**Universidad Técnica Federico Santa María**
**Departamento de Matemática**
**Campus Santiago**

# E.D.O de primer orden

1. Clasifique y resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden

   *a)* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{2y}, \quad y(0) = 2$

   *b)* $2xydx + (x^2 + 1)dy = 0$

   *c)* $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{5}{2}x^2y^3$

**Solución :**

(a) La ecuación $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{2y}, \quad y(0) = 2$ es de variables separables. Por lo tanto, se tiene

$$2ydy = e^x dx$$

Integrando obtenemos

$$y^2 = e^x + c$$

Como $y(0) = 2$, obtenemos

$$4 = 1 + c \Longrightarrow c = 3$$

Luego, la solución de la ecuación es

$$y(x) = \sqrt{e^x + 3}$$

(b) Esta ecuación es exacta, pues

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Por lo tanto,

$$u(x, y) = \int 2xydx + g(y) = x^2y + g(y)$$

Derivando la solución con respecto a $y$, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + g'(y)$$

Como la ecuación es exacta se debe satisfacer que

$$x^2 + g'(y) = x^2 + 1 \Longrightarrow g'(y) = 1 \Longrightarrow g(y) = y$$

Luego, la solución de la ecuación es

$$u(x, y) = x^2y + y = K$$

(c) Esta ecuación es de Bernoulli. Hacemos el cambio de variable $z = y^{-2}$. Derivando, con respecto a $x$, obtenemos $z' = -2y^{-3}y'$. Reemplazando, en la ecuación obtenemos la ecuación lineal

$$z' + \frac{2}{x}z = 5x^2$$

Su solución es

$$z(x) = x^{-2}(x^5 + c) = x^3 + cx^{-2}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación es

$$y(x) = (x^3 + cx^{-2})^{-\frac{1}{2}}$$

2. Considere la ecuación diferencial $\quad y' + e^{x-y} + e^x = 0, \quad y(0) = 1$

   *a*) Pruebe que el cambio de variable $u = e^y$ transforma la ecuación dada en la ecuación lineal

$$\frac{du}{dx} = -ue^x + e^x$$

   **Solución :** Derivando el cambio de variable con respecto a $x$, tenemos

$$\frac{du}{dx} = e^y \cdot \frac{dy}{dx} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^{-y} \cdot \frac{du}{dx}$$

   Reemplazando en la ecuación, se obtiene:

$$\frac{du}{dx} = -ue^x + e^x$$

   *b*) Encuentre la solución $y(x)$ de la ecuación.

   **Solución :** Como la ecuación anterior es lineal de primer orden, usamos la fórmula de Leibniz para obtener su solución

$$u(x) = 1 + ce^{-e^x}$$

   Por lo tanto, la solución general del problema de valores iniciales es

$$e^y = 1 + ce^{-e^x}$$

   Usando la condición inicial, obtenemos el valor de la contante $c$

$$e = 1 + ce^{-1} \quad \Longrightarrow \quad c = (e-1)e$$

   Luego, la solución que pasa por el punto (0,1) es

$$e^y = 1 + e(e-1)e^{-e^x}$$

3. Resuelva la siguiente ecuación

$$y' = e^{2x}y^2 - 2y - 9e^{-2x}, \quad y(0) = 4$$

   sabiendo que tiene una solución particular de la forma $y_1(x) = ae^{kx}$.

   **Solución**. Como $y_1$ es solución de la ecuación se tiene:

$$ake^{kx} = e^{2x}a^2e^{2kx} - 2ae^{kx} - 9e^{-2x}$$

   o

$$e^{kx}(ak - a^2e^{2x+kx} + 2a) = -9e^{-2x}$$

   De aqui, se obtiene que $a = 3$ (o $a = -3$) y $k = -2$.

   La ecuación dada es una ecuación de Ricatti, hacemos el cambio de variable

$$y = 3e^{-2x} + \frac{1}{z}$$

y la transformamos en la ecuación lineal,

$$\frac{dz}{dx} = -4z - e^{2x}$$

que tiene por solución

$$z(x) = ce^{-4x} - \frac{1}{6}e^{2x}, \quad c \text{ constante}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación dada es

$$y(x) = 3e^{-2x} + \frac{6}{c_1 e^{-4x} - e^{2x}}, \quad c_1 \text{ constante}$$

Además, como $y(0) = 4$, obtenemos

$$4 = 3 + \frac{6}{c_1 - 1} \Longrightarrow c_1 = 7$$

Luego, la solución es

$$y(x) = 3e^{-2x} + \frac{6}{7e^{-4x} - e^{2x}}$$

4. *a*) Resolver la ecuación: $y' = \dfrac{2y^4 + x^4}{xy^3}$

**Solución** Notar que la ecuación $(2y^4+x^4)dx - xy^3 dy = 0$ es homogénea de grado 4. Haciendo el cambio de variable $z = \dfrac{y}{x}$ obtenemos la ecuación de variables separadas

$$\frac{z^3}{z^4+1}dz = \frac{dx}{x}$$

cuya solución es $z^4 + 1 = kx^4$, con $k$ constante real.
Por lo tanto, la solución de la ecuación es

$$\frac{y^4}{x^4} + 1 = kx^4 \Longleftrightarrow y^4 = x^4(kx^4 - 1)$$

*b*) Resolver la ecuación de Riccati $y' = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x} + y^2$

Si una solución particular es $y(x) = \dfrac{1}{x}$

**Solución** Haciendo el cambio de variable $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}$ la ecuación de Riccati se transforma en la ecuación lineal

$$z' = -\frac{1}{x} - 1$$

cuya solución es

$$z(x) = -\frac{x}{2} + \frac{c}{x}$$

Por lo tanto,

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{c}{x} - \frac{x}{2}}$$

5. Resuelva $\quad y' - y\tan(x) + y^2\cos(x) = 0$

**Solución:** Esta es una ecuación de Bernoulli. Haciendo $z = y^{-1}$ se obtiene la ecuación lineal

$$z' = -z\tan(x) + \cos(x)$$

y su solución es

$$z(x) = (x+c)\cos(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación de Bernoulli es

$$y(x) = \frac{1}{(x+c)\cos(x)}, \quad \text{y la solución constante } y(x) = 0.$$

6. Encuentre la solución de $\quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x + y^2 + 2xy}{2xy - 2y + x^2}, \quad y(0) = 1$

**Solución:** Note que

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + y^2 + 2xy) = 2y + 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 2y + x^2) = 2y + 2x$$

Por lo tanto, la ecuación es exacta. La solución es dada por

$$u(x,y) = \int (2x + y^2 + 2xy)dx = x^2 + xy^2 + x^2y + g(y)$$

Por otro lado,

$$u_y(x,y) = 2xy + x^2 + g'(y) = 2xy - 2y + x^2 \Rightarrow g'(y) = -2y \Rightarrow g(y) = -y^2$$

Luego, la solución general es

$$u(x,y) = x^2 + xy^2 + x^2y - y^2 = c$$

La solución particular que satisface $y(0) = 1$ es $u(0,1) = c \Rightarrow c = -1$, es decir

$$x^2 + xy^2 + x^2y - y^2 = -1$$

7. Considere la ecuación $\quad xy' = 2 - x^2 + (1+2x)y - y^2$. Use el cambio de variable $z = x - y + 1$ para encontrar la solución general.

**Solución:** Derivando con respecto a $x$ el cambio de variable, obtenemos

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

Multiplicando por $x$ a ambos lados

$$x\frac{dz}{dx} = x - x\frac{dy}{dx}$$

Reemplazando, tenemos

$$x\frac{dz}{dx} = x - 2 + x^2 - (2x+1)y + y^2$$

Como $y = x - z + 1$, reemplazamos y obtenemos la ecuación de variables separadas

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - z - 2}{x}$$

Para $z \neq -1$ y $z \neq 2$ que son soluciones constantes, se tiene

$$\frac{dz}{(z+1)(z-2)} = \frac{dx}{x}$$

Integrando, obtenemos

$$z(x) = \frac{2 + cx^3}{1 - cx^3}$$

Luego, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = x + 1 - \frac{2 + cx^3}{1 - cx^3}$$

8. Resuelva $\left(3xy + \dfrac{\cos(x)}{x}\right) dx + \left(2x^2 + \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{xy}\right) dy = 0$ sabiendo que admite un factor integrante que la forma $\mu(x, y) = xf(y)$

**Solución:** Como $\mu(x, y) = xf(y)$ es factor integrante, la ecuación

$$f(y)(3x^2y + \cos(x))dx + f(y)\left(2x^3 + \frac{\operatorname{sen}(x)}{y}\right) dy = 0$$

es exacta. Debe satisfacer

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(y)(3x^2y + \cos(x))dx + f(y)] = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(y)\left(2x^3 + \frac{\operatorname{sen}(x)}{y}\right)\right]$$

Esto es equivalente a

$$f'(y)(3x^2y + \cos(x)) + f(y)3x^2 = f(y)\left(6x^2 + \frac{\cos(x)}{y}\right)$$

Note que esta última igualdad es equivalente a

$$\frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{1}{y} \Rightarrow f(y) = cy$$

Por lo tanto, para $c = 1$ un factor integrante es $\mu(x, y) = xy$.

Luego, tenemos que resolver la ecuación exacta

$$(3x^2y^2 + y\cos(x))dx + (2x^3y + \operatorname{sen}(x))dy = 0$$

y la solución general de esta ecuación es

$$x^3y^2 + y\operatorname{sen}(x) = K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

9. Un tanque contiene inicialmente 60 gal. de agua pura. Entra al tanque, a una tasa de 2 gal./min., salmuera que contiene 1 lb. de sal por galón, y la solución (perfectamente mezclada) sale de él a razón de 3 gal. por minuto; el tanque se vacía después de 1 hora exactamente.

(a) Encuentre la cantidad de sal que hay en el tanque después de $t$ minutos.

(b) ¿Cuál es la máxima cantidad de sal que llega a tener el tanque?

**Solución**.

(a) La ecuación diferencial que modela el problema en cuestión es

$$\frac{dx}{dt} = 1 \cdot 2 - \frac{x(t)}{60-t} 3 \qquad x(0) = 0$$

La solución de esta ecuación lineal es:

$$x(t) = (60-t) + C(60-t)^3$$

Para calcular $C$ usamos la condición inicial $x(0) = 0$, obteniendo

$$x(t) = (60-t) - \frac{1}{60^2}(60-t)^3$$

(b) Para determinar el tiempo $t^*$ donde la cantidad de sal es máxima derivamos la función $x(t)$ para obtener los puntos críticos:

$$x'(t) = -1 + \frac{3}{60^2}(60-t)^2,$$

entonces

$$x'(t) = 0 \Longleftrightarrow (60-t)^2 = \frac{60^2}{3}$$

de donde

$$t^* = 60 - \frac{60}{\sqrt{3}}$$

La segunda derivada de $x(t)$ es $x''(t) = -\frac{6}{60^2}(60-t)$.

Se ve fácilmente que $x''(t^*) < 0$, por lo tanto en $t^*$, $x(t)$ tiene un máximo.

Evaluando $x(t)$ en $t^*$ obtenemos la cantidad de sal máxima que llega a tener el estanque:

$$x\left(60 - \frac{60}{\sqrt{3}}\right) = \frac{40}{\sqrt{3}} \text{ libras de sal}$$

10. La fisión nuclear produce neutrones en una pila atómica, a un ritmo proporcional al número de neutrones presentes en cada momento. Si hay $n_0$ neutrones inicialmente y hay $n_1$ y $n_2$, respectivamente, en los instantes $t_1$ y $t_2$. Demostrar que

$$\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^{t_2} = \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^{t_1}$$

**Solución** Si $n(t)$ representa el número de neutrones en cualquier instante $t$, entonces la variación de ellos en está dada por

$$\frac{dn}{dt} = kn, \quad \text{con} \quad n(0) = n_0$$

Notar que está ecuación es de variables separadas y su solución es

$$n(t) = n_0 e^{kt}$$

Como $\quad n_1 = n(t_1) = n_0 e^{kt_1}$ y $n_2 = n(t_2) = n_0 e^{kt_2}$ tenemos

$$\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^{t_2} = \frac{n_0^{t_2} e^{kt_2 t_1}}{n_0^{t_2}} = e^{kt_1 t_2}$$

Por otro lado,

$$\left(\frac{n_2}{n_0}\right)^{t_1} = \frac{n_0^{t_1} e^{kt_2 t_1}}{n_0^{t_1}} = e^{kt_2 t_1}$$

Luego,

$$\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^{t_2} = \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^{t_1}$$

11. Un tanque de 100 litros de capacidad contiene inicialmente 100 litros de agua azucarada con una concentración de 0,25 kgs. de azúcar por litro. Suponga que en el instante $t = 0$ se agrega azúcar al tanque a razón de $p$ kgs. por minuto, y el agua azucarada (bien mezclada) se retira del tanque a razón de un litro por minuto.

¿ Qué valor de $p$ se debe escoger para que cuando queden en el tanque 5 litros de agua azucarada, la concentración sea de 0,5 kgs. de azúcar por litro?

**Solución:** Sean $x(t) :=$ cantidad de azúcar presente en el tanque en el instante $t$, y

$C(t) :=$ concentración de azúcar en el tanque en el instante $t$; en este caso queda $C(t) = \dfrac{x(t)}{100 - t}$.

La ecuación diferencial que modela el problema queda:

$$\frac{dx}{dt} = p - \frac{x}{100 - t} \qquad x(0) = 25$$

o equivalentemente

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{100 - t} = p$$

Multiplicando ambos lados de esta última ecuación por $\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100-t} dt} = \dfrac{1}{100 - t}$, obtenemos

$$\frac{1}{100 - t} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{1}{(100 - t)^2} \cdot x = \frac{p}{100 - t}$$

de donde

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{100 - t} \cdot x\right) = \frac{p}{100 - t}$$

Integrando respecto a $t$

$$\frac{1}{100 - t} \cdot x = -p \ln(100 - t) + K \Longrightarrow x(t) = (100 - t)(K - p \ln(100 - t)).$$

Usamos la condición inicial $x(0) = 25$ para calcular $K$.

$$x(0) = 25 = 100(K - p \ln(100)) \Longrightarrow K = \frac{1 + 4p \ln(100)}{4}$$

Entonces,

$$x(t) = (100 - t)\left(\frac{1 + 4p\ \ln(100)}{4} - p\ \ln(100 - t)\right).$$

Para la concentración se tiene

$$C(t) = \frac{x(t)}{100 - t} = \frac{1 + 4p\ \ln(100)}{4} - p\ \ln(100 - t)$$

Para responder la pregunta, hacemos $C(95) = \frac{1}{2}$ (pues cuando $t = 95$, en el tanque quedan 5 litros de solución):

$$\frac{1}{2} = C(95) = \frac{1 + 4p\ \ln(100)}{4} - p\ \ln(5)$$

$$\Longrightarrow \quad 1 + 4p\ \ln(100) - 4p\ \ln(5) = 2$$

$$\Longrightarrow \quad 4p\ \ln(20) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad p = \frac{1}{4\ln(20)}$$