

IMT 2111 - Tarea #1

Prof. Manuel A. Sánchez

Marzo 2019

Problema 1

- Pruebe la unicidad en el teorema de SVD, es decir, pruebe que si $A \in C^{m \times m}$ y los σ_j son distintos los vectores singulares izquierdos y derechos son únicos hasta un signo complejo.

Problema 2

SVD y compresión de imágenes.

- 2.1 Dada una matriz $A \in C^{m \times n}$ y su respectiva decomposicion SVD, calcule:
- a. el costo de guardar cada elemento de A
 - b. el costo de guardar cada término de la SVD
 - c. el costo de guardar un término de SVD
 - d. k , donde el costo de guardar k -términos es igual al costo de guardar cada elemento de A. Comente en el significado de este resultado.
 - e. estime el error relativo asociado a la imagen con k -terminos
- 2.2 Considere una matriz aleatoria de $C \in C^{10 \times 10}$ e interpretelas como una imagen de 10×10 pixeles.
- a. Grafique la imagen en escala de grises
 - b. Calcule la descomposición SVD de esta matriz y grafique el producto (escala de grises)
 - c. Calcule el respectivo k definido en 2.1 d. y grafique las imagenes para $n = 1, \dots, k$ términos
- 2.3 Repita 2.2 con una imagen a su elección en escala de grises. En c. grafique solo 5 imágenes.
- 2.4 Repita 2.4 con la misma imagen a color.
- Hint. Calcular SVD decomposition para cada componente RGB. Recomendando las siguientes librerías y comandos:

```

– from numpy.random import rand, randint
– from matplotlib.pyplot import imshow
– from PIL import Image
– from numpy.linalg import svd

```

```

Ejemplo para importar imagenes.
img = Image.open('yourfigure.png')
imggray = img.convert('LA') # figura en escala de grises
# imgRGB = img.convert('RGB') # figura en RGB
plt.imshow(imggray)

```

Problema 3

Comparación de métodos QR. Programe los métodos para la factorización QR, de Gram-Schmidt clásico, Gram-Schmidt modificado (o moderno) y Householder.

3.1 Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Calcule la factorización QR por los tres métodos y por la función `numpy.linalg.qr`. Compare los métodos en error en la norma matricial, ortogonalización, y plotee la componentes diagonales de la matriz triangular superior (r_{jj}). Comente acerca de las diferencias que observe.

3.2 Repita 3.1 con A la matriz de Hilbert con $n = 20$.

Problema 4

Comparación de algoritmos para resolver el problema de ajuste de mínimos cuadrados. Considere la función $f(t) = \exp(\sin(4t))/2006.787453080206$. Ajuste por mínimos cuadrados la función utilizando 100 puntos ($m=100$) y con polinomios de grado 14 ($n = 15$). Note que la función está dada de tal forma que el coeficiente 15 de la solución es exactamente 1 ($x_{15} = 1$). Calcule el ajuste por mínimos cuadrados utilizando:

- Ecuaciones normales (use Cholesky. `numpy.linalg.cholesky`)
- Householder factorización QR
- SVD

Compare el coeficiente 15 obtenido por estos métodos y grafique las soluciones.