УРАВНЕНИЯ НА ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП И КОМБИНАТОРИКА ПОДСИСТЕМ КОРНЕЙ

Введение

Алгебраические группы часто задаются как преобразования, сохраняющие некоторые полилинейные формы. Так, ортогональная группа (скажем, над полем характеристики, отличной от 2) по определению является группой линейных преобразований, сохраняющих квадратичную форму, или, что то же самое, сохраняющих соответствующую билинейную форму. Аналогично, симплектическая группа — это группа линейных преобразований, сохраняющих симплектическую билинейную форму.

В 1905 году Леонард Диксон построил инвариантную кубическую форму для группы типа E_6. Эта форма от двадцати семи переменных впоследствии изучалась в работах Клода Шевалле, Ганса Фрейденталя и многих других. Майкл Ашбахер доказал (см. [8]), что группа линейных преобразований 27-мерного пространства, сохраняющих эту форму, совпадает с односвязной группой Шевалле типа E_6 над произвольным полем (даже в случаях характеристик 2 и 3)

Еще раньше Леонард Диксон описал инвариантную форму четвертой степени для группы типа E_7. Эта форма действует на 56-мерном пространстве минимального представления односвязной группы Шевалле типа E_7. Также известно, что на этом пространстве есть инвариантная симплектическая форма. Брюс Куперстейн ([5], см. также [4]) показал, что группа линейных преобразований, сохраняющих обе этих формы, совпадает с группой Шевалле типа E_7 для случая поля характеристики, отличной от 2. В работе [1] снято ограничение на характеристику за счет перехода от биквадратной формы к *несимметричной* четырехлинейной.

Изучение минимальных представлений групп типов E_6 и E_7 облегчается тем, что эти представления являются *микровесовыми.* У группы типа E_8, в то же время, вообще нет микровесовых представлений. Ее минимальное представление — присоединенное. Поэтому представляет интерес рассмотрение присоединенных представлений исключительных групп и заданных на них инвариантных полилинейных форм.

Описанные выше полилинейные формы тесно связаны с уравнениями на орбиту вектора старшего веса. Хорошо известно (см. [6]), что орбита вектора старшего веса в любом представлении задается квадратичными уравнениями. Продифференцируем инвариантную трилинейную форму для группы типа E_6 по каждой координате: мы получим набор из 27 квадратичных многочленов. Оказывается, эти многочлены в точности выделяют орбиту вектора старшего веса (над алгебраически замкнутым полем). Аналогично, вторые частные производные четырехлинейной инвариантной формы для группы типа E_7 — квадратичные многочлены, задающие орбиту вектора старшего веса минимального представления этой группы (впрочем, здесь возникают тонкости, связанные с наличием симплектической формы).

Уравнения на орбиту вектора старшего веса в присоединенных представлениях групп типа E_6, E_7, E_8 описаны в статье [7]. Они разбиваются на три типа, которые в [7] названы «уравнения для угла $\pi/2$», «уравнения для угла $2\pi/3$» и «уравнения для угла π». Целью настоящей работы является построение кубической формы на пространстве присоединенного представления группы Шевалле типа E_7, частные производные которой по любой переменной (кроме переменных, соответствующих нулевым весам), являются линейными комбинациями уравнений первых двух типов. Этот результат можно рассматривать как первый шаг на пути к построению инвариантной полилинейной формы на пространстве присоединенного представления группы Шевалле типа E_7.

1. Основные обозначения

Пусть Φ — приведённая неприводимая система корней ранга l. Пусть $\Pi = \alpha_1, \dots, \alpha_l$ — фундаментальная система в Φ (её элементы называются *простыми* корнями). Мы всегда используем ту же нумерацию простых коней, что в [2]. Для $\alpha \in \Phi$ мы имеем $\alpha = \sum_{s=1}^{l} m_s(\alpha)\alpha_s$

Пусть $G = G(\Phi, R)$ — односвязная группа Шевалле типа Φ над коммутативным кольцом R с 1. Мы будем работать с присоединенном представлением $G(\Phi, R)$, которое дает нам неприводимое действие $G(\Phi, R)$ на свободном R-модуле V ранга $|\Phi| + l$. Обозначим за Λ множество весов нашего представления с *кратностями.* То есть $\Lambda = \Lambda^* \sqcup \Delta$, где $\Lambda^* = \Phi$ — множество ненулевых весов, а $\Delta = \{0_1, \dots, 0_l\}$ — множество нулевых весов. Мы фиксируем допустимый базис $e^\lambda, \lambda \in \Lambda$ в V. Тогда вектор $v \in V$ может быть единственным образом представлен как $v = \sum_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda e^\lambda = \sum_{\alpha \in \Phi} v_\alpha e^\alpha + \sum_{i=1}^{l} \hat{v}_i \hat{e}^i$. Мы часто будем писать просто $v = (v_\lambda)$.

Множество корней системы Φ является подмножеством Евклидова пространства E с скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Мы будем также пользоваться произведением $\langle \alpha, \beta \rangle = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$ для $\alpha, \beta \in E$ (для $\alpha, \beta \in \Phi$ получаем число Картана). Мы будем рассматривать системы корней с *простыми связями*, что означает что все корни длины 1. Поэтому $\langle\alpha,\beta\rangle = 2(\alpha,\beta)$ для любых $\alpha,\beta\in\Phi$. Обозначим за $\angle(\alpha,\beta)$ угол между $\alpha,\beta\in E$.

Структурные константы $N_{\alpha,\beta}, \alpha,\beta\in\Phi$ простой комплексной алгебры Ли типа Φ детально описаны в [3]. Заметим, что в нашем случае $N_{\alpha,\beta}=0$ или ±1.

В (?) описаны все уравнения на вектор $v=(v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in V$. Выпишем их сюда.

- $\pi/2$-уравнения
  $S_{\pi/2}(\alpha,\beta)=\{\{\gamma,\delta\}|\gamma+\delta=\alpha+\beta,\{\gamma,\delta\}\neq\{\alpha,\beta\}\}$

$$v_\alpha v_\beta = \sum_{\{\gamma,\delta\}\in S_{\pi/2}(\alpha,\beta)} N_{\alpha,-\gamma}N_{\beta,-\delta}v_\gamma v_\delta$$

- $2\pi/3$-уравнения
  $S_{2\pi/3}(\alpha,\beta)=\{\{\gamma,\delta\}|\gamma+\delta=\alpha,\{\gamma,\delta\}\neq 0\}$

$$v_\alpha\cdot\sum_{s=1}^{l}\langle\beta,\alpha_s\rangle\hat{v}_s = -\sum_{\substack{\{\gamma,\delta\}\in S_{2\pi/3}(\alpha,\beta)\\ \angle(\gamma,\beta)=\pi/3}} N_{\gamma,\delta}v_\gamma v_\delta$$

- π-уравнения
  $S_{\pi}(\alpha,\beta)=\{\{\gamma,\delta\}|\gamma+\delta=0,\angle(\gamma,\alpha)=\angle(\gamma,\beta)=2\pi/3\}$
  $S'_{\pi}(\alpha,\beta)=\{\{\gamma,\delta\}|\gamma+\delta=0,\angle(\gamma,\alpha)=\angle(\delta,\beta)=2\pi/3\}$

$$\sum_{s=1}^{l}\langle\alpha,\alpha_s\rangle\hat{v}_s\cdot\sum_{s=1}^{l}\langle\beta,\alpha_s\rangle\hat{v}_s = \sum_{\{\gamma,\delta\}\in S'_\pi(\alpha,\beta)} v_\gamma v_\delta - \sum_{\{\gamma,\delta\}\in S_\pi(\alpha,\beta)} v_\gamma v_\delta$$

2. Комбинаторика корней

2.1. **Квадраты.** Напомним основные сведения про квадраты.

Пусть $k=l-1,4,5,7$ для $\Phi=D_l,E_6,E_7,E_8$, соответственно.

Определение 1. Множество корней $\Omega=\{\beta_i\},\ i=1,\dots,k,-k,\dots,-1$, такие что $\angle(\beta_i,\beta_{-i})=\pi/2$ для $i=1,\dots,k$ и $\angle(\beta_i,\beta_j)=\pi/3$ для $i\neq\pm j$, называется *максимальным квадратом.*

Слово максимальный говорит о том, что число k выбрано максимальным. Далее в тексте речь будет идти только о таких квадратах, поэтому слово «максмальный», будет опущено.

Для квадрата сумма корней $\beta_i+\beta_{-i}$ не зависит от i, поэтому она общая для всего квадрата. Обозначим этот вектор за $\sigma(\Omega)$. Известно, что пары ортогональных корней с одинаковой суммой задают в точности квадрат. Более того, по паре ортогональных корней можно восстановить квадрат, взяв все пары корней с той же суммой.

2.2. **Отражение относительно квадрата.** Напомним, что на корнях действует группа Вейля отражением.

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha$$

Так как мы рассматриваем только приведенные кристаллографические системы корней с простыми связями, то $\langle \alpha, \beta \rangle$ может равняться только 2, -2, 1, -1, 0. А углы между ними будут 0, π, $\pi/3$, $2\pi/3$ и $\pi/2$ соответственно. Отсюда видно, что $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$ равносильно тому, что $\alpha - \beta \in \Phi$, а $\angle(\alpha, \beta) = 2\pi/3$ равносильно тому, что $\alpha + \beta \in \Phi$;

Рассмотрим квадрат Ω и отразим множество его корней относительно корня α

Определение 2. *Отражением квадрата относительно корня α* назовем множество $S_\alpha(\Omega) = \{s_\alpha(\gamma) \mid \gamma \in \Omega\}$

Замечание 1.

1) $S_\alpha(\Omega)$ является квадратом.
2) Если $\alpha \in \Omega$, то $\sigma(S_\alpha(\Omega)) = \sigma(\Omega) - 2\alpha$.

Доказательство. Пусть $\Omega = \{\beta_1, ..., \beta_k, \beta_{-k}, ..., \beta_{-1}\}$. Не умаляя общности, $\alpha = \beta_1$. По определению квадрата, β_1 ортогонален β_{-1}, а с остальными β_i образует угол $\pi/3$. То есть отражение подействует следующем образом:

$$(\beta_1,\ \beta_{-1}) \mapsto (-\beta_1, \beta_{-1})$$
$$(\beta_i, \beta_{-i}) \mapsto (\beta_i - \beta_1, \beta_{-i} - \beta_1) \text{ для любого } i \neq \pm 1$$

Заметим, что сумма у всех получившихся пар совпадает и равна $\sigma(\Omega) - 2\alpha$, что дает нам пункт 2). Видно, что первая пара ортогональная. Этот факт с пунктом 2) дает нам пункт 1). □

Заметим, что $\beta_i + \beta_{-i} - 2\beta_1 = \beta_1 + \beta_{-1} - 2\beta_1 = \beta_{-1} - \beta_1$

2.3. **Серии.** Рассмотрим произвольный квадрат

$$\Omega = \{\beta_1, \dots, \beta_k, \beta_{-k}, \dots, \beta_{-1}\}$$

Будем обозначать $-\Omega$, квадрат, состоящий из обратных корней.

Определение 3. Множество квадратов, полученное при отражении квадрата относительно всех его корней, вместе с $\pm\Omega$ называется *серией*, то есть $s(\Omega) = \{S_\alpha(\Omega) | \alpha \in \Omega\} \cup \{\pm\Omega\}$.

На самом деле, серия, как множество корней, замкнута относительно отражений, а разбиение квадратов на серии задает отношение эквивалентности на них. То есть $s(\Omega) = s($любого другого представителя этой серии$)$. Таким образом, две серии либо не пересекаются, либо равны. Прежде чем это доказать, изобразим графически серию.

Нарисуем по серии граф, состоящих из помеченных вершин и помеченных ребер. Вершины будут соответствовать квадратам из серии, а ребра будут соответствовать отражениям. То есть один квадрат переходит в другой отражением относительно корня, помеченного на ребре, соединяющем эти квадраты.

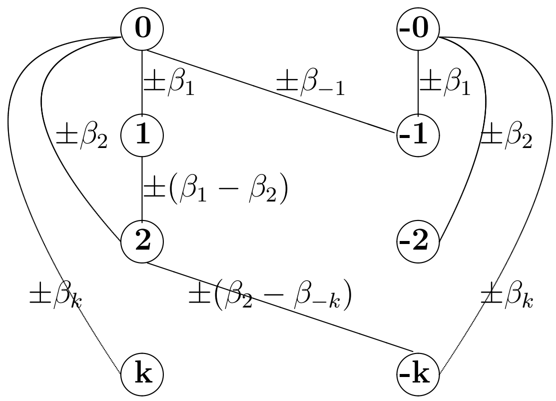
По определению серии, вершин будет $2(k+1)$. Пронумеруем их $-\mathbf{k}$, …, $-\mathbf{1}$, $-\mathbf{0}$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, …, $\mathbf{k}$, что будет соответствовать

$$S_{\beta_{-k}}(\Omega), \dots, S_{\beta_{-1}}(\Omega),\ -\Omega,\ \Omega,\ S_{\beta_1}(\Omega), \dots, S_{\beta_k}(\Omega)$$

то есть как раз всем квадратам из серии $s(\Omega)$.

Заметим, что $S_{\beta_{-i}}(\Omega) = -S_{\beta_i}(\Omega)$, таким образом $\mathbf{i}, -\mathbf{i}$ соответствуют противоположным квадратам.

Две ненулевые вершины $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ такие, что $|\mathbf{i}| \neq |\mathbf{j}|$, соединим ребром с пометкой $\pm(\beta_i - \beta_j)$. Ребро $(\mathbf{0}, \mathbf{i})$ пометим $\pm\beta_i$, а $(-\mathbf{0}, \mathbf{i})$ пометим $\pm\beta_{-i}$.



В итоге, получился граф, в котором не соединены только противоположные вершины.

Лемма 1. *Каждое ребро соединяет квадраты, получающиеся друг из друга отражением относительно пометки на этом ребре.*

Доказательство. Так как отражение идемпотентно, то достаточно доказать утверждение для одного (любого) направления ребра.

Рассмотрим произвольное ребро, если оно выходит из $\mathbf{0}$, то утверждение верно по определению серии.

Посмотрим на ребро из $-\mathbf{0}$. Не умаляя общности, будем рассматривать ребро $(-\mathbf{0}, \mathbf{1})$. В квадрате $\mathbf{1}$ есть ортогональная пара $(-\beta_1, \beta_{-1})$, что при отражении относительно β_{-1} переходит в $(-\beta_1, -\beta_{-1})$. А эта пара из $-\mathbf{0}$.

Рассмотрим ребро, соединяющее ненулевые вершины, например, $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ (для остальных так же, так как все симметрично). В квадрате $\mathbf{1}$ есть ортогональная пара $(\beta_2 - \beta_1, \beta_{-2} - \beta_1)$, а в квадрате $\mathbf{2}$ есть ортогональная пара $(\beta_1 - \beta_2, \beta_{-1} - \beta_2)$. Заметим, что вторые корни в этих парах совпадают $\beta_{-2} - \beta_1 = \beta_{-1} - \beta_2$, так как $\beta_1 + \beta_{-1} = \beta_2 + \beta_{-2}$.

Таким образом, первая пара переходит во вторую относительно $\beta_1-\beta_2$. И, так как квадрат задается ортогональной парой, то квадрат **1** весь переходит в **2**. □

Замечание 2. 1) Любые два непротивоположных квадрата из серии пересекаются ровно по одному корню.
2) Две серии либо не пересекаются (по квадратам), либо совпадают.
3) Пометки на ребрах, вышедшие из одной вершины с нужным знаком, являются в точности корнями квадрата этой вершины.
4) Любой корень либо не встречается в серии, либо встречается ровно два раза.

Доказательство. 1)Рассмотрим ребро, соединяющее два непротивоположных квадрата. Пусть на нем написано $\pm\alpha$. Из доказательства предыдущей леммы видно, что корень, отвечающий пометке на ребре с «+» входит в квадрат, соответствующий одному концу ребра, а с «−» в другой. А корень, ортогональный к этим, у них совпадает. Все остальные корни из одного квадрата образуют угол $\pi/3$ с α, а из другого $2\pi/3$, и значит, не совпадают. 2)Из симметричности картинки. 3) Из доказательства леммы и пункта 1. 4) Из пункта 1 и пункта 3. □

Лемма 2. *Серия замкнута относительно отражения квадратов корнями из серии.*

Доказательство. В силу рассмотренного графа, достаточно рассмотреть только отражения квадрата относительно корней, не входящих в этот квадрат. Рассмотрим квадрат **1** и рассмотрим его отражения относительно β_2. В **1** есть ортогональная пара $(-\beta_1, \beta_{-1})$ отразив ее относительно β_2 получаем $-\beta_1+\beta_2, \beta_{-1}-\beta_2$. Заметим, что сумма сохранилась. То есть весь квадрат перейдет при таком отражении в себя. Мы рассмотрели конкретный пример, но в силу симметрии картинки этого достаточно.

□

Поскольку квадрат задается двумя ортогональными корнями α, β, то в некоторых удобных для нас случаях серию будем обозначать как $s(\alpha, \beta)$. Также, иногда будем воспринимать это множество как множество квадратов, а иногда как множество корней, участвующих в этих квадратах. Однако, из контекста всегда будет понятно, что имеется в виду.

Посмотрим на серию как на множество корней. Заметим, что по построению серия замкнута относительно отражения и конечна, значит - это система корней. Несложным вычислением можно проверить, что в одной серии $2k(k+1)$ корней. По классификации мы можем однозначно понять, что это за система. Оформим это в виде леммы

Лемма 3. *Множество корней серии из E_6, E_7, E_8 является D_5, D_6, D_8 соответственно.*

Посмотрев на расширенные диаграммы Дынкина, заметим, что это максимальные вложения типа D_l.

Напомним, что у системы D_l у ортогональной пары корней две орбиты. За счет этого, квадраты разделяются на длинные и короткие, а именно, длиной $2l-2$ и 6. Квадраты серии отвечают «длинным» квадратам D_l.

Напомним, что корень называется *максимальным*, если у него максимальная сумма коэффициентов в разложении на простые корни. Он существует и единственен. Далее будем обозначать за ρ максимальный корень в E_8. Систему E_7 будем рассматривать как подмножество корней в E_8 с нулевым коэффициентом при простом корне α_8.

Будем называть *типом* веса его коэффициент перед α_8. Таким образом, максимальный корень, например, типа 2. Заметим, что тип λ может быть только $0, \pm 1, \pm 2$, в случаях $\lambda \in E_7$, $\lambda \neq \pm\rho \notin E_7$, $\lambda = \pm\rho$, соответственно. Будем называть *типом* квадрата Ω коэффициент перед α_8 у задающей суммы $\sigma(\Omega)$

Замечание 3. Тип квадрата может быть только $0, \pm 1, \pm 2$.

Доказательство. Так как σ это сумма двух корней, то по предыдущему предложению, коэффициент может принимать от -4, до 4. Значения $\pm 3, \pm 4$, можно добиться только используя $\pm\rho$. Но тогда в квадрате будет не больше двух корней ?!? □

Заметим, что типы квадратов из одной серии имеют одинаковую четность (так как при отражении сумма отличается на $2c$). Таким образом, все серии можно разделить на *четные* и *нечетные*.

Будем говорить, что серия s из E_8 *содержит* серию из E_7, если при ограничении ее на корни из E_7, получится серия из E_7. Легко заметить, что такая серия четная, так как в нее входят квадраты типа 0. Серию, полученную при ограничении, будем обозначать $s|_{E_7}$.

И, аналогично про квадрат будем говорить, что он из E_7, если при ограничении получится квадрат из E_7. Заметим, что по построению серия, содержащая квадрат из E_7, содержит серию из E_7.

Лемма 4. *Пусть ρ — максимальный элемент E_8, s — произвольная серия из E_8. Серия s содержит серию из E_7 тогда и только тогда, когда $\rho \in s$.*

Доказательство. Пусть $\rho \in s$, тогда серия четная. Рассмотрим квадрат, который содержит ρ, он типа $2+0$. Значит, остальные ортогональные пары этого квадрата типа $1+1$. Отразим наш квадрат относительно корня типа 1. Тогда первая пара перейдет в $1+(-1)$, а остальные в $0+0$. Полученные пары корней типа $0+0$ составляют квадрат из E_7. А значит, s содержит серию из E_7.

Пусть s содержит серию из E_7. Рассмотрим квадрат из E_7, содержащийся в серии s, он типа 0. Пар типа $0+0$ в нем $2(k-1)$, рассмотрим оставшиеся две пары. Так как сумма типов корней в этих парах равна 0, то они могут быть только либо $2+(-2)$, либо $1+(-1)$. Но $2+(-2)$ это $\pm\rho$, то есть не ортогональные. Значит, оставшиеся две пары типа $1+(-1)$. Тогда, отразив эти две пары относительно корня типа -1, получим следующие суммы $2+0$, $1+1$. А корень типа 2, только ρ. $\square$

Заметим, что парный корень с ρ в такой серии из E_7. Таким образом, любая серия параметризуется корнем α из E_7. А именно, $\alpha \leftrightarrow s(\rho, \alpha)$.

Лемма 5. *Пусть α — произвольный корень из E_7, тогда*

$$\{\gamma \in E_7 |\ \gamma \perp \alpha\} = \{\gamma \in E_7 |\ \gamma \in s(\rho,\alpha)|_{E_7}\}$$

Доказательство. Пусть $\beta \in s(\rho,\alpha)|_{E_7}$ не ортогонален α. Заметим, что $\rho \perp \beta$, так как $\rho \perp E_7$. Отразим $\Omega(\rho,\alpha)$ относительно β, тогда получится квадрат, содержащий ρ, и неравный при этом $\Omega(\rho,\pm\alpha)$, но в серии один корень встречается ровно два раза. ?!?. Количество корней в нашей серии равно количество корней в D_6, то есть 60. Количество ортогональных корней к данному в E_7 ровно столько же, значит множества совпадают. $\square$

3. Трилинейные формы на E_7

3.1. $\pi/2$-форма. Пусть ρ - старший корень E_8. Пусть $c_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \pm 1$.

$$F = \sum_{\substack{\alpha\perp\beta\perp\gamma\perp\alpha\in E_7 \\ \rho,\alpha,\beta,\gamma\in D_4}} c_{(\alpha,\beta,\gamma)} v_\alpha v_\beta v_\gamma$$

Рассмотрим F как многочлен от 133 переменных над Z. Обозначим $\frac{\partial F}{\partial v_\alpha}$ как производную этого многочлена по v_α.

Теорема 1. *Существует выбор знаков $c_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ такой, что:*

$$\frac{\partial F}{\partial v_\alpha} = \text{линейная комбинация уравнений,}$$
$$\text{построенных по квадратам из серии } s(\rho,\alpha)|_{E_7}$$

Доказательство. Доказательство состоит из двух частей: соответствие корней, соответствие знаков.

1) Соответствие корней:

Рассмотрим дифференцирование по одной переменной, например, по v_α. Докажем, что слагаемые соответствуют $s(\rho,\alpha)|_{E_7}$. По Лемме 5 $\alpha \perp s(\rho,\alpha)|_{E_7}$. Чтобы доказать, что четверка попарно ортогональных корней принадлежит D_4, нужно найти корень такой, что вся четверка имеет угол с ним $\pi/3$ или $2\pi/3$. Рассмотрим ортогональную пару (β,γ) из квадрата, принадлежащего серии $s(\rho,\alpha)$. Так как квадраты построенные по (β,γ) и (ρ,α) из одной серии, у них есть общий корень (по замечанию 2), назовем этот корень ω. Заметим, что $\angle(\rho/\alpha/\beta/\gamma,\omega) = \pi/3$, так как ω со всеми ними лежит в квадратах и не парный им. Значит $(\rho,\alpha,\beta,\gamma) \in D_4$. Тем самым мы доказали, что все слагаемые из серии содержатся. Осталось доказать, что нету лишних слагаемых.

Пусть α,β,γ тройка, соответствующая слагаемому из F. Докажем, что квадрат $(\beta,\gamma) \in s(\rho,\alpha)$. Так как корни из D_4, существует ω, образующая с каждым из них угол $\pi/3$, значит ω принадлежит квадрату (β,γ) и квадрату (ρ,α). То есть теперь, чтобы доказать, что эти квадраты из одной серии, нужно доказать, что противоположные корни к ω — обратные. Вычислим их из равенств: $\rho+\alpha = \omega+(\rho+\alpha-\omega)$, $\beta+\gamma = \omega+(\beta+\gamma-\omega)$. То есть нужно проверить, что $\rho+\alpha-\omega = -(\beta+\gamma-\omega)$, то есть что $\rho+\alpha+\beta+\gamma = 2\omega$, а это верно для D_4.

2) Соответствие знаков:

Заметим, что, зафиксировав знак у одного слагаемое, мы фиксируем знак у всех слагаемых трех уравнений, пересекающихся по этому слагаемому. Полученные слагаемые вновь с кем-то пересекаются и так далее. Дойдем ли мы так до любого слагаемого из F? На самом деле, нет, то есть F распадется на несколько кусочков отдельно для которых тоже выполнено условие согласованности корней теоремы. Запишем это более формально.

Рассмотрим слагаемое $v_\alpha v_\beta v\gamma$. Рассмотрим сумму корней $\delta = \alpha+\beta+\gamma$. Заметим, что, переходя по слагаемым от одного уравнения к другому, δ не меняется (по определению квадрата). Таким образом, каждая «часть» F параметризуется вектором $=$ сумме корней каждого слагаемого. Из определения F видно, что для каждого слагаемого $\rho+\alpha+\beta+\gamma = 2\omega$, где ω типа 1. Таких корней 56, а значит, F распалась на 56 кусочков. Можно заметить, что в каждом куске по 45 слагаемых, то есть на самом деле, F равна следующему:

$$F = \sum_{V(\varpi_6)\subset E_7} (\text{трилинейная форма для } E_6)$$

А так как известно, что на $V(\varpi_6)$ (микровесовом представлении E_6) такая форма существует, причем единственная, то и у F можно подобрать знаки так, чтобы теорема была верна, причем 2^{56} способами. □

3.2. $2\pi/3$**-форма.**

Определение 4. Назовем тройку корней α, β, γ — $2\pi/3$-*тройкой*, если её корни можно переименовать так, что $\angle(\alpha,\beta) = 2\pi/3$, $\angle(\alpha,\gamma) = \pi/2$, $\angle(\gamma,\beta) = \pi/2$.

Множество $2\pi/3$-троек в E_7 назовем Υ Пусть $c_{\alpha,\beta,\gamma} = \pm 1$

$$G = \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\Upsilon} c_{\alpha,\beta,\gamma} v_\alpha v_\beta v_\gamma + \sum_{\substack{\alpha\perp\beta\perp\gamma\perp\alpha\in E7\\ \rho,\alpha,\beta,\gamma\in D_4}} c_{\alpha,\gamma,\hat{v}} v_\alpha v_\gamma \sum_{s=1}^{l} \langle \beta, \alpha_s\rangle \hat{v}_s$$

$$F_1 = \sum (\text{сумма } 2\pi/3\text{-уравнений из } D_6)(\text{корень}\perp D_6)$$

Теорема 2. *Существует выбор знаков $c_{\alpha,\beta,\gamma}$, такой что:*
а) $G = F_1$.
б) Пусть α — ненулевой корень.

$$\frac{\partial G}{\partial v_\alpha} = \text{линейная комбинация } \pi/2 \text{ и } 2\pi/3\text{-уравнений,}$$
$$\text{построенных по квадратам из серии } s(\rho,\alpha)|_{E_7}$$

Доказательство. Доказательство опять же состоит из двух частей: соответствие корней, подбор знаков.

1) Заметим, что все слагаемые G, не содержащие нулевые веса, соответствуют $2\pi/3$-тройке. И все $2\pi/3$-тройки соответствуют какому-нибудь слагаемому G по лемме 5.

Докажем соответствие корней. Рассмотрим корни α, β, γ, отвечающие какому-нибудь слагаемому. Зафиксируем β. Продифференцировав F_1 по v_β, мы получим уравнение в которое будет входить слагаемое $v_\alpha v_\gamma$, а значит, должны входить и слагаемые, отвечающие остальным ортогональным парам квадрата (α,γ). Рассмотри этот квадрат $\Omega = \{\beta_1, \dots, \beta_{-1}\}$. Чтобы проверить соответствие корней, нужно проверить, что $(\beta_i, \beta_{-i}, \beta)$ $2\pi/3$-тройка.

Заметим, что сумма у этих троек равны, назовем ее $\omega = \alpha + \beta + \gamma$. Заметим, что $\langle \omega, \beta\rangle = 0 - 1 + 2 = 1$. Таким образом, $\langle \beta_i, \omega\rangle + \langle \beta_{-i}, \omega\rangle = -1$. Это может быть только $-1+0$ или $-2+1$. Но $-2+1$ означает, что $\beta_i = -\beta$ и $\angle(\beta_{-i}, \beta) = \pi/3$, а такого быть не может так как $\beta_i \perp \beta_{-i}$. Таким образом, реализуется только $-1+0$, что значит, что $\angle(\beta_i,\beta) = 2\pi/3$, $\angle(\beta_{-i},\beta) = \pi/2$. Таким образом, $(\beta_i, \beta_{-i}, \beta)$ $2\pi/3$-тройка.

2) Знаки подобраны при помощи вычисления на компьютере. Поясним как это сделано. Как и в прошлой теореме заметим, что G распадется на куски, для каждого из которых выполнено условие соответствия корней теоремы.

$$G = \sum G_i \text{ , где } G_i = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=fix} v_\alpha v_\beta v_\gamma$$

Чтобы посчитать количество G_i, нужно понять, чему может быть равна сумма $2\pi/3$-тройки. Пусть α, β, γ — $2\pi/3$-тройка. Заметим, что $\delta = \alpha + \beta \in \Phi$, так как образуют угол $2\pi/3$. Заметим, что $\langle \delta, \gamma \rangle = 0$ по линейности. То есть $\angle(\delta, \gamma) = 0$. А, так как они могут быть любыми ортогональными, то количество разных их сумм, это в точности количество квадратов в E_7, то есть 756. Таким образом, G распадается на 756 кусочков, каждое из которых выглядит как сумма слагаемых, отвечающих $2\pi/3$-тройкам с одинаковой суммой корней.

Ясно, что чтобы проверить, то, что можно выбрать знаки для всей G, достаточно проверить, что можно выбрать знаки для какой-нибудь (а значит и для всех) G_i. А в любой G_i всего лишь 80 слагаемых. И знаки, при фиксированном одном слагаемом однозначно восстанавливаются. Таким образом, выбрать знаки у G можно, и, даже не одним способом, а 2^{756}. $\square$

Список литературы

[1] А. Ю. Лузгарев, *Не зависящие от характеристики инварианты четвертой степени для* $G(\mathrm{E}_7, R)$, Вестник Санкт-Петербургского государственного университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия (2013), № 1, 44–51.

[2] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Гл. IV – VI, Мир, М., (1972)

[3] Н. А. Вавилов *Как увидеть знаки структурных констант?*

[4] M. Aschbacher, *Some multilinear forms with large isometry groups*, Geom. Dedicata **25** (1988), no. 1-3, 417–465.

[5] B. N. Cooperstein, *The fifty-six-dimensional module for* E_7. *I. A four form for* E_7, J. Algebra **173** (1995), no. 2, 361–389.

[6] W. Lichtensein, *A system of quadrics describing the orbit of the highest weight vector*, Proc. Amer. Math. Soc **84** (1982), no. 4, 605–608.

[7] A. Luzgarev, *Equations determining the orbit of the highest weight vector in the adjoint representation*, `arXiv:1401.0849 [math.AG]`.

[8] M. Aschbacher, *The* 27*-dimensional module for* E_6. I - IV, Invent. Math. **89** (1987), no. 1, 159–195; J. London Math. Soc. **37** (1988), 275–293; Trans. Amer. Math. Soc. **321** (1990) 45–84; J. Algebra **191** (1991) 23–39.

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail address: `mariya_atm@mail.ru`