EDO's de Primer Orden

Problemas Propuestos

1. Considere la ecuación $xy' = 2 - x^2 + (1+2x)y - y^2$. Use el cambio de variable $z = x - y + 1$ para encontrar la solución general.

2. (a) Muestre que la ecuación
$$yF(xy) + xG(xy)\frac{dy}{dx} = 0,$$
puede resolverse usando el cambio $u = xy$.

   (b) Resuelva: $(x^2y^3 + 2xy^2 + y) + (x^3y^2 - 2x^2y + x)\dfrac{dy}{dx} = 0$.

3. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:
   (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$
   (b) $e^x y \dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{2x-y}$
   (c) $y'' = \dfrac{\cos x}{y' e^{(y')^2} + 1}$
   (d) $y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y^4 + x^4}{xy^3}$
   (e) $yy' = x(y^2 + 1)$

4. Considere la familia de ecuaciones diferenciales de primer orden:
$$y' = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \tag{1}$$
es decir, la razón entre dos rectas.
   (a) Si $a/b \neq \alpha/\beta$, pruebe que si (x_0, y_0) es el punto de intersección de las rectas, el cambio de variable $u = x - x_0, v = y - y_0$ transforma a (1) en una ecuación diferencial del tipo
$$\frac{dv}{du} = h\left(\frac{v}{u}\right)$$
   (b) Si $a/b = \alpha/\beta$, pruebe que el cambio de variable $z = ax + by$ transforma a (1) en una ecuación diferencial separable.
   (c) Utilice lo anterior para resolver
      I. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y + 2}{x - y + 1}$.
      II. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$.
      III. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x + 1}{y + x + 5}$.
      IV. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - 2y - 4x}{1 + y + 2x}$.

5. Una curva pasa por el origen del primer cuadrante en el plano XY. El área bajo la curva desde el origen hasta un punto (a, b), con $a, b > 0$, es un tercio del área del rectángulo que tiene a estos puntos como vértices opuestos. Encuentre la curva.

6. Determine la curva que se encuentra por encima del eje x y que tiene la propiedad de que la longitud del arco que une dos puntos cualquiera de ella es proporcional a dicho arco.

7. Se tiene una población de 20000 mil individuos susceptibles a una enfermedad contagiosa en expansión. Inicialmente, el número de personas que tienen la enfermedad es de 4000 y este aumenta a razón de cuatrocientas por día. Suponga que la variación de individuos enfermos es directamente proporcional al producto entre el número de las que han contraído la enfermedad y el número de las que no la han enfermado. ¿Cuánto ha de pasar para que otras cuatro mil personas contraigan la enfermedad?

8. Considere la ecuación diferencial $y' + e^{x-y} + e^x = 0, y(0) = 1$.
   (a) Pruebe que el cambio de variable $u = e^y$ transforma la ecuación dada en la ecuación lineal.
   (b) Encuentre la solución $y = y(x)$ de la ecuación.

9. Un tanque contiene inicialmente 60 gal. de agua pura. Entra al tanque, a una tasa de 2 gal./min., salmuera que contiene 1 lb. de sal por galón, y la solución (perfectamente mezclada) sale de él a razón de 3 gal. por minuto; el tanque se vacía después de 1 hora exactamente.
   (a) Encuentre la cantidad de sal que hay en el tanque después de t minutos.
   (b) ¿Cuál es la máxima cantidad de sal que llega a tener el tanque?

10. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales. Señale dónde es posible resolver.
    (a) $y' + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x^n}, \qquad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
    (b) $xy' + \frac{y}{\sqrt{2x+1}} + y = \tan^2 x$
    (c) $y' - (\tan x)y = e^{\operatorname{sen} x}$

11. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales. Señale dónde es posible resolver.
    (a) $y' + xy = x^3y^3$
    (b) $xy' - (y + xy^3(1 + \ln x)) = 0$
    (c) $2(1 - x^2)y' - (1 - x^2)y = xy^3$

12. Pruebe que ninguna solución de $y'' = e^x + y'$ tiene un máximo relativo. Utilice el cambio de variable $u = y'$ y las propiedades de máximos y mínimos.

13. Considere el problema con la condición inicial:

$$(1 + x^2)y' + 2xy = f(x), \qquad y(0) = 0.$$

    Donde

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \in [0, 1), \\ -x, & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

    (a) Encuentre una solución continua, (pero no de clase $\mathscr{C}^1$) de este problema.
    (b) Evalúe $y'(1^+), y'(1^-)$ y demuestre que $y'(1^+) - y'(1^-) = -1$.

14. Sean y_1, y_2 dos soluciones distintas derivables con derivada continua de la ecuación de Ricatti: $y' + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0$, con a, b, c funciones continuas dadas. Demuestre que cualquier otra solución y satisface

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = Ce^{a(x)(y_2 - y_1)}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

15. (a) Utilice un cambio de variable apropiado para resolver el problema

$$(x + 1)\frac{dy}{dx} = y + 1 + (x + 1)\sqrt{y + 1}, \qquad x > 0.$$

    (b) ¿Es $y = -1$ solución del problema anterior?
    (c) Grafique las soluciones posibles del problema del inciso (a). Comente.

16. Demuestre que $\mu_1(x,y) = x$ es un factor integrante de

$$(3xy + y^2)\,dx + (x^2 + xy)\,dy = 0,$$

pero que $\mu_2(x,y) = \frac{1}{xy(2x+y)}$ también lo es. Resuelva para cada caso y comente.

17. Muestre que el siguiente diferencial

$$(axy^2 + by)\,dx + (bx^2y + ax)\,dy = 0,$$

es exacto solo si $a = b$. Si $a \neq b$, muestre que $x^m y^n$ es un factor integrante, donde m, n dependen de a, b. Determine dichos valores y resuelva la ecuación.

18. Si $y = C(x)$ representa el costo de producir x unidades en un proceso de manufactura, la elasticidad del costo se define como

$$E(x) = \frac{\text{costo marginal}}{\text{costo promedio}} = \frac{C'(x)}{C(x)/x} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}.$$

Encuentre la función de costo si la función de elasticidad es

$$E(x) = \frac{20x - y}{2y - 10x}, \qquad x \geq 500.$$

Problemas Resueltos

1. (a) Muestre que una ecuación diferencial de la forma $y' = f(ax + by + c) - \frac{a}{b}$ donde a, b, c son constantes, tal que $b \neq 0$ puede ser reducida a una ecuación de variables separables.

   (b) Utilice lo anterior para resolver $\dfrac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$.

   Solución.

   (a) Definimos a $u = ax + by + c$. Entonces $u' = a + by'$. Despejando a y' obtenemos la ecuación separable

   $$\frac{1}{b}u' = f(u).$$

   (b) Note que la ecuación propuesta corresponde al caso anterior con $a = -2, b = 1$. Se utiliza el procedimiento anterior. La resolución se deja como ejercicio.

2. Una curva continua $y = f(x)$ en el primer cuadrante parte desde el origen y tiene la propiedad de que el área debajo del cuadrado de dicha curva, desde el origen hasta un punto (x, y) en ella, es igual al cubo de la abscisa de (x, y) más el cuadrado del área del rectángulo que tiene a los puntos $(0,0)$ y (x, y) como vértices opuestos. Hallar una ecuación, como solución de una ecuación diferencial de primer orden, que defina implícitamente la curva $y = f(x)$.
   Solución. Sea $\mathcal{C} : y = f(x)$ la curva que satisface las condiciones del problema. Entonces la curva satisface

   $$\int_0^x y^2(t)\,dt = x^3 + (xy)^2, \qquad x, y > 0.$$

   Usando el teorema fundamental del Cálculo y suponiendo que y es derivable, se tiene

   $$\begin{aligned} y^2 &= 3x^2 + 2xy(y + xy') \\ &= 3x^2 + 2xy^2 + 2x^2yy'. \end{aligned}$$

   Basta definir entonces a $u = y^2$ y luego $u' = 2yy'$. Al reemplazar en lo anterior, se obtiene

   $$u = 3x^2 + 2xy^2 + x^2u',$$

   la que al agrupar luce como

   $$u' + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)u = -3,$$

cuya solución (implícita), está dada por

$$u(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2}\left(C - 3\int x^2 e^{1/x}\,dx\right), C \in \mathbb{R}.$$

Como se definió a $u = y^2$, queda por reemplazar esto en lo anterior y se tiene lo solicitado. Note que la antiderivada es impracticable.

3. Resolver

$$2\cos y\,\frac{dy}{dx} + \operatorname{sen} y = x^2 \operatorname{cosec} y, \qquad y \neq 0.$$

Solución.
Multiplicamos la ecuación por $\operatorname{sen} y$ y obtenemos

$$2\operatorname{sen} y\cos y\,\frac{dy}{dx} + \operatorname{sen}^2 y = x^2, \quad y \neq 0.$$

Esto sugiere el cambio de variable $u = \operatorname{sen}^2 y$ con lo cual $\frac{du}{dx} = 2\operatorname{sen} y\cos y$ y el problema se transforma en la ecuación lineal de primer orden:

$$\frac{du}{dx} + u = x^2, \quad u \neq 0,$$

la cual se deja como ejercicio.

4. Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - y^2 - x^2}{x}, \quad x \neq 0.$$

Solución.
Dividiendo por x obtenemos

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = \frac{y - y^2 - x^2}{x^2}, \quad x \neq 0,$$

Reordenando

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = -1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

lo que sugiere el cambio de variable $u = y/x$. Se deja como ejercicio la resolución.

5. (a) Mediante alguna sustitución apropiada resuelva la ecuación diferencial no lineal

$$y' - 4y\ln y + 2xy(\ln y)^3 = 0.$$

(b) Encuentre la solución que satisface $y(0) = e^{-1/4}$.

Solución.

(a) La ecuación sugiere el cambio $y = e^u$. Con esto, $y' = e^u u'$. Al reemplazar se obtiene

$$e^u u' - 4e^u u + 2xe^u u^3 = 0.$$

Cancelando la exponencial y ordenando, obtenemos la ecuación de Bernoulli

$$u' - 4u = -2xu^3,$$

cuya resolución se deja como ejercicio.

(b) Note que el cambio de variable hecho es $y(x) = e^{u(x)}$. Luego $y(0) = e^{-1/4} = e^{u(0)}$. Entonces $u(0) = -1/4$. Use este dato en la resolución de la ecuación.

6. Resuelva

$$\left(3xy + \frac{\cos x}{x}\right)dx + \left(2x^2 + \frac{\operatorname{sen} x}{xy}\right)dy = 0,$$

sabiendo que admite un factor integrante que la forma $\mu(x, y) = xf(y)$, donde $f(y)$ es una función derivable en una variable por determinar.

Solución.
Como $\mu(x,y) = xf(y)$ es factor integrante, la ecuación

$$f(y)(3x^2y + \cos x)dx + f(y)\left(2x^3 + \frac{\operatorname{sen} x}{y}\right) dy = 0,$$

debe ser exacta y debe satisfacer

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[f(y)(3x^2y + \cos x)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(y)\left(2x^3 + \frac{\operatorname{sen} x}{y}\right)\right],$$

y luego

$$\frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{1}{y} \Rightarrow f(y) = c\,y, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

Haciendo $c = 1$, un factor integrante es $\mu(x,y) = xy$. Se deja como ejercicio resolver la ecuación exacta resultante:

$$(3x^2y^2 + y\cos x)dx + (2x^3y + \operatorname{sen} x)\,dy = 0.$$