**Universidad Técnica Federico Santa María**
**Departamento de Matemática**
**Campus Santiago**

# GUIA 6 MAT023

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{y} + y}$
2. $y' = 2x + y$
3. $y' = \dfrac{1}{x - y} + 1$
4. $y' + \dfrac{x + y}{x + 2y} = 0$
5. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$
6. $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$
7. $(6xy^2 - 3x^2)dx + (6x^2y + 3y^2 - 7)dy = 0$
8. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3e^x$
9. $\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x^2} = x\cos(x)$
10. $y' = (x + y)^2$
11. $y' = (8x + 2y + 1)^2$
12. $(2x - y)dx + (4x - 2y + 3)dy = 0$
13. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$
14. $x(x + y)(dx + dy) = \dfrac{y}{x}(xdy - ydx)$
15. $y' = \dfrac{x + 2y}{x}$
16. $(x + 2y)dx - xdy = 0$
17. $2xydx + (x^2 + 4y)dy = 0$
18. $(1 + y)dx + \dfrac{dy}{x^2 - 3x} = 0$
19. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - 3}{x + y + 1}$
20. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2}x^2(y - 1)^3$

21. Considere la ecuación diferencial $$y - x\frac{dy}{dx} = a\left(1 + x^2\frac{dy}{dx}\right), \ a > 1.$$

   a) Encuentre la solución general.
   b) Encuentre la solución particular que verifica $y(1) = \dfrac{a}{a+1}$
   c) Encuentre el intervalo máximo donde la solución particular anterior está definida.

22. Muestre que la ecuación diferencial $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$ se reduce a una ecuación homogénea mediante el cambio de variable $y = z^n$, para cierto $n \in \mathbb{R}$. Determine el valor de $n$ y resuelva la ecuación.

23. La ecuación $(3x^5+3x^2y^2)dx-(2x^3y-2y^3)dy = 0$ se reduce a una ecuación homogénea haciendo el cambio de variables $x = u^p$ y $y = v^q$. Determine las constantes $p$ y $q$. Resuelva la ecuación.

24. Muestre que la ecuación $y' = \dfrac{y}{x} + x^m y^n f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ se transforma en una ecuación de variables separables usando el cambio de variables $y = vx$, donde $v = v(x)$.
   Use lo anterior para resolver la ecuación
$$y' = \frac{y}{x} + \frac{\sec^2(\frac{y}{x})}{y^2}$$

25. Si la ecuación diferencial $(7x^4y-3y^8)dx+(2x^5-9xy^7)dy = 0$ se multiplica por el factor $x^m y^n$ se transforma en una ecuación exacta, para ciertos valores de $m$ y $n$. Encuentre estos valores y resuelva la ecuación.

26. En los siguientes, multiplique por el correspondiente factor integrante $\mu(x,y)$ para resolver la EDO:

   a) $(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0, \qquad \mu(x,y) = \dfrac{1}{xy^2}$
   b) $(x^2y^2 - 1)dx + (1 + x^2y^2)xdy = 0, \qquad \mu(x,y) = \dfrac{1}{xy}$
   c) $3(y+1)dx - 2xdy = 0, \qquad \mu(x,y) = \dfrac{y+1}{x^4}$
   d) $(x^2 + y^2 - x)dx - ydy = 0, \qquad \mu(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

27. Obtenga la solución de los siguientes problemas de valores iniciales

   a) $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y \ , \ y(3) = 0$
   b) $xy' - y = \dfrac{y}{\ln(y) - \ln(x)} \ , \ y(1) = e$
   c) $y' - y = 2e^{4x} \ , \ y(0) = -3$
   d) $y' + \dfrac{5y}{9x} = 3x^3 + x \ , \ y(-1) = 4$
   e) $y' + \dfrac{2}{x+1}y = 3 \ , \ y(0) = 5$

28. Determine los puntos de equilibrio de las siguientes ecuaciones autonomas:

$$a)\quad x' = x+1 \qquad b)\quad x' = x - x^3 \qquad c)\quad x' = \sinh x^2$$

$$d)\quad x' = x^4 - x^3 - 2x^2 \qquad e)\quad x' = \operatorname{sen} x \qquad f)\quad x' = \operatorname{sen} x - x$$

y clasifique la naturaleza (atractor, repulsor, atractor-repulsor) de cada punto de equilibrio. Construya el retrato de fase de cada ecuación.

29. Halle la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$a)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \qquad b)\quad (t-\sqrt{ty})\frac{dy}{dt} = y$$

$$c)\quad 2ty\frac{dy}{dt} = 3y^2 - t^2 \qquad d)\quad (1+t-2y)dt + (4t-3y-6)dy = 0$$

$$e)\quad y' = \frac{y}{x} - \sec^2\frac{y}{x} \qquad f)\quad y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} + 1$$

$$g)\quad y' = \frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}, \qquad \text{Ayuda: hacer } z = x^2+y^2$$

30. Halle la ecuación de la curva que pasa por el punto (0,1), y que satisface la ecuación diferencial:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{2y-x+3}$$

31. Pruebe que ninguna solución de $y'' = e^x + y'$ tiene máximo relativo.

32. Determine todos los posibles retratos de fases y los respectivos intervalos para $\lambda$ en la siguiente ecuación diferencial dependiente del parámetro $\lambda$:

$$\hat{x} = (x-\lambda)(x^2-\lambda)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

33. Un depósito contiene 100 galones de salmuera en la que hay disueltas 40 libras de sal. Se desea reducir la concentración de sal hasta 0,1 lb por galón, y ello vertiendo en el depósito agua pura a razón de 5 galones por minuto y permitiendo que salga la misma cantidad, mientras se mantiene uniforme la mezcla removiéndola. Cuanto tiempo tardará en conseguirse el proposito?.

34. Un conejo parte del origen de coordenadas y corre por el eje $Y$ con una velocidad de $A$ mts/sg. Al mismo tiempo, un perro sale del punto $(c, 0)$ con una velocidad de $B$ mts/sg (suponer $B > A$).

    *a)* ¿Cuál es la trayectoria del perro?

    *b)* ¿Qué distancia recorre el conejo antes que lo atrape el perro?

35. Un cierto material radiactivo tiene una semivida de 2 hrs. Encuentre el intervalo de tiempo requerido para que una cantidad dada de este material. decaiga hasta un decimo de su masa original.

36. Considere un sistema de masa-resorte horizontal. Suponga que la masa es de 10 unidades; que la constante del resorte es 10; que no hay resistencia del medio y que la fricción del piso es 150 unidades. Suponga que el resorte se estira 105 cm. y se suelta: Determine la ecuación del movimiento entre los dos primeros valores del tiempo en que $v = 0$.

37. Para las siguientes EDO, encuentre la solución general y esboce las gráficas de varios elementos de la familia de curvas solución. Muestre que no hay soluciones que satisfagan las condiciones iniciales dadas. ¿Por qué no contradice esto el teorema de existencia de soluciones?

    *a)* $tx' - x = t^2 \cos t, \qquad x(0) = -3$
    *b)* $tx' = 2x - t, \qquad x(0) = 2$

38. ¿Cuál(es) de los siguientes problemas de valor inicial tienen garantizada una única solución, por el teorema de unicidad de soluciones de ED? Justifique.

    *a)* $y' = 4 + y^2, \qquad y(0) = 1$
    b) $y' = \sqrt{y}, \qquad y(4) = 0$
    c) $y' = t \arctan y, \qquad y(0) = 2$
    d) $y' = y \sin y + s, \qquad y(0) = -1$
    e) $x' = \dfrac{t}{x+1}, \qquad x(0) = 0$
    f) $y' = \dfrac{1}{x} y + 2, \quad y(0) = 1$

39. Suponga que $x$ es una solución del problema de v.i. $\quad x' = x \cos^2 t, \quad x(0) = 1$. Pruebe que $x(t) > 0$ para todos los $t$ para los que $x$ está definido.

40. Suponga que $y$ es una solución del problema de v.i. $\quad y' = (y^2 - 1)e^{ty}, \quad y(1) = 0$. Pruebe que $\quad -1 < y < 1, \quad \forall t \quad$ para los que $y$ está definido.

41. Suponga que $x$ es una solución del problema de v.i. $\quad x' = \dfrac{x^3 - x}{1 + t^2 x^2}, \qquad x(0) = \dfrac{1}{2}$. Pruebe que $\quad 0 < x(t) < 1, \quad \forall t \quad$ para los que $x$ está definido.

42. Describa cualitativamente los tipos de soluciones de las siguientes EDO:

    *a)* $\dot{x} = (x-1)^3 \, e^{\cos(x^4 - 1)}$
    *b)* $\dot{x} = (x-1)\,(x-4)\, e^{2\cos x}$
    *c)* $\dot{x} = (x-1)^2 \, x \, e^{2\cos x}$

43. De acuerdo a Isaac Newton, la temperatura de un cuerpo, en cada instante, varía proporcionalmente a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y el medio; esta última se supone constante. Esta relación puede modelarse mediante la siguiente EDO, donde $T = T(t)$ es la temperatura del cuerpo en el instante $t$ y $T_0$ es la temperatura ambiental:
$$\frac{dT}{dt} = -\lambda(T - T_0)$$
donde $\lambda > 0$ es la constante de proporcionalidad.

    Haga un gráfico, en el plano $t - T$, que muestre la forma de las soluciones. ¿De qué tipo es el punto de equilibrio $T = T_0$?

44. **Modelo epidemiológico**: Consideremos una población de $N$ individuos, que supondremos constante y en la que en cada instante $t$ hay $y(t)$ individuos infectados y $x(t)$ individuos sanos pero susceptibles de infección. Supongamos que el número de individuos infectados cambia con una rapidez proporcional tanto al número de individuos infectados como sanos.

    La EDO que modela esta situación es:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda x(t) y(t)$$

    donde $\lambda > 0$ es la constante de proporcionalidad. Como $x(t) + y(t) = N$, obtenemos:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(N - y)y$$

    ¿Cuáles son los puntos de equilibrio de la epidemia? ¿De qué tipo son? ¿Qué ocurrirá con la epidemia con el transcurso del tiempo?

    Suponga que un estudiante portador de un virus de gripe viene al Campus, que tiene 1980 alumnos. Determine el número de estudiantes contagiados después de 6 días, si observa que después de 4 días $y(4) = 68$.

45. Para describir la rapidez con que se adquiere una habilidad se usa una *curva de aprendizaje*. Por ejemplo, supongamos que un fabricante calcula que un nuevo operario producirá $A$ objetos el primer día de trabajo, y que a medida que adquiere experiencia, producirá objetos más rápidamente, hasta producir un máximo de $M$ objetos por día. Sea $f(t)$ la cantidad de artículos producidos el día $t$, para $t \geq 1$, y supongamos que el ritmo de producción $f'(t)$ es proporcional a $M - f(t)$.

    *a*) Plantee la correspondiente EDO y resuélvala cualitativa y analíticamente.

    *b*) Suponiendo que $M = 30$, $f(1) = 5$, y $f(2) = 8$, estime el número de objetos producidos en el vigésimo día.