1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$

   (b) $e^x y \dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{2x-y}$

   (c) $y'' = \dfrac{\cos x}{y' e^{(y')^2} + 1}$

   (d) $y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y^4 + x^4}{xy^3}$

   (e) $yy' = x(y^2 + 1)$

2. Considere la familia de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$y' = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \tag{1}$$

   es decir, la razón entre dos rectas.

   (a) Si $a/b \neq \alpha/\beta$, pruebe que si (x_0, y_0) es el punto de intersección de las rectas, el cambio de variable $u = x - x_0, v = y - y_0$ transforma a (1) en una ecuación diferencial del tipo

$$\frac{dv}{du} = h\left(\frac{v}{u}\right)$$

   (b) Si $a/b = \alpha/\beta$, pruebe que el cambio de variable $z = ax + by$ transforma a (1) en una ecuación diferencial separable.

   (c) Utilice lo anterior para resolver

      I. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y + 2}{x - y + 1}$.

      II. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$.

      III. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x + 1}{y + x + 5}$.

      IV. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - 2y - 4x}{1 + y + 2x}$.

3. (a) Muestre que una ecuación diferencial de la forma $y' = f(ax + by + c)$ donde a, b, c son constantes, puede ser reducida a una ecuación de variables separables.

   (b) Utilice lo anterior para resolver $\dfrac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$.

4. Considere la ecuación $xy' = 2 - x^2 + (1 + 2x)y - y^2$. Use el cambio de variable $z = x - y + 1$ para encontrar la solución general.

5. (a) Muestre que la ecuación

$$yF(xy) + xG(xy)\frac{dy}{dx} = 0,$$

   puede resolverse usando el cambio $u = xy$.

(b) Resuelva: $(x^2y^3 + 2xy^2 + y) + (x^3y^2 - 2x^2y + x)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

6. Una curva pasa por el origen del primer cuadrante en el plano XY. El área bajo la curva desde el origen hasta un punto (a, b), con $a, b > 0$, es un tercio del área del rectángulo que tiene a estos puntos como vértices opuestos. Encuentre la curva.

7. Determine la curva que se encuentra por encima del eje x y que tiene la propiedad de que la longitud del arco que une dos puntos cualquiera de ella es proporcional a dicho arco.

8. Se tiene una población de 20000 mil individuos susceptibles a una enfermedad contagiosa en expansión. Inicialmente, el número de personas que tienen la enfermedad es de 4000 y este aumenta a razón de cuatrocientas por día. Suponga que la variación de individuos enfermos es directamente proporcional al producto entre el número de las que han contraído la enfermedad y el número de las que no la han enfermado. ¿Cuánto ha de pasar para que otras cuatro mil personas contraigan la enfermedad?

9. Considere la ecuación diferencial $y' + e^{x-y} + e^x = 0, y(0) = 1$.
   (a) Pruebe que el cambio de variable $u = e^y$ transforma la ecuación dada en la ecuación lineal.
   (b) Encuentre la solución $y = y(x)$ de la ecuación.

10. Un tanque contiene inicialmente 60 gal. de agua pura. Entra al tanque, a una tasa de 2 gal./min., salmuera que contiene 1 lb. de sal por galón, y la solución (perfectamente mezclada) sale de él a razón de 3 gal. por minuto; el tanque se vacía después de 1 hora exactamente.
    (a) Encuentre la cantidad de sal que hay en el tanque después de t minutos.
    (b) ¿Cuál es la máxima cantidad de sal que llega a tener el tanque?

11. Considere el problema con la condición inicial:

$$(1 + x^2)y' + 2xy = f(x), \qquad y(0) = 0.$$

Donde

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \in [0, 1), \\ -x, & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

   (a) Encuentre una solución continua, (no de clase $\mathscr{C}^1$) de este problema.
   (b) Evalúe $y'(1^+), y'(1^-)$ y demuestre que $y'(1^+) - y'(1^-) = -1$.

   Observación: Para una función f, se emplean las siguientes notaciones $f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x)$ y $f(a^-) = \lim_{x\to a^-} f(x)$.

12. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales. Señale dónde es posible resolver.
    (a) $y' + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x^n}, \qquad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

(b) $xy' + \frac{y}{\sqrt{2x+1}} + y = \tan^2 x$

(c) $y' - (\tan x)y = e^{\operatorname{sen} x}$

13. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales. Señale dónde es posible resolver.
    (a) $y' + xy = x^3y^3$
    (b) $xy' - (y + xy^3(1 + \ln x)) = 0$
    (c) $2(1 - x^2)y' - (1 - x^2)y = xy^3$

14. (a) Mediante alguna sustitución apropiada resuelva la ecuación diferencial no lineal

$$y' - 4y\ln y + 2xy(\ln y)^3 = 0.$$

    (b) Encuentre la solución que satisface $y(0) = e^{-1/4}$.
    (c) Demuestre que el dominio de definición de esta solución incluye al intervalo $[0, \infty)$.

15. Pruebe que ninguna solución de $y'' = e^x + y'$ tiene un máximo relativo.

16. Sean y_1, y_2 dos soluciones distintas derivables con derivada continua de la ecuación de Ricatti: $y' + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0$, con a, b, c funciones continuas dadas. Demuestre que cualquier otra solución y satisface

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = Ce^{a(x)(y_2 - y_1)}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

17. Considere el siguiente modelo en dinámica poblacional:

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{k}\right)y - Ey, \qquad \text{donde } 0 < E < r,\ k \neq 0.$$

    (a) Hallar y clasificar las soluciones de equilibrio.
    (b) Si $y(0) = \frac{k}{2}\left(1 - \frac{E}{r}\right)$, $r \neq 0$. Bosquejar la solución para este caso usando la línea de fase. Determine $\lim_{t\to\infty} y(t)$.
    (c) ¿Existen valores de los parámetros E, k, r tal que dos puntos críticos consecutivos sean atractores?

18. Considere la ecuación diferencial

$$y' = (y + \beta)(y - 1)e^{y-1}, \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

    (a) ¿Cuáles son las líneas de fase no equivalentes, que admite la ecuación diferencial?
    (b) Bosqueje cualitativamente en cada caso las soluciones $y(0) = 1 - \beta$.
    (c) Para $\beta = 1$ e $y(0) = 1/2$, determinar $\lim_{x\to\infty} y'(x)$.

19. Esboce los campos de direcciones (o campos de pendientes)para la ecuación diferencial dada:
    (a) $\frac{dy}{dt} = 1 - y/3$
    (b) $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1-y}$
    (c) $\frac{dy}{dt} = -\frac{t}{y}$

20. Discuta la veracidad de la siguiente afirmación: Si P, Q, R son puntos de equilibrio de una ecuación diferencial autónoma de primer orden y P es un atractor (sumidero) entonces Q y R pueden ser repulsores (fuentes).

21. El modelo de Smith considera que la evolución de una población P es directamente proporcional al producto entre la población actual con la razón entre la diferencia de la *capacidad del medio* y la población actual, y una función lineal de la población, $l(P) = 1 + \beta P$. Considere la capacidad del medio y la pendiente de $l(P)$, β, como constantes positivas.
    (a) Plantear la ecuación diferencial ordinaria que describe la evolución de la población en el tiempo.
    (b) Analizar el comportamiento cualitativo de las soluciones positivas.
    (c) ¿Qué ocurre para poblaciones iniciales mayores que la capacidad del medio? ¿Para poblaciones menores que la capacidad del medio?
    (d) Esbozar las soluciones de la ecuación obtenida por usted en (a). Si inicialmente la población ocupa la mitad de la capacidad del medio ¿En cuánto tiempo la población ocupa las tres cuartas partes de la capacidad del medio?

22. Considere el problema de valor inicial para $\alpha \geq 2$:

$$y' = \frac{y - \alpha}{\operatorname{sen} t - \alpha} \cos t, \quad y(0) = \sqrt{2}$$

¿Entre qué valores está la solución $y(t)$ del problema de valor inicial? ¡No intente resolver la ecuación diferencial!

23. Considere las ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes:

$$y' = b(y - a) \qquad\qquad y' = -py^3.$$

¿Para qué valores de $a, b, p \in \mathbb{R}$ estas ecuaciones tienen la misma línea de fase? (es decir, equivalentes cualitativamente)