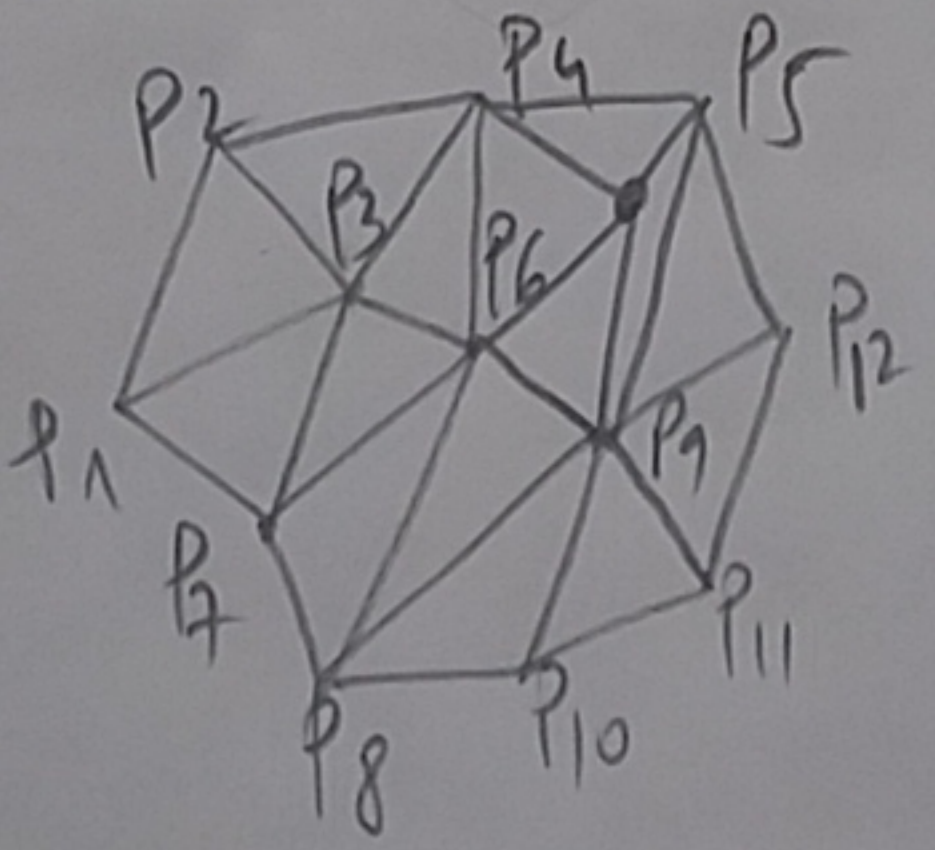
(integralele sunt în sens Lebesgue)

Cum se calculează u_h în acest caz general?

Vom prezenta o soluție care ia în calcul și situația când u nu este nul pe frontieră.

Nodurile din rețea sunt numerotate

$P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, ..., $P_n(x_n,y_n)$, spre ex. ca în figura de mai jos.

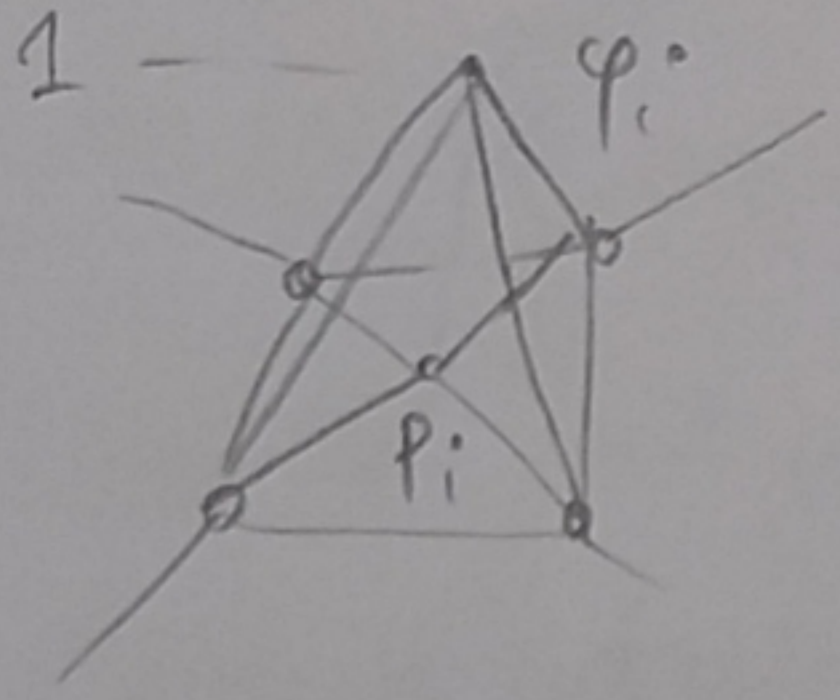


$x_i y_i$ denotă coordonatele punctului P_i.

Vom considera apoi funcția φ_i asociată fiecărui nod P_i, $\varphi_i \in X_h^1$ așa ca:

$$\varphi_i(P_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Geometric φ_i arată ca mai jos



Funcțiile $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ formează o bază în X_h^1.

Scriem

$$u_h = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n$$

Vom căuta să calculăm $c_1, \dots, c_n$ cu mențiunea că, datorită sistemului algebric pe care îl vom construi coeficienții c_i corespunzători nodurilor P_i de pe frontieră vor fi automat egali cu 0, așa cum ar trebui, deoarece $u_h = 0$ pe $\partial\Omega$

Desigur că matematic este mai simplu să considerăm direct numai nodurile interioare și funcțiile de bază asociate lor (cum am făcut în cursul precedent) însă din punct de vedere computațional este mai simplu să considerăm toate nodurile (inclusiv cele de pe $\partial\Omega$) și ulterior să 'forțăm' respectarea condiției pe frontieră direct din sistemul algebric liniar. (altfel spus, în această abordare, codul Matlab este mai explicit, de asemenea și tratarea situației când valoarea pe $\partial\Omega$ e nenulă e mai simplă).

Asadar
$$u_h = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n$$
unde $c_i = 0$ ~~întotdeauna~~ când $P_i \in \partial\Omega$. Rezultă atunci că $c_1, c_2, \dots c_n$ sunt soluțiile sistemului

$$R\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = F$$

unde $R_{ij} = \int_\Omega \nabla\varphi_j \nabla\varphi_i$, exceptând situația când P_i este pe $\partial\Omega$, caz în care $R_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$

Similar, $F_i = \int_\Omega f\varphi_i$ dacă $P_i \notin \partial\Omega$ iar dacă $P_i \in \partial\Omega$ atunci $F_i = 0$.

Practic, dacă noi nu am lua în considerare nodurile de pe $\partial\Omega$ atunci întotdeauna $R_{ij} = \int \nabla\varphi_j \nabla\varphi_i$ și $F_i = \int f\varphi_i$ ⟶

dar dacă vrem să le adăugăm și pe acestea în sistem atunci linia din matricea R corespunzătoare unui nod P_i de pe $\partial\Omega$ are forma

$$(0 \quad 0 \dots \quad 0 \quad \underset{\uparrow i}{1} \quad 0 \dots \quad 0)$$

iar $F_i = 0$.

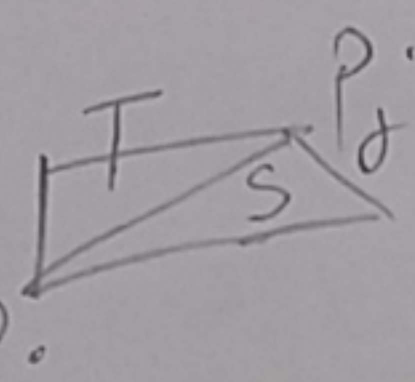
În rest se folosesc exact aceleași formule (a se sesiza analogia cu situația din Laborator 6 când am modificat sistemul pt a lua în calcul și alte valori în capete).

Așadar acum problema se reduce la a calcula R_{ij} și F_i pt $i, j = 1 \dots n$ și rezolvarea sistemului.

Din cauză că rețeaua nu este uniformă nu există o formulă de calcul simplă pentru R_{ij}, putem totuși observa că dacă P_i și P_j nu sunt noduri vecine sau identice atunci $R_{ij} = 0$.

Cum se calculează R_{ij} dacă $i = j$ sau dacă P_i și P_j sunt noduri vecine?

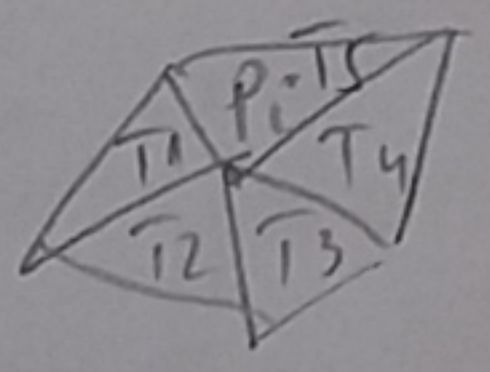
Să considerăm situația în care P_i și P_j sunt noduri vecine. În acest caz suportul funcțiilor φ_i, φ_j se va suprapune pe cel mult 2 triunghiuri (posibil unul singur dacă ambele noduri sunt pe $\partial\Omega$)



și atunci vom avea că

$$R_{ij} = \int_\Omega \nabla\varphi_j \nabla\varphi_i = \int_T \nabla\varphi_j \nabla\varphi_i + \int_S \nabla\varphi_j \nabla\varphi_i$$

Dacă $P_i = P_j$ atunci integrala care definește R_{ij} se sparge într-o sumă de integrale pe fiecare triunghi din suportul lui φ_i



$$R_{ii} = \int_\Omega \nabla\varphi_i \nabla\varphi_i = \int_{T_1} \nabla\varphi_i \nabla\varphi_i + \dots + \int_{T_5} \nabla\varphi_i \nabla\varphi_i$$

Similar $F_i = \int_\Omega f\varphi_i = \int_{T_1} f\varphi_i + \dots + \int_{T_5} f\varphi_i$

Cum se calculează toate aceste integrale? $\longrightarrow$

In practică este destul de complicat să se facă două bucle tip 'for' peste toate nodurile în care să se calculeze una câte una valorile $R_{11}, R_{12}, \ldots, R_{21}, R_{22}, \ldots R_{nn}, F_1, F_2 \ldots F_n$.

In fapt, este mult mai simplu ca bucla să se facă NU PESTE NODURI CI PESTE TRIUNGHIURILE din rețea, și la fiecare pas, atunci când am ajuns la triunghiul T din rețea să calculăm toate integralele asociate acelui triunghi.

Spre exemplu, dacă triunghiul T are vârfurile P_i, P_j, P_k atunci vor trebui calculate integralele

$$\int_T \nabla\varphi_i \nabla\varphi_i, \quad \int_T \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j \quad \int_T \nabla\varphi_i \nabla\varphi_k$$

$$\int_T \nabla\varphi_j \nabla\varphi_j \quad \int_T \nabla\varphi_j \nabla\varphi_k \quad \int_T \nabla\varphi_k \nabla\varphi_k$$

$$\int_T f\varphi_i \quad \int_T f\varphi_k \quad \int_T f\varphi_j.$$

Codul simplificat va arăta după cum urmează:

Pas 1 $R = zeros(n,n);$ (inițializăm matricea și termenul liber, n este numărul nodurilor)
$F = zeros(n,1);$

Pas 2 buclă for peste toate triunghiurile
corespunzător triunghiului curent T avem noduri P_i P_j P_k

$$R_{ii} = R_{ii} + \int_T \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_i$$

$$R_{ij} += \int_T \nabla\varphi_j \nabla\varphi_i$$

$$R_{ik} += \int_T \nabla\varphi_k \nabla\varphi_i$$

$$R_{jj} += \int_T \nabla\varphi_j \nabla\varphi_j$$

$$R_{jk} += \int_T \nabla\varphi_k \nabla\varphi_j$$

$$R_{kk} += \int_T \nabla\varphi_k \nabla\varphi_k$$

$$F_i += \int_T f\varphi_i$$

$$F_j += \int_T f\varphi_j$$

$$F_k += \int_T f\varphi_k$$

Pas 3 modificam matricea si termenul liber acolo unde i corespunde unui nod P_i de pe frontieră.

Lista indicilor nodurilor de pe frontieră va fi stocată într-un vector bd de lungime n'.

Deci indicii nodurilor de pe frontieră sunt $bd(1), bd(2) \ldots bd(n')$

buclă for de la 1 la n'

la pasul k se modifică linia $bd(k)$ din matricea R pt ca ea să devină

$0 \; 0 \ldots 0 \; 1 \; 0 \ldots 0$

poziția $bd(k)$

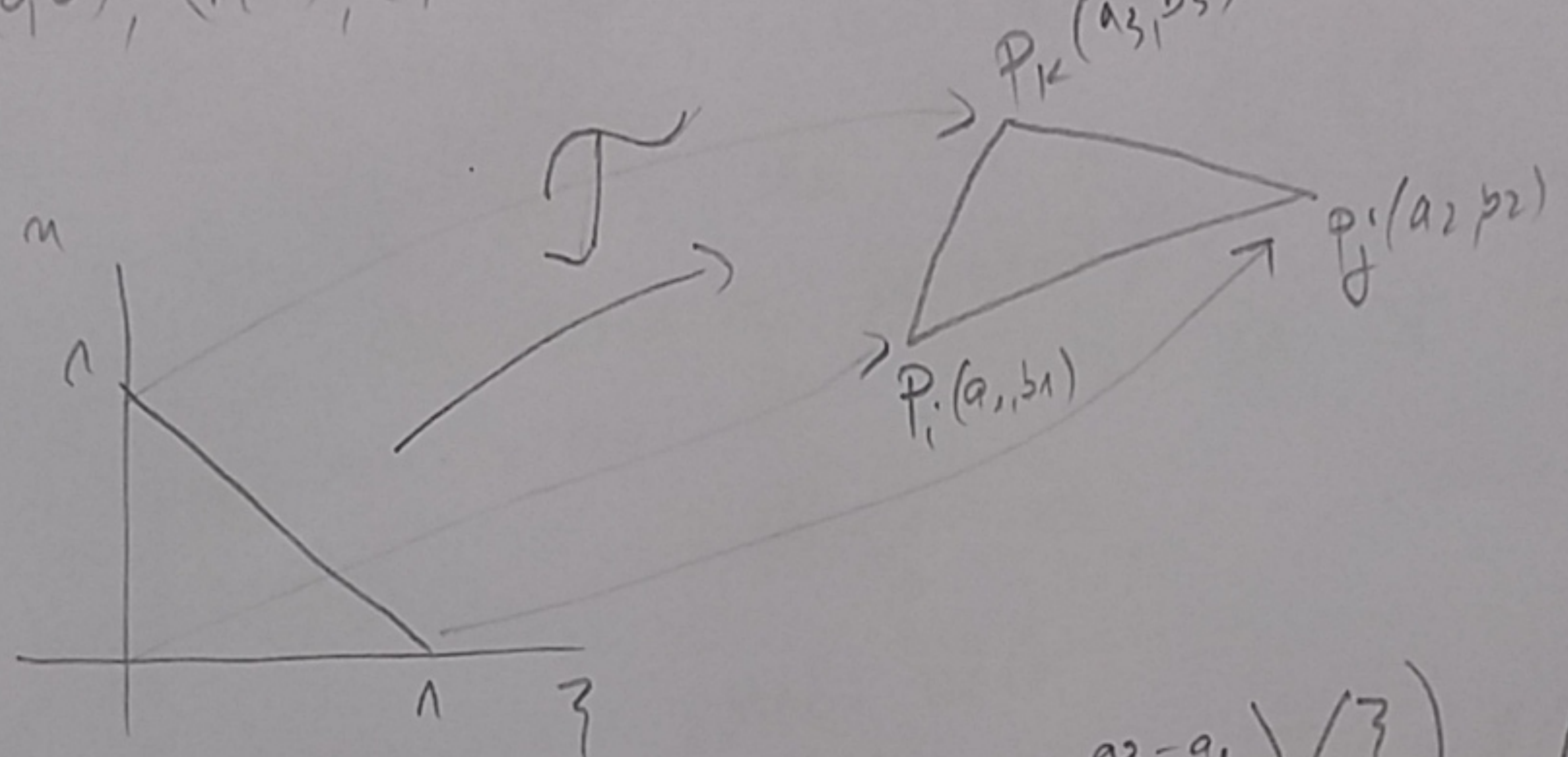
de asemenea se pune $F(bd(k)) = 0$

Pas 4 Se rezolvă sistemul $Rc = F$ și se găsesc coeficienții $c_1, \ldots, c_n$.

Pentru calculul integralelor de tipul

$$\int_T \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j$$

se poate face o schimbare de variabilă de la triunghiul T la triunghiul de referință $\tilde{T}$ de vârfuri $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ ca în figură



$$J\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 \\ b_2-b_1 & b_3-b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}$$

observăm că

$$\varphi_i(J(\xi,\eta)) = 1-\xi-\eta$$

$$(*) \quad \varphi_j(J(\xi,\eta)) = \xi$$

$$\varphi_k(J(\xi,\eta)) = \eta$$

Din prima formulă, prin derivare în raport cu ξ și η obținem

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} = -1$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} = -1$$

altfel spus

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\uparrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

de unde rezultă

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} b_3 - b_1 & -(b_2 - b_1) \\ -(a_3 - a_1) & a_2 - a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

similar se obține

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} b_3 - b_1 & -(b_2 - b_1) \\ -(a_3 - a_1) & a_2 - a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} & \swarrow & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Valorile obținute pot fi folosite pt calculul integralelor de tip $\int_T \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j$.

Pentru a calcula $\int_T f\varphi_i$

se poate folosi schimbarea de variabilă pentru a muta integrala pe $\tilde{T}$ folosind apoi și formulele (*)

$$\int_T f(x,y)\,\varphi_i(x,y)\,dx\,dy = \int_{\tilde{T}} f(\mathcal{T}(\xi,\eta))\,\varphi(\mathcal{T}(\xi,\eta))\,|\det A|\,d\xi\,d\eta$$

$$= \int_{\tilde{T}} f(\mathcal{T}(\xi,\eta))(1-\xi-\eta)\,|\det A|\,d\xi\,d\eta.$$

Mai departe ultima integrală se calculează numeric folosind formule de cuadratură precum cea prezentată în cursul precedent.

Similar

$$\int_T f(x,y)\,\varphi_j(x,y)\,dx\,dy = \int_{\tilde{T}} f(\mathcal{T}(\xi,\eta))\cdot\xi\,|\det A|\,d\xi\,d\eta$$

$$\int_T f(x,y)\,\varphi_k(x,y)\,dx\,dy = \int_{\tilde{T}} f(\mathcal{T}(\xi,\eta))\,\eta\,|\det A|\,d\xi\,d\eta$$