Matemática III (MAT023)

1[er] Semestre 2012

Guía de ejercicios

1. Resolver los P.V.I.

   a) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2x+t-1}{x+2t+1}$ con $x(0) = 1$
   Desarrollo: Haremos el cambio de variables

$$\begin{aligned} t &= u + h \\ x &= v + k \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{dx}{dt} = \frac{2x+t-1}{x+2t+1} \\ &= \frac{2(v+k)+(u+h)-1}{(v+k)+2(u+h)+1} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} 2k+h-1 &= 0 \\ k+2h+1 &= 0 \end{aligned}$$

que tiene solución $h = -1, k = 1$ así

$$\begin{aligned} t &= u - 1 \\ x &= v + 1 \end{aligned}$$

y la ecuación se transforma en

$$\frac{dv}{du} = \frac{2v+u}{v+2u}$$

es una ecuación homogénea así ponemos $z = \frac{v}{u}$ de donde

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{2\frac{v}{u}+1}{\frac{v}{u}+2} = \frac{2z+1}{z+2}$$

así

$$\begin{aligned} \frac{dz}{du} &= \left(\frac{2z+1}{z+2} - z\right)\frac{1}{u} \\ &= \left(-\frac{z^2-1}{z+2}\right)\frac{1}{u} \end{aligned}$$

que es de variables separadas

$$\begin{aligned} \int -\frac{z+2}{z^2-1}dz &= \int \frac{du}{u} \\ \frac{1}{2}\ln|z+1| - \frac{3}{2}\ln|z-1| &= \ln|u| + C \end{aligned}$$

volvemos a la variable original

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{v}{u}+1\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{v}{u}-1\right|=\ln|u|+C$$

pero

$$\begin{aligned} t+1 &= u \\ x-1 &= v \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{t+1}+1\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{t+1}-1\right|=\ln|t+1|+C$$

pero $x(0)=1$ así

$$0=\ln|1+1|+C$$

así

$$C=-\ln 2$$

y

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{t+1}+1\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{t+1}-1\right|=\ln|t+1|-\ln 2$$

b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{e^{x+y}+ye^y}{xe^y-1}$ con $y(0)=1$

Desarrollo: Esta ecuación es

$$\left(e^{x+y}+ye^y\right)\mathrm{d}x+\left(xe^y-1\right)\mathrm{d}y=0$$

veremos si es exacta

$$\begin{aligned} M_y &= N_x? \\ e^{x+y}+e^y+ye^y &\neq e^y \end{aligned}$$

no es exacta, buscamos factor integrante

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{e^{x+y}+e^y+ye^y-e^y}{xe^y-1}$$

no depende solo de x,

$$\frac{N_x-M_y}{M}=\frac{e^y-\left(e^{x+y}+e^y+ye^y\right)}{e^{x+y}+ye^y}=-1$$

luego la ecuación tiene un factor integrante que depende de y.

$$\mu(y)=e^{-y}$$

así

$$\left(e^x+y\right)\mathrm{d}x+\left(x-e^{-y}\right)\mathrm{d}y=0$$

esta ecuación es exacta

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= e^x+y \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= x-e^{-y} \end{aligned}$$

entonces

$$F(x,y) = e^x + xy + g(y)$$

luego

$$x - e^{-y} = x + g'(y)$$

de donde

$$g'(y) = -e^{-y}$$

entonces

$$g(y) = e^{-y}$$

así

$$F(x,y) = e^x + xy + e^{-y}$$

la solución esta definida implícitamente por

$$e^x + xy + e^{-y} = C \text{ con } C \in \mathbb{R}$$

reemplazando $y(0) = 1$

$$\begin{aligned} 1 + 0 + e^{-1} &= C \\ 1 + \frac{1}{e} &= C \end{aligned}$$

así

$$e^x + xy + e^{-y} = 1 + \frac{1}{e}$$

2. Obtenga una solución a la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{x^2}y^2 - \frac{1}{x}y + 1 \\ y(1) &= 3 \end{aligned}$$

Indicación: Buscar primero una solución de la forma $y = ax + b$.

Desarrollo: Usamos la indicación para buscar una solución (la ecuación de de Ricatti) entonces

$$x^2 a = (ax+b)^2 - x(ax+b) + x^2$$

se sigue

$$ax^2 = \left(a^2 - a + 1\right)x^2 + (2ab - b)x + b^2$$

así

$$b = 0$$

y

$$a = a^2 + 1 - a$$

que tiene solución $a = 1$ una solución es

$$y = x$$

hacemos el cambio de variables

$$y = \frac{1}{u} + x$$

entonces
$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}+1=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{u}+x\right)^2-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{u}+x\right)+1$$
así
$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}+1=\frac{1}{ux}+\frac{1}{u^2x^2}+1$$
eliminando
$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}=\frac{1}{ux}+\frac{1}{u^2x^2}$$
luego
$$\frac{du}{dx}=-\frac{u}{x}-\frac{1}{x^2}$$
es lineal y tiene solución
$$u=\frac{C}{x}-\frac{1}{x}\ln x$$
así, como $y=\frac{1}{u}+x$ se sigue
$$y=\frac{1}{\frac{C}{x}-\frac{1}{x}\ln x}+x$$
pero $y(1)=3$ así
$$3=\frac{1}{c}+1$$
luego $c=\frac{1}{2}$ reemplazando
$$y=\frac{1}{\frac{1}{2x}-\frac{1}{x}\ln x}+x$$

3. Sea sabe que la ecuación
$$y\left(x^2y^2+2\right)\mathrm{d}x+2x\left(1-x^2y^2\right)\mathrm{d}y=0$$
tiene un factor integrante de la forma $\mu(x,y)=h(xy)$ determinar la función h y resolver la ecuación.

Desarrollo: Multiplicamos por el factor integrante
$$\begin{aligned} M(x,y) &= h(xy)\,y\left(x^2y^2+2\right)\\ N(x,y) &= h(xy)\,2x\left(1-x^2y^2\right)\end{aligned}$$
derivando
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(h(xy)\left(x^2y^3+2y\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(h(xy)\left(2x-2x^3y^2\right)\right)\\ & \quad h'(xy)\,x\left(x^2y^3+2y\right)+h(xy)\left(3x^2y^2+2\right)\\ &= h'(xy)\,y\left(2x-2x^3y^2\right)+h(xy)\left(2-6x^2y^2\right)\end{aligned}$$
de donde
$$h'(xy)\left(x\left(x^2y^3+2y\right)-y\left(2x-2x^3y^2\right)\right)=h(xy)\left(\left(2-6x^2y^2\right)-\left(3x^2y^2+2\right)\right)$$

simplificando

$$h'(xy)\left(3x^3y^3\right) = h(xy)\left(-9x^2y^2\right)$$

así

$$\frac{h'(xy)}{h(xy)} = \frac{-3}{xy}$$

se sigue

$$h(xy) = \frac{1}{(xy)^3}$$

ahora podemos resolver

$$\frac{y\left(x^2y^2+2\right)}{(xy)^3}\mathrm{d}x + \frac{2x\left(1-x^2y^2\right)}{(xy)^3}\mathrm{d}y = 0$$

simplificando

$$\left(\frac{2}{x^3y^2} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{2}{x^2y^3} - \frac{2}{y}\right)\mathrm{d}y = 0$$

ahora

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{2}{x^3y^2} + \frac{1}{x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{2}{x^2y^3} - \frac{2}{y} \end{aligned}$$

integrando

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int\left(\frac{2}{x^3y^2} + \frac{1}{x}\right)dx \\ &= \ln x - \frac{1}{x^2y^2} + g(y) \end{aligned}$$

luego

$$\frac{2}{x^2y^3} - \frac{2}{y} = \frac{2}{x^2y^3} + g'(y)$$

así

$$-\frac{2}{y} = g'(y)$$

de donde

$$-2\ln|y| = g(y)$$

así

$$\ln|x| - \frac{1}{x^2y^2} - 2\ln|y| = c \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

4. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$f(u,v) = \left(u^2 + u^2v + 10v, u + v^3\right)$$

a) Mostrar que tiene inversa cerca del punto $(1,1)$
Desarrollo: Notemos que la función es de clase $C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ y

$$\begin{aligned} Df(1,1) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial\left(u^2+u^2v+10v\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(u^2+u^2v+10v\right)}{\partial v} \\ \frac{\partial\left(u+v^3\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(u+v^3\right)}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \left.\begin{pmatrix} 2u(v+1) & u^2+10 \\ 1 & 3v^2 \end{pmatrix}\right|_{(1,1)} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

luego

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

y así, por el teorema de la función inversa, la función es localmente invertible, además

$$f(1,1) = (12,2)$$

b) Calcular la derivada de su inversa en el punto $(12,2)$.
Desarrollo: Como $f(1,1) = (12,2)$ se sigue

$$\begin{aligned} Df^{-1}(12,2) &= Df^{-1}(f(1,1)) = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. Discutir sobre la resolubilidad del sistema

$$\begin{aligned} 3x+2y+z^2+u+v^2 &= 0 \\ 4x+3y+z+u^2+v+w+2 &= 0 \\ x+z+w+u^2+2 &= 0 \end{aligned}$$

para u,v,w en términos de x,y,z en el punto $x=y=z=0$, $u=v=0$ y $w=-2$. Si es posible, obtener la ecuación del plano tangente a

$$w(x,y,z) = 0$$

en $(0,0,0)$.

Desarrollo: Definamos $F:\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{aligned} & F(x,y,z,u,v,w) \\ = & \left(3x+2y+z^2+u+v^2, 4x+3y+z+u^2+v+w+2, x+z+w+u^2+2\right) \end{aligned}$$

el sistema pude verse como

$$F(x,y,z,u,v,w) = (0,0,0)$$

notamos que

$$
\begin{aligned}
D_{(u,v,w)}F(0,0,0) &= \left.\begin{pmatrix} 1 & 2v & 0 \\ 2u & 1 & 1 \\ 2u & 0 & 1 \end{pmatrix}\right|_{(0,0,0)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

que tiene determinante 1, por el teorema de la función implícita se sigue que podemos despejar (u,v,w) en términos de (x,y,z) además

$$
\begin{aligned}
\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}\right|_{(0,0,0)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

de esto obtenemos

$$\nabla W = (1,0,1)$$

y así el plano es

$$
\begin{aligned}
(1,0,1)(x,y,z) &= 0 \\
x+z &= 0
\end{aligned}
$$

6. Un estudiante portador de un virus regresa a un campus universitario aislado que tiene 1000 estudiantes. Si la rapidez con que el virus se propaga es proporcional al producto del número de infectados y el de no infectados, además se observa que que al cuarto día hay 50 contagiados. Determinar el número de estudiantes contagiados a los 7 dias.

   Desarrollo: Del enunciado tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= kx(1000-x) \\
x(4) &= 50 \\
x(0) &= 1
\end{aligned}
$$

se sigue

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1000-x)} &= \int k\mathrm{d}t \\
\frac{1}{1000}\ln\left|\frac{x}{x-1000}\right| &= kt + C
\end{aligned}
$$

de donde

$$\ln\left|\frac{x}{x-1000}\right| = kt + C$$

así
$$\frac{x}{x-1000} = Ke^{kt}$$
luego
$$x(t) = \frac{1000K}{K - e^{-kt}}$$
reemplazando
$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1000K}{K-1} \\ 50 &= \frac{1000K}{K - e^{-k50}} \end{aligned}$$
luego $K = -\frac{1}{999}$ y
$$50 = \frac{1000\left(-\frac{1}{999}\right)}{\left(-\frac{1}{999}\right) - e^{-4k}}$$
de donde $k = -\frac{1}{4}\ln 19 + \frac{1}{4}\ln 999$ se sigue
$$x(t) = \frac{1000\left(-\frac{1}{999}\right)}{\left(-\frac{1}{999}\right) - e^{-\left(-\frac{1}{4}\ln 19 + \frac{1}{4}\ln 999\right)t}}$$
entonces
$$x(7) = \frac{1000\left(-\frac{1}{999}\right)}{\left(-\frac{1}{999}\right) - e^{-\left(-\frac{1}{4}\ln 19 + \frac{1}{4}\ln 999\right)7}} \approx 506.82$$

7. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + y^2 - 2y + 1$ en la región
$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\right\}$$

Desarrollo: La función es continua y el conjunto es compacto, tiene máximo y mínimo absoluto en el conjunto, además
$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + y^2 - 2y + 1\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + y^2 - 2y + 1\right)\right) \\ &= \left(x^2 - 3x + 2, 2y - 2\right) \end{aligned}$$
de donde
$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (0,0) \Leftrightarrow \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ 2y - 2 &= 0 \end{aligned}$$
que tiene solución $x = 1, y = 1$ y $x = 2, y = 1$ ninguno de estos puntos críticos esta en el conjunto. Para examinar en la frontera utilizar Lagrange en 3 problemas por separado
$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \lambda(1,1) \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

(notar que aquí $x, y \geq 0$)

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \lambda(1,0) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

donde $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \lambda(0,1) \\ y &= 0 \end{aligned}$$

donde $y \in [0,1]$. También se puede enfrentar al restringir directamente la función.

8. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to u(x,y)$ una función que satisface

$$2xy\frac{\partial u}{\partial x} - \left(x^2 - y^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

a) Utilizar el teorema de la función inversa para determinar condiciones sobre la función ζ de modo que

$$\begin{aligned} F &: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ F(x,y) &= (\mu(x,y), \zeta(x,y)) \\ &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \zeta(x,y)\right) \end{aligned}$$

sea invertible.

Desarrollo: Por el teorema de la función inversa, si

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial \zeta}{\partial y}\left(-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

b) Escribir la ecuación

$$2xy\frac{\partial u}{\partial x} - \left(x^2 - y^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

en las nuevas variables (μ, ζ) mediante regla de la cadena, resolver esa nueva ecuación y concluir que u debe tener la forma

$$u(x,y) = f\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ es una función arbitraria.

Desarrollo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \mu}\left(-\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \mu}\left(-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}
\end{aligned}$$

se sigue

$$\begin{aligned}
0 &= 2xy\frac{\partial u}{\partial x}-\left(x^2-y^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} \\
&= 2xy\left(\frac{\partial u}{\partial \mu}\left(-\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) \\
&\quad -\left(x^2-y^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \mu}\left(-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) \\
&= 2xy\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\left(x^2-y^2\right)\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \zeta}\left(2xy\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\left(x^2-y^2\right)\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

pero

$$\left(2xy\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\left(x^2-y^2\right)\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\neq 0$$

entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta}=0$$

se sigue

$$u\left(\mu,\zeta\right)=f\left(\mu\right)$$

así

$$u\left(x,y\right)=f\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

donde f es una función arbitraria.