

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И  
ИНФОРМАТИКИ**

**Кафедра дискретной математики и алгоритмики**

ПАВЛОВЕЦ Мария Евгеньевна

**НЕЙРОСЕТЕВЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ В СИСТЕМАХ  
УПРАВЛЕНИЯ С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ**

Магистерская диссертация

специальность 1-31 81 09 «Алгоритмы и системы обработки больших  
объемов информации»

Научный руководитель  
Наталия Михайловна Дмитрук  
канд. физ.-мат. наук, доцент

Минск 2019

# ОГЛАВЛЕНИЕ

	С.
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> . . . . .	4
<b>ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ</b> . . . . .	5
1.1 Основные принципы МРС . . . . .	5
1.2 МРС для решения задач стабилизации . . . . .	6
1.3 Базовый алгоритм МРС . . . . .	8
1.4 Терминальные элементы и устойчивость замкнутой системы . . . .	11
1.5 Выводы . . . . .	15
<b>ГЛАВА 2 Использование методов оффлайн дизайна в системах управления с прогнозирующей моделью</b> . . . . .	16
2.1 Основные понятия нейронных сетей . . . . .	16
2.2 Методы обучения с подкреплением . . . . .	19
2.3 Методы дизайна оффлайн регуляторов в системах управления с прогнозирующей моделью . . . . .	21
2.4 Выводы . . . . .	30
<b>ГЛАВА 3 Построение нейросетевого регулятора</b> . . . . .	31
3.1 Описание иллюстративного примера . . . . .	31
3.2 Подход к решению . . . . .	33
3.3 Базовая реализация нейросетевого регулятора . . . . .	35
3.4 Построение области притяжения с помощью SVM . . . . .	39
3.5 Сравнение методов сэмплирования точек для построения аппроксимирования обратной связи . . . . .	40
3.6 Сравнение результатов производительности . . . . .	43
3.7 Использование метода для задачи стабилизации обратного маятника . . . . .	44
3.8 Применение обучения с подкреплением для систем с неявной динамикой . . . . .	47
3.9 Выводы . . . . .	50
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> . . . . .	51
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ</b> . . . . .	52

## ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

ОУ — оптимальное управление

MPC — Model Predictive Control, управление с прогнозирующей моделью

SVM — Support Vector Machines, метод опорных векторов

RL — Reinforcement learning, метод обучения с подкреплением

$\mathbb{I}_{\geq a}$  — множество целых чисел больше либо равных  $a \in \mathbb{R}$

$\mathbb{I}_{[0, N-1]} = \{0, 1, \dots, N-1\}$

$\|x\|$  — евклидова норма вектора  $x \in \mathbb{R}^n$

$\|x\|_Q^2 = x^T Q x$  — взвешенная норма вектора  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $Q > 0$

$\|x\|_A = \inf \|x - a\|$  — расстояние от точки  $x$  до множества  $A$

$\mathcal{K}_\infty$  — класс функций, где функция  $\alpha : [0, \delta) \rightarrow [0, \infty)$  - непрерывная, строго возрастающая,  $\alpha(0) = 0$  и  $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$

$I$  — единичная матрица

$\lambda_{\max}(A)$ ,  $\lambda_{\min}(A)$  — максимальное и минимальное собственное значение матрицы  $A$

## ВВЕДЕНИЕ

Метод управления с прогнозирующей моделью (МРС) [1, 2] — одна из популярных современных технологий теории управления, основанная на решении в реальном времени задач оптимального управления с конечным горизонтом, аппроксимирующих решение задачи управления с бесконечным временным промежутком (например, задачи стабилизации).

Основными причинами популярности МРС при решении прикладных задач (обзор практических применений можно найти в работе [3]) являются применимость схемы управления к нелинейным системам и возможность учета ограничений на управления и траектории, а также способность работать без экспертного вмешательства в течение длительного времени. С другой стороны, эти же факторы могут стать причиной нереализуемости алгоритма МРС, например, в случае быстрых процессов, для которых решение нелинейной задачи оптимального управления не может быть получено регулятором достаточно быстро, в реальном времени, т.е. в темпе обновления информации о состояниях управляемой системы.

Один из подходов к решению указанной проблемы подразумевает перенос некоторых вычислений оффлайн. В частности, в настоящей работе для реализации функции МРС-регулятора предлагается применить искусственные нейронные сети и методы обучения с подкреплением. Нейронные сети будут использоваться для аппроксимации закона управления, а обучение с подкреплением — для задач с неявным видом динамики системы.

В настоящей магистерской диссертации будут исследованы вопросы устойчивости и робастности нелинейных динамических систем, замкнутых обратной связью, построенной МРС-регулятором, и проведено сравнение с оптимальным МРС-регулятором для некоторых прикладных задач. В частности, в главе 1 изложены основные принципы МРС, рассмотрена задача стабилизации, описан базовый алгоритм МРС. Там же исследованы вопросы асимптотической устойчивости замкнутой системы вместе с алгоритмами построения терминального множества и терминальной функции для обеспечения устойчивости этой системы. В основной части работы (главы 2 и 3) разрабатываются методы построения нейросетевых регуляторов и областей притяжения для различных нелинейных систем, проводится сравнение производительности и точности при использовании различных техник сэмплирования точек для аппроксимации обратной связи.

# ГЛАВА 1

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Управление по прогнозирующей модели — Model Predictive Control (МРС) [1, 2] — современный подход к управлению линейными и нелинейными динамическими системами, основанный на решении в реальном времени последовательности задач оптимального управления (ОУ) с конечным временным горизонтом. Упомянутые задачи ОУ называются прогнозирующими, формулируются в зависимости от целей управления, учитывают текущие измерения состояний объекта управления и ограничения на траектории и управляющие воздействия, а также аппроксимируют исходную задачу управления на бесконечном полуинтервале времени.

В настоящей главе излагаются основные принципы и базовый алгоритм МРС на примере задачи стабилизации управляемых движений динамической системы.

### 1.1 Основные принципы МРС

МРС базируется на следующих основных принципах [2]:

- для предсказания и оптимизации будущего поведения системы используется математическая модель управляемого процесса в пространстве состояний (в отличие от описания в виде передаточной функции и других методов частотной области);
- для выбранной математической модели формулируется прогнозирующая задача ОУ (predictive optimal control problem), которая будет решаться в каждый момент времени; в этой задаче:
  - конечный промежуток управления;
  - начальное состояние математической модели совпадает с измеренным текущим состоянием физического объекта управления;
  - критерий качества отражает цели управления: если целью является стабилизация объекта управления, то критерием качества выступает отклонение траектории объекта от положения равновесия;
  - учтены ограничения на траекторию и управляющие воздействия;

- оптимальное управление прогнозирующей задачи ОУ (предсказанное управляющее воздействие) применяется к объекту в текущий момент времени и до тех пор пока не будет измерено следующее состояние объекта; затем оптимизация повторяется.

Поскольку в каждой момент времени в задаче ОУ учитывается текущее состояние, результирующее управление представляет собой обратную связь.

Популярность МРС в теоретических исследованиях [1, 2] и на практике [3] обусловлена следующими свойствами, которыми не обладают другие методы теории управления:

- критерий качества в прогнозирующей задаче ОУ позволяет учитывать экономические требования к процессу управления (например, минимизацию энергетических затрат);
- учитываются жесткие ограничения на фазовые и управляющие переменные;
- метод применим к нелинейным и многосвязным системам.

Отметим, что поскольку решение задачи ОУ повторяется для каждого текущего момент времени, промежуток, для которого прогнозируется поведение системы, постоянно смещается ("скользит"), в силу чего МРС также иногда называется управлением со скользящим горизонтом — Receding Horizon Control (RHC).

## 1.2 МРС для решения задач стабилизации

Основными и исторически первыми приложениями МРС являются задачи стабилизации и регулирования. Остановимся подробно на результатах, полученных в теории МРС для задачи стабилизации. В этом разделе также вводятся основные обозначения, понятия, определения, базовый алгоритм МРС, свойства МРС-регулятора.

Как было отмечено выше, основная идея МРС состоит в том, чтобы использовать математическую модель процесса в пространстве состояний для предсказания и оптимизации поведения динамической системы в будущем [2]. Далее считаем, что используемая для предсказаний модель точно описывает процесс управления: на объект не действует возмущения и нет неучтенных различий между моделью и физическим объектом. Такие схемы МРС носят название номинальных (nominal MPC scheme).

Система, которая исследуется в данном разделе, является нелинейной, дискретной, стационарной:

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (1.1)$$

Здесь  $x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$  — состояние системы в момент времени  $t$ ,  $u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^r$  — управляющее воздействие в момент  $t$ ,  $t \in \mathbb{I}_{\geq 0}$  — время, дискретное. Относительно функции  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$  предполагается, что она непрерывна.

Начальное состояние системы (1.1) задано:

$$x(0) = x_0 \in X.$$

На состояния и управляющие воздействия  $u$  накладываются ограничения вида

$$(x(t), u(t)) \in Z \subseteq X \times U, \quad t \in \mathbb{I}_{\geq 0}, \quad (1.2)$$

которые называются смешанными ограничениями. Понятно, что такая форма задания ограничений включают в себя одновременно и фазовые ограничения на состояния системы, и прямые ограничения на управляющие воздействия. Относительно множества  $Z$  предполагается, что оно компактно.

Цель (стабилизирующего) МРС — построить обратную связь  $u(x)$ , при которой замкнутая система

$$x(t+1) = g(x(t)) = f(x(t), u(x(t))), \quad x(0) = x_0, \quad (1.3)$$

будет устойчива в некотором заданном положении равновесия (заданном множестве), при этом переходный процесс не нарушает ограничения (1.2) при всех  $t \in \mathbb{I}_{\geq 0}$ .

**Определение 1.1** Точка  $x^*$  является положением равновесия для системы (1.3), если выполняется  $x^* = g(x^*)$ .

**Определение 1.2** Множество  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  называется положительно инвариантным множеством для системы (1.3), если выполняется  $g(x) \in X \forall x \in X$ .

**Определение 1.3** Пусть  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  — положительно инвариантное множество для системы (1.3). Замкнутое, положительно инвариантное множество  $A \subseteq X$  устойчиво для (1.3), если  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , что для всех  $\|x_0\|_A \leq \delta, x_0 \in X$ , выполняется  $\|x(t)\|_A \leq \epsilon, \forall t \in \mathbb{I}_{\geq 0}$ .

**Определение 1.4** Множество  $A \subseteq X$ , удовлетворяющее условиям определения 1.3, асимптотически устойчиво с областью притяжения  $X$ , если оно устойчиво и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\|_A = 0 \forall x_0 \in X$ .

**Определение 1.5** Множество — глобально асимптотически устойчиво, если оно асимптотически устойчиво с  $X = \mathbb{R}^n$ .

При  $A = \{x^*\}$  получим классические понятия устойчивости, асимптотической устойчивости и глобальной асимптотической устойчивости решения  $x(t) = x^*$  по Ляпунову.

Далее будет рассматриваться случай стабилизации системы управления (1.1) для заданного положения равновесия, т.е. случай  $A = \{x^*\} \in X$ .

### 1.3 Базовый алгоритм MPC

Как было отмечено в разделе 1.1, идея алгоритма MPC состоит в том, чтобы в каждый момент  $t \in \mathbb{I}_{\geq 0}$  оптимизировать будущее поведение системы (1.1) на конечном горизонте  $N \geq 2$  и использовать первое значение полученного оптимального (программного) управления в качестве значения обратной связи для момента  $t$  (см. рис. 1.1). Под "оптимизацией будущего поведения" понимается решение прогнозирующей задачи ОУ.

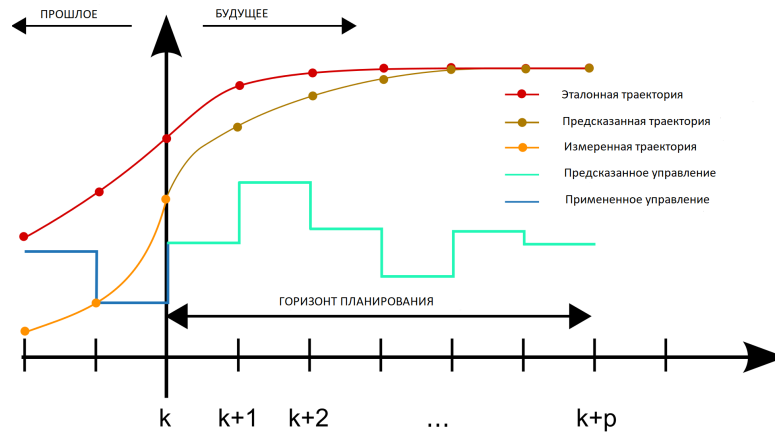


Рис. 1.1: Схема MPC

Понятно, что далее необходимо различать состояния объекта управления  $x(t)$ ,  $t \in \mathbb{I}_{\geq 0}$ , которые измеряются в каждом конкретном процессе управления, и состояния математической модели, которая используется для предсказаний и формулировки прогнозирующей задачи ОУ. Поэтому состояния математической модели будем обозначать  $x(k|t)$ ,  $k \in \mathbb{I}_{[0, N-1]}$ . Они изменяются



согласно уравнению

$$x(k+1|t) = f(x(k|t), u(k|t)), \quad x(0|t) = x(t), \quad k \in I_{[0, N-1]}. \quad (1.4)$$

Здесь аргумент  $t$  после черты подчеркивает зависимость от текущего момента, для которого проводится оптимизация. Начальное состояние — текущее состояние объекта управления  $x(t)$ .

Ограничения (1.2), записанные для состояний математической модели (1.4), имеют вид:

$$(x(k|t), u(k|t)) \in Z, \quad k \in \mathbb{I}_{[0, N-1]}.$$

Кроме приведенных смешанных ограничений, в задачу, как правило, добавляются ограничения в терминальный момент времени. "Терминальные элементы" прогнозирующей задачи более подробно будут рассмотрены ниже после ее формулировки.

Оставшийся элемент прогнозирующей задачи ОУ — критерий качества. В задачах стабилизации критерий качества выбирается исследователем, практиком, и является, скорее, параметром настройки схемы МРС. Например, в задаче стабилизации (см. [2]) критерий качества выбирается из соображений штрафа любого состояния  $x \in X$ , отклоняющегося от состояния равновесия  $x^*$ . Также часто штрафуются отклонения управления  $u \in U$  от значения  $u^*$ . Как отмечается в [2], последнее условие полезно с вычислительной точки зрения, поскольку для численных методов зачастую проще решить задачу, в которой в критерии качества штрафуются управляющие воздействия. С другой стороны [2], с точки зрения реализации управления также желательно избежать значений  $u \in U$ , соответствующих чрезмерным энергетическим затратам.

Критерий качества будет состоять из терминальной стоимости  $V_f(x(N|t))$  и суммарной стоимости переходного процесса, т.е. это будет критерий качества типа Больца. Терминальная стоимость будет рассмотрена ниже, при обсуждении терминальных элементов задачи ОУ. Стоимость переходного процесса для дискретных систем задается суммой стоимостей за каждый этап (для каждого  $k \in \mathbb{I}_{[0, N-1]}$ ):

$$\sum_{k=0}^{N-1} l(x(k|t), u(k|t)).$$

В литературе функция  $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$  называется стоимостью этапа (stage cost). Предполагается [2], что она непрерывна, а также:

1.  $l(x^*, u^*) = 0$ , т.е. стоимость обращается в нуль в точке равновесия;

2. существует функция  $\alpha_1$  класса  $\mathcal{K}_\infty$ , что выполняется

$$l(x, u) \geq \alpha_1(|x - x^*|) \quad \forall (x, u) \in Z.$$

Таким образом, прогнозирующая задача ОУ для момента времени  $t$  имеет вид:

$$\mathcal{P}(t) : \quad V(x(t)) = \min_{u(\cdot|t)} \sum_{k=0}^{N-1} l(x(k|t), u(k|t)) + V_f(x(N|t)), \quad (1.5)$$

при условиях

$$x(k+1|t) = f(x(k|t), u(k|t)), \quad k \in \mathbb{I}_{[0, N-1]},$$

$$x(0|t) = x(t),$$

$$(x(k|t), u(k|t)) \in Z, \quad k \in \mathbb{I}_{[0, N-1]},$$

$$x(N|t) \in X_f.$$

В задаче (1.5) обсуждавшиеся выше "терминальные элементы":

- терминальная стоимость  $V_f(x(N|t))$  в критерии качества;
- терминальное ограничение  $x(N|t) \in X_f$ , где  $X_f$  — терминальное множество.

Именно условия на эти элементы обеспечивают устойчивость замкнутой системы несмотря на то, что решается задача с конечным горизонтом (см. раздел 1.4).

Далее используем следующие обозначения:

$u^0(\cdot|t) = \{u^0(0|t), \dots, u^0(N-1|t)\}$  — оптимальное (программное) управление задачи  $\mathcal{P}(t)$ ;

$x^0(\cdot|t) = \{x^0(0|t), \dots, x^0(N|t)\}$  — соответствующая траектория;

$X_N$  — множество всех состояний  $x \in X$ , для которых существует решение задачи (1.5) с  $x(t) = x$ .

**Базовый алгоритм МРС** состоит в следующем:

Для каждого  $t \in \mathbb{I}_{\geq 0}$

1. измерить состояние  $x(t) \in X$  системы (1.1);
2. решить задачу (1.5) с начальным условием  $x(0|t) = x(t)$ , получить ее решение  $u^0(\cdot|t)$ ;

3. подать на вход системы (1.1) управляющее воздействие

$$u_{MPC}(t) := u^0(0|t). \quad (1.6)$$

Таким образом, в каждый момент  $t \in \mathbb{I}_{\geq 0}$  на систему подается управляющее воздействие (1.6), которое неявно зависит от текущего состояния  $x(t)$ . Соответственно, замкнутая система имеет вид

$$x(t+1) = f(x(t), u^0(0|t)), \quad t \in \mathbb{I}_{\geq 0}. \quad (1.7)$$

После 20 лет исследований теория МРС приобрела свои нынешние черты. Согласно [5], все схемы номинального МРС описываются представленным базовым алгоритмом, а все прогнозирующие задачи ОУ в общем виде формулируются как (1.5).

## 1.4 Терминальные элементы и устойчивость замкнутой системы

Схемы МРС зависят от выбора терминальных элементов  $V_f$  и  $X_f$ . Например, самые первые результаты исследований по МРС [2] были получены для состояния равновесия, совпадающего с началом координат  $(x^*, u^*) = (0, 0)$  (т.е.  $f(0, 0) = 0$ ) и предлагали использовать  $X_f = \{0\}$ , т.е. терминальное условие принимало вид  $x(N|t) = 0$ . Понятно, что включение терминальной стоимости в критерий качества в таком подходе не имеет смысла. Прогнозирующая задача ОУ  $\mathcal{P}(t)$  принимает вид

$$\mathcal{P}(t) : \quad V(x(t)) = \min_{u(\cdot|t)} \sum_{k=0}^{N-1} l(x(k|t), u(k|t)),$$

при условиях

$$x(k+1|t) = f(x(k|t), u(k|t)), \quad k \in \mathbb{I}_{[0, N-1]},$$

$$x(0|t) = x(t),$$

$$(x(k|t), u(k|t)) \in Z, \quad k \in \mathbb{I}_{[0, N-1]},$$

$$x(N|t) = 0.$$

Сразу отметим, что ограничения-равенства считаются "плохими" с точ-

ки зрения вычислительных методов оптимизации, поэтому дальнейшее развитие теории продолжалось в направлении ослабления этих простейших условий.

В частности, в работе [5] приведены следующие общие требования, которым должны удовлетворять терминальное множество  $X_f$  и терминальная стоимость  $V_f$ . Эти условия дополняют условия 1–2 на функцию стоимости этапа  $l$  и имеют вид:

3. терминальная стоимость  $V_f$  непрерывна на  $X$ ;
4. терминальное множество  $X_f$  замкнуто,  $\{x^*\} \in X_f$ ;
5. существует локальная обратная связь  $k_f : X_f \rightarrow U$ , такая что для  $\forall x \in X_f$  имеет место
  - а)  $(x, k_f(x)) \in Z$ , т.е. локальная обратная связь допустима;
  - б)  $f(x, k_f(x)) \in X_f$ , т.е. терминальное множество  $X_f$  является положительно инвариантным для системы  $x(t+1) = f(x(t), k_f(x(t)))$ ;
  - в)  $V_f(f(x, k_f(x))) - V_f(x) \leq -l(x, k_f(x)) + l(x^*, u^*)$ , откуда следует, что терминальная стоимость  $V_f$  может служить функцией Ляпунова на терминальном множестве  $X_f$ .

В работах [1, 2] для дискретных систем можно найти следующий основной результат:

**Теорема 1.1** Пусть  $x_0 \in X_N$  и выполнены все предположения 1 – 5 относительно функций  $l$ ,  $V_f$  и терминального множества  $X_f$ . Тогда

1. замкнутая система (1.7), полученная в результате применения базового алгоритма МРС, удовлетворяет ограничениям (1.2) для всех  $t \in \mathbb{I}_{\geq 0}$ ;
2. задача (1.5) имеет решение для всех  $t \in \mathbb{I}_{\geq 0}$ ;
3.  $x^*$  — асимптотически устойчивое положение равновесия системы (1.7) с областью притяжения  $X_N$ .

Выбор терминальных элементов  $V_f$  и  $X_f$  зачастую зависит от конкретной задачи, однако существует общий подход к их нахождению и этот способ называется МРС на квази-бесконечном горизонте.

МРС на квази-бесконечном горизонте имеет две отличительные черты:

1. локальная обратная связь является линейной, строится по первому приближению нелинейной системы; она является фиктивной, т.е. для фактического управления системой не используется, однако служит для построения терминальных элементов и при доказательстве основных результатов по асимптотической устойчивости;
2. терминальное ограничение и терминальная стоимость являются квадратичными, их параметры находятся по решению уравнения Ляпунова.

Впервые идея квази-бесконечного MPC появилась в работе [4] для непрерывных нелинейных систем

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.8)$$

с дважды непрерывно дифференцируемой функцией  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ , для которых считается, что положение равновесия находится в начале координат, т.е.  $f(0, 0) = 0$ , при этом  $\{0\} \in \text{int } U$ .

В квази-бесконечном MPC все элементы прогнозирующей задачи выбираются квадратичными: функция стоимости этапа задается в виде

$$L(x, u) = \|x\|_Q^2 + \|u\|_R^2 = x^T Q x + u^T R u; \quad (1.9)$$

терминальная стоимость — квадратичная функция вида:

$$V_f(x) = \|x\|_P^2 = x^T P x; \quad (1.10)$$

терминальное множество — эллипсоид вида:

$$X_f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T P x \leq \alpha\}, \quad (1.11)$$

где  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — положительно определенные матрицы. Матрицы  $Q, R$  выбираются исходя из целей процесса управления (скорость сходимости, минимизация затрат и др.) и являются параметрами настройки MPC-регулятора. Матрица  $P$  и константа  $\alpha > 0$  не зависят от выбора  $Q, R$ , а лишь от свойств системы управления. Их выбор описывается ниже.

Будем считать, что первое приближение системы (1.8) в начале координат

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \partial f(0, 0)/\partial x, \quad B = \partial f(0, 0)/\partial u, \quad (1.12)$$

стабилизируемо. Это означает, что существует линейная обратная связь по

состоянию  $k_f(x) = Kx$ , что замкнутая система

$$\dot{x} = Ax + Bk_f(x) = (A + BK)x$$

асимптотически устойчива, т.е. матрица  $A_K = A + BK$  является гурвицевой.

Известно [4], что если первое приближение (1.12) системы (1.8) в начале координат стабилизируемо, то

1. уравнение Ляпунова

$$(A_K + kI)^T P + P(A_K + kI) = -(Q + K^T R K) \quad (1.13)$$

имеет единственное положительно определенное решение  $P$ , где параметр  $k \in [0, \infty)$  удовлетворяет неравенству  $k < -\lambda_{\max}(A_K)$ ;

2.  $\exists \alpha \in (0, \infty)$ , определяющая окрестность начала координат

$$X_f^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T P x \leq \alpha\}$$

такую что

- а)  $Kx \in U \quad \forall x \in X_f^\alpha$ , т.е. линейная обратная связь в области  $X_f^\alpha$  не нарушает ограничений на управление;
- б) множество  $X_f^\alpha$  инвариантно для нелинейной системы (1.8), замкнутой локальной линейной обратной связью  $k_f(x) = Kx$ ;
- в) для любого  $x_1 \in X_f^\alpha$  терминальная стоимость  $V_f(x_1)$  ограничивает сверху "хвост" критерия качества для бесконечного горизонта:

$$\int_{t_1}^{\infty} (\|x(t; t_1, x_1, u)\|_Q^2 + \|u(t)\|_R^2) dt \leq x_1^T P x_1.$$

Тогда алгоритм нахождения терминальной функции и терминального множества, согласно [4] состоит в следующем:

1. найти линейную обратную связь  $k_f(x) = Kx$ ;
2. выбрать константу  $k \in [0, \infty)$ , удовлетворяющую неравенству

$$k < -\lambda_{\max}(A_K),$$

и решить уравнение Ляпунова (1.13) для нахождения  $P$ ;

3. найти наибольшее  $\alpha_1$ , для которого имеет место  $Kx \in U \quad \forall x \in X_f^{\alpha_1}$ ;

4. найти наибольшее  $\alpha \in (0, \alpha_1)$ , при котором выполнено неравенство

$$\sup \left( \frac{\|f(x, Kx) - A_K x\|}{\|x\|} \mid x \in X_f^\alpha, x \neq 0 \right) \leq \frac{k\lambda_{\min}(P)}{\|P\|}.$$

В итоге получим матрицу  $P$  и значение  $\alpha$ , которые определяют терминальную функцию (1.10) и терминальное множество (1.11). Эти элементы строятся оффлайн, до начала процесса управления.

**Теорема 1.2** [4] Если первое приближение (1.12) системы (1.8) в начале координат стабилизируемо и прогнозирующая задача оптимального управления  $\mathcal{P}(t)$  имеет решение в  $t = 0$ , то в отсутствие возмущений замкнутая система асимптотически устойчива. Кроме того, если  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  — множество состояний  $x_0$ , для которых  $\mathcal{P}(0)$  имеет решение, то  $X$  — область притяжения замкнутой системы.

## 1.5 Выводы

Основная идея алгоритма МРС состоит в том, чтобы в каждый момент времени оптимизировать будущее поведение системы на конечном горизонте и использовать первое значение полученного оптимального (программного) управления в качестве значения обратной связи для этого момента времени. В связи с тем, что эта идея интуитивно понятна практикам и достаточно проста в реализации, она получила широкое распространение в промышленных приложениях [3].

Метод опирается на решение задач ОУ в режиме реального времени, которое в подавляющем числе случаев может быть получено только численно. Несмотря на то, что с привлечением методов алгоритмического дифференцирования численные методы решения задач ОУ достигли значительной эффективности [18, 19] и развитие вычислительной техники позволяет быстро решать достаточно сложные задачи, для существенно нелинейных систем, систем большой размерности, систем с быстро меняющейся динамикой, существующие методы могут оказаться неэффективными или слишком медленными. В связи с этим недостатком, далее в магистерской диссертации предлагается вынести некоторые вычисления из классического алгоритма МРС оффлайн, что позволит повысить производительность систем управления с прогнозирующей моделью.

## ГЛАВА 2

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ОФФЛАЙН ДИЗАЙНА В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ

Метод МРС опирается на решение задач ОУ в режиме реального времени, однако несмотря на то, что существуют методы эффективного решения этих задач [18, 19] и развитие вычислительной техники позволяет быстро решать достаточно сложные задачи, для многих классов нелинейных систем существующие методы могут оказаться неэффективными или слишком медленными. Для преодоления этих недостатков в магистерской диссертации предлагается вынести некоторые вычисления из классического алгоритма МРС оффлайн. В данной главе будут рассмотрены основные существующие подходы для задач МРС, а также теория методов машинного обучения, которая будет использоваться в экспериментах в рамках магистерской диссертации.

### 2.1 Основные понятия нейронных сетей

Нейронная сеть представляет собой серию алгоритмов, которые стремятся распознать базовые отношения в наборе данных посредством процесса, который имитирует работу человеческого мозга.

Нейронная сеть основана на наборе связанных единиц или узлов, называемых искусственными нейронами, которые свободно моделируют нейроны в биологическом мозге. Каждое соединение, подобно синапсам в биологическом мозге, может передавать сигнал от одного искусственного нейрона к другому. Искусственный нейрон, который получает сигнал, может обрабатывать его, а затем сигнализировать дополнительные искусственные нейроны, связанные с ним [16].

Ключевой моделью глубокого обучения являются нейронные сети с прямым распространением (многослойные персептроны). Целью данного вида нейронных сетей является аппроксимация некоторой функции  $f^*$ . Например, для классификатора  $y = f^*(x)$  сеть отображает вход  $x$  в категорию  $y$ . Сеть определяет отображение  $y = f(x; \theta)$  и изучает значение параметров  $\theta$ , кото-



рые приводят к приближению функции наилучшим образом.

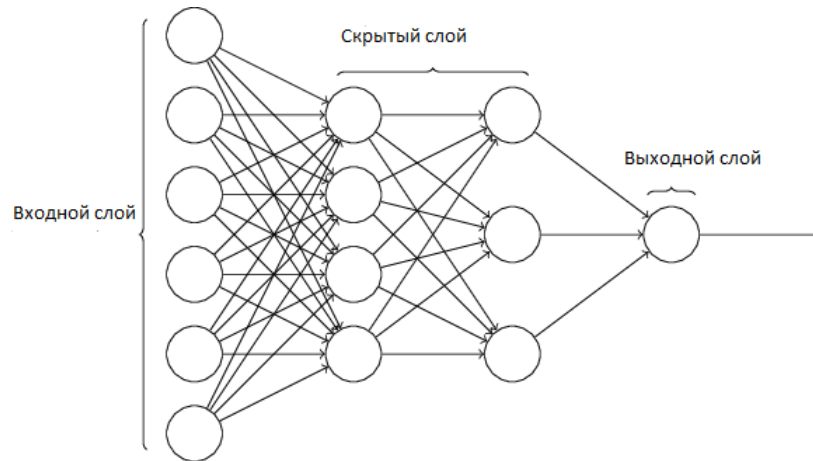


Рис. 2.1: Нейронная сеть со скрытыми слоями.

Нейронные сети называются сетями, потому что они обычно представляются объединением многих различных функций. Модель связана с ориентированным ациклическим графом (Рис. 2.1), описывающим, как функции состоят вместе. Например, мы могли бы иметь три функции  $f^{(1)}$ ,  $f^{(2)}$  и  $f^{(3)}$ , связанные в цепочке, с образованием  $f(x) = f^{(3)}(f^{(2)}(f^{(1)}(x)))$ . Эти цепные структуры являются наиболее часто используемыми структурами нейронных сетей. В этом случае  $f^{(1)}$  называется первым слоем сети,  $f^{(2)}$  называется вторым слоем и т. д. Длина цепочки слоев называется глубиной сети.

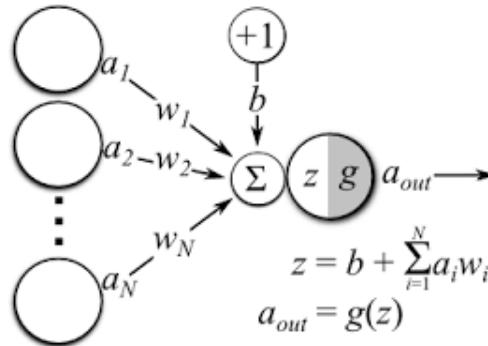


Рис. 2.2: Строение нейрона.

Нейрон обычно получает много одновременных входов. Каждый вход имеет свой собственный относительный вес, который дает входное воздействие, которое ему необходимо для функции суммирования элемента обработки. Эти веса выполняют тот же тип функции, что и различные синаптические силы биологических нейронов. Веса — это адаптивные коэффициенты в сети, которые определяют интенсивность входного сигнала, зарегистрированного искусственным нейроном. На рисунке (2.2) веса обозначены  $w_i$ , значения нейронов предыдущего слоя —  $a_i$ .  $b$  параметр представляет собой смещение

для линейного преобразования входных нейронов. Таким образом, мы получаем значение функции суммирования в виде линейного преобразования  $z = b + \sum_{i=1}^N a_i w_i$ .

Функция  $g$  на рисунке (2.2) - это функция активации нейрона. Цель использования функции активации заключается в том, чтобы позволить суммируемому результату меняться в зависимости от времени. Функцией по умолчанию является нелинейная активационная функция ReLU  $g(x) = \max(0, x)$ , которая рекомендована для использования с большинством нейронных сетей прямого распространения. Поскольку ReLU почти линейна, она сохраняет многие свойства, которые упрощают оптимизацию линейных моделей с помощью методов, основанных на градиенте. Другими популярными видами функции активации являются сигмоидальная (логистическая) функция  $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ , гиперболический тангенс  $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

Подавляющее большинство искусственных нейронных сетевых решений проходят обучение с учителем. В этом режиме фактический выход нейронной сети сравнивается с желаемым выходом. Веса, которые обычно начинаются с произвольного начала, затем корректируются сетью, так что следующая итерация или цикл приведут к более близкому совпадению между желаемым и фактическим выходом. Метод обучения пытается минимизировать текущие ошибки всех элементов обработки. Это глобальное сокращение ошибок создается со временем, постоянно изменяя веса ввода до тех пор, пока не будет достигнута приемлемая точность сети. Когда процесс тренировки заканчивается, то уже в онлайн процессах используются эти натренированные параметры и веса.

Алгоритм обучения - алгоритм обратного распространения ошибки, в котором используется стохастический градиентный спуск. Для задачи регрессии чаще всего в качестве функции потерь используется средняя квадратичная ошибка (MSE) (2.1):

$$L(y_{out}, y_{true}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{out}(i) - y_{true}(i))^2. \quad (2.1)$$

Согласно универсальной теореме аппроксимации — нейронная сеть с одним скрытым слоем может аппроксимировать любую непрерывную функцию многих переменных с любой точностью [17]. Необходимо определить достаточное количество нейронов для достижения этой точности. С любой нелинейностью сеть остаётся универсальным аппроксиматором и при правильном выборе структуры может достаточно точно аппроксимировать функционирование любой непрерывной функции.

## 2.2 Методы обучения с подкреплением

Обучение с подкреплением (RL) - это область машинного обучения, связанная с тем, как агенты, взаимодействующие со средой, должны предпринимать действия в этой среде, чтобы максимизировать некоторое понятие кумулятивной награды. В литературе по исследованиям и контролю операций обучение с подкреплением называется приближенным динамическим программированием или нейродинамическим программированием. Интерес к обучению с подкреплением возник также в теории оптимального управления, которая в основном связана с существованием и характеристикой оптимальных решений, алгоритмами их точного вычисления или аппроксимацией, особенно в отсутствие математической модели среды.

В машинном обучении среда обычно формулируется как процесс принятия решений Маркова (MDP), так как многие алгоритмы обучения с подкреплением для этого контекста используют методы динамического программирования.

Базовое RL моделируется как процесс принятия марковских решений:

- набор состояний среды и агента  $S$
- набор действий агента  $A$
- $P_a(s, s') = Pr(s_{t+1} = s' | s_t = s, a_t = a)$  - вероятность перехода из состояния  $s$  в состояние  $s'$  под действием агента  $a$ .
- $R_a(s, s')$  - непосредственная награда после перехода от  $s$  к  $s'$  с действием  $a$ .

Обучение с подкреплением требует механизмов исследования. Случайный выбор действий без ссылки на вероятное распределение вероятности показывает низкую производительность. Простые методы исследования являются наиболее практичными.

Одним из таких методов является  $\epsilon$ -greedy, когда агент выбирает действие, которое, по его мнению, имеет лучший долгосрочный эффект с вероятностью  $1 - \epsilon$ . Если никакое действие, удовлетворяющее этому условию, не найдено, агент выбирает действие равномерно случайным образом. Здесь  $\epsilon < 1$  является параметром настройки, который иногда изменяется либо по фиксированному расписанию, либо адаптивно основываясь на эвристике.

Выбор действия агента моделируется как таблица, называемая стратегией  $\pi : S \times A \rightarrow [0, 1]$ :

$$\pi(a|s) = P(a_t = a | s_t = s). \quad (2.2)$$

Таблица стратегии дает вероятность принятия действий  $a$  в состоянии  $s$ . Существуют также невероятностные стратегии.

Функция стоимости  $V_\pi(s)$  определяется как ожидаемый возврат, начиная с состояния  $s$ , то есть  $s_0 = s$  и последовательно следуют политике  $\pi$ . Следовательно, грубо говоря, функция значений оценивает «насколько хорошо» она должна находиться в определенном состоянии.

$$V_\pi(s) = E[R] = E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r_t | s_0 = s\right]. \quad (2.3)$$

где случайная величина  $R$  обозначает прибыль, и определяется как сумма будущих дисконтированных вознаграждений.

$$R = \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r_t, \quad (2.4)$$

где  $r_t$  - вознаграждение на этапе  $t$ ,  $\gamma \in [0, 1]$  — коэффициент дисконтирования.

Функция стоимости пытается найти стратегию, которая максимизирует прибыль, поддерживая набор оценок ожидаемых результатов для некоторой стратегии. На основании теории MDP, стратегия называется оптимальной, если она достигает наилучшей ожидаемой прибыли из любого начального состояния.

Чтобы определить оптимальность формальным образом, определим прибыль стратегии  $\pi$

$$V^\pi(s) = E[R|s, \pi], \quad (2.5)$$

где  $R$  обозначает прибыль, связанную со следующей  $\pi$  из исходного состояния  $s$ . Определим  $V^*(s)$  как максимально возможное значение  $V^\pi(s)$ , где  $\pi$  разрешено изменять,

$$V^*(s) = \max_{\pi} V^\pi(s), \quad (2.6)$$

Стратегия, которая достигает этих оптимальных значений в каждом состоянии, называется оптимальной.

Хотя значения состояний достаточно для определения оптимальности, полезно определить функцию прибыли от действия агента. Учитывая состояние  $s$ , действие  $a$  и политику  $\pi$ , значение действия пары  $(s, a)$  от  $\pi$  опреде-

ляется формулой

$$Q^\pi(s, a) = E[R|s, a, \pi], \quad (2.7)$$

где  $R$  теперь обозначает случайную прибыль, связанную с первым действием  $a$  в состоянии  $s$  и последующим  $\pi$ .

Теория MDP утверждает, что если  $\pi^*$  является оптимальной стратегией, мы принимаем оптимальное действие, выбирая его из  $Q^{\pi^*}(s, \cdot)$  с наивысшим значением в каждом состоянии  $s$ . Функция прибыли от действия такой оптимальной стратегией  $Q^{\pi^*}$  называется оптимальной функцией прибыли от действия и является обычно обозначаемый  $Q^*$ . Таким образом, знание оптимальной функции стоимости действия достаточно, чтобы знать, как действовать оптимально.

Существует несколько алгоритмов для нахождения оптимальных стратегий: метод Монте-Карло, метод конечных разностей, метод прямого поиска стратегии. Каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки, однако чаще всего используется стохастическая оптимизация и методы градиентного подъема.

## 2.3 Методы дизайна оффлайн регуляторов в системах управления с прогнозирующей моделью

Существует несколько подходов использования методов обучения в MPC системах:

- Явный MPC
- Аппроксимация закона управления
- Использование обучаемой модели для аппроксимации динамики прогнозирующей модели
- Итерационный подход для построения терминального региона и функции из предыдущих итераций

### 2.3.1 Явный MPC

При некоторых слабых предположениях для линейных систем задача оптимизации может быть решена оффлайн, т.е. до начальной реальной процедуры управления [6]. В результате, получается явный закон управления  $u(x)$ . Развитие подхода на нелинейные системы не тривиально, и кроме того даже

в линейных случаях существуют проблемы с эффективностью вычислений для метода из [6].

В момент времени  $t$ , вычисляем состояние  $x(t)$ , решаем линейную задачу с линейными ограничениями

$$V(x) = \min_{u(\cdot|t)} \sum_{k=t}^{t+N-1} L(x(k|t), u(k|t)) + F(x(t+N|t)), \quad (2.8)$$

при условиях

$$x(k+1|t) = Ax(k|t) + Bu(k|t), \quad t \leq k \leq t+N-1,$$

$$x(t|t) = x(t), \quad t \leq k \leq t+N-1,$$

$$C_x x(k|t) \leq d_x, \quad t \leq k \leq t+N-1,$$

$$C_u u(k|t) \leq d_u, \quad t \leq k \leq t+N-1,$$

$$C^f x(t+N|t) \leq d^f,$$

с квадратичной функцией стоимости этапа и квадратичной терминальной функцией

$$L(x(t), u(t)) = x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t), \quad Q, R > 0, \quad F(x(t)) = x(t)^T P x(t).$$

Можно переписать задачу 2.8 в виде задачи квадратичного программирования. Для этого обозначим

$$X := [x^T(t+1|t), \dots, x^T(t+N|t)]^T, \quad (2.9)$$

$$U := [u^T(t+1|t), \dots, u^T(t+N-1|t)]^T, \quad (2.10)$$

Перепишем функцию стоимости

$$F(x(t), U) = x^T(t) Q x(t) + X^T \tilde{Q} X + U^T \tilde{R} U, \quad (2.11)$$

где  $\tilde{Q} = \text{diag}(Q, \dots, Q, P) \in \mathbb{R}^{n \times (N+1)}$ ,  $\tilde{R} = \text{diag}(R, \dots, R) \in \mathbb{R}^{m \times N}$ .

Перепишем динамику системы:

$$x(t+k|t) = A^k x(t) + \sum_{j=0}^{k-1} A^j B u(t+k-j-1|t), \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.12)$$

Тогда

$$X = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & 0 & \dots & 0 \\ \dots & A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B \end{bmatrix} U, \quad (2.13)$$

или, введя обозначения  $\Omega = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}$  и  $\Gamma = \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & 0 & \dots & 0 \\ \dots & A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & B \end{bmatrix}$

сократим запись  $X = \Omega x(t) + \Gamma U$ .

С помощью (2.13) перепишем (2.11) :

$$J(x(t), U) = \frac{1}{2}x^T(t)Yx(t) + \frac{1}{2}U^THU + x^T(t)FU,$$

где

$$Y = 2(Q + \Omega^T \tilde{Q} \Omega),$$

$$H = 2(\Gamma^T \tilde{Q} \Gamma + \tilde{R}),$$

$$F = 2\Omega^T \tilde{Q} \Gamma.$$

Аналогично, для всех ограничений можно провести такие же преобразования

$$GU \leq W + Ex(t),$$

где

$$G = \text{diag}(C_x, \dots, C_x)\Gamma, \quad W = [d_x, \dots, d_x]^T, \quad E = \text{diag}(C_x, \dots, C_x)\Omega.$$

Тогда, задача (2.8) примет вид

$$\min_U \frac{1}{2}U^THU + x^TFU + \frac{1}{2}x^TYx, \quad (2.14)$$

при условии

$$GU \leq W + Ex(t). \quad (2.15)$$

Применим замену переменных вида

$$z := U + H^{-1}F^Tx,$$

Нетрудно заметить, что  $H^{-1}$  — положительно определенная матрица. Тогда (2.14) примет вид

$$\min_z \frac{1}{2} z^T H z + \frac{1}{2} x^T \tilde{Y} x, \quad (2.16)$$

при условиях

$$\begin{aligned} Gz &\leq W + Sx, \\ \tilde{Y} &:= Y - FH^{-1}F^T, \\ S &:= E + GH^{-1}F^T. \end{aligned}$$

Далее эта задача решается с помощью теории выпуклой оптимизации через условия Каруша-Куна-Такера (ККТ). Так как задача (строго)выпуклая с допустимым множеством с непустой внутренней частью (по предположениям), то условия Слейтера выполняются. Оптимальное решение единственное и характеризуется условиями ККТ.

Явный МРС решает задачу для всех состояний, таким образом все пространство состояний делится на области, где в каждой области для состояния есть явная функция управления.

Алгоритм нахождения явных функций управления:

1. Взять любой  $x_0 \in \mathbb{X}$
2. Решить задачу (2.16) с начальным условием  $x = x_0$
3. Определить активные ограничения для оптимизационной задачи (2.16)
4. Вычислить критическую область по активным ограничениям и вычислить функцию управления для этой области
5. Перейти к новому  $x_0$

Главный недостаток этого метода состоит в том, что количество областей может быть достаточно большим, что в онлайн процедуре может плохо сказываться на производительности. Так как в каждый момент времени нужно будет искать к какому из регионов относится текущее состояние, чтобы определить управление для него.

### 2.3.2 Аппроксимация закона управления

Существует несколько подходов к получению аппроксимативного решения для оптимизации МРС. Для линейных систем в [7] алгоритм обучения представлен дополнительными ограничениями для обеспечения стабильности и ограничения удовлетворения аппроксимационного МРС. Одним



из подходов к аппроксимации МРС является выпуклое многопараметрическое нелинейное программирование [9], где вычисляется субоптимальная аппроксимация закона управления МРС. Другой подход - аппроксимировать МРС с помощью методов машинного обучения. Это делают нейронные сети в [10], [11], [12]. Эти методы не гарантируют устойчивость или удовлетворение ограничениям для аппроксимационного МРС, что особенно важно, если рассматривать жесткие ограничения на состояния. В [8] используется метод опорных векторов (SVM) для аппроксимации МРС. Устойчивость и удовлетворение ограничений могут быть гарантированы для произвольных ошибок малого приближения, основанных на присущих свойствам устойчивости. В [13] аппроксимируется МРС с липшицевым сужающим ограничением, что обеспечивает устойчивость при не исчезающих ошибках аппроксимации. Ошибка аппроксимации, выведенная в [8], [13], обычно не достижима для практического применения.

В [11] находят аппроксимирующий закон управления

$$u^0(t) = \gamma^0(x(t)) \in U,$$

где  $u^0(t)$  - первый вектор последовательности управления, которая минимизирует стоимость

$$J(x(t), u(t)) = \sum_{k=t}^{t+N-1} l(x(k), u(k)) + a\|x(t+N)\|_P^2, \quad t \geq 0.$$

Стоимость формируется из стоимости переходов на горизонте планирования длины  $N$  и терминальной функции. Аппроксимация закона управления происходит с помощью нейронной сети:  $m$  параллельных сетей с одним выходным параметром, состоящий из одного скрытого слоя с  $v_j$  нейронами на скрытом слое для  $j = 1..m$  сети и линейными активационными функциями.

Для каждой функции  $\hat{\gamma}_j^{(v_j)}$  нужно найти количество нейронов  $v_1^*, \dots, v_m^*$ , такое что

$$\min_{w_j} \max_{x_t \in X} |\gamma_j^0(x(t)) - \gamma_j^{(v_j)}(x(t), w_j)| \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{m}}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.17)$$

Процедура нахождения количества нейронов представляется таким образом: для каждого  $j$  увеличиваем  $v_j$ , пока (2.17) не станет верным. Также приводится в статье теорема, в которой утверждается, что для любой функции управления  $\gamma_j^0(x_t)$  число параметров, необходимых для достижения погрешности приближения  $L_2$  или  $L_\infty$  порядка  $O(\frac{1}{v_j})$ , равно  $O(v_j n)$ , которое

растет линейно с размерностью  $n$  вектора состояния.

В работе [13] уже вводятся некоторые гарантии устойчивости метода на основании предположения о непрерывности по Липшицу функции динамики. Система представляется следующим образом:

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), \xi_t), \quad t \geq 0, \quad x_0 = \tilde{x},$$

где  $\xi_t \in \mathbb{R}^r$  - возмущение системы. Номинальная система вводится для дизайна управления таким образом:

$$x(t+1) = \hat{f}(x(t), u(t)) + d_t, \quad t \geq 0, \quad x_0 = \tilde{x},$$

где  $d_t = f(x(t), u(t), \xi_t) - \hat{f}(x(t), u(t))$ . Предполагают непрерывность по Липшицу для функции  $\hat{f}$  относительно  $x$  с константой  $L_{f_x}$ , а также относительно управления  $u$  и предполагают, что существует функция  $K$  класса, такая что

$$|\hat{f}(x(t), u(t)) - \hat{f}(x(t), u'(t))| \leq \eta_u(|u(t) - u'(t)|) \quad \forall x(t) \in X, \quad \forall (u(t), u'(t)) \in U^2.$$

Также вводится предположение об ограниченности возмущения и то, что верно  $|d_t| \leq \mu(|\xi_t|)$   $t \geq 0$ , а также  $d_t \in D = B^m(\bar{d})$ ,  $\bar{d} \in \mathbb{R}_{\geq 0} < \infty$ . Предполагается, что для системы существует управление  $k(x(t)) \in U$ , которое является стабилизирующим относительно состояния.

Накладываются дополнительные ограничения на погрешности относительно состояния  $q_t \in Q = B^m(\bar{q})$  и управления  $v_t \in V = B^m(\bar{v})$ , где погрешность аппроксимации состояния  $q_t = \xi_t - x(t)$  и управления  $v_t = k^*(x_t) - k^*(\xi_t)$ . Тогда система уже переписывается в таком виде:

$$x(t+1) = \hat{f}(x(t), k(x(t) + q_t) + v_t) + w_t, \quad x_0 = \tilde{x}, \quad t \geq 0.$$

И устойчивость системы доказывается, если верно следующее, что погрешности аппроксимации состояния и управления совместно с возмущением ограничены изначальным возмущением системы  $\bar{d}_q + \bar{d}_v + \bar{d}_w \leq \bar{d}$ . В данной статье рассматривались аппроксимации закона управления с помощью нейронной сети, которая показала довольно хорошие результаты.

В работе с использованием результатов [20] исследуются условия, при которых, несмотря на ошибки аппроксимации, гарантируется выполнение ограничений и асимптотическая устойчивость замкнутой системы. На основе этого источника будет продолжаться исследование аппроксимации закона управления с помощью нейронной сети и результаты будут продемонстрированы в главе 3.

### 2.3.3 Аппроксимация динамики системы с прогнозирующей моделью

Существует методы для аппроксимации динамики системы, в работе [14] был предложен доказуемо безопасный и робастный метод управления, основанный на обучении для систем с прогнозирующей моделью, который называется LBMPC. LBMPC изучает динамику системы по предоставленным точкам, также имеется возможность обновления динамики системы с помощью новых измерений, обеспечивает при этом безопасность и устойчивость, используя теорию из робастного MPC, чтобы проверить, примененное управление сохраняет ли номинальную модель устойчивой, когда она подвержена неопределенности.

Динамика системы представляется в таком виде:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + g(x(t), u(t))$$

где  $g(x(t), u(t))$  описывает несмоделированную динамику, которая по предположению ограничена и лежит в политопе  $W$ .

Данный метод вводит дополнительную систему, которая обучается на данных и имеет такой вид:

$$\tilde{x}(t+1) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) + O_n(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$$

где  $O_n$  - зависящая от времени функция, которая обучается с помощью любого из статистических методов.

Вся теория устойчивости строится на том, что наша система представляется в виде робастного MPC с обученной динамикой на известных вычисленных точках, и может адаптироваться к новым полученным точкам, чтобы улучшать точность обученной динамики системы.

Задача формулируется в таком виде:

$$V_n(x()) = \min_{c, \theta} \phi_n(\theta, \tilde{x}(t), \dots, \tilde{x}(t+N), \tilde{u}(t), \dots, \tilde{u}(t+N-1))$$

при условиях

$$\tilde{x}(t) = x_t, \quad \bar{x}(t) = x_t,$$

$$\tilde{x}(t+i+1) = A\tilde{x}(t+i) + B\tilde{u}(t+i) + O_n(\tilde{x}(t+i), \tilde{u}(t+i)),$$

$$\bar{x}(t+i+1) = A\bar{x}(t+i) + B\tilde{u}(t+i),$$

$$\tilde{u}(t+i) = K\bar{x}(t+i) + c_{n+i},$$

$$\bar{x}(t+i+1) \in X \ominus R_i, \quad \tilde{u}(t+i) \in U \ominus KR_i,$$

$$(\bar{x}(t + N) \in \Omega \ominus (R_N \times \{0\})),$$

где  $\Omega$  - допустимое инвариантное робастное множество таких точек, что любая траектория системы с начальным условием, выбранным из этого множества и с управлением  $u(t)$ , остается в множестве для любой последовательности ограниченного возмущения, удовлетворяя ограничениям на состояние и управление.

Моделируется точка устойчивого состояния  $\bar{x}_s = \Lambda\theta$  и управления  $\bar{u}_s = \Psi\theta$ , где  $\theta \in \mathbb{R}^m$  и  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\Psi \in \mathbb{R}^{m \times m}$  - параметры моделирования, параметры будут описывать точку равновесия для системы, если  $A + BK$  устойчива по Шуру при управлении

$$\bar{u}(t) = K(\bar{x}(t) - \bar{x}_s) + \bar{u}_s = K\bar{x}(t) + (\Psi - K\Lambda)\theta.$$

Множества  $R_0 = \{0\}$  и  $R_i = \bigoplus_{j=0}^{i-1} (A + BK)^j W$  необходимы для робастного МРС, они представляют собой сужающиеся ограничения. И тогда с помощью данного неравенства формулируется удовлетворение ограничений:

$$\Omega \subseteq \{(\bar{x}, \theta) : \bar{x} \in X; \Lambda\theta \in X; K\bar{x} + (\Psi - K\Lambda)\theta \in U; \Psi\theta \in U\}.$$

А с помощью данного неравенства инвариантность возмущения:

$$\begin{bmatrix} A + BK & B(\Psi - K\Lambda) \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix} \Omega \oplus (W \times \{0\}) \subseteq \Omega.$$

Устойчивость данного метода основана на робастном МРС. Были получены хорошие результаты относительно предсказанных траекторий и быстрой сходимости к точке устойчивого состояния, однако по производительности уступало нелинейному МРС с нейросетевыми регуляторами.

### 2.3.4 Итерационный подход

Существует итерационный подход для построения МРС регулятора [15]. Данный метод используется для повторяющихся задач, где эталонная траектория неизвестна. Например, системы для гоночных и раллийных машин, где среда и динамика сложны и не совсем известны. Регулятор имеет справочную информацию и способен улучшать свою эффективность, изучая предыдущие итерации. Для обеспечения рекурсивной выполнимости и неубывающей эффективности на каждой итерации используются безопасное терминальное множество и терминальная функция стоимости. Построение данного регулятора обеспечивает тот факт, что функция стоимости убывает с каждой

итерацией, также из удовлетворения ограничений на  $j - 1$  итерации следует удовлетворение ограничений на  $j$  итерации и точка равновесия замкнутой системы асимптотически устойчива. Оптимальность траекторий построенных этим регулятором доказывается для выпуклых задач.

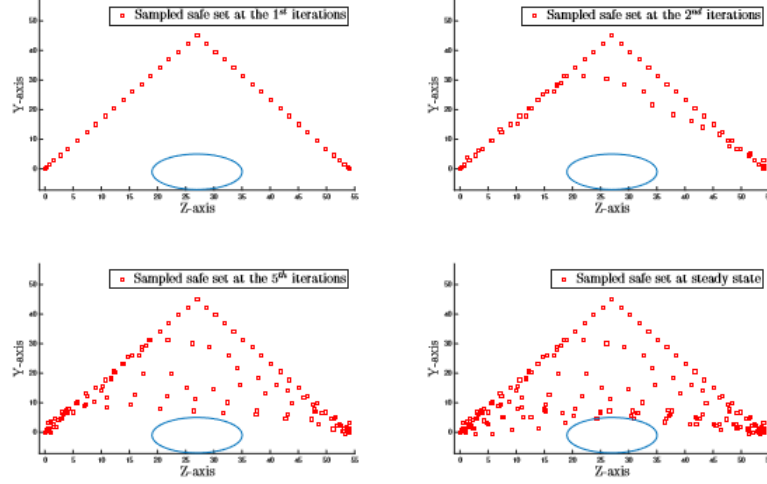


Рис. 2.3: Построение сэмплированного безопасного множества.

Управляемое на  $N$  шагов вперед множество по отношению к  $S$

$$K_j(S) = Pre(K_{j-1}(S)) \cap X, \quad K_0(S) = S, j \in \{1, \dots, N\}, \quad (2.18)$$

где  $Pre(S) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in U s.t. f(x, u) \in S\}$ .

Сэмплированное безопасное множество на итерации  $j$

$$SS^j = \{\cup_{i \in M^j} \cup_{t=0}^{\infty} x^i(t)\},$$

где  $M^j = \{k \in [0, j] : \lim_{t \rightarrow \infty} x^k(t) = x_F\}$ .

$SS^j$  — это множество всех траекторий на итерации  $i$  для  $i \in M^j$ . Как выглядит это множество показано на рисунке 2.3.

Стоимость на сэмплированном безопасном множестве вводится таким образом, чтобы мы штрафovali те состояния, которые не находятся в нашем построенном безопасном множестве на предыдущих итерациях

$$Q^j(x) = \begin{cases} \min_{(i,t) \in F^j(x)} J_{t \rightarrow \infty}^i, & x(t) \in SS^j \\ +\infty, & x \notin SS^j \end{cases},$$

где  $\forall x(t) \in SS_j, Q_j(x) = J_{t^* \rightarrow \infty}^{i^*}(x(t)) = \sum_{k=t^*}^{\infty} l(x^{i^*}(k), u^{i^*}(k))$ .

$$J_{t \rightarrow t+N}(x_t^j) = \min_{u_{t|t}, \dots, u_{t+N-1|t}} \left[ \sum_{k=t}^{t+N-1} l(x(k|t), u(k|t)) + Q^{j-1}(x(t+N|t)) \right],$$

при условии

$$x(k+1|t) = f(x(k|t), u(k|t)) \quad \forall k \in [t, \dots, t+N-1],$$

$$x(k|t) \in X, \quad u(k|t) \in U, \quad \forall k \in [t, \dots, t+N-1],$$

$$x(t+N|t) \in SS^{j-1},$$

$$x(t|t) = x^j(t).$$

Данный метод обладает рекурсивной выполнимостью, устойчивостью и сходимостью. Но предлагаемый подход является дорогостоящим с точки зрения вычисления даже для линейной системы, поскольку регулятор должен решать задачу смешанного целочисленного программирования в каждый момент времени. Есть улучшения данного подхода с использованием параллельных вычислений, а также попытки сделать терминальные ограничения более выпуклыми.

## 2.4 Выводы

Существует ряд подходов для вынесения вычислений оффлайн для систем с прогнозирующей моделью. Каждый метод используется для своего типа задач. Для линейных задач с небольшим количеством областей подходит явный МРС. Для задач с нелинейной динамикой будет более эффективным метод аппроксимации закона управления. Для задач с неизвестной динамикой, представленной в виде набора точек, лучше использовать аппроксимация динамики системы. Для задач с неизвестной динамикой или изменяющей средой подходят итеративные методы управления МРС.

В данной магистерской диссертации мы хотели вынести вычисления оффлайн для нелинейных систем, поэтому более эффективное направление — использование аппроксимации закона управления. Для этого будут использоваться нейронные сети, как универсальный аппроксиматор непрерывных функций. А также будет применяться обучение с подкреплением для систем с неизвестной динамикой.

## ГЛАВА 3

### ПОСТРОЕНИЕ НЕЙРОСЕТЕВОГО РЕГУЛЯТОРА

В данной магистерской диссертации рассматривается возможность вынесения вычисления оффлайн для нелинейных систем с прогнозирующей моделью. Как было показано в предыдущей главе более эффективное направление для этого типа задач является использование аппроксимации закона управления. Для этого будут использоваться нейронные сети, как универсальный аппроксиматор непрерывных функций.

В этой главе будут описаны эксперименты и результаты использования нейросетевых регуляторов, а также построение областей с помощью метода опорных векторов и будет проведено сравнение производительности для обычной процедуры МРС и нейросетевых регуляторов. Для моделей с неизвестной динамикой будет использовано обучение с подкреплением.

#### 3.1 Описание иллюстративного примера

Рассмотрим нелинейную дискретную динамическую систему

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), \quad (3.1)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  - вектор состояний,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  - вектор управления и  $f(0, 0) = 0$ . Мы рассматриваем ограничения вида

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n | Hx \leq 1_p\}, \quad U = \{u \in \mathbb{R}^m | Lu \leq 1_q\} \quad (3.2)$$

Также необходимо, чтобы выполнялось ограничение

$$x(t), u(t) \in X \times U \quad \forall t \geq 0. \quad (3.3)$$

Будем оптимизировать функцию стоимости

$$\min_{u(\cdot|t)} \sum_{k=0}^{N-1} l(x, u) + V_f(X(N)). \quad (3.4)$$

Исследования будут проводиться на примере из [10].

Нелинейная система в дискретном виде представляет собой

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t+1) &= -x_2(t) + 0.5(1+x_1(t))u(t) \\ \dot{x}_2(t+1) &= x_1(t) + 0.5(1-4x_2(t))u(t)\end{aligned}\tag{3.5}$$

с ограничениями

$$x \in X = \{-2 \leq x_1 \leq 0.5, -1 \leq x_2 \leq 2\}\tag{3.6}$$

$$u \in U = \{-1 \leq u \leq 1\}\tag{3.7}$$

Шаг дискретизации  $\delta = 0.1$ . Данная система имеет стабилизируемое первое приближение в начале координат, которое имеет вид

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -0.05 \\ 0.05 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.025 \\ 0.025 \end{bmatrix}.$$

Линейный локальный закон управления для терминального множества представляет собой  $k_f(x(t)) = Kx(t) = [0.3799, -0.4201]x(t)$ .

Параметры для терминального множества и функции посчитаны с помощью алгоритмов квази-бесконечного МРС из первой главы. Для данной системы функция качества имеет вид

$$V(x(t)) = \min_{u(\cdot|t)} \sum_{k=0}^{N-1} (||u(k|t)||^2 + 0.1||x(k|t)||^2) + V_f(x(t))\tag{3.8}$$

где

$$V_f(x(t)) = x(t)^T P x(t) = x(t)^T \begin{bmatrix} 48.3043 & -2.53 \\ -2.53 & 70.8191 \end{bmatrix} x(t).$$

Терминальное множество задается в виде эллипсоида

$$X_f = \{x \in \mathbb{R}^n | x(t)^T P x \leq \alpha\},$$

где  $\alpha = 0.2129$ . Таким образом, для системы определены все дизайн параметры для проведения процедуры МРС алгоритма.



## 3.2 Подход к решению

Алгоритм МРС для стабилизации положения равновесия  $x = 0$  системы (3.1) состоит в следующем: Для каждого  $t = 0, 1, \dots$

1. измерить состояние  $x(t) \in X$  системы (1);
2. решить задачу (3) с начальным условием  $x(0|t) = x(t)$ , получить  $u^0(\cdot|t)$ ;
3. подать на вход системы (1) управляющее воздействие  $u_{MPC}(x(t)) := u^0(0|t)$ .

При выполнении ряда требований к функциям  $l$ ,  $V_f$  и множеству  $X_f$  замкнутая система

$$x(t+1) = f(x(t), u_{MPC}(x(t))), \quad t = 0, 1, \dots,$$

асимптотически устойчива с областью притяжения

$$X_0 = \{x_0 : V(x_0) < +\infty\} \subseteq X,$$

состоящей из всех точек  $x_0 \in X$ , для которых задача  $\mathcal{P}(x_0)$  имеет решение [1, 2]. В первой главе приводится простой способ построения квадратичных функций  $l$ ,  $V_f$  и эллипсоида  $X_f$ , удовлетворяющих упомянутым условиям.

Мы будем рассматривать систему (3.5) в контексте робастного МРС, так как аппроксимационная ошибка управления представляет собой отклонение для функции управления, а это и есть частный случай робастного МРС.

В работе с использованием результатов [20] исследуются условия, при которых, несмотря на ошибки аппроксимации, гарантируется выполнение ограничений и асимптотическая устойчивость замкнутой системы. При выполнении следующих предположений для динамики  $x(t+1) = f(x(t), u(t)) + d$ , где  $d$  — допустимое отклонение для управления, можно гарантировать выше перечисленное:

1. Локальная инкрементируемая стабилизуемость. Существует такая обратная связь  $k : X \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\delta$ -функция Ляпунова  $V_\delta : X \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , которая непрерывна по первому аргументу и удовлетворяет  $V_\delta(x, x, v) = 0 \quad \forall x \in X, \forall v \in U$  и параметры  $c_{\delta, l}$ ,  $c_{\delta, u}$ ,  $\delta_{loc}$ ,  $k_{max} \in \mathbb{R} > 0$ ,  $\rho \in (0, 1)$ , такие что следующие неравенства выполняются для  $\forall (x, z, v) \in X \times X \times U$ ,  $(z+, v+) \in X \times U$  с  $V_\delta(x, z, v) \leq \delta_{loc}$ :

$$c_{\delta, l} \|x - z\|^2 \leq V_\delta(x, z, v) \leq c_{\delta, u},$$

$$\|k(x, z, v) - v\| \geq k_{max} \|x - z\|,$$

$$V_\delta(x^+, z^+, v^+) \geq \rho V_\delta(x, z, v)$$

для динамики  $x^+ = f(x, k(x, z, v))$ ,  $z^+ = f(z, v)$ .

2. Локальная непрерывность по Липшицу. Существует  $\lambda \in \mathbb{R}$ , такая что при  $\forall x \in X$ ,  $\forall u \in U$ ,  $\forall u + d \in U$  будет

$$\|f(x, u + d) - f(x, u)\| \leq \lambda \|d\|_\infty.$$

3. Ограничение на отклонение функции управления должен удовлетворять  $\eta \leq \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\delta_{loc}}{c_{\delta, u}}}$ .

Для выполнения ограничений используются сужение ограничение в виде увеличивающейся трубки ограничений: чем ближе к началу координат, тем более увеличивающеесяся трубка для ограничений. Поэтому мы заменяем ограничения (3.2) на суженные вида:

$$\bar{X}_k = (1 - \epsilon_k)X = \{x \in \mathbb{R}^n : Hx \leq (1 - \epsilon_k)1_p\},$$

$$\bar{U}_k = (1 - \epsilon_k)U = \{u \in \mathbb{R}^m : Lu \leq (1 - \epsilon_k)1_q\}.$$

где

$$\epsilon_k = \epsilon \left( \frac{1 - \sqrt{\rho}^k}{1 - \sqrt{\rho}} \right), \quad k \in \{0, 1, \dots, N\}, \quad \epsilon = \eta \lambda \sqrt{\frac{c_{\delta, u}}{c_{\delta, l}}} \max\{\|H\|_\infty, \|L\|_\infty k_{max}\}.$$

Как отмечено выше, шаг 2 приведенного алгоритма может оказаться достаточно трудоемким. В связи с этим в настоящей работе предлагается вместо онлайн решения прогнозирующей задачи численными методами оптимального управления использовать до начала процесса управления ряд методов машинного обучения, которые на основе обучающей выборки  $(x, u_{MPC}(x)) \in X \times U$  будут строить приближенные значения  $\bar{u}_{MPC}(x(t))$  обратной связи  $u_{MPC}(x)$ ,  $x \in X$ , для текущих состояний  $x(t)$ .

В настоящей работе применяются метод опорных векторов (Support Vector Machine, SVM) и нейронные сети. Метод опорных векторов с радиальной базисной функции Гаусса [8] используется, во-первых, для выделения и аппроксимации области притяжения  $X_0$  системы (3.1). Это позволяет эффективно обрабатывать текущие состояния динамической системы и не допускать выход за пределы области притяжения при управлении с помощью приближенных обратных связей. Во-вторых, метод опорных векторов применяется для многоклассовой классификации с целью выделения областей насыщения управления. Наконец, в областях, в которых обратная связь

$u_{MPC}$  принимает промежуточные значения, она аппроксимируется с использованием нейронной сети.

Обучение нейронной сети и классификация на основе SVM дает приближенное управления типа обратной связи  $\bar{u}_{MPC}(x)$ ,  $x \in X_0$ . Система, замкнутая обратной связью  $\bar{u}_{MPC}(x)$ ,  $x \in X_0$ , имеет вид

$$x(t+1) = f(x(t), \bar{u}_{MPC}(x(t))), \quad t = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Будет проводится сравнение приближенных законов управления, обученных на равномерной сетке, на сетке, полученной на основе равномерно распределенных последовательностей, и на случайной сетке с увеличением объема обучающей выборки в окрестности положения равновесия.

### 3.3 Базовая реализация нейросетевого регулятора

После проведения стандартной процедуры MPC для системы (3.5), описанной в главе 1 получилась следующая траектория для системы, представленная на рисунке 3.1, полученная обратная связь  $\bar{u}(t)$  представлена на рисунке 3.2. Горизонт планирования был взят  $N = 30$ , т.е. мы планируем и высчитываем управления и состояния на 30 шагов вперед.

Базовый вариант включает себя создание нейронной сети для аппроксимации обратной связи  $\bar{u}(t)$  для данной системы.

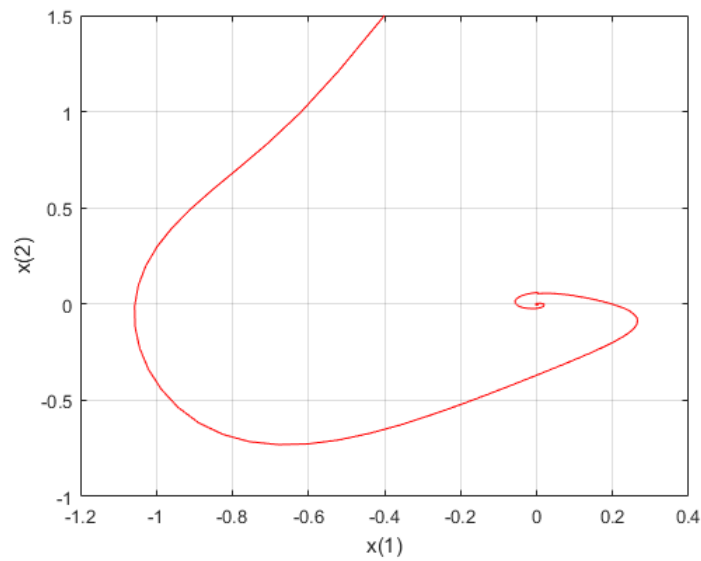


Рис. 3.1: Полученная траектория для системы (3.5) по стандартной процедуре MPC.

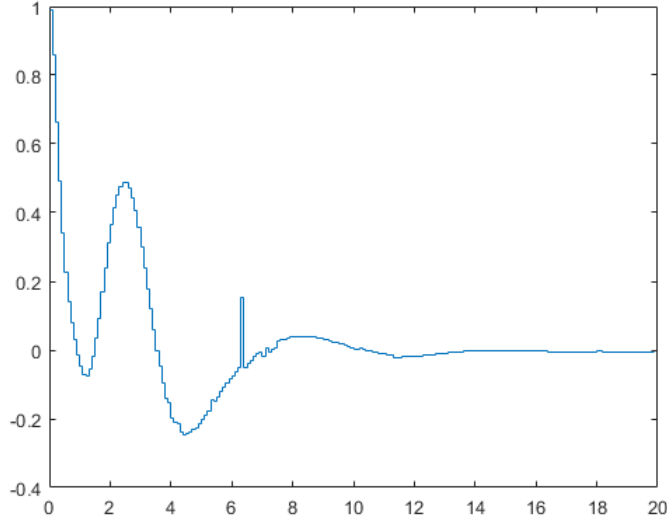


Рис. 3.2: Полученная обратная связь для системы (3.5) по стандартной процедуре МРС.

Для построения аппроксимации обратной связи будет вычисляться обратная связь для состояний из равномерной сетки всех допустимых состояний из множества (3.6) с шагом 0.05. Для этих точек будет построено управление с помощью стандартной процедуры МРС и будет запоминаться только первое управление для этого состояния. На рисунке 3.3 показано векторное поле сетки с шагом 0.1, в котором видно как происходит переход из одного состояния в другое, используя полученные обратные связи. На рисунке видно, что для большинства точек следующее состояние находится в пределах допустимых значений, однако если взять некоторые точки где следующее состояние выходит за рамки нашего обучения, то мы можем получить нестабильное решение.

Далее если посмотреть на рисунок 3.4, то можно увидеть множество одинаковых управлений для состояний. Однако важно отметить, что сетка значений около начала координат должна быть достаточно детальной, чтобы не попасть в нестабильное положение управления.

В работе [11] использовался итеративный процесс для поиска оптимального количества нейронов для скрытого слоя: выбирается начальное значение количества нейронов, затем строится сеть, которая аппроксимирует функцию и далее для каждого состояния сетки вычисляется значение аппроксимированной обратной связи и обратной связи, полученной из стандартной процедуры МРС, если

$$\|\bar{u}(t) - u^*(t)\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{m}},$$

где  $m$  — размерности вектора управления. Для достижения точности  $5 \cdot 10^{-3}$

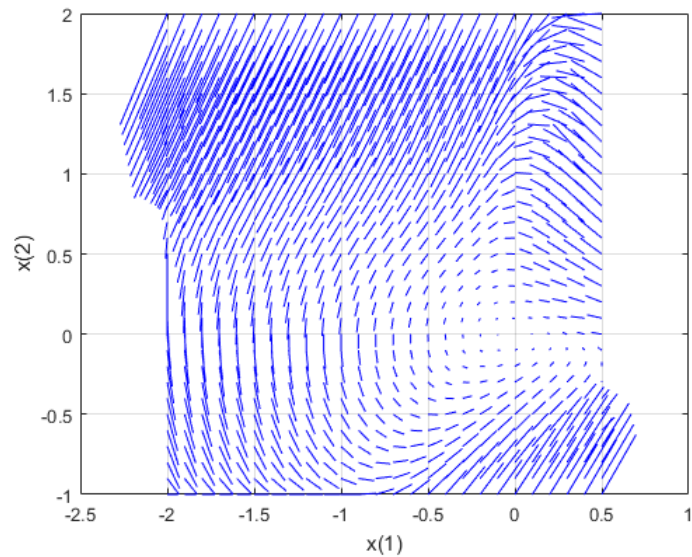


Рис. 3.3: Векторное поле для сетки с шагом 0.1.

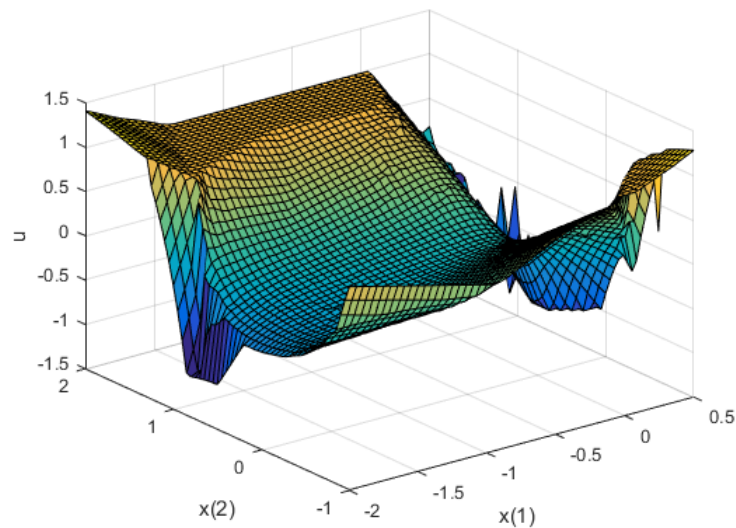


Рис. 3.4: Вычисленное управление для сетки значений состояний для обучения нейронной сети

понадобилось 25 нейронов, в таблице 3.1 представлена зависимость точности от количества нейронов на скрытом слое.

На рисунке 3.5 представлены траектории для задачи (3.5), полученные при помощи стандартной процедуры МРС и при помощи построенного нейросетевого регулятора. Как видно из рисунка, получились достаточно близкие траектории и они сошли к началу координат.

Для этого подхода необходимо вычислить значения управления в каждой точке сетки состояний для допустимых значений состояний. Далее обучается сеть на этих значениях, как задача обучения с учителем. Основные недостатки данного подхода:

Таблица 3.1: Таблица зависимости точности аппроксимации от количества нейронов на скрытом слое

Количество нейронов	Ошибка аппроксимации
5	0.021
8	0.0092
10	0.008
15	0.0075
20	0.0063
25	0.0049

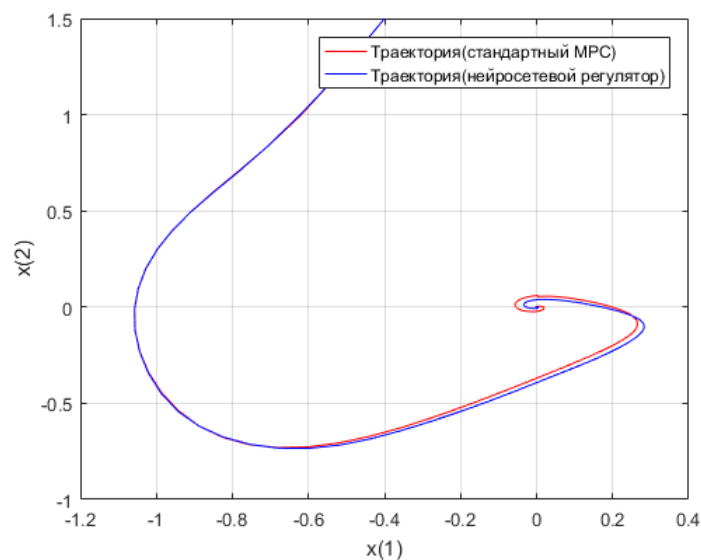


Рис. 3.5: Траектории, полученные при помощи стандартной процедуры МРС и нейросетевого регулятора

- Необходимо брать достаточно много точек для хорошей аппроксимации, хотя иногда некоторые области имеют одинаковые значения и для них не надо вычислять заново управление,
- Обучение и валидация проходят достаточно долго

Предполагаемые улучшения для этого подхода:

- Уменьшить кол-во генерируемых точек для гарантирования аппроксимации, рассмотреть генерирование точек с помощью стохастического подхода и стохастического с увеличением плотности точек у начала координат,
- Вычислить  $X_0$  — область притяжения, множество состояний из которых, можно достигнуть начало координат,

- Вычислить множество точек, для которых применяется насыщенное управление, для ускорения поиска управления в этих областях,
- Рассмотреть возможность использования обучение без учителя и обучение с подкреплением для построения множества допустимых значений и закона управления

### 3.4 Построение области притяжения с помощью SVM

При построении базового регулятора было замечено, что внутри области допустимых значений состояний есть область притяжения, множество точек, из которых можно достигнуть начало координат, и области, в которых могут быть нестабильные решения. Предлагается аппроксимировать область притяжения и только по точкам из области притяжения строить приближение для обратной связи.

Было сгенерировано 2000 точек внутри области (3.6) допустимых значений состояний с использованием квази-случайного метода построения с помощью множеств Хальтона. Для всех этих точек определяем возможность достижения из данного состояния точки начала координат. Помечаем состояние, из которого достижимо начало координат, с помощью пометки 1, а нестабильное состояние как  $-1$ . Далее применяем метод SVM для аппроксимации области притяжения. В качестве функции ядра для метода SVM применяет радиальная функция Гаусса.

После применения SVM для аппроксимации области притяжения, предсказанные пометки для точек из области достижимых значений представлены на рисунке 3.6. Также на рисунке отмечены опорные вектора, которые определяют область стабильных состояний.

Для определения областей с насыщенными управлениями также воспользуемся методом SVM. Метод SVM хорошая работает для разграничения двух классов, а в нашей задачи у нас будет 3 класса, поэтому будем создавать две отдельные модели для аппроксимации областей: первую модель для определения области с управлением  $u(t) = 1$  и вторую модель для определения области с управлением  $u(t) = -1$ . Для каждой модели мы помечаем те состояние, которые соответствует насыщенному управлению, как 16 остальные состояния как  $-1$ . Однако в нашем случае мы будем использовать, как и описывалось ранее суживающиеся ограничения, поэтому вместо насыщенных равных граничным значениям, будем определять с зазором в  $\epsilon$ ,

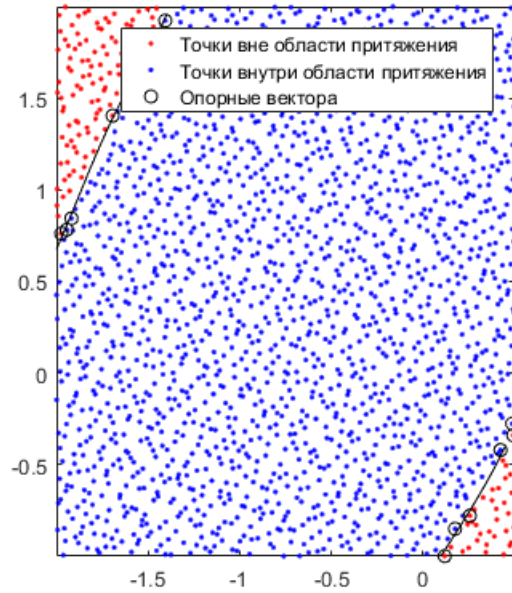


Рис. 3.6: Аппроксимированная область притяжения для задачи (3.5).

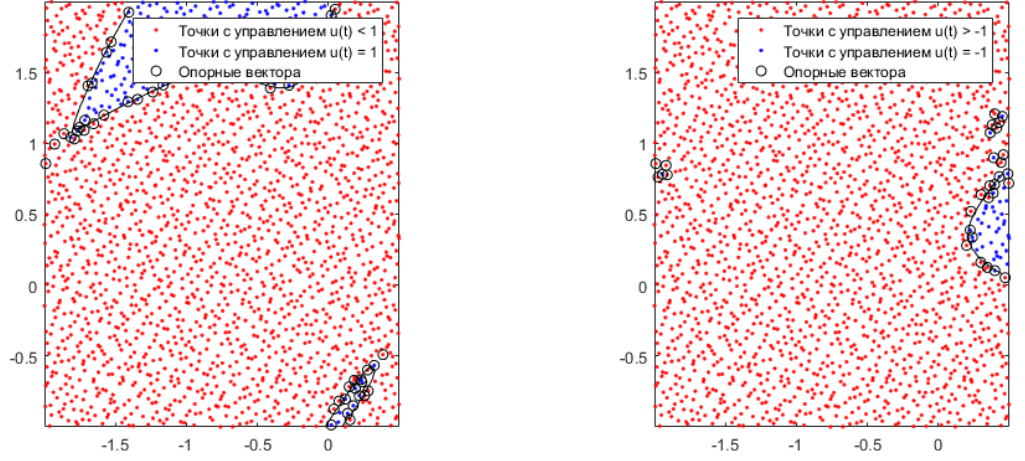
т.е. пометим все состояния из которых будет управление  $u(t) \geq 1 - \epsilon$  либо  $u(t) \leq -1 + \epsilon$ . Далее обучаем модели с помощью SVM с радиальной ядерной функцией Гаусса.

На рисунке 3.7 представлены области состояний, для которых необходимо применять насыщенные управления. Данные области помогут ускорить онлайн процедуру, так как теперь не нужно будет вычислять даже с помощью нейросетевого регулятора обратную связь для данных состояний, нужно будет только применять соответствующее насыщенное управление и не контролировать выход аппроксимированного управления за границы допустимых значений.

### 3.5 Сравнение методов сэмплирования точек для построения аппроксимирования обратной связи

В базовой реализации используется равномерная сетка для построения множества точек для аппроксимирования обратной связи. Однако для равномерной сетки нужно вычислить много точек, но не все они одинаково важны для построения обратной связи. Поэтому предлагается проверить сэмплирование точки стохастически и стохастически с увеличением плотности точек вокруг точки начала координат, так как вокруг точки начала координат, достаточно маленькие управления и аппроксимационный закон в этой зоне мо-





(a) Аппроксимированная область применения  $u(t) = 1$  для задачи (3.5).

(b) Аппроксимированная область применения  $u(t) = -1$  для задачи (3.5).

Рис. 3.7: Аппроксимированные области с насыщенным управлением.

жет вести не совсем хорошо. На равномерной сетке было взято 3000 точек, поэтому исследовать другие способы сэмпирования на этом же количестве точек.

На рисунке 3.8 представлены сэмпированные точки при стохастическом выборе 3000 точек для области (3.6) внутри области притяжения.

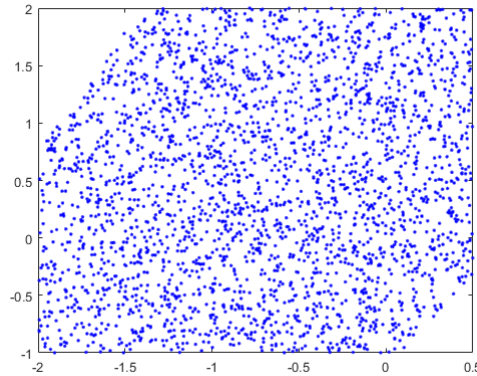


Рис. 3.8: Сэмпированные точки стохастически

На рисунке 3.9 представлены сэмпированные точки при стохастическом выборе 2600 точек для области (3.6) и 400 точек сэмпированных из области округ начала координат  $X_{zero} = \{(x_1, x_2) : \|x_1\| \leq 0.2, \|x_2\| \leq 0.2\}$  внутри области притяжения.

Ошибка аппроксимации для этих двух способов для выбранного количества нейронов на скрытом слое  $n = 25$  представлена в таблице 3.2.

Как видно из таблицы 3.2 при способе сэмпирования стохастически с увеличенной плотностью вокруг точки начала координат мы получаем выше

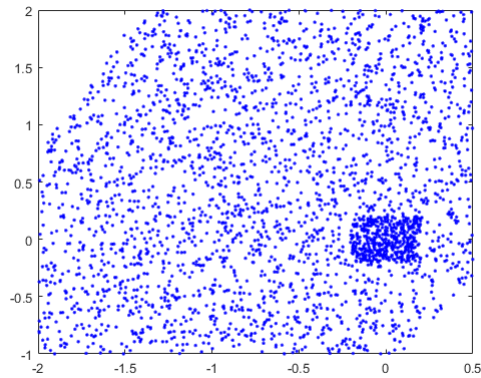


Рис. 3.9: Сэмплированные точки стохастически с увеличенной плотностью около нуля

Таблица 3.2: Таблица зависимости точности аппроксимации от типа сэмплирования

Тип сэмплирования	Ошибка аппроксимации
Равномерная сетка	0.0051
Стохастически сэмплированные точки	0.0062
Стохастически сэмплированные точки и увеличенная плотность точек около начала координат	0.0039

точность, чем при равномерной сетке и просто стохастическом способе.

Так как нам необходимо получить точность  $5 \cdot 10^{-3}$ , то можно уменьшить количество генерируемых точек. В таблице 3.3 представлены результаты аппроксимации для разного количества точек. Для получения заданной точности, мы можем генерировать 2500 точек, а это значит можно сократить количество точек на 17%.

Таблица 3.3: Таблица зависимости точности аппроксимации от количества точек при сэмплировании стохастически и увеличенной плотности точек вокруг начала координат

Количество точек	Ошибка аппроксимации
3000	0.0039
2800	0.0044
2600	0.0047
2500	0.0049

### 3.6 Сравнение результатов производительности

Результаты производительности будут сравниваться для онлайн процедуры и построения и обучения оффлайн частей для решения задачи (3.5).

В таблице 3.4 представлены значения времени в среднем для проведения одного шага алгоритма МРС онлайн. Для вычисления среднего значения времени было проведено 1000 процедур вычисления первого шага процедуры МРС из различных начальных точек при помощи вышепредставленных методов.

Таблица 3.4: Таблица зависимости времени проведения одного шага МРС от использованного метода

Использованный метод	Время работы(мс)
Стандартная процедура МРС	1240
Нейросетевой регулятор	55
Нейросетевой регулятор с областями насыщенных управлений	52

Как видно из таблицы последний метод незначительно выиграл у просто нейросетевого регулятора, однако по сравнению со стандартной процедурой было уменьшено время на один шаг МРС очень значительно, и составило уменьшение времени в 23 раза.

В предыдущем пункте было рассмотрено проведение обучения на меньшем количестве точек за счет сэмплирования стохастически и увеличения плотности сэмплированных точек вокруг точки начала координат. Данный метод уменьшил время для обучения на 17%.

Однако стоит отметить, что несмотря на улучшения в уменьшении времени проведения одного шага теряется оптимальность траектории. Оптимальной траекторией считается в данном случае, траектория вычисленная при помощи стандартной процедуры МРС. Было подсчитано, что расхождения траекторий для 1000 запусков из различных точек относительно оптимальных траекторий составили не более 16%. Однако эта потеря несущественна, так как главное, чтобы с помощью этого контроллера мы могли стабилизировать нашу систему и не выходили за рамки ограничений. Выигрыш по времени выполнения помогает быстро управлять системой и может быть использован в ряде производственных задач.

### 3.7 Использование метода для задачи стабилизации обратного маятника

Рассмотрим задачу стабилизации обратного маятника. Система линейна и представляется в таком виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I+ml^2)b}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{m^2gl^2}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{mgl(M+m)}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I+ml^2}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 \\ \frac{ml}{I(M+m)+Mml^2} \end{bmatrix} u, \quad (3.9)$$

где параметры системы задаются таким образом:

$$M = 0.5, \quad m = 0.2, \quad b = 0.1, \quad I = 0.006, \quad g = 9.8, \quad l = 0.3,$$

$$q = (M + m) \cdot (I + m \cdot l^2) - (m \cdot l)^2.$$

Ограничения накладываются только на угол  $|\phi| \leq \frac{\pi}{3}$  и на управление  $|u| \leq 200$ .

Необходимо определить терминальные элементы для формулирования задачи в рамках квазибесконечного МРС. Линейная обратная связь в терминальной области представляет собой:

$$u_{loc}(t) = Kx(t) = [10.0000, 15.8365, -79.1980, -18.5048]x(t).$$

Терминальная функция — квадратичная функция вида  $x(t)^T Px(t)$ , где

$$P = \begin{bmatrix} 1.5979 & 0.7505 & -1.8801 & -0.3226 \\ 0.7505 & 0.9811 & -2.6173 & -0.4276 \\ -1.8801 & -2.6173 & 9.2988 & 1.2221 \\ -0.3226 & -0.4276 & 1.2221 & 0.2119 \end{bmatrix}.$$

Будем использовать также как и в предыдущей задаче точность аппроксимации  $\eta = 5 \cdot 10^{-3}$ .

Для построения датасета и дальнейшего анализа будем рассматривать

следующую сетку значений состояний:

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Используя равномерную сетку значений с шагом 0.1 мы получим 705600 точек. Используя стохастическое сэмплирование, создадим датасет, состоящий из 585000 точек. 50000 точек будем сэмплировать из множества

$$\{i \in 0, 1, 2, 3 \mid |x(t, i)| \leq 0.2\}$$

, это множество будет окрестностью нуля в которой мы хотим увеличить плотность точек для более точной аппроксимации. Оставшиеся точки будем сэмплировать из 3.10.

На этих двух датасетах мы должны обучить нейронную сеть для аппроксимации закона управления с точностью  $\eta = 5 \cdot 10^{-3}$ . Для достижения этой точности нам понадобилось 40 нейронов на скрытом слое как для равномерной сетке, так и для стохастического сэмплирования, в таблице (3.5) показаны значения ошибки в зависимости от количества нейронов на скрытом слое для двух сэмплированных датасетов.

Таблица 3.5: Таблица зависимости точности аппроксимации от количества нейронов на скрытом слое

Количество нейронов	Ошибка аппроксимации (равномерная сетка)	Ошибка аппроксимации (стохастическое сэмплирование)
5	1.5362	1.2145
10	0.2873	0.2712
15	0.1267	0.0934
20	0.0544	0.0511
25	0.0219	0.013
30	0.0081	0.0078
40	0.0049	0.0047

Область притяжения имеет вид, представленный на рисунке 3.10. Насыщенных управлений в данном датасете нет, поэтому области насыщенных управлений для этой задачи строить не будем.

Результат построенного нейросетевого регулятора представлен на рисун-

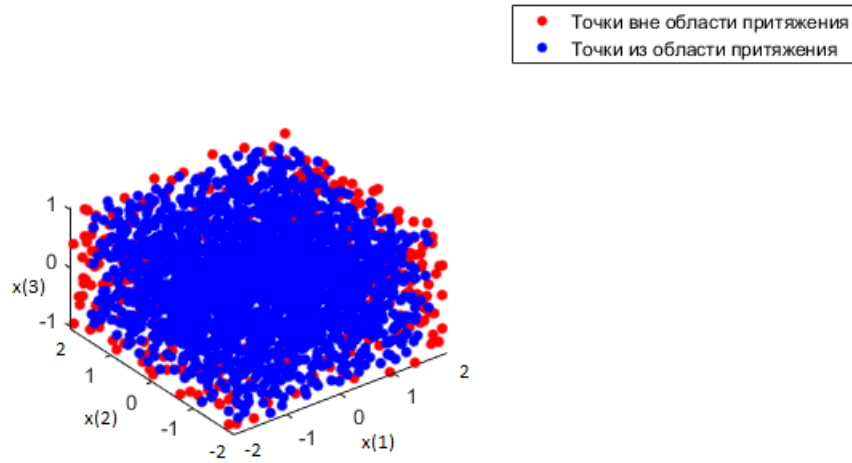
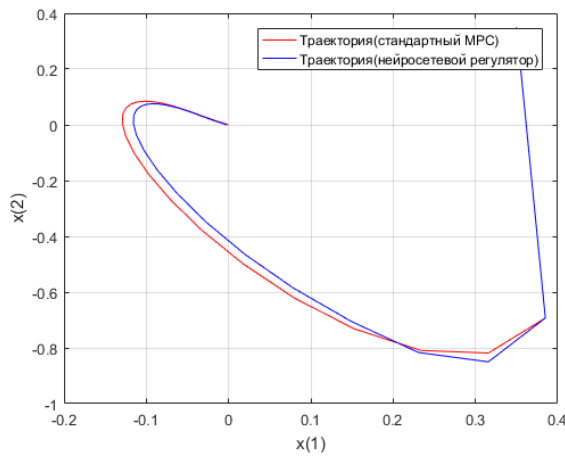
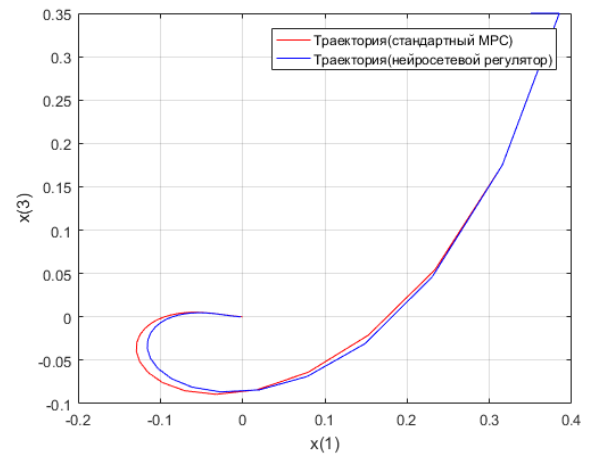


Рис. 3.10: Область притяжения для задачи (3.9)

ке 3.11. На рисунке показывается траектория МРС и нейросетевого регулятора, начиная из точки  $x(t) = [0.35, 0.35, 0.35, 0.35]$ .



(а) Траектория для обратного маятника на срезе для координат  $x_1$  и  $x_2$



(б) Траектория для обратного маятника на срезе для координат  $x_1$  и  $x_3$

Рис. 3.11: Срезы траектории для стабилизации обратного маятника (3.9)

В таблице 3.4 представлены значения времени в среднем для проведения одного шага алгоритма МРС онлайн. Для вычисления среднего значения времени было проведено 1000 процедур вычисления первого шага процедуры МРС из различных начальных точек при помощи вышепредставленных методов. При использовании стандартной процедуры МРС среднее значение времени вычисления одного равняется 1633 мс, в то время как применение нейросетевого регулятора сокращает время выполнения одного шага до 78 мс.

### 3.8 Применение обучения с подкреплением для систем с неявной динамикой

Рассмотрим задачу перевернутого маятника, расположенного на подвижной платформе, данная конструкция представлена на рис. 3.12.

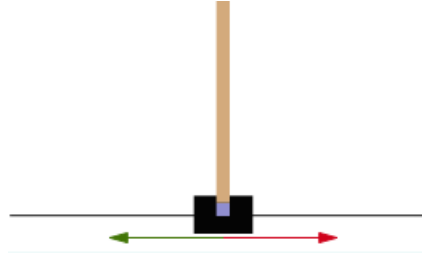


Рис. 3.12: Перевернутый маятник на платформе

Маятник поддерживается в равновесии за счет изменения скорости тележки, движение маятника происходит по подвижной платформе и есть возможность двигаться только влево и вправо. Управление маятником может быть описано марковским процессом. В таких процессах управляющее действие определяется только текущим состоянием объекта управления и не зависит от предшествующих состояний. Данный марковский процесс будет использоваться для обучения с подкреплением. Для эмуляции системы будет использоваться объект `CartPole-v0` библиотеки `gym`.

Для решения задачи необходимо в каждом состоянии  $s$  объекта управления правильно определять действие  $a$ , которое применяется к тележке с маятником. Множество доступных действий над маятником: движение влево и движение вправо. Как описывалось в главе 2, задача обучения с подкреплением решается с помощью агента, взаимодействующего с средой, фиксирующей в том числе и состояние объекта, а также среда передает агенту состояние объекта управления и награду за действие агента, переведшее объект в текущее состояние. Агент, получив от среды информацию о состоянии объекта и свою награду, определяет следующее действие, которое он считает наиболее правильным в данный момент времени.

Множество состояний для данной задачи задается следующим образом:

$$X = \{|x_1| \leq 2.4, x_2 \in \mathbb{R}, |x_3| \leq 0.4, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Стартовым состоянием маятника будет равномерное случайное значение в пределах  $\pm 0,05$ . Награда будет назначаться в размере 1.0 за то, что маятник не будет перевернут и не уйдет за границы множества  $X$ . Также ограничим эксперименты количеством эпизодов стабилизации 200 тиков времени.

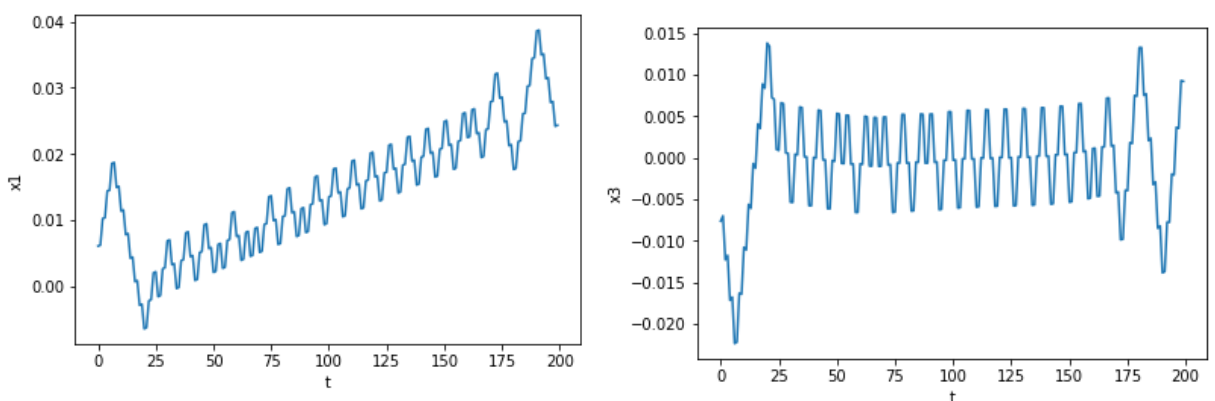
Награда для всего эпизода будет не просто сумма всех полученных наград, а дисконтированная сумма с константой дисконтирования  $\gamma = 0.99$ . Количество эпизодов для обучения 10000. Количество эпизодов для валидации 1000.

Выбор оптимального управления будет осуществляться с помощью нейронной сети с одним скрытым слоем. На вход будет подаваться вектор состояний, в скрытом слое будет 12 нейронов, а на выходе вероятность выбора действия движения влево и движения вправо. Выбор количества нейронов на скрытом слое основывался на таблице (3.6). Во время обучения будет использоваться  $\epsilon$ -жадная стратегия выбора оптимального действия в конкретный момент времени, поэтому после получения вероятности событий в данный момент времени, будет выбираться действие случайным образом, где действие будет выбрано случайно с вероятностью, которую выдала нейронная сеть.

Таблица 3.6: Таблица зависимости процента удачных эпизодов от количества нейронов на скрытом слое

Количество нейронов на скрытом слое	Удачные эпизоды(%)
5	76
8	95
10	98
12	100

Результат обученного регулятора представлены на рисунке 3.13.



(а) Траектория по  $x_1$  (положение тележки)

(б) Траектория по  $x_3$  (угол наклона маятника)

Рис. 3.13: Траектории для стабилизации обратного маятника

Как видно из рисунка, траектория по первой координате смещается с каждым тиком вправо, а значит, что скоро маятник перейдет за установлен-



ные границы, но можно отметить, что угол достаточно хорошо стабилизирован.

Обучение с подкреплением обучается за счет наград и пытается максимизировать получаемые награды, так как в данной конфигурации, мы получаем константное значение награды за позицию на подвижной платформе, то управление недостаточно хорошо научилось определять оптимальную политику в данном случае. Нужно добавить изменяющееся количество награды за позицию тележки на платформе.

Исследуем функции награды вида

$$r(\alpha) = \frac{1}{\alpha + |x_1|}, \quad (3.11)$$

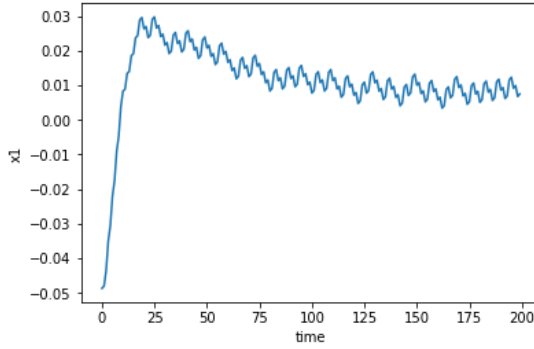
будем проверять следующие значения  $\alpha = \{0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0\}$ . Так как мы хотим стабилизировать маятник в пределах этих положений тележки на платформе, то будем проверять удачен ли эпизод, если удалось остаться в пределах  $|x_1| \leq (\alpha + \min(\alpha, 0.1))$ . Валидировать эпизоды стабилизации на временном промежутке 400 тиков.

Таблица 3.7: Таблица зависимости процента удачных эпизодов от позиции вокруг которой стабилизируем маятник

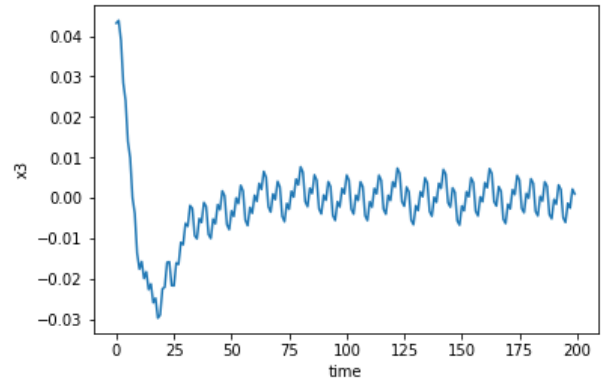
Позиция	Удачные эпизоды(%)
0.01	36
0.05	45
0.1	90
0.5	96
1.0	99
2.0	85

Как видно из результатов таблицы 3.7 стабилизировать с точностью 0.01 – 0.05 не получилось, слишком малый процент удачных стабилизаций, возможно это связано с тем, что уже происходят слишком малые изменения маятника и поэтому сложно обучиться выбирать правильную стратегию. Начиная с позиции 0.1 – 1.0 получилось стабилизировать достаточно качественно, но чем ближе стабилизация к границам множества состояний, тем хуже получается обучить на эту позицию маятник, поэтому на позиции 2.0 получилось количество удачных позиций 81%.

Результат обучения по формуле (3.11) с  $\alpha = 0.1$  представлены на рисунке 3.14. Здесь можно увидеть, что стабилизация прошла не только по углу



(a) Траектория по координате  $x_1$



(b) Траектория по координате  $x_3$

Рис. 3.14: Траектории для стабилизации обратного маятника с наградой по формуле (3.11) с  $\alpha = 0.1$

наклона тележки, но и за счет дифференцированной награды за положение тележки, тележка стабилизировалась около 0.1.

Можно отметить, что обучение с подкреплением может научиться оптимальному управлению за счет взаимодействия со средой и не требует знания динамики объекта. Если добавлять необходимые изменения в функции награды, то можно регулировать оптимальное управление. Однако обучение с подкреплением по представленным результатам не может гарантировать высокую точность вычисления и требует дальнейших исследований в этой области.

### 3.9 Выводы

В данной магистерской диссертации было исследовано применение нейронных сетей для аппроксимации закона управления для нелинейных систем, которые повысили производительность онлайн вычислений в 20 раз. Также были исследованы разные техники сэмплирования, и было показано, что можно сократить количество точек тренировочного набора на 17% при использовании стохастического сэмплирования и повышения плотности точек у начала координат. Были построены области притяжения с помощью SVM для более качественного сэмплирования.

Для систем с неявной динамикой было использовано обучение с подкреплением. Было показана возможность регулировать обучение за счет изменения функций наград. Данный метод не требует знаний о динамике системы, однако не может гарантировать высокую точность вычислений, поэтому нужны дальнейшие исследования в этой области.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

МРС представляет собой семейство регуляторов, которое позволяет явно использовать модель для получения управляющего сигнала, однако данный метод не подходит для быстрых процессов, для которых решение нелинейной задачи оптимального управления не может быть получено регулятором за короткий период квантования. Один из подходов к решению указанной проблемы подразумевает перенос некоторых вычислений оффлайн. МРС предполагает наличие модели динамики для построения своей процедуры оптимального управления, поэтому в условиях неизвестной динамики МРС не сможет находить эффективное управление, поэтому необходимо использовать другие методы.

Для построения аппроксимации управления в МРС регуляторе использовались нейронные сети. Для модификации задачи обратного маятника в виде задачи с неизвестной динамики был использован метод обучения с подкреплением, который позволяет определить управление на основе взаимодействия со средой и получения награды за действие в этой среде.

Были проведены исследования по решению указанной проблемы путем переноса некоторых вычислений оффлайн. Предоставлены результаты базовой реализации алгоритма. В частности, для реализации функции МРС-регулятора были применены искусственные нейронные сети. Были проведены эксперименты для построения области притяжения с помощью SVM. Проанализированы различные техники сэмплирования точек для аппроксимации обратной связи. Для исследования применения нейросетевого регулятора использовались задачи с двумерными и четырехмерными множествами состояний. Техника стохастического сэмплирования с увеличением плотности вокруг начала координат уменьшила количество точек, необходимых для построения тренировочного набора на 17%, а значит и сократила время на обучения. Среднее время выполнения одного шага МРС для стандартной процедуры составляло 1240 мс, а при использовании нейросетевого регулятора составляет 52 мс. Производительность системы с нейросетевым регулятором уменьшила время выполнения одного шага МРС в 20 раз.

В дальнейшем, будут проводиться исследования применения различных архитектур нейронных сетей для обеспечения необходимых параметров МРС регулятора, а также исследования построения регуляторов с неизвестной динамикой.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Grune L., Pannek J. Nonlinear model predictive control // Springer London. 2011.
- 2 Rawlings, J.B. Model Predictive Control: Theory and Design / J.B. Rawlings, D.Q. Mayne // Madison: Nob Hill Publishing. 2009. P. 576.
- 3 Badgwell T.A., Qin S.J. Model-Predictive Control in Practice // Encyclopedia of Systems and Control. Springer, London. 2015.
- 4 Chen H., Allgower F. A Quasi-Infinite Horizon Nonlinear Model Predictive Control Scheme with Guaranteed Stability / H. Chen, F. Allgower // Automatica. 1998. Vol. 34, No. 10. P. 1205-1217.
- 5 Fontes Fernando A.C.C. A General Framework to Design Stabilizing Nonlinear Model Predictive Controllers / F. A.C.C. Fontes // Systems & Control letters. 2000. P. 1-13.
- 6 Bemporad A. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems / A. Bemporad et al. // Automatica. 2002. Vol. 38, No. 1. P. 3-20.
- 7 Domahidi A. Learning a feasible and stabilizing explicit model predictive control law by robust optimization / A. Domahidi et al. // Proceedings of the IEEE Conference on Decision & Control. 2011. No. EPFL-CONF-169723.
- 8 Chakrabarty A. Support Vector Machine Informed Explicit Nonlinear Model Predictive Control Using Low-Discrepancy Sequences / Chakrabarty A. et al. // IEEE Transactions on Automatic Control. 2017. Vol. 62, No. 1. P. 135-148.
- 9 Johansen T. A. Approximate explicit receding horizon control of constrained nonlinear systems // Automatica. 2004. Vol. 40, No. 2. P. 293-300.
- 10 Parisini T., Zoppoli R. A receding-horizon regulator for nonlinear systems and a neural approximation // Automatica. 1995. Vol. 31, No. 10. P. 1443-1451.
- 11 Parisini T., Sanguineti M., Zoppoli R. Nonlinear stabilization by receding-horizon neural regulators // International Journal of Control. 1998. Vol. 70, No. 3. P. 341-362.
- 12 Akesson B. M., Toivonen H. T. A neural network model predictive controller // Journal of Process Control. 2006. Vol. 16, No. 9. P. 937-946.
- 13 Pin G. Approximate model predictive control laws for constrained

nonlinear discrete-time systems: analysis and offline design / G. Pin et al. // International Journal of Control. 2013. Vol.86, No.5. P. 804-820.

14 Aswani A. Provably safe and robust learning-based model predictive control / A. Aswani et al. // Automatica. 2013. Vol. 49, No. 5. P. 1216-1226.

15 Rosolia U., Borrelli F. Learning model predictive control for iterative tasks. a data-driven control framework // IEEE Transactions on Automatic Control. 2018. Vol. 63, No. 7.

16 Goodfellow I. Deep learning / I. Goodfellow et al. // Cambridge : MIT press. 2016. Vol. 1.

17 Csaji B. C. Approximation with artificial neural networks // Faculty of Sciences, Eötvös Loránd University, Hungary. 2001. Vol. 24. P. 48.

18 Andersson J.A.E. CasADi: a software framework for nonlinear optimization and optimal control / J.A.E. Andersson et al. // Mathematical Programming Computation. 2018. P. 1-36.

19 Diehl M., Ferreau H. J., Haverbeke N. Efficient numerical methods for nonlinear MPC and moving horizon estimation // Nonlinear model predictive control. Springer, Berlin, Heidelberg. 2009. P. 391-417.

20 Hertneck M. Learning an approximate model predictive controller with guarantees / M. Hertneck et al. // IEEE Control Systems Letters. 2018. Vol. 2. No. 3. P. 543-548.

21 Павловец М.Е., Дмитрук Н.М. Применение методов машинного обучения в системах управления по прогнозирующей модели // XIX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям "Еругинские чтения-2019": материалы международной научной конференции. Могилев, 14-17 мая 2019 г.