Guía 4.0 de ejercicios resueltos
ICIPEV / Abril 2006

Temas: Ecuaciones Diferenciales de primer orden.

Problema 1: Resolver

$$y' = \frac{1}{x-y} + 1$$

Solución:

Se tiene que:

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+x-y}{x-y}$$

$$\Leftrightarrow (-1-x+y)dx + (x-y)dy = 0$$

Sean $M(x,y) = -1-x+y \wedge N(x,y) = x-y$, ahora comprobaremos si la ecuación es exacta.

$\Rightarrow \frac{dM}{dy} = 1$; $\frac{dN}{dx} = 1$, Con ello, se tiene que $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$, por lo tanto la ecuación es exacta.

Se sabe además que la ecuación representa el diferencia total de alguna función $f(x,y) = c$ desconocida hasta el momento, siendo *c* una constante real.

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = M$$

$\Leftrightarrow df = Mdx$, Integrando a ambos lados se tiene que:

$$\Leftrightarrow f(x,y) = -x - \frac{x^2}{2} + yx + c(y) \qquad (*)$$

Acá *c(y)* corresponde a una constante respecto a la variable *x*, sin embargo no sabemos aun si dicho valor es constante respecto a la variable *y*, por ello debemos realizar el siguiente paso:

$\Rightarrow \dfrac{df}{dy} = N$, así, derivando la expresión (*) e igualando al valor N designado anteriormente se tiene que:

$\Rightarrow x + c'(y) = x - y$

$\Leftrightarrow c'(y) = -y$, integrando a ambos lados respecto a y:

$\Leftrightarrow c(y) = -\dfrac{y^2}{2}$, luego, reemplazando en (*):

$\Rightarrow f(x, y) = -x - \dfrac{x^2}{2} + yx - \dfrac{y^2}{2} = c$, con $c \in IR$.

La expresión anterior es una solución al problema, pues muestra una igualdad en donde la variable *y* depende implícitamente de *x*.

Problema 2: Resolver

$$y' = (8x + 2y + 1)^2$$

Solución:

Hagamos el cambio de variable siguiente:

$u(x) = 8x + 2y + 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{dx} = 8 + 2\dfrac{dy}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad u' = 8 + 2y'$

Reemplazando en la ecuación del problema:

$\Rightarrow \dfrac{u' - 8}{2} = u^2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{du}{dx} = 2u^2 + 8$, ahora la ecuación es de variables separables, por lo tanto:

$\Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{du}{2u^2 + 8} = \int dx \qquad$ (*)

Trabajando de manera independiente la integral del lado izquierdo se tiene lo siguiente:

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{du}{2u^2 + 8} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 + 4}$, ahora usaremos un cambio de variable que facilitará el proceso de integración gracias a la identidad trigonométrica $tg^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$:

Sea $u = 2tg(\theta) \Rightarrow du = 2\sec^2(\theta)d\theta$, así, reemplazando en la integral anterior se llega a:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+4} = \frac{1}{2}\int\frac{2\sec^2(\theta)d\theta}{4tg^2(\theta)+4} = \frac{1}{2}\int\frac{2\sec^2(\theta)d\theta}{4\sec^2(\theta)} = \frac{1}{4}\int d\theta = \frac{1}{4}\theta,$$

Luego, volviendo a la variable u y reemplazando en (*) se llega a lo siguiente:

$\Rightarrow \frac{1}{4}arct\left(\frac{u}{2}\right) = x + c$, con $c \in IR$. Por último, regresando a la variable original el resultado final es:

$$\Rightarrow \frac{1}{4}arct\left(\frac{8x+2y+1}{2}\right) = x + c$$

Observación: Otra forma de resolver la integral $\int\frac{du}{2u^2+8}$ sería la siguiente:

Sabiendo que $\int\frac{dx}{x^2+1} = arct(x)$, basta entonces hacer el reemplazo $x = \frac{u}{2} \Rightarrow 2dx = du$, pues se tiene que:

$\Rightarrow \int\frac{du}{2u^2+8} = \frac{1}{8}\int\frac{du}{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1} = \frac{2}{8}\int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{4}arct(x) = \frac{1}{4}arct\left(\frac{u}{2}\right)$, lo que es igual al resultado antes mostrado.

Problema 3: Muestre que la ecuación diferencial

$$2x^4 yy' + y^4 = 4x^6$$

se reduce a una ecuación homogénea mediante el cambio de variable $y = z^n$, para un cierto n perteneciente a los reales. Determine el valor de n y resuelva la ecuación.

Solución:

$$y = z^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = nz^{n-1}\frac{dz}{dx}$$

Reemplazando en la ecuación se obtiene:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{4x^6 - z^{4n}}{2x^4 nz^{2n-1}}$$ Esta ecuación es homogénea de grado cero ssi: $4 + 2n - 1 = 6 \Leftrightarrow n = \frac{3}{2}$

Luego, con el cambio de variable $z(x) = xv(x) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ y reemplazando nuevamente, la ecuación queda:

$$\frac{3v^2}{4 - v^6 - 3v^3}dv = \frac{dx}{x}$$, de donde, integrando a ambos lados, se obtiene:

$$\frac{1}{5}Ln\left|\frac{v^3 + 4}{v^3 - 1}\right| = Ln|x| + c$$

Por ultimo, la solución final de la ecuación es:

$$\frac{1}{5}Ln\left|\frac{y^2/x^3 + 4}{y^2/x^3 - 1}\right| = Ln|x| + c$$, con c una constante real.

Observación: Se deja al alumno la tarea de realizar la integral para así ejercitarse.

Problema 4: Resuelva el siguiente problema de valor inicial

$$y' + \frac{5y}{9x} = 3x^3 + 4$$

$$y(-1) = 4$$

Solución:

Esta E.D.O es lineal de primer orden, asi que su solución está dada por la fórmula de Leibniz:

$$y(x) = e^{\int a(x)dx}\left(\int e^{-\int a(x)dx} b(x)dx + c\right)$$

Reemplazando $a(x) = -\frac{5}{9x}$, $b(x) = 3x^3 + x$ en la fórmula e integrando se obtiene:

$$y(x) = \frac{27}{41}x^4 + \frac{9}{23}x^2 + cx^{-\frac{5}{9}}$$

Para calcular la constante c usamos la condición inicial

$$4 = y(-1) = \frac{27}{41} + \frac{9}{23} - c \Longrightarrow c = -\frac{2782}{943}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$y(x) = \frac{27}{41}x^4 + \frac{9}{23}x^2 - \frac{2782}{943}x^{-\frac{5}{9}}$$

Problema 4: La recta normal, en cada punto (x, y) de una curva dada, pasa por el punto $(2{,}0)$. Si la curva pasa por el punto $(2{,}3)$, encuentre su ecuación .

Nota: Interesan las ecuaciones que justifican su respuesta y no su intuición.

Solución:

Sea $y = f(x)$ tal curva. Luego la ecuación de la recta normal en un punto $(u, f(u))$ cualquiera de la curva, está dada por la ecuación:

$$y - f(u) = -\frac{1}{f'(u)}(x-u)$$

La recta normal debe pasar por el punto $(2{,}0)$, luego reemplazando en $x = 2$, $y = 0$ se tiene la ecuación diferencial de variable separada:

$$-f(u) = -\frac{1}{f'(u)}(2-u)$$

Haciendo $x = u$ e $y = f(u)$ y resolviendo se tiene:

$$y = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}(2-x) \quad \Leftrightarrow \quad ydy = (2-x)dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{(2-x)^2}{2} + C \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + y^2 = 2C$$

Evaluando en el punto $(2{,}3)$, $2C = 9$ y la curva buscada es:

$$(x-2)^2 + y^2 = 9$$

Problema 5: Inicialmente, en un recipiente del laboratorio, habían 100 [*mg*] de una sustancia radioactiva. Después de 6 horas la masa disminuyo en un 3%. Si la rapidez de desintegración es, en un instante cualquiera, proporcional a la cantidad de sustancia en dicho instante, hallar la cantidad que queda después de 24 horas.

Solución:

Sea $x(t) =$ Cantidad de sustancia radioactiva en el instante t [mg]

$\frac{dx}{dt} =$ Variación de la masa en el tiempo $\left[\frac{mg}{s}\right]$ (rapidez de desintegración).

Luego, como la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad de sustancia, se tiene que la ecuación que modela el problema es:

$$\frac{dx}{dt} = -kx \qquad \text{, siendo } k \text{ una constante de proporcionalidad real}$$

Resolviendo la ecuación se llega a:

$\Rightarrow Ln|x| = -kt + c$, con $c \in IR$

$\Leftrightarrow x(t) = e^{-kt+c}$, haciendo que $e^{-kt+c} = Me^{-kt}$ con $M = e^{c} \in IR$, se llega a:

$\Leftrightarrow x(t) = Me^{-kt}$, luego, evaluando en la condición inicial ($x(0) = 100$):

$\Rightarrow x(0) = 100 = M$, además, se sabe que $x(6) = 97$ (la masa disminuyo en un 3% en 6 horas)

$\Rightarrow x(6) = 97 = 100e^{-6k}$ $\qquad \Rightarrow -\frac{1}{6}Ln\left(\frac{97}{100}\right) = k = 0.005$, así la función $x(t)$ es:

$\Rightarrow x(t) = 100e^{-0.005t}$

Por lo tanto, después de 24 horas, la masa de sustancia radioactiva que queda es:

$\Rightarrow x(t = 24) = 100e^{-0.121}$ [mg]

Problema 6: Un estanque contiene 50 litros de agua pura. Al estanque entra salmuera, que contiene *m* gramos de sal por litro a razón de 1.5 litros por minuto. La mezcla bien revuelta, sale a razón de 1 litro por minuto. Si después de 30 minutos la concentración de sal en el estanque es de 30 gramos por litro. Hallar el valor de *m*.

Solución:

Sea $x(t) =$ Cantidad de sal en el estanque en el instante t (gramos)

$v(t) =$ Volumen de liquido en el estanque en el instante t (litros)

$c(t) = \dfrac{x(t)}{v(t)} =$ Concentración de sal en el estanque en el tiempo t

Luego, la variación de sal en el estanque respecto al tiempo está dada por la cantidad de sal que entra menos la que sale, esto es:

$$\frac{dx}{dt} = 1.5m - 1\frac{x(t)}{v(t)} \qquad (*)$$

Además, la variación del volumen esta dada por:

$\dfrac{dv}{dt} = 1.5 - 1 \Rightarrow v(t) = \dfrac{t}{2} + 50$. Aquí se consideró que v(0) = 50

Reemplazando la función volumen en la ecuación (*) se obtiene:

$\dfrac{dx}{dt} + 1\dfrac{x(t)}{0.5t+50} = 1.5m$, es una ecuación lineal.

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\int \left(1/_{0.5t+50} \right) dt} \left[\int 1.5m e^{\int \left(1/_{0.5t+50} \right) dt} dt + k \right]$$

$$\Rightarrow x(t) = (0.5t+50)^{-2} \left[1.5m \int (0.5t+50)^2 dt + k \right]$$

$$\Rightarrow x(t) = (0.5t+50)^{-2} \left[m(0.5t+50)^3 + k \right]$$

Resolviendo y considerando que $x(0) = 0$, se llega al resultado de la ecuación:

$$x(t) = m\left[0.5t + 50 - \frac{50^3}{(0.5t+50)^2} \right]$$

Por ultimo, evaluando $c(30) = \dfrac{x(30)}{v(30)} = 30$

$$c(30) = m\frac{\left[65 - \dfrac{50^3}{(65)^2} \right]}{65} = 30 \iff m = \frac{1950}{35.4} \approx 55.06$$

Problema 7: Resolver

$$x sen(y) y' + \cos(y) = -x^2 e^x$$

Solución:

Observar que la ecuación puede ser escrita de la siguiente manera:

$\Rightarrow \dfrac{-x sen(y) y' - \cos(y)}{x^2} = e^x$, así, la expresión del lado izquierdo equivale a la siguiente derivada:

$\Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos(y)}{x}\right) = e^x$, (notar que es la derivada de un cuociente de dos funciones), con ello, el problema se transforma en una ecuación de variables separables, esto es:

$$\Rightarrow \int d\left(\frac{\cos(y)}{x}\right) = \int e^x dx$$

$\Rightarrow \dfrac{\cos(y)}{x} = e^x + c$, con lo que se llega a la solución del problema.

Problema 8: Resolver

$$(2x + y) y' = 1$$

Solución:

Observar que la ecuación puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\Rightarrow (2x + y)\frac{dy}{dx} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (2x + y) = \frac{dx}{dy} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dy} - 2x = y \quad \Leftrightarrow \quad x'(y) - 2x(y) = y$$

La expresión anterior es una ecuación lineal, en la que hemos invertido las variables, de tal manera de que *x* es una variable dependiente, e *y* es una variable independiente, así, usando la fórmula para ecuaciones lineales se concluye que:

$\Rightarrow x(y) = e^{\int 2dy}\left[\int y e^{-\int 2dy} dy + k\right]$, resolviendo las integrales (una de ellas es por partes, hacerlo!!! para aprender. Ver detalle de integración por partes en archivo adjunto al final de este documento), se concluye que:

$\Rightarrow x = -\dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{4} + k$, expresión que muestra la solución del problema.

Problemas propuestos

Problema 9: Resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1-(y')^2}$$

Problema 10: Resolver

$$x(x+y)(dx+dy) = \frac{y}{x}(xdy - ydx)$$

Problema 11: Se está celebrando una fiesta en un a habitación que contiene 1800 pies cúbicos de aire libre de monóxido de carbono. En el instante t = 0 varias personas comienzan a fumar. El humo que contiene 6 % de monóxido de carbono, se introduce en la habitación a razón de 0.15 pies cúbicos por minuto, y la mezcla, removida por ventilación, sale a ese mismo ritmo por una ventana entreabierta. ¿Cuándo deberá abandonar una persona prudente esa fiesta, si el nivel de monóxido de carbono comienza a ser peligroso a partir de una concentración de 0.00018?

Problema 12: A un estanque vacío entran dos mezclas A y B (A es un compuesto distinto de B). La mezcla A ingresa a razón de 3 [lt/min] y con una concentración de 6 [kg/lt], la mezcla B lo hace a razón de 2 [lt/min] y su concentración es de 3 [kg/lt]. El estanque tiene una corriente de salida la cual fluye a 4 [lt/min]. ¿Al cabo de cuanto tiempo las concentraciones de los solutos de A y B serán iguales dentro del estanque?

Problema 13:
(sólo para los osados y que disponen de mucho tiempo de ocio para pensar!!!)

Encuentre la forma que debe tener un espejo curvo de modo que la luz de un foco situado en el origen se refleje en un haz paralelo al eje *x*.

Nota: El espejo es una superficie de revolución obtenida al hacer girar una curva $y = f(x)$ en torno al eje *x*. Recordar que ángulo de incidencia = ángulo reflejado.

Comentarios y preguntas a roberto.celis@yahoo.es

¿Como integrar por partes?

Si la integral es muy complicada, se recomienda usar integración por partes, la fórmula es:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Para nunca olvidar dicha formula, recordar la siguiente oración:

"Un **D**ía **V**i **U**na **V**aca **S**in **C**ola **V**estida **D**e **U**niforme" parece chiste…pero ha salvado a miles de alumnos en los certámenes. (Sin = signo menos; Cola = $\int$)

Ejemplo:

$\int x^3\cos(x)dx$; lo mejor en este caso es elegir $x^3 = u$, pues así se disminuirá en un grado el exponente de *x* al derivarlo.

$u = x^3 \quad \to du = 3x^2dx$

$dv = \cos(x) \to v = sen(x)$

Reemplazando en la formula, la integral que así:

$$\int x^3\cos(x)dx = x^3 sen(x) - \int 3x^2 sen(x)dx$$

Pero esta nueva integral también es complicada, por lo que hay que hacerla por partes nuevamente:

$u = 3x^2 \quad \to du = 6xdx$

$dv = sen(x) \to v = -\cos(x)$

Reemplazando nuevamente en la formula, la integral que así:

$$\int x^3\cos(x)dx = x^3 sen(x) - \left[-3x^2\cos(x) + \int 6x\cos(x)dx\right]$$

Ahora, por última vez por partes:

$u = 6x \quad \to du = 6dx$

$dv = \cos(x) \to v = sen(x)$

$$\int x^3\cos(x)dx = x^3 sen(x) - \left[-3x^2\cos(x) + 6xsen(x) - \int 6sen(x)dx\right]$$

Por lo tanto:

$$\int x^3\cos(x)dx = x^3 sen(x) - \left[-3x^2\cos(x) + 6xsen(x) + 6\cos(x)\right]$$

Notar que la elección de los valores de u y v es totalmente arbitraria, así que se deja a elección siempre. Eso sí, el resultado debe ser siempre el mismo sin importar el camino elegido. Además, se debe agregar la constante de integración al final.

Si la integral tiene limites de integración, estos se mantienen al evaluar cada una de las nuevas integrales resultantes y cada una de las nuevas funciones resultantes.

FIN!!

Comentarios y preguntas a roberto.celis@yahoo.es