Potencias simbólicas

Eloísa Grifo

Noviembre de 2019

Índice

Agradecimentos

Escribí estas notas para la *Escuela de Otoño en Álgebra Conmutativa* 2019 en CIMAT, en Guanajuato, Mexico. Estas notas son basadas en otras notas que escribí para el RTG Advanced Summer Mini-course in Commutative Algebra en la University of Utah en Mayo de 2018. Muchas gracias a los organizadores, los otros conferencistas y los estudiantes que participaron en las clases en Utah y en CIMAT por sus comentarios y sugerencias. Un agradecimiento especial a Sandra Sandoval, que leyó la versión en español destas notas, y me hay ayudado a corrigir mi portuñol.

Estas notas no contienen todo la teoría sobre potencias simbólicas, pero mucho más puede ser encontrado en las referencias — por ejemplo, en [DDSG+18] y [SS17].

1. Una introducción a las potencias simbólicas

1.1. Descomposición primaria y primos asociados

Uno de los resultados fundamentales en álgebra conmutativa es el hecho de que todos los ideales en cualquier anillo Noetheriano tienen una descomposición primaria. Podemos pensar en ese teorema como una generalización del Teorema Fundamental de la Aritmética, que dice que todos los enteros n pueden ser escritos como un producto de primos. De hecho, un producto de primos *es* una descomposición primaria: si $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, la descomposición primaria del ideal (n) es $(n) = (p_1^{a_1}) \cap \cdots \cap (p_k^{a_k})$. No obstante, este ejemplo puede ser engañoso, porque sugiere que los ideales primarios son simplemente potencias de ideales primos. ¡No! Es un poco más complicado que eso.

Definición 1.1. Un ideal Q en un anillo R es *primario* si para todos los $a, b \in R$ tales que $ab \in Q$, si $a \notin Q$ entonces $b^n \in Q$ para algún $n \geqslant 1$.

Observación 1.2. El radical de un ideal primario es siempre un ideal primo. Si el radical de un ideal primario Q es el primo P, entonces decimos que Q es un ideal P-primario.

Ejercicio 1.3. Si el radical de I es un ideal maximal, entonces I es un ideal primario.

Pero no todos los ideales que tienen un radical primo son primarios, como veremos en Ejemplo 1.23.

Definición 1.4 (Descomposición primaria reducida)**.** Una *descomposición primaria* del ideal I consiste en ideales primarios $Q_1, \ldots, Q_n$ tales que $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$. Una descomposición primaria es *reducida* si ninguno de los Q_i puede ser quitado y si $\sqrt{Q_i} \neq \sqrt{Q_j}$ para cada $i \neq j$.

Ejercicio 1.5. Mostrar que una intersección finita de ideales P-primarios es un ideal P-primario.

Observación 1.6. Una descomposición primaria siempre puede modificarse para ser reducida. Basta quitar cualquier componente que sea innecesaria y sustituir componentes con el mismo radical por su intersección. La intersección de ideales primarios con el mismo radical P es un ideal P-primario.

Tal como si prometió, descomposiciones primarias siempre existen:

Teorema 1.7 (Lasker [Las05], Noether [Noe21])**.** Todo ideal en un anillo Noetheriano tiene una descomposición primaria.

Demostración. Una demostración moderna puede ser encontrada en [Mat80, Section 8]. □

Ejemplo 1.8. Algunos ejemplos de descomposiciones primarias:

a) Si I es un ideal radical, I puede ser escrito como intersección de sus primos minimales; el número de primos minimales es finito dado que el anillo es Noetheriano. Ideales primos son primarios y entonces escribir I como la intersección de sus primos minimales es precisamente escribir una descomposición primaria de I.

b) El ideal (xy, xz, yz) en $\mathbb{C}[x, y, z]$ es radical, entonces basta encontrar sus primos minimales. Es fácil de verificar que $(xy, xz, yz) = (x, y) \cap (x, z) \cap (y, z)$ es una descomposición primaria. Más generalmente, los ideales monomiales radicales son precisamente los ideales monomiales generados por monomios libres de cuadrados y las componentes primarias de un ideal monomial también son monomiales.

c) Las descomposiciones primarias, incluso las reducidas, no son necesariamente únicas. Por ejemplo, sobre cualquier campo k, el ideal (x^2, xy) en $k[x, y]$ tiene infinitas descomposiciones primarias reducidas: para cualquier $n \geqslant 1$, podemos tomar $(x^2, xy) = (x) \cap (x^2, xy, y^n)$. No obstante, estas descomposiciones tienen algunas cosas en común: por ejemplo, los radicales de las componentes primarias, que son siempre (x) y (x, y).

¿Qué información podemos extraer de una descomposición primaria? ¿Tiene algún sentido que las descomposiciones sean únicas? ¿Qué primos pueden aparecer como radicales de las componentes primarias de I? Comencemos por la última pregunta: los primos que aparecen son de hecho interesantes.

Definición 1.9 (Primo asociado)**.** Sea M un R-módulo. Un ideal primo P es un *primo asociado* de M si satisface una de las siguientes condiciones equivalentes:

(a) Existe un $a \in M$, $a \neq 0$, tal que $P = \operatorname{ann}_R(a)$.

(b) Existe una inclusión de R/P en M.

Si I es un ideal de R, decimos que un primo asociado del R-módulo R/I es un primo asociado de I. Denotaremos el conjunto de los primos asociados de I por $\operatorname{Ass}(R/I)$.

En un anillo Noetheriano, el conjunto de los primos asociados del ideal propio $I \neq 0$ es siempre no vacío y finito. Más aún, $\operatorname{Ass}(R/I) \subseteq \operatorname{Supp}(R/I)$, donde $\operatorname{Supp}(M)$ es el soporte del módulo M, el conjunto de los primos P tales que $M_P \neq 0$. Los primos minimales del soporte de R/I coinciden con los primos asociados minimales de I: estos son precisamente los primos minimales de I. Demostraciones de estos hechos y más sobre primos asociados en [Mat80, Section 7].

Ejercicio 1.10. Sea R un anillo Noetheriano e I un ideal en R. Probar que el primo P es asociado de I si y sólo si $\operatorname{depth}(R_P/I_P) = 0$.

Dado un ideal I, no estamos interesados sólo en sus primos asociados, también en los primos asociados de sus potencias. Afortunadamente, el conjunto de los primos asociados a alguna potencia de I es finito, un primer resultado fue demostrado por Ratliff [Rat76] y después extendido por Brodmann [Bro79].

Definición 1.11. Sea R un dominio Noetheriano e $I \neq 0$ un ideal en R. Definimos

$$A(I) = \bigcup_{n \geqslant 1} \operatorname{Ass}\left(R/I^n\right).$$

Teorema 1.12 (Brodmann, 1979)**.** Sea R un dominio Noetheriano e $I \neq 0$ un ideal en R. Para n suficientemente grande, $\operatorname{Ass}\left(R/I^n\right)$ es independiente de n. En particular, $A(I)$ es un conjunto finito.

La relación entre la descomposición primaria y los primos asociados es la siguiente:

Teorema 1.13 (Descomposición primaria)**.** Sea $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$ una descomposición primaria reducida de I, donde Q_i es un ideal P_i-primario para cada i. Entonces

$$\mathrm{Ass}(R/I) = \{P_1, \ldots, P_n\}.$$

Si P_i es minimal en $\mathrm{Ass}(R/I)$, entonces Q_i es único y está dado por

$$Q_i = I_{P_i} \cap R,$$

donde $- \cap R$ denota la preimagen en R por el morfismo natural $R \longrightarrow R_P$.

Demostración. En [Mat80, Section 8]. □

No obstante, si P_i es un primo *encajado* de I, lo que significa que P_i no es minimal en $\mathrm{Ass}(R/I)$, la componente primaria correspondiente a P_i no necesariamente es única.

Ejemplo 1.14. Volvamos al último ejemplo, el ideal $I = (x^2, xy)$ en $k[x, y]$. Todas las descomposiciones primarias reducidas de I tienen precisamente dos componentes, una para cada primo asociado a I: (x) y (x, y). La componente minimal es siempre (x), por que cuando localizamos en (x), y si convierte en un elemento invertible e $I_{(x)} = (x)_{(x)}$. La otra componente es (x, y)-primaria, dado que (x, y) es el único primo encajado de I. Esa componente encajada, como vimos antes, puede tomar muchas formas, tales como (x^2, xy, y^n) para cada n.

1.2. Potencias simbólicas: definición y propiedades básicas

Para obtener la n-ésima potencia simbólica del ideal radical I, tomamos la intersección de las componentes minimales en una descomposición primaria de I^n, descartando las componentes encajadas .

Definición 1.15 (Potencias Simbólicas)**.** Sea R un anillo Noetheriano e I un ideal en R sin primos encajados . La *n-ésima potencia simbólica* de I es el ideal

$$I^{(n)} \quad = \bigcap_{P \in \mathrm{Min}(R/I)} (I^n R_P \cap R).$$

Observación 1.16. En el caso en el que P es un ideal primo,

$$P^{(n)} = P^n R_P \cap R = \{a \in R : sa \in P^n \text{ para algún } s \notin P\}.$$

Cada una de las siguientes propiedades caracteriza completamente las potencias simbólicas de un ideal primo P:

- La n-ésima potencia simbólica de P es la única componente P-primaria en una descomposición primaria reducida de P^n.
- La n-ésima potencia simbólica de P es el ideal P-primario más pequeño que contiene a P^n.

La igualdad $P^{(n)} = P^n$ es equivalente a la condición de que P^n sea un ideal primario. En particular, si $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal, $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{(n)}$ para todo n: un primo encajado de $\mathfrak{m}^n$ sería un primo conteniendo estrictamente el único primo minimal, $\mathfrak{m}$, pero como $\mathfrak{m}$ es maximal tal primo no puede existir.

Observación 1.17. Si $I = P_1 \cap \cdots \cap P_k$ es un ideal radical con primos minimales $P_1, \ldots P_k$,

$$I^{(n)} = P_1^{(n)} \cap \cdots \cap P_k^{(n)}.$$

Esto es una consecuencia del hecho de que $IR_P = PR_P$ para cada primo minimal P.

Ejercicio 1.18. Mostrar que si P es un ideal primo, $P^{(n)}$ es el ideal más pequeño P-primario que contiene a P^n.

Ejercicio 1.19. Mostrar que si $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal, $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{(n)}$ para todo n.

Observación 1.20. En la definición de arriba, el hecho de que I no tiene primos encajados implica en particular que $\operatorname{Ass}(I) = \operatorname{Min}(I)$. No obstante, cuando I tiene primos encajados, tenemos realmente dos definiciones distintas de potencias simbólicas, intersectando $I^n R_P \cap R$ con P variando en $\operatorname{Ass}(I)$ ó en $\operatorname{Min}(I)$. Vamos a concentrarnos en ideales sin primos encajados, por lo que esta distinción no es relevante.

Ambas definiciones tienen sus ventajas. Cuando tomamos P variando sobre $\operatorname{Ass}(I)$, tenemos siempre $I^{(1)} = I$, aunque cuando P varia sobre $\operatorname{Min}(I)$ podemos garantizar que $I^{(n)}$ coincide con la intersección de las componentes primarias de I^n correspondientes a los primos minimales de I.

Lema 1.21. Sea I un ideal sin primos encajados en un anillo Noetheriano R.

(a) $I^{(1)} = I$.

(b) Para todo $n \geqslant 1$, $I^n \subseteq I^{(n)}$.

(c) $I^a \subseteq I^{(b)}$ si y sólo si $a \geqslant b$.

(d) Si $a \geqslant b$, entonces $I^{(a)} \subseteq I^{(b)}$.

(e) Para todo $a, b \geqslant 1$, $I^{(a)} I^{(b)} \subseteq I^{(a+b)}$.

(f) $I^n = I^{(n)}$ si y sólo si I^n no tiene primos encajados .

Demostración.

(a) Dado que todos los primos asociados de I son minimales, por el Teorema 1.13 tenemos

$$I \quad = \bigcap_{P \in \operatorname{Ass}(R/I)} (IR_P \cap R) = I^{(1)}.$$

(b) Para todos los primos P asociados a I, $I^n \subseteq I^n R_P \cap R$, dado que cualquier conjunto está contenido en la preimagen de su imagen por cualquier función.

(c) Si $a \geqslant b$, entonces $I^a \subseteq I^b \subseteq I^{(b)}$. Por otro lado, si $I^a \subseteq I^{(b)}$, entonces para cualquier primo P asociado a I, tenemos $(I_P)^a = (I^a)_P \subseteq \left(I^{(b)}\right)_P = (I_P)^b$. Sea $J = I_P$. Si $a < b$, tendríamos $J^a = J^b$, lo cual por el Lema de Nakayama implicaría $J = 0$ y entonces $I = 0$.

(d) Porque $I^a \subseteq I^b$ y tomar preimagenes preserva inclusiones.

(e) Basta localizar en los primos asociados a $I^{(a+b)}$, que son los mismos que los primos asociados a I. En la localización, tenemos $I^a I^b = I^{a+b}$.

(f) Los primos minimales de I^n y I son los mismos, dado que $\sqrt{I^n} = \sqrt{I}$. Una descomposición primaria reducida de I^n tiene la forma

$$I^n = I^{(n)} \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_k,$$

donde $Q_1, \ldots, Q_k$ son componentes primarias correspondientes a cada primo encajado de I^n. No existe ninguna componente Q_i precisamente cuando $I^n = I^{(n)}$. □

Como (e) sugiere, aunque I no tenga ningun primo encajado, I^n puede tener primos encajados y en particular las implicaciones contrarias a (b) y (d) no son satisfechas en general.

Las potencias simbólicas de un ideal coinciden con las potencias usuales si el ideal está generado por una sucesión regular. No obstante, esta no es una condición suficiente – hablaremos más sobre esto más tarde.

Lema 1.22. Si I está generado por una sucesión regular en un anillo Cohen-Macaulay, entonces $I^n = I^{(n)}$ para todo $n \geqslant 1$.

Demostración. Dado que I está generado por una sucesión regular, el anillo graduado asociado a I, el anillo graduado $\bigoplus_{n\geqslant 0} I^n/I^{n+1}$, es isomorfo a un anillo de polinomios sobre R/I en el mismo número de variables que generadores de I. En particular, I^n/I^{n+1} es un módulo libre sobre R/I para cada n. Entonces los primos asociados a R/I y I^n/I^{n+1} son los mismos. Consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow I^n/I^{n+1} \longrightarrow R/I^{n+1} \longrightarrow R/I^n \longrightarrow 0\,.$$

Por [Mat80, Lemma 7.F], $\operatorname{Ass}(R/I^{n+1}) \subseteq \operatorname{Ass}(I^n/I^{n+1}) \cup \operatorname{Ass}(R/I^n)$. Cuando $n = 1$, tenemos $\operatorname{Ass}(R/I^2) \subseteq \operatorname{Ass}(R/I)$ y como siempre tenemos que $\operatorname{Ass}(R/I) \subseteq \operatorname{Ass}(R/I^2)$, concluimos que los primos asociados a I^2 son los mismos que los primos asociados a I. Procediendo por inducción obtenemos el resultado. □

En particular, las potencias simbólicas de un ideal primo no son, en general, triviales:

Ejemplo 1.23. Consideremos un campo k, un entero positivo $n > 1$ y sean $A = k[x, y, z]$, $p = (x, z)$, $I = (xy - z^n)$ y $R = A/I$. Consideremos el ideal primo $P = p/I$ y notemos que $y \notin P$. Dado que $xy = z^n \in P^n$, tenemos $x \in P^{(n)}$. No obstante, $x \notin P^n$ y entonces $P^n \subsetneq P^{(n)}$.

En particular, P^n no es un ideal primario, pero su radical es primo.

La igualdad entre potencias ordinarias y simbólicas de un ideal primo puede fallar aún en un anillo regular:

Ejercicio 1.24. Consideremos el ideal $I = I_2(X)$ generado por los menores 2×2 de una matriz 3×3 genérica,

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix}$$

en el anillo de polinomios $R = k[X] = k\left[x_{i,j} \,|\, 1 \leqslant i, j \leqslant 3\right]$ generado por las variables que aparecen en una matriz X sobre el campo k. Mostrar que $g = \det X \in P^{(2)}$, pero $g \notin P^2$.

Ejemplo 1.25. Sea k un campo , $R = k[x, y, z]$ y consideremos el morfismo $\psi : R \longrightarrow k[t]$ dado por $\psi(x) = t^3$, $\psi(y) = t^4$ y $\psi(z) = t^5$. Sea P el ideal primo

$$P = \ker \psi = \left(\underbrace{x^2y - z^2}_{f}, \underbrace{xz - y^2}_{g}, \underbrace{yz - x^3}_{h} \right).$$

Vamos a demostrar que $P^{(2)} \neq P^2$.

Primero, consideremos una graduación no estándar en R para que ψ sea un morfismo de grado 0 e I un ideal homogéneo: x con grado 3, y con grado 4 y z con grado 5. Entonces f tiene grado 10, g tiene grado 8, h tiene grado 9 y el polinomio $fg - h^2$ es homogéneo de grado 18. Notemos que $fg - h^2 = xq$ donde q es un elemento de grado $18 - 3 = 15$. Dado que $x \notin P$ y $fg - h^2 \in P^2$, tenemos $q \in P^{(2)}$. No obstante, todos los elementos en P tienen al menos grado 8, entonces todos los elementos en P^2 tienen al menos grado 16 y por tanto $q \notin P^2$. Concluimos que $P^2 \neq P^{(2)}$.

1.3. Potencias simbólicas y geometría

Una de las motivaciones para estudiar las potencias simbólicas es el hecho de que en un anillo regular, las potencias simbólicas de un ideal radical corresponden a una noción de potencia geométrica natural por el siguiente resultado clásico:

Teorema 1.26 (Zariski–Nagata [Zar49, Nag62])**.** Sea $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d]$ e I un ideal radical en R. Para todo $n \geqslant 1$,

$$I^{(n)} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supseteq I \\ \mathfrak{m} \in \operatorname{mSpec}(R)}} \mathfrak{m}^n.$$

Podemos pensar en este resultado como una versión de orden más elevada del Teorema de Nullstellensatz. Nullstellensatz nos dice que los ideales maximales en R estan en biyección con los puntos en $\mathbb{C}^d$ y que los polinomios en nuestro ideal radical I son los que se anulan en cada punto de la variedad algebraica correspondiente en k^d:

$$I = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supseteq I \\ \mathfrak{m} \in \operatorname{mSpec}(R)}} \mathfrak{m}.$$

Los polinomios que se anulan en cada punto de la variedad correspondiendo a I forman un ideal maximal $\mathfrak{m}$ que contiene a I. El Teorema de Zariski–Nagata nos dice entonces que los polinomios que se anulan hasta orden n en nuestra variedad son precisamente los polinomios en $I^{(n)}$ — los polinomios en $\mathfrak{m}^n$ son precisamente los que se anulan hasta orden n en los puntos que corresponden a $\mathfrak{m}$.

Vamos a demostrar este teorema a través de una descripción adicional, usando operadores diferenciales:

$$I^{(n)} = \left\{ f \in R \,\middle|\, \frac{\partial^{a_1+\cdots+a_d}}{\partial x_1^{a_1}\cdots x_d^{a_d}}(f) \in I \text{ para cada } a_1+\cdots+a_d < n \right\} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m}\supseteq I\\ \mathfrak{m}\in\mathrm{mSpec}(R)}} \mathfrak{m}^n.$$

Podemos describir potencias simbólicas usando operadores diferenciales más generalmente, sobre cualquier campo perfecto. Para eso, usaremos la siguiente definición:

Definición 1.27 (Operadores Diferenciales)**.** Para una k-álgebra R finitamente generada, los operadores diferenciales k-lineales en R de orden n, $D_R^n \subseteq \mathrm{Hom}_k(R,R)$, están definidos de la siguiente forma:

- Los operadores diferenciales de orden cero son simplemente las funciones R-lineales:
$$D^0_{R|k} = R \cong \mathrm{Hom}_R(R,R).$$
- Decimos que $\delta \in \mathrm{Hom}_k(R,R)$ es un operador de orden n y escribimos $\delta \in D_R^n$, si
$$[\delta, r] = \delta r - r\delta$$
es un operador de orden $n-1$ para todo $r \in D^0_{R|k}$.

El anillo de operadores diferenciales k-lineales en R es $D_{R|k} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D^n_{R|k}$.

Si R y k son claros en el contexto, escribimos sólo D^n y D.

Definición 1.28. Sea R una k-álgebra finitamente generada, I un ideal en R y n un entero positivo. La n-ésima potencia diferencial k-lineal de I es

$$I^{\langle n\rangle} = \{ f \in R \mid \delta(f) \in I \text{ para cualquier } \delta \in D_R^{n-1} \}.$$

El Teorema de Zariski–Nagata dice que las potencias diferenciales de I son lo mismo que sus potencias simbólicas:

Teorema 1.29 (Zariski–Nagata [Zar49, Nag62], cf. [DDSG+18])**.** Sea $R = k[x_1,\ldots,x_d]$, donde k es un campo perfecto y sea I un ideal radical. Para todo $n \geqslant 1$,

$$I^{(n)} = I^{\langle n\rangle} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m}\supseteq I\\ \mathfrak{m}\in\mathrm{mSpec}(R)}} \mathfrak{m}^n.$$

Para probar este teorema, precisamos de entender potencias diferenciales un poco mejor, para demostrar en última estancia que tienen las mismas propiedades que caracterizan a las potencias simbólicas. Vamos a mostrar que para cualquier ideal primo P:

1) $P^{\langle n\rangle}$ es un ideal P-primario. (Lema 1.33 y Proposición 1.34)

2) $P^n \subseteq P^{\langle n\rangle}$. (Proposición 1.35)

3) $\left(P^{\langle n\rangle}\right)_P = (P_P)^{\langle n\rangle}$. (Lema 1.36)

4) Dado un ideal maximal $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{\langle n\rangle}$. (Observación 1.37)

Dadas estas propiedades, 1) y 2) juntos implican $P^{(n)} \subseteq P^{\langle n\rangle}$, dado que $P^{(n)}$ es el ideal más pequeño P-primario que contiene a P^n. Para mostrar $P^{\langle n\rangle} \subseteq P^{(n)}$, solo necesitamos mostrar que esto se verifica después de localizar en P, dado que este es el único primo asociado a $P^{(n)}$, por el Ejercicio 1.30 abajo. Pero 3) dice que tomar potencias diferenciales conmuta con localización y después de localizar en P, P se convierte en el único ideal maximal; entonces 4) completa la demostración de que $P^{\langle n\rangle} \subseteq P^{(n)}$ para cualquier primo P.

Para el caso más general de un ideal radical I, podemos escribir I como una intersección de un número finito de primos, digamos

$$I = P_1 \cap \cdots \cap P_r.$$

Entonces

$$I^{(n)} = P_1^{(n)} \cap \cdots \cap P_r^{(n)} = P_1^{\langle n\rangle} \cap \cdots \cap P_r^{\langle n\rangle} = (P_1 \cap \cdots \cap P_r)^{\langle n\rangle} = I^{\langle n\rangle}.$$

Ejercicio 1.30. Dados ideales I y J en un anillo Noetheriano R, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $I \subseteq J$;

(b) $I_P \subseteq J_P$ para todos los primos $P \in \mathrm{Supp}(R/J)$;

(c) $I_P \subseteq J_P$ para todos los primos $P \in \mathrm{Ass}(R/J)$.

Ejercicio 1.31. Para cualquier familia de ideales $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$,

$$\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha^{\langle n\rangle} = \left(\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha\right)^{\langle n\rangle}$$

para cualquier $n \geqslant 0$.

Nótese que en lo que sigue y hasta la Proposición 1.35, k puede ser cualquier campo.

Observación 1.32. Dado que $D_R^{n-1} \subseteq D_R^n$, concluimos que $I^{\langle n+1\rangle} \subseteq I^{\langle n\rangle}$. De hecho, dados ideales $I \subseteq J$, tenemos $I^{\langle n\rangle} \subseteq J^{\langle n\rangle}$ para cualquier $n \geqslant 0$.

Lema 1.33. Sea R una k-álgebra finitamente generada, I un ideal en R y n un entero positivo. El conjunto $I^{\langle n\rangle}$ es un ideal.

Demostración. Sean $f, g \in I^{\langle n \rangle}$ entonces $f + g \in I^{\langle n \rangle}$, dado que para cualquier $\delta \in D_R^{n-1}$,

$$\delta(f+g) = \underbrace{\delta(f)}_{\in I} + \underbrace{\delta(g)}_{\in I} \in I.$$

Tenemos que mostrar que $rf \in I^{\langle n \rangle}$ para cualesquiera $r \in R$ y $f \in I^{\langle n \rangle}$. Dado $\delta \in D^{n-1}$, nótese que $f \in I^{\langle n \rangle} \subseteq I^{\langle n-1 \rangle}$, $[\delta, r] \in D^{n-2}$, $\delta(f) \in I$ y entonces

$$\delta(rf) = \underbrace{\underbrace{[\delta, r]}_{\in D^{n-2}} (\underbrace{f}_{\in I^{\langle n-1 \rangle}})}_{\in I} + r \underbrace{\delta(f)}_{\in I} \in I.$$

Concluimos que $\delta(rf) \in I$ y por tanto $rf \in I^{\langle n \rangle}$. $\square$

Proposición 1.34. Sea R una k-álgebra finitamente generada. Sea P un ideal primo en R y n un entero positivo. Entonces $P^{\langle n \rangle}$ es P-primario.

Demostración. Vamos a usar inducción en n. El caso base es claro: $P^{\langle 1 \rangle} = P$ es de hecho P-primario.

Ahora supongamos que $P^{\langle n \rangle}$ es P-primario. Para mostrar que $P^{\langle n+1 \rangle}$ también es P-primario, precisamos demostrar que para cualesquiera $r \notin P$ y $f \in P$ tales que $rf \in P^{\langle n+1 \rangle}$, tenemos $f \in P^{\langle n+1 \rangle}$. Dado $\delta \in D^n$,

$$\delta(rf) = [\delta, r](f) + r\delta(f) \in P.$$

Como $rf \in P^{\langle n+1 \rangle} \subseteq P^{\langle n \rangle}$, tenemos $f \in P^{\langle n \rangle}$ por la hipótesis de inducción. Entonces $[\delta, r](f) \in P$, ya que $[\delta, r] \in D^{n-1}$. Concluimos que $r\delta(f) = \delta(rf) - [\delta, r](f) \in P$. Entonces $r\delta(f) \in P$ y por tanto $\delta(f) \in P$, dado que P es un ideal primo y $r \notin P$. Concluimos que $f \in P^{\langle n+1 \rangle}$. $\square$

Proposición 1.35. Sea R una k-álgebra finitamente generada, I un ideal en R y n un entero positivo. Tenemos $I^n \subseteq I^{\langle n \rangle}$.

Demostración. Una vez más usamos inducción en n. El caso base es simple: $I = I^{\langle 1 \rangle}$ porque $D^0 = R$.

Supongamos que $I^n \subseteq I^{\langle n \rangle}$. Nótese que I^n está generado por los elementos de la forma fg con $f \in I$, $g \in I^n$. Para mostrar que $I^{n+1} \subseteq I^{\langle n+1 \rangle}$, basta mostrar que $fg \in I^{\langle n+1 \rangle}$ para cada f y g.

Para esto, consideramos cualquier $\delta \in D^n$ y vamos a mostrar que $\delta(fg) \in I$. De hecho, dado que por hipótesis de indución tenemos $g \in I^n \subseteq I^{\langle n \rangle}$, concluimos que

$$\delta(fg) = \underbrace{\underbrace{[\delta, f]}_{\in D^{n-1}} (\underbrace{g}_{\in I^{\langle n \rangle}})}_{\in I} + \underset{\in I}{f}\, \delta(g) \in I.$$

Nótese que usamos el hecho de que $\delta f = [\delta, f] + f\delta$. Finalmente, obtenemos $I^{n+1} \subseteq I^{\langle n+1 \rangle}$. $\square$

Lema 1.36. Para cualquier ideal radical I y primo P en una k-álgebra R, $(I_P)^{\langle n \rangle} = \left(I^{\langle n \rangle}\right)_P$.

Mucho más se cumple: tomar potencias diferenciales conmuta con la localización en cualquier conjunto multiplicativo W [BJNB19, Lemma 3.9].

Observación 1.37. Sea k un campo, $R = k[x_1, \ldots, x_d]$ o $R = k[\![x_1, \ldots, x_d]\!]$ y $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_d)$. Entonces

$$D_R^n = R\left\langle \frac{1}{\alpha_1!}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{1}{\alpha_d!}\frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} \;\middle|\; \alpha_1 + \ldots + \alpha_d \leqslant n \right\rangle.$$

Si $f \notin \mathfrak{m}^n$, entonces f tiene algún monomio de la forma $x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ con un coeficiente $\lambda \neq 0$ para algún $\alpha_1 + ... + \alpha_d < n$. Fijemos tal monomio que sea también minimal entre los monomios apareciendo en f bajo el orden lexicografico graduado. Aplicando el operador diferencial $\frac{1}{\alpha_1!}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{1}{\alpha_d!}\frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}$ a un elemento $\lambda x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ obtenemos $\lambda \neq 0$ y cualquier otro monomio apareciendo en f es enviado a un monomio no constante o cero. Consequentemente, $f \notin \mathfrak{m}^{\langle n \rangle}$. Conluimos que $\mathfrak{m}^{\langle n \rangle} \subseteq \mathfrak{m}^n$. Dado que $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{m}^{\langle n \rangle}$ por el Lema 1.35, concluimos que $\mathfrak{m}^{\langle n \rangle} = \mathfrak{m}^n$.

Con una versión mucho más técnica de esta idea, podemos demostrar que si el campo k es perfecto, podemos tomar cualquier ideal maximal $\mathfrak{m}$ en una álgebra R esencialmente de tipo finito sobre k y $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{\langle n \rangle}$ también se verifica. Una demostración completa puede ser encontrada en [DSGJ, Theorem 3.6].

Teorema 1.38 (Teorema de Zariski–Nagata para anillos de polinomios y series de potencias [Zar49])**.** Sea k un campo perfecto y $R = k[x_1, \ldots, x_d]$ o $R = k[\![x_1, \ldots, x_d]\!]$. Para cualquier primo P y cualquier ideal maximal $\mathfrak{m} \supseteq P$, tenemos $P^{(n)} \subseteq \mathfrak{m}^n$ para $n \geqslant 1$. Más aún,

$$P^{(n)} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supseteq I \\ \mathfrak{m} \in \mathrm{mSpec}(R)}} \mathfrak{m}^n.$$

Demostración. Por un lado,

$$P^{(n)} \underset{1{,}34}{\subseteq} P^{\langle n \rangle} \underset{1{,}32}{\subseteq} \mathfrak{m}^{\langle n \rangle} \underset{1{,}37}{=} \mathfrak{m}^n.$$

Por otro lado, supongamos que $f \in \mathfrak{m}^n$ para todos los ideales maximales $\mathfrak{m} \supseteq P$. Para cada ideal maximal $\mathfrak{m}$ que contiene a P, tenemos $f \in \mathfrak{m}^{\langle n \rangle}$ por 1.37 y entonces para cada $\delta \in D^{n-1}$ tenemos $\delta(f) \in \mathfrak{m}$. Pero R/P es un álgebra finitamente generada sobre un campo y por esto un anillo Hilbert-Jacobson, entonces todos los ideales primos son una intersección de ideales maximales:

$$P = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supseteq P \\ \mathfrak{m} \in \mathrm{mSpec}(R)}} \mathfrak{m}.$$

Entonces $\partial(f) \in P$ y $f \in P^{\langle n \rangle}$. □

Existen muchas extensiones de Zariski–Nagata. Eisenbud y Hochster probaron que si P es un ideal primo en cualquier anillo Noetheriano R, siempre es verdad que

$$P^{(n)} \supseteq \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supseteq P \\ \mathfrak{m} \in \mathrm{mSpec}(R)}} \mathfrak{m}^n,$$

con igualdad si R es un anillo regular [EH79]. Notemos que este resultado no necesita que R contenga un campo. Como la descripción de las potencias simbólicas a través de operadores diferenciales, también existe una versión de este hecho en característica mixta, pero necesitamos considerar más que los operadores diferenciales. En $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_d]$, por ejemplo, necesitamos también de alguna noción de diferenciación por enteros primos p, lo que podemos obtener a través de las p-derivaciones de Joyal y Buium [Joy85, Bui95], como está demostrado en [DSGJ].

2. ¿Cómo calcular potencias simbólicas?

Tipicamente, la definición no es una forma práctica o eficiente de calcular potencias simbólicas, aún en un anillo de polinomios. Calcular la intersección de las potencias de los ideales maximales correspondientes también puede ser muy difícil: a menos que el ideal que estamos considerando corresponda a un conjunto finito de puntos, tendremos que tomar la intersección de un conjunto infinito de ideales.

Con la ayuda de una computadora, podemos calcular todas las componentes primarias de I y I^n y tomar la intersección (finita) de las componentes apropiadas de I^n para obtener $I^{(n)}$, pero desafortunadamente el problema de encontrar una descomposición primaria de un ideal es notoriamente difícil. Encontrar la descomposición primaria de un ideal monomial es un problema NP completo [HS02]. Discutiremos métodos alternativos para calcular potencias simbólicas, algunos de los cuales son usados por el paquete `SymbolicPowers` [DGSS17] para el software de álgebra conmutativa `Macaulay2` [GS].

Para algunas clases especiales de ideales podemos calcular potencias simbólicas a través de métodos que evitan calcular descomposiciones primarias de I^n.

2.1. Ideales monomiales

Ejemplo 2.1. Sea k un campo y $R = k[x, y, z]$. En el Ejemplo 1.8 b, encontramos una descomposición primaria reducida para el siguiente ideal radical:

$$I = (xy, xz, yz) = (x, y) \cap (x, z) \cap (y, z).$$

Cuando localizamos en cada primo minimal de I, que son (x, y), (x, z) y (y, z), la tercer variable se convierte en un elemento invertible y las otras dos componentes se convierten en todo el anillo. La preimagen de $(x, y)^n R_{(x,y)}$ en R es $(x, y)^n$. Entonces, para cada n

$$I^{(n)} = (x, y)^n \cap (x, z)^n \cap (y, z)^n.$$

En particular, $xyz \in I^{(2)}$. No obstante, todos los elementos homogéneos de I^2 tienen al menos grado 4 porque I es un ideal homogéneo generado en grado 2. Entonces $xyz \notin I^2$ e $I^2 \neq I^{(2)}$. El ideal maximal (x, y, z) es un primo asociado a I^2, porque $(x, y, z) = (I^2 : xyz)$.

Ejercicio 2.2. Si I es un ideal generado por monomios libres de cuadrados en $k[x_1, \dots, x_n]$, entonces I es un ideal radical y sus primos minimales son generados por variables. Dada una descomposición primaria reducida $I = \bigcap_i Q_i$, donde cada Q_i es un ideal generado por variables, demostrar que $I^{(n)} = \bigcap_i Q_i^n$.

Más sobre las potencias simbólicas de ideales monomiales en [CEHH16].

2.2. Conjuntos finitos de puntos en $\mathbb{A}^n$ y $\mathbb{P}^n$

Hay diversos ejemplos de ideales radicales correspondientes a conjuntos finitos de puntos que tienen potencias simbólicas con comportamientos muy interesantes.

Dado un campo k, un punto afín P en $\mathbb{A}_k^n$ con coordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$ corresponde al ideal $I(P) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ en $k[x_1, \ldots, x_n]$ y el punto en el espacio proyectivo $\mathbb{P}_k^n$ con coordenadas $(a_0 : \cdots : a_n)$ corresponde al ideal homogéneo $(a_i x_0 - a_0 x_i, \ldots, a_i x_n - a_n x_i)$ en $k[x_0, \ldots, x_n]$ para cualquier i tal que $a_i \neq 0$. Más generalmente, dado un conjunto de puntos $X = \{P_1, \ldots, P_p\}$ en $\mathbb{A}_k^n$ o $\mathbb{P}_k^n$, el ideal correspondiente a X es $I(X) = \cap_{i=1}^p I(P_i)$. En ambos casos, el caso afín y el caso proyectivo, las potencias simbólicas del ideal de puntos $I(X)$ son dadas por $I(X)^{(n)} = \cap_{i=1}^p I(P_i)^n$, los polinomios que se anulan hasta orden n en X.

2.3. Ideales de determinantes genéricos

Los ideales de determinantes genéricos son una de las raras clases de ideales que tienen potencias simbólicas que podemos describir explícitamente. Aún más, existe una descripción explícita de las descomposiciones primarias de todas las potencias de ideales en esta familia.

Ejemplo 2.3 (De Concini–Eisenbud–Procesi [DEP80])**.** Sea k un campo de característica 0 o $p > \min\{t, n-t, m-t\}$. Consideremos una matriz X genérica $n \times m$, con $n \leqslant m$, en el anillo de polinomios $R = k[X]$ generado por todas las variables en X y el ideal $I = I_t(X)$ generado por los menores $t \times t$ de X, para algún $2 \leqslant t \leqslant n$.

Los productos de la forma $\Delta = \delta_1 \cdots \delta_k$, donde cada δ_i es un menor s_i de X, generan $R = k[X]$ como un espacio vectorial sobre k. Más aún, hay un subconjunto interesante de estos productos, conocidos como monomios estándar, que forman una base para R como un espacio vectorial sobre k. Estos son suficientes para describir las potencias simbólicas de $I = I_t(X)$ y para dar descomposiciones primarias explícitas de I. Dado un producto $\Delta = \delta_1 \cdots \delta_k$ como arriba, $\Delta \in I^{(r)}$ si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{k} \max\{0, s_i - t + 1\} \geqslant r.$$

Notemos también que cada $s_i \leqslant n$, porque no hay menores mayores que n. El ideal $I^{(r)}$ está generado por todos los productos $\Delta \in I^{(r)}$ de esta forma. En particular, notemos que si multiplicamos un tal Δ por menores de tamaño $\leqslant t-1$ no afectaremos el hecho de que Δ es o no es un elemento de $I^{(n)}$.

El ideal I^s tiene la siguiente descomposición primaria:

$$I^s = \bigcap_{j=1}^{t} \left(I_j(X)\right)^{((t-j+1)s)} = \left(I_1(X)\right)^{(ts)} \cap \cdots \cap \left(I_{t-1}(X)\right)^{(2s)} \cap \left(I_t(X)\right)^{(s)}.$$

Para obtener una descomposición primaria reducida, tomamos la descomposición anterior y quitamos los $I_j(X)$ con $j < n - s(n-t)$.

Existen fórmulas semejantes para el ideal generado por los menores $t \times t$ de una matriz simétrica genérica $n \times n$ [JMnV15, Proposition 4.3 and Theorem 4.4] o para el ideal generado por las $2t$-Pfaffians de una matriz genérica $n \times n$ [DN96, Theorem 2.1 and Theorem 2.4]. El libro [BV88] contiene mucho más información sobre ideales generados por determinantes.

Ejercicio 2.4. Sea $I = I_2(X)$, donde X es una matriz genérica 3×3. Encuentra generadores para $I^{(2)}$.

Ejercicio 2.5. Demuestra que si I es el ideal de $k[X]$ generado por los menores maximales de una matriz genérica X, donde k satisface las condiciones del Ejemplo 2.3, entonces $I^n = I^{(n)}$ para todo $n \geqslant 1$.

No obstante, estos resultados no nos informan sobre los ideales generados por determinantes de matrices que no sean genéricas.

Ejemplo 2.6. En el Ejemplo 1.25, vimos que $P^{(2)} \neq P^2$ donde P es el ideal primo

$$P = \left(x^2y - z^2, xz - y^2, yz - x^3\right)$$

en $R = k[x, y, z]$. Este ideal es generado por los menores 2×2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} x^2 & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}.$$

Además, como vamos ver en el Teorema 3.2, $P^{(n)} \neq P^n$ para todo n. En contraste, por Ejercicio 2.5 las potencias simbólicas y ordinarias son iguales para todos los ideales generados por los menores maximales de una matriz genérica.

2.4. Saturaciones

En general, potencias simbólicas son siempre una saturación.

Definición 2.7. Sean I, J ideales en el anillo Noetheriano R. La *saturación* de I con respecto a J es el ideal

$$(I : J^\infty) := \bigcup_{n \geqslant 1} (I : J^n) = \{r \in R : rJ^n \subseteq I \text{ para algún } n \geqslant 1\}.$$

Observación 2.8. Los ideales $(I : J^n)$ forman una cadena ascendente de ideales y entonces $(I : J^\infty) = (I : J^n)$ para algún n. Computacionalmente, podemos tomar los sucesivos $(I : J^n)$ hasta que estos se estabilicen.

Lema 2.9. Sea I un ideal en un anillo Noetheriano R sin primos encajados. Existe un ideal J tal que para todo $n \geqslant 1$,

$$I^{(n)} = (I^n : J^\infty).$$

Este ideal J puede ser cualquiera de uno de los siguientes:

(a) El ideal principal $J = (s)$ generado por cualquier elemento $s \in R$ que no esté contenido en ninguno de los primos minimales de I, pero que esté contenido en todos los primos minimales de I^n para todo $n \geqslant 1$.

(b) La intersección de todos los primos no minimales en $A(I)$;

(c) La intersección de cualquier conjunto finito de primos $P \supseteq I$ que no sean minimales sobre I, mientras ese conjunto contenga todos los primos no minimales en $A(I)$.

Demostración. La notación $A(I)$ indica el conjunto de todos los primos que son asociados a alguna potencia de I (cf. 1.11), lo que sabemos debe ser un conjunto finito por el Teorema 1.12. Si $A(I)$ consiste solo de primos minimales de I, entonces todas las potencias simbólicas y ordinarias de I coinciden y por eso podemos simplemente tomar $J = R$. Supongamos que algún I^n tiene algún primo encajado, sean $P_1, \dots, P_k$ todos los primos en $A(I)$ que no son primos minimales de I. Sea s un elemento que no pertenece a ningún primo minimal de I pero tal que $s \in P_1 \cap \cdots \cap P_k$. Para cada n, consideremos una descomposición primaria reducida

$$I^n = I^{(n)} \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_t,$$

donde cada Q_j es un ideal primario correspondiente a una componente encajada; el radical de Q_j es necesariamente uno de los P_i. Dado que $s \in \sqrt{Q_i}$ para todo i, tenemos $(Q_i : s^\infty) = R$ y entonces

$$(I^n : s^\infty) = \left(I^{(n)} : s^\infty\right) \cap (Q_1 : s^\infty) \cap \cdots \cap (Q_t : s^\infty) = (I^{(n)} : s^\infty).$$

Por otro lado, $I^{(n)}$ es intersección de ideales primarios y los radicales de estos ideales no contienen s. Concluimos que $(I^{(n)} : s^\infty) = I^{(n)}$. Así terminamos la demostración de a).

Tomemos ahora para J la intersección de todos los primos no minimales de $A(I)$. Dado que $s \in J$, entonces

$$(I^n : J^\infty) \subseteq (I^n : s^\infty) = I^{(n)}.$$

Dada una descomposición primaria reducida

$$I^n = I^{(n)} \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_t,$$

tenemos $J \subseteq \sqrt{Q_1} \cap \cdots \cap \sqrt{Q_t}$. Entonces existe una potencia de J, digamos J^k, que está contenida en $Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$ y entonces $I^{(n)} J^k \subseteq I^n$. Podemos ahora probar b):

$$I^{(n)} \subseteq (I^n : J^k) \subseteq (I^n : J^\infty).$$

Finalmente, podemos tomar para J la intersección de cualquier conjunto de primos no minimales $P \supseteq I$, mientras este conjunto contenga todos los primos no minimales en $A(I)$. De hecho, en la demostración de arriba usamos solamente dos hechos: que J contiene algún elemento que no pertenece a ningún primo minimal de I y el hecho de que $J \subseteq \sqrt{Q}$ para cualquier componente primaria reducida Q de I^n para algún n. $\square$

Ejercicio 2.10. Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local y P un primo con altura $\dim R - 1$. Demostrar que $P^{(n)} = (P^n : \mathfrak{m}^\infty)$ para todo $n \geqslant 1$.

Desafortunadamente, encontrar J como en el Lema 2.9 requiere en principio que tengamos algún conocimiento concreto del conjunto $A(I)$. Sería suficiente si tendríamos una estimación del valor n para el cual $\operatorname{Ass}(R/I^n)$ se estabilizara, pero esencialmente no hay ninguna estimación efectiva de este valor. El número de primos asociados a alguna potencia de un ideal primo puede ser arbitrariamente elevado [KS19].

Definición 2.11 (Ideal Jacobiano)**.** Sea k un campo y $R = k[x_1, \ldots, x_n]/I$, donde $I = (f_1, \ldots, f_r)$ tiene altura pura h. La *matriz jacobiana* de R es la matriz dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

El *ideal jacobiano* de R es el ideal generado por los menores $h \times h$ de la matriz jacobiana.

El ideal jacobiano está de hecho bien definido: la definición no depende de la elección de una presentación de R. El ideal jacobiano determina el locus singular de R. Más sobre matrices e ideales jacobianos en [Eis95, Section 16.6].

Teorema 2.12 (Criterio Jacobiano)**.** Sea $R = k[x_1, \ldots, x_n]/I$ con k un campo perfecto y supongamos que I tiene altura pura h. El ideal jacobiano J define el locus singular de R: un primo P contiene J si y sólo si R_P no es un anillo regular.

Demostración. Ver [Eis95, Corollary 16.20]. $\square$

Este resultado nos da un truco para calcular potencias simbólicas de ideales de altura pura en un anillo de polinomios.

Lema 2.13. Sea $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ donde k es un campo perfecto e $I = (f_1, \ldots, f_r)$ un ideal de altura pura h. Sea

$$J = I_h \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

el ideal generado por los menores $h \times h$ de los generadores de I. Si $t \in J$ no está en ningún primo minimal de I, entonces para todo $n \geqslant 1$,

$$I^{(n)} = (I^n : t^\infty).$$

Demostración. Por Lema 2.9, necesitamos sólo demostrar que tal t está contenido en todos los primos P que son primos encajados de algún I^n. Supongamos que P es un primo encajado de I^n para algún n. Entonces P_P es un primo encajado de I_P^n y entonces $I_P^n \neq I_P^{(n)}$. En particular, I_P no está generado por una sucesión regular, por Teorema 1.22, entonces $(R/I)_P$ no puede ser un anillo regular. Por Teorema 2.12, $P \supseteq J \ni t$. $\square$

3. Problemas abiertos

3.1. La igualdad entre las potencias ordinarias y simbólicas

En general, la pregunta de que ideales tienen las mismas potencias ordinarias y simbólicas es abierta. Hay condiciones en I que sabemos que son equivalentes a $I^{(n)} = I^n$ para todo $n \geqslant 1$, dadas por Hochster [Hoc73] en el caso que I es primo y extendidas por Li y Swanson [LS06] para el caso en que I es cualquier ideal radical. Esas condiciones son validas en cualquier anillo Noetheriano, pero son difíciles de verificar en la práctica, o incluso de describir aquí.

Pregunta 3.1. Sea R un anillo regular. ¿Para que ideales I sin primos encajados en R tenemos $I^{(n)} = I^n$ para cualquier $n \geqslant 1$? ¿Hay algún invariante d dependiendo sólo del anillo R o del ideal I tal que $I^{(n)} = I^n$ para $n \leqslant d$ (o para $n = d$) implica $I^{(n)} = I^n$ para cualquier $n \geqslant 1$?

Sabemos la respuesta a esta pregunta sólo en algunos casos particulares. Uno de esos casos es [Hun86, Corollary 2.5]:

Teorema 3.2 (Huneke, 1986)**.** Sea R un anillo regular local de dimensión 3 y P un ideal primo en R de altura 2. Las condiciones siguientes son equivalentes:

(a) $P^{(n)} = P^n$ para todo $n \geqslant 1$;

(b) $P^{(n)} = P^n$ para algún $n \geqslant 2$;

(c) P está generado por una sucesión regular.

En particular, si P es un primo de altura 2 en un anillo regular local de dimensión 3, tenemos $P^{(n)} \neq P^n$ para todo $n \geqslant 2$ siempre que P tenga al menos 3 generadores. Esto sugiere una relación entre el número mínimo de generadores del ideal y la igualdad (o no) entre potencias ordinarias y simbólicas.

Teorema 3.3 (See Theorem 2.3 in [CFG$^+$16], also [Mor99, HU89])**.** Sea $R = k[x_0, \ldots, x_n]$ donde k es cualquier campo. Sea I un ideal de altura 2 en R tal que R/I es Cohen-Macaulay y tal que I_P está generado por una sucesión regular para todos los primos $P \neq (x_0, \ldots, x_n)$ conteniendo a I. Entonces $I^{(k)} = I^k$ para cualquier $k < n$ independentemente del número mínimo de generadores de I. Adicionalmente, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $I^{(k)} = I^k$ para todo $k \geqslant 1$;

(b) $I^{(n)} = I^n$;

(c) I está generado por a lo más n elementos.

Observación 3.4. Notemos que si P es un primo de altura 2 en un anillo de polinomios en 3 variables ($n = 2$ en el Teorema 3.3), entonces las conclusiones de los Teoremas 3.2 y 3.3 son las mismas, pero el Teorema 3.2 tiene aún más equivalencia con la siguiente condición:

(d) $I^{(k)} = I^k$ para algún $k \geqslant 2$;

Es natural preguntar si a las condiciones del Teorema 3.3 podemos agregar la condición (d).

Más generalmente, hay respuestas para el problema de la igualdades entre potencias ordinarias y simbólicas también para la clase de los ideales primos licci [HU89, Corollary 2.9]. Para primos de altura $\dim R - 1$, la igualdad de *todas* las potencias ordinarias y simbólicas es equivalente a que el ideal este generado por una sucesión regular.

Teorema 3.5 (Cowsik–Nori [CN76]). Sea R un anillo de Cohen-Macaulay local y P un ideal primo tal que R_P es un anillo regular. Si R/P^n es Cohen-Macaulay para todo $n \geqslant 1$, entonces P está generado por una sucesión regular.

Ejercicio 3.6. Sea R un anillo regular local y P un primo tal que $\dim(R/P) = 1$. Probar que $P^{(n)} = P^n$ para todo $n \geqslant 1$ si y sólo si P está generado por una sucesión regular.

En dimensión mayor que 3, podemos encontrar ideales primos que no están generados por sucesiones regulares pero cuyas potencias simbólicas son iguales a las potencias ordinarias.

Ejemplo 3.7 (Example 4.4 en [HH92], caso especial de [Sch91] y Corollary 4.3 en [GH19]). Consideremos el primo P en $R = k[x, y, z, w]$ que es el núcleo del morfismo $R \longrightarrow k[s, t]$ determinado por $x \mapsto s^3$, $y \mapsto s^2t$, $z \mapsto st^2$ y $w \mapsto t^3$, donde k es cualquier campo. Entonces $P^{(n)} = P^n$ para todo $n \geqslant 1$. No obstante, P es un primo de altura 2 minimamente generado por 3 elementos y entonces no puede estár generado por una sucesión regular.

Incluso cuando nos restringimos sólo a ideales monomiales, decidir que ideales satisfacen $I^{(n)} = I^n$ para todo $n \geqslant 1$ es una pregunta abierta. No obstante, se conjetura que esta condición es equivalente a que I sea empacado.

Definición 3.8 (Ideal König). Sea I un ideal monomial libre de cuadrados con altura c en un anillo de polinomios sobre un campo. Decimos que I es *könig* si I contiene una sucesión regular de c monomios.

A pesar del hecho de que todos los ideales monomiales libres de cuadrados contienen una sucesión regular de longitud igual a su altura, tal sucesión no es necesariamente una sucesión de monomios.

Ejercicio 3.9. Probar que (xy, xz, yz) no es könig.

Definición 3.10 (Ideal empacado). Sea I un ideal monomial libre de cuadrados en un anillo de polinomios sobre un campo. Decimos que I es empacado[1] si cualquier ideal obtenido a partir de I tomando cualquier número de variables iguales a 0 ó 1 es könig.

Ejercicio 3.11. Encontrar un ideal empacado y un ideal que no es empacado.

La siguiente conjetura de Gitler, Valencia y Villarreal es una versión en el contexto de potencias simbólicas de una conjetura de Conforti y Cornuéjols sobre propiedades de *max-cut min-flow*.

[1] Tradución libre del original *packed*.

Conjetura 3.12 (Problema del Empacado). [2] Sea I un ideal monomial libre de cuadrados en un anillo de polinomios sobre un campo k. Las potencias simbólicas y ordinarias de I coinciden si y sólo si I es empacado.

La dirección difícil es mostrar que si I es empacado, entonces $I^{(n)} = I^n$ para todo $n \geqslant 1$.

Ejercicio 3.13. Sea I un ideal monomial libre de cuadrados. Probar que si $I^{(n)} = I^n$ para todo $n \geqslant 1$ entonces I es empacado.

El Problema del Empacado fue resuelto en el caso en que I es un ideal de aristas de una gráfica [GVV07].

Definición 3.14 (Ideal de aristas). Sea G una gráfica simple con n vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Dado un campo k, el ideal de aristas de G en $k[x_1, \ldots, x_n]$ es el ideal generado por

$$I = \left(x_i x_j \mid \text{ si hay una arista entre los vértices } v_i \text{ y } v_j\right).$$

Teorema 3.15 (Gitler–Valencia–Villareal, [GVV07]). Sea I un ideal de aristas de la gráfica G. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) G es una gráfica bipartita;

(b) $I^{(n)} = I^n$ para todo $n \geqslant 1$;

(c) I es empacado.

En cuanto la versión más general del Packing Problem, está aún abierta, la pregunta de si es suficiente probar $I^{(n)} = I^n$ para un número finito de n está resuelta para ideales monomiales.

Teorema 3.16 (Núñez Betancourt – Montaño [MnNnB19]). Sea I un ideal monomial libre de cuadrados generado por μ elementos. Si $I^{(n)} = I^n$ para $n \leqslant \frac{\mu}{2}$, entonces $I^{(n)} = I^n$ para todo $n \geqslant 1$.

3.2. ¿Cuál es el grado de un elemento en $I^{(n)}$?

Cuando I es un ideal homogéneo en un anillo graduado, las potencias simbólicas de I también son ideales homogéneos. Es natural preguntar cual es el grado mínimo de un elemento en $I^{(n)}$ para cada n. Si I corresponde a un conjunto finito de puntos en $\mathbb{P}^N$, la pregunta es cuál es el grado mínimo de una hipersurperficie que pasa en todos nuestros puntos con multiplicidad n.

Dado un ideal homogenéneo en $R = k[x_0, \ldots, x_N]$, denotamos el grado mínimo de un elemento en I por $\alpha(I)$.

Conjetura 3.17 (Nagata [Nag65]). Si I define $n \geqslant 10$ puntos muy generales en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$,

$$\alpha(I^{(m)}) > m\sqrt{n}.$$

[2] Packing Problem, en inglés.

Esta pregunta continúa abierta excepto en algunos casos muy especiales.

Conjetura 3.18 (Chudnovsky)**.** Sea X un conjunto finito de puntos en $\mathbb{P}^N$ e $I = I(X)$ el ideal correspondiente en $k[x_0, \ldots, x_N]$. Entonces

$$\frac{\alpha(I^{(m)})}{m} \geqslant \frac{\alpha(I) + N - 1}{N}.$$

El límite de la expresión derecha existe y es el ínfimo del mismo conjunto. Más precisamente,

$$\hat{\alpha}(I) = \lim_{m \to \infty} \frac{\alpha(I^{(m)})}{m} = \inf_m \frac{\alpha(I^{(m)})}{m}.$$

Podemos reformular la Conjetura de Chudnovsky usando esta constante $\hat{\alpha}$, conocida como la constante de Waldschmidt de I. Más precisamente, la Conjetura de Chudnovsky pregunta si

$$\hat{\alpha}(I^{(m)}) \geqslant \frac{\alpha(I) + N - 1}{N}.$$

Esta conjetura fue mostrada para conjuntos finitos de puntos muy generales en $\mathbb{P}^N_k$ para campos k algebraicamente cerrados [FMX18, Theorem 2.8]. Es natural preguntar si podemos extender esta estimación para ideales homogéneos, tal vez sustituyendo N por la altura [3] de I, lo que se satisface para ideales monomiales libres de cuadrados [BCG+16, Theorem 5.3]. La Conjetura de Chudnovsky está abierta en los restantes casos. La Conjetura de Chudnovsky es un caso especial de una conjetura de Demailly [Dem82].

3.3. La Conjetura de Eisenbud–Mazur

Mientras $I^{(2)} \subseteq I$ siempre se cumple, ¿hay algún generador minimal de I en $I^{(2)}$?

Conjetura 3.19 (Eisenbud–Mazur [EM97])**.** Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local obtenido por localización de un anillo de polinomios sobre un campo k de característica 0. Dado un ideal radical I en R, $I^{(2)}$ no contiene ningún generador minimal de I, o equivalentemente, $I^{(2)} \subseteq \mathfrak{m}I$.

Notemos que esta condición puede fallar en característica prima:

Ejemplo 3.20 (Eisenbud–Mazur [EM97])**.** Sea p un entero primo e I el núcleo del morfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_p[x_1, x_2, x_3, x_4] &\longrightarrow \mathbb{F}_p[t] \\ x_1 &\longmapsto t^{p^2} \\ x_2 &\longmapsto t^{p(p+1)} \\ x_3 &\longmapsto t^{p^2+p+1} \\ x_4 &\longmapsto t^{(p+1)^2}. \end{aligned}$$

[3] Más precisamente, usando un invariante que vamos definir más tarde, conocido como la *altura grande*.

Consideremos el polinomio $f = x_1^{p+1}x_2 - x_2^{p+1} - x_1x_3^p + x_4^p \in I$. Este polinomio f es casi homogéneo y de hecho $f \in I^{(2)}$. Por ejemplo, tomando

$$\begin{aligned} g_1 &= x_1^{p+1} - x_2^p \in I, \\ g_2 &= x_1x_4 - x_2x_3 \in I, \\ g_3 &= x_1^px_2 - x_3^p \in I, \end{aligned}$$

tenemos

$$x_1^p f = g_1g_3 + g_2^p \in I^2.$$

Además, f es un generador minimal de I, o equivalentemente, $f \notin (x_1, x_2, x_3, x_4)I$. Podemos verificar esta afirmación notando que ningún elemento de I contiene un término de la forma x_4^a para $1 \leqslant a < p$ e I está generado por binomios, entonces basta mostrar que no existe ningún elemento de la forma $x_4^a - x_3^bx_2^cx_1^d$ en I. Dejamos los detalles como ejercicio.

La Conjetura de Eisenbud–Mazur también puede fallar si el anillo no es regular. La conjetura está abierta en la mayoría de los casos en característica 0.

Ejercicio 3.21. Probar que la Conjetura de Eisenbud–Mazur es satisfecha por cualquier ideal monomial libre de cuadrados.

Más generalmente, Eisenbud y Mazur mostraron que si I es un ideal monomial y P es un primo monomial conteniendo a I, entonces $I^{(d)} \subseteq PI^{(d-1)}$ para cualquier $d \geqslant 1$ [EM97, Proposition 7]. También mostraron la Conjetura 3.19 para ideales de licci [EM97, Theorem 8] e ideales casi homogenéos sin primos encajados en equicaracterística 0 [EM97, Theorem 9]. Hay mucho más sobre el estado actual de esta conjetura en [DDSG+18, Section 2.3].

3.4. Álgebras de Rees simbólicas

Las potencias simbólicas de un ideal I forman una familia graduada[4], lo que nos permite empacar todas las potencias en un único objeto graduado, el álgebra de Rees simbólica (o blowup simbólico) de I.

Definición 3.22 (Álgebra de Rees simbólica)**.** Sea R un anillo e I un ideal en R. El *álgebra de Rees simbólica* de I es el álgebra graduada

$$\mathcal{R}_s(I) := \bigoplus_{n \geqslant 0} I^{(n)}t^n \subseteq R[t],$$

donde la variable t tiene el papel de indicar el grado.

Esta idea imita la construción del álgebra de Rees de I usual, $\bigoplus_n I^nt^n$. La diferencia es que el álgebra de Rees simbólica no es necesariamente un anillo Noetheriano.

Ejercicio 3.23. Probar que el álgebra de Rees simbólica de un ideal I en un anillo R es un álgebra finitamente generada sobre R si y sólo si es un anillo Noetheriano.

[4]Eso significa que $I^{(a)}I^{(b)} \subseteq I^{(a+b)}$ para todos a y b.

Ejercicio 3.24. Si el álgebra de Rees simbólica de un ideal I en un anillo R es finitamente generada sobre R, probar que existe k tal que $I^{(kn)} = \left(I^{(k)}\right)^n$ para todo $n \geqslant 1$. La implicación contraria también es satisfecha si R es un anillo excelente.

¿Que ideales tienen un álgebra de Rees simbólica Noetheriana? Por ejemplo, el álgebra de Rees simbólica de un ideal monomial es siempre Noetheriana [Lyu88, Proposition 1]. Lo que es más sorprendente es que las álgebras de Rees simbólicas son frequentemente no-noetherianas. El primer ejemplo fue encontrado por Rees [Ree58] y después Roberts encontró el primer ejemplo con R un anillo no regular [Rob85], adaptando el contra-ejemplo de Nagata para el décimo-cuarto problema de Hilbert [Nag65]. El ejemplo de Roberts responde negativamente a la siguiente pregunta de Cowsik:

Pregunta 3.25 (Cowsik)**.** Sea P un ideal primo en un anillo regular R. ¿Es el álgebra de Rees simbólica de P siempre notheriana, o equivalentemente, un álgebra finitamente generada sobre R?

La motivación de Cowsik era su resultado [Cow84] mostrando que una respuesta positiva a esta pregunta implicaría que todos los primos con esta forma tendrían que ser intersecciones completas bajo radical. Eliahou, Huckaba, Huneke, Vasconcelos y otros encontraron criterios que garantizan que el álgebra de Rees simbólica es Noetheriana. Curvas monomiales espaciales (t^a, t^b, t^c), no obstante, son intersecciones completas bajo radical [Bre79, Her80, Val81] y mucho se ha estudiado sobre las álgebras de Rees simbólicas de los ideales en esta clase. Sorprendentemente, la respuesta a la pregunta de Cowsik es negativa incluso para esta clase de primos, el primer ejemplo no-Noetheriano encontrado por Morimoto y Goto [GM92]. En [Cut91], Cutkosky demostró criterios para que el álgebra de Rees simbólica de una curva monomial espacial sea Noetheriana, en particular probó que el álgebra de Rees simbólica de $k[t^a, t^b, t^c]$ es Noetheriana siempre que $(a + b + c)^2 > abc$. La literatura es vasta, incluso en el caso especial de las curvas monomiales espaciales (t^a, t^b, t^c) [Cut91, Mor91, GNS91b, GM92, GNW94, GNS91a, HU90, Sri91].

4. El problema de la Contención

El problema de la Contención [5] para I es una tentativa de comparar las potencias simbólicas y ordinarias de I. En las dos últimas décadas ha habido mucha actividad alrededor de este problema.

4.1. Un resultado famoso

Por un lado, $I^a \subseteq I^{(b)}$ si y sólo si $a \geqslant b$. Preguntar cuando tenemos $I^{(a)} \subseteq I^b$ es mucho maś interesante.

Pregunta 4.1 (Problema de la Contención)**.** Sea R un anillo Noetheriano e I un ideal en R. ¿Cuándo tenemos $I^{(a)} \subseteq I^b$?

Esta pregunta empaca muchas preguntas juntas. Para comenzar, esta pregunta contiene el problema de la igualdad, por que la b-ésima potencia simbólica coincide con la b-ésima potencia ordinaria si y sólo si $I^{(b)} \subseteq I^b$. Cuando la respuesta es no, el problema de la contención es una forma de medir la diferencia entre las potencias simbólicas y ordinarias. Con una respuesta particular para el problema de la contención, digamos $I^{(a)} \subseteq I^b$, podemos concluir una estimación por debajo para el mínimo grado de un elemento en $I^{(a)}$. De hecho, esto implica

$$\alpha\left(I^{(a)}\right) \geqslant \alpha\left(I^b\right) = b\alpha(I).$$

En general, el problema de la contención es díficil, pero podemos responderlo completamente si tenemos una descripción explícita de las potencias simbólicas y ordinarias de nuestro ideal. El problema está en que una descripción explícita de las potencias simbólicas es muy raro.

Ejercicio 4.2. Resolver el problema de la contención para ideales de determinantes genéricos.

Ejercicio 4.3. La segunda potencia simbólica del ideal monomial $I = (xy, xz, yz) \subseteq k[x, y, z]$ no coincide con su cuadrado. No obstante, $I^{(3)} \subseteq I^2$.

En un anillo Gorenstein, el problema de la contención puede ser reformulado como una pregunta homológica, un hecho aplicado por Alexandra Seceleanu en [Sec15] y después usado en [Gri18, Chapter 3] y [Gri] para estudiar el problema de la contención para ideales generados por los menores 2×2 de matrices 2×3 en dimensión 3.

Ejercicio 4.4. Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local Gorenstein y P un ideal primo de altura $\dim R - 1$. Dados $a \geqslant b$, probar que $P^{(a)} \subseteq P^b$ si y sólo si el morfismo $\operatorname{Ext}^d_R(R/P^b, R) \to \operatorname{Ext}^d_R(R/P^a, R)$ inducido por la proyección canónica es cero.

Pero no es ni siquiera claro que el problema 4.1 tiene siempre sentido. Dado b, ¿tenemos siempre un a tal que $I^{(a)} \subseteq I^b$? Si para cualquier b existe siempre un a, entonces las dos familias graduadas de ideales $\{I^n\}$ y $\left\{I^{(n)}\right\}$ son cofinales, entonces inducen topologías

[5] The Containment Problem, originalmente.

equivalentes. En 1985, Schenzel [Sch85] probó una caracterización de cuando $\{I^n\}$ y $\left\{I^{(n)}\right\}$ son cofinales. En particular, si R es un anillo regular e I es un ideal radical en R, entonces $\{I^n\}$ y $\left\{I^{(n)}\right\}$ son siempre cofinales. No obstante, la caracterización de Schenzel no nos dá información sobre la relación entre a y b.

Sólo en el fín de los años 90 Irena Swanson demostró que las topologías I-ádica e I-simbólica son equivalentes si y sólo si son linealmente equivalentes.[6]

Teorema 4.5 (Swanson, 2000, [Swa00])**.** Sea R un anillo Noetheriano, e I y J dos ideales en R. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(I) $\{I^n : J^\infty\}$ es cofinal con $\{I^n\}$.

(II) Existe c tal que $(I^{cn} : J^\infty) \subseteq I^n$ para todo $n \geqslant 1$.

En particular, dado un ideal radical en un anillo regular, existe un entero c tal que $I^{(cn)} \subseteq I^n$ para todo $n \geqslant 1$. Más sorprendentemente, en un anillo regular esta constante puede ser tomada uniformemente, dependiendo sólo de R.

Definición 4.6 (Altura grande)**.** Sea I un ideal sin primos encajados. La *altura grande*[7] de I es la altura máxima de un primo asociado de I. Si todos los primos asociados de I tienen la misma altura, decimos que I tiene *altura pura*.

Teorema 4.7 (Ein–Lazarsfeld–Smith, Hochster–Huneke, Ma–Schwede [ELS01, HH02, MS18a])**.** Sea R un anillo regular e I un ideal radical en R con altura grande h. Tenemos $I^{(hn)} \subseteq I^n$ para todo $n \geqslant 1$.

Observación 4.8. Equivalentemente, $I^{(n)} \subseteq I^{\left\lfloor \frac{n}{h} \right\rfloor}$ para todo $n \geqslant 1$.

No podemos sustituir la altura grande por la altura en el Teorema 4.7.

Ejemplo 4.9. Consideremos el ideal

$$I = (x, y) \cap (y, z) \cap (x, z) \cap (a) = (xya, xza, yza) \subseteq k[x, y, z, a],$$

con altura 1 y altura grande 2. Si pudiésemos sustituir la altura grande por la altura en el Teorema 4.7, tendríamos $I^{(n)} = I^n$ para cualquier $n \geqslant 1$. No obstante, tal como en el Ejemplo 2.1, $I^{(2)} \neq I^2$; basta notar que

$$xyza^2 \in I^{(2)} = (x, y)^2 \cap (y, z)^2 \cap (x, z)^2 \cap (a)^2,$$

pero todos los elementos en I^2 tienen al menos grado 6.

Ejercicio 4.10. Dados enteros $c < h$, construye un ideal I con altura c y altura grande h en un anillo de polinomios tal que $I^{(cn)} \nsubseteq I^n$ para algún n. Sugerencia: usa el Ejercicio 4.51.

[6] Cuidado: las palabras *linealmente equivalentes* fueron usadas en el pasado para indicar otras condiciones. Por ejemplo, Schenzel uso esta palabra para referirse a la condición $I^{(n+k)} \subseteq I^n$ para todo $n \geqslant 1$ y alguna constante k.

[7] Tradución libre de *big height*.

Ein, Lazarsfeld y Smith probaron el Teorema 4.7 en el caso geométrico en equicaracterística 0, usando ideales de multiplicadores. Hochster y Huneke usaron técnicas de reducción a característica p y técnicas de *clausura hérmetica* para probar el resultado en equicaracterística. Recientemente, Ma y Schwede construyeron ideas utilizadas en la reciente solución de la Conjetura del Sumando Directo[8] para definir un análogo de ideales de prueba/multiplicadores en característica mixta, lo que les permitió demostrar una versión del Teorema 4.7 en característica mixta.

Dado un ideal I y algún $t \geqslant 0$, el ideal de multiplicadores $\mathcal{J}(R, I^t)$ mide las singularidades de $V(I) \subseteq \operatorname{Spec}(R)$, escaladas por t en algún sentido. No definiremos ideales de multiplicadores aquí, pero una definición puede ser encontrada por ejemplo en [ELS01, MS18a]. La demostración del Teorema 4.7 en característica 0 tiene como base algunas propiedades de los ideales de multiplicadores:

- $I \subseteq \mathcal{J}(R, I)$;
- Para cualquier $n \geqslant 1$, tenemos $\mathcal{J}\left(R, \left(P^{(nh)}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \subseteq P$ si P es un primo de altura h;
- Para enteros $n \geqslant 1$, tenemos $\mathcal{J}\left(R, I^{tn}\right) \subseteq \mathcal{J}\left(R, I^t\right)^n$.

Dadas estas propiedades, para cualquier ideal P de altura h tenemos

$$P^{(hn)} \subseteq \mathcal{J}\left(R, \left(P^{(nh)}\right)\right) \subseteq \mathcal{J}\left(R, \left(P^{(nh)}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n \subseteq P^n.$$

En característica p, una idea semejante también funciona, sustituyendo ideales de multiplicadores por ideales de prueba.

Observación 4.11. Como corolario del Teorema 4.7, obtenemos una constante uniforme c como en el Teorema 4.5. De hecho, la altura grande de cualquier ideal es nada más que la dimensón d del anillo, entonces $I^{(dn)} \subseteq I^n$ para cualquier n. Podemos mejorar esta constante para $d-1$ por que las potencias simbólicas de ideales maximales coinciden con las potencias ordinarias.

En anillos no regulares, las topologías inducidas por las potencias simbólicas y ordinarias son equivalentes para cualquier ideal primo en un contexto bastante general:

Teorema 4.12 (Huneke–Katz–Validashti, Proposition 2.4 in [HKV09])**.** Sea R un dominio local completo. Para todos los ideales primos P, existe una constante h tal que $P^{(hn)} \subseteq P^n$.

No obstante, en un contexto no regular, la existencia de un tal h que sea independiente de P es un problema abierto. La existencia de un tal h nos dá una equivalencia uniforme entre las topologías inducidas por las potencias simbólicas y ordinarias, por lo que decimos que los anillos con esta propiedad tienen la Propiedad de las Topologías Simbólicas Uniformes[9].

[8] Tradución libre de Direct Summand Conjecture.

[9] Uniform Symbolic Topologies Property, originalmente.

Pregunta 4.13 (Toplogías Simbólicas Uniformes)**.** Sea R un dominio local completo. ¿Existe una constante uniforme h dependiendo sólo de R tal que

$$P^{(hn)} \subseteq P^n$$

para todos los primos P y todos los $n \geqslant 1$?

La respuesta es conocida en algunos contextos especiales.

Teorema 4.14 (Huneke–Katz–Validashti, 2009, [HKV09])**.** Sea R un anillo local reducido tal que R tiene una singularidad aislada. Asumamos que R es equidimensional y esencialmente de tipo finito sobre un campo de característica prima o cero, o tal que R tiene característica prima y es F-finito. Existe un $h \geqslant 1$ con la siguiente propiedad: para todos los ideales I conteniendo un elemento regular cuyas topologías I-simbólica e I-ádica son equivalentes, $I^{(hn)} \subseteq I^n$ para todo $n \geqslant 1$.

Este resultado, no obstante, no nos dá estimaciones eficientes para el valor de h. En general, encontrar estimaciones explícitas y mejores posibles para esta constante es un problema muy difícil. El caso de los ideales primos monomiales en anillos tóricos normales fue resuelto completamente por Robert M. Walker [Wal16, Wal18].

Ejemplo 4.15 (Carvajal-Rojas — Smolkin, 2018)**.** Sea k un campo de característica prima y consideremos $R = k[a,b,c,d]/(ad-bc)$. Para todos los ideales primos P en R, tenemos $P^{(2n)} \subseteq P^n$ para cualquier $n \geqslant 1$.

4.2. La característica prima es nuestra amiga

Existen preguntas libres de característica que son más fáciles de atacar usando técnicas en característica prima. La demostración de Hochster y Huneke de que $I^{(hn)} \subseteq I^n$ en anillos regulares es un ejemplo de esta idea [HH02]. Más sorprendentemente, una solución en característica p puede a veces ser usada para resolver el mismo problema en equicaracterística 0, a través de un método conocido como reducción a característica prima. Vamos a enfocarnos en el problema de la contención para ideales radicales en anillos regulares de característica prima p y dar la demostración de Hochster y Huneke del Teorema 4.7.

Cuando tenemos un anillo de característica prima p, ganamos una herramienta simple, sin embargo muy poderosa:

Definición 4.16. Sea R un anillo de característica prima p. El homomorfismo de *Frobenius* es el R-homomorfismo dado por $F(x) = x^p$. Denotamos la e-ésima iteración de Frobenius, $F^e(x) = x^{p^e}$, por F^e. La e-ésima iteración de Frobenius lleva al ideal I a otro ideal, conocido como la e-ésima *potencia de Frobenius* de I, que denotamos por $I^{[p^e]}$:

$$I^{[p^e]} := \left(a^{p^e} : a \in I\right).$$

Escribimos $F^e_*(R)$ para denotar la imagen natural de F^e. Este es un R-módulo en el grupo abeliano R, pero con estructura de R-módulo dada por la acción de Frobenius: $r \cdot F^e_*(s) = F^e_*(r^{p^e} s)$.

Observación 4.17. Si $I = (a_1, \ldots, a_n)$, entonces $I^{[p^e]} = \left(a_1^{p^e}, \ldots, a_n^{p^e}\right)$.

En álgebra conmutativa de característica prima, frecuentemente estudiamos propiedades de anillos R a través de la estructura de módulo de $F_*^e(R)$. Muchas singularidades interesantes pueden ser identificadas a través de la estructura de R-módulo de $F_*^e(R)$; estas son conocidas como F-singularidades.

Vamos a considerar solamente anillos regulares de característica prima. Uno de los principales hechos que necesitaremos es que en un anillo regular, Frobenius es un homomorfismo plano. Este es también uno de los puntos en que es crucial que nuestro anillo sea regular: el hecho de que Frobenius es plano *caracteriza* anillos regulares.

Teorema 4.18 (Kunz, 1969 [Kun69])**.** Sea R un anillo local reducido de característica prima p. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- R es un anillo regular.
- R es plano sobre R^p.
- $F_*^e(R)$ es un R-módulo.

Este teorema tiene muchas consecuencias importantes.

Lema 4.19. Sea R un anillo regular de característica p. Para cualesquiera ideales I y J en R y cualquier $q = p^e$,

$$(J : I)^{[q]} = \left(J^{[q]} : I^{[q]}\right).$$

Demostración. Dado que $F_*^e(R)$ es un R-módulo plano por el Teorema 4.18, este es un caso particular de [Mat89, Theorem 7.4 (iii)]. □

Lema 4.20. Si R es un anillo regular de característica prima p, Frobenius preserva primos asociados: $\operatorname{Ass}(R/I) = \operatorname{Ass}\left(R/I^{[q]}\right)$ para cualquier $q = p^e$.

Demostración. Frobenius es exacto [Kun69, Theorem 2.1] y entonces lleva resoluciones libres minimales a resoluciones libres minimales. En particular, si Q es un ideal primo en R, Frobenius lleva una resolución libre minimal de $(R/I)_Q$ a una resolución libre minimal de $\left(R/I^{[q]}\right)_Q$. Además, la longitud de las resolucioness es preservado, entonces las dimensiones proyectivas coinciden. Por la fórmula de Auslander-Buchsbaum, eso implica que las profundidades también coinciden y entonces

$$\operatorname{depth}(R/I)_Q = 0 \text{ si y sólo si } \operatorname{depth}\left(R/I^{[q]}\right)_Q = 0.$$

Por el Lema 1.10, esto completa la prueba. □

Observación 4.21. Uno de los ingredientes más importantes que usaremos para probar $I^{(hn)} \subseteq I^n$ es entender cuál es el número mínimo de generadores de I después de localizar en cada primo asociado. Si $I = Q$ es un ideal primo de altura h, el único primo asociado a Q es el propio Q y Q_Q es el único ideal maximal en un anillo regular local de dimensión h, que es entonces minimamente generado por h elementos. Para un ideal radical I de altura grande h, I_P está generado por a lo más h elementos cuando localizamos en cada primo asociado P.

De hecho, dado que I es radical, $I = P \cap J$, donde J contiene elementos que no están en P y entonces $I_P = P_P$, que está generado por tantos elementos cuanto la altura de P sea. Por definición, este número es a lo más h.

Los resultados en [HH02] cubren un caso más general: no es necesario asumir que I es radical. Las ideas principales son las mismas, pero el número máximo de generadores que precisamos para I_P, donde P varia sobre los primos asociados de I, no es necesariamente la altura grande h. Para evitar este problema, Hochster y Huneke mostraron que pueden sustituir I_P por una redución minimal de I_P, que es generado por tantos elementos cuanto la *propagación analítica* de I_P sea. No discutiremos este caso en detalle aquí, pero este número es de hecho a lo más la altura grande de P. La forma general del Teorema 4.7 es la siguiente: tenemos $I^{(hn)} \subseteq I^n$ para cualquier $n \geqslant 1$, donde h puede ser cualquiera de los siguientes números (por orden creciente de refinamento):

- el máximo valor del número mínimo de generadores de I_P, donde P varia sobre los primos asociados de I,
- la altura máxima de un primo asociado de I, ó
- el máximo valor de la *propagación analítica* de I_P, donde P varía sobre los primos asociados de I.

Cuando I es un ideal radical, todos estos invariantes coinciden. Más sobre reducciones y *propagación analítica* puede ser encontrada en el excelente [SH06, Chapter 8].

Como vimos en el Ejercicio 1.30, si quisieramos probar una cierta contención de ideales, es suficiente demostrar que la contención es satisfecha localmente. Usaremos esa idea repetidamente.

Con las herramentas apropiadas, la conclusión del Teorema 4.7 en característica p para $n = p^e$ es una aplicación extraordinaria del Principio del Palomar.

Lema 4.22 (Hochster-Huneke [HH02])**.** Supongamos que I es un ideal radical con altura grande h en un anillo regular R conteniendo un campo de característica prima $p > 0$. Para cualquier $q = p^e$,

$$I^{(hq)} \subseteq I^{[q]}.$$

Demostración. Por el Ejercicio 1.30, basta demostrar que eso es verdad después de localizar en cada primo asociado de $I^{[q]}$. Por el Lema 4.20, los primos asociados de $I^{[q]}$ coinciden con los primos asociados de I. Sea P un primo asociado de I, notemos que I_P está generado por a lo más h elementos. En R_Q, queremos demostrar que

$$I_Q^{hq} \subseteq I_Q^{[q]}.$$

Consideremos generadores $x_1, \ldots, x_h$ para I_Q. Necesitamos demostrar que

$$(x_1, \ldots, x_h)^{hq} \subseteq (x_1^q, \ldots, x_h^q).$$

Consideremos el elemento $x_1^{a_1} \cdots x_h^{a_h}$ con $a_1 + \cdots + a_h \geqslant hq$. Dado que $(x_1, \ldots, x_h)^{hq}$ es generado por los elementos de esta forma, basta demostrar que $x_1^{a_1} \cdots x_h^{a_h} \in (x_1^q, \ldots, x_h^q)$. Como $a_1 + \cdots + a_h \geqslant hq$, el Principio del Palomar garantiza que $a_i \geqslant q$ para algún i y entonces $x_i^{a_i} \in (x_1^q, \ldots, x_h^q)$. $\square$

De hecho, con la misma técnica pero usando todo el poder del Principio del Palomar, podemos demostrar la Conjectura de Harbourne 4.33, que discutiremos más tarde, para potencias de p, un hecho notado por Craig Huneke:

Ejercicio 4.23. Supongamos que I es un ideal radical de altura grande h en un anillo regular R conteniendo un campo de característica $p > 0$. Demostrar que para cualquier $q = p^e$,

$$I^{(hq-h+1)} \subseteq I^{[q]} \subseteq I^q.$$

Como colorario, obtenemos una respuesta afirmativa para una pregunta de Huneke 4.32 que vamos discutir más tarde en característica 2: siempre tenemos $I^{(3)} \subseteq I^2$.

Para demostrar que $I^{(hn)} \subseteq I^n$ para cualquier $n \geqslant 1$, necesitamos de técnicas de *clausura hermética*. La teoría de *clausura hermética*, desenvuelta por Hochster y Huneke, tiene muchas aplicaciones importantes en álgebra conmutativa.

Definición 4.24 (Clausura hermética)**.** Sea R un dominio de característica prima p. Dado un ideal I en R, la *clausura hermética* de I es el ideal

$$I^* = \left(z \in A \,|\, \text{ existe algún } c \in R \text{ no cero tal que } cz^q \in I^{[q]} \text{ para todo } q = p^e \gg 0\right).$$

Observación 4.25. Tenemos siempre $I \subseteq I^*$.

A veces, es más simple probar que un elemento está contenido en la *clausura hermética* de un ideal que en el propio ideal. Esta idea es particularmente útil en un anillo regular, por que todos los ideales coinciden con su *clausura hermética*.

Teorema 4.26 (Theorem (4.4) in [HH90])**.** Sea R un anillo regular conteniendo un campo de característica prima. Entonces $I = I^*$ para cualquier ideal I en R.

Teorema 4.27 (Hochster–Huneke, [HH02])**.** Sea R un anillo regular de característica p e I un ideal radical de altura grande h. Entonces para cada $n \geqslant 1$, $I^{(hn)} \subseteq I^n$.

Demostración. Fijemos n. Demostraremos que si $u \in I^{(hn)}$, entonces $u \in (I^n)^*$, como R es regular, eso implica que $u \in I^n$. Necesitamos encontrar un elemento no cero c tal que $cr^q \in (I^n)^q$ para todo $q = p^e$.

Dado $q = p^e$, podemos escribir $q = an + r$ para enteros positivos $a, r \geqslant 0$ con $r < n$. Entonces $u^a \in \left(I^{(hn)}\right)^a \subseteq I^{(han)}$ y

$$I^{hn} u^a \subseteq I^{hr} u^a \subseteq I^{hr} I^{(han)} \subseteq I^{(han+hr)} = I^{(hq)}.$$

Dado que $I^{(hq)} \subseteq I^{[q]}$, tenemos $I^{hn} u^a \subseteq I^{[q]}$. Tomemos la potencia n:

$$I^{hn^2} u^{an} \subseteq \left(I^{[q]}\right)^n = (I^n)^{[q]}.$$

Por la elección de a, sabemos que $q \geqslant an$, entonces

$$I^{hn^2} u^q \subseteq I^{hn^2} u^{an} \subseteq (I^n)^{[q]}.$$

Como R es un dominio, existe algún elemento no cero en $c \in I^{hn^2}$ y tal elemento no depende de la elección de q. Tal c satisface $cu^q \in (I^n)^{[q]}$, entonces $u \in I^n$. $\square$

Esto puede ser generalizado. El siguiente es [ELS01, Theorem 2.2] en el caso de variedades complejas suaves y más generalmente [HH02, Theorem 2.6]:

Teorema 4.28 (Ein–Lazersfeld–Smith, Hochster–Huneke)**.** Sea I un ideal radical en un anillo regular que contiene un campo y h la altura grande de I. Para cualquier $n \geqslant 1$ y $k \geqslant 0$, tenemos $I^{(hn+kn)} \subseteq \left(I^{(k+1)}\right)^n$.

Ejercicio 4.29. Probar el Teorema 4.28 en característica prima, esencialmente repitiendo la demostración del Teorema 4.27.

Si tomamos $k = 0$, obtenemos $I^{(hn)} \subseteq I^n$. Más aún, en característica prima p, podemos obtener una extensión de la Conjetura de Harbourne (que discutiremos en la próxima sección) para potencias de p:

Lema 4.30. Sea I un ideal radical en un anillo regular R de característica $p > 0$ y h la altura grande de I. Para cualquier $q = p^e$,

$$I^{(hq+kq-h+1)} \subseteq \left(I^{(k+1)}\right)^{[q]}.$$

Demostración. Por Ejercicio 1.30, basta probar esta contención después de localizar en cualquier primo asociado de $\left(I^{(k+1)}\right)^{[q]}$. Dado que

$$\operatorname{Ass}\left(\left(I^{(k+1)}\right)^{[q]}\right) = \operatorname{Ass}\left(I^{(k+1)}\right) = \operatorname{Ass}(I),$$

se cumple, basta localizar en los primos asociados de I. Si P es un primo asociado de I, lo que tenemos que probar en R_P es lo siguiente:

$$P_P^{hq+kq-h+1} \subseteq \left(P_P^{[q]}\right)^{k+1}.$$

Basta usar un argumento semejante al Lema 4.22, con los detalles completos en [HH02, Lemma 2.4 (a)]. □

4.3. La Conjetura de Harbourne

El Teorema 4.7 puede a veces ser mejorado.

Ejemplo 4.31. El ideal $I = (x, y) \cap (x, z) \cap (y, z)$ en el Ejemplo 2.1 tiene altura pura 2, entonces el Teorema 4.7 implica que $I^{(2n)} \subseteq I^n$ para cualquier $n \geqslant 1$. No obstante, $I^{(3)} \subseteq I^2$, pero el teorema solamente dice que $I^{(4)} \subseteq I^2$.

Pregunta 4.32 (Huneke, 2000)**.** Para un ideal primo P de altura 2 en un anillo local regular conteniendo un campo, ¿tenemos siempre $P^{(3)} \subseteq P^2$?

Esta pregunta continúa abierta incluso en dimensión 3. Harbourne propuso la siguiente generalización de la Pregunta 4.32, primero publicada en [HH13, BRH$^+$09]:

Conjetura 4.33 (Harbourne, 2006)**.** Sea I un ideal radical homogéneo en $k[\mathbb{P}^N]$ y h la altura grande de I. Para cualquier $n \geqslant 1$,

$$I^{(hn-h+1)} \subseteq I^n.$$

Observación 4.34. Equivalentemente, la Conjetura de Harbourne pregunta si $I^{(n)} \subseteq I^{\lceil \frac{n}{h} \rceil}$ para cualquier $n \geqslant 1$.

Observación 4.35. Cuando $h = 2$, la conjetura pregunta si $I^{(2n-1)} \subseteq I^n$, en particular si $I^{(3)} \subseteq I^2$.

Como vimos antes, $I^{(hn-h+1)} \subseteq I^n$ es satisfecho en característica prima p si tomamos $n = p^e$. Hay algunos casos en que sabemos que esta conjetura es satisfecha:

- Si I es un ideal monomial ([BRH+09, Example 8.4.5]);
- Si I corresponde a un conjunto genérico de puntos en $\mathbb{P}^2$ ([BH10]) o $\mathbb{P}^3$ ([Dum15]);
- Si I corresponde a una configuración de puntos en estrella ([HH13]),

entre otros. Veremos que la conjetura también es satisfecha si I define un anillo F-puro y en particular eso recupera el resultado sobre ideales monomiales.

Ejercicio 4.36. Sea I un ideal monomial libre de cuadrados. Probar que I satisface la Conjetura de Harbourne.

Sugerencia: dado un ideal monomial, podemos tomar una especie de potencia de Frobenius falsa:

$$I^{[n]} = \left(f^n \,\middle|\, f \in I \text{ es un monomio}\right).$$

Tal como la notación sugiere, estas se comportan de una forma similar a las potencias de Frobenius.

Desafortunadamente, la Conjetura 4.33 es demasiado general; no es satisfecha por todos los ideales homogenéos radicales, ni incluso por ideales de puntos.

Ejemplo 4.37 (Configuración de puntos de Fermat)**.** Sea $n \geqslant 3$ un entero y consideremos un campo k de característica diferente de 2 tal que k contiene n diferentes raíces de la unidad. Sea $R = k[x, y, z]$ y consideremos el ideal

$$I = (x(y^n - z^n), y(z^n - x^n), z(x^n - y^n)).$$

Cuando $n = 3$, este ideal corresponde a una configuración de 12 puntos en $\mathbb{P}^2$, como es descrito en la Figura 1. En $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, estos 12 puntos son dados por los 3 puntos coordenados juntamente con los 9 puntos definidos por las intersecciones de $y^3 - z^3$, $z^3 - x^3$ y $x^3 - y^3$.

El ideal radical I tiene altura pura 2. No obstante, $I^{(3)} \not\subseteq I^2$, el elemento $f = (y^n - z^n)(z^n - x^n)(x^n - y^n) \in I^{(3)}$ pero no es un elemento de I^2. Esto puede ser demostrado a través de argumentos geométricos, notando que f define 9 lineas, que pasan por los 12 puntos tres a tres.

Eso fue descubierto primero por Dumnicki, Szemberg y Tutaj-Gasińska [DSTG13] en $k = \mathbb{C}$ y después extendido en [HS15, Proposition 3.1] para cualquier k y cualquier n. Otras extensiones de este ejemplo pueden ser encontradas en [Dra17, MS18b].

Otras configuraciones de puntos en $\mathbb{P}^2$ producen ideales que fallan $I^{(3)} \subseteq I^2$, tales como las configuraciones de Klein y Wiman [Sec15]. Dada una configuración de puntos en $\mathbb{P}^k$ que produce un ideal I con $I^{(hn-h+1)} \not\subseteq I^n$, podemos producir otros contra-ejemplos a través de morfismos planos $\mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$, como en el trabajo de Solomon Akesseh [Ake17].

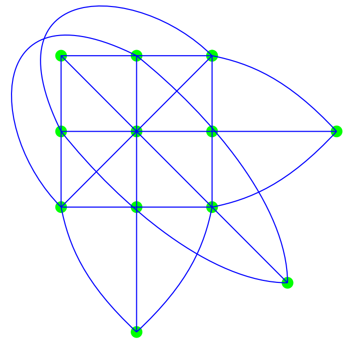

Figura 1: Configuración de puntos de Fermat cuando $n = 3$.

Ejemplo 4.38. Harbourne y Seceleanu [HS15] mostraron que $I^{(hn-h+1)} \subseteq I^n$ puede fallar para valores de n arbitrariamente grandes en característica prima. No obstante, estos contra-ejemplos son construidos en una forma que depende de n: para cada n existe un ideal I_n de altura pura 2 (correspondiendo, una vez más, a una configuración especial de puntos en $\mathbb{P}^2$) que falla $I_n^{(hn-h+1)} \subseteq I_n^n$.

No obstante, todos estos ejemplos satisfacen la siguiente conjetura:

Conjetura 4.39 (Harbourne stable [Gri])**.** Si I es un ideal radical de altura grande h en un anillo regular, entonces $I^{(hn-h+1)} \subseteq I^n$ para todo $n \gg 0$.

Esencialmente, preguntamos si la Conjetura de Harbourne es satisfecha para n grande — donde suficientemente grande depende de I, tal como los ejemplos de Harbourne y Seceleanu sugieren [HS15]. No tenemos ningún contra-ejemplo para esta conjetura.

También no tenemos contra-ejemplos primos para la Conjetura de Harbourne. En particular, $P^{(3)} \subseteq P^2$ puede ser verdad para los primos en un anillo de series de potencias.

4.4. La Conjetura de Harbourne en característica p

Vamos a demostrar que la Conjetura de Harbourne es satisfecha por ideales I para los cuales R/I es un anillo con buenas propiedades: si R/I es F-puro.

Definición 4.40 (Anillo F-finito)**.** Sea A un anillo Noetheriano de característica prima p. Decimos que A es *F-finito* si A es un módulo finitamente generado sobre si mismo a través de la acción de Frobenius.

Definición 4.41. Cuando A es F-finito y reducido, podemos hablar del anillo de las p^e-ésimas raíces de A, denotado por $F_*^e A$ y podemos identificar la inclusión $A \hookrightarrow F_*^e A$ con F^e. El hecho de que A es F-finito implica que $F_*^e A$ es un módulo finitamente generado sobre A para cualquier $q = p^e$.

Ejemplo 4.42. Si k es un campo perfecto, entonces $k[x_1, \ldots, x_n]$ es F-finito. De hecho, cualquier álgebra esencialmente de tipo finito sobre k es F-finita.

Vamos a estudiar anillos F-puros, que fueron introducidos por Hochster y Roberts en [HR76].

Definición 4.43 (Anillo F-puro)**.** Sea A un anillo Noetheriano de característica $p > 0$. Diremos que A es *F-puro* si para cualquier A-módulo M, $F \otimes 1 : A \otimes M \longrightarrow A \otimes M$ es inyectivo.

Definición 4.44 (Anillo F-split)**.** Sea A un anillo Noetheriano de característica $p > 0$. Diremos que A es *F-split* si la inclusión $R \hookrightarrow F^e_* R$ se escinde para cualquier (equivalentemente, algún) $q = p^e$, o equivalentemente si existe un morfismo de R-módulos $F^e_* R \hookrightarrow R$ tal que la composición

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] & F^e_* R \arrow[l, bend left, dashed] \end{tikzcd}$$

es la identidad en R.

Lema 4.45. Si A es F-finito, entonces A es F-puro si y sólo si A es F-split.

Demostración. En [HR76, Corollary 5.3]. □

El siguiente teorema caracteriza los ideales en un anillo regular local que definen anillos F-puros:

Teorema 4.46 (Criterio de Fedder para F-pureza, Theorem 1.12 en [Fed83])**.** Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local regular de característica $p > 0$. Dado un ideal I en R, R/I es F-puro si y sólo si para cualquier $q = p^e \gg 0$, tenemos

$$\left(I^{[q]} : I\right) \nsubseteq \mathfrak{m}^{[q]}.$$

Algunos ejemplos de anillos F-puros:

- Anillos regulares son siempre F-puros.
- Si I es un ideal monomial libre de cuadrados en un anillo de polinomios sobre un cuerpo, entonces R/I es un anillo F-puro. (¡Ejercicio!)
- Anillos de Veronese de anillos de polinomios son F-puros: la k-álgebra generada por todos los monomios en v variables en un grado fijo d.
- Anillos de determinantes genéricos son F-puros.

Una de las ventajas de este criterio es que también es suficiente probar $\left(I^{[p]} : I\right) \nsubseteq \mathfrak{m}^{[p]}$. Podemos probar eso con Macaulay2 [GS] cuando R es un anillo de polinomios sobre un campo de característica p, donde tomamos a $\mathfrak{m}$ el ideal generado por todas las variables.

Ahora estamos preparados para demostrar que si R es un anillo regular y R/I es F-puro, entonces I satisface la Conjetura de Harbourne. El resultado que queremos demostrar es el siguiente:

Teorema 4.47 (Theorem 3.3 in [GH19])**.** Sea R un anillo regular de característica prima p. Sea I un ideal en R con altura grande h. Si R/I es F-puro, entonces I satisface la Conjetura de Harbourne: para cualquier $n \geqslant 1$ tenemos $I^{(hn-h+1)} \subseteq I^n$.

Este teorema también es válido en algunos anillos singulares: si R es un anillo F-finito Gorenstein, basta asumir que I tiene dimensión projectiva finita [GMS19].

La idea de la demostración es estudiar los ideales $\left(I^n : I^{(hn-h+1)}\right)$. El ideal $(J : I)$ mide la falla de $I \subseteq J$, tenemos $(J : I) = R$ precisamente cuando $I \subseteq J$. Para demostrar que $\left(I^n : I^{(hn-h+1)}\right) = R$, necesitamos demostrar que este ideal contiene algún ideal *grande*; el Criterio de Fedder 4.46 nos sugiere un candidato perfecto. La demostración en [GH19] sigue estos pasos: demostramos que

$$\left(I^{[q]} : I\right) \subseteq \left(II^{(n)} : I^{(n+h)}\right)^{[q]},$$

para *cualquier* ideal I y cualquier $q = p^e \gg 0$, cuando R/I es F-puro esto implica la Conjetura de Harbourne. La prueba que mostraremos aquí usa las mismas técnicas, pero en realidad vamos a demostrar un lema más poderoso.

Lema 4.48. Sea R un anillo regular de característica prima p. Sea I un ideal radical en R y h la altura grande de I. Para cualquier $n \geqslant 1$,

$$\left(I^{[q]} : I\right) \subseteq \left(II^{(n)} : I^{(n+h)}\right)^{[q]}$$

para $q = p^e \gg 0$.

Demostración. Primero, notamos que

$$\left(II^{(n)} : I^{(n+h)}\right)^{[q]} = \left(\left(II^{(n)}\right)^{[q]} : \left(I^{(n+h)}\right)^{[q]}\right),$$

por el Lema 4.19. Sea $s \in \left(I^{[q]} : I\right)$. Entonces $sI^{(n+h)} \subseteq sI \subseteq I^{[q]}$ y así

$$s\left(I^{(n+h)}\right)^{[q]} \subseteq \left(sI^{(n+h)}\right)\left(I^{(n+h)}\right)^{q-1} \subseteq I^{[q]}\left(I^{(n+h)}\right)^{q-1}.$$

Mostraremos que

$$\left(I^{(n+h)}\right)^{q-1} \subseteq \left(I^{(n)}\right)^{[q]},$$

lo que implica que

$$s\left(I^{(n+h)}\right)^{[q]} \subseteq \left(II^{(n)}\right)^{[q]},$$

completando la prueba.

Por el Lema 1.21,

$$\left(I^{(n+h)}\right)^{q-1} \subseteq I^{((n+h)(q-1))}.$$

Por el Lema 4.30 con $k = n - 1$, obtenemos lo siguiente:

$$I^{(hq+(n-1)q-h+1)} \subseteq \left(I^{(n)}\right)^{[q]}.$$

Mostraremos que para $q \gg 0$, $\left(I^{(n+h)}\right)^{q-1} \subseteq I^{(hq+(n-1)q-h+1)}$, lo que concluirá la prueba de que $\left(I^{(n+h)}\right)^{q-1} \subseteq \left(I^{(n)}\right)^{[q]}$. Basta ahora demostrar que

$$(n+h)(q-1) \geqslant hq + (n-1)q - h + 1$$

dado que $q \gg 0$. Para verificar esa desigualdad para $q \gg 0$, basta comparar los coeficientes de q y notar que $n + h \geqslant n + h - 1$. Otra opción es resolver la desigualdad explícitamente y concluir que basta tomar $q \geqslant n + 1$. $\square$

Corolario 4.49. Sea R un anillo regular de característica prima p e I un ideal en R con altura grande h. Si R/I es F-puro, entonces para cualquier $n \geqslant 1$ tenemos

$$I^{(n+h)} \subseteq II^{(n)}.$$

Demostración. El primero paso es reducir al caso local, lo que podemos hacer usando el Ejercicio 1.30, sabiendo que la altura grande de un ideal no puede aumentar después de una localización y que cualquier localización de un anillo F-puro es F-pura [HR74, 6.2]. Entonces podemos ahora suponer que $(R, \mathfrak{m})$ es un anillo regular local y que R/I es F-puro.

Fijemos $n \geqslant 1$ y sea q como en el Lema 4.48. Para cualquier $q \gg 0$,

$$\left(I^{[q]} : I\right) \subseteq \left(II^{(n)} : I^{(n+h)}\right)^{[q]}.$$

Si $I^{(n+h)} \nsubseteq II^{(n)}$, entonces tendríamos $\left(II^{(n)} : I^{(n+h)}\right)^{[q]} \subseteq \mathfrak{m}^{[q]}$, contradiciendo el Criterio de Fedder. □

Finalmente, podemos ahora demostrar que la Conjetura de Harbourne es satisfecha para cualquier ideal que define un anillo F-puro.

Ejercicio 4.50. Probar el Teorema 4.47 usando el Corolario 4.49: demuestra que si R es un anillo regular de característica p y R/I es F-puro, entonces I satisface la Conjetura de Harbourne.

Es natural preguntar si podemos mejorar la respuesta al Problema de la Contención dada por el Teorema 4.47. Por ejemplo, para cada $n \geqslant 1$ podríamos tener $I^{(hn-h)} \subseteq I^n$, pero eso no es verdad para todos los ideales que definen anillos F-puros.

Ejercicio 4.51. Sea $R = k[x_1, \ldots, x_d]$ y consideremos el ideal monomial libre de cuadrados

$$I = \bigcap_{i<j} (x_i, x_j).$$

Demuestra que tenemos $I^{(2n-1)} \nsubseteq I^n$ para cualquier $n \geqslant 1$, pero $I^{(2n-2)} \nsubseteq I^n$ para $n < d$. ¿Qué pasa para $n = d$? ¿Podemos generalizar ese ejemplo para cualquier altura mayor que 2?

Por otro lado, el Corolario 4.49 implica algo más fuerte que la Conjetura de Harbourne.

Ejercicio 4.52. Sea R un anillo regular de característica $p > 0$ y consideremos el ideal I en R tal que R/I es F-puro. Demuestra que dado un entero $c \geqslant 1$, si $I^{(hk-c)} \subseteq I^k$ para algún n, entonces $I^{(hn-c)} \subseteq I^n$ para todo $n \gg 0$.

Cuando R/I es F-regular, podemos de hecho mejorar el Teorema 4.47.

Definición 4.53 (Anillo F-regular)**.** Un anillo Noetheriano reducido F-finito R es *F-regular* si para cada $c \in R$ que no pertence a ningún primo minimal de R existe $e \gg 0$ tal que el morfismo $R \to R^{1/p^e}$ que envia 1 a c^{1/p^e} se escinde como un morfismo de R-módulos.

Anillos de determinantes genéricos y anillos de Veronese son ejemplos de anillos F-regulares.

Teorema 4.54 (Theorem 4.1 en [GH19])**.** Sea R un anillo F-finito regular de característica prima p y consideremos un ideal I en R con altura grande h tal que R/I es F-regular. Para cualquier $n \geqslant 1$,

$$I^{((h-1)n+1)} \subseteq I^{n+1}.$$

Cuando $h = 2$, eso significa que $I^{(n)} = I^n$ para cualquier n.

Este teorema esencialmente dice que si R/I es F-regular, entonces I satisface una versión de la Conjetura de Harbourne en que sustituímos la altura grande h de I por $h - 1$.

Este resultado usa un criterio como el criterio de Fedder para F-regularidad juntamente con el siguiente lema [GH19, Lemma 3.2]:

Lema 4.55. Sea R un anillo regular de característica prima p, I un ideal en R y $h \geqslant 2$ la altura grande de I. Entonces para cada $d \geqslant h - 1$ y para todo $q = p^e$,

$$\left(I^d : I^{(d)}\right)\left(I^{[q]} : I\right) \subseteq \left(II^{(d+1-h)} : I^{(d)}\right)^{[q]}.$$

El criterio parecido al Criterio de Fedder de que necesitamos fue probado por Donna Glassbrenner:

Teorema 4.56 (Criterio de Glassbrenner para F-regularidad fuerte [Gla96])**.** Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo F-finito regular local de característica prima p. Dado un ideal radical propio I de R, R/I es F-regular si y sólo si para cada elemento $c \in R$ que no está en ningún primo minimal de I, $c\left(I^{[q]} : I\right) \not\subseteq \mathfrak{m}^{[q]}$ para cada $q = p^e \gg 0$.

Ejercicio 4.57. Sea I un ideal en un anillo Noetheriano. Probar que $\left(I^d : I^{(d)}\right)$ siempre contiene un elemento que no está contenido en ninguno de los primos minimales de I.

Ejercicio 4.58. Probar el Teorema 4.54 usando el Lema 4.55.

Ejercicio 4.59. Encontrar ejemplos de primos de altura 2 definiendo anillos F-regulares que no son generados por sucesiones regulares.

Índice alfabético

Referencias

[GVV07] A note on rees algebras and the MFMC property. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 48:141–150, 2007.

[Ake17] Solomon Akesseh. Ideal containments under flat extensions. *J. Algebra*, 492:44–51, 2017.

[BRH+09] T. Bauer, S. Di Rocco, B. Harbourne, M. Kapustka, A. Knutsen, W. Syzdek, and T. Szemberg. A primer on Seshadri constants. *Contemporary Mathematics*, vol. 496:39–70, 2009.

[BCG+16] Cristiano Bocci, Susan Cooper, Elena Guardo, Brian Harbourne, Mike Janssen, Uwe Nagel, Alexandra Seceleanu, Adam Van Tuyl, and Thanh Vu. The waldschmidt constant for squarefree monomial ideals. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 44(4):875–904, Dec 2016.

[BH10] Cristiano Bocci and Brian Harbourne. Comparing powers and symbolic powers of ideals. *J. Algebraic Geom.*, 19(3):399–417, 2010.

[BJNB19] Holger Brenner, Jack Jeffries, and Luis Núñez-Betancourt. Quantifying singularities with differential operators. *Advances in Mathematics*, 358:106843, 2019.

[Bre79] Henrik Bresinsky. Monomial space curves in A^3 as set-theoretic complete intersections. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 75(1):23–24, 1979.

[Bro79] Markus P. Brodmann. Asymptotic stability of $\mathrm{Ass}(M/I^nM)$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 74(1):16–18, 1979.

[BV88] Winfried Bruns and Udo Vetter. *Determinantal rings*, volume 1327 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[Bui95] Alexandru Buium. Differential characters of abelian varieties over p-adic fields. *Inventiones mathematicae*, 122(2):309–340, 1995.

[CFG+16] Susan Cooper, Giuliana Fatabbi, Elena Guardo, Anna Lorenzini, Juan Migliore, Uwe Nagel, Alexandra Seceleanu, Justyna Szpond, and Adam Van Tuyl. Symbolic powers of codimension two Cohen-Macaulay ideals, 2016. arXiv:1606.00935.

[CEHH16] Susan M. Cooper, Robert J. D. Embree, Tai Ha, and Andrew H. Hoefel. Symbolic powers of monomial ideals. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 60:39–55, 2016.

[Cow84] R. C. Cowsik. Symbolic powers and number of defining equations. In *Algebra and its applications (New Delhi, 1981)*, volume 91 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 13–14. Dekker, New York, 1984.

[CN76] R. C. Cowsik and M. V. Nori. On the fibres of blowing up. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 40(1-4):217–222 (1977), 1976.

[Cut91] Steven Dale Cutkosky. Symbolic algebras of monomial primes. *J. Reine Angew. Math.*, 416:71–89, 1991.

[DDSG$^+$18] Hailong Dao, Alessandro De Stefani, Eloísa Grifo, Craig Huneke, and Luis Núñez Betancourt. Symbolic powers of ideals. In *Singularities and foliations. geometry, topology and applications*, volume 222 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 387–432. Springer, Cham, 2018.

[DN96] Emanuela De Negri. K-algebras generated by pfaffians. *Math. J. Toyama Univ*, 19:105–114, 1996.

[DSGJ] Alessandro De Stefani, Eloísa Grifo, and Jack Jeffries. A Zariski-Nagata theorem for smooth $\mathbb{Z}$-algebras. *To appear in J. Reine Angew. Math.*

[DEP80] Corrado DeConcini, David Eisenbud, and Claudio Procesi. Young diagrams and determinantal varieties. *Invent. Math.*, 56(2):129–165, 1980.

[Dem82] Jean-Pierre Demailly. Formules de jensen en plusieurs variables et applications arithmétiques. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 110:75–102, 1982.

[Dra17] Ben Drabkin. Configurations of linear spaces of codimension two and the containment problem, 2017. arXiv:1704.07870.

[DGSS17] Ben Drabkin, Eloísa Grifo, Alexandra Seceleanu, and Branden Stone. Computations involving symbolic powers, 2017. arXiv:1712.01440.

[Dum15] Marcin Dumnicki. Containments of symbolic powers of ideals of generic points in $\mathbb{P}^3$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143(2):513–530, 2015.

[DSTG13] Marcin Dumnicki, Tomasz Szemberg, and Halszka Tutaj-Gasińska. Counterexamples to the $I^{(3)} \subseteq I^2$ containment. *J. Algebra*, 393:24–29, 2013.

[ELS01] Lawrence Ein, Robert Lazarsfeld, and Karen E. Smith. Uniform bounds and symbolic powers on smooth varieties. *Invent. Math.*, 144 (2):241–25, 2001.

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[EH79] David Eisenbud and Melvin Hochster. A Nullstellensatz with nilpotents and Zariski's main lemma on holomorphic functions. *J. Algebra*, 58(1):157–161, 1979.

[EM97] David Eisenbud and Barry Mazur. Evolutions, symbolic squares, and Fitting ideals. *J. Reine Angew. Math.*, 488:189–201, 1997.

[Fed83] Richard Fedder. F-purity and rational singularity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 278(2):461–480, 1983.

[FMX18] Louiza Fouli, Paolo Mantero, and Yu Xie. Chudnovsky's conjecture for very general points in $\mathbb{P}_k^N$, 2018.

[Gla96] Donna Glassbrenner. Strongly F-regularity in images of regular rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(2):345 – 353, 1996.

[GM92] Shiro Goto and Mayumi Morimoto. Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 116(2):305–311, 1992.

[GNS91a] Shiro Goto, Koji Nishida, and Yasuhiro Shimoda. The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space curves. *J. Math. Soc. Japan*, 43(3):465–481, 07 1991.

[GNS91b] Shiro Goto, Koji Nishida, and Yasuhiro Shimoda. Topics on symbolic Rees algebras for space monomial curves. *Nagoya Math. J.*, 124:99–132, 1991.

[GNW94] Shiro Goto, Koji Nishida, and Keiichi Watanabe. Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves and counterexamples to Cowsik's question. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 120(2):383–392, 1994.

[GS] Daniel R. Grayson and Michael Stillman. *Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry.*

[Gri] Eloísa Grifo. A stable version of Harbourne's Conjecture and the containment problem for space monomial curves. Preprint, arXiv:1809.06955.

[Gri18] Eloísa Grifo. Symbolic powers and the containment problem. *PhD Thesis*, 2018.

[GH19] Eloísa Grifo and Craig Huneke. Symbolic powers of ideals defining F-pure and strongly F-regular rings. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (10):2999–3014, 2019.

[GMS19] Eloísa Grifo, Linquan Ma, and Karl Schwede. Symbolic power containments in singular rings in positive characteristic, 2019.

[HH13] Brian Harbourne and Craig Huneke. Are symbolic powers highly evolved? *J. Ramanujan Math. Soc.*, 28A:247–266, 2013.

[HS15] Brian Harbourne and Alexandra Seceleanu. Containment counterexamples for ideals of various configurations of points in $\mathbf{P}^N$. *J. Pure Appl. Algebra*, 219(4):1062–1072, 2015.

[Her80] J Herzog. Note on complete intersections. *preprint*, 1980.

[HU90] Jürgen Herzog and Bernd Ulrich. Self-linked curve singularities. *Nagoya Math. J.*, 120:129–153, 1990.

[Hoc73] Melvin Hochster. Criteria for equality of ordinary and symbolic powers of primes. *Mathematische Zeitschrift*, 133:53–66, 1973.

[HH90] Melvin Hochster and Craig Huneke. Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(1):31–116, 1990.

[HH02] Melvin Hochster and Craig Huneke. Comparison of symbolic and ordinary powers of ideals. *Invent. Math. 147 (2002), no. 2, 349–369*, November 2002.

[HR74] Melvin Hochster and Joel L. Roberts. Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay. *Advances in Math.*, 13:115–175, 1974.

[HR76] Melvin Hochster and Joel L. Roberts. The purity of the Frobenius and local cohomology. *Advances in Math.*, 21(2):117–172, 1976.

[HS02] Serkan Hoşten and Gregory G. Smith. Monomial ideals. In *Computations in algebraic geometry with Macaulay 2*, volume 8 of *Algorithms Comput. Math.*, pages 73–100. Springer, Berlin, 2002.

[HH92] Sam Huckaba and Craig Huneke. Powers of ideals having small analytic deviation. *Amer. J. Math.*, 114(2):367–403, 1992.

[Hun86] Craig Huneke. The primary components of and integral closures of ideals in 3-dimensional regular local rings. *Mathematische Annalen*, 275(4):617–635, Dec 1986.

[HKV09] Craig Huneke, Daniel Katz, and Javid Validashti. Uniform Equivalente of Symbolic and Adic Topologies. *Illinois Journal of Mathematics*, 53(1):325–338, 2009.

[HU89] Craig Huneke and Bernd Ulrich. Powers of licci ideals. In *Commutative algebra (Berkeley, CA, 1987)*, volume 15 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 339–346. Springer, New York, 1989.

[JMnV15] Jack Jeffries, Jonathan Montaño, and Matteo Varbaro. Multiplicities of classical varieties. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 110(4):1033–1055, 2015.

[Joy85] A. Joyal. δ-anneaux et vecteurs de Witt. *C.R. Acad. Sci. Canada*, VII(3):177–182, 1985.

[KS19] Jesse Kim and Irena Swanson. Many associated primes of powers of primes. *J. Pure Appl. Algebra*, 223(11):4888–4900, 2019.

[Kun69] Ernst Kunz. Characterizations of regular local rings for characteristic p. *Amer. J. Math.*, 91:772–784, 1969.

[Las05] Emanuel Lasker. Zur theorie der moduln und ideale. *Mathematische Annalen*, 60:20–116, 1905.

[LS06] Aihua Li and Irena Swanson. Symbolic powers of radical ideals. *Rocky Mountain J. Math.*, 36(3):997–1009, 2006.

[Lyu88] Gennady Lyubeznik. On the arithmetical rank of monomial ideals. *J. Algebra*, 112(1):86–89, 1988.

[MS18a] Linquan Ma and Karl Schwede. Perfectoid multiplier/test ideals in regular rings and bounds on symbolic powers. *Invent. Math.*, 214(2):913–955, 2018.

[MS18b] Grzegorz Malara and Justyna Szpond. On codimension two flats in Fermat-type arrangements. In *Multigraded algebra and applications*, volume 238 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 95–109. Springer, Cham, 2018.

[Mat80] Hideyuki Matsumura. *Commutative algebra*, volume 56 of *Mathematics Lecture Note Series*. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., second edition, 1980.

[Mat89] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

[MnNnB19] Jonathan Montaño and Luis Núñez Betancourt. Splittings and Symbolic Powers of Square-free Monomial Ideals. *International Mathematics Research Notices*, 07 2019. rnz138.

[Mor91] Marcel Morales. Noetherian symbolic blow-ups. *J. Algebra*, 140(1):12–25, 1991.

[Mor99] Susan Morey. Stability of associated primes and equality of ordinary and symbolic powers of ideals. *Comm. Algebra*, 27(7):3221–3231, 1999.

[Nag62] Masayoshi Nagata. *Local rings*. Interscience, 1962.

[Nag65] Masayoshi Nagata. *The Fourteenth Problem of Hilbert*. Tata Institute of Fundamental Research, 1965.

[Noe21] Emmy Noether. Idealtheorie in ringbereichen. *Mathematische Annalen*, 83(1):24–66, 1921.

[Rat76] Louis J. Ratliff. On prime divisors of I^n, n large. *Michigan Math. J.*, 23(4):337–352, 1976.

[Ree58] David Rees. On a problem of Zariski. *Illinois Journal of Mathematics*, 2(1):145–149, 1958.

[Rob85] Paul C. Roberts. A prime ideal in a polynomial ring whose symbolic blow-up is not Noetherian. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 94(4):589–592, 1985.

[Sch85] Peter Schenzel. Symbolic powers of prime ideals and their topology. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 93(1):15–20, 1985.

[Sch91] Peter Schenzel. Examples of gorenstein domains and symbolic powers of monomial space curves. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 71(2):297 – 311, 1991. Special Issue In Honor of H. Matsumura.

[Sec15] Alexandra Seceleanu. A homological criterion for the containment between symbolic and ordinary powers of some ideals of points in $\mathbb{P}^2$. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 219(11):4857 – 4871, 2015.

[Sri91] Hema Srinivasan. On finite generation of symbolic algebras of monomial primes. *Comm. Algebra*, 19(9):2557–2564, 1991.

[Swa00] Irena Swanson. Linear equivalence of topologies. *Math. Zeitschrift*, 234:755–775, 2000.

[SH06] Irena Swanson and Craig Huneke. *Integral closure of ideals, rings, and modules*, volume 13. Cambridge University Press, 2006.

[SS17] T. Szemberg and J. Szpond. On the containment problem. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 66(2):233–245, 2017.

[Val81] Giuseppe Valla. On determinantal ideals which are set-theoretic complete intersections. *Comp. Math*, 42(3):11, 1981.

[Wal16] Robert M. Walker. Rational singularities and uniform symbolic topologies. *Illinois J. Math.*, 60(2):541–550, 2016.

[Wal18] Robert M. Walker. Uniform symbolic topologies in normal toric rings. *J. Algebra*, 511:292–298, 2018.

[Zar49] Oscar Zariski. A fundamental lemma from the theory of holomorphic functions on an algebraic variety. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 29:187–198, 1949.