Pares - problemas Hoel

Marisela Cadena Cosmes

17 Marzo 2023

0.1. Ejercicios

Sec. 5

1. -

2. Una caja contiene 4 bolas blancas y 2 negras. De ella se saca una bola. Describir un espacio muestral y asignar probabilidades a los puntos muestrales cuando:

   (a) Las bolas están además numeradas.

   (b) Las bolas del mismo color no se pueden distinguir.

   Solución.

   (a) $\Omega = \{B1, B2, B3, B4, N1, N2\}$
   Asignación de probabilidades:
   P(B1) = 4/6 = 2/3
   P(B2) = 3/5
   P(B3) = 2/4 = 1/2
   P(B4) = 1/3
   P(N1) = 2/2 = 1
   P(N2) = 1/1 = 1

   (b) $\Omega = \{BBB, BBN, BNN, NNN\}$
   Asignación de probabilidades:
   $P(BBB) = (4/6)(3/5)(2/4) = 1/5$

   $P(BBN) = (4/6)(2/5)(2/4) + (4/6)(3/5)(2/4) + (2/6)(4/5)(2/4) = 4/15$

   $P(BNN) = (4/6)(2/5)(2/4) + (2/6)(4/5)(2/4) + (2/6)(1/5)(2/4) = 2/5$

   $P(NNN) = (2/6)(1/5)(2/4) = 1/30$

3. -

4. Demostrar que para los sucesos A, B, C, la probabilidad de que al menos uno de los sucesos se presente viene dada por $P\{A\}+P\{B\}+P\{C\}-P\{A\cap B\}-P\{A\cap C\}-P\{B\cap C\}+P\{A\cap B\cap C\}$

   Solución.

   Por definición la probabilidad de un evento A es la suma de las probabilidades de todos los resultados x que pertenecen a A.

   $P(A) = \sum P(x)$

   Y A, B y C como una combinación de eventos más simples:

   $A = (A\cap\neg B\cap\neg C)\cup(A\cap B\cap\neg C)\cup(A\cap\neg B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$ $B = (\neg A\cap B\cap\neg C)\cup(A\cap B\cap \neg C)\cup(\neg A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$ $C = (\neg A\cap\neg B\cap C)\cup(\neg A\cap B\cap C)\cup(A\cap\neg B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$

   Utilizando estas expresiones, podemos expresar la probabilidad de la unión de A, B y C como:

   $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

   Reemplazando las expresiones de A, B y C en la ecuación anterior, obtenemos:

   $P((A\cap\neg B\cap\neg C)\cup(A\cap B\cap\neg C)\cup(A\cap\neg B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)\cup(\neg A\cap B\cap\neg C)\cup(A\cap B\cap \neg C)\cup(\neg A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)\cup(\neg A\cap\neg B\cap C)\cup(\neg A\cap B\cap C)\cup(A\cap\neg B\cap C)\cup(A\cap B\cap C))$

   $= P(A\cap\neg B\cap\neg C) + P(A\cap B\cap\neg C) + P(A\cap\neg B\cap C) + P(A\cap B\cap C) + P(\neg A\cap B\cap\neg C) + P(\neg A\cap B\cap C) + P(\neg A\cap\neg B\cap C) + P(A\cap\neg B\cap C)$

   $= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

   Sec. 6

5. -

   Sec.7

6. De una urna que contiene 1 bola blanca, 3 negras y 4 verdes se extraen dos bolas. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea blanca y la segunda negra? (b) ¿Cuál es la probabilidad si se repone la primera bola antes de extraer la segunda?

   Solución.

   (a) La probabilidad de sacar una bola blanca en el primer intento es de 1/8, ya que hay 1 bola blanca entre las 8 bolas en la urna. Luego, si se sacó una bola blanca en el primer intento, la probabilidad de sacar una bola negra en el segundo intento es de 3/7, ya que hay 3 bolas negras entre las 7 bolas restantes en la urna. Por lo tanto, la probabilidad de sacar una bola blanca seguida de una bola negra es:

   $P(BN) = P(B) * P(N|B) = (1/8) * (3/7) = 3/56$

   (b) Si se repone la primera bola antes de sacar la segunda, la probabilidad de sacar una bola blanca en el primer intento sigue siendo de 1/8. Luego, la bola blanca se devuelve a la urna, por lo que la probabilidad de sacar una bola negra en el segundo intento sigue siendo de 3/8, ya que no se altera el número de bolas negras en la urna. Entonces, la probabilidad de sacar una bola blanca seguida de una bola negra cuando se repone la primera bola es:

$P(BN) = P(B) * P(N) = (1/8) * (3/8) = 3/64$

7. -

8. Comparar las probabilidades de sacar un 5 con un dado y un total de 10 con dos dados.

   Solución.

   La probabilidad de sacar un 5 con un solo dado de seis caras es de 1/6 o aproximadamente 0.1667 (16.67 %).

   Por otro lado, para calcular la probabilidad de obtener un total de 10 con dos dados, podemos contar cuántas combinaciones de dos dados suman 10 y dividirlo por el número total de posibles resultados. Hay un total de 36 posibles resultados (6 caras por cada dado), y podemos obtener un total de 10 con los siguientes pares de dados: (4,6), (5,5) y (6,4), lo que nos da un total de 3 combinaciones posibles. Por lo tanto, la probabilidad de obtener un total de 10 con dos dados es de 3/36 o aproximadamente 0.0833 (8.33 %).

   En conclusión, la probabilidad de sacar un 5 con un dado es mayor que la probabilidad de obtener un total de 10 con dos dados.

9. -

10. De una baraja ordinaria se hacen sucesivas extracciones de una carta, reponiendo ésta cada vez. ¿Cuántas extracciones son necesarias antes de que la probabilidad de obtener una espada por lo menos una vez sea 0,9?

    Solución.

    La probabilidad de obtener al menos una espada en una extracción es de 1/4, ya que hay 4 espadas en la baraja de 52 cartas.

    Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de extracciones necesarias para obtener al menos una espada. La distribución de probabilidad de X sigue una distribución geométrica con parámetro p = 1/4.

    La probabilidad de obtener al menos una espada en las primeras n extracciones está dada por la función de distribución acumulada:

    $F(n) = 1 - (3/4)^n$

    Para encontrar el valor de n que hace que F(n) sea igual a 0.9, debemos resolver la ecuación:

    $1 - (3/4)^n = 0{,}9$

    Despejando n, obtenemos:

    $(3/4)^n = 0{,}1$

    Tomando logaritmos en ambos lados, obtenemos:

    $nlog(3/4) = log(0{,}1)$

    $n = log(0{,}1)/log(3/4) \approx 9{,}2$

    Por lo tanto, se necesitan al menos 10 extracciones para que la probabilidad de obtener al menos una espada sea mayor o igual a 0.9.

11. -

12. Dos cajas contienen 1 bola negra y 2 blancas, y 2 bolas negras y 2 blancas, respectivamente. De la primera caja se transfiere una bola a la segunda, después de lo cual se extrae una bola de la segunda caja. ¿Cuál es la probabilidad de que esta bola sea blanca?

    Solución.

    Sea A el evento de transferir una bola de la primera caja a la segunda, y B el evento de extraer una bola blanca de la segunda caja. Queremos calcular la probabilidad condicional $P(B|A)$ de que B ocurra dado que A ha ocurrido.

    Para calcular $P(B|A)$, primero calculemos la probabilidad conjunta $P(A \cap B)$ de que ambos eventos ocurran:

    $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$

    La probabilidad $P(A)$ de transferir una bola de la primera caja a la segunda es de $1/3$, ya que hay 3 bolas en la primera caja y se selecciona una al azar.

    Para calcular la probabilidad condicional $P(B|A)$, consideremos dos casos:

    Si la bola transferida es negra, entonces la segunda caja tendrá 3 bolas negras y 2 blancas, y la probabilidad de extraer una bola blanca es de $2/5$. Si la bola transferida es blanca, entonces la segunda caja tendrá 3 bolas blancas y 2 negras, y la probabilidad de extraer una bola blanca es de $3/5$. La probabilidad de transferir una bola negra de la primera caja a la segunda es de $1/3$, ya que hay 1 bola negra y 2 blancas en la primera caja.

    Por lo tanto, la probabilidad conjunta $P(A \cap B)$ se puede calcular como:

    $P(A \cap B) = (1/3) * [(2/5)(2/4) + (3/5)(3/4)] = 7/30$

    Finalmente, la probabilidad condicional P(B—A) se calcula como:

    $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) = (7/30)/(1/3) = 7/10$

    Por lo tanto, la probabilidad de que la bola extraída de la segunda caja sea blanca después de transferir una bola de la primera caja a la segunda es de $7/10$.

13. -

14. A, B y C, por este orden, tiran una moneda al aire. El primero que saque una cara gana. ¿Cuáles son sus respectivas probabilidades de ganar? Obsérvese que el juego puede continuar indefinidamente.

    Solución.

    Los tres jugadores tienen la misma probabilidad de ganar en cada ronda, $(1/2)$, ya que la probabilidad de obtener una cara en una moneda justa es $1/2$. Sin embargo, la probabilidad de que el juego continúe indefinidamente es diferente.

    La probabilidad de que el juego continúe después de una ronda es $1/2$, ya que hay una probabilidad del 50 % de que ninguno de los jugadores saque una cara y el juego continúe.

$X = x_i$	1	2	3	x_n
$P(X = x_i)$	$1/2$	$1/4$	$1/4$	$1/2 + 1/4 + 1/8 + ...$

La probabilidad de que el juego continúe después de dos rondas es $(1/2) * (1/2) = 1/4$, ya que hay una probabilidad del 50 % de que el primer jugador y el segundo jugador no saquen una cara.

La probabilidad de que el juego continúe después de tres rondas es $(1/2) * (1/2) * (1/2) = 1/8$, ya que hay una probabilidad del 50 % de que el primer jugador, el segundo jugador y el tercer jugador no saquen una cara.

Podemos continuar así para calcular la probabilidad de que el juego continúe después de cualquier número de rondas n. La probabilidad de que el juego continúe indefinidamente es la suma de todas estas probabilidades, es decir,

$P(\text{juego continúa indefinidamente}) = 1/2 + 1/4 + 1/8 + ...$

Esta es una serie geométrica con una razón de 1/2, por lo que podemos calcular su suma como:

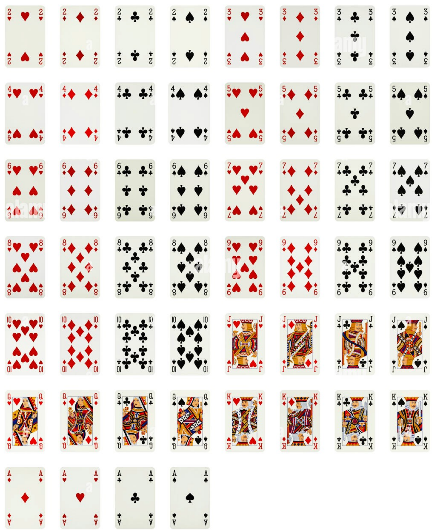
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)}{(1-1/2)}$

Dado que el juego puede continuar indefinidamente, no es posible determinar la probabilidad de que un jugador específico gane el juego en un número finito de rondas.

15. -

16. De una baraja ordinaria se extrae una carta. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un rey, sabiendo que la carta extraída fue una figura?

Solución.



Hay 4 reyes en una baraja ordinaria de 52 cartas, por lo que la probabilidad de que la carta extraída sea un rey es de 4/52.

Para calcular la probabilidad de que la carta extraída sea un rey dado que es una figura, necesitamos saber cuántas figuras hay en la baraja. Hay 12 figuras en una baraja ordinaria: 4 reyes, 4 reinas y 4 jotas.

Entonces, la probabilidad de que la carta extraída sea un rey dado que es una figura es:

$P(rey|figura) = P(\text{rey y figura})/P(figura)$

La probabilidad de que la carta extraída sea un rey y una figura es simplemente la probabilidad de que sea un rey, que es 4/52.

La probabilidad de que la carta extraída sea una figura es la probabilidad de que sea un rey, una reina o una jota, que es 12/52.

Por lo tanto, la probabilidad de que la carta extraída sea un rey dado que es una figura es:

$P(rey|figura) = (4/52)/(12/52) = 1/3$

17. -

18. Una caja contiene 2 tarjetas rojas numeradas con 1 y 2, y 3 tarjetas verdes numeradas con 1, 2 y 3. Si de la caja se extraen dos tarjetas, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean rojas, suponiendo que se sabe que una de ellas es (a) roja, (b) la roja numerada con el 1?

    Solución.

    (a) Si ya sabemos que una de las tarjetas es roja, entonces solo quedan 4 tarjetas posibles que podrían ser la segunda tarjeta extraída: la otra tarjeta roja numerada con 2, o cualquiera de las tres tarjetas verdes. Por lo tanto, la probabilidad de que la segunda tarjeta extraída también sea roja es de 1/4, o 0.25.

    (b) Si ya sabemos que la primera tarjeta extraída es la roja numerada con 1, entonces solo queda una tarjeta roja posible que podría ser la segunda tarjeta extraída (la tarjeta roja numerada con 2). Por lo tanto, la probabilidad de que la segunda tarjeta extraída también sea roja, dada la información adicional de que la primera tarjeta extraída es la roja numerada con 1, es de 1/1 o 1.

19. - **Sec. 8**

20. Un grupo de hombres de negocios está compuesto de un 40 por ciento de demócratas y un 60 por ciento de republicanos. Si el 30 por ciento de los demócratas y el 50 por ciento de los republicanos fuman cigarros puros, ¿cuál es la probabilidad de que un hombre de negocios fumador de puros sea republicano?

    Solución.

    Para resolver este problema, podemos utilizar la regla de Bayes, que nos permite calcular la probabilidad condicional de un evento A dado que se ha observado otro evento B.

    Sea R el evento de que un hombre de negocios elegido al azar sea republicano y F el evento de que fume cigarros puros. Entonces, la probabilidad de que un hombre de negocios fumador de puros sea republicano se puede calcular como:

    $P(R|F) = P(F|R) * P(R)/P(F)$

    Donde:

    $P(F|R)$ es la probabilidad de que un republicano fume puros $P(R)$ es la probabilidad de que un hombre de negocios elegido al azar sea republicano $P(F)$ es la probabilidad de que un hombre de negocios elegido al azar fume puros.

    Podemos calcular estas probabilidades utilizando la información dada en el problema:

$P(F|R) = 0{,}5$ (el 50 % de los republicanos fuma puros) $P(F|D) = 0{,}3$ (el 30 % de los demócratas fuma puros) $P(R) = 0{,}6$ (el 60 % de los hombres de negocios son republicanos) $P(D) = 0{,}4$ (el 40 % de los hombres de negocios son demócratas)

Para calcular P(F), podemos utilizar la regla de la probabilidad total:

$P(F) = P(F|R) * P(R) + P(F|D) * P(D) = 0{,}5 * 0{,}6 + 0{,}3 * 0{,}4 = 0{,}42$

Sustituyendo estos valores en la ecuación original, obtenemos:

$P(R|F) = P(F|R) * P(R)/P(F) = 0{,}5 * 0{,}6/0{,}42 = 0{,}714$

Por lo tanto, la probabilidad de que un hombre de negocios fumador de puros sea republicano es del 71,4 %.

21. -

22. Se tienen 3 arcas con 2 cajones cada una. Un arca contiene una moneda de oro en cada cajón, otra contiene una moneda de plata en cada cajón, y la tercera contiene una moneda de oro en un cajón y una de plata en el otro. Se selecciona un arca y se abre uno de sus cajones, encontrándose que contiene una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda del otro cajón sea también de oro?

    Solución.

    Podemos abordar este problema utilizando la regla de Bayes (independencia de 2 ejemplos relacionados). Sea A el evento de que el arca seleccionada contiene una moneda de oro en ambos cajones, y sea O el evento de que se encuentra una moneda de oro en uno de los cajones abiertos. Queremos calcular la probabilidad de que la moneda del otro cajón sea también de oro, es decir, $P(A|O)$.

    Utilizando la regla de Bayes, podemos expresar $P(A|O)$ en términos de las probabilidades condicionales y marginales relevantes:

    $P(A|O) = P(O|A) * P(A)/P(O)$

    Dónde:

    $P(O|A)$ es la probabilidad de encontrar una moneda de oro en uno de los cajones si el arca seleccionada contiene una moneda de oro en ambos cajones, lo que es igual a 1 (ya que estamos seguros de que hay una moneda de oro en el arca seleccionada).

    $P(A)$ es la probabilidad de seleccionar el arca que contiene una moneda de oro en ambos cajones, que es de 1/3 (ya que hay tres arcas con igual probabilidad de ser seleccionadas).

    $P(O)$ es la probabilidad de encontrar una moneda de oro en uno de los cajones, que puede calcularse utilizando la regla de la probabilidad total: $P(O) = P(O|A) * P(A) + P(O|S) * P(S) + P(O|B) * P(B) = 1 * 1/3 + 1/2 * 1/3 + 1/2 * 1/3 = 5/6$ Dónde:

    S y B representan las arcas que contienen monedas de plata en ambos cajones y oro y plata en distintos cajones, respectivamente.

    Sustituyendo estos valores, obtenemos:

    $P(A|O) = 1 * 1/3/(5/6) = 2/5$

    Sec. 9

23. -

24. Si un jugador de bridge (naipes de 52 cartas), tiene dos ases en la mano, ¿cuál es la probabilidad de que su compañero tenga (a) un as, (b) dos ases?

Solución.

La probabilidad de que el compañero de un jugador de bridge tenga un as depende del número de ases que quedan en la baraja y del número de cartas que tiene el compañero. Suponiendo que se juega con una baraja estándar de 52 cartas y que el jugador tiene dos ases en la mano, quedan 50 cartas en la baraja y 11 ases.

(a) Para calcular la probabilidad de que el compañero tenga un as, debemos considerar que el compañero tiene una mano de 13 cartas. Si el jugador tiene dos ases, quedan 2 ases en la baraja y 48 cartas no ases. Por lo tanto, la probabilidad de que el compañero tenga un as es:

$P(\text{una mano con 1 as}) = (11/50) * (39/49) * (38/48) * ... * (27/38) * (21/37) * (20/36) = 0{,}411$

Esto significa que hay un 41.1 % de probabilidad de que el compañero tenga al menos un as.

(b) Para calcular la probabilidad de que el compañero tenga dos ases, debemos considerar que el compañero tiene una mano de 13 cartas y que ya se han sacado dos ases de la baraja. Por lo tanto, quedan 9 ases y 48 cartas no ases en la baraja. La probabilidad de que el compañero tenga dos ases es:

$P(\text{una mano con 2 ases}) = (9/48) * (8/47) * (46/46) * (45/45) * ... * (34/34) * (33/33) = 0{,}0045$

25. -

26. ¿Cuál es la probabilidad de que una mano de bridge contenga 13 cartas del mismo palo?

Solución.

La probabilidad de tener una mano de bridge con 13 cartas del mismo palo depende del número de combinaciones posibles de 13 cartas que se pueden tomar de un mazo de 52 cartas.

Hay cuatro palos en un mazo de cartas, por lo que la probabilidad de obtener una mano de bridge con 13 cartas del mismo palo es igual a la suma de la probabilidad de obtener 13 cartas del palo de tréboles, diamantes, corazones o picas.

Para calcular la probabilidad de obtener 13 cartas del mismo palo, se puede utilizar la fórmula de combinaciones:

$C(13, 13)/C(52, 13) = 1/635013559600$

Donde $C(n, k)$ representa el número de combinaciones posibles de k elementos tomados de un conjunto de n elementos.

Por lo tanto, la probabilidad de tener una mano de bridge con 13 cartas del mismo palo es de aproximadamente 1 en 635 mil millones.

27. -

28. De un grupo de 40 personas han de escogerse 3. Hallar la probabilidad de que de 10 personas determinadas del grupo no resulte escogida ninguna.

Solución.

Para calcular la probabilidad de que de un grupo de 40 personas se escojan 3 y ninguna de las 10 personas determinadas sea elegida, se puede utilizar el concepto de combinaciones.

Primero, calculemos el número total de combinaciones posibles de 3 personas que se pueden escoger de un grupo de 40 personas:

$C(40,3) = (40!)/(3! * (40-3)!) = 9880$

Esto significa que hay 9880 formas diferentes de elegir un grupo de 3 personas de un grupo de 40.

Luego, calculemos el número de combinaciones posibles de 3 personas que no incluyen a las 10 personas determinadas:

$C(30,3) = (30!)/(3! * (30-3)!) = 4060$

Esto significa que hay 4060 formas diferentes de elegir un grupo de 3 personas de un grupo de 30 que no incluyen a las 10 personas determinadas.

Por lo tanto, la probabilidad de que de 10 personas determinadas del grupo no resulte escogida ninguna es:

$4060/9880 = 0{,}4117$ o aproximadamente 41,17 %

Es decir, hay una probabilidad del 41.17 % de que, al elegir un grupo de 3 personas de un grupo de 40, no se incluya a ninguna de las 10 personas determinadas.

29. -

30. ¿Cuál es la probabilidad de que las manos de bridge norte y sur juntas contengan exactamente 2 ases?

Solución.

La probabilidad de que las manos de bridge norte y sur juntas contengan exactamente 2 ases dependerá del número total de posibles combinaciones de cartas que puedan tener estas dos manos, así como del número de combinaciones que contengan exactamente 2 ases.

En una baraja de 52 cartas, hay un total de (52 elegir 13) formas diferentes de seleccionar 13 cartas de la baraja para formar una mano. Para determinar el número de combinaciones que contienen exactamente 2 ases, podemos desglosarlo de la siguiente manera:

Selección de 2 ases de los 4 disponibles: (4 elegir 2) = 6 Selección de 11 cartas no ases de los 48 disponibles: (48 elegir 11) = 28,954,109,760 Luego, podemos calcular el número total de combinaciones que contienen exactamente 2 ases seleccionando 2 ases y 11 cartas no ases, y multiplicar este número por el número de combinaciones restantes que no contienen ases. Entonces, la probabilidad de que las manos de bridge norte y sur juntas contengan exactamente 2 ases es:

$(6 * 28,954,109,760 * (40 \text{ elegir } 13))/(52 \text{ elegir } 13) = 0{,}3097$

Por lo tanto, la probabilidad es de aproximadamente 0.3097 o alrededor del 31 %.

31. -

32. Hallar la probabilidad de que una mano de póker de 5 cartas contenga solamente cartas negras, (a) sabiendo que contiene, por lo menos, 4 cartas negras, (b) sabiendo que contiene, por lo menos, 4 espadas (picas).

(a) Para calcular la probabilidad de que una mano de póker de 5 cartas contenga solamente cartas negras, sabiendo que contiene al menos 4 cartas negras, podemos usar la regla de Bayes.

Teorema de Bayes:

$P(A|B) = P(B|A) * P(A)/P(B)$

Donde:

P(todas las cartas son negras) = (26/52) x (25/51) x (24/50) x (23/49) x (22/48) = 0,0026

La probabilidad de que haya exactamente 4 cartas negras y 1 carta de otro color es:

P(4 cartas negras y 1 carta de otro color) = (26/52) x (25/51) x (24/50) x (23/49) x (26/48) x 5 = 0.0909

Donde multiplicamos el número de formas en que podemos elegir una carta de otro color (26 cartas negras en el mazo - 4 cartas negras ya elegidas = 22 cartas) por el número de formas en que podemos elegir cuál de las 5 cartas será de otro color (5 formas posibles).

Por lo tanto, la probabilidad de que una mano de póker de 5 cartas contenga al menos 4 cartas negras es:

P(al menos 4 cartas negras) = P(todas las cartas son negras) + P(4 cartas negras y 1 carta de otro color) = 0.0026 + 0.0909 = 0.0935

Ahora, usando la regla de Bayes, podemos calcular la probabilidad de que todas las cartas sean negras, dado que la mano contiene al menos 4 cartas negras:

P(todas las cartas son negras — al menos 4 cartas negras) = P(al menos 4 cartas negras — todas las cartas son negras) x P(todas las cartas son negras) / P(al menos 4 cartas negras)

P(al menos 4 cartas negras — todas las cartas son negras) = 1, ya que si todas las cartas son negras, entonces ciertamente hay al menos 4 cartas negras.

Sustituyendo los valores obtenidos:

P(todas las cartas son negras — al menos 4 cartas negras) = $1x0{,}0026/0{,}0935 = 0{,}0699$

(b) P(B—A) es la probabilidad de obtener una mano de póker que contenga al menos 4 espadas dado que la mano de póker contiene solamente cartas negras. Esta probabilidad es 0, ya que si la mano contiene solamente cartas negras, no puede contener 4 espadas.

P(A) es la probabilidad de obtener una mano de póker que contenga solamente cartas negras. Para calcular esta probabilidad, podemos contar el número de manos de póker que contienen solamente cartas negras y dividir por el número total de manos de póker posibles. Hay 26 cartas negras en una baraja de 52 cartas, por lo que hay C(26,5) maneras de obtener una mano de póker que contenga solamente cartas negras. El número total de manos de póker posibles es C(52,5). Por lo tanto, P(A) = C(26,5) / C(52,5) = 0.000172.

P(B) es la probabilidad de obtener una mano de póker que contenga al menos 4 espadas. Para calcular esta probabilidad, podemos contar el número de manos de póker que contienen al menos 4 espadas y dividir por el número total de manos de póker posibles. Hay C(13,4) maneras de obtener una mano de póker que contenga exactamente 4 espadas, y C(13,5) maneras de obtener una mano de póker que contenga 5 espadas. Por lo tanto, hay C(13,4) + C(13,5) manos de póker que contienen al menos 4 espadas. El número total de manos de póker posibles es C(52,5). Por lo tanto, P(B) = [C(13,4) + C(13,5)] / C(52,5) = 0.00324.

Sustituyendo estos valores en la fórmula de Bayes, obtenemos:

$P(A|B) = 0 * 0{,}000172/0{,}00324 = 0$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener una mano de póker de 5 cartas que contenga solamente cartas negras, sabiendo que contiene al menos 4 espadas, es cero. Esto significa que es imposible obtener una mano de póker que satisfaga estas condiciones.

33. -

34. Designemos por X e Y el número respectivo de caras obtenido al lanzar 2 monedas dos veces. Calcular la probabilidad de que Y— X sea menor que 1.

    Para resolver este problema, podemos empezar por hacer una lista de todos los posibles resultados al lanzar dos monedas dos veces. Hay cuatro posibles resultados para cada lanzamiento: cara-cara, cara-cruz, cruz-cara, y cruz-cruz. Por lo tanto, hay un total de 16 posibles resultados para los dos lanzamientos.

    Para calcular la probabilidad de que Y - X sea menor que 1, podemos contar el número de casos favorables y dividirlo por el número total de casos posibles. Un caso favorable es aquel en el que la diferencia entre Y y X es menor que 1, es decir, cuando Y = X o Y = X + 1.

    Podemos contar los casos favorables de la siguiente manera:

    Si Y = X, hay cuatro posibles resultados: cara-cara en ambos lanzamientos, cruz-cruz en ambos lanzamientos, cara-cruz y cruz-cara. En este caso, Y - X es igual a 0, por lo que cumple la condición de ser menor que 1. Si $Y = X + 1$, también hay cuatro posibles resultados: cara-cruz en el primer lanzamiento y cruz-cara en el segundo lanzamiento, cruz-cara en el primer lanzamiento y cara-cruz en el segundo lanzamiento, cara-cara en el primer lanzamiento y cruz-cruz en el segundo lanzamiento, y cruz-cruz en el primer lanzamiento y cara-cara en el segundo lanzamiento. En este caso, Y - X es igual a 1, por lo que también cumple la condición de ser menor que 1. Por lo tanto, hay ocho casos favorables en total. Dividiendo por el número total de casos posibles (16), obtenemos la probabilidad de que Y - X sea menor que 1:

$P(Y - X < 1) = 8/16 = 1/2$

Por lo tanto, la probabilidad de que la diferencia entre el número de caras obtenidas en los dos lanzamientos de dos monedas sea menor que 1 es de 1/2 o 50 %.

35. -

36. -Demostrar que

37. -

38. Se lanza una moneda al aire hasta que salga una cara. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la cara aparezca por primera vez en la cuarta tirada? (b) ¿Cuál es la probabilidad, $f(x)$, de que se necesiten x tiradas para que salga una cara? (c) Representar la función de densidad $f(x)$ mediante un gráfico de barras.

    Solución.

    (a) La probabilidad de que la cara aparezca por primera vez en la cuarta tirada se puede calcular de la siguiente manera:

    La probabilidad de que salga sello en las tres primeras tiradas es (1/2) * (1/2) * (1/2) = 1/8. La probabilidad de que salga cara en la cuarta tirada es 1/2. Por lo tanto, la probabilidad de que la cara aparezca por primera vez en la cuarta tirada es:

    (1/8) * (1/2) = 1/16.

    (b) La probabilidad de que se necesiten x tiradas para que salga una cara se puede calcular de la siguiente manera:

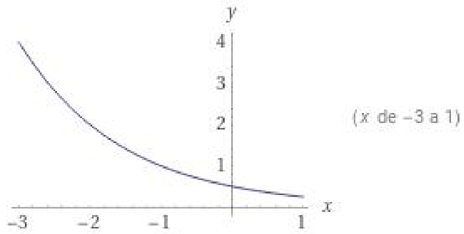
    La probabilidad de que salga sello en las primeras $x - 1$ tiradas es $(1/2)^{x-1}$. La probabilidad de que salga cara en la x-ésima tirada es 1/2. Por lo tanto, la probabilidad de que se necesiten exactamente x tiradas para que salga una cara es:

    $(1/2)^x * (1/2) = (1/2)^{x+1}$.

    Es decir, la probabilidad sigue una distribución geométrica con parámetro $p = 1/2$.

39. -

40. Representar gráficamente la función de distribución $F(x)$ correspondiente a la densidad obtenida en el problema 38.



41. -

42. Se lanzan dos dados. Sea X la diferencia de los números que muestran, el mayor menos el menor, y 0 en caso de empate. Hallar la función de densidad de X.

    Podemos encontrar la función de densidad de X utilizando la regla de la probabilidad total y el hecho de que los resultados de los dos dados son equiprobables. Sea p_i la probabilidad de obtener la diferencia i entre los números que muestran los dos dados, donde i puede ser un número entero en el rango de -5 a 5. Entonces, tenemos:

    $$p_0 = \frac{6}{36} \quad = \frac{1}{6}$$

    ya que hay seis formas de obtener un empate (ambos dados muestran el mismo número) de un total de 36 posibles resultados. Además, para i no igual a cero, hay $2 \times (6 - |i|)$ formas de obtener la diferencia i, ya que hay seis formas de obtener el número más alto y seis formas de obtener el número más bajo, y $|i|$ de estas formas dan lugar a una diferencia de i. Por lo tanto, la probabilidad p_i es:

    para i no igual a cero.

    Entonces, la función de densidad de X es:

    donde x es un número entero en el rango de -5 a 5.

43. -

44. Se lanza un dado una vez. Si sale 5 o 6 representamos por X el número aparecido. Si sale 1, 2, 3 o 4 volvemos a lanzar el dado y representamos por X la suma de los dos números que salieron. Hallar la función de densidad de X.

    Solución.

45. -

46. Tenemos N tarjetas numeradas 1, 2, ..., N, de entre las que se eligen n. Sea X el número más pequeño que aparezca en los boletos escogidos. Hallar la función de densidad de X.

    Solución.

    Sec. 13.

47. -

48. Designemos por X e Y el número respectivo de caras que se obtienen al lanzarse dos veces al aire un par de monedas. Hallar una expresión para la función de densidad $f(x, y)$.

    Solución.

49. -

50. De una baraja se sacan cuatro cartas. Designemos por X el número de ases y por Y el número de reyes que se obtengan. Hallar una expresión para la función de densidad $f(x, y)$.

    Solución.

51. -

52. Para el primer ejemplo de la sección 13, calcular los valores de (a) $f(1)$, (b) $g(0)$, (c) $f(y|1)$, (d) $g(x|0)$. Aquí f y g son las densidades de X y Y.

    Solución.

53. -

54. Hallar $f(x)$ y $f(y|x)$ para la densidad del problema 47. Coméntese.

    Solución.

55. -

56. Calcular los valores marginales $f(2)$ y $g(4)$ del problema 49.

    Solución.

57. -

58. Consideremos una baraja de cartas compuesta por el as, rey, caballo y sota de cada uno de los cuatro palos. Si se sacan 2 cartas de esta baraja y designamos por X e Y el número de espadas y copas obtenidas, hallar (a) la densidad conjunta $f(x, y)$, (b) la densidad marginal $f(x)$, (c) la densidad condicional $f(y|1)$, de Y para $X = 1$.

    Solución.

59. -

60. Explicar por qué dos variables X e Y no pueden distribuirse independientemente, prescindiendo de la naturaleza de $f(x, y)$. si la región del plano xy donde $f(x, y)$ es positiva es la región triangular de la Fig. 16.

    Solución.

61. -

62. Dada la densidad continua $f(x) = cxe^{-x}$, $x > 0$, (a) determinar el valor de c, (b) calcular $P\{X < 2\}$, (c) calcular $P\{2 < X < 3\}$

    Solución.

63. -

64. .Si $f(x)$ es la densidad de la variable aleatoria X, hallar y representar la función de distribución $F(X)$ en cada uno de los casos siguientes:

    Solución.

65. -

66. Si $f(x) = \frac{1}{2}\ e^{-x/2}$, $x > 100$.
    (a) Calcular c. (b) Hallar $F(x)$. (c) Calcular $P\{X > 500\}$

    Solución.

67. -

68. Supongamos que la probabilidad de que un átomo de una materia radiactiva se desintegre en un tiempo t viene dada por $1 - e^{-at}$, donde a es una constante que depende de la materia. Hallar la función de densidad de X, duración de la vida de tal átomo.

    Solución.

69. -

70. Dada la densidad $f(x, y) = 8xy$, $0 < x < 1$, $0 < y < x$, calcular: (a) $P\{X < 0,5, Y < 0,5\}$ (b) $P\{X < 0,5\}$ (c) $P\{Y < 0,5\}$ (d) A partir de los cálculos precedentes, ¿qué puede decir sobre la independencia de X e Y?

    Solución.

71. -

72. .Si X e Y son variables aleatorias independientes con la misma función de distribución continua F, hallar una expresión para $P\{X < t, Y < t\}$. Empiécese ésta para hallar la función de distribución $G(z)$ de la variable $Z = max.\ \{X, Y\}$.

    Solución.