Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
para MAT023 (versión β)

Verónica Gruenberg Stern
veronica.gruenberg@usm.cl

1. Introducción

Definición 1.1. Una **ecuación diferencial** es una ecuación que contiene diferenciales ó derivadas (ordinarias ó parciales) de una ó más variables dependientes, con respecto a una ó más variables independientes.

Resolver una ecuación diferencial es encontrar una función que, al ser reemplazada en la ecuación, la transforma en una **identidad**.

Definición 1.2. Si una ecuación contiene solo derivadas ó diferenciales ordinarias de una ó más variables dependientes con respecto a **una** sola variable dependiente, entonces se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.)** .

Definición 1.3. Una ecuación que contiene derivadas parciales de una ó más variables dependientes de dos ó más variables independientes se llama **ecuación diferencial parcial (E.D.P.)** .

Definición 1.4. El orden de la más alta derivada en una ecuación diferencial se llama **orden de la ecuación diferencial** .

Definición 1.5. El grado de la derivada de mayor orden en una ecuación diferencial se llama **grado de la ecuación diferencial** .

Observación. Una E.D.O. de una sola variable dependiente puede escribirse en la forma

$$F(x, y, y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Ejemplos

1) $\dfrac{dx}{dt} - 4tx = 30.$ E.D.O. de orden 1 y grado 1, con $x = x(t)$.

2) $(x+y)dx - 12y\,dy = 0.$ E.D.O. de orden 1 y grado 1, con $y = y(x)$.

3) $\dfrac{du}{dx} - \dfrac{dv}{dx} = 4x.$ E.D.O. de orden 1 y grado 1, con $u = u(x)$, $v = v(x)$.

4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0.$ E.D.O. de orden 2 y grado 1, con $y = y(x)$.

5) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 3\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 + 9y = 0.$ E.D.O. de orden 2 y grado 2, con $y = y(x)$.

6) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^5 - 3y = x^3$ E.D.O. de segundo orden y grado 3.

7) $x^2dy + y^2dx = 0$ E.D.O. de primer orden y grado 1.

8) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ E.D.P. de primer orden y grado 1.

9) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial v}{\partial y} = u$ E.D.P. de primer orden y grado 1.

10) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t}$ E.D.P. de segundo orden y grado 1.

11) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ E.D.P. de cuarto orden y grado 1.

Definición 1.6. Se dice que una E.D.O. es **lineal** si es de la forma:

$$a_n(x)\,\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\,\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = h(x)$$

Si la ecuación diferencial no es lineal, se dice que es *no lineal*.

Observación. En otras palabras, las ecuaciones diferenciales ordinarias **lineales** son aquellas en las que

1. la potencia de la variable dependiente y y de las derivadas de cualquier orden de y, es 1.
2. los coeficientes que acompañan a las derivadas de la variable dependiente y dependen **solo** de la variable independiente x.

Definición 1.7. Una función φ, definida en algún intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, es **solución** de una ecuación diferencial ordinaria en el intervalo I, si al sustituir φ en la ecuación, ésta se reduce a una identidad.

La **solución general** de una ecuación diferencial de orden n es una función $y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$, donde $C_1, C_2, \cdots, C_n$ son constantes arbitrarias. **Cualquier** solución de la ecuación diferencial se obtiene para valores adecuados de las constantes $C_1, C_2, \cdots, C_n$.

Una **solución particular** de una ecuación diferencial de orden n es una solución con valores **fijos** para las constantes $C_1, C_2, \cdots, C_n$, es decir, es una solución que no depende de parámetros arbitrarios.

Observación. Como se señaló antes, es posible describir una ecuación diferencial ordinaria como una función en las variables $x,\ y,\ \dfrac{d^iy}{dx^i},\ i = 1, \cdots, n,$ es decir,

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \cdots,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

Entonces, una solución de esta ecuación es una función $y = \varphi(x) \in C^n(I)$ tal que

$$F\left(x,\ \varphi(x),\ \frac{d\varphi(x)}{dx},\ \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2},\ \cdots,\ \frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\right) = 0 \qquad \forall\, x \in I$$

La solución general de la E.D.O. de orden n es la función $y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ y una solución particular de la E.D.O. es una función $y = \varphi(x)$, con valores **fijos** de las constantes $C_1, C_2, \cdots, C_n$.

Notamos también que al resolver una E.D.O. no siempre es posible expresar la solución $y = \varphi(x)$ de manera explícita, sino que en ocasiones solo podremos expresar la solución en la forma implícita $G(x, y) = 0$.

Por ejemplo, la solución de $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ es $x^2 + y^2 - c = 0$, con $c > 0$.

Ejemplos

1) Verifique que $y = xe^x$ es solución de la E.D.O. de segundo orden $y'' - 2y' + y = 0$.
2) Verifique que $x(t) = C_1 \operatorname{sen}(kt) + C_2 \cos(kt)$ es solución de $x''(t) + k^2 x(t) = 0$.

Definición 1.8. Si $y(x) = 0$ es solución de una E.D.O., se dice que ésta es la **solución trivial**.

La gráfica de una solución $y = \varphi(x)$ de una E.D.O. se llama **curva solución** de la ecuación diferencial.

Una solución que contiene una constante arbitraria representa un conjunto ó familia de soluciones. Cada una de las soluciones dependerá del valor que tome la constante. En la observación anterior, la solución $x^2 + y^2 - c = 0$, representa una familia de circunferencias, dependiendo del radio $\sqrt{c}$.

2. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Las ecuaciones diferenciales permiten modelar la realidad. En esta sección estudiaremos algunas técnicas que nos permitirán determinar soluciones analíticas de muchas E.D.O. de primer orden. Debemos tener presente que existen diversas maneras de afrontar el problema de resolver una ecuación diferencial. El método seleccionado dependerá de las características del problema que se desea resolver, la información disponible y precisión de los datos (en el caso de modelos), el grado de exactitud requerida, el tipo de análisis que deberá sustentar la solución, etc. Dependiendo de ello, se podrá resolver la ecuación diferencial mediante métodos analíticos, métodos numéricos ó utilizando técnicas de análisis cualitativo.

Como señalamos, iniciaremos nuestro estudio con métodos analíticos, para E.D.O. de primer orden.

2.1. Separación de Variables

La ecuación general de primer orden y primer grado es de la forma

$$M\,dx + N\,dy = 0 \tag{1}$$

donde $M = M(x, y)$ y $N = N(x, y)$. En algunos casos la ecuación (1) puede ser expresada en la forma

$$A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0 \tag{2}$$

o sea, se ha reunido todos los términos en la variable y en $B(y)$ y todos los términos en la variable x en $A(x)$.

La solución de (2) es

$$\int A(x)\,dx + \int B(y)\,dy = C$$

donde C es una constante que depende de las condiciones iniciales (c.i.).

Ejemplos

1) Resolver $\quad 2(y+3)\,dx + xy\,dy = 0$.
Separando variables queda

$$\frac{2}{x}\,dx + \frac{y}{y+3}\,dy = 0$$
$$\Rightarrow \quad \ln x^2 + y - 3\ln(y+3) = c$$
$$\Rightarrow \quad e^y = c_1\frac{(y+3)^3}{x^2} \quad \text{donde} \quad c_1 = e^c \quad \Rightarrow \quad e^{y-c} = \frac{(y+3)^3}{x^2}$$

2) Resolver $\quad (x^2-1)\,dx + xy\,dy = 0$

$$\frac{x^2-1}{x}\,dx + y\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2} - \ln x + \frac{y^2}{2} = c \qquad /\ 2$$
$$x^2 + y^2 = 2c + \ln x^2$$
$$x^2 + y^2 = \ln(cx)^2 \qquad \text{o} \qquad \mathrm{e}^{x^2+y^2} = kx^2$$

3) Resolver $\quad \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\,dx + \cos x \cos y\,dy = 0$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx + \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad -\ln\cos x + \ln\operatorname{sen} y = c$$
$$\left(\frac{\operatorname{sen} y}{\cos x}\right) = c \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} y = c_1\cos x$$

4) Resolver $\quad xy^3\,dx + \mathrm{e}^{x^2}\,dy = 0$

$$x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx + y^{-3}dy = 0$$
$$-\frac{1}{2}\int -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx + \frac{y^{-2}}{-2} = c$$
$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2} - \frac{1}{2}y^{-2} = c$$
$$\mathrm{e}^{-x^2} + y^{-2} = -2c$$
$$\boxed{e^{-x^2} + y^{-2} = c}$$

5) Resolver $\quad y\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\,dx + dy = 0$

$$\operatorname{sen} x\,dx + \frac{dy}{y\operatorname{sen} y} = 0$$
$$x\ln x - x + \ln(\ln y) = 0$$
$$\ln x^x + \ln(\ln y) = x + c$$
$$\ln y = K\frac{\mathrm{e}^x}{x^x}$$

Aplicación. Se ha establecido que la velocidad de la desintegración del radio es directamente proporcional a su masa en cada instante. Determinar la ley de variación de la masa del radio en función del tiempo, si para $t = 0$ la masa del radio es m_0

Solución. Sea m la masa en el instante t y $m + \Delta m$, en el instante $t + \Delta t$. La masa desintegrada durante el tiempo Δt es Δm. La razón $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ es la velocidad media de desintegración. Luego:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt} \quad \text{es la velocidad de desintegración del radio en el instante } t.$$

Según la hipótesis:

$$\frac{dm}{dt} = -km \tag{3}$$

donde k es el coeficiente de proporcionalidad ($k > 0$). Ponemos el signo menos, porque a medida que transcurre el tiempo, la masa del radio disminuye y por eso $\frac{dm}{dt} < 0$ (puesto que la función $m(t)$ es decreciente, entonces $\frac{dm}{dt} < 0$).

La ecuación (3) es una ecuación de variables separables. Separando variables:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{m} &= -k\,dt \\ \Rightarrow \ln m &= -kt + c_1 \\ \Rightarrow m &= c\,\mathrm{e}^{-kt} \end{aligned}$$

como $m(0) = m_0$, entonces $c = m_0$.

$$\therefore m = m_0\,\mathrm{e}^{-kt}.$$

2.2. Ecuaciones Homogéneas de Primer Orden

Definición 2.1. La función $f(x, y)$ se dice *homogénea de grado k* respecto a las variables x e y, si:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Ejemplos

1) La función $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ es homogénea de primer grado.
2) La función $f(x, y) = xy - y^2$ es homogénea de segundo grado.
3) La función $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ es homogénea de grado cero.
4) La función $f(x, y) = x^2 + y$ no es homogénea.
5) La función $f(x, y, z) = \frac{xy}{z} + x \operatorname{sen} \frac{y^2}{z^2}$ es homogénea de grado uno.

Observación.

1) Sean $g(x, y)$, $f(x, y)$ homogéneas del mismo grado, entonces $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ es homogénea de grado cero.

2) Si $h(x,y)$ es homogénea de grado cero, entonces

$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)} = h(x,y) = h\left(1, \frac{y}{x}\right) \qquad \left(\text{haciendo } \lambda = \frac{1}{x}\right)$$

Es decir, la función homogénea de grado cero depende sólo del cuociente de las variables.
En este caso podemos escribir: $h(x,y) = h(1, y/x) = F\,(y/x)\,.$

Definición 2.2. La ecuación de primer orden

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

es *homogénea* cuando M y N son funciones homogéneas del *mismo grado* respecto de x e y

Resolución de una ecuación diferencial homogéna
Consideremos la ecuación homogénea

$$(A) \qquad M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

Luego (A) la podemos escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

es decir:

$$(B) \qquad \frac{dy}{dx} = F\,(y/x)$$

Esta última ecuación se resuelve efectuando la sustitución $v = y/x$, es decir,

$$(4) \qquad y = vx,$$

luego

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\,\frac{dv}{dx}$$

Sustituyendo (4) y (5) en (B), obtenemos

$$v + x\,\frac{dv}{dx} = F(v)$$

o sea:

$$x\,\frac{dv}{dx} + v - F(v) = 0$$

$$x\,dv + (v - F(v))\,dx = 0$$

$$\boxed{\frac{dx}{x} + \frac{v}{v - F(v)} = 0}$$

que es una ecuación de variables separables.

Ejemplos

1) Resolver $\left(x^2 - xy + y^2\right)\, dx - xy\, dy = 0.$
Observemos que las funciones $M(x,y) = x^2 - xy + y^2$, $N(x,y) = -xy$ son homogéneas de grado 2. Luego se trata de una ecuación homogénea. Haciendo $y = vx$, tenemos:

$$\begin{gathered}
(dy = v\, dx + x\, dv) \\
(x^2 - x^2 v + x^2 v^2)\, dx - x^2 v(v\, dx + x\, dv) = 0 \\
(x^2 - x^2 v + x^2 v^2 - x^2 v^2)\, dx - x^3 v\, dv = 0 \\
x^2(1-v)\, dx - x^3 v\, dv = 0 \\
\frac{dx}{x} + \frac{v}{v-1}\, dv = 0 \\
\ln x + v + \ln(v-1) = c \\
\ln x + \frac{y}{x} + \ln\left(\frac{y-x}{x}\right) = c \\
\ln(y-x) = c - \frac{y}{x} \Rightarrow (y-x)\, \mathrm{e}^{y/x} = c
\end{gathered}$$

2) Resolver $(x^2 + y^2)\, dx - 2xy\, dy = 0.$
Observemos que la ecuación es homogénea pues las funciones $M(x,y) = x^2 + y^2$, $N(x,y) = -2xy$ son homogéneas de grado 2. Haciendo $y = vx$ tenemos:

$$\begin{gathered}
(x^2 + x^2 v^2)\, dx - 2x^2 v(v\, dx + x\, dv) = 0 \\
(x^2 + x^2 v^2 - 2x^2 v^2)\, dx - 2x^3 v\, dv = 0 \\
x^2(1 - v^2)\, dx - 2x^3 v\, dv = 0
\end{gathered}$$

Separando variables

$$\frac{dx}{x} + \frac{2v}{v^2-1}\, dv = 0$$

Integrando

$$\ln x + \ln(v^2 - 1) = c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

reemplazando $v = y/x$:

$$\begin{gathered}
\ln x + \ln\left(y^2/x^2 - 1\right) = c \\
\ln x + \ln(y^2 - x^2) - \ln x^2 = c \\
\ln(y^2 - x^2) - \ln x = c \\
\frac{y^2 - x^2}{x} = c \\
y^2 = cx + x^2
\end{gathered}$$

Ejercicios.

1) $dy/dx = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$
2) $(2x + 3y)\,dx + (x - 2y)\,dy$
3) $y\,dx - x\,dy = 0$
4) $(1 + u)v\,du + (1 - v)u\,dv = 0$
5) $(1 + y)\,dx - (1 - x)\,dy = 0$
6) $(t^2 - xt^2)\,\dfrac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0$
7) $(y - a)\,dx + x^2\,dy = 0$
8) $z\,dt - (t^2 - a^2)\,dz = 0$
9) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1 + x^2}{1 + y^2}$
10) $(1 + s^2)\,dt - \sqrt{t}\,ds$
11) $d\rho + \rho \operatorname{tg}\theta\,d\theta = 0$
12) $\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,d\theta - \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi = 0$
13) $\sec^2\theta\operatorname{tg}\theta\,d\theta + \sec^2\varphi\operatorname{tg}\theta\,d\varphi = 0$
14) $\sec^2\theta\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi + \sec^2\varphi\operatorname{tg}\theta\,d\theta = 0$
15) $(1 + x^2)\,dy - \sqrt{1 - y^2}\,dx = 0$
16) $\sqrt{1 - x^2}\,dy + \sqrt{1 - y^2}\,dx$
17) $3\,\mathrm{e}^x\operatorname{tg}y\,dx + (1 - \mathrm{e}^x)\sec^2 y\,dy = 0$
18) $(x - y^2x)\,dx + (y - x^2y)\,dy = 0$
19) $(y - x)\,dx + (y + x)\,dy = 0$
20) $(x + y)\,dx + x\,dy = 0$
21) $(x + y)\,dx + (y - x)\,dy = 0$
22) $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$
23) $(8y + 10x)\,dx + (5y + 7x)\,dy = 0$
24) $xy^2\,dy = (x^3 + y^3)\,dx$

2.3. Ecuaciones Reducibles a Homogéneas

Se reducen a ecuaciones homogéneas las de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \quad \text{con } a \text{ o } b \neq 0 \tag{6}$$

Si $c_1 = c = 0$, la ecuación (6) es, evidentemente, homogénea (pues $\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}$ es una función homogénea de grado cero).

Supongamos, pues, que c y c_1 (o una de ellas) son diferentes de cero. Realicemos el cambio de variables $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$ (h, k constantes por determinar), entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} \tag{7}$$

Reemplazando en (7) las expresiones de x, y, $\frac{dy}{dx}$, tenemos:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1} \tag{8}$$

Elijamos h y k de modo que se verifiquen las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} ah + bk + c &=& 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 &=& 0 \end{array}\right\}, \tag{9}$$

es decir, determinemos h y k como solución del sistema de ecuaciones (9). Con esta condición, la ecuación (8) es homogénea:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}$$

Al resolver esta ecuación y pensando de nuevo en x e y, según las fórmulas (7), obtenemos la solución de la ecuación (6).

El sistema (8) no tiene solución si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir, si $ab_1 = a_1 b$. Pero en este caso $\frac{a_1}{a} = \frac{b}{b_1} = \lambda$, es decir, $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$, y, por consiguiente, se puede escribir la ecuación (6) en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax+by)+c}{\lambda(ax+by)+c_1} \tag{10}$$

Haciendo la sustitución

$$z = ax + by \tag{11}$$

la ecuación se reduce a una ecuación de variables separables. En efecto,

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} \tag{12}$$

Introduciendo las expresiones (11) y (12) en la ecuación (10) obtenemos

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z+c}{\lambda z + c_1}$$

que es una ecuación de variables separables.

En efecto, separando variables queda:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{b}\,dz - \frac{a}{b}\,dx = \frac{z+c}{\lambda z + c_1}\,dx \\
\frac{1}{b}\,dz - \left(\frac{a}{b} + \frac{z+c}{\lambda z + c_1}\right)dx = 0 \\
\frac{1}{-b\left(\frac{a}{b} + \frac{z+c}{\lambda z + c_1}\right)}\,dz + dx = 0
\end{gathered}$$

Ejemplos

1) Resuelva la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1}$$

Notamos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Hacemos la sustitución

$$\begin{aligned} x &= x_1 + h \\ y &= y_1 + k \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + h + h - 3}{x_1 - y_1 + h - k - 1}$$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{aligned} h + k - 3 = 0 \\ h - k - 1 = 0 \end{aligned}\right|$$

encontramos que $h = 2, k = 1$

Sustituyendo, encontramos que

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1} \qquad \text{es una ec. homogénea.}$$

Sea $v = \dfrac{y_1}{x_1}$, es decir, $y_1 = vx_1$

$$\therefore \quad \frac{dy_1}{dx_1} = v + x_1 \frac{dv}{dx_1}$$

$$\therefore \quad v + x_1 \frac{dv}{dx_1} = \frac{x_1 + vx_1}{x_1 - vx_1}$$

$$v + x_1 \frac{dv}{dx_1} = \frac{1+v}{1-v} \qquad \text{que es una ec. de variables separables}$$

$$x_1 \frac{dv}{dx_1} = \frac{1+v^2}{1-v}$$

$$\frac{1-v}{1+v^2}\, dv = \frac{dx_1}{x_1}$$

$$\int \left(\frac{1}{1+v^2} - \frac{v}{1+v^2} \right) dv = \ln x_1 + c$$

$$\operatorname{arc\,tg} v - \frac{1}{2} \ln(1+v^2) = \ln x_1 + c$$

$$\operatorname{arc\,tg} v = \ln\left(x_1 \sqrt{1+v^2} \right) + c$$

$$\mathrm{e}^{\operatorname{arc\,tg} v} = \mathrm{e}^{c x_1 \sqrt{1+v^2}}$$

Sustituyendo v por $\dfrac{y_1}{x_1}$, se obtiene:

$$c\sqrt{x_1^2+y_1^2} = \mathrm{e}^{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y_1}{x_1}\right)}$$

pero $y_1 = y-1$, $x_1 = x-2$. Luego

$$c\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \mathrm{e}^{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y-1}{x-2}\right)}, \quad c\in\mathbb{R}.$$

2) Resolver la ecuación $\quad y' = \dfrac{2x+y-1}{4x+2y+5}$ con condición inicial $y(0)=-2$.
Notamos que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0: \qquad y' = \frac{2x+y-1}{2(2x+y)+5} \qquad (*)$$

Sea $\quad z = 2x+y$. $\quad$ Luego:

$$\frac{dz}{dx} = z' = 2+y' \Rightarrow y' = z'-2$$

reemplazando en (*), queda:

$$\begin{aligned}
z'-2 &= \frac{z-1}{2z+5} \\
z' &= \frac{z-1}{2z+5}+2 \\
z' &= \frac{5z+9}{2z+5} \\
\frac{2z+5}{5z+9}\,dz &= dx \\
\int \frac{2z+5}{5z+9}\,dz &= x+c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{pero} \quad \int \frac{2z+5}{5z+9}\,dz &= 2\int \frac{z}{5z+9}\,dz + \int \frac{5}{5z+9}\,dz = \frac{2}{5}\int \frac{5z+9-9}{5z+9}\,dz + \int \frac{d(5z+9)}{5z+9} \\
&= \frac{2}{5}\left(\int dz - \frac{9}{5}\int \frac{d(5z+9)}{5z+9}\right) + \ln|5z+9| \\
&= \frac{2}{5}\left(z - \frac{9}{5}\ln|5z+9|\right) + \ln|5z+9| \\
&= \frac{2}{5}z - \frac{18}{25}\ln|5z+9| + \ln|5z+9| \\
&= \frac{2}{5}z + \frac{7}{25}\ln|5z+9| \\
\therefore \quad \frac{2}{5}z + \frac{7}{25}\ln|5z+9| &= x+c
\end{aligned}$$

como $z = 2x+y$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{7}{25}\ln|10x+5y+9| &= x+c \\
10y - 5x + 7\ln|10x+5y+9| &= c
\end{aligned}$$

puesto que $y(0) = -2$ no queda que:

$$-20 + 7\ln|-1| = c$$
$$\Rightarrow \boxed{c = -20}$$
$$\therefore \quad 10y - 5x + 7\ln|10x + 5y + 9| = -20. \quad \square$$

Ejercicios.

1) $(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$
2) $(x + 2y + 1)dx - (2x + 4y + 3)dy = 0$
3) $(x + 2y + 1)dx + (2x - 3)dy = 0$

2.4. Ecuaciones Diferenciales Exactas

La ecuación
$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$
se llama *ecuación diferencial exacta*, si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones con primera derivada continua en un cierto dominio D (es decir, de clase $C^1(D)$) que verifican la igualdad:
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

En este caso, obtenemos la solución de la E.D. expresada implícitamente en la forma $F(x,y) = k$, donde k es una constante.

Si $F(x,y) = k$ describe la solución de la E.D., entonces su *diferencial total* dF está dada por
$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = 0$$

Luego, podemos suponer que
$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \quad \wedge \quad \frac{\partial N}{\partial x} = N(x,y)$$
y a partir de estas igualdades podemos determinar la función $F(x,y)$.

Ejemplos

1) Resolver la ecuación:

$$(*) \qquad (3x^2y + 2xy)\,dx + (x^3 + x^2 + 2y)\,dy = 0$$

Averigüemos si esta ecuación es diferencial exacta:
$$M(x,y) = 3x^2y + 2xy, \qquad N(x,y) = x^3 + x^2 + 2y$$
$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 3x^2 + 2x, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2x$$
$$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2x$$

$\therefore$ La ecuación $(*)$ corresponde a una ecuación diferencial exacta.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y + 2xy \quad \Rightarrow \quad F(x,y) = x^3y + x^2y + C(y)$$

donde se integra considerando «y» como constante; luego determinamos:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3y + x^2y + C(y)\right) = x^3 + x^2 + C'(y)$$
$$\therefore\ x^3 + x^2 + C'(y) = x^3 + x^2 + 2y$$

donde igualamos las expresiones correspondientes. Así:

$$\begin{aligned} C'(y) &= 2y \qquad \Rightarrow \qquad C(y) \ = \ y^2 + C, \\ \therefore\ F(x,y) &= x^3y + x^2y + y^2 + C_1 \ = \ C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

de donde la solución está dada por la relación

$$\boxed{x^3y + x^2y + y^2 = k}, \quad k \in \mathbb{R}$$

2) Resolver $\quad \dfrac{2x}{y^3}\,dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}\,dy = 0$

La ecuación diferencial es exacta pues:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y^3}\right) = -\frac{6x}{y^4} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\right)$$

Luego, suponemos una solución del tipo $F(x,y) = k$ y procedemos como arriba:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{y^3} \quad \Rightarrow \quad F(x,y) &= \frac{x^2}{y^3} + C(y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{y^3} + C(y)\right) = -\frac{3x^2}{y^4} + C'(y) &= \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \\ \Rightarrow \quad C'(y) &= y^{-2} \\ \Rightarrow \quad C(y) &= -\frac{1}{y} + C_1 \\ \therefore\ F(x,y) &= \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C_1 \end{aligned}$$

Luego la solución general de la ecuación está dada por la relación:

$$\boxed{\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3) Resolver: $\underbrace{\left(\dfrac{y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{x}\right)}_{M}dx+\underbrace{\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right)}_{N}dy \;=\; 0$

$$\text{Verificamos si} \qquad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}: \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{2xy}{(x-y)^3} \\[2ex] \dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{2xy}{(x-y)^3} \end{cases}$$

Luego, la ecuación es *exacta*. Buscamos $F(x,y)$ tal que $dF=0$, es decir,

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx+\frac{\partial F}{\partial y}\,dy=0$$

Así

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad F(x,y)=\int\left(\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}\right)dx=-\frac{y^2}{x-y}-\ln|x|+C(y)$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial F}{\partial y} \;=\; \frac{-2y(x-y)-y^2}{(x-y)^2}+C'(y)=\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}$$

$$\therefore \qquad C'(y) \;=\; \frac{1}{y}+\frac{2xy-y^2-x^2}{(x-y)^2} \;=\; \frac{1}{y}-\frac{x^2-2xy+y^2}{(x-y)^2}$$

$$\therefore \qquad C'(y) \;=\; \frac{1}{y}-1 \qquad\Rightarrow\qquad C(y)=\ln|y|-y+K$$

$$F(x,y)=-\frac{y^2}{x-y}-\ln|x|+\ln|y|-y+K$$

$$=\ln\left|\frac{y}{x}\right|-\frac{y^2}{x-y}-y+C$$

$\therefore$ la solución viene dada por

$$\boxed{\ln\left|\frac{y}{x}\right|-\frac{y^2}{x-y}-y=\text{cte.}}$$

Ejercicios.

1) $(x^2+y)\,dx+(x-2y)\,dy=0$

2) $(y-3x^2)\,dx-(4y-x)\,dy=0$

3) $(y^3-x)\,y'=y$

4) $\left(\dfrac{y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right)dy=0$

5) $2(3xy^2+2x^3)\,dx+3(2x^2y+y^2)\,dy=0$

6) $\dfrac{x\,dx+(2x+y)\,dy}{(x+y)^2}=0$

7) $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3y^2}{x^4}\right)=\dfrac{2y\,dy}{x^3}$

8) $\dfrac{x^2\,dy-y^2\,dx}{(x-y)^2}=0$

9) $x\,dx+y\,dy=\dfrac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$

10) Determine para qué valores de $k\in\mathbb{R}$ son exactas las ecuaciones siguientes y resuélvalas para **ese** valor.

   a) $kxy\,dx \;+\; (x^2+\cos y)\,dy \;=\; 0$

   b) $(6xy^3+\cos y)dx+(2kx^2y^2-x\,\mathrm{sen}\,y)dy=0$

2.5. Factor de Integración

Supongamos que la ecuación:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{13}$$

no es una ecuación diferencial exacta (y que no es del tipo de las anteriores), por ejemplo,

$$(y+xy^2)dx - x\,dy = 0.$$

Se puede a veces elegir una función $\mu(x,y)$ tal que si multiplicamos todos los términos de la ecuación por esta función, la ecuación (13) se convierta en una ecuación diferencial exacta. La función $\mu(x,y)$ se llama *factor de integración* (o *factor integrante*) de la ecuación (13).

Para hallar el factor integrante μ procedemos del siguiente modo:

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$$

Para que esta última ecuación sea una ecuación diferencial exacta es necesario y suficiente que:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

es decir:

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\,\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

o sea

$$\begin{aligned} M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} &= \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \qquad \Big|\frac{1}{\mu} \\ M\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \\ M\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial y} - N\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \qquad (14) \end{aligned}$$

En la mayoría de los casos el problema de la búsqueda de $\mu(x,y)$ de la ecuación (14) no es fácil. Sólo en algunos casos particulares se logra determinar fácilmente la función $\mu(x,y)$.

Los casos que desarrollaremos aquí son los siguientes:

CASO I

Supongamos que la ecuación (13) admite un factor integrante que depende sólo de y, es decir, $\mu = \mu(y)$. Entonces:

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = 0$$

y para hallar μ obtenemos la ecuación diferencial ordinaria (que se obtiene de (14)):

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

de donde podemos determinar $\ln\mu$:

$$\ln\mu \;=\; \int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\,dy$$

y, por tanto,

$$\mu(y) \;=\; e^{\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\,dy}$$

Es claro que de esta manera se puede proceder sólo cuando la expresión $(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})/M$ no depende de x.

Luego, multiplicamos la ecuación (13) por este factor $\mu(y)$, obteniendo una ecuación diferencial exacta.

CASO II

Análogamente, supongamos que la ecuación (13) admite un factor integrante que depende sólo de x, es decir, $\mu=\mu(x)$. Entonces:

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} \;=\; 0$$

y la ecuación (14) se reduce a:

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

de donde podemos determinar $\ln\mu$:

$$\ln\mu \;=\; \int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\,dx$$

y, por tanto,

$$\mu(y) \;=\; e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\,dx}$$

Es claro que de esta manera se puede proceder sólo cuando la expresión

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{N}$$

no depende de y, sino exclusivamente de x.

Como antes, multiplicando la ecuación (14) por $\mu(x)$, se obtiene una ecuación diferencial exacta.

Otros casos

Si $\mu=\mu(x^2+y^2)$, hacemos el cambio de variable $z \;=\; x^2+y^2$ en

$$M\,\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\,\frac{\partial\mu}{\partial x} \;=\; \mu\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)$$

quedando

$$\begin{aligned} M\,\frac{\partial\mu}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}-N\,\frac{\partial\mu}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x} \;&=\; \mu\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)\\ M\,\frac{\partial\mu}{\partial z}\,2y-N\,\frac{\partial\mu}{\partial z}\,2x \;&=\; \mu\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

de donde la expresión

$$\left(\frac{\dfrac{\partial N}{\partial y}-\dfrac{\partial M}{\partial x}}{2yM-2xN}\right)$$

sólo dependa de z, es decir, $\mu=\mu(z)$, con

$$\ln\mu = \int\left(\frac{\dfrac{\partial N}{\partial y}-\dfrac{\partial M}{\partial x}}{2yM-2xN}\right)dz$$

Problema:

1. Si $\mu=\mu(x+y)$, encuentre una expresión para el factor de integración.
2. Si $\mu=\mu(xy)$, encuentre una expresión para el factor de integración.

Ejemplos

1) Hallar la solución de la ecuación $\quad (y+xy^2)\,dx - x\,dy = 0.$

Solución. Aquí: $M=y+xy^2$; $N=-x$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1+2xy; \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=-1, \text{ luego } \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

Luego la ecuación no es una ecuación diferencial exacta. Examinemos si esta ecuación admite un factor integrante que dependa sólo de y. Observemos que:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{-1-1-2xy}{y+xy^2}=\frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)}=-\frac{2}{y}$$

por lo tanto la ecuación lo admite. Encontremos ahora el factor integrante.

$$\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=-\frac{2}{y}$$

de donde $\ln\mu=-2\ln y$, es decir, $\mu=\dfrac{1}{y^2}$.

Después de multiplicar todos los términos de la ecuación dada por el factor integrante $\mu(x,y)=1/y^2$, obtenemos la ecuación:

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}\,dy=0$$

diferencial exacta $\left(\dfrac{\partial M_1}{\partial y}=\dfrac{\partial N_1}{\partial x}=-\dfrac{1}{y^2}\right)$. Resolviendola, encontramos que: $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{2}+c=0$, es decir,

$$y=-\frac{2x}{x^2+2c}. \quad \square$$

2) Resuelva la ecuación diferencial

$$y^2\,dx \;=\; (x^3 - xy)\,dy$$

(**Ayuda**: Use un factor integrante del tipo $x^n y^m$).

Solución.
Multiplicamos la ecuación por $x^n y^m$: $\quad x^n y^m y^2\,dx \,-\, x^n y^m (x^3 - xy)\,dy \;=\; 0$

es decir: $\quad x^n y^{m+2}\,dx \,-\, (x^{n+3}y^m - x^{n+1}y^{m+1})\,dy \;=\; 0$

Requerimos que: $\quad \dfrac{\partial}{\partial y}(x^n y^{m+2}) \;=\; \dfrac{\partial}{\partial x}(x^{n+1}y^{n+1} - x^{n+3}y^m) \quad$ i.e.

$(m+2)x^n y^{m+1} \;=\; (n+1)x^n y^{m+1} - (n+3)x^{n+2}y^m$

Luego, basta que $n+3=0$ y $m+2=n+1$. Por lo tanto, el factor integrante es $\mu(x,y) \;=\; x^{-3}\,y^{-4}$.

Multiplicando por $\mu(x,y)$, obtenemos:

$$x^{-3}y^{-2}\,dx - (y^{-4} - x^{-2}y^{-3})\,dy \;=\; 0$$

Así, $\quad \dfrac{\partial M}{\partial y} \;=\; -2x^{-3}\,y^{-3} \;=\; \dfrac{\partial N}{\partial x}$. Efectivamente, es exacta, y luego para resolverla:

$$F(x,y) \;=\; \int x^{-3}y^{-2}\,dx + K(y) \;=\; -\frac{1}{2}x^{-2}y^{-2} \;+\; K(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \;=\; x^{-2}y^{-3} + K'(y) \;=\; x^{-2}y^{-3} \;-\; y^{-4} \qquad \Rightarrow \qquad K'(y) \;=\; y^{-4}$$

$$\therefore \quad K(y) \;=\; \frac{1}{3}y^{-3} + C.$$

La solución general es: $\quad -\dfrac{1}{2}x^{-2}y^{-2} \;+\; \dfrac{1}{3}y^{-3} \;=\; K, \qquad K = \text{cte}.$

3) Resolver la ecuación

$$(x^3 + xy^2 - y)\,dx \;+\; (x^2y + y^3 + x) \;=\; 0$$

si se sabe que el factor integrante depende de x^2+y^2.

Solución. Notamos que:

$$\left(\frac{\dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial x}}{2yM - 2xN}\right) \;=\; \frac{2xy + 1 - (2xy - 1)}{2y(x^3 + xy^2 - y) - (2x(x^2y + y^3 + x)} \;=\; -\frac{1}{x^2+y^2} \;=\; -\frac{1}{z}$$

Por lo tanto, $\quad \mu \;=\; e^{-\int \frac{1}{z}\,dz} \;=\; e^{-\ln z} \;=\; \dfrac{1}{z} \;=\; \dfrac{1}{x^2+y^2}.$

Multiplicamos la ecuación por este factor integrante, obteniendo:

$$\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right) dx \ + \ \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) dy \ = \ 0$$

Calculamos

$$\frac{\partial M}{\partial y} \ = \ \frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} \ = \ \frac{\partial N}{\partial x}$$

por lo que hemos reducido la ecuación a una ecuación diferencial exacta, que sabemos resolver.
Usando el método habitual, se obtiene que la solución está dada por

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2} \ = \ \arctan\left(\frac{x}{y}\right)+C$$

Observación. El factor integrante no es único. Considere, por ejemplo, la ecuación

$$xdy-ydx \ = \ 0$$

Verifique que ésta admite como factor integrante a $\mu_1=\dfrac{1}{x^2}$ y a $\mu_2=\dfrac{1}{xy}$.

2.6. Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden

Sea I un intervalo real. Una ecuación diferencial de primer orden en I, se dice *lineal* si puede escribirse de la forma:

$$(*) \qquad a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=h(x)$$

en donde $a_1(x)$, $a_0(x)$, $h(x)$ son continuas en I y $a_1(x)\neq 0$ para algún $x\in I$.

La ecuación (*) se dice *homogénea* si $h(x)=0, \forall\, x\in I$ y se dice *normal* si $a_1(x)\neq 0, \forall\, x\in I$.

Consideremos ahora la *ecuación diferencial lineal normal* de primer orden en I:

$$(15) \qquad a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=h(x)$$

Nuestro propósito es encontrar la solución general de (15). Como la ecuación (15) es normal en I entonces la podemos escribir de la forma:

$$y'+\frac{a_0(x)}{a_1(x)}\,y=\frac{h(x)}{a_1(x)}$$

O sea:

$$y'+p(x)\,y=q(x) \qquad \left(\text{donde:} \quad p(x)=\frac{a_0(x)}{a_1(x)},\ q(x)=\frac{h(x)}{a_1(x)}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=q(x)$$

$$dy+p(x)\,y\,dx=q(x)\,dx$$

$$(16) \qquad (p(x)y-q(x))\,dx+dy=0$$

Veamos si la ecuación (16) admite factor integrante. Aquí: $M(x,y) = p(x)\,y - q(x)$, $N(x,y) = 1$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = p(x), \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \text{si tenemos que} \quad p(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in I.$$

El caso $p(x) = 0$, reduce la ecuación (16) a una ecuación de variables separables que ya sabemos resolver.

Supongamos, pues que $p(x) \neq 0$. Examinemos si la ecuación (16) admite un factor integrante que depende sólo de x. Observemos que:

$$\frac{-\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}}{N} = p(x)$$

por lo tanto la ecuación lo admite. Luego el factor integrante es tal que:

$$\frac{\partial \ln \mu(x)}{\partial x} = p(x)$$
$$\text{o sea} \quad \mu(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}$$

Multiplicando todos los términos de la ecuación (16) por el factor integrante $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}$, obtenemos la ecuación

$$(p(x)y - q(x))\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}\,dx + \mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}\,dy = 0 \tag{17}$$

que es una ecuación diferencial exacta, ya que:

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = p(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx} = \frac{\partial N_1}{\partial x}$$

donde $M_1(x,y) = (p(x)y - q(x))\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}$ y $N_1(x,y) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}$

Tarea Resuelva el ecuación (17) y verifique que:

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}\left(\int q(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}\,dx + C\right), \quad c \in \mathbb{R},\ x \in I$$

es la solución general de la ecuación dada.

Observación. Consideremos la ecuación diferencial lineal de primer orden en I:

$$y' + p(x)y = q(x) \;\Big/\; \mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}$$
$$y'\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx} + p(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}\,y = q(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}$$

Notando que el lado izquierdo de la ecuación

$$y'\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx} + p(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}\,y = \left(y\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}\right)'$$

podemos reescibir la ecuación en la forma

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(y\, e^{\int p(x)dx}\right)}{dx} &= q(x)\, e^{\int p(x)dx} \\
y\, e^{\int p(x)dx} &= \int q(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx + C \\
\therefore \quad y(x) &= e^{-\displaystyle\int p(x)dx} \left[\int q(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx + C\right]
\end{aligned}$$

Ejemplos

1) Resolver $\quad (x^4 + 2y)\, dx = x\, dy$

Solución:

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = x^4 \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{2}{x}\, y = x^3 \qquad \text{que es normal en }]-\infty, 0[\text{ o en }]0, \infty[$$

$$\therefore \quad y = \mathrm{e}^{-\int \frac{-2}{x}\, dx}\left(C + \int x^3\, \mathrm{e}^{\int \frac{-2}{x}\, dx}\, dx\right)$$

$$y = \mathrm{e}^{2\ln x}\left(C + \int x^3\, \mathrm{e}^{-2\ln x}\, dx\right) = x^2\left(C + \int \frac{x^3}{x^2}\, dx\right)$$

$$y(x) = x^2\left(C + \frac{x^2}{2}\right)$$

2) Resolver $\quad (3xy + 3y - 4)\, dx + (x+1)^2\, dy = 0$

Solución:

$$(x+1)^2\frac{dy}{dx} + 3(x+1)y = 4 \quad \Rightarrow \quad y' + 3(x+1)^{-1}y = 4(x+1)^{-2} \qquad \text{normal en }]-\infty, -1[\text{ o en }]-1, \infty[$$

$$\begin{aligned}
y(x) &= \mathrm{e}^{-\displaystyle\int \frac{3}{x+1}\, dx}\left(C + \int \frac{4}{(x+1)^2} \cdot \mathrm{e}^{\int \frac{3}{x+1}\, dx}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-3\ln|x+1|}\left(C + \int \frac{4}{(x+1)^2}\, \mathrm{e}^{3\ln|x+1|}\, dx\right) \\
&= \frac{1}{(x+1)^3}\left(C + 4\int \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2}\, dx\right) \\
&= \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{1}{2}\frac{(x+1)^2}{(x+1)^3} \\
y(x) &= C\,(x+1)^{-3} + 2\,(x+1)^{-1}
\end{aligned}$$

3) Resolver $\quad (1 + xy)\, dx - (1 + x^2)\, dy = 0$

Solución:

$$(1+x^2)y' - xy = 1 \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{x}{1+x^2}\, y = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{que es normal en }]-\infty,\infty[$$

$$y = \mathrm{e}^{\int \frac{x}{1+x^2}\,dx}\left(c + \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{e}^{-\int \frac{x}{1+x^2}\,dx}\,dx\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln|1+x^2|}\left(c + \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}\,dx\right)$$

$$y = \sqrt{1+x^2}\left(c + \int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx\right) = c\sqrt{1+x^2} + x$$

Cálculo de

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = \int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{(\sec^2\theta)^{3/2}} = \int \cos\theta\,d\theta = \operatorname{sen}\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

4) $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$, donde L, R, E son constantes con c.i. $i(0)=0$
Solución:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \Rightarrow i(t) = \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(c + \int \frac{E}{L}\,\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\,dt\right) = \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(c + \frac{E}{L}\cdot\frac{L}{R}\,\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\right)$$

$$i(t) = c\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} \qquad i(0)=0 \Rightarrow 0 = C + \frac{E}{R} \Rightarrow C = -\frac{E}{R} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

5) Resolver $\qquad dx = (1 + 2x\operatorname{tg}y)\,dy$
Solución:

$$\frac{dx}{dy} = 1 + 2x\operatorname{tg}y \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} - 2x\operatorname{tg}y = 1 \Rightarrow x(y) = \mathrm{e}^{2\int \operatorname{tg}y\,dy}\left(c + \int \mathrm{e}^{-2\int \operatorname{tg}y\,dy}\,dy\right)$$

$$x(y) = \mathrm{e}^{2\ln|\cos y|}\left(c + \int \mathrm{e}^{2\ln|\cos y|}\,dy\right) = \sec^2 y\left(c + \int \cos^2 y\,dy\right) = \sec^2 y\left(c + \frac{1}{2}\int (1+\cos 2y)dy\right)$$

$$x(y) = \sec^2 y\left(c + \frac{1}{2}\left(y + \frac{\operatorname{sen}2y}{2}\right)\right) \qquad \Rightarrow \qquad 4x\cos^2 y = C + 2y + \operatorname{sen}2y$$

6) Resolver

a) $(1+\cos x)\,dy - \operatorname{sen}x(\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}x\cos x - y)dx \;=\; 0$

b) $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E\operatorname{sen}\omega t$, con $i(0)=0$

7) Encontrar la velocidad inicial mínima que debe tener un cuerpo que se dispara para que escape de la atracción de la Tierra. Desprecie la resistencia del aire.
Solución:

$$a(r) = \frac{k}{r^2} \quad k<0 \quad \text{como en } r=R,\ a(R) = -g \Rightarrow a(r) = -\frac{gR}{r^2}$$

por otro lado

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr}\cdot v' \Rightarrow -\frac{gR^2}{r^2} = \frac{dv}{dr}\cdot v$$

$$\Rightarrow \frac{gR^2}{r} + c = \frac{v^2}{2} \qquad \text{pero en } r=R, v=v_0 \Rightarrow c = \frac{v_0^2}{2} - gR$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2gR^2}{r^2} + v_0^2 - 2gR$$

8) Un embudo con ángulo de salida de $60°$ y una sección transversal con área de $0{,}5\text{cm}^2$, contiene agua. En $t = 0$, se abre la salida. Determinar el tiempo que tardará en vaciarse, suponiendo que la altura inicial del agua $h(0) = 10\text{cm}$.

Dato: $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$, $\quad h =$ altura instántanea, $\quad v =$ velocidad del líquido.

Solución:

$$dV = \text{volumen de } H_2O \text{ que sale.}$$
$$dV = 0{,}5 \cdot v \cdot dt \quad \text{con} \quad v = 0{,}6\sqrt{2gh},$$

por otro lado

$$dV = -\pi r^2 dh \quad \text{con} \quad r = h \operatorname{tg} 30 = h/\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow 0{,}3\sqrt{2}\sqrt{gh}\, dt = -\frac{\pi h^2}{3}\, dh \Rightarrow \frac{0{,}9\sqrt{2g}}{\pi}\, dt = -h^{3/2}\, dh$$
$$\frac{0{,}9}{\pi}\sqrt{2g}\, t = -h^{5/2} \cdot \frac{2}{5} + c \quad \text{y} \quad h(t=0) = 10 \Rightarrow \frac{0{,}9}{\pi}\sqrt{2g} \cdot 0 = -10^{5/2}\frac{2}{5} + c$$
$$t = \frac{2}{5}\frac{\pi}{0{,}9 \cdot \sqrt{2g}} \cdot \left(10^{5/2} - h^{5/2}\right) \qquad \text{y para} \quad h = 0 \quad t = \frac{2}{5} \cdot \frac{\pi}{0{,}9\sqrt{2g}} \cdot 10^{5/2} = 99{,}7\text{seg} = 1'40''$$

9) En un movimiento rectilíneo, la aceleración es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia s, y es igual a -1 cuando $s = 2$. Además posee una velocidad de 5 y $s = 8$ cuando $t = 0$.

a) Hallar v cuando $s = 24$

b) Hallar el tiempo t que demora en recorrer desde $s = 8$ a $s = 24$.

Solución:

$$a = -\frac{k}{s^2} \quad \Rightarrow \quad -1 = -\frac{k}{4} \quad \Rightarrow \quad k = 4 \quad \Rightarrow \quad a = -4/s^2; v = \frac{ds}{dt}$$
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v \quad \Rightarrow \quad v\frac{dv}{ds} = -\frac{4}{s^2} \quad \Rightarrow \quad v^2/2 = c + 4/s \quad \Rightarrow \quad c = \frac{25}{2} - \frac{4}{8} = 12$$

a) $v(s = 24) = \sqrt{2}\sqrt{\frac{4}{24} + 12} \approx 4{,}93$

b) $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{\sqrt{8}}{s}\sqrt{s + 3s^2} \Rightarrow t = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\displaystyle\int_{24}^{8} \frac{s\, ds}{\sqrt{s + s^2}} \approx 3{,}23$

2.7. Ecuaciones que pueden reducirse a la forma lineal

Ciertas E. D. **no lineales** de primer orden pueden reducirse a E. D. L. por un adecuado cambio de variables.

1. **E. D. de Bernoulli.** La E. D. de Bernoulli adopta la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x)\, y^n \tag{18}$$

(E. D. N. L. pues es no lineal en la variable y).

Efectuamos la sustitución $\mu = y^{1-n}$, $\quad$ con $\quad n \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$, $\quad$ pues:

si $n=1 \quad \Rightarrow \quad$ (18) queda

$$\frac{dy}{dx}+(p(x)-q(x))y=0 \qquad \text{(variables separables), y}$$

si $n=0 \quad \Rightarrow \quad$ (18) queda

$$y'+p(x)y=q(x) \qquad \text{(ecuación diferencial de primer orden lineal).}$$

Si $n\neq 0,1$ usamos la sustitución $\mu=y^{1-n} \Rightarrow \dfrac{d\mu}{dx}=(1-n)\,y^{-n}\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow$ (18) queda (al dividir por y^n):

$$\begin{aligned} y^{-n}y'+p(x)y^{1-n} &= q(x)\\ (1-n)\,y^{-n}y'+(1-n)\,p(x)y^{1-n} &= (1-n)\,q(x)\\ \frac{d\mu}{dx}+(1-n)p(x)\mu &= (1-n)\,q(x)\end{aligned}$$

que es una E. D. L. de primer orden en la variable μ.

Ejemplos

1) Resolver $\quad y'+xy=\dfrac{x}{y}$

Solución.

En este caso, se tiene que $n=-1$ de donde $\mu=y^{1-(-1)}=y^2 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{d\mu}{dx}=2y\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{1}{2}\frac{d\mu}{dx}-x\mu = x \quad\Rightarrow\quad \mu(x)=\mathrm{e}^{-2\int 2x\,dx}\left(\int 2x\,\mathrm{e}^{\int 2x\,dx}\,dx+c\right)$$

$$\mu(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\left(\int 2x\,\mathrm{e}^{x^2}\,dx+c\right)=\mathrm{e}^{-x^2}\left(\mathrm{e}^{x^2}+c\right)=1+c\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{y^2=1+c\,\mathrm{e}^{-x^2}}$$

2) Resolver $\quad y'-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{5}{2}x^2y^3$

Solución.

En este caso se tiene que $n=3$ de donde $\mu=y^{-2} \Rightarrow \mu'=-2y^{-3}y'$

$$\frac{\mu'}{-2}-\frac{\mu}{x}=-\frac{5}{2}x^2 \quad\Rightarrow\quad \mu'+2\mu\cdot\frac{1}{x}=5x^2$$

$$\mu(x)=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\,dx}\left(c+\int 5x^2\,\mathrm{e}^{\int 2/x\,dx}\,dx\right)=\mathrm{e}^{-2\ln x}\left(c+\int 5x^2\,\mathrm{e}^{2\ln x}\,dx\right)=\frac{1}{x^2}\left(c+5\cdot\frac{x^5}{5}\right)$$

$$\mu(x)=y^{-2}=cx^{-2}+x^3 \quad\Rightarrow\quad \boxed{cx^{-2}+x^3=y^{-2}}$$

2. **Ecuación de Ricatti.** Una E. D. N. L. de primer orden de la forma:

$$y'(x) + a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x) = 0$$

donde $a_i(x)$ son funciones continuas en $I\ \forall\, i = 0,1,2$ y $a_2(x) \neq 0$ en un intervalo I se conoce como *ecuación de Ricatti*.

Para convertirla en una EDL de primer orden se utiliza la sustitución $y = \dfrac{1}{\mu} + y_1$ donde $y_1(x)$ es una solución particular de la ecuación de Ricatti (esta sustitución particular se encuentra por inspección).

Demostración. Sea

$$y = \frac{1}{\mu} + y_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\mu^2 \frac{du}{dx} + \frac{dy_1}{dx}$$

donde

$$\begin{aligned} y_1' + a_2(x)y_1^2 + a_1(x)y_1 + a_0(x) = 0 \\ \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{\mu^2}\frac{du}{dx} + a_2(x)\left(y_1 + \frac{1}{\mu}\right)^2 + a_1(x)\left(y_1 + \frac{1}{\mu}\right) + a_0(x) = 0 \\ 0 = y_1' - \frac{1}{\mu^2}\frac{du}{dx} + a_2(x)y_1^2 + \frac{2}{\mu}y_1 a_2(x) + \frac{1}{\mu^2}a_2(x) + a_1(x)y_1 + \frac{a_1(x)}{\mu} + a_0(x) \\ -\frac{d\mu}{dx} + 2\mu y_1 a_2(x) + a_2(x) + a_1(x)\mu \ = \ 0 \qquad \Rightarrow \\ \frac{d\mu}{dx} - (2y_1a_2(x) + a_1(x))\mu \ = \ a_2(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{d\mu}{dx} + p(x)\mu \ = \ q(x) \end{aligned}$$

□

Ejemplos

1) Resolver: $y' = x + 1 - xy^2 + 2x^2y - x^3$ si $y_1(x) = 1 + x$.
Primero, escribimos la ecuación en la *forma* que se necesita para reconocer el tipo de ecuación y los términos correspondientes. La ecuación queda:

$$y' + xy^2 - 2x^2y + x^3 - x - 1 = 0$$

Luego : $a_2(x) \ = \ x\,, \qquad a_1(x) \ = \ -2x^2\,, \qquad a_0(x) \ = \ x^3 - x - 1$

Aplicando el cambio de variable, la ecuación queda $\dfrac{d\mu}{dx} - (2(1+x)x - 2x^2)\mu \ = \ x$

es decir : $\dfrac{d\mu}{dx} - 2xv = x$ de donde $\mu = \mathrm{e}^{-\int -2x\,dx}\left(\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{\int -2x\,dx}\,dx + c\right)$

$$\mu(x) \ = \ e^{x^2}\left(\int x\,e^{-x^2}\,dx + c\right) \ = \ ce^{x^2} - \frac{1}{2}$$

Así, la solución obtenida es : $y(x) \ = \ 1 + x + \dfrac{2}{ce^{x^2} - 1}$

2) Resolver $\quad y' - \operatorname{sen}^2 x y^2 + \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} y + \cos^2 x = 0, \quad$ si $\quad y_p = \cot x$.

En este caso,

$$a_2(x) = -\operatorname{sen}^2 x\,, \qquad a_1(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x\, \cos x}\,, \qquad a_0(x) = -\cos^2 x.$$

Si $\quad y = \dfrac{1}{v} + y_p(x)$, se tiene:

$$\frac{dv}{dx} - \left(-2\cot x \operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\right) v = -\operatorname{sen}^2 x.$$
$$\frac{dv}{dx} - \left(-2\operatorname{sen} x\, \cos x + \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\right) v = -\operatorname{sen}^2 x$$
$$v' - \frac{-2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 1}{\operatorname{sen} x \cos x} v \;=\; -\operatorname{sen}^2 x$$
$$v = \mathrm{e}^{\displaystyle\int \frac{-2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 1}{\operatorname{sen} x \cos x} dx} \left(-\int \operatorname{sen}^2 x\, \mathrm{e}^{\displaystyle\int \frac{2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 1}{\operatorname{sen} x \cos x} dx} dx + c \right)$$

Calculamos la integral:

$$\int \left(-2\operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\right) dx = -2\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + \int \frac{2}{\operatorname{sen} 2x} dx$$
$$= -\operatorname{sen}^2 x + 2\int \operatorname{cosec} 2x\, dx = -\operatorname{sen}^2 x + \ln|\operatorname{cosec} 2x + \cot 2x|$$

Luego:

$$v = \mathrm{e}^{-\operatorname{sen}^2 x}\ \mathrm{e}^{-\ln|\operatorname{cosec} 2x + \cot 2x|} \left(-\int \operatorname{sen}^2 x\ \mathrm{e}^{\operatorname{sen}^2 x}\, \mathrm{e}^{\ln|\operatorname{cosec} 2x + \cot 2x|}\, dx + c \right)$$
$$v = \mathrm{e}^{-\operatorname{sen}^2 x}\ \frac{1}{\operatorname{cosec} 2x + \cot 2x} \left(-\int \operatorname{sen}^2 x\ \mathrm{e}^{\operatorname{sen}^2 x} (\operatorname{cosec} 2x + \cot 2x) dx + c \right)$$
$$= \mathrm{e}^{-\operatorname{sen}^2 x}\ \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos 2x} \left(-\int \operatorname{sen}^2 x\ \mathrm{e}^{\operatorname{sen} 2x} \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx + c \right)$$
$$= \operatorname{tg} x\ \mathrm{e}^{-\operatorname{sen}^2 x} \left(-\frac{1}{2} \int 2\operatorname{sen} x\ \cos x\, \mathrm{e}^{\operatorname{sen}^2 x}\ dx + c \right)$$
$$= \operatorname{tg} x\ \mathrm{e}^{-\operatorname{sen}^2 x} \left(-\frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{\operatorname{sen}^2 x} + c \right) = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + c\ \operatorname{tg} x\ \mathrm{e}^{-\operatorname{sen}^2 x}$$
$$\Rightarrow \qquad y(x) = \operatorname{cotg} x + \frac{1}{-\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + c\ \operatorname{tg} x\ \mathrm{e}^{-\operatorname{sen}^2 x}}$$

3) Resolver $\quad y' - xy^2 + (2x-1)y = x - 1$

Solución. Esta es una ecuación de Ricatti de la cual no conocemos una solución particular. Supongamos que ésta es $\quad y_1 = k; \quad$ luego, es necesario determinar el valor de la constante k.

$$y_1 = k \quad \Rightarrow \quad y_1' = 0 \qquad \text{Reemplazando:} \qquad 0 - xk^2 + 2kx - k - x + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x(-k^2 + 2k - 1) + 1 - k = 0 \quad \Rightarrow \quad -x(k-1)^2 - (k-1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad k = 1 \qquad \therefore \quad y = 1 + \frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad y' = -u^{-2}u'$$
$$-u^{-2}u' - x\left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 + (2x-1)\left(1 + \frac{1}{u}\right) = x - 1$$

$$-u^{-2}u' - x - 2x/u - x/u^2 + 2x - 1 + 2x/u - 1/u = x - 1 \qquad / \cdot (-u^2)$$
$$\Rightarrow \quad u' + u = -x \quad \Rightarrow \quad u(x) = \mathrm{e}^{-\int dx}\left(c + \int -x\,\mathrm{e}^{\int dx}\,dx\right)$$
$$u(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(c - x\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\right)$$
$$\therefore \quad y = 1 + (1 - x + c\,\mathrm{e}^{-x})^{-1}$$

3. **Otras reducciones.** Existen otras ecuaciones diferenciales no lineales, en las que un adecuado cambio de variable permite transformarla en una lineal, que es posible resolver. Considere, por ejemplo:

   a) $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y\ln y$

   Usamos el cambio de variable: $\quad u = \ln y \quad$ de donde $\quad u' = \dfrac{1}{y}\,y'$

   Reemplazando: $\quad u'y + p(x)y = q(x)yu \quad$ y luego $\quad \dfrac{du}{dx} + p(x) = q(x)u \quad \Rightarrow$
   $\dfrac{du}{dx} - q(x)u = -p(x)$, $\quad$ que es una EDL de primer orden.

   b) Use la sustitución $\quad z = \tan(y) \quad$ para transformar la e.d.o.
   $$y' + x\,\mathrm{sen}(2y) \;=\; xe^{-x^2}\cos^2(y)$$
   en una lineal de primer orden, y resuélvala.

   c) Resuelva la ecuación $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - xy^2}{2x^2y} \quad$ haciendo la sustitución $\quad v = \dfrac{y}{x^n} \quad$ para un valor adecuado de n.

   d) Considere la ecuación de segundo orden
   $$y'' + 5y' + 6y \;=\; 0$$

   i) Demuestre que la ecuación se reduce a $\quad z' + 3z = 0 \quad$ haciendo el cambio de variable $z = y' + 2y$.

   ii) Usando lo anterior, resuelva la ecuación de segundo orden.

   iii) En general, demuestre que la E.D.O.
   $$y'' + (a+b)y' + aby \;=\; 0 \qquad a, b \text{ constantes}$$
   se reduce a una E.D. de orden uno, haciendo la sustitución $\quad z = y' + ay$.

   e) Resuelva la ecuación $\quad (1 - x^2)y'' - 2xy' \;=\; 0.$

Ejercicios.

1) $2y' - \dfrac{y^2}{x^2} - 1 = 0$

2) $y' + y^2 + 3y + 2 = 0$

3) $y' + (1+e^x)y^2 - 2x^2(1+e^x)y + x^4(1+e^x) - 2x = 0$

4) $\dfrac{dx}{dt} + x^2 + 1 = 0$

5) $y' + y^2 - 1 = 0$, tal que, $y(0) = -1/3$

6) $y' = (x+y+1)^2 - 2$

2.8. Existencia y unicidad de las soluciones

Al considerar este tipo de problemas, surgen dos preguntas fundamentales: ¿existe una solución del problema? Si es que existe, ¿es esta solución única? Las respuestas a ellas no son tan obvias como parecen. Considere por ejemplo:

1. El problema de valor inicial $|y'| + |y| = 0, \quad y(0) = 1$ **no** tiene solución, porque $y \equiv 0$ es la única solución de la ecuación diferencial.
2. $xy' = y - 1, \quad y(0) = 1$ tiene infinitas soluciones, de la forma $y = 1 + cx, \quad c \in \mathbb{R}$.

Puede que, a pesar de los ejemplos anteriores, se piense que no tiene sentido demostrar existencia de soluciones, si la EDO proviene, por ejemplo, de un problema físico que tiene solución. Sin embargo, esto permite asegurar que el modelo es una buena aproximación al fenómeno que se está modelando. Demostrar la unicidad de la solución (ó, más bien, determinar condiciones que garanticen la unicidad de la solución) permite que el modelo matemático efectivamente *prediga* el comportamiento futuro con menor probabilidad de error.

Se puede asegurar que cada EDL de primer orden un un intervalo I, tiene soluciones. De hecho, tiene una infinidad de soluciones, una para cada valor de c en la expresión:

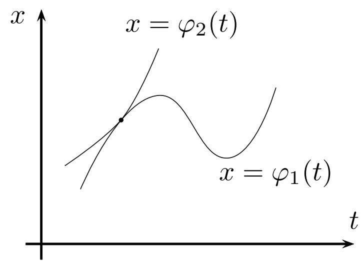
$$y(x) = e^{-\int p(x)\,dx}\left(c + \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right) \tag{19}$$

y la solución general de una de tales ecuaciones es, por lo tanto, una familia de curvas paramétricas en el plano xy (con parámetro c) determinada por el intervalo I. Es fácil ver que, dado cualquier punto (x_0, y_0) en el plano xy, con $x \in I$, es posible determinar la constante c de tal modo que la curva solución *pase* por dicho punto. El problema de encontrar una función $y = f(x)$ que sea solución de una EDLN de primer orden $y' + p(x)y = q(x)$ y que satisfaga la *condición inicial* $y(x_0) = y_0$ se llama *problema de valor inicial* ó *problema de Cauchy* para la ecuación dada.

Teorema 1 (existencia de soluciones). *Sea $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua en el dominio Ω. Para todo punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ existe una función $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ definida en algún intervalo I, solución del problema de valor inicial llamado de Cauchy*

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad \textit{tal que} \quad \varphi(t_0) = x_0$$

La siguiente figura ilustra el teorema con dos soluciones φ_1, φ_2



Teorema 2. *Sea $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $F, \dfrac{\partial F}{\partial x}$ son funciones continuas en el dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (y por lo tanto acotadas). Para todo punto $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe una única función $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ definida en algún intervalo I de $\mathbb{R}$, solución* ***única*** *del problema de valor inicial de Cauchy.*

Observación.

1. Las condiciones señaladas en los teoremas anteriores son **suficientes pero no necesarias**.
2. Nótese que si F es un polinomio en la variable x, entonces la ED admite solución única $\forall\,(t, x) \in \mathbb{R}^2$. En lo que sigue, siempre supondremos existencia y unicidad de los problemas de Cauchy.

2.9. Ejercicios

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

   a) $\dfrac{dy}{dx} = 4x - 5$

   b) $(x-3)dy + ydx = 0$

   c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^5 - 2x + 1}{\cos(y) + e^y}$

   d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{y} + y}$

   e) $y' = 2x + y$

   f) $y' = \dfrac{1}{x-y} + 1$

   g) $y' + \dfrac{x+y}{x+2y} = 0$

   h) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

   i) $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$

   j) $(6xy^2 - 3x^2)dx + (6x^2y + 3y^2 - 7)dy = 0$

   k) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3e^x$

   l) $\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x^2} = x\cos(x)$

   m) $y' = (x+y)^2$

   n) $y' = (8x + 2y + 1)^2$

   ñ) $(2x - y)dx + (4x - 2y + 3)dy = 0$

   o) $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$

   p) $x(x+y)(dx + dy) = \dfrac{y}{x}(xdy - ydx)$

   q) $y' = \dfrac{x + 2y}{x}$

   r) $(x + 2y)dx - xdy = 0$

   s) $2xydx + (x^2 + 4y)dy = 0$

   t) $(1+y)dx + \dfrac{dy}{x^2 - 3x} = 0$

   u) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-3}{x+y+1}$

2. La ecuación $(3x^5 + 3x^2y^2)dx - (2x^3y - 2y^3)dy = 0$ se reduce a una ecuación homogénea haciendo el cambio de variables $x = u^p$ y $y = v^q$. Determine las constantes p y q. Resuelva la ecuación.

3. Muestre que la ecuación $y' = \dfrac{y}{x} + x^m y^n f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ se transforma en una ecuación de variables separables usando el cambio de variables $y = vx$, donde $v = v(x)$.

   Use lo anterior para resolver la ecuación
   $$y' = \frac{y}{x} + \frac{\sec^2(\frac{y}{x})}{y^2}$$

4. Si la ecuación diferencial $(7x^4y - 3y^8)dx + (2x^5 - 9xy^7)dy = 0$ se multiplica por el factor $x^m y^n$ se transforma en una ecuación exacta, para ciertos valores de m y n. Encuentre estos valores y resuelva la ecuación.

5. Obtenga la solución de los siguientes problemas de valores iniciales

   a) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y, \quad y(3) = 0$

   b) $xy' - y = \dfrac{y}{\ln(y) - \ln(x)}, \quad y(1) = e$

   c) $y' - y = 2e^{4x}, \quad y(0) = -3$

   d) $y' + \dfrac{5y}{9x} = 3x^3 + x, \quad y(-1) = 4$

e) $y' + \dfrac{2}{x+1}y = 3, \quad y(0) = 5$

6. Encuentre las soluciones de $xy' - y - e^{y'} = 0$

7. Si la ecuación $y^2dx = (x^3 - xy)dy$ se multiplica por una función de la forma $u(x,y) = x^n y^m$ para ciertos valores de $n, m \in \mathbb{Z}$ se transforma en una ecuación exacta. Determine n y m y resuelva la ecuación.

8. Para $x \neq 0$ considere la ecuación $\quad y(x+1) + \left(2x + \dfrac{1}{y}\right) y' = -1$

   a) Determine a y b tal que al multiplicar la ecuación por la función $u(x,y) = y^a e^{bx}$ se transforme en una ecuación exacta.
   b) Encuentre la solución particular que verifica $y(4) = 6$.

9. Considere la ecuación diferencial $\quad y - x\dfrac{dy}{dx} = a\left(1 + x^2\dfrac{dy}{dx}\right), \; a > 1.$

   a) Encuentre la solución general.
   b) Encuentre la solución particular que verifica $y(1) = \dfrac{a}{a+1}$
   c) Encuentre el intervalo máximo donde la solución particular anterior está definida.

10. Resuelva la ecuación $x^3yy' + 2x^2y^2 - 1 = 0$, utilizando el cambio de variables $u(x) = x^2y(x)$.

11. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

    a) $y' = \dfrac{y}{x} - \sec^2 \dfrac{y}{x}$
    b) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x} + 1$
    c) $y' = \dfrac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$ Sugerencia: hacer $z = x^2 + y^2$

12. Halle la ecuación de la curva que pasa por el punto (0,1), y que satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 1}{2y - x + 3}$$

13. En los siguientes, multiplique por el correspondiente factor integrante $\mu(x,y)$ para resolver la EDO:

    a) $(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0, \quad \mu(x,y) = \dfrac{1}{xy^2}$
    b) $(x^2y^2 - 1)dx + (1 + x^2y^2)xdy = 0, \quad \mu(x,y) = \dfrac{1}{xy}$
    c) $3(y+1)dx - 2xdy = 0, \quad \mu(x,y) = \dfrac{y+1}{x^4}$
    d) $(x^2 + y^2 - x)dx - ydy = 0, \quad \mu(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

14. Halle la ecuación de la curva que pasa por el punto (0,1), y que satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-1}{2y-x+3}$$

15. Halle la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$

b) $(t-\sqrt{ty})\dfrac{dy}{dt}=y$

c) $2ty\dfrac{dy}{dt}=3y^2-t^2$

d) $(1+t-2y)dt+(4t-3y-6)dy=0$

e) $y'=\dfrac{y}{x}-\sec^2\dfrac{y}{x}$

f) $y'=e^{\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}+1$

g) $y'=\dfrac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$, Ayuda: hacer $z=x^2+y^2$

16. Resuelva $2(1-x^2)y'-(1-x^2)y=\dfrac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{2(1-x^2)}y^3$. ¿Dónde es normal la ecuación?

3. Comportamiento cualitativo de las EDO

Hasta aquí, hemos estudiado algunas técnicas que nos permiten resolver *analíticamente* algunos tipos de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, es importante tener presente que la mayoría de las ED no puede resolverse explícitamente, ó, como sucede en muchas aplicaciones, la solución general importa menos que la solución particular que satisface una determinada condición inicial. Interesa, no obstante, describir cómo se *comportan* las soluciones; por ejemplo

1. al aumentar t ¿crecen sin cota las soluciones?
2. ¿tienden las soluciones a algún valor (0 por ejemplo)?
3. ¿oscilan entre ciertos valores?

Para comprender mejor la situación, consideremos el siguiente ejemplo:

$$\frac{dy}{dt} = 4y(1-y) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dy}{4y(1-y)} = dt \qquad \Big/ \int$$

Podríamos encontrar la solución tras la integración, pero las fórmulas obtenidas **no** son fáciles de interpretar. Por ello, los métodos geométricos y cualitativos permiten obtener mucha información con poco trabajo. Esto es importante sobre todo para ED «difíciles»; considerar la ecuación:

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dt} = \mathrm{e}^{y^2/10} \operatorname{sen}^2 y \\ \Longrightarrow \qquad & \int \left(\mathrm{e}^{y^2/10} \operatorname{sen}^2 y\right)^{-1} dy = \int dt \end{aligned}$$

La integral del lado izquierdo es complicada, sin embargo, cualitativamente, notamos que

$$f(y) \ = \ \mathrm{e}^{y^2/10} \operatorname{sen}^2 y \ > \ 0$$

excepto para $y = n\pi$; veremos en esta sección que esta información es suficientemente útil.

Otra relación que es importante considerar cuando se trata de modelos cuya información, por tanto, puede provenir de mediciones ó datos aproximados, es la dependencia (continua) de las soluciones respecto de las condiciones iniciales, ya que si éstas cambian *ligeramente*, es deseable que la solución no varíe mucho.

Observación. Sea $F\colon D \to \mathbb{R}$, donde $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Por lo tanto, es posible expresar una EDO de primer orden en la forma

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x) \qquad \text{ó} \qquad \dot{x} = F(t,x)$$

Si $F(t,x) = F(x)$, i.e., si F depende *sólo* de la variable x, entonces

$$\dot{x} = F(x), \qquad \text{y en este caso la ecuación se dice } \textit{autonóma}.$$

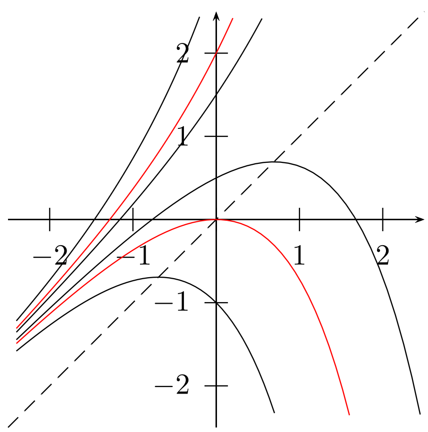
Para el estudio cualitativo, una solución $x(t)$ de $\dot{x} = F(t, x)$ se representa geométricamente en el plano t–x. Como dado cualquier $(t_0, x_0) \in D$ existe una única solución que pasa por (t_0, x_0), (por los teoremas de existencia y unicidad de soluciones); ello quiere decir que las soluciones de la ED (el conjunto de todas ellas) se representan por una *familia de curvas solución* en D y que existe una única curva solución que pasa por un punto determinado.

Ejemplos

1) Estudie $\quad \dot{x} = \underbrace{x - t}_{f(x,t)}$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) \quad \text{alcanza sus puntos críticos en } x - t = 0$$

Cualitativamente:



Analíticamente:

Método 1 $\quad \dot{x} - x = -t \quad$ ED lineal

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\int dt}\left(-\int t\, e^{-\int dt}\, dt\right) + C \\ &= e^t\left(t\, e^{-t} + e^{-t} + C\right) \\ &= t + 1 + C\, e^t \end{aligned}$$

Método 2 $\quad u = x - t$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{dx}{dt} - 1 \\ \therefore\ &\frac{du}{dt} + 1 = u \Rightarrow \frac{du}{u-1} = dt \\ &\ln(u-1) = t + k \\ &u(t) - 1 = C\, e^t \\ &x(t) - t = C\, e^t + 1 \end{aligned}$$

2) Estudiar $\quad \dot{x} = -\dfrac{x}{t},\ t \neq 0.$

Claramente, lo anterior implica que $\quad \dfrac{dx}{x} = -\dfrac{dt}{t}.\quad$ Luego:

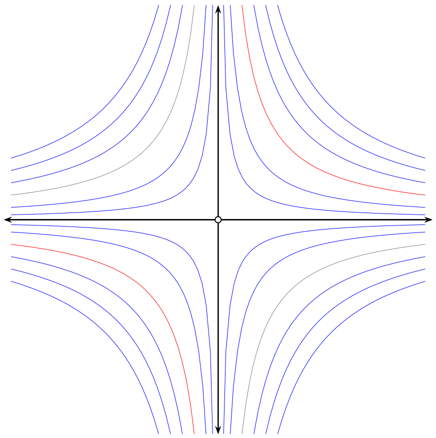
$$\ln|x| = -\ln|t| + C$$

de donde $\quad |x(t)| = k\dfrac{1}{t}.\quad$ Además: $\quad \dfrac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{x}{t} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ (solución trivial)

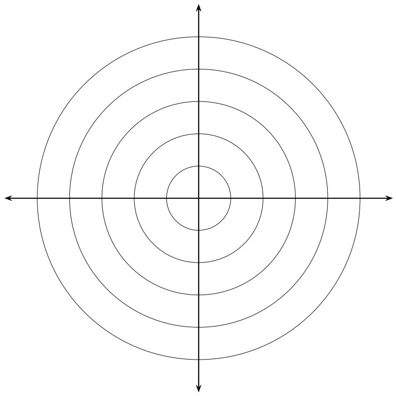
Pero

$$\begin{array}{ccccc} x > 0 & \wedge & t > 0 & \Rightarrow & \dot{x} < 0 \\ x > 0 & \wedge & t < 0 & \Rightarrow & \dot{x} > 0 \\ x < 0 & \wedge & t > 0 & \Rightarrow & \dot{x} > 0 \\ x < 0 & \wedge & t < 0 & \Rightarrow & \dot{x} < 0 \end{array}$$

Así, gráficamente, las soluciones son de la forma:

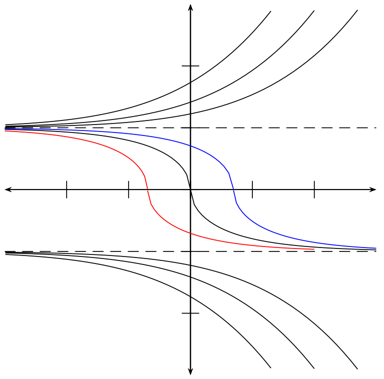


3) $\dot{x} \;=\; -\dfrac{t}{x},\; x \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x\,dx \;=\; -t\,dt \Rightarrow x^2 + t^2 \;=\; C$

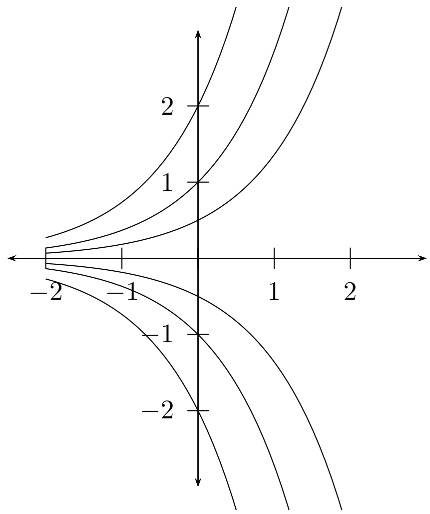


4) Consideremos ahora un par de ecuaciones autónomas:

$\dot{x} \;=\; \dfrac{1}{2}(x^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 1 \;$ ó $\; x(t) = -1$



5) $\dot{x} = x$



Vemos entonces que *no* es necesario tener ni la solución explícita ni un dibujo exacto para poder describir cualitativamente el comportamiento de la solución de una ED. Más aún, si $\dfrac{dx}{dt} = F(x)$ es una ED autónoma, las soluciones de ella tienen la siguiente propiedad:

Proposición 1. *Si $\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una solución, entonces cualquier traslación de la gráfica de ξ en la dirección del eje t es la gráfica de otra solución de la ecuación.*

En efecto: sea $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\eta(t) = \xi(t-c),\ c \in \mathbb{R}$ constante.

Entonces:

$$\dot{\eta} = \dot{\xi}(t-c) \equiv F(\xi(t-c)) \equiv F(\eta(t))$$

$\therefore$ η también es una solución.

Observación. Notamos que el comportamiento de la solución de las ecuaciones diferenciales autónomas está determinado por $f(x)$. Específicamente:

1. Si $\exists\, c \in \mathbb{R} : f(c) = 0$, entonces $x(t) = c$ es una solución.
2. Si $f(x) \neq 0$, entonces $x(t)$ es creciente o decreciente, dependiendo del signo de $f(x)$.

Esta información puede representarse en una recta real que representa a x.

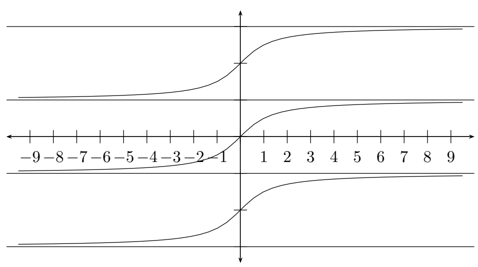
Para ver esto, considere

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dt} = \mathrm{e}^{y^2/10} \operatorname{sen}^2 y \\ \Longrightarrow \quad & \int \left(\mathrm{e}^{y^2/10} \operatorname{sen}^2 y \right)^{-1} dy = \int dt \end{aligned}$$

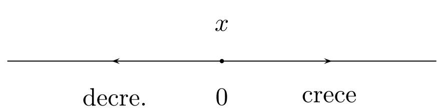
La integral del lado izquierdo es complicada, sin embargo, cualitativamente, notamos que

$$f(y) \ = \ \mathrm{e}^{y^2/10} \operatorname{sen}^2 y \ > \ 0$$

excepto para $y = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, que nos dan las soluciones de equilibrio. Gráficamente:



Es posible «resumir» el comportamiento cualitativo de las soluciones en las llamadas *líneas de fase*, que describimos de la siguiente manera:



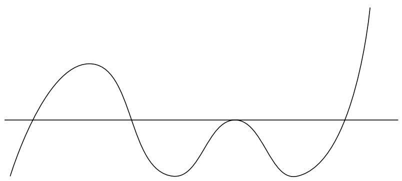
Definición 3.1. Sea $\dot{x} = F(x)$, y sea $x_0 \in \mathbb{R} : F(x_0) = 0$. Entonces diremos que x_0 es una *singularidad* o un *punto de equilibrio* de la ED

Notar que $x(t) = x_0$ es una solución (cte.) de la ED, pues

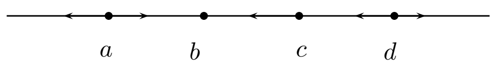
$$\dot{x}(t) = 0 \quad \text{y} \quad F(x_0) = 0$$

Observación. La línea de fase se puede obtener directamente de $\dot{x}(t) = F(x)$, simplemente mirando cuando $F(x) \geq 0$.

Ejemplo. Supongamos que $\mathrm{Gr}\,(F)$ viene dado por

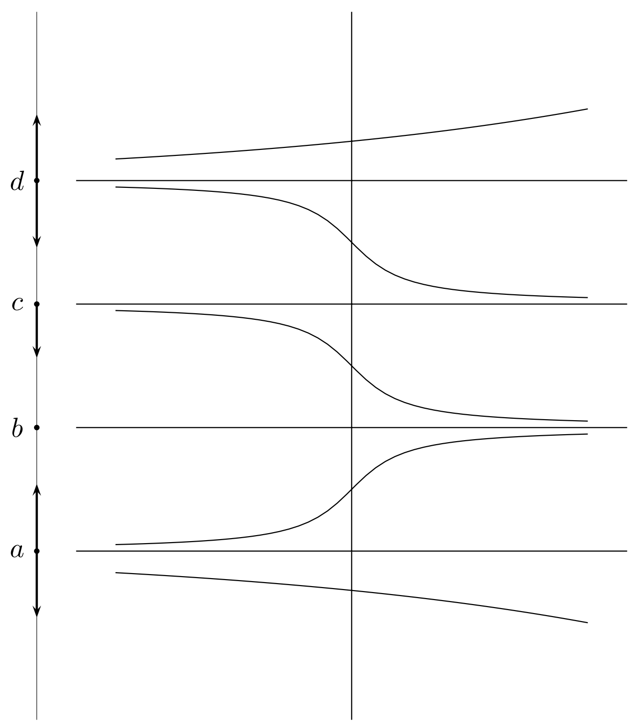


Entonces, la línea de fases es



en donde la dirección de la flecha en cada intervalo indica si la función crece ($\rightarrow$) o decrece ($\leftarrow$) en dicho intervalo.

Escribimos la línea de fase de manera vertical, al lado del gráfico en el plano $t - x$ que representa las soluciones, de manera de simplificar su interpretación:



Observación. Dependiendo del comportamiento *local* de las soluciones de la ecuación en una singularidad aislada en la *Línea de Fase*, se distinguen (y definen) los siguientes tipos de singularidades:

1. Repulsor o fuente:

2. Atractor o sumidero:

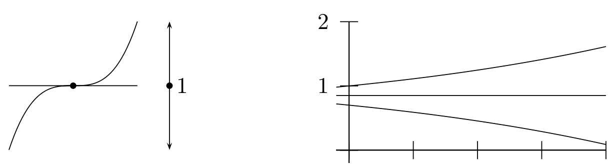
3. Atractor-repulsor:

4. Repulsor-atractor:

Ejemplo. Describir cualitativamente los tipos de soluciones que admite la EDO

$$\dot{x} = (x-1)^3 \, e^{\cos(x^4-1)}$$

Solución. Es inmediato que $x = 1$ es la única singularidad (aislada) de la EDO.
Como $e^{\cos(x^4-1)} > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$, la gráfica de $F(x) = (x-1)^3 \, e^{\cos(x^4-1)}$, la línea de fases y los tipos de soluciones de la EDO, son como ilustra la figura, en cada subintervalo respectivo.



La ecuación del ejercicio anterior, es muy difícil de integrar, desde el punto de vista del cálculo. En consecuencia, es difícil conocer explícitamente las expresiones de las soluciones que indica la figura. Sin embargo, la línea de fases permite dar una descripción cualitativa del tipo de soluciones y sus puntos de equilibrio.

Definición 3.2. Dos ecuaciones diferenciales autónomas, se dicen *cualitativamente equivalentes* si, y sólo si, tienen la misma línea de fases, en el sentido del **mismo número de puntos singulares, de la misma naturaleza y distribuidos en el mismo orden**.

Ejemplos

1) Las ED $\dot{x} = x$, $\dot{x} = (x-1)\, e^{\cos(x^4-1)}$, son equivalentes, pues cada una de ellas tiene un único punto atractor en sus respectivas líneas de fases.

2) $\dot{x} = (x+2)(x+1) \sim \dot{x} = \frac{1}{2}(x^2-1)$. Pero $\dot{x} = -(x+2)(x+1) \not\sim \dot{x} = \frac{1}{2}(x^2-1)$ (pues en este último caso el atractor y el repulsor se encuentran en distinto orden).

3.1. Algunos Modelos Sencillos

Para ilustrar de mejor manera cómo se utilizan las ecuaciones diferenciales para modelar, consideremos algunos modelos sencillos, y comenzaremos con algunos modelos clásicos de crecimiento de población.

Ejemplos

1) **Crecimiento ilimitado de Poblaciones**

   Este modelo se basa en el supuesto que la velocidad de crecimiento de la población es proporcional al tamaño de la misma. Las variables implicadas en este modelo son:

   - t: tiempo, que es la variable independiente
   - P: número de sujetos de la población, que es la variable dependiente
   - k: constante de proporcionalidad (ó parámetro), que se denomina a veces «*coeficiente de velocidad del crecimiento*»

   Así, la hipótesis de que la variación del tamaño de la población es proporcional a ella se escribe como:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

2) **Modelo logístico de población**

   Claramente, el modelo anterior no considera las condiciones del entorno y la cantidad de recursos disponibles. Para considerar estos factores, agregamos a la hipótesis anterior, las siguientes:

   - Si la población es pequeña, la tasa de crecimiento de ella es proporcional a su tamaño.
   - Si la población es grande con respecto a la capacidad de soporte del entorno y de los recursos disponibles, la población disminuirá; es decir, en este caso la tasa de crecimiento es negativa.

   Usamos los mismos parámetros anteriores, sólo que en este caso la constante k es la razón de cambio de la población en el caso en que ésta sea pequeña. Debemos introducir un nuevo parámetro que dé cuenta de la «*capacidad de soporte*» del entorno. Es decir, necesitamos un parámetro N que permita modelar la situación:

   Si $P(t) < N$, entonces la población P crece.

   Si $P(t) > N$, entonces la población P decrece.

   Luego, el modelo puede ser expresado como

$$\frac{dP}{dt} = k\,P\left(1 - \frac{P}{N}\right)$$

3.2. Ejercicios

1. Obtenga la solución de los siguientes problemas de valores iniciales

   a) $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y \ , \ y(3) = 0$

   b) $xy' - y = \dfrac{y}{\ln(y) - \ln(x)} \ , \ y(1) = e$

   c) $y' - y = 2e^{4x} \ , \ y(0) = -3$

   d) $y' + \dfrac{5y}{9x} = 3x^3 + x \ , \ y(-1) = 4$

   e) $y' + \dfrac{2}{x+1} y = 3 \ , \ y(0) = 5$

2. Determine los puntos de equilibrio de las siguientes ecuaciones autonomas:

   a) $x' = x + 1$ *b)* $x' = x - x^3$ *c)* $x' = \sinh x^2$

   d) $x' = x^4 - x^3 - 2x^2$ *e)* $x' = \operatorname{sen} x$ *f)* $x' = \operatorname{sen} x - x$

   y clasifique la naturaleza (atractor, repulsor, atractor-repulsor) de cada punto de equilibrio. Construya el retrato de fase de cada ecuación.

3. Determine todos los posibles retratos de fases y los respectivos intervalos para λ en la siguiente ecuación diferencial dependiente del parámetro λ:

$$\hat{x} = (x-\lambda)(x^2-\lambda) \, , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

4. Para las siguientes EDO, encuentre la solución general y esboce las gráficas de varios elementos de la familia de curvas solución. Muestre que no hay soluciones que satisfagan las condiciones iniciales dadas. ¿Por qué no contradice esto el teorema de existencia de soluciones?

   a) $tx' - x = t^2 \cos t, \qquad x(0) = -3$

   b) $tx' = 2x - t, \qquad x(0) = 2$

5. Suponga que x es una solución del problema de v.i. $x' = x\cos^2 t, \quad x(0) = 1.$ Pruebe que $x(t) > 0$ para todos los t para los que x está definido.

6. Suponga que y es una solución del problema de v.i. $y' = (y^2-1)e^{ty}, \quad y(1) = 0.$ Pruebe que $-1 < y < 1, \quad \forall t$ para los que y está definido.

7. Suponga que x es una solución del problema de v.i. $x' = \dfrac{x^3 - x}{1 + t^2x^2}, \quad x(0) = \dfrac{1}{2}.$ Pruebe que $0 < x(t) < 1, \quad \forall t$ para los que x está definido.

8. ¿Cuál(es) de los siguientes problemas de valor inicial tienen garantizada una única solución, por el teorema de unicidad de soluciones de ED? Justifique.

   a) $y' = 4 + y^2, \qquad y(0) = 1$ b) $y' = \sqrt{y}, \qquad y(4) = 0$

c) $y' = t \arctan y, \qquad y(0) = 2$ d) $y' = y \sin y + s, \qquad y(0) = -1$

e) $x' = \dfrac{t}{x+1}, \qquad x(0) = 0$ f) $y' = \dfrac{1}{x} y + 2, \quad y(0) = 1$

9. Considere la ecuación diferencial $\quad x'(t) = \dfrac{x^3 - 4x}{1 + e^{3x}}.$

   a) Describa las singularidades de la ecuación diferencial.

   b) Encuentre $\lim\limits_{t \to \infty} x(t)$, donde $x(t)$ es la solución que satisface $x(0) = 1$.

10. Considere la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = a[(y-1)(y-4) - b]$$

   Determine todos los valores de a y b tales que $y_0 = 5$ sea un punto de equilibrio atractor para la ecuación.

4. Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden superior

Teorema 3. *Sean $y_1(x), \dots, y_n(x) \in C^{n-1}(I)$. Suponga que $\exists\, x_0 \in I$:*

$$\left\{ \left(y_i(x_0), y_i'(x_0), y_i''(x_0), \dots, y_i^{(n-1)}(x_0) \right) \right\}_{i=1}^{n}$$

es l.i. en $\mathbb{R}^n$. Entonces, $\{y_j(x)\}_{j=1,\dots,n}$ es l.i.

Ejemplo. $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ es l.i. en $\mathbb{R}$ pues:

$$\begin{aligned}
y_1(x) = e^x \quad &\Rightarrow \quad (e^x, e^x, e^x)|_{x=0} = (1,1,1) \\
y_2(x) = xe^x \quad &\Rightarrow \quad (xe^x, e^x(1+x), e^x(2+x))|_{x=0} = (0,1,2) \\
y_3(x) = x^2\,e^x \quad &\Rightarrow \quad (x^2e^x, e^x(x^2+2x), e^x(x^2+4x+2))|_{x=0} = (0,0,2)
\end{aligned}$$

y claramente

$$\{(1,1,1), (0,1,2), (0,0,2)\} \qquad \text{es l.i.}$$

Ejemplos

1) Demuestre que $\{1, x, x^2\}$ es l.i.

2) Demuestre que $\{x, e^x, \operatorname{sen} x\}$ es l.i.

Definición 4.1. Sean $y_1(x), \dots, y_n(x) \in C^{n-1}(I)$. $\forall\, x \in I$ el determinante

$$W[y_1(x), \dots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

se llama el *Wronskiano* de las funciones $y_1, \dots, y_n$.

Ejemplos

1) $W[\operatorname{sen} x, \cos x] \;=\; \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = -1$

2) $W[\mathrm{e}^x, x\,\mathrm{e}^x, x^2\,\mathrm{e}^x] \;=\; \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & x\,\mathrm{e}^x & x^2\,\mathrm{e}^x \\ x\,\mathrm{e}^x & (1+x)\,\mathrm{e}^x & (2+x)\,\mathrm{e}^x \\ x^2\,\mathrm{e}^x & (x^2+2x)\,\mathrm{e}^x & (x^2+4x+2)\,\mathrm{e}^x \end{vmatrix} = 2\,\mathrm{e}^{3x}$

3) $W[x, \operatorname{sen} x] \;=\; x\cos x - \operatorname{sen} x$

4) $W[x, 2x] \;=\; 0$

Ejemplo. Determine el Wronskiano de los siguiente conjuntos de funciones:

1. $W[x, \operatorname{sen} x, \cos x]$
2. $W[\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x]$
3. $W[1, x, x^2, x^3]$
4. $W[\mathrm{e}^{ax}, \mathrm{e}^{bx}], \quad a \neq b$

Observación. $W[y_1, \ldots, y_n] \not\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \{y_1, \ldots, y_n\}$ es l.i. Es decir, si el Wronskiano de las funciones $y_1, \ldots, y_n$ **no es idénticamente nulo**, entonces el conjunto es l.i. Sin embargo, el recíproco **no** es cierto, vale decir, $W[y_1, \ldots, y_n] = 0 \not\Rightarrow$ que las funciones sean l.d. Basta considerar el conjunto $\{x, |x|\}$.

Pero, para el caso de soluciones de una ED lineal homogénea de orden n, y normal en I, si $W[y_1, \ldots, y_n] \equiv 0$, entonces $y_1, y_2, \ldots, y_n$ l.d. en $C(I)$.

4.1. Solución general de una ecuación homogénea de orden n

Como vimos en el caso de las ecuaciones diferenciales de orden 1, no existen métodos únicos ó explícitos para resolver ecuaciones diferenciales arbitrarias. Sin embargo, sí los hay para ciertos tipos ó formas de ecuaciones, que serán las que consideraremos. En cualquier caso, es importante tener presente el siguiente

Teorema 4. *El espacio solución de cualquier ecuación diferencial lineal homogénea normal de orden n definida en un intervalo real I*

$$b_n(x)y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0$$

es un subespacio de dimensión n de $C^n(I)$.

Corolario 1. *Sean $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ soluciones l.i. de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n*

$$b_n(x)y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0$$

Entonces, la solución general (ó solución homogénea) de la ecuación es:

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

donde c_i son constantes que dependen de las n condiciones iniciales (c.i.) (solución intrínseca del sistema).

Corolario 2. *Sean $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x) \in C^{(n-1)}(I)$. Si en algún punto $x_0 \in I$ el conjunto de vectores*

$$\left\{ \left(y_i(x_0), y_i'(x_0), y_i''(x_0), \ldots, y_i^{(n-1)}(x_0) \right) \right\}_{i=1}^{n}$$

es l.i. en $\mathbb{R}^n$, entonces, $\{y_j(x)\}_{j=1,\ldots,n}$ es l.i. en $C(I)$.

Ejemplo. Sea $y''' - y'' - 2y' = 0$

1. Demuestre que las funciones e^x, $\operatorname{senh} x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$, $2\,\mathrm{e}^{2x}$, 1 son soluciones de la ecuación diferencial.

2. Determine una base para el espacio solución de la E.D.O.
3. Determine la solución general de la E.D.O.

Solución:

1. Basta reemplazar cada una de las funciones en la E.D.O.
2. La ecuación es lineal, normal, homogénea y de orden 3 en $\mathbb{R}$, y luego el espacio solución tiene dimensión 3. Por lo tanto, para determinar una base del espacio solución, basta escoger 3 funciones l.i. de entre las dadas. Notamos que:

$$\operatorname{senh} x - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x \;=\; \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x \;=\; -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$$

   Luego, basta probar que $\mathrm{e}^x, 2\,\mathrm{e}^{2x}, 1$ son funciones l.i., que dejamos como ejercicio.

3. La solución general es $\quad y_h(x) \;=\; C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{2x} + C_3 \cdot 1$

4.2. Solución general de una ecuación no homogénea

Teorema 5. *Sea $y_p(x)$ cualquier solución particular (solución forzante del sistema) de*

$$b_n(x)y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_0(x)y = h(x)$$

y sea $y_h(x)$ la solución de la ecuación homogénea; entonces la solución general *de la ecuación está dada por*

$$y_G(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Demostración. Notar que

$$b_n(x)(y_h(x)+y_p(x))^{(n)} + b_{n-1}(x)(y_h(x)+y_p(x))^{(n-1)} + \cdots + b_0(x)(y_h(x)+y_p(x)) =$$

$$\underbrace{(b_n(x)y_h^{(n)} + b_{n-1}(x)y_h^{(n-1)} + \cdots + b_0(x)y_h)}_{=0} + \underbrace{b_n(x)y_p^{(n)} + b_{n-1}(x)y_p^{(n-1)} + \cdots + b_0(x)y_p}_{=h(x)} = h(x)$$

□

Teorema 6. *Sea* $\quad b_n(x)y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_0(x)y \;=\; h(x) \quad$ *una ecuación diferencial lineal normal de orden n en I, y sea $x_0 \in I$ cualquiera, fijo. Sean $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Entonces, el problema de valor inicial*

$$b_n(x)y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_0(x)y = h(x)$$

con $\quad y(x_0) = y_0,\; y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \quad$ *tiene una y sólo una solución.*

4.3. Operadores Diferenciales

Sea D el operador que denota diferenciación con respecto a una variable (por ejemplo x), D^2 el operador que indica una doble diferenciación, D^3 el operador que indica una triple diferenciación, y en general, $D^k y \equiv \dfrac{d^k y}{dx^k}$ el operador que denota la derivada k-ésima con respecto a la variable x.

Notamos que los operadores $D, D^2, D^3, \ldots, D^k$ son operadores lineales, i.e., $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$D^k(\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)) = \frac{d^k(\alpha y_1 + \beta y_2)}{dx^k} = \alpha \frac{d^k y_1}{dx^k} + \beta \frac{d^k y_2}{dx^k} = \alpha D^k y_1 + \beta D^k y_2$$

Así, una expresión de la forma $L(D) = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$ es un *operador lineal* de $C^n(I)$ en $C(I)$, de orden n, puesto que

$$L(D)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(D)(y_1) + \beta L(D)(y_2) \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Ejemplos

1) El operador lineal $xD^2 + 3\sqrt{x}D - 1$ es de orden 2 en $[0, \infty[$, y en cualquiera de sus subintervalos.
2) El operador lineal $(x + |x|)D^2 - \sqrt{x+1}D + \ln(x+1)$ es de orden 2 en $]0, 1[$ pero es de orden 1 en $]-1, 0[$
3) Demostrar que $D(xD) \neq (xD)D$.
   En efecto: $D(xD)y = D(xy') = y' + xy''$ mientras que $(xD)Dy = (xD)y' = xy''$.
4) Demostrar que $(D - x)(D + x) \neq (D + x)(D - x)$.
5) Demostrar que $(D - a)(D - b) = (D - b)(D - a)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Ejemplo. Resolver $(D^2 - 1)y = 1$.

Notamos que $(D^2 - 1)y = 1 \iff \dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 1$.

Por simple inspección, notamos que $y_p = -1$ es una solución particular. Consideramos la ecuación homogénea asociada

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$$

La solución general de esta ecuación homogénea es $y_h = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-x}$.
Por lo tanto, $y(x) = -1 + C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-x}$ son **todas** las soluciones de la E.D.

A continuación, veremos un teorema que nos permite encontrar una segunda solución l.i. $y_2(x)$ de una EDLH de segundo orden, si se conoce una solución $y_1(x)$.

Teorema 7 (Fórmula de Abel)**.** *Si $y_1(x)$ es una solución* no trivial *de la ED*

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

entonces la segunda solución de la ED es

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\, dx$$

la que es l.i. con respecto a $y_1(x)$ y por lo tanto

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Demostración. Supongamos que
$$y_2(x) = k(x)y_1(x)$$
Por lo tanto:
$$y_2' = k'y_1 + ky_1' \qquad \text{y} \qquad y_2'' = k''y_1 + 2k'y_1' + ky_1''$$
Reemplazando en la ecuación original:
$$\begin{aligned}
k''y_1 + 2k'y_1' + ky_1'' + a_1(x)(k'y_1 + ky_1') + a_0(x)ky_1 &= 0\\
k(y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1) + 2y_1'k' + y_1(a_1k' + k'') &= 0\\
\therefore\ y_1k'' + (2y_1' + a_1y_1)k' &= 0\\
k'' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + a_1\right)k' &= 0\\
k' = \mathrm{e}^{-\int \frac{2y_1'}{y_1} + a_1 dx}\, C&\\
= C\,\mathrm{e}^{-2\ln y_1 - \int a_1 dx} &= C\,\mathrm{e}^{\ln y_1^{-2}}\,\mathrm{e}^{-\int a_1\,dx}\\
&= C\frac{\mathrm{e}^{-\int a_1\,dx}}{y_1^2}\\
\therefore\ k(x) &= C\int \frac{\mathrm{e}^{-\int a_1\,dx}}{y_1^2}\,dx
\end{aligned}$$
$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_1\int \frac{\mathrm{e}^{-\int a_1\,dx}}{y_1^2}\,dx \\ y_1' & y_1'\int \frac{\mathrm{e}^{-\int a_1\,dx}}{y_1^2}\,dx + y_1\frac{\mathrm{e}^{-\int a_1\,dx}}{y_1^2} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-\int a_1\,dx} \neq 0$$
$$\therefore\ \{y_1, y_2\}\ \text{ son l.i.}$$
$$\therefore\ y_h(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$
□

Ejemplos

1) Resolver $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ si se sabe que una solución es $y_1(x) = x^2$ en $]0, \infty[$.

Solución.

La ecuación es normal en $]0, \infty[$ y **debe** escribirse como
$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$$
$$\therefore\ a_1(x) = -\frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-\int a_1\,dx} = \mathrm{e}^{3\ln x} = x^3$$
$$y_2(x) = x^2\int \frac{x^3}{x^4}\,dx = x^2\int \frac{1}{x}\,dx = x^2\ln x$$
$$\Rightarrow \quad y_h(x) = x^2(c_1 + c_2\ln x)$$

¿Qué pasa si se conoce la solución $y_1(x) = x^2\ln x$ y se pide la otra?
$$\begin{aligned}
y_2(x) = x^2\ln x\int \frac{\mathrm{e}^{-\int \frac{3}{x}\,dx}}{x^4\ln^2 x}\,dx &= x^2\ln x\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx\\
&= -x^2\ln x\frac{1}{\ln x} = -x^2\\
\Rightarrow \quad y_h(x) &= x^2(c_1\ln x + c_2)
\end{aligned}$$

2) Resolver $y'' + (\tan x - 2\cot x)y' = 0$ si $y_1(x) = 1$ es una solución particular de la ecuación en cualquier intervalo en el que $\tan x$ y $\cot x$ estén definidos.

Solución. Una segunda solución es

$$y_2(x) = \int e^{-\int(\tan x - 2\cot x)dx}\,dx = \int e^{\ln(\cos x \operatorname{sen}^2 x)}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x$$

Luego, la solución general es $y_h(x) = C_1 + C_2 \operatorname{sen} 3x$.

Ejercicios.

1. Resolver $y'' + (\operatorname{tg} x)y' - 6(\operatorname{cotg}^2 x)y = 0$ si $y_1(x) = \operatorname{sen}^3 x$ es una solución.
2. Resolver $y'' - \dfrac{2}{x}y' + \dfrac{2}{x^2}y = 0$ si $y_1(x) = x$ es una solución.

.

4.3.1. Operadores Diferenciales con Coeficientes Constantes

Definición 4.2. La expresión $L(D) = a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$, donde $a_j,\ j = 0, \cdots, n$ son constantes, es un «*operador diferencial con coeficientes constantes de orden n*». Al aplicar este operador diferencial a la función $y \in C^n(I)$ queda

$$L(D)(y) = a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y$$

Ejemplos

1) Aplicar $(D-m)^n$ a $x^k e^{mx}$ donde m es constante; $k, n \in \mathbb{N}$ con $k < n$

a) $(D-m)(e^{mx}) = m\,e^{mx} - m\,e^{mx} = e^{mx}(m-m) = 0$
b) $(D-m)^2(e^{mx}) = (D-m)[(D-m)(e^{mx})] = (D-m)(0) = 0$
c) $(D-m)^2(x\,e^{mx}) = (D-m)[e^{mx} + mx\,e^{mx} - mx\,e^{mx}] = (D-m)(e^{mx}) = 0$
d) $(D-m)^2(e^{mx} + x\,e^{mx}) = (D-m)^2(e^{mx}) + (D-m)^2(x\,e^{mx}) = 0$

2) Notar que:

$$\begin{array}{lll}
(D-m)(y) = 0 & \Leftrightarrow & y_h(x) = c\,e^{mx} \\
(D-m)^2(y) = 0 & \Leftrightarrow & y_h(x) = e^{mx}(c_1 + c_2 x) \\
(D-m)^3(y) = 0 & \Leftrightarrow & y_h(x) = e^{mx}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \\
\cdots & & \cdots \\
(D-m)^n(y) = 0 & \Leftrightarrow & y_h(x) = e^{mx}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-2} + c_n x^{n-1})
\end{array}$$

3) $(D-1)^2(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h(x) = e^{x}(c_1 + c_2 x)$

4) $(D+2)^3(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h(x) = e^{-2x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$

Las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, pueden ser escritas entonces en la forma $L(D)(y) = h(x)$, donde $h \in C(I)$. Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes son de la forma $L(D)(y) = 0$.

Proposición 2. *Si* $L_1(D)$, $L_2(D)$, $\cdots$, $L_n(D)$ *son operadores diferenciales con coeficientes constantes, entonces*

$$KerL_i(D) \subseteq Ker(L_1(D) \cdot L_2(D) \cdots L_n(D))$$

Observación.

1. Es decir, si $L_i(D)(y) = 0$, entonces $(L_1(D) \cdot L_2(D) \cdots L_n(D))(y) = 0$.
2. Por lo tanto, si $y_1(x)$ es una solución de $(L_1(D)(y) = 0$, entonces $y_1(x)$ es una solución de $(L_1(D)L_1(D)(y) = 0$, donde $L_1(D), L_2(D)$ son operadores lineales con coeficientes constantes.
3. Sea $L(D) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0D^0$, donde $D^0(y) = \dfrac{d^0y}{dx^0} = y$. Aplicamos $L(D)$ a e^{mx} :

$$\begin{aligned}
L(D)(e^{mx}) &= a_0m^n\,\mathrm{e}^{mx} + a_1m^{n-1}e^{mx} + \cdots + a_{n-1}me^{mx} + a_ne^{mx} \\
&= e^{mx}(a_0m^n + a_1m^{n-1} + \cdots + a_{n-1}m + a_n) \\
&= e^{mx}L(m)
\end{aligned}$$

Si m es una raíz de la ecuación $L(m) = 0$ entonces $L(D)(e^{mx}) = 0$. Pero, una ecuación $L(m) = 0$ de grado n en la variable m tiene n soluciones reales. Por lo tanto: para cada m_i tal que $L(m_i) = 0$ se tiene que $L(D)(e^{m_ix}) = 0$; luego, si $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_n$ son soluciones **distintas** de $L(m) = 0$, se tiene

$$\begin{gathered}
L(D)(c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \cdots + c_ne^{m_nx}) = 0 \\
\Rightarrow \quad L(D)(y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y_h(x) = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \cdots + c_ne^{m_nx}
\end{gathered}$$

Para sistematizar estas observaciones, estudiemos primeramente las EDL con coeficientes constantes de orden 2.

4.4. Ecuaciones Diferenciales Homogéneas con Coeficientes constantes de orden 2

Estudiaremos ecuaciones de la forma $y'' + a_1y + a_0y = 0$, que en términos de operadores diferenciales puede escribirse en la forma $(D^2 + a_1D + a_0)y = 0$.

La *ecuación característica asociada* es

$$m^2 + a_1m + a_0 = 0$$

y supongamos que sus soluciones son $m = \alpha_1$ y $m = \alpha_2$.

Luego, el operador puede factorizarse en la forma $D^2 + a_1D + a_0 = (D - \alpha_1)(D - \alpha_2)$ y la ecuación puede reescribirse en la forma

$$(D - \alpha_1)(D - \alpha_2)\,y = 0$$

Dependiendo de la naturaleza de las raíces del polinomio, se tiene tres tipos de soluciones de la E.D.:

Caso 1: $\alpha_1\,,\alpha_2$ reales y distintas.

$$(D-\alpha_1)\,(D-\alpha_2)\,y \;=\; 0$$

es decir:

$$(D-\alpha_1)\,y \;=\; 0 \qquad \vee \qquad (D-\alpha_2)\,y \;=\; 0$$

que es equivalente a

$$y'-\alpha_1\,y \;=\; 0 \qquad \vee \qquad y'-\alpha_2\,y \;=\; 0$$

Las soluciones de estas ecuaciones son

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{\alpha_i x}, \qquad i=1,2$$

Las funciones $y_1 \;=\; \mathrm{e}^{\alpha_1 x}$ e $y_2 \;=\; \mathrm{e}^{\alpha_2 x}$ son soluciones l.i. Así, la solución de la ecuación homogénea es:

$$y(x) \;=\; C_1\,\mathrm{e}^{\alpha_1 x}+C_2\,\mathrm{e}^{\alpha_2 x}$$

Caso 2: $\alpha_1 \;=\; \alpha_2 \;=\; \alpha$ reales e iguales.

$$(D-\alpha)^2\,y \;=\; 0$$

Una solución es $y_1 \;=\; \mathrm{e}^{\alpha x}$, y usando la fórmula de Abel, puede probarse fácilmente que la otra solución l.i. es $y_2 \;=\; x\,\mathrm{e}^{\alpha x}$. Luego, la solución de la ecuación homogénea es:

$$y \;=\; C_1\,\mathrm{e}^{\alpha x}+C_2 x\,\mathrm{e}^{\alpha x}$$

Caso 3: $\alpha_1\,,\alpha_2$ complejos.

En este caso, $\alpha_1=a+ib \quad \wedge \quad \alpha_2=a-ib$, con $a,b\in\mathbb{R},\ b>0$. Como antes:

$$\begin{aligned}
y &= k_1\,\mathrm{e}^{(a+ib)x}+k_2\,\mathrm{e}^{(a-ib)x}\\
&= \mathrm{e}^{ax}(k_1\,\mathrm{e}^{ibx}+k_2\,\mathrm{e}^{-ibx})\\
&= \mathrm{e}^{ax}(k_1\cos bx+ik_1\operatorname{sen} bx+k_2\cos bx-k_2 i\operatorname{sen} bx)\\
&= \mathrm{e}^{ax}\,\{(k_1+k_2)\cos bx+i(k_1-k_2)\operatorname{sen} bx\}\\
&= \mathrm{e}^{ax}(c_1\cos bx+c_2\operatorname{sen} bx)
\end{aligned}$$

Ejemplos

1) Resolver $2\dfrac{d^2y}{dx^2}+5\dfrac{dy}{dx}+12y=0.$

2) Resolver $(D+3)^2y \;=\; 0$

3) Resolver $(D^2+1)\,y \;=\; 0$

4) Resolver $(D^2+D+1)\,y \;=\; 0$

5) Resolver $D^2y \;=\; 0$

Solución.

1. $(2D^2+5D-12)(y)=0 \quad \Rightarrow \quad L(m)=2m^2+5m-12=0 \quad \Rightarrow \quad m_1=-4 \quad \wedge \quad m_2=\frac{3}{2}$
   $\Rightarrow \qquad y_h(x) \;=\; c_1e^{-4x}+c_2e^{\frac{3}{2}x}$
2. $(D+3)^2y \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad L(m)=(m+3)^2=0 \quad \Rightarrow \quad m=3$ con multiplicidad 2.
   $\Rightarrow \qquad y_h(x) \;=\; c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}.$
3. $(D^2+1)\,y \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad L(m)=m^2+1=0 \quad \Rightarrow \quad m_1=i \quad \wedge \quad m_2=-i$
   $\Rightarrow \qquad y_h(x) \;=\; C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x.$
4. $(D^2+D+1)\,y \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad L(m)=m^2+m+1=0 \quad \Rightarrow \quad m_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \wedge \quad m_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$
   $\Rightarrow \qquad y_h(x) \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,(C_1\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2})+C_2\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}x}{2})).$
5. $D^2y \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad L(m)=m^2=0 \quad \Rightarrow \quad m=0$ con multiplicidad 2.
   $\Rightarrow \qquad y_h(x) \;=\; C_1+C_2x.$

4.5. Ecuaciones Diferenciales Homogéneas con coeficientes Constantes de orden superior

Sea $(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_0)(y) \;=\; 0\,,$ con $a_0,a_1,\cdots,a_n$ constantes. El operador diferencial lineal se descompone en factores lineales y cuadráticos, determinándose estos factores por la descomposición de la ecuación característica

$$m^n+a_{n-1}m^{n-1}+\cdots+a_0 \;=\; 0$$

Teorema 8. *Si $y=f(x)$ pertenece al Kernel de un operador diferencial con coeficientes constantes $L(D)$, entonces $x^{m-1}f(x)$ pertenece al Kernel del operador $L(D)^m$.*

Ejemplos

1) $(D+4)^3(y)=0 \quad \Rightarrow \quad y_h(x)=e^{-4x}(c_1+c_2x+c_3x^2)$ pues las fuciones $e^{-4x},\ xe^{-4x},\ x^2e^{-4x}$ son l.i. y satisfacen la E.D.O.

2) En general, si $(D-m)^k(y)=0$ entonces $y_h(x)=\mathrm{e}^{mx}\,(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots+c_kx^{k-1})$

3) $(D^4+2D^3+D^2)(y)=0 \quad \Rightarrow \quad m=0,0,-1,-1, \qquad y_h(x)=c_1+c_2x+e^{-x}(c_3+c_4x)$

4) $y''' \;=\; 0 \quad \Rightarrow$ Integrando: $D^2y=C_1$ Integrando de nuevo: $Dy=C_1x+C_2$

   Finalmente, $y(x) \;=\; C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$ Por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea es:

$$y(x) \;=\; C_1x^2+C_2x+C_3$$

5) $\Big(D^2-2aD+(a^2+b^2)\Big)^n y \;=\; 0.$ Notamos que las funciones l.i. que satisfacen esta E.D. son:

$$\mathrm{e}^{ax}\cos(bx),\ x\,\mathrm{e}^{ax}\cos(bx), x^2\,\mathrm{e}^{ax}\cos(bx),\cdots,x^{n-1}\,\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$$

$$\mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx),\ x\,\mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx), x^2\,\mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx),\cdots,x^{n-1}\,\mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx)$$

   y luego, la solución de la EDH es:

$$y_h(x)=\mathrm{e}^{ax}\Big(\cos(bx)(C_1+C_2x+\cdots C_nx^{n-1})+\operatorname{sen}(bx)(C_{n+1}+C_{n+2}x+\cdots C_{2n}x^{n-1})\Big)$$

Observación. Los operadores diferenciales con coeficientes constantes tienen la gran ventaja que permiten hacer uso de operaciones algebraicas simples para resolver la ED, como la factorización de polinomios en las ecuaciones características. En el caso en que los coeficientes de los operadores **no** son constantes, el producto de los operadores no es, en general, conmutativo.
Vimos un ejemplo anteriormente, y hacemos ahora otro que habíamos dejado de ejercicio:

$$(D-x)(D+x) \;=\; D^2+1-x^2\,, \qquad \text{en cambio} \qquad (D+x)(D-x) \;=\; D^2-1-x^2$$

Sin embargo, algunas EDL con coeficientes **no** constantes pueden transformarse, a través de un adecuado cambio de variables, en ED con coeficientes constantes, como veremos en la siguiente subsección.

4.6. Ecuación de Euler

La ecuación de Euler homogénea es de la forma

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y \;=\; 0$$

donde $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ son constantes reales.

Estudiaremos, en primer lugar, el caso particular $n=2$:
Consideremos la ecuación de Euler

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y \;=\; 0$$

Hacemos la sustitución $\quad x = \mathrm{e}^t \quad$ (para $x>0$). Luego:

$$y' \;=\; \frac{dy}{dx}\,\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \;=\; \frac{\frac{dy}{dt}}{\mathrm{e}^t} \;=\; \mathrm{e}^{-t}\,\frac{dy}{dt}$$

Luego,

$$y'' \;=\; \frac{d^2y}{d^2x} \;=\; \frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{-t}\,\frac{dy}{dt}\right) \;=\; \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\,\mathrm{e}^{-t}\right)}{\frac{dx}{dt}} \;=\; \left(\frac{d^2y}{dt^2}\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{dy}{dt}\,\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{e}^{-t} \;=\; \mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

Reemplazamos en la ecuación original:

$$\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + a_1\,\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\frac{dy}{dt} + a_0 y \;=\; 0$$

de donde obtenemos la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + (a_1-1)\frac{dy}{dt} + a_0 y \;=\; 0$$

La ecuación característica asociada es

$$m^2 + (a_1-1)m + a_0 \;=\; 0$$

Luego, si m_1 es raíz de esta última ecuación, entonces $y(t) = \mathrm{e}^{m_1 t}$ es solución de la ecuación con coeficientes constantes, por lo que

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{m_1 \ln x} \;=\; x^{m_1}$$

es solución de la ecuación de Euler original.

Ejemplos

1) $x^2y'' + \frac{5}{2}xy' - y \;=\; 0$

2) $x^2y'' - xy' + y \;=\; 0$

3) $x^2y'' + xy' + y \;=\; 0$

Observación. En la práctica, a veces es más conveniente buscar directamente las soluciones de una ecuación de Euler de la forma $y(x) = x^k$.

Para el caso general, tenemos el siguiente teorema, cuya demostración es análoga al caso $n = 2$ visto arriba:

Teorema 9. *La solución general de la ecuación de Euler homogénea de orden n*

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 xy' + a_0 y \;=\; 0$$

es

$$y_h(x) \;=\; C_1 y_1(\ln|x|) + C_2 y_2(\ln|x|) + \cdots + C_n y_n(\ln|x|), \qquad C_1, \cdots, \mathbb{C}_n \in \mathbb{R}$$

en el intervalo $]-\infty, 0[$ o $]0, \infty[$, y donde $y_1(u), \cdots, y_n(x)$ son una base para el espacio solución de la ecuación con coeficientes constantes $L^*(D)(y) = 0$, con

$$L^*(D) \;=\; D(D-1)\cdots(D-n+1) + a_{n-1}D(D-1)\cdots(D-n+2) + \cdots + a_1 D + a_0$$

Ejercicios.

1) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$

2) $xy'' + y' = 0$

5. Ecuaciones Diferenciales Lineales No Homogéneas

La solución general de la EDL no homogénea es de la forma

$$y_G(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Nuestro problema ahora consiste en tratar de determinar y_p, ya que y_h ya se sabe como obtenerla. Existen varios métodos para determinar y_p, los dos más conocidos son

1. método de los coeficientes indeterminados (MCI) y
2. método de variación de parámetro (MVP)

5.1. Método Coeficientes Indeterminados

El MCI tiene la ventaja de ser un método sencillo, pero para poder aplicarlo **es necesario** conocer la *forma* de la solución particular.

Sea $L(y) = h(x)$, y sea L_2 el operador con coeficientes constantes tal que

$$\begin{gathered} L_2(h(x)) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L_2 \circ L(y) = L(h(x)) = 0 \qquad \Rightarrow \\ L^*(y) = 0 \quad \text{donde} \quad L^* = L_2 \circ L \\ \text{Sea} \quad y^*(x) = y_h + y_p \quad \text{tal que} \quad L^*(y^*(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_p = y^* - y_h \end{gathered}$$

$\therefore$ para determinar las constantes que aparecen en y_p, se substituye y_p en la ecuación diferencial $L(y_p) = h(x)$.

Ejemplo. Resolver $(D^2+4)(y) = 7$

Solución.

$$\begin{gathered} (D^2+4)(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h(x) = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x \\ L_2(7) = D(7) = 0 \quad \Rightarrow \quad L_2 = D \quad \Rightarrow \quad L^* = D(D^2+4) \quad \Rightarrow \\ y^* = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x + c_3 \quad \Rightarrow \quad y_p = c_3 \\ y_p'' + 4y_p = 0 + 4c_3 \equiv 7 \quad \Rightarrow \quad c_3 = 7/4 \\ \Rightarrow \qquad y_G(x) = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x + \frac{7}{4} \end{gathered}$$

Ejemplo. $(D^2+3)(y) = \mathrm{e}^x$

Solución.

$$\begin{gathered} y_h(x) = c_1 \operatorname{sen} \sqrt{3}x + c_2 \cos \sqrt{3}x \\ L_2 = D - 1 \quad \textsf{pues} \quad (D-1)\,\mathrm{e}^x = 0 \\ \therefore \quad (D-1)(D^2+3)(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y^* = c_1 \operatorname{sen} \sqrt{3}x + c_2 \cos \sqrt{3}x + c_3\,\mathrm{e}^x \\ \Rightarrow \qquad y_p = c_3\,\mathrm{e}^x\,. \\ (c_3\,\mathrm{e}^x) + 3(c_3\,\mathrm{e}^x) \equiv \mathrm{e}^x \end{gathered}$$

pero

$$D^2+3 = D^2-1+4 \quad \Rightarrow \quad (D^2+3)(c_3\,\mathrm{e}^x) = (D-1)(D-1)(c_3\,\mathrm{e}^x) + 4c_3\,\mathrm{e}^x$$
$$4c_3\,\mathrm{e}^x \equiv \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad c_3 = \frac{1}{4}.$$
$$y_G(x) = c_1 \operatorname{sen}\sqrt{3}x + c_2\cos\sqrt{3}x + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^x$$

Ejemplo. $(D^2+2D+1)(y) = 2\,\mathrm{e}^x + \cos 2x$.

Solución.

$$\begin{aligned}
y_h(x) &= c_1\,\mathrm{e}^{-x} + c_2 x\,\mathrm{e}^{-x}\\
L_2 = (D-1)(D^2+4) &\qquad y_p = c_3\,\mathrm{e}^x + c_4\operatorname{sen}2x + c_5\cos 2x\\
(D^2+2D+1)(y_p) &= (D^2+42D-3)(y_p)\\
&= (D^2+4)(c_3\,\mathrm{e}^x) + (2D-3)(y_p)\\
&= (D^2-1+5)(c_3\,\mathrm{e}^x) + (2(D-1)-1)(c_3\,\mathrm{e}^x + c_4\operatorname{sen}2x+)\\
&= 5c_3\,\mathrm{e}^x - 1c_3\,\mathrm{e}^x + 2c_4\cdot 2\cos 2x + 2c_5(-2)\operatorname{sen}2x\\
&= 4c_3\,\mathrm{e}^x + (4c_4-3c_5)\cos 2x - (4c_5+3c_4)\operatorname{sen}2x\\
&= 2\,\mathrm{e}^x + \cos 2x
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad c_3 = 1/2 \qquad \left.\begin{array}{r} 4c_4-3c_5=1\\ 3c_4+4c_5=0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad c_4 = \frac{4}{25} \quad c_5 = -\frac{3}{25}$$

$$y_p = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x + \frac{4}{25}\operatorname{sen}2x - \frac{3}{25}\cos 2x$$
$$y_G = c_1\,\mathrm{e}^{-x} + c_2 x\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x + \frac{4}{25}\operatorname{sen}2x - \frac{3}{25}\cos 2x$$

Ejercicios

Empleando en MCI, encontrar y_p en:

a) $(D^2+6D+10)(y) = x^4+4x^2+2$

b) $(6D^2+2D-1)(y) = 7x\,\mathrm{e}^x(1+x)$

c) $(D^2+D-2)(y) = 3\,\mathrm{e}^x - \operatorname{sen}x$

d) $(D^2-4D+8)(y) = \mathrm{e}^{2x}(1+\operatorname{sen}2x)$

e) $(D^2-4)^2(y) = x\operatorname{senh}x$

Observación. Notamos que este método es útil solo si conocemos el operador diferencial con coeficientes constantes que anula a la función $h(x)$. A continuación, presentamos las funciones con sus correspondientes anuladores.

Anuladores para el MCI

Función	Anulador
1	D
x	D^2
x^n	D^{n+1}
$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$	D^{n+1}
e^{ax}	$D - a$
$x\ \mathrm{e}^{ax}$	$(D-a)^2$
$x^n\ \mathrm{e}^{ax}$	$(D-a)^{n+1}$
$\cos bx,\ \operatorname{sen} bx$	$D^2 + b^2$
$\left.\begin{array}{l}\mathrm{e}^{ax}\ \cos bx\\ \mathrm{e}^{ax}\ \operatorname{sen} bx\end{array}\right\}$	$D^2 - 2aD + a^2 + b^2$
$\left.\begin{array}{l}x^n\ \mathrm{e}^{ax}\ \cos bx\\ x^n\ \mathrm{e}^{ax}\ \operatorname{sen} bx\end{array}\right\}$	$(D^2 - 2aD + a^2 + b^2)^{n+1}$

5.2. Método de Variación de Parámetros

Comenzamos considerando la EDL de 2.º orden

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x) \tag{20}$$

definida en un intervalo I y cuya solución general de la EDL homogénea asociada a (20) es:

$$y_h(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \tag{21}$$

se busca una solución particular y_p de (20) tal que

$$\begin{aligned} y_p(x_0) &= 0 \\ y_p'(x_0) &= 0 \text{ con } x_0 \in I \end{aligned}$$

La construcción de y_p se empieza con la suposición de que cualquier solución particular de (20) debe estar relacionada con ó parecese a y_h y para ello se intenta alterar ésta última de modo que se convierta en una solución particular de (20). Una forma de hacerlo es permitir que k_1 y k_2 en (21) varíen con x (o sea, $k_1 = k_1(x)$ y $k_2 = k_2(x)$) es decir, la solución particular es de la forma:

$$y_p(x) = k_1(x)y_1(x) + k_2(x)y_2(x) \tag{22}$$

abreviando,

$$y_p = k_1y_1 + k_2y_2 \tag{23}$$

Derivando y_p y reemplazando en (20) se obtiene

$$\begin{aligned} y_p' &= k_1y_1 + k_1y_1' + k_2'y_2 + k_2y_2' \\ y_p'' &= k_1''y_1 + 2k_1'y_1' + k_1y_1'' + k_2''y_2 + 2k_2'y_2' + k_2y_2'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & k_1\,(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1) + k_2(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2) + \\ & \quad + k_1''y_1 + 2k_1'y_1' + k_2''y_2 + 2k_2'y_2' + a_1k_1'y_1 + a_1k_2'y_2 = h(x) \\ \Rightarrow \quad & k_1''y_1 + 2k_1'y_1' + k_2''y_2 + 2k_2'y_2' + a_1k_1'y_1 + a_1k_2y_2 = h(x) \end{aligned}$$

pues $y_1 \wedge y_2$ son soluciones de la ecuación diferencial homogénea. Reordenando:

$$\begin{gathered} (k_1''y_1 + k_1'y_1' + k_2''y_2 + k_2'y_2') + a_1(k_1'y_1 + k_2y_2) + k_1'y_1' + k_2'y_2' = h(x) \\ (k_1'y_1 + k_2'y_2)' + a_1(x)(k_1'y_1 + k_2'y_2) + k_1'y_1' + k_2'y_2' = h(x) \end{gathered}$$

Esta identidad debe mantenerse si (22) es solución de la ED y $\therefore$ k_1 y k_2 pueden *escogerse* en forma tal que:

$$\left.\begin{aligned} k_1'y_1 + k_2'y_2 &= 0 \\ k_1'y_1' + k_2'y_2' &= h(x) \end{aligned}\right\} \forall\, x \in I$$

Usando la regla de Cramer para resolver este sistema:

$$k_1' = -\frac{h(x)y_2}{W} \quad \wedge \quad k_2' = \frac{h(x)y_1}{W}$$

donde W es el Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W[y_1(x), y_2(x)]$$

$$\therefore \qquad y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_2(x)y_1(t) - y_1(x)y_2(t)}{W(y_1(t), y_2(t))}\, h(t)\, dt$$

Definición 5.1. La función $K(x,t) = \dfrac{y_2(x)y_1(t) - y_1(x)y_2(t)}{W(y_1(t), y_2(t))}$ se llama *función de Green* para el operador $L(D) = D^2 + a_1(x)D + a_0(x)$.

Ejemplo. Resolver $\quad y'' + y = \sec x.$

Solución. En este caso **no** se puede aplicar el MCI pues $\nexists$ operador L con coeficientes constantes tal que $L(\sec x) = 0$.

La solución de la ecuación homogénea es:

$$y_h(x) \;=\; c_1 \operatorname{sen} x \;+\; c_2 \cos x$$

Luego, suponemos que la solución particular es de la forma:

$$y_p(x) \;= k_1(x) \operatorname{sen} x \;+\; k_2(x) \cos x$$

y luego formamos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} k_1' \operatorname{sen} x + k_2' \cos x = 0 \\ k_1' \cos x - k_2' \operatorname{sen} x = h(x) = \sec x \end{array}\right\}$$

$$\text{Como} \qquad W = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = -1$$

$$k_1' = \sec x \cdot \cos x = 1 \qquad \wedge \qquad k_2' = -\sec x \cdot \operatorname{sen} x = -\operatorname{tg} x$$

$$\Rightarrow \quad k_1 = x \qquad \wedge \qquad k_2 = -\int \operatorname{tg} x \, dx = \ln|\cos x|$$

$$\therefore \qquad y_G(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + x \operatorname{sen} x + \cos x \ln|\cos x|$$

Ejemplo. Resolver $\quad (D^2 - D - 2)(y) = \mathrm{e}^{-x} \operatorname{sen} x.$

Solución. En este caso, podemos usar MCI ó MVP. Aplicaremos MVP, dejando como ejercicio al lector resolver esta EDO usando MCI.

La solución de la ecuación homogénea es:

$$y_h(x) = c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 \mathrm{e}^{-x}$$

$$W = W[\mathrm{e}^{2x}, \mathrm{e}^{-x}] = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{-x} \\ 2\,\mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{e}^{-x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\,\mathrm{e}^{x}$$

$$k_1' = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{-3x} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{1+9}(-3 \operatorname{sen} x - \cos x)$$

$$k_2' = \frac{\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{e}^{-x} \operatorname{sen} x}{-3\,\mathrm{e}^{x}} = -\frac{1}{3} \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{1}{3}\cos x$$

$$\therefore \quad y_g(x) \;=\; c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 \mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{30}\mathrm{e}^{-x}(3 \operatorname{sen} x + \cos x) + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x} \cos x$$

Ejemplo. Resolver $x^4y'' + x^3y' - x^2y = 1$

Solución.

$$x^4y'' + x^3y' - x^2y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2y'' + xy' - y = 0 \qquad \text{(ec. de Euler)}$$

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = x, \qquad y_2 = x^{-1}$$

$$y_2(x) = x\int \frac{e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}}{x^2}\,dx = x\int \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x}$$

$$\therefore\ y_h(x) = c_1x + c_2\frac{1}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} k_1'x + k_2'\dfrac{1}{x} = 0 \\ k_1' - k_2'\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^4} \end{array}\right\}$$

$$W = W[x, 1/x] = \begin{vmatrix} x & 1/x \\ 1 & -1/x^2 \end{vmatrix} = -\frac{2}{x}$$

$$k_1' = \frac{1}{2x^4} \quad \Rightarrow \quad k_1 = -\frac{1}{6x^3}$$

$$k_2' = -\frac{1}{2x^2} \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{1}{2x}$$

$$y_p = \frac{1}{3x^2}$$

$$y_G(x) = c_1x + c_2\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^2}$$

Observación. En general, el método de variación de parámetros puede extenderse fácilmente a ecuaciones de orden arbitrario. En efecto, consideremos la ecuación diferencial normal en I:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = h(x)$$

Supongamos que se conoce la solución general de la ecuación homogénea, y que ésta es

$$y_h(x) = C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x)$$

Luego, la solución particular será de la forma

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x)$$

Es posible probar que en este caso,

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t)\,h(t)\,dt$$

donde
$$K(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \cdots & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \cdots & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1(x) & \cdots & \cdots & y_n(x) \end{vmatrix}}{W[y_1(t), \cdots, y_n(t)]}$$

$K(x,t)$ es la función de Green para $L(D) = D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_0(x)$

Índice

Índice de Materias