Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Coordinación de Matemáticas III (MAT 023)

Guía n°1 – Ecuaciones diferenciales de primer orden

1$^{\text{er}}$ Semestre de 2013

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y' = \frac{1-x^2}{y^2}$ b) $\frac{dy}{dx} = y\,(2+\sin x)$ c) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x}{1+x^2}$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy^3}$ e) $\frac{dy}{dx} = 3xy^2$ f) $x\frac{dv}{dx} = \frac{1-4v^2}{3v}$

g) $\frac{dx}{dt} + x^2 = x$ h) $\frac{dy}{dx} = 3x^2\,(1+y^2)$ i) $(1+e^x)yy' = e^y$

2. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial:

a) $y' = t^3\,(1-y)\,, \quad y\,(0) = 3$ b) $\frac{dy}{dx} = (1+y^2)\tan x, \quad y\,(0) = \sqrt{3}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2y+1}, \quad y\,(0) = -1$ d) $\frac{dy}{dt} = 2\sqrt{y+1}\cos t, \quad y\,(0) = -1$

e) $\frac{dy}{dx} = y\sin x, \quad y\,(\pi) = -3$ f) $y' - y = 2te^t + t^2, \quad y\,(0) = 1$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales:

a) $\frac{dy}{dx} - y = e^{3x}$ b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 2x + 1$

c) $\frac{dr}{d\theta} = +r\tan\theta$ d) $x\frac{dy}{dx} + 3y + 2x^2 = x^3 + 4x$

e) $(x^2+1)\,\frac{dy}{dx} + xy = x$ f) $\frac{dy}{dx} = x^2e^{-4x} - 4y$

4. Hallar la solución general de la ecuación de Bernoulli:

$$2y' + y\tan x = (-2x\sec x)\;y^3$$

5. Resuelva la ecuación:

$$3y' = (1-2t)\,y^4 - y$$

sabiendo que $y\,(0) = 1$.

6. (a) Sea G una función de clase C^1. Hallar un cambio de variables adecuado que permita resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = G\left(ax + by + c\right)$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) Utilice el cambio de variables hallado en (a) para resolver:

$$\frac{dy}{dx} = y - x - 1 + \frac{1}{x - y - 2}$$

7. Considere la ecuación diferencial:

$$y - xy' = a\left(1 + x^2 y'\right), \qquad a > 1$$

(a) Hallar la solución general de la ecuación.

(b) Encuentre una solución particular de la ecuación, tal que $y\left(0\right) = 1$.

(c) Hallar el intervalo más grande donde la solución particular anterior esté contenida.

8. Demuestre que la ecuación diferencial:

$$2x^4 y\, y' + y^4 = 4x^6$$

se reduce a una ecuación homogenea mediante el cambio de variables:

$$y = z^n$$

para cierto $n \in \mathbb{Z}$. Determine el valor de n y resuelva la ecuación.

9. Muestre que la ecuación:

$$2\left(x^3 y - y^3\right) y' = 3\left(x^5 + x^4 y^4\right)$$

se reduce a una ecuación homogenea, realizando el cambio de coordenadas:

$$x = u^p \quad \wedge \quad y = v^q$$

para ciertas constantes adecuadas $p, q \in \mathbb{R}$. Hallar tales constantes y resolver la ecuación diferencial.

10. Considere la ecuación de Ricatti:

$$y' + 2\left(1 - x\right) y - y^2 = x\left(x - 2\right)$$

(a) Hallar constantes $A, B \in \mathbb{R}$ de modo que:

$$y = Ax + B$$

sea una solución particular de la ecuación.

(b) Determine la solución general de la ecuación diferencial.

11. Utilice el cambio de variables sugerido para resolver la ecuación dada:

    (a) $xy' = x + y$, $y = wx$

    (b) $4x^2y + 8xy' + y = 0$, en $]0, \infty[$, $x = e^u$, $z(u) = y(e^u)$

    (c) $y' = (x+y)(x+y+1)^{-1}$, $z = x + y$

    (d) $yy'' = (y')^2$, $p = y'$

12. Resuelva la ecuación:
$$\frac{dy}{dx} = x^3 (y-x)^2 + \frac{y}{x}$$

13. Sea $x > 0$. Considere la ecuación:
$$y' + e^{-2x}y^2 - \frac{1}{x}\left(1 + 4x + 2x^2\right) y = -\frac{e^{2x}}{x}\left(1 + x + 2x^2 + x^3\right)$$

    (a) Hallar una solución particular de la forma:
$$y = e^{2x}(Ax + B)$$

    (b) Resuelva la ecuación diferencial.

14. Un esquiador acuático ubicado en el punto $(a, 0)$ es tirado por un bote que se encuentra en el origen O y viaja hacie el norte en dirección OY. Hallar la trayectoria que sigue el bote si este se dirige en todo momento hacia el bote.

15. Considere un tanque que contiene inicialmente 1000 litros de agua pura, dentro del cual empieza a fluir una solución salina a razón de 6 litros por minuto. La solución dentro del estanque se mantiene bien agitada y fluye hacie el exterior del tanque a una velocidad de 5 litros por minuto. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el estanque es de 1 kilogramo por litro, determine el instante en que la concentración de sal dentro del tanque sea de $\frac{63}{64}$ kilogramo por litro.

16. El modelo de Malthus para el crecimiento de poblaciones está dado por la ecuación:

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad N(0) = N_0$$

donde r es una constante positiva intrínsica a la población y N_0 es la población inicial.

    (a) Resuelva la ecuación diferencial.

    (b) En 1790, la población de EE.UU. era de $3,93$ millones de habitantes, y en 1890 era de $62,98$ millones de habitantes. Estime la población para EE.UU para el año 2000.

    (c) El censo realizado en el año 2000 en EE.UU. estimó en $281,42$ millones de habitantes

    (d) El modelo de Malthus sólo considera muertes por causas naturales, sin embargo, un análisis más detallado indica que hay muertes debida a enfermedades, a desnutrición, a crímenes. En resumen, por la competencia entre los miembros de la población. El modelo logístico implementa dichas consideraciones:
    $$\frac{dN}{dt} = rN(N - K), \qquad N(0) = N_0$$
    para constantes positivas adecuadas r y K. Resuelva la ecuación diferencial.

    (e) Para la población de EE.UU. se sabe, además, que ésta alcanzó los $17,07$ millones de habitantes en 1840. Calcule, usando el modelo logístico, la población de EE.UU. en el año 2000. Compare respecto al censo del año 2000.

    (f) Considerando el modelo logístico, calcule la población límite de EE.UU.

17. La sangre conduce un medicamento a un órgano a razón de $3\left[\frac{\text{cm}^3}{\text{seg}}\right]$ y sale de él a la misma razón. El órgano tiene un volumen líquido de $125\ [cm^3]$. Si la concentración del medicamento en la sangre que entra al órgano es de $0,2\left[\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}\right]$:

    (a) ¿Cuál es la concentración del medicamento en el órgano en el instante t, si incialmente no había rastros de dicho medicamento?

    (b) ¿En qué momento llegará la concentración del medicamento en el órgano a $0,1\left[\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}\right]$

18. Una taza de café caliente, inicialmente a $95°C$, se enfría hasta $80°C$ en 5 minutos, al estar en un cuarto con temperatura de $21°C$. Use sólo la ley de enfriamiento de Newton (ver MAT022) y determine el momento en que la temperatura del café estará a unos agradables $50°C$.

19. Los sicólogos han establecido que bajo ciertas condiciones, la tasa de cambio de la cantidad aprendida por un estudiante en el instante t es directamente proporcional a la diferencia entre la cantidad total A por aprender y la cantidad $L(t)$ aprendida hasta ese instante. La constante de proporcionalidad $k > 0$ se conoce como la tasa de aprendizaje del estudiante.

    (a) De acuerdo a lo anterior, establezca una ecuación diferencial ordinaria que modele la evolución en el tiempo de la cantidad aprendida por el estudiante hasta el instante t. Asumiendo que $L(0) = 0$, pruebe que $L(t) = A(1-e^{-kt})$.

    (b) Suponga que un estudiante debe aprender un total de $A = 200$ palabras de vocabulario técnico. Si el estudiante sabe que en los primeros 5 minutos es capaz de aprender 20 palabras, encuentre la tasa de aprendizaje k del estudiante. Determine cuántas palabras habrá aprendido al cabo de 10 minutos.

20. Era el mediodía en un frío día de julio en Viña del Mar: $16°C$. Un inspector de la Policía de Investigaciones (PDI) llega a la escena de un crimen, encontrando un detective sobre un cadáver. El detective dijo que había varios sospechosos detenidos. Dadas las coartadas se podría hallar al culpable sabiendo el momento exacto de la muerte. El inspector sacó un termómetro y midió la temperatura del cadáver: $34°C$. Luego de realizar peritos en la escena que duraron exactamente una hora, midió nuevamente la temperatura del cuerpo: $33,7°C$. Bajo que la hipótesis de que la temperatura normal de un cuerpo humano es de $37°C$. Determine el momento en que ocurrió el crimen.