2.10 Ejercicios resueltos del Capítulo 2

Ejercicio 2.10.1 Considere la ecuación diferencial

$$y \;-\; xy' \;=\; a(1+x^2y')\,,\ a>1\,.$$

a) Encuentre la solución general.

b) Encuentre la solución particular que verifica $y(1) \;=\; \frac{a}{a+1}\cdot$

c) Encuentre el intervalo máximo donde la solución particular anterior está definida.

Solución. a) Reordenando tenemos

$$y-a \;=\; (ax^2+x)y' \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx} \;=\; \frac{y-a}{x(ax+1)}\,,$$

y separando variables

$$\frac{dy}{y-a} \;=\; \frac{dx}{x(ax+1)} \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{y-a} \;=\; \frac{dx}{x}-\frac{adx}{ax+1}\,.$$

Luego integrando obtenemos

$$\ln(y-a) \;=\; \ln(x)-\ln(ax+1)+\ln(c)\,,$$

y exponenciando

$$y-a \;=\; \frac{cx}{ax+1}\,.$$

Por lo tanto la solución general es

$$y(x) \;=\; a \;+\; \frac{cx}{ax+1}\,,\ c\in\mathbb{R}.$$

b) Imponiendo a la solución general la condición $y(1) \;=\; \frac{a}{a+1}$, obtenemos

$$\frac{a}{a+1} \;=\; a \;+\; \frac{c}{a+1} \quad\Longrightarrow\quad \frac{a}{a+1} \;=\; \frac{a^2+a+c}{a+1} \quad\Longrightarrow\quad c \;=\; -a^2\,.$$

Luego nuestra solución particular es

$$y(x) \;=\; a \;-\; \frac{a^2x}{ax+1}\cdot$$

c) El dominio de la función

$$y(x) \;=\; a \;-\; \frac{a^2x}{ax+1}$$

es la unión de los intervalos abiertos

$$\left]-\infty, -\frac{1}{a}\right[\quad \text{y} \quad \left]-\frac{1}{a}, +\infty\right[.$$

Como a es positivo, el 1 pertenece al segundo intervalo y luego

$$\left]-\frac{1}{a}, +\infty\right[,$$

es el intervalo máximo buscado.

Ejercicio 2.10.2 Mostrar que la ecuación diferencial

$$2x^4\, y\, y' \;+\; y^4 \;=\; 4x^6$$

se reduce a una ecuación homogénea mediante la transformación $y = z^n$, para cierto n. Determine el valor de n y resuelva la ecuación.

Solución. Si $y = z^n$ entonces $y' = nz^{n-1}z'$, y sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$2x^4 z^n(nz^{n-1}z') \;+\; z^{4n} \;=\; 4x^6 \,,$$

es decir

$$2nx^4 z^{2n-1}dz \;=\; (4x^6 \;-\; z^{4n})dx \,.$$

Para que sea homogénea debemos tener $2n - 1 = 2$ y $4n = 6$. Luego $n = \dfrac{3}{2}$ y tenemos la ecuación homogénea

$$(4x^6 \;-\; z^6)dx \;=\; 3x^4z^2dz \,.$$

Por lo tanto

$$\frac{dz}{dx} \;=\; \frac{4x^6 - z^6}{3x^4z^2} \;=\; \frac{1}{3}\left[4\left(\frac{x}{z}\right)^2 \;-\; \left(\frac{z}{x}\right)^4\right] .$$

Poniendo $z = xu$, tenemos $\dfrac{dz}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$, y reemplazando en la ecuación

$$x\frac{du}{dx} \;=\; -u \;+\; \frac{4}{3}\,\frac{1}{u^2} \;-\; \frac{1}{3}\,u^4 \;=\; \frac{-3u^3 + 4 - u^6}{3u^2} \,.$$

Luego separando variables

$$\frac{3u^2du}{u^6 + 3u^3 - 4} \;=\; -\frac{dx}{x} \,,$$

es decir

$$\frac{3u^2\,du}{\left(u^3 + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} \;=\; -\frac{dx}{x} \,.$$

Separando en fracciones

$$\frac{1}{5}\left[\frac{3u^2\,du}{u^3+\frac{3}{2}-\frac{5}{2}} \;-\; \frac{3u^2\,du}{u^3+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}\right] \;=\; -\frac{dx}{x}\,,$$

o bien

$$\frac{3u^2\,du}{u^3-1} \;-\; \frac{3u^2\,du}{u^3+4} \;=\; -\frac{5dx}{x}\,.$$

Integrando obtenemos

$$\ln\left(\frac{u^3-1}{u^3+4}\right) \;=\; -5\ln(x) \;+\; \ln(c)\,,$$

y exponenciando

$$\frac{u^3-1}{u^3+4} \;=\; \frac{c}{x^5}\,.$$

De esta forma

$$\begin{aligned} u^3 \;=\; \frac{x^5+4c}{x^5-c} \;&\Longrightarrow\; u(x) \;=\; \left(\frac{x^5+4c}{x^5-c}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &\Longrightarrow\; z(x) \;=\; x\left(\frac{x^5+4c}{x^5-c}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &\Longrightarrow\; y(x) \;=\; z(x)^{\frac{3}{2}} \;=\; x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x^5+4c}{x^5-c}\right)^{\frac{1}{2}}\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.10.3 La ecuación

$$(2x^3y \;-\; 2y^3)dy \;=\; (3x^5 \;+\; 3x^2y^2)dx$$

se reduce a una ecuación homogénea haciendo un cambio de coordenadas de la forma $x = u^p$, $y = v^q$, con p, q constantes adecuadas. Encuentre dichas constantes y resuelva la ecuación.

Solución. Tenemos

$$x \;=\; u^p \quad\Longrightarrow\quad dx \;=\; pu^{p-1}du \quad \text{e} \quad y \;=\; v^q \quad\Longrightarrow\quad dy \;=\; qv^{q-1}dv\,.$$

Sustituyendo nos queda

$$(2u^{3p}v^q \;-\; 2v^{3q})qv^{q-1}dv \;=\; (3u^{5p} \;+\; 3u^{2p}v^{2q})pu^{p-1}du\,,$$

es decir

$$2q(u^{3p}v^{2q-1} \;-\; v^{4q-1})dv \;=\; 3p(u^{6p-1} \;+\; u^{3p-1}v^{2q})du\,.$$

Al hacer $2q = 3p$ cada término queda de grado $6p - 1$. Poniendo $6p - 1 = 1$, obtenemos $p = \dfrac{1}{3}$ y $q = \dfrac{1}{2}$, y reemplazando en la ecuación

$$(u - v)\, dv = (u + v)\, du\,.$$

Esta ecuación ya fue resuelta en el Ejemplo 2.6.6, obteniendose la solución implícita

$$\arctan\left(\frac{v}{u}\right) - \frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2) = c\,.$$

Luego volviendo a las variables originales, se obtiene que la solución general cumple

$$\arctan\left(\frac{y^2}{x^3}\right) - \frac{1}{2}\ln(x^6 + y^4) = c\,.$$

Ejercicio 2.10.4 Haciendo los cambios de coordenadas $u = \dfrac{1}{2}x^2$, $v = \dfrac{1}{2}y^2$, resuelva la ecuación

$$(2x^2 + 3y^2 - 7)\, x\, dx - (3x^2 + 2y^2 - 8)\, y\, dy = 0\,.$$

Solución. Tenemos

$$u = \frac{1}{2}\, x^2 \quad \Longrightarrow \quad du = x\, dx \quad \text{y} \quad v = \frac{1}{2}\, y^2 \quad \Longrightarrow \quad dv = y\, dy\,.$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$(4u + 6v - 7)\, du - (6u + 4v - 8)\, dv = 0\,.$$

Como la solución del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 4u + 6v - 7 & = & 0 \\ 6u + 4v - 8 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \text{es} \quad u = 1\,, \quad v = \frac{1}{2}\,,$$

hacemos el cambio de coordenadas

$$u = s + 1\,, \quad v = t + \frac{1}{2}\,,$$

obteniendo la ecuación homogénea

$$(4s + 6t)\, ds - (6s + 4t)\, dt = 0\,.$$

Así

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3s + 2t}{2s + 3t} = \frac{3\,\dfrac{s}{t} + 2}{2\,\dfrac{s}{t} + 3}\,,$$

y poniendo $s = tz$, tenemos $\dfrac{ds}{dt} = z + t\dfrac{dz}{dt}$, y la ecuación

$$z \;+\; t\,\frac{dz}{dt} \;=\; \frac{3\,z \;+\; 2}{2\,z \;+\; 3}\,.$$

Separando variables obtenemos

$$\frac{2z+3}{z^2-1}\,dz \;=\; -\frac{2}{t}\,dt\,,$$

o bien

$$\frac{2z\,dz}{z^2-1} \;+\; \frac{3}{2}\left(\frac{dz}{z-1} \;-\; \frac{dz}{z+1}\right) \;=\; -\frac{2}{t}\,dt\,.$$

Integrando se tiene

$$\ln(z^2-1) \;+\; \frac{3}{2}\,(\ln(z-1) \;-\; \ln(z+1)) \;=\; -2\,\ln(t) \;+\; \ln(c)\,,$$

y exponenciando

$$(z^2-1)\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{3}{2}} \;=\; \frac{c}{t^2}\,.$$

Por lo tanto

$$\frac{(z-1)^{\frac{5}{2}}}{(z+1)^{\frac{1}{2}}} \;=\; \frac{c}{t^2}\,.$$

Volviendo a las variables iniciales tenemos

$$\frac{(s-t)^{\frac{5}{2}}}{(s+t)^{\frac{1}{2}}} \;=\; c\,, \qquad \frac{\left(u-v-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}{\left(u+v-\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \;=\; c\,,$$

y finalmente

$$\frac{(x^2-y^2-1)^{\frac{5}{2}}}{(x^2+y^2-3)^{\frac{1}{2}}} \;=\; c\,.$$

Ejercicio 2.10.5 Encuentre la solución general de la ecuación

$$(x \;-\; 2y \;+\; 4)\,dx \;+\; (2x \;-\; y \;+\; 2)\,dy \;=\; 0\,.$$

Solución. Como la solución del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x \;-\; 2y \;+\; 4 & = & 0 \\ 2x \;-\; y \;+\; 2 & = & 0 \end{array}\right\} \quad \text{es} \quad x \;=\; 0\,, \quad y \;=\; 2\,,$$

para obtener una ecuación homogénea hacemos el cambio de coordenadas

$$x \;=\; u\,, \quad y \;=\; v+2\,.$$

Entonces

$$dx \ = \ du \,, \quad dy \ = \ dv \,,$$

y reemplazando, obtenemos

$$(u \ - \ 2v)\, du \ + \ (2u \ - \ v)\, dv \ = \ 0 \,.$$

Para resolver esta ecuación ponemos $v \ = \ tu$, y como $dv \ = \ t\, du \ + \ u\, dt$, reemplazando en la ecuación obtenemos

$$(u \ - \ 2t\, u)\, du \ + \ (2u \ - \ t\, u)\, (t\, du \ + \ u\, dt) \ = \ 0 \,,$$

es decir

$$(1 \ - \ t^2)\, u\, du \ + \ (2 \ - \ t)\, u^2\, dt \ = \ 0 \,.$$

Separando variables se tiene

$$\begin{aligned} \frac{du}{u} &= -\frac{2 \ - \ t}{1 \ - \ t^2}\, dt \\ &= \frac{-2\, dt}{1 - t^2} \ + \ \frac{t\, dt}{1 - t^2} \\ &= -\frac{dt}{1 + t} \ - \ \frac{dt}{1 - t} \ + \ \frac{t\, dt}{1 - t^2} \,, \end{aligned}$$

e integrando

$$\begin{aligned} \ln(u) &= \ln\left(\frac{1 - t}{1 + t}\right) \ - \ \frac{1}{2} \ln(1 - t^2) + \ln(c) \\ &= \ln\left(\frac{1 - t}{1 + t} \, \frac{c}{(1 - t^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= \ln\left(c\, \frac{(1 - t)^{\frac{1}{2}}}{(1 + t)^{\frac{3}{2}}}\right) \,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u \ = \ c\, \frac{(1 - t)^{\frac{1}{2}}}{(1 + t)^{\frac{3}{2}}} \,.$$

Pero

$$t \ = \ \frac{v}{u} \ = \ \frac{y - 2}{x} \,,$$

implica

$$\begin{aligned} x &= \frac{c\, \left(1 - \frac{y-2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{y-2}{x}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{c\, (x - y + 2)^{\frac{1}{2}}\, x}{(x + y - 2)^{\frac{3}{2}}} \,. \end{aligned}$$

Luego nuestra solución está dada por

$$\frac{(x+y-2)^{\frac{3}{2}}}{(x-y+2)^{\frac{1}{2}}} \;=\; c\,,$$

o bien elevando al cuadrado

$$\frac{(x+y-2)^{3}}{(x-y+2)} \;=\; \tilde{c}\,.$$

Ejercicio 2.10.6 Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} \;=\; 2\left(\frac{x+y+2}{x+y+1}\right)^2 \,.$$

Solución. Como el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+2 & = & 0 \\ x+y+1 & = & 0 \end{array}\right\}$$

no tiene solución, hacemos la sustitución $x+y=u$. Luego $dx+dy=du$, y reemplazando obtenemos

$$\frac{du-dx}{dx} \;=\; 2\left(\frac{u+2}{u+1}\right)^2 \,.$$

Separando variables se tiene

$$\begin{aligned} \frac{(u+1)^2}{2(u+2)^2 \;+\; (u+1)^2}\,du &= dx \\ \frac{u^2+2u+1}{3u^2+10u+9}\,du &= dx \\ \left(\frac{1}{3} \;-\; \frac{2}{9}\,\frac{6u+10}{3u^2+10u+9} \;+\; \frac{2}{27}\,\frac{1}{\left(u+\frac{5}{3}\right)^2+\frac{2}{9}}\right)du &= dx \end{aligned}$$

e integrando

$$\frac{1}{3}\,u \;-\; \frac{2}{9}\,\ln(3u^2+10u+9) \;+\; \frac{\sqrt{2}}{9}\arctan\left(\frac{3u+5}{\sqrt{2}}\right) \;=\; x \;+\; c\,.$$

Luego nuestra solución general satisface

$$\frac{1}{3}\,(x+y) \;-\; \frac{2}{9}\,\ln(3(x+y)^2+10(x+y)+9) \;+\; \frac{\sqrt{2}}{9}\arctan\left(\frac{3(x+y)+5}{\sqrt{2}}\right) \;=\; x \;+\; c\,.$$

Ejercicio 2.10.7 a) Muestre que la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^m y^n f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se transforma en ecuación de variables separadas usando el cambio de variables $y = vx$.
b) Use a) para encontrar la solución de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\sec^2\left(\frac{y}{x}\right)}{y^2}\cdot$$

Solución. a) El cambio de variables

$$y = vx \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v + x\,\frac{dv}{dx}\cdot$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$v + x\,\frac{dv}{dx} = v + x^{m+n}v^n f(v)\,,$$

es decir

$$\frac{dv}{v^n f(v)} = x^{m+n-1}dx$$

que es de variables separadas.

b) La ecuación se escribe de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^0 y^{-2}\sec^2\left(\frac{y}{x}\right)\cdot$$

Luego $m = 0, n = -2$ y $f(v) = \sec^2(v)$ y la ecuación queda de la forma

$$\frac{dv}{v^{-2}\sec^2(v)} = x^{-3}dx\,,$$

o bién

$$v^2\cos^2(v)dv = x^{-3}dx\,.$$

Como

$$\int v^2\cos^2(v)dv = \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{4}v^2\mathrm{sen}(2v) + \frac{1}{4}v\cos(2v) - \frac{1}{8}\mathrm{sen}(2v) + c\,,$$

nuestra solución $v = v(x)$ verifica

$$\frac{1}{6}v^3 + \left(\frac{v^2}{4} - \frac{1}{8}\right)\mathrm{sen}(2v) + \frac{v}{4}\cos(2v) = -\frac{x^2}{2} + c\,.$$

Por lo tanto, la solución $y = y(x)$ de nuestra ecuación verifica la ecuación

$$4y^3 + 3x(2y^2 - x^2)\mathrm{sen}\left(\frac{2y}{x}\right) + 6x^2y\cos\left(\frac{2y}{x}\right) + 12x = cx^3\,.$$

Ejercicio 2.10.8 Encontre la solución particular de la ecuación

$$\left[\frac{\ln(\ln(y))}{x} \;+\; \frac{2}{3}\,xy^3 \;+\; 6x\right] dx \;+\; \left[\frac{\ln(x)}{y\ln(y)} \;+\; x^2y^2 \;+\; 4e^{-2y}\right] dy \;=\; 0$$

que pasa por el punto $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

Solución. Sean

$$M(x,y) \;=\; \frac{\ln(\ln(y))}{x} \;+\; \frac{2}{3}\,xy^3 \;+\; 6x\,, \quad N(x,y) \;=\; \frac{\ln(x)}{y\ln(y)} \;+\; x^2y^2 \;+\; 4e^{-2y}\,.$$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \;=\; \frac{1}{xy\ln(y)} \;+\; 2xy^2 \;=\; \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\,,$$

nuestra ecuación es exacta. Luego para resolverla integramos $M(x,y)$ con respecto a x obteniendo

$$u(x,y) \;=\; \ln(\ln(y))\,\ln(x) \;+\; \frac{1}{3}\,x^2y^3 \;+\; 3x^2 \;+\; g(y)\,.$$

Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;=\; \frac{\ln(x)}{y\ln(y)} \;+\; x^2y^2 \;+\; g'(y)\,,$$

e igualando con $N(x,y)$ se obtiene la relación

$$g'(y) \;=\; 4e^{-2y}\,.$$

Luego

$$g(y) \;=\; -2e^{-2y}\,, \quad \text{y} \quad u(x,y) \;=\; \ln(\ln(y))\,\ln(x) \;+\; \frac{1}{3}\,x^2y^3 \;+\; 3x^2 \;-\; 2e^{-2y}\,.$$

De esta forma la solución general satisface

$$\ln(\ln(y))\,\ln(x) \;+\; \frac{1}{3}\,x^2y^3 \;+\; 3x^2 \;-\; 2e^{-2y} \;=\; c\,.$$

Evaluando en $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ obtenemos $c \;=\; \dfrac{73}{24} - \dfrac{2}{e}$. Por lo tanto la solución buscada $y = y(x)$ verifica la ecuación

$$\ln(\ln(y))\,\ln(x) \;+\; \frac{1}{3}\,x^2y^3 \;+\; 3x^2 \;-\; 2e^{-2y} \;=\; \frac{73}{24} \;-\; \frac{2}{e}\,.$$

Ejercicio 2.10.9 Demuestre que $\mu(x,y) = xy^2$ es factor integrante de la ecuación

$$(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy = 0\,.$$

Use este factor integrante para resolver la ecuación.

Solución. La ecuación multiplicada por $\mu(x,y) = xy^2$ queda

$$(2xy^3 - 6x^2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4x^3y)dy = 0\,. \tag{2.1}$$

Si

$$M(x,y) = 2xy^3 - 6x^2y^2 \quad \text{y} \quad N(x,y) = 3x^2y^2 - 4x^3y\,,$$

tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 6xy^2 - 12x^2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 6xy^2 - 12x^2y\,.$$

Así la ecuación (2.1) es exacta y por lo tanto $\mu(x,y) = xy^2$ es factor integrante de la ecuación inicial.
Para resolver la ecuación integramos $M(x,y)$ con respecto a x obteniendo

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx = x^2y^3 - 2x^3y^2 + h(y)\,.$$

Para calcular $h(y)$ imponemos la condición

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$$

obteniéndose la ecuación

$$3x^2y^2 - 4x^3y + h'(y) = 3x^2y^2 - 4x^3y\,.$$

Luego

$$h'(y) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad h(y) = 0\,.$$

Por lo tanto

$$u(x,y) = x^2y^3 - 2x^3y^2$$

y la solución general de nuestra ecuación está dada implicitamente por la ecuación

$$x^2y^3 - 2x^3y^2 = c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Ejercicio 2.10.10 Resuelva el problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y^2}{2y}\,, \quad y(0) = 1$$

y determine el intervalo máximo donde está definida la solución.

Solución. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y^2}{2y} \Longleftrightarrow 2ydy = (x+y^2)dx \Longleftrightarrow (x+y^2)dx - 2ydy = 0\,.$$

Pongamos

$$\begin{aligned} M(x,y) &= x+y^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad \text{y} \\ N(x,y) &= -2y \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0\,. \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2y \neq 0$$

y la ecuación no es exacta. Pero como

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = -1$$

depende sólo de x, nuestra ecuación admite como factor integrante a la función

$$\mu(x) = e^{\int -1dx} = e^{-x}\,.$$

Multiplicando nuestra ecuación por este factor integrante obtenemos la ecuación diferencial exacta

$$e^{-x}(x+y^2)dx + -2ye^{-x}dy = 0\,.$$

Luego existe función F tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{-x}(x+y^2) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2ye^{-x}\,.$$

Por lo tanto

$$F(x,y) = \int xe^{-x}dx + y^2\int e^{-x}dx + \phi(y) \Longrightarrow F(x,y) = -xe^{-x} - e^{-x} - y^2e^{-x} + \phi(y)\,.$$

Pero

$$-2ye^{-x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 - 0 - 2ye^{-x} + \phi'(y)$$

lo que implica

$$\phi'(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \phi(y) = c\,,$$

y entonces

$$F(x,y) = -xe^{-x} - e^{-x} - y^2e^{-x} + c\,.$$

Finalmente como para $x = 0$ debemos tener $y = 1$, el valor de nuestra constante c es 2. Luego la solución buscada $y = y(x)$ verifica

$$-xe^{-x} - e^{-x} - y^2e^{-x} + 2 = 0$$

lo que implica
$$y(x)^2 = 2e^x - x - 1\,.$$
Como $y(0) = 1$, nuestra solución es
$$y(x) = \sqrt{2e^x - x - 1}\,.$$
Para determinar el intervalo máximo donde la solución está definida, llamemos $f(x) = 2e^x - x - 1$. Luego $f'(x) = 2e^x - 1$ y $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -\ln(2)$. Como $f(-\ln(2)) = \ln(2) > 0$ y $f''(x) = 2e^x > 0$, tenemos que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto implica que el intervalo máximo donde la solución está definida es todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.10.11 Encuentre la solución general de la ecuación diferencial
$$(y\ln(y) - 2xy)dx \;+\; (x + y^3e^y)dy \;=\; 0\,.$$
Solución. Poniendo
$$M(x,y) = y\ln(y) - 2xy \qquad \text{y} \qquad N(x,y) = x + y^3e^y\,,$$
tenemos
$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \;=\; \ln(y) - 2x \quad\Longrightarrow\quad -\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}(x,y) = -\frac{1}{y}\cdot$$
Luego tenemos el factor integrante que depende solo de y
$$\mu(x,y) \;=\; e^{-\int \frac{1}{y}dy} \;=\; e^{-ln(y)} \;=\; \frac{1}{y}\cdot$$
Nuestra ecuación multiplicada por el factor integrante es
$$(\ln(y) - 2x)dx + (\frac{x}{y} + y^2e^y)dy \;=\; 0\,.$$
Entonces
$$u(x,y) \;=\; \int(\ln(y) - 2x)dx \;+\; g(y) \;=\; \ln(y)x - x^2 \;+\; g(y)\,,$$
y
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;=\; \frac{x}{y} \;+\; g'(y)\,.$$
Comparando esto con $\frac{x}{y} + y^2e^y$ obtenemos $g'(y) \;=\; y^2e^y$.
Así
$$\begin{aligned} g(y) \;&=\; \int y^2e^y dy \;=\; y^2e^y \;-\; 2\int ye^y dy \;=\; y^2e^y - 2(ye^y - e^y) \\ &=\; (y^2 - 2y + 2)e^y\,, \end{aligned}$$

y tenemos

$$u(x,y) \;=\; \ln(y)x - x^2 + (y^2 - 2y + 2)e^y\,.$$

Luego nuestra solución general está dada por la ecuación implícita

$$\ln(y)x - x^2 + (y^2 - 2y + 2)e^y \;=\; c\,,\;\; c \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 2.10.12 Determine las condiciones bajo las cuales la ecuación

$$M(x,y)\,dx \;+\; N(x,y)\,dy \;=\; 0$$

tiene factor integrante de la forma $\mu(x,y) = h(x+y)$.

Solución. Si $\mu(x,y) = h(x+y)$, tenemos

$$\frac{\partial \ln(\mu(x,y))}{\partial x} \;=\; \frac{h'(x+y)}{h(x+y)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \ln(\mu(x,y))}{\partial y} \;=\; \frac{h'(x+y)}{h(x+y)}\,,$$

y la ecuación del factor integrante queda de la forma

$$\frac{h'(x+y)}{h(x+y)}[N(x,y) - M(x,y)] \;=\; \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \;-\; \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\,,$$

lo que implica

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} \;-\; \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M}(x,y) \;=\; \frac{h'(x+y)}{h(x+y)} \;=\; f(x+y)\,.$$

Luego nuestra condición es

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} \;-\; \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M}(x,y) \;=\; f(x+y) \text{ (dependa sólo de } x+y\text{).}$$

En este caso el factor integrante es

$$\mu(x,y) \;=\; h(x+y) \quad \text{donde} \quad h(u) \;=\; e^{\int f(u)du}\,.$$

Ejercicio 2.10.13 Use lo anterior para encontrar la solución general de*:*

$$(7x^3 \;+\; 3x^2y \;+\; 4y)\,dx \;+\; (4x^3 \;+\; x \;+\; 5y)\,dy \;=\; 0\,.$$

Solución. Poniendo

$$M(x,y) \;=\; 7x^3 \;+\; 3x^2y \;+\; 4y \qquad \text{y} \qquad N(x,y) \;=\; 4x^3 \;+\; x \;+\; 5y\,,$$

tenemos

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M}(x,y) \;=\; \frac{3(1-3x^2)}{-3x^3 - 3x^2y + y + x} \;=\; \frac{3}{x+y} \;=\; f(x+y)\,.$$

Luego

$$f(u) \;=\; \frac{3}{u} \qquad \Longrightarrow \qquad h(u) = e^{\int f(u)du} \;=\; u^3\,,$$

y nuestro factor integrante es

$$\mu(x,y) \;=\; (x+y)^3\,.$$

Sea entonces

$$\begin{aligned}\tilde{M}(x,y) \;=\; (x+y)^3 M(x,y) \;&=\; 7x^6 + 24x^5y + 30x^4y^2 + 16x^3y^3 + \\ &\quad\; 3x^2y^4 + 4x^3y + 12x^2y^2 + 12xy^3 + 4y^4 \qquad \text{y} \\ \tilde{N}(x,y) \;=\; (x+y)^3 N(x,y) \;&=\; 4x^6 + 12x^5y + 12x^4y^2 + 4x^3y^3 + \\ &\quad\; x^4 + 8x^3y + 18x^2y^2 + 16xy^3 + 5y^4\,.\end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned}u(x,y) \;=\; \int \tilde{M}(x,y)dx \;&=\; x^7 + 4x^6y + 6x^5y^2 + 4x^4y^3 + x^3y^4 + \\ &\quad\; x^4y + 4x^3y^2 + 6x^2y^3 + 4xy^4 + g(y)\,,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;=\; 4x^6 + 12x^5y + 12x^4y^2 + 4x^3y^3 + x^4 + 8x^3y + 18x^2y^2 + 16xy^3 + g'(y)\,,$$

y comparando con $\tilde{N}(x,y)$ obtenemos

$$g'(y) \;=\; 5y^4 \quad \Longrightarrow \quad g(y) \;=\; y^5\,.$$

Por lo tanto

$$u(x,y) \;=\; x^7 + 4x^6y + 6x^5y^2 + 4x^4y^3 + x^3y^4 + x^4y + 4x^3y^2 + 6x^2y^3 + 4xy^4 + y^5\,,$$

y entonces nuestra solución general viene dada en forma implícita por la ecuación

$$x^7 + 4x^6y + 6x^5y^2 + 4x^4y^3 + x^3y^4 + x^4y + 4x^3y^2 + 6x^2y^3 + 4xy^4 + y^5 \;=\; c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Ejercicio 2.10.14 Determine las condiciones bajo las cuales la ecuación

$$M(x,y)\,dx \;+\; N(x,y)\,dy \;=\; 0$$

tiene factor integrante de la forma $\mu(x,y) = h(xy)$.

Solución. Si $\mu(x,y) = h(xy)$, tenemos

$$\frac{\partial \ln(\mu(x,y))}{\partial x} = \frac{h'(xy)}{h(xy)} \cdot y \quad \text{y} \quad \frac{\partial \ln(\mu(x,y))}{\partial y} = \frac{h'(xy)}{h(xy)} \cdot x \,,$$

y la ecuación del factor integrante queda de la forma

$$\frac{h'(xy)}{h(xy)}[yN(x,y) - xM(x,y)] = \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \,,$$

lo que implica

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM}(x,y) = \frac{h'(xy)}{h(xy)} = f(xy) \,.$$

Luego nuestra condición es

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM}(x,y) = f(xy) \text{ (dependa sólo de } xy).$$

En este caso el factor integrante es

$$\mu(x,y) = h(xy) \quad \text{donde} \quad h(u) = e^{\int f(u)du} \,.$$

Ejercicio 2.10.15 Use lo anterior para resolver la ecuación

$$y(x^2y^2 + 2)dx + 2x(1 - x^2y^2)dy = 0 \,.$$

Solución. Poniendo

$$M(x,y) = y(x^2y^2 + 2) \qquad \text{y} \qquad N(x,y) = 2x(1 - x^2y^2) \,,$$

tenemos

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM}(x,y) = -\frac{3}{xy} = f(xy) \,.$$

Luego

$$f(u) = -\frac{3}{u} \quad \Longrightarrow \quad h(u) = e^{\int f(u)du} = u^{-3} \,,$$

y nuestro factor integrante es

$$\mu(x,y) = (xy)^{-3} \,.$$

Sea entonces

$$\begin{aligned} \tilde{M}(x,y) &= (xy)^{-3}M(x,y) = x^{-1} + 2x^{-3}y^{-2} \qquad \text{y} \\ \tilde{N}(x,y) &= (xy)^{-3}N(x,y) = 2x^{-2}y^{-3} - 2y^{-1} \,. \end{aligned}$$

De esta forma

$$u(x,y) \;=\; \int \tilde{M}(x,y)dx \;=\; \ln(x) - x^{-2}y^{-2} + g(y)\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;=\; 2x^{-2}y^{-3} + g'(y)\,,$$

y comparando con $\tilde{N}(x,y)$ obtenemos

$$g'(y) \;=\; -2y^{-1} \quad\Longrightarrow\quad g(y) \;=\; -2\ln(y)\,.$$

Por lo tanto

$$u(x,y) \;=\; \ln(x) - x^{-2}y^{-2} - 2\ln(y)\,,$$

y entonces nuestra solución general viene dada en forma implícita por la ecuación

$$\ln(x) - x^{-2}y^{-2} - 2\ln(y) \;=\; c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Ejercicio 2.10.16 a) Demuestre que la ecuación $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ bajo la condición $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N-2yM} = f(x+y^2)$, tiene factor integrante de la forma $\mu(x,y)=h(x+y^2)$.
b) Aplique para encontrar la solución general de

$$(3x+2y+y^2)dx + (x+4xy+5y^2)dy = 0\,.$$

Solución. a) La ecuación del factor integrante es

$$N\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial x} - M\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial y} \;=\; \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

Sea $z = x + y^2$ y pongamos $\mu = \mu(z)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial x} &= \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z}\\
\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial y} &= \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z}\cdot 2y\,.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación del factor integrante obtenemos

$$(N-2yM)\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z} \;=\; \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\,,$$

o bien

$$\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z} \;=\; \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N-2yM}\,.$$

Luego la condición para tener un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = h(x+y^2)$ es que

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2yM} = f(x+y^2)\,.$$

b) Tenemos

$$M(x,y) \;=\; 3x + 2y + y^2\,, \quad N(x,y) \;=\; x + 4xy + 5y^2\,.$$

Por lo tanto

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2yM} \;=\; \frac{1}{x+y^2}\,,$$

es decir

$$\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z} \;=\; \frac{1}{z}\,,$$

lo que implica

$$\mu(z) \;=\; z \quad \Longrightarrow \quad \mu(x,y) \;=\; x + y^2\,.$$

Nuestra ecuación multiplicada por el factor integrante es

$$(3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4)dx + (x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4)dy \;=\; 0\,.$$

Entonces

$$u(x,y) \;=\; \int (3x^2+2xy+4xy^2+2y^3+y^4)dx \;=\; x^3+x^2y+2x^2y^2+2xy^3+xy^4+g(y)\,,$$

lo que implica

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;=\; x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + g'(y)\,.$$

Comparando con la ecuación diferencial obtenemos

$$g'(y) \;=\; 5y^4 \quad \Longrightarrow \quad g(y) \;=\; y^5\,.$$

Por lo tanto

$$u(x,y) \;=\; x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + +2xy^3 + xy^4 + y^5$$

y nuestra solución general está dada implícitamente por la ecuación

$$x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + +2xy^3 + xy^4 + y^5 \;=\; c\,, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 2.10.17 Resolver la ecuación diferencial

$$(7x^4y - 3y^8)\,dx \;+\; (2x^5 - 9xy^7)\,dy \;=\; 0\,,$$

sabiendo que existe un factor integrante de la forma x^my^n.

Solución. Nuestra ecuación multiplicada por $x^m y^n$ es

$$(7x^{m+4}yn + 1 - 3x^m y^{n+8})\, dx \;+\; (2x^{m+5}y^n - 9x^{m+1}y^{n+7})\, dy \;=\; 0$$

. Poniendo

$$M(x,y) \;=\; 7x^{m+4}yn + 1 - 3x^m y^{n+8} \quad \text{y} \quad N(x,y) \;=\; 2x^{m+5}y^n - 9x^{m+1}y^{n+7}\,,$$

tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} \;=\; 7(n+1)x^{m+4}y^n - 3(n+8)x^m y^{n+7} \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} \;=\; 2(m+5)x^{m+4}y^n - 9(m+1)x^m y^{n+7}\,.$$

Por lo tanto la ecuación será exacta si

$$\begin{aligned} 7(n+1) &= 2(m+5) \\ 3(n+8) &= 9(m+1)\,, \end{aligned}$$

lo que implica $m = 2$ y $n = 1$.
Luego

$$M(x,y) \;=\; 7x^6y^2 - 3x^2y^9 \quad \text{y} \quad N(x,y) \;=\; 2x^7y - 9x^3y^8\,.$$

Integrando $M(x,y)$ con respecto a x obtenemos

$$u(x,y) \;=\; x^7y^2 - x^3y^9 + h(y)\,.$$

Así

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;=\; 2x^7y - 9x^3y^8 + h'(y)\,,$$

y comparando con $N(x,y)$, concluímos que

$$h'(y) \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad h(y) \;=\; 0\,.$$

Por lo tanto la solución general en forma implícita es

$$x^7y^2 - x^3y^9 \;=\; c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Ejercicio 2.10.18 Encuentre la solución general de la ecuación de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\tan(x)y \;=\; -xsen(x)y^3\,.$$

Solución. Dividiendo por y^{-3} obtenemos

$$y^{-3}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\tan(x)y^{-2} = -x\mathrm{sen}(x)\,,$$

y nuestro cambio de coordenadas es

$$z = y^{-2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}\,,$$

y por lo tanto

$$y = \frac{1}{\sqrt{z}} \qquad \text{y} \qquad y^{-3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}\,\cdot$$

Reemplazando en nuestra ecuación y multiplicando por -2 tenemos la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dx} - \tan(x)z = 2x\mathrm{sen}(x)\ .$$

Primero resolvemos la ecuación homogénea

$$\frac{dz}{dx} = \tan(x)z\,.$$

Separando variables obtenemos

$$\frac{dz}{z} = \tan(x)dx\,,$$

e integrando

$$\ln(z) = -\ln(\cos(x)) + \ln(c) = \ln\left(\frac{c}{\cos(x)}\right)\,,$$

y exponenciando

$$z = \frac{c}{\cos(x)}\,\cdot$$

Buscamos entonces una solución de la ecuación no homogénea de la forma

$$z(x) = \frac{c(x)}{\cos(x)}\,\cdot$$

Reemplazando en ella obtenemos la relación

$$\frac{c'(x)}{\cos(x)} = 2x\mathrm{sen}(x) \quad \Longrightarrow \quad c'(x) = 2x\mathrm{sen}(x)\cos(x) = x\mathrm{sen}(2x)\,,$$

e integrando por partes

$$c(x) = \int x\text{sen}(2x)dx = -\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx = -\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\text{sen}(2x) + c\,.$$

Por lo tanto

$$z(x) = \frac{-\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\text{sen}(2x) + c}{\cos(x)}\,,$$

y luego

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{z(x)}} = \sqrt{\frac{\cos(x)}{-\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\text{sen}(2x) + c}}\,.$$

Ejercicio 2.10.19 Resolver el problema de valor inicial

$$y' = \frac{1}{3}[(1 - 2t)y^4 - y]\,, \quad y(0) = 1\,.$$

Solución. Esta ecuación es del tipo Bernoulli y la podemos escribir de la forma

$$y' + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1 - 2t)y^4\,,$$

y multiplicando por y^{-4} nos queda

$$y^{-4}y' + \frac{1}{3}y^{-3} = \frac{1}{3}(1 - 2t)\,.$$

Sea $u = y^{-3}$. Por lo tanto $u' = -3y^{-4}y'$ y $y^{-4}y' = -\frac{1}{3}u'$.

Reemplazando obtenemos

$$-\frac{1}{3}u' + \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}(1 - 2t)\,,$$

o bién

$$u' - u = 2t - 1\,, \quad u(0) = 1\,.$$

La solución de la correspondiente ecuación homogénea es

$$u_h(t) = ce^t\,.$$

Usando el método de variación de parámetros, buscamos solución de la ecuación no-homogénea de la forma

$$u(t) = c(t)e^t\,.$$

Luego debemos tener

$$c'(t)e^t \;=\; 2t \;-\; 1 \quad \Longrightarrow \quad c'(t) \;=\; (2t \;-\; 1)e^{-t}\,.$$

Así

$$c(t) \;=\; \int (2t \;-\; 1)e^{-t}dt \;=\; -(1 \;+\; 2t)e^{-t} \;+\; c_1\,,$$

y por lo tanto

$$u(t) \;=\; -(1 \;+\; 2t) \;+\; c_1 e^t\,.$$

La condición inicial $u(0) \;=\; 1$ implica $c_1 \;=\; 2$. Obtenemos así

$$u(t) \;=\; -(1 \;+\; 2t) \;+\; 2e^t\,,$$

y entonces

$$y(t) \;=\; \left[-(1 \;+\; 2t) \;+\; 2e^t\right]^3\,.$$

Ejercicio 2.10.20 Considere la ecuación diferencial

$$y' \;+\; 2(1-x)\,y \;-\; y^2 \;=\; x(x-2)\,.$$

a) Encuentre solución particular de la forma $y \;=\; A\,x \;+\; B$.

b) Encuentre la solución general.

c) Encuentre la solución particular que pasa por el punto $(2,2)$ y el intervalo máximo donde está definida.

Solución. a) Poniendo $y_1(x) = Ax + B$ tenemos $y_1'(x) = A$ y reemplazando en la ecuación

$$A \;+\; 2(1-x)\,(Ax+B) \;-\; (Ax+B)^2 \;=\; x(x-2)\,,$$

es decir

$$A + 2B - B^2 \;+\; (2A - 2B - 2AB)\,x \;+\; (-2A - A^2)\,x^2 \;=\; -2x \;+\; x^2\,,$$

que implica

$$A \;=\; -1 \quad \text{y} \quad B = 1 \quad \Longrightarrow \quad y_1(x) \;=\; 1 \;-\; x\,.$$

b) Como nuestra ecuación es una ecuación de Ricatti, hacemos la sustitución

$$y \;=\; 1 - x \;+\; \frac{1}{z}\cdot$$

Tenemos

$$\frac{dy}{dx} \;=\; -1 \;-\; \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}\,,$$

y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$-1 \;-\; \frac{1}{z^2}\,\frac{dz}{dx} \;+\; 2(1-x)\left(1-x+\frac{1}{z}\right) \;-\; \left(1-x \;+\; \frac{1}{z}\right)^2 \;=\; x(x-2)\,,$$

que se reduce a

$$\frac{dz}{dx} \;=\; -1\,.$$

Por lo tanto

$$z(x) \;=\; -x \;+\; c$$

Luego la solución general de nuestra ecuación es

$$y(x) \;=\; 1 \;-\; x \;+\; \frac{1}{c-x}\,.$$

c) Para encontrar la solución que pasa por el punto $(2,2)$ debemos tener

$$2 \;=\; 1 \;-\; 2 \;+\; \frac{1}{c-2} \quad\Longrightarrow\quad c \;=\; \frac{7}{3}\cdot$$

Luego la solución particular buscada es

$$y_2(x) \;=\; 1 \;-\; x \;+\; \frac{3}{7-3x}\,,$$

y como $2 < \dfrac{7}{3}$ el intervalo máximo donde está definida es $\left]-\infty,\, \dfrac{7}{3}\right[$.

Ejercicio 2.10.21 Para $x > 0$ considere la ecuación de Riccati

$$y' \;+\; e^{-2x}y^2 \;-\; \frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)y \;=\; -\frac{e^{2x}}{x}\,(1+x+2x^2+x^3)\cdot$$

a) Encuentre solución particular de la forma $y_1(x) = e^{2x}\,(Ax+B)$.

b) Encuentre su solución general.

Solución. a) Si

$$y(x) \;=\; e^{2x}\,(Ax+B)\,,$$

tenemos

$$\begin{aligned}
y'(x) \;&=\; e^{2x}\,[A+2B \;+\; 2Ax]\,,\\
e^{-2x}\,y(x)^2 \;&=\; e^{2x}\,[B^2 \;+\; 2ABx \;+\; A^2x^2]\,,\\
-\frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)\,y(x) \;&=\; -\frac{e^{2x}}{x}\,(1+4x+2x^2)\,(Ax+B)\\
&=\; -\frac{e^{2x}}{x}\,[B \;+\; (A+4B)\,x \;+\; (4A+2B)\,x^2 \;+\; 2A\,x^3]\,.
\end{aligned}$$

Luego reemplazando obtenemos

$$-\frac{e^{2x}}{x}\,(1+x+2x^2+x^3) \;=\; -\frac{e^{2x}}{x}\,[B \,+\, 2B\,x \,+\, (2A+2B-2AB)\,x^2 \,+\, (2A-A^2)\,x^3]\,,$$

y por lo tanto

$$B \;=\; 1\,, \quad A \;=\; 1\,.$$

De esta forma la solución particular es

$$y_1(x) \;=\; e^{2x}\,(x+1)\,.$$

b) Como es una ecuación de Riccati hacemos el cambio de coordenadas

$$y \;=\; y_1 \,+\, \frac{1}{v}\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
y'(x) \;&=\; y_1'(x) \,-\, \frac{v'(x)}{v(x)^2}\,,\\
e^{-2x}\,y(x)^2 \;&=\; e^{-2x}\,[y_1(x)^2 \,+\, 2\,\frac{y_1(x)}{v(x)} \,+\, \frac{1}{v(x)^2}]\,,\\
-\frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)\,y(x) \;&=\; -\frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)\,[y_1(x) \,+\, \frac{1}{v(x)}]\,,
\end{aligned}$$

y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
&y_1'(x) \,-\, \frac{v'(x)}{v(x)^2} \,+\, e^{-2x}\,[y_1(x)^2 \,+\, 2\,\frac{y_1(x)}{v(x)} \,+\\
&\frac{1}{v(x)^2}] \,-\, \frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)\,[y_1(x) \,+\, \frac{1}{v(x)}] \;=\; f(x)\,,
\end{aligned}$$

donde $f(x) \;=\; -\frac{e^{2x}}{x}\,(1+x+2x^2+x^3)$.
Es decir

$$\begin{aligned}
&y_1'(x) \,+\, e^{-2x}\,y_1(x)^2 \,-\, \frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)\,y_1(x) \,-\\
&\frac{v'(x)}{v(x)^2} \,+\, e^{-2x}\,[2\,\frac{y_1(x)}{v(x)} \,+\, \frac{1}{v(x)^2}] \,-\, \frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)\,\frac{1}{v(x)} \;=\; f(x)\,.
\end{aligned}$$

Como $y_1(x)$ es solución, la relación anterior se reduce a

$$-\frac{v'(x)}{v(x)^2} \,+\, e^{-2x}\,[2\,\frac{y_1(x)}{v(x)} \,+\, \frac{1}{v(x)^2}] \,-\, \frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)\,\frac{1}{v(x)} \;=\; 0\,.$$

Multiplicando por $v(x)^2$ se obtiene

$$\begin{aligned} v'(x) &= e^{-2x}\,[2\,y_1(x)\,v(x) \;+\; 1] \;-\; \frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)\,v(x) \\ &= \left[2\,e^{-2x}\,y_1(x) \;-\; \frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)\right]\,v(x) \;+\; e^{-2x} \\ &= -\frac{1}{x}\,[1+2x]\,v(x) \;+\; e^{-2x}\,. \end{aligned}$$

Luego tenemos la ecuación lineal

$$v'(x) \;=\; -\frac{1}{x}\,[1+2x]\,v(x) \;+\; e^{-2x}\,,$$

cuya solución es

$$v(x) \;=\; e^{\int a(x)\,dx}\,\left[\int e^{-\int a(x)\,dx}\,e^{-2x}\,dx \;+\; c\right]\,,$$

donde $a(x) \;=\; -\frac{1}{x}\,[1+2x]$.
Como

$$\int a(x)\,dx \;=\; -\int \frac{1}{x}\,[1+2x]\,dx \;=\; -(\ln(x) \;+\; 2x)\,,$$

Tenemos

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{x}\,e^{-2x}\,\left[\int x\,e^{2x}\,e^{-2x} \;+\; c\right] \\ &= \frac{1}{x}\,e^{-2x}\,\left[\frac{x^2}{2} \;+\; c\right]\,. \end{aligned}$$

Luego la solución general de la ecuación original es

$$y(x) \;=\; e^{2x}\,(x+1) \;+\; \frac{2xe^{2x}}{x^2+C}\,, \quad C \in \mathbb{R}$$