Potências Simbólicas

Eloísa Grifo

Novembro de 2019

Agradecimentos

Estas notas foram escritas para a *Escuela de Outoño en Álgebra Conmutativa* 2019 no CIMAT, in Guanajuato, Mexico. Dei o mini-curso em espanhol, e esta é a versão portuguesa das notas. Estas notas são baseadas num outro mini-curso que dei no RTG Advanced Summer Mini-course in Commutative Algebra na University of Utah em Maio de 2018. Quero agradecer aos organizadores, os outros oradores, e todos os alunos que participaram em ambas as escolas. Quero também deixar um agradecimento especial à Sandra Sandoval, que leu cuidadosamente a versão espanhola destas notas, e me ajudou a substituir o meu portuñol por espanhol de verdade.

Estas notas não são de modo algum exaustivas, mas há muito mais sobre potências simbólicas nas referências – por exemplo, em [DDSG$^+$18] e [SS17].

1 Uma introducçao às potências simbólicas

O nosso objectivo é estudar as potências simbólicas. Para além de este ser um tópico interessante por si mesmo, as potências simb]'olicas aparecem como ferramentas auxiliares em vários resultados importantes em égebra comutativa, como no Teorema do Ideal Principal de Krull, no Lema de Chevalley, ou em dar uma prova em característica prima do facto de que todos os anéis regulares locais são domínios de factorização única. A demonstração de Hartshorne do Teorema de Anulação de Hartshorne—Lichtenbaum[1] também usa potências simbólicas. Explicitamente, a prova de Hartshorne deste resultado sobre cohomologia local usa o facto de que certas topologias simbólicas e -ádicas são equivalentes, e assim cohomologia local pode ser calculada usando potências simbólicas.

1.1 Decomposiçao primária e primos associados

Um dos resultados fundamentais em álgebra comutativa é o facto de que todos os ideias num anel noetheriano têm uma decomposição primária. Podemos pensar nesse teorema como uma generalização do teorema fundamental da aritmética, que diz que todos os inteiros n podem ser escritos como um produto de primos. De facto, um produto de primos *é* uma decomposição primária: se $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, a decomposição primária do ideal (n) é $(n) = (p_1^{a_1}) \cap \cdots \cap (p_k^{a_k})$. No entanto, este exemplo pode ser enganador, ao sugerir que os ideais primários são simplesmente potências de ideais primos; nã! A história é um pouco mais complicada.

Definiçao 1.1. Um ideal Q num anel R diz-se *primário* se para todos os $a, b \in R$, temos que $ab \in Q$ implica $a \in Q$ ou $b^n \in Q$ para algum $n \geqslant 1$.

Observação 1.2. Pela definiąo, vemos que o radical dum ideal primário é sempre um ideal primo. Se o radical dum ideal primário Q é o primo P, dizemos que Q é P-primário.

Exercício 1.3. Se o radical de I é um ideal maximal, então I é um ideal primário.

No entanto, nem todos os ideais cujo radical é primo são primários, como veremos no Exemplo 1.21.

Observação 1.4. Uma decomposição primária pode sempre ser modificada para ser irredundante. Para isso, basta apagar qualquer component que seja desnecessária, e de seguida substituir componentes com o mesmo radical pela sua intersecção, já que a intersecção de ideais primários com o mesmo radical P é de facto um ideal P-primário.

E tal como prometido, decomposições primárias existem sempre:

Teorema 1.5 (Lasker [Las05], Noether [Noe21])**.** Todo o ideal num anel noetheriano tem uma decomposição primária.

Demonstração. Uma demonstração moderna pode ser encontrada em [Mat80, Section 8]. □

Exemplo 1.6. Eis alguns exemplos de decomposições primárias:

[1] Hartshorne—Lichtenbaum Vanishing Theorem.

a) Se I for um ideal radical, I pode ser escrito como a intersecção dos seus primos minimais; o número de primos minimais é finito desde que o anel seja noetheriano. Visto que ideais primos são de facto primários, escrever I como a intersecção dos seus primos minimais é precisamente escrever uma decomposição primária para I.

b) O ideal (xy, xz, yz) em $\mathbb{C}[x, y, z]$ é radical, por isso basta encontrar os seus primos minimais. É fácil de verificar que $(xy, xz, yz) = (x, y) \cap (x, z) \cap (y, z)$ é a decomposição primária. Mais geralmente, os ideais monomiais radicais sã precisamente os ideais monomiais gerados por monómios livres de quadrados, e as componentes primárias dum ideal monomial são também monomiais.

c) As decomposições primárias não são únicas, mesmo que sejam irredundantes. Por examplo, sobre qualquer corpo k, o ideal (x^2, xy) em $k[x, y]$ tem infinitas decomposições primárias irredundantes: para qualquer $n \geqslant 1$, podemos tomar $(x^2, xy) = (x) \cap (x^2, xy, y^n)$. No entanto, estas decomposições têm algumas coisas em comum: por exemplo, os radicais das componentes primárias, que são sempre (x) e (x, y).

Que informação podemos extrair duma decomposição primária? Há algum sentido em que as decomposições sejam únicas? Que primos podem aparecer como radicais das componentes primárias de I? Comecemos pela última pergunta: os primos que aparecem são de facto interessantes.

Definiçao 1.7 (Primo associado)**.** Seja M um R-módulo. Um ideal primo P é um *primo associado* de M se verificar uma das seguintes condições equivalentes:

(a) Existe um $a \in M$ não-zero tal que $P = \operatorname{ann}_R(a)$.

(b) Existe uma inclusão de R/P em M.

Se I é um ideal R, referimo-nos a um primo associado do R-mdulo R/I como um primo associado de I. Denotaremos o conjunto dos primos associados de I por $\operatorname{Ass}(R/I)$.

Num anel noetheriano, o conjunto dos primos associados do ideal próprio $I \neq 0$ é sempre não-vazio e finito. Mais ainda, $\operatorname{Ass}(R/I) \subseteq \operatorname{Supp}(R/I)$, onde $\operatorname{Supp}(M)$ é o suporte do módulo M, o conjunto dos primos p tais que $M_p \neq 0$. De facto, os primos minimais do suporte de R/I coincidem com os primos associados minimais de I: esses são precisamente os primos minimais de I. Demonstrações destes factos e mais sobre primos associados em [Mat80, Section 7].

Exercício 1.8. Seja R um anel noetheriano e I um ideal em R. Mostra que o primo P é associado a I se e só se $\operatorname{depth}(R_P/I_P) = 0$.

Dado um ideal I, estamos interessados não só nos seus primos associados mas também nos primos associados às suas potências. Felizmente, o conjunto dos primos associados a alguma potência de I é finito, um resultado primeiro provado por Ratliff [Rat76] e depois extendido por Brodmann [Bro79].

Definiçao 1.9. Seja R um domínio noetheriano e $I \neq 0$ um ideal em R. Definimos

$$A(I) = \bigcup_{n \geqslant 1} \operatorname{Ass}(R/I^n).$$

Teorema 1.10 (Brodmann, 1979)**.** Seja R um domínio noetheriano e $I \neq 0$ um ideal em R. Para n suficientemente grande, $\operatorname{Ass}(R/I^n)$ é independente de n. Em particular, $A(I)$ é um conjunto finito.

A relação entre a decomposição primária e os primos associados é a seguinte:

Teorema 1.11 (Decomposição primária)**.** Seja $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$ uma decomposição primária irredundante de I, onde Q_i é um ideal P_i-primário para cada i. Então

$$\operatorname{Ass}(R/I) = \{P_1, \ldots, P_n\}.$$

Se P_i é minimal em $\operatorname{Ass}(R/I)$, então Q_i é único, e dado por

$$Q_i = I_{P_i} \cap R,$$

onde $- \cap R$ denota a pré-imagem em R do conjunto em causa através do homomorfismo natural $R \longrightarrow R_P$.

Demonstração. See [Mat80, Section 8]. $\square$

Note-se no entanto que se P_i é um primo *embebido* de I, ou seja se P_i não é minimal em $\operatorname{Ass}(R/I)$, a componente primária correspondente a P_i não é necessariamente única.

Exemplo 1.12. Voltemos ao nosso último exemplo, o ideal $I = (x^2, xy)$ em $k[x, y]$. Todas as decomposições primárias irredundantes de I têm precisamente duas componentes, uma para cada primo associado de I: (x) and (x, y). A componente minimal é sempre (x), já que quando localizamos em (x), y torna-se invertível e $I_{(x)} = (x)_{(x)}$. A outra componente é (x, y)-primária, visto que (x, y) é o único primo embebido de I. Essa componente embebida, como vimos antes, pode tomar muitas formas, tais como (x^2, xy, y^n) para cada n.

1.2 Potências simbólicas: definição e propriedades básicas

Para obter a n-ésima potência simbólica do ideal radical I, tomamos a intersecção das componentes minimais numa decomposição primária de I^n, descartando as componentes embebidas.

Definiçao 1.13 (Potências Simbólicas)**.** Seja R um anel noetheriano, e I um ideal em R sem primos embebidos. A *n-ésima potência simbólica* de I é o ideal

$$I^{(n)} = \bigcap_{P \in \operatorname{Min}(R/I)} (I^n R_P \cap R).$$

Observação 1.14. No caso dum ideal primo P,

$$P^{(n)} = P^n R_P \cap R = \{a \in R : sa \in P^n \text{ para algum } s \notin P\}.$$

Cada uma das seguintes propriedades caracteriza as potências simbólicas dum primo P completamente:

- A n-ésima potência simbólica de P é a única componente P-primária numa decomposição primária irredundante de P^n.
- A n-ésima potência simbólica de P é o mais pequeno ideal P-primário que contém P^n.

A igualdade $P^{(n)} = P^n$ é assim equivalente à condição que P^n seja um ideal primary. Em particular, se $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal, $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{(n)}$ para todo o n; de facto, um primo embebido de $\mathfrak{m}^n$ seria um primo contendo estritamente o único primo minimal, o próprio $\mathfrak{m}$, mas como $\mathfrak{m}$ é maximal tal primo não pode existir.

Observação 1.15. Se $I = P_1 \cap \cdots \cap P_k$ é um ideal radical com primos minimais $P_1, \ldots P_k$,

$$I^{(n)} = P_1^{(n)} \cap \cdots \cap P_k^{(n)}.$$

Isto segue imediatamente visto que $IR_P = PR_P$ para cada primo minimal P.

Exercício 1.16. Mostra que se P é prime, $P^{(n)}$ é o mais pequeno ideal P-primário que contém P^n.

Exercício 1.17. Mostra que se $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal, $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{(n)}$ para todo o n.

Observação 1.18. Na definição acima, o facto de que I não tem primos embebidos implica em particular que $\operatorname{Ass}(I) = \operatorname{Min}(I)$. No entanto, quando I primos embebidos, temos realmente duas definições distintas de potências simbólicas, intersectando $I^n R_P \cap R$ com P variando em $\operatorname{Ass}(I)$ ou $\operatorname{Min}(I)$. Vamos focar-nos em ideais sem primos embebidos, pelo que esta distinção não é relevante.

Ambas as definições têm as suas vantagens. Quando tomamos P variando sobre $\operatorname{Ass}(I)$, temos sempre $I^{(1)} = I$, enquanto que quando P varia sobre $\operatorname{Min}(I)$ podemos garantir que $I^{(n)}$ coincide com a intersecção das componentes primárias de I^n correspondendo aos primos minimais de I.

Lema 1.19. Seja I um ideal sem primos embebidos num anel notherian R.

(a) $I^{(1)} = I$.

(b) Para todo o $n \geqslant 1$, $I^n \subseteq I^{(n)}$.

(c) $I^a \subseteq I^{(b)}$ se e só se $a \geqslant b$.

(d) Se $a \geqslant b$, então $I^{(a)} \subseteq I^{(b)}$;

(e) Para quaisquer $a, b \geqslant 1$, $I^{(a)} I^{(b)} \subseteq I^{(a+b)}$.

(f) $I^n = I^{(n)}$ se e só se I^n não tem primos embebidos.

Demonstração.

(a) Dado que todos os primos associados de I são minimais, pelo Teorema 1.11 temos

$$I \quad = \bigcap_{P \in \operatorname{Ass}(R/I)} (IR_P \cap R) = I^{(1)}.$$

(b) Para todos os primos P associados a I, $I^n \subseteq I^n R_P \cap R$, dado que qualquer conjunto está contido na pré-imagem da sua imagem por qualquer função.

(c) Se $a \geqslant b$, então $I^a \subseteq I^b \subseteq I^{(b)}$. Por outro lado, se $I^a \subseteq I^{(b)}$, então dado um primo P associado a I, temos $(I_P)^a = (I^a)_P \subseteq \left(I^{(b)}\right)_P = (I_P)^b$. Seja $J = I_P$. Se $a < b$, teríamos $J^a = J^b$, o que pelo Lema de Nakayma implicaria $J = 0$, e portanto $I = 0$.

(d) Por um lado, $I^a \subseteq I^b$, e tomar pré-imagens preserva inclusões.

(e) Claro está que $I^a I^b = I^{a+b}$. Se $x \in I^{(a)}$ e $y \in I^{(b)}$, então o morfismo natural $R \longrightarrow R_P$ leva xy para a imagem de I^{a+b}.

(f) Dado que $\sqrt{I^n} = \sqrt{I}$, os primos minimais de I^n coincidem com os de I. Por isso, uma decomposição primária irredundate de I^n consiste em

$$I^n = I^{(n)} \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_k,$$

onde $Q_1, \ldots, Q_k$ componentes primárias correspondendo a cada primo embebido de I^n. Não temos nenhuma componente Q_i precisamente quando $I^n = I^{(n)}$. □

Tal como (e) sugere, mesmo que I não tenha nenhum primo embebido, I^n poderá ter primos embebidos, e em particular as implicações conversas de (b) e (d) não são satisfeitas em geral.

As potências simbólicas dum ideal coincidem com as potências usuais se o ideal for gerado por uma sequência regular. No entanto, isto está longe de ser uma condição suficiente – falaremos mais sobre isto mais tarde.

Lema 1.20. Se I é gerado por uma sequência regular num anel de Cohen-Macaulay, então $I^n = I^{(n)}$ para todo o $n \geqslant 1$.

Demonstração. Dado que I é gerado por uma sequência regular, o anel graduado associado a I, o anel graduado $\bigoplus_{n \geqslant 0} I^n / I^{n+1}$, é isomorfo a um anel de polinómios sobre R/I no mesmo número de variáveis que geradores de I. Em particular, I^n/I^{n+1} é um módulo livre sobre R/I para cada n. Por isso, os primos associados a R/I e I^n/I^{n+1} coincidem. Consideremos a seguinte sequência exacta:

$$0 \longrightarrow I^n/I^{n+1} \longrightarrow R/I^{n+1} \longrightarrow R/I^n \longrightarrow 0\,.$$

Por [Mat80, Lemma 7.F], $\operatorname{Ass}(R/I^{n+1}) \subseteq \operatorname{Ass}(I^n/I^{n+1}) \cup \operatorname{Ass}(R/I^n)$. Quando $n = 1$, isto implica que $\operatorname{Ass}(R/I^2) \subseteq \operatorname{Ass}(R/I)$, e dado que temos sempre $\operatorname{Ass}(R/I) \subseteq \operatorname{Ass}(R/I^2)$, concluímos que os primos associados a I^2 coincidem com os de I. Procedendo por inducção, o resultado segue. □

Em particular, as potências simbólicas dum ideal prim0 não são, em geral, triviais:

Exemplo 1.21. Consideremos um corpo k e um inteiro positivo $n > 1$, e sejam $A = k[x, y, z]$, $p = (x, z)$, $I = (xy - z^n)$ e $R = A/I$. Consideremos o ideal primo $P = p/I$, e notemos que $y \notin P$. Dado que $xy = z^n \in P^n$, temos $x \in P^{(n)}$. No entanto, $x \notin P^n$, e por isso $P^n \subsetneq P^{(n)}$.

Em particular, P^n não é um ideal primário, apesar do seu radical ser o primo P.

A igualdade entre potências ordinárias e simbólicas dum ideal prime pode falhar mesmo num anel regular:

Exercício 1.22. Consideremos o ideal $I = I_2(X)$ gerado pelos menores de tamanho 2×2 duma matriz 3×3 genérica,

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix}$$

no anel de polinómios $R = k[X] = k\,[x_{i,j} \,|\, 1 \leqslant i, j \leqslant 3]$ gerado pelas variáeis que aparecem na matriz X sobre o corpo k. Mostra que $g = \det X \in P^{(2)}$, enquanto que $g \notin P^2$.

Exemplo 1.23. Seja k um corpo, $R = k[x, y, z]$, e consideremos o homomorfismo $\psi : R \longrightarrow k[t]$ dado por $\psi(x) = t^3$, $\psi(y) = t^4$ e $\psi(z) = t^5$. Seja P o ideal primo

$$P = \ker \psi = \left(\underbrace{x^2y - z^2}_{f}, \underbrace{xz - y^2}_{g}, \underbrace{yz - x^3}_{h} \right).$$

Vamos mostrar que $P^{(2)} \neq P^2$.

Primeiro, consideremos uma graduação não-standard em R que faz ψ um homomorfismo de grau 0, e I um ideal homogéneo ideal: x com grau 3, y com grau 4, e z com grau 5. Assim, f tem grau 10, g tem grau 8 e h tem grau 9, e o polinómio $fg - h^2$ é homogéneo de grau 18. Note-se que $fg - h^2 = xq$ onde q é um elemento de grau $18 - 3 = 15$. Dado que $x \notin P$ e $fg - h^2 \in P^2$, temos $q \in P^{(2)}$. No entanto, dado que todos os elementos em P têm grau pelo menos 8, então todos os elements em P^2 têm grau pelo menos 16, e por isso $q \notin P^2$. Concluímos que $P^2 \neq P^{(2)}$.

1.3 Potências simbólicas e geometria

Uma das motivações para estudar potências simbólicas é o facto de que num anel regular, as potências simbólicas dum ideal radical correspondem a uma noção de potência geométrica natural, pelo seguinte resultado clássico:

Teorema 1.24 (Zariski–Nagata [Zar49, Nag62])**.** Seja $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d]$ e I um ideal radical em R. Para todo o $n \geqslant 1$,

$$I^{(n)} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supseteq I \\ \mathfrak{m} \in \operatorname{mSpec}(R)}} \mathfrak{m}^n.$$

Podemos pensar neste resultado como uma versão de ordem mais elevada do Teorema de Nullstellensatz. O Teorema de Nullstellensatz diz-nos que os ideais maximais em R estão em bijecção com os pontos em $\mathbb{C}^d$, e que os polinómios no nosso ideal radical I são os polinómios que se anulam em cada ponto da variedade algebraica correspondente em k^d:

$$I = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supseteq I \\ \mathfrak{m} \in \operatorname{mSpec}(R)}} \mathfrak{m}.$$

Os polinómios que se anulam em cada ponto da variedade correspondendo a I formam um ideal maximal $\mathfrak{m}$ que contém I. O teorema de Zariski–Nagata diz-nos então que os polinómios que se anulam até ordem n ao longo dessa variedade são precisamente os polinómios em $I^{(n)}$ — os polinómios em $\mathfrak{m}^n$ são precisamente os que se anulam de ordem até n nos pontos que correspondem a $\mathfrak{m}$.

Vamos provar este teorema através duma descripção adicional, em termos de operadores diferenciais:

$$I^{(n)} = \left\{ f \in R \,\Big|\, \frac{\partial^{a_1+\cdots+a_d}}{\partial x_1^{a_1} \cdots x_d^{a_d}}(f) \in I \text{ para cada } a_1 + \cdots + a_d < n \right\} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supseteq I \\ \mathfrak{m} \in \operatorname{mSpec}(R)}} \mathfrak{m}^n.$$

Podemos descrever potências simbólicas em termos de operadores diferentiais em maior generalidade, sobre qualquer corpo perfeito. Para isso, faremos uso a seguinte definição:

Definiçao 1.25 (Differential operators)**.** Dada uma k-álgebra R finitamente gerada, os operadores diferenciais k-lineares em R de ordem n, $D_R^n \subseteq \operatorname{Hom}_k(R, R)$, são definidos da seguinte forma:

- Os operadores diferenciais de ordem zero são simplesmente as funções R-lineares:

$$D^0_{R|k} = R \cong \operatorname{Hom}_R(R, R).$$

- Dizemos que $\delta \in \operatorname{Hom}_k(R, R)$ é um operador de ordem n, e escrevemos $\delta \in D_R^n$, se

$$[\delta, r] = \delta r - r\delta$$

  é um operador de ordem $n - 1$ para todo o $r \in D^0_{R|k}$.

O anel de operadores diferenciais k-lineares em R é definido por $D_{R|k} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D^n_{R|k}$.

Se R e k forem claros no contexto, escrevemos apenas D^n e D.

Definiçao 1.26. Seja R uma k-álgebra finitamente gerada, I um ideal em R, e n um inteiro positivo. A n-ésima potência diferencial k-linear de I é

$$I^{\langle n \rangle} = \{ f \in R \,|\, \delta(f) \in I \text{ para qualquer } \delta \in D_R^{n-1} \}.$$

O teorema de Zariski–Nagata diz que as potências diferenciais de I coincidem com as suas potências simbólicas:

Teorema 1.27 (Zariski–Nagata [Zar49, Nag62], cf. [DDSG+18])**.** Seja $R = k[x_1, \ldots, x_d]$, onde k é um corpo perfeito, e seja I um ideal radical. For all $n \geqslant 1$,

$$I^{(n)} = I^{\langle n \rangle} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supseteq I \\ \mathfrak{m} \in \operatorname{mSpec}(R)}} \mathfrak{m}^n.$$

Para provar este teorema, precisamos de entender potências diferenciais um pouco melhor, para eventualmente provarmos que têm as mesmas propriedades que caracterizam as potências simbólicas. Eis o que vamos mostrar para qualquer ideal primo P:

1) $P^{\langle n\rangle}$ é um ideal P-primário. (Lema 1.31 e Proposição 1.32)

2) $P^n \subseteq P^{\langle n\rangle}$. (Proposição 1.33)

3) $\left(P^{\langle n\rangle}\right)_P = (P_P)^{\langle n\rangle}$. (Lema 1.34)

4) Dado um ideal maximal $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{\langle n\rangle}$. (Observação 1.35)

Dadas estas properiedades, 1) and 2) juntos implicam $P^{(n)} \subseteq P^{\langle n\rangle}$, dado que $P^{(n)}$ é o mais pequeno ideal P-primário contendo P^n. Para mostrar $P^{\langle n\rangle} \subseteq P^{(n)}$, precisamos apenas de mostrar que isto se verifica depois de localizarmos em P, visto que este é o único primo associado a $P^{(n)}$, pelo Exercício 1.28 abaixo. Mas 3) diz que tomar potências diferenciais powers comuta com localização, e depois de localizarmos em P, P torna-se no único ideal maximal; então 4) completa a demonstração de que $P^{\langle n\rangle} \subseteq P^{(n)}$ para qualquer primo P.

Para o caso mais geral dum ideal radical I, podemos escrever I como a intersecção de um número finito de primos, digamos

$$I = P_1 \cap \cdots \cap P_r.$$

Então

$$I^{(n)} = P_1^{(n)} \cap \cdots \cap P_r^{(n)} = P_1^{\langle n\rangle} \cap \cdots \cap P_r^{\langle n\rangle} = (P_1 \cap \cdots \cap P_r)^{\langle n\rangle} = I^{\langle n\rangle}.$$

Exercício 1.28. Dados ideais I e J num anel noetheriano R, as seguintes condições são equivalentes:

(a) $I \subseteq J$;

(b) $I_P \subseteq J_P$ para todos os primos $P \in \operatorname{Supp}(R/J)$;

(c) $I_P \subseteq J_P$ para todos os primos $P \in \operatorname{Ass}(R/J)$.

Exercício 1.29. Para qualquer família de ideais $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$,

$$\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha^{\langle n\rangle} = \left(\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha\right)^{\langle n\rangle}$$

para qualquer $n \geqslant 0$.

Note-se que no que se segue e até à Proposição 1.33, k pode ser qualquer anel.

Observação 1.30. Dado que $D_R^{n-1} \subseteq D_R^n$, concluímos que $I^{\langle n+1\rangle} \subseteq I^{\langle n\rangle}$. De facto, dados ideais $I \subseteq J$, temos $I^{\langle n\rangle} \subseteq J^{\langle n\rangle}$ para qualquer $n \geqslant 0$.

Lema 1.31. Seja R uma k-álgebra finitamente gerada, I um ideal em R, e n um inteiro positivo. O conjunto $I^{\langle n\rangle}$ é um ideal.

Demonstração. Se $f, g \in I^{\langle n \rangle}$ então $f+g \in I^{\langle n \rangle}$, dado que para qualquer $\delta \in D_R^{n-1}$,

$$\delta(f+g) = \underbrace{\delta(f)}_{\in I} + \underbrace{\delta(g)}_{\in I} \in I.$$

Temos de mostrar que $rf \in I^{\langle n \rangle}$ para quaisquer $r \in R$ e $f \in I^{\langle n \rangle}$. Dado $\delta \in D^{n-1}$, note-se que $f \in I^{\langle n \rangle} \subseteq I^{\langle n-1 \rangle}$, $[\delta, r] \in D^{n-2}$, e $\delta(f) \in I$, e por isso

$$\delta(rf) = \underbrace{\underbrace{[\delta, r]}_{\in D^{n-2}} (\underbrace{f}_{\in I^{\langle n-1 \rangle}})}_{\in I} + r \underbrace{\delta(f)}_{\in I} \in I.$$

Concluímos que $\delta(rf) \in I$, e por isso $rf \in I^{\langle n \rangle}$. $\square$

Proposiçao 1.32. Seja R uma k-álgebra finitamente gerada. Seja P um ideal primo em R, e n um inteiro positivo. Então $P^{\langle n \rangle}$ é P-primário.

Demonstração. Vamos usar inducção em n. O caso base é claro: $P^{\langle 1 \rangle} = P$ é de facto P-primário.

Agora suponhamos que $P^{\langle n \rangle}$ é P-primário. Para mostrar que $P^{\langle n+1 \rangle}$ também é P-primário, precisamos de mostrar que para quaisquer $r \notin P$ e $f \in P$ tais que $rf \in P^{\langle n+1 \rangle}$, temos $f \in P^{\langle n+1 \rangle}$. Dado $\delta \in D^n$,

$$\delta(rf) = [\delta, r](f) + r\delta(f) \in P.$$

Como $rf \in P^{\langle n+1 \rangle} \subseteq P^{\langle n \rangle}$, temos $f \in P^{\langle n \rangle}$ pela hipótese de inducção. Então $[\delta, r](f) \in P$, já que $[\delta, r] \in D^{n-1}$. Concluímos que $r\delta(f) = \delta(rf) - [\delta, r](f) \in P$. Então $r\delta(f) \in P$, e por isso $\delta(f) \in P$, já que P é um ideal primo e $r \notin P$. Concluímos que $f \in P^{\langle n+1 \rangle}$. $\square$

Proposiçao 1.33. Seja R uma k-álgebra finitamente gerada, I um ideal em R, e n um inteiro positivo. Temos $I^n \subseteq I^{\langle n \rangle}$.

Demonstração. Mais uma vez usamos inducção em n. O caso base é simples: $I = I^{\langle 1 \rangle}$ porque $D^0 = R$.

Suponhamos que $I^n \subseteq I^{\langle n \rangle}$. Note-se que I^n é gerado pelos elementos da forma fg com $f \in I$, $g \in I^n$. Para mostrar que $I^{n+1} \subseteq I^{\langle n+1 \rangle}$, basta mostrar que $fg \in I^{\langle n+1 \rangle}$ para cada f e g.

Para isso, consideramos qualquer $\delta \in D^n$, e vamos mostrar que $\delta(fg) \in I$. De facto, visto que por hipótese de indução temos $g \in I^n \subseteq I^{\langle n \rangle}$, concluímos que

$$\delta(fg) = \underbrace{\underbrace{[\delta, f]}_{\in D^{n-1}} (\underbrace{g}_{\in I^{\langle n \rangle}})}_{\in I} + \underset{\in I}{f} \delta(g) \in I.$$

Note-se que usámos o facto de que $\delta f = [\delta, f] + f\delta$. Por fim, obtemos $I^{n+1} \subseteq I^{\langle n+1 \rangle}$. $\square$

Lema 1.34. Para qualquer ideal radical I e primo P numa k-álgebra R, $(I_P)^{\langle n \rangle} = \left(I^{\langle n \rangle}\right)_P$.

Muito mais é verdade: tomar potências diferenciais comuta com a localização em qualquer conjunto multiplicativo W [BJNB19, Lemma 3.9].

Observação 1.35. Seja k um corpo, $R = k[x_1, \dots, x_d]$ ou $R = k[\![x_1, \dots, x_d]\!]$, e $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_d)$. Neste caso,

$$D_R^n = R \left\langle \frac{1}{\alpha_1!}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{1}{\alpha_d!}\frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} \;\middle|\; \alpha_1 + \ldots + \alpha_d \leqslant n \right\rangle.$$

Se $f \notin \mathfrak{m}^n$, então f tem algum monḿio da forma $x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ com um coeficiente $\lambda \neq 0$ para algum $a_1 + \cdots + a_d < n$. Fixemos tal monómio que seja também minimal entre os monómios que aparecem em f na ordem lexicográfica graduada. Aplicando o operador diferencial $\frac{1}{\alpha_1!}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{1}{\alpha_d!}\frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}$ ao elemento $\lambda x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ obtemos $\lambda \neq 0$, e qualquer outro monómio aparecendo em f é levado para uma constante (ou zero). Consequentemente, $f \notin \mathfrak{m}^{\langle n \rangle}$. Conluímos que $\mathfrak{m}^{\langle n \rangle} \subseteq \mathfrak{m}^n$. Dado que $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{m}^{\langle n \rangle}$ pelo Lema 1.33, concluímos que $\mathfrak{m}^{\langle n \rangle} = \mathfrak{m}^n$.

Com uma versão muito mais técnica desta ideia, podemos provar que desde que o corpo k seja perfeito, podemos tomar qualquer ideal maximal $\mathfrak{m}$ numa álgebra R essencialmente de tipo finito sobre k, e $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{\langle n \rangle}$ também se verifica. Este é o ponto mais difícil e subtil da demonstração. Para uma demonstração completa, [DSGJ, Theorem 3.6].

Teorema 1.36 (Zariski–Nagata Theorem for polynomial and power series rings [Zar49])**.** Seja k um corpo perfeito, e $R = k[x_1, \dots, x_d]$ ou $R = k[\![x_1, \dots, x_d]\!]$. Para qualquer primo P e qualquer ideal maximal $\mathfrak{m} \supseteq P$, temos $P^{(n)} \subseteq \mathfrak{m}^n$ para $n \geqslant 1$. Mais ainda,

$$P^{(n)} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supseteq P \\ \mathfrak{m} \in \operatorname{mSpec}(R)}} \mathfrak{m}^n.$$

Demonstração.

$$P^{(n)} \underset{1.32}{\subseteq} P^{\langle n \rangle} \underset{1.30}{\subseteq} \mathfrak{m}^{\langle n \rangle} \underset{1.35}{=} \mathfrak{m}^n.$$

Por outro lado, suponhamos que $f \in \mathfrak{m}^n$ para todos os ideais maximais $\mathfrak{m} \supseteq P$. Para cada ideal maximal $\mathfrak{m}$ contendo P, temos $f \in \mathfrak{m}^{\langle n \rangle}$ por 1.35, e por isso para cada $\delta \in D^{n-1}$ temos $\delta(f) \in \mathfrak{m}$. Mas R/p é uma álgebra finitamente gerada sobre um corpo, e por isso um anel de Hilbert-Jacobson, o que significa que todos os ideais primos coincidem com uma intersecção de ideais maximais:

$$P = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supseteq P \\ \mathfrak{m} \in \operatorname{mSpec}(R)}} \mathfrak{m}.$$

Mas então temos $\partial(f) \in P$, e $f \in P^{\langle n \rangle}$. $\square$

Existem muitas extensões de Zariski–Nagata. Eisenbud e Hochster provaram que se P for um ideal primo em qualquer anel notherian R, temos sempre

$$P^{(n)} \supseteq \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supseteq I \\ \mathfrak{m} \in \operatorname{mSpec}(R)}} \mathfrak{m}^n,$$

com igualdade se R é um anel regular [EH79]. Note-se que este resultado não requere que R contenha um corpo. Quanto à descrição das potências simbólicas através de operadores diferenciais, também existe uma versão deste facto em característica mista, mas requer que consideremos mais que operadores diferenciais. Em $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_d]$, por exemplo, precisamos também de alguma noção de diferenciação por inteiros primos p, o que podemos obter através das p-derivações de Joyal e Buium [Joy85, Bui95], como demonstrado em [DSGJ].

2 Como calcular potências simbólicas?

Tipicamente, a definição não é uma forma práctica ou eficiente de calcular potências simbólicas, mesmo num anel de polinómios. Calcular a intersecção das potências dos ideais maximais correspondentes também pode mostrar-se difícil, já que a menos que o ideal que estamos a considerar corresponda a um conjunto finito de pontos, teremos que intersectar um conjunto infinito de ideais.

Com a ajuda de um computador, é possível calcular todas as componentes primárias de I e I^n e tomar a intersecçõ (finita) das componentes apropriadas de I^n para obter $I^{(n)}$, mas infelizmente o problema de encontrar uma decomposição primária dum ideal é notoriamente difícil. Encontrar a decomposição primária dum ideal monomial é um problema NP completo [HS02]. Vamos discutir métodos alternativos para calcular potências simbólicas, alguns dos quais são usados pelo pacote `SymbolicPowers`[DGSS17] para o software de álgebra comutativa `Macaulay2` [GS].

Exercício 2.1. Usa `Macaulay2` para encontrar decomposições primárias de I^2, I^3 and I^{10}, onde I é cada um dos seguintes ideais, e usa estas decomposições para determinar $I^{(2)}$, $I^{(3)}$ e $I^{(10)}$. Considere os corpos $k = \mathbb{Q}, \mathbb{Z}/2$ e $\mathbb{Z}/101$.

(a) I o ideal que define a curva (t^3, t^4, t^5) em $k[x, y, z]$.

(b) $I = (xy, yz, xz)$, em $k[x, y, z]$ e $k[x, y, z, u, v]$.

(c) $I = (x(y^3 - z^3), y(z^3 - x^3), z(x^3 - y^3))$ em $k[x, y, z]$.

(d) O ideal gerado por todos os monómios de grau 2 em $k[x_1, \dots, x_5]$.

Há melhores métodos que possas usar para determinar as mesmas potências simbólicas usando `Macaulay2`? Como é que as respostas variaram com o corpo?

Para certas classes especiais de ideais podemos calcular potências simbólicas atrvés de métodos que evitam calcular decomposições primárias de I^n. Vamos discutir alguns destes métodos.

2.1 Ideais monomiais

Exemplo 2.2. Seja k um corpo e $R = k[x, y, z]$. No Exemplo 1.6 b, encontrámos uma decomposição primária irredundante para o seguinte ideal radical:

$$I = (xy, xz, yz) = (x, y) \cap (x, z) \cap (y, z).$$

Quando localizamos em cada primo minimal de I, ou seja em (x, y), (x, z) e (y, z), a terceira variável torna-se invertível, de modo que as outras duas components se tornam no anel inteiro. A pré-imagem de $(x, y)^n R_{(x,y)}$ em R é $(x, y)^n$. Assim, as potências simbólicas of I são dadas por

$$I^{(n)} = (x, y)^n \cap (x, z)^n \cap (y, z)^n.$$

Em particular, $xyz \in I^{(2)}$. No entanto, todos os elementos homogéneos de I^2 têm grau 4 ou mais, dado que I é um ideal homogéneo gerado em grau 2. Assim, $xyz \notin I^2$, e $I^2 \neq I^{(2)}$. De facto, o ideal maximal (x, y, z) é um primo associado a I^2, dado que $(x, y, z) = (I^2 : xyz)$.

Exercício 2.3. Se I é um ideal gerado por monómios livres de quadrados em $k[x_1, \ldots, x_n]$, então I é um ideal radical, e os seus primos minimais são gerados por variáveis. Dada uma decomposião primária irredundante $I = \bigcap_i Q_i$, onde cada Q_i é um ideal gerado por variáveis, mostra que $I^{(n)} = \bigcap_i Q_i^n$.

Mais sobre potências simbólicas de ideais monomiais em [CEHH16].

2.2 Finite sets of points in $\mathbb{A}^n$ and $\mathbb{P}^n$

Há diversos exemplos de ideais radicais correspondendo a conjuntos finitos de pontos cujas potências simbólicas exibem um comportamento interessante.

Dado um corpo k, um ponto afim P em $\mathbb{A}_k^n$ com coordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$ corresponde ao ideal $I(P) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ em $k[x_1, \ldots, x_n]$, e o ponto no espaço projectivo $\mathbb{P}_k^n$ com coordenadas $(a_0 : \cdots : a_n)$ corresponde ao ideal homogéneo $(a_i x_0 - a_0 x_i, \ldots, a_i x_n - a_n x_i)$ em $k[x_0, \ldots, x_n]$ para qualquer i tal que $a_i \neq 0$. Mais geralmente, dado um conjunto de pontos $X = \{P_1, \ldots, P_p\}$ em $\mathbb{A}_k^n$ ou $\mathbb{P}_k^n$, o ideal correspondente a X é dado por $I(X) = \cap_{i=1}^p I(P_i)$. Tanto no caso afim como no caso projectivo, as potências simbólicas do ideal de pontos $I(X)$ são dadas por $I(X)^{(n)} = \cap_{i=1}^p I(P_i)^n$, os polinómios que se anulam até ordem n em X.

2.3 Ideais de determinantes genéricos

Os ideais determinantes genéricos são uma das raras classes de ideais cujas potências simbólicas podemos descrever explicitamente. Mais ainda, existe uma descrição explícita das decomposições primárias de todas as potências de ideais nesta família.

Exemplo 2.4 (De Concini–Eisenbud–Procesi [DEP80])**.** Seja k um corpo de característica 0 or $p > \min\{t, n-t, m-t\}$. Consideremos uma matrix X genérica $n \times m$, com $n \leqslant m$, no anel de polinómios $R = k[X]$ gerado por todas as variáveis em X, e o ideal $I = I_t(X)$ gerado pelos menores $t \times t$ de X, para algum $2 \leqslant t \leqslant n$.

Os produtos da forma $\Delta = \delta_1 \cdots \delta_k$, onde cada δ_i é um menor s_i de X, geram $R = k[X]$ como um espaço vectorial sobre k. Mais ainda, há um subconjunto interessante destes produtos, conhecidos como monómios standard, que formam uma base para R como um espaço vectorial sobre k. Estes são suficientes para descrever as potências simbólicas de $I = I_t(X)$ e para dar decomposições primárias explícitas de I. Dado um produto $\Delta = \delta_1 \cdots \delta_k$ como acima, $\Delta \in I^{(r)}$ se e só se

$$\sum_{i=1}^{k} \max\{0, s_i - t + 1\} \geqslant r.$$

Note-se ainda que cada $s_i \leqslant n$, já que não há menores maiores que n. O ideal $I^{(r)}$ é de facto gerado por todos os produtos $\Delta \in I^{(r)}$ desta forma. Em particular, note-se que se multiplicarmos um tal Δ por menores de tamanho $\leqslant t-1$ a propriedade de que Δ é ou não é um elemento de $I^{(n)}$ não será afectado.

O ideal I^s tem a seguinte decomposição primária:

$$I^s = \bigcap_{j=1}^{t} (I_j(X))^{((t-j+1)s)} = (I_1(X))^{(ts)} \cap \cdots \cap (I_{t-1}(X))^{(2s)} \cap (I_t(X))^{(s)}.$$

Para obter uma decomposição primária irredundante, tomamos a decomposição anterior e apagamos os $I_j(X)$ com $j < n - s(n-t)$.

Existem fórmulas semelhantes para o ideal gerado pelos menores $t \times t$ duma matriz simétrica genérica $n \times n$ [JMnV15, Proposition 4.3 and Theorem 4.4] ou para o ideal gerado pelas $2t$-Pfaffians duma matriz genérica $n \times n$ [DN96, Theorem 2.1 and Theorem 2.4]. O livro [BV88] contém muito mais informção sobre ideais gerados por determinantes.

Exercício 2.5. Seja $I = I_2(X)$, onde X é uma matriz genérica 3×3. Encontra geradores para $I^{(2)}$.

Exercício 2.6. Mostra que se I é o ideal de $k[X]$ gerado pelos menores maximais duma matriz genérica X, onde k satisfaz as condições do Exemplo 2.4, então $I^n = I^{(n)}$ para todo o $n \geqslant 1$.

Note-se, no entanto, que estes resultados não nos dão informação sobre os ideais gerados por determinantes de matrizes que não sejam genéricas.

Exemplo 2.7. No Exemplo 1.23, vimos que $P^{(2)} \neq P^2$ onde P é o ideal primo

$$P = \left(x^2y - z^2, xz - y^2, yz - x^3\right)$$

em $R = k[x, y, z]$. Este ideal é gerado pelos menores 2×2 da matriz

$$\begin{pmatrix} x^2 & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}.$$

Aliás, como vamos ver no Teorem 3.2, $P^{(n)} \neq P^n$ para todo o n. Em contraste, pelo Exercício 2.6 as potências simbólicas e ordinárias dos ideais gerados pelos menores maximais duma matriz genérica coincidem.

2.4 Saturações

Em geral, potências simbólicas são sempre dadas por uma saturação.

Definiçao 2.8. Sejam I, J ideais no anel noetheriano R. A *saturação* de I com respeito a J é o ideal

$$(I : J^\infty) := \bigcup_{n \geqslant 1} (I : J^n) = \{r \in R : rJ^n \subseteq I \text{ para algum } n \geqslant 1\}.$$

Observação 2.9. Note-se que os ideais $(I : J^n)$ formam uma cadeia ascendente de ideais, e que portanto esta cadeia deve estabilizar, e por isso $(I : J^\infty) = (I : J^n)$ para algum n. Computacionalmente, podemos tomar os sucessivos $(I : J^n)$ até estes estabilizarem.

Lema 2.10. Seja I um ideal num anel noetheriano R sem primos embebidos. Existe um ideal J tal que para todo o $n \geqslant 1$,

$$I^{(n)} = (I^n : J^\infty).$$

Este ideal J pode ser qualquer um dos seguintes:

(a) O ideal principal $J = (s)$ gerado por qualquer elemento $s \in R$ que não esteja contido em nenhum dos primos minimais de I, mas que esteja contido em todos os primos minimais de I^n para todo o $n \geqslant 1$.

(b) a interseccção de todos os primos não-minimais em $A(I)$;

(c) a intersecção de qualquer conjunto finito de primos $P \supseteq I$ que não sejam minimais sobre I, desde que esse conjunto contenha todos os primos não-minimais em $A(I)$.

Demonstração. A notação $A(I)$ indica o conjunto de todos os primos que são associados a alguma potência de I (cf. 1.9), o que sabemos ser um conjunto finito pelo Teorema 1.10. Se $A(I)$ consiste apenas de primos minimais de I, então todas as potências simbólicas e ordinárias de I coincidem, e por isso podemos simplesmente tomar $J = R$. No caso de algum I^n ter um primo embebido, sejam $P_1, \ldots, P_k$ todos os primos em $A(I)$ que não são primos minimais de I. Seja s um elemento que não pertence a nenhum primo minimal de I mas tal que $s \in P_1 \cap \cdots \cap P_k$. Para cada n, consideremos uma decomposição primária irredundante

$$I^n = I^{(n)} \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_t,$$

onde cada Q_j é um ideal primário correspondente a uma componente embebida; ou seja, o radical de Q_j é necessariamente um dos P_i. Dado que $s \in \sqrt{Q_i}$ para todo o i, temos $(Q_i : s^\infty) = R$, e por isso

$$(I^n : s^\infty) = \left(I^{(n)} : s^\infty\right) \cap (Q_1 : s^\infty) \cap \cdots \cap (Q_t : s^\infty) = (I^{(n)} : s^\infty).$$

Por outro lado, $I^{(n)}$ é uma intersecção de ideais primários, e os radicais desses ideais não contêm s. Concluímos que $(I^{(n)} : s^\infty) = I^{(n)}$. Isto termina a demonstração de a).

Tomemos agora para J a intersecção de todos os primos não-minimais de $A(I)$. Dado que $s \in J$, então

$$(I^n : J^\infty) \subseteq (I^n : s^\infty) = I^{(n)}.$$

Dada uma decomposição primária irrendundante

$$I^n = I^{(n)} \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_t,$$

temos $J \subseteq \sqrt{Q_1} \cap \cdots \cap \sqrt{Q_t}$. Isto implica que existe uma potência de J, digamos J^k, que está contida em $Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$, e por isso $I^{(n)} J^k \subseteq I^n$. Podemos agora provar b):

$$I^{(n)} \subseteq (I^n : J^k) \subseteq (I^n : J^\infty).$$

Finalmente, podemos ainda tomar para J a intersecção de quaisquer primos não-minimais $P \supseteq I$, desde que este conjunto contenha todos os primos não-minimais em $A(I)$. De facto, usámos apenas dois factos: que J contém algum element que não pertence a nenhum primo minimal de I, e o facto de que $J \subseteq \sqrt{Q}$ para qualquer componente primária irredundante Q de I^n para algum n. □

Exercício 2.11. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e P um primo com altura $\dim R - 1$. Mostra que $P^{(n)} = (P^n : \mathfrak{m}^\infty)$ para todo o $n \geqslant 1$.

Infelizmente, encontrar J como no Lema 2.10 requer em princípio que tenhamos algum conhecimento concreto do conjunto $A(I)$. Seria suficiente se tivéssemos uma estimativa do valor n para o qual $\operatorname{Ass}(R/I^n)$ estabiliza, mas essencialmente não há nenhuma estimativa efectiva deste valor. O número de primos associados a alguma potência dum ideal primo pode ser arbitrariamente elevado [KS19].

Definiçao 2.12 (Jacobian ideal)**.** Seja k um corpo e $R = k[x_1, \ldots, x_n]/I$, onde $I = (f_1, \ldots, f_r)$ tem altura pura h. A *matriz jacobiana* de R é a matriz dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

O *ideal jacobiano* de R é o ideal gerado pelos menores $h \times h$ da matriz jacobiana.

O ideal jacobiano está de facto bem-definido – isto é, a definição não depende da escolha de uma apresentação de R. O ideal jacobiano determina o locus singular de R. Mais sobre matrizes e ideais jacobianos em [Eis95, Section 16.6].

Teorema 2.13 (Jacobian criterion)**.** Seja $R = k[x_1, \ldots, x_n]/I$ com k um corpo perfeito, e suponhamos que I tem altura pura h. O ideal jacobiano J define o locus singular de R: um primo P contém J se e só se R_P não é um anel regular.

Demonstração. Ver [Eis95, Corollary 16.20]. □

Este resultado dá-nos um truque para calcular potências simbólicas de ideais de altura pura num anel de polinómios.

Lema 2.14. Seja $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ onde k é um corpo perfeito, e $I = (f_1, \ldots, f_r)$ um ideal de altura pura h. Seja

$$J = I_h \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

o ideal gerado pelos menores $h \times h$ dos geradores de I. Se $t \in J$ não for um primo minimal de I, entšo para todo o $n \geqslant 1$,

$$I^{(n)} = (I^n : t^\infty)\,.$$

Demonstração. Pelo Lema 2.10, precisamos apenas de mostrar que um tal t está contido em todos os primos P que forem primos embebidos de algum I^n. Suponhamos que P é de facto um primo embebido de I^n para algum n. Então P_P é um primo embebido de I_P^n, o que implica que $I_P^n \neq I_P^{(n)}$. Em particular, I_P não é gerado por uma sequência regular, pelo Teorema 1.20, e por isso $(R/I)_P$ não pode ser um anel regular. Pelo Teorema 2.13, $P \supseteq J \ni t$. □

3 Problemas em aberto

3.1 A (des)igualdade entre potências ordinárias e simbólicas

Em geral, a questão de para que ideais as potências ordinárias e simbólicas coincidem está em aberto. Existem condições em I que sabemos serem equivalentes a $I^{(n)} = I^n$ para todo $n \geqslant 1$ dadas por Hochster [Hoc73] para o caso em que I é primo, e extendidas por Li e Swanson [LS06] para o caso em que I é qualquer ideal radical. No entanto, apesar destas condições serem válidas para qualquer anel noetheriano, são difíceis de verificar na prática, ou até mesmo de descrever aqui.

Pergunta 3.1. Seja R um anel regular. Para que ideais I sem primos embebidos em R temos $I^{(n)} = I^n$ para qualquer $n \geqslant 1$? Existe algum invariante d dependendo apenas no anel R ou no ideal I tal que $I^{(n)} = I^n$ para $n \leqslant d$ (or for $n = d$) implica $I^{(n)} = I^n$ para qualquer $n \geqslant 1$?

Sabemos a resposta a esta pergunta apenas em alguns casos particulares. Eis um desses casos [Hun86, Corollary 2.5]:

Teorema 3.2 (Huneke, 1986)**.** Seja R um anel regular local de dimensão 3, e P um ideal primo em R de altura 2. As condições seguintes são equivalentes:

(a) $P^{(n)} = P^n$ para todo o $n \geqslant 1$;

(b) $P^{(n)} = P^n$ para algum $n \geqslant 2$;

(c) P é gerado por uma sequência regular.

Em particular, se P for um primo de altura 2 num anel regular local de dimensão 3, temos $P^{(n)} \neq P^n$ para todo o $n \geqslant 2$ desde que P tenha pelo menos 3 geradores. Isto sugere uma relação entre o número mínimo de generadores do ideal e a (des)igualdade entre potências ordinárias e simbólicas.

Teorema 3.3 (see Theorem 2.3 in [CFG+16], also [Mor99, HU89])**.** Seja $R = k[x_0, \ldots, x_n]$ onde k é um corpo qualquer. Seja I um ideal de altura 2 em R tal que R/I é Cohen-Macaulay e tal que I_P é gerado por uma sequência regular para todos os primos $P \neq (x_0, \ldots, x_n)$ contendo I. Então $I^{(k)} = I^k$ para qualquer $k < n$ independentemente do número mínimo de geradores de I. Adicionalmente, as seguintes condições são equivalentes:

(a) $I^{(k)} = I^k$ para qualquer $k \geqslant 1$;

(b) $I^{(n)} = I^n$;

(c) I é gerado por n elements (ou menos).

Observação 3.4. Note-se que se P é um primo de altura 2 num anel de polinómios em 3 variáveis, ou seja se $n = 2$ no Teorema 3.3, então as conclusões dos Teoremas 3.2 e 3.3 coincidem, e o Teorema 3.2 junta ainda a equivalência com a seguinte condição:

(d) $I^{(k)} = I^k$ para algum $k \geqslant 2$;

É natural perguntar se nas condições do teorema 3.3 temos ainda a equivalência com a condição (d).

Mais geralmente, existem respostas para o problem da igualdade entre potências ordinárias e simbólicas também está resolvido na classe dos ideais primos licci [HU89, Corollary 2.9]. Para primos de altura $\dim R - 1$, a igualdade de *todas* as potências ordinárias e simbólicas é equivalente ao ideal ser gerado por uma sequência regular.

Teorema 3.5 (Cowsik–Nori [CN76])**.** Seja R um anel de Cohen-Macaulay local e P ideal primo tal que R_P é um anel regular. Se R/P^n é Cohen-Macaulay para todo o $n \geqslant 1$, então P é gerado por uma sequência regular.

Exercício 3.6. Seja R um anel regular local e P um primo tal que $\dim(R/P) = 1$. Mostra que $P^{(n)} = P^n$ para todo o $n \geqslant 1$ se e só se P é gerado por uma sequência regular.

Em dimensãos superior a 3, podemos encontrar primos que não sšo gerados por sequências regulares e no entanto as potências simbólicas e ordinárias são coincidem.

Exemplo 3.7 (Example 4.4 em [HH92], caso especial de [Sch91] e Corollary 4.3 em [GH19])**.** Consideremos o primo P em $R = k[x, y, z, w]$ dado pelo núcleo do homomorfismo $R \longrightarrow k[s, t]$ determinado por $x \mapsto s^3$, $y \mapsto s^2 t$, $z \mapsto st^2$ e $w \mapsto t^3$, onde k é um corpo qualquer. Então $P^{(n)} = P^n$ para todo o $n \geqslant 1$. No entanto, P é um primo de altura 2 minimamente gerado por 3 elementos, e por isso não pode ser gerado por uma sequência regular.

E mesmo quando nos restringimos à classe dos ideais monomiais, decidir que ideais satisfazem $I^{(n)} = I^n$ para todo o $n \geqslant 1$ é uma pergunta em aberto. No entanto, conjectura-se que esta condição é equivalente a I ser *packed*[2].

Definiçao 3.8 (König ideal)**.** Seja I um ideal monomial livre de quadrados com altura c num anel de polinómios sobre um corpo. Dizemos que I é *könig*[3] se I contém uma sequência regular de monómios de comprimento c.

Apesar do facto de que todos os ideais monomiais livres de quadrados contém uma sequência regular de comprimento igual à sua altura, tal sequência não é necessariamente uma sequência de monómios.

Exercício 3.9. Mostra que (xy, xz, yz) não é könig.

Definiçao 3.10 (Ideal packed)**.** Seja I um ideal monomial livre de quadrados num anel de polinómios sobre um corpo. Dizemos que I é *packed* se qualquer ideal obtido de I tomando qualquer número de variáveis iguais a 0 ou 1 é könig.

Exercício 3.11. Dá um exemplo dum ideal packed e dum ideal que não seja packed.

A seguinte conjectura de Gitler, Valencia, e Villarreal é uma versão no contexto de potências simb́licas duma conjectura de Conforti e Cornuéjols sobre propriedades de *max-cut min-flow*.

[2] Tanto quanto sei, este termo ainda não foi traduzido para português, pelo que escolhi usar o termo em inglês

[3] Idem.

Conjectura 3.12 (Packing Problem)**.** Seja I um ideal monomial livre de quadrados num anel de polinómios sobre um corpo k. As potências simbólicas e ordinárias de I coincidem se e só se I é packed.

A direcção difícil é mostrar que se I é packed, então $I^{(n)} = I^n$ para todo o $n \geqslant 1$.

Exercício 3.13. Seja I um ideal monomial livre de quadrados. Mostra que se $I^{(n)} = I^n$ para todo o $n \geqslant 1$ então I é packed.

O Packing Problem foi resolvido no caso em que I é o ideal de arestas dum grafo [GVV07].

Definiçao 3.14 (Ideal de arestas)**.** Seja G um grafo simples com n vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Dado um corpo k, o ideal de arestas de G em $k[x_1, \ldots, x_n]$ é o ideal gerado por

$$I = \left(x_i x_j \,\middle|\, \text{ se existe uma aresta entre os vértices } v_i \text{ e } v_j\right).$$

Teorema 3.15 (Gitler–Valencia–Villareal, [GVV07])**.** Seja I um ideal de arestas do grafo G. As seguintes condições são equivalentes:

(a) G é um grafo bipartido;

(b) $I^{(n)} = I^n$ para todo $n \geqslant 1$;

(c) I é packed.

Enquanto a versão mais geral do Packing Problem ainda está em aberto, a questão de se é suficiente testar $I^{(n)} = I^n$ para um número finito de n está resolvida para ideas monomiais.

Teorema 3.16 (Núñez Betancourt – Montaño [MnNnB19])**.** Seja I um ideal monomial livre de quadrados gerado por μ elementos. Se $I^{(n)} = I^n$ para $n \leqslant \frac{\mu}{2}$, então $I^{(n)} = I^n$ para todo o $n \geqslant 1$.

3.2 Qual é o grau dum elemento em $I^{(n)}$?

Quando I é um ideal homogéneo num anel graduado, as potências simbólicas de I também são ideais homogéneos. É natural perguntar qual é o grau mínimo dum elemento em $I^{(n)}$ para cada n. Se I corresponde a um conjunto finito de pontos em $\mathbb{P}^N$, a pergunta é qual é o grau mínimo duma hipersurperfície que passe em todos esses pontos com multiplicidade n.

Dado um ideal homogenéneo em $R = k[x_0, \ldots, x_N]$, denotamos o grau mínimo dum elemento em I por $\alpha(I)$.

Conjectura 3.17 (Nagata [Nag65])**.** Se I define $n \geqslant 10$ pontos muito gerais em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$,

$$\alpha(I^{(m)}) > m\sqrt{n}.$$

Esta pergunta continua em aberto excepto em alguns casos muito especiais.

Conjectura 3.18 (Chudnovsky)**.** Seja X um conjunto finito de pontos em $\mathbb{P}^N$, e $I = I(X)$ o ideal correspondente em $k[x_0, \ldots, x_N]$. Então

$$\frac{\alpha(I^{(m)})}{m} \geqslant \frac{\alpha(I) + N - 1}{N}.$$

O limite da expressão à direita existe e é igual ao infímo do mesmo conjunto. Mais precisamente,

$$\hat{\alpha}(I) = \lim_{m\to\infty} \frac{\alpha(I^{(m)})}{m} = \inf_m \frac{\alpha(I^{(m)})}{m}.$$

Podemos assim reformular a Conjectura de Chudnovsky em termos desta constante $\hat{\alpha}$, conhecida como a constante de Waldschmidt de I. Mais precisamente, a Conjectura de Chudnovsky pergunta se

$$\hat{\alpha}(I^{(m)}) \geqslant \frac{\alpha(I) + N - 1}{N}.$$

Esta conjectura foi mostrada para conjuntos finitos de pontos muito gerais em $\mathbb{P}_k^N$ para corpos k algebraicamente fechados [FMX18, Theorem 2.8]. É natural perguntar se podemos extender esta estimativa a ideais homogéneos, talvez substituindo N pela altura [4] de I, o que se verifica para ideais monomiais livres de quadrados [BCG+16, Theorem 5.3]. A Conjectura de Chudnovsky está essencialmente em aberto em nos restantes casos. A Conjectura de Chudnovsky é um caso especial duma conjectura de Demailly [Dem82].

3.3 A Conjectura de Eisenbud–Mazur

Temos sempre $I^{(2)} \subseteq I$, mas será que $I^{(2)}$ contém algum gerador minimal de I?

Conjectura 3.19 (Eisenbud–Mazur [EM97])**.** Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local obtido por localização dum anel de polinómios sobre um corpo k de característica 0. Dado um ideal radical I em R, $I^{(2)}$ não contém nenhum gerador minimal de I, ou seja, $I^{(2)} \subseteq \mathfrak{m}I$.

Notemos para já que esta condição pode falhar em característica prima:

Exemplo 3.20 (Eisenbud–Mazur [EM97])**.** Seja p um inteiro prime, e I o núcleo do homomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_p[x_1, x_2, x_3, x_4] &\longrightarrow \mathbb{F}_p[t] \\ x_1 &\longmapsto t^{p^2} \\ x_2 &\longmapsto t^{p(p+1)} \\ x_3 &\longmapsto t^{p^2+p+1} \\ x_4 &\longmapsto t^{(p+1)^2}. \end{aligned}$$

Consideremos o poliómio $f = x_1^{p+1}x_2 - x_2^{p+1} - x_1x_3^p + x_4^p \in I$. Este polinómio f é quase homogéneo, e de facto $f \in I^{(2)}$. Por exemplo, tomando

$$\begin{aligned} g_1 &= x_1^{p+1} - x_2^p \in I, \\ g_2 &= x_1x_4 - x_2x_3 \in I, \\ g_3 &= x_1^p x_2 - x_3^p \in I, \end{aligned}$$

temos

$$x_1^p f = g_1g_3 + g_2^p \in I^2.$$

[4] Mais precisamente, usando um invariante que vamos definir mais tarde, conhecido como a *altura grande*.

Mais ainda, f é um gerador minimal de I, ou seja $f \notin (x_1, x_2, x_3, x_4)I$. Podemos verificar esta afirmação notando que nenhum elemento de I contém um termo da forma x_4^a para $1 \leqslant a < p$, e dado que I é gerado por binómios, basta mostrar que não existe nenhum elemento da forma $x_4^a - x_3^b x_2^c x_1^d$ em I. Deixamos os detalhes como exercício.

A Conjectura de Eisenbud–Mazur também pode falhar se o anel não for regular. A conjectura está em aberto na maioria dos caso em característica 0.

Exercício 3.21. Mostra que a Conjectura de Eisenbud–Mazur é satisfeita por qualquer ideal monomial livre de quadrados.

Mais geralmente, Eisenbud e Mazur mostraram que se I é um ideal monomial e P é um primo monomial contendo I, então $I^{(d)} \subseteq PI^{(d-1)}$ para qualquer $d \geqslant 1$ [EM97, Proposition 7]. Também mostraram a Conjectura 3.19 para ideais de licci [EM97, Theorem 8] e ideais quase homogenéos sem primos embebidos em equicaracterística 0 [EM97, Theorem 9]. Para mais sobre o estado actual desta conjectura, ver [DDSG⁺18, Section 2.3].

3.4 Álgebras de Rees simbólicas

As potências simbólicas de um ideal I formam uma família graduada[5], o que nos permite encaixotá-los todos juntos num único objecto graduado, chamado a álgebra de Rees simbólica (ou blowup simbólico) de I.

Definiçao 3.22 (álgebra de Rees simbólica)**.** Seja R um anel e I um ideal em R. A *álgebra de Rees simbólica* de I é a álgebra graduada

$$\mathcal{R}_s(I) := \bigoplus_{n \geqslant 0} I^{(n)} t^n \subseteq R[t],$$

onde a variável t tem o papel de indicar o grau.

Isto imita a construção da álgebra de Rees de I usual, $\bigoplus_n I^n t^n$. Mas ao contrário da álgebra de Rees, a álgebra de Rees simbólica não é necessariamente um anel noetheriano.

Exercício 3.23. Mostra que a álgebra de Rees simbólica dum ideal I num anel R é uma álgebra finitamente gerada sobre R se e só se é um anel noetheriano.

Exercício 3.24. Se a álgebra de Rees simbólica de um ideal I num anel R é finitamente gerada sobre R, mostra que existe k tal que $I^{(kn)} = \left(I^{(k)}\right)^n$ para todo o $n \geqslant 1$. A implicação contrária também é satisfeita se R for um anel excelente.

Que ideais têm uma álgebra de Rees simbólica notheriana? Por exemplo, a álgebra de Rees simbólica dum ideal monomial é sempre noetheriana [Lyu88, Proposition 1]. O que é mais surpreendente é que as álgebras de Rees simbólicas são não-noetherianas com alguma frequência. O primeiro exemplo deve-se a Rees [Ree58], e Roberts foi o primeiro a encontrar exemplos em que R não é um anel regular [Rob85], adaptando o contra-exemplo de Nagata para o décimo-quarto problema de Hilbert [Nag65]. O exemplo de Roberts respondeu negativamente à seguinte pergunta de Cowsik:

[5] Ou seja, $I^{(a)} I^{(b)} \subseteq I^{(a+b)}$ para quaisquer a e b.

Pergunta 3.25 (Cowsik)**.** Seja P um ideal primo num anel regular R. A álgebra de Rees simbólica de P é sempre notheriana, ou seja, uma álgebra finitamente gerada sobre R?

A motivação de Cowsik para fazer esta pergunta era um resultado dele [Cow84] mostrando que uma resposta positiva a esta pergunta implicaria que todos os primos desta forma teriam de ser intersecções completas a menos de radical. Eliahou, Huckaba, Huneke, Vasconcelos e outros deram vários critérios que garantem que a álgebra de Rees simbólica é notheriana. Curvas monomiais espaciais (t^a, t^b, t^c), no entanto, eram sabidas serem intersecções completas a menos de radical [Bre79, Her80, Val81], e muito foi estudado sobre as álgebras de Rees simbólicas dos ideias nesta classe. Surpreendentemente, a resposta à pergunta de Cowsik é negativa mesmo para esta classe de primos, o primeiro exemplo não-noetheriano encontrado por Morimoto e Goto [GM92]. Em [Cut91], Cutkosky mostra critérios para que a álgebra de Rees simbólica duma curva monomial espacial seja notheriana, e em particular mostra que a álgebra de Rees simbólica de $k[t^a, t^b, t^c]$ é noetheriana sempre que $(a + b + c)^2 > abc$. A literatura é vasta, mesmo no caso especial das curvas monomiais espaciais (t^a, t^b, t^c) [Cut91, Mor91, GNS91b, GM92, GNW94, GNS91a, HU90, Sri91].

4 O problema da Contenção

O problema da Contenção[6] para I é uma tentativa de comparar as potências simbólicas e ordinárias de I. Nas duas últimas décadas tem havido imensa actividade ao redor desta pergunta.

4.1 Um resultado famoso

Por um lado, $I^a \subseteq I^{(b)}$ se e só se $a \geqslant b$. Perguntar quando temos $I^{(a)} \subseteq I^b$ é muito mais interessante.

Pergunta 4.1 (O problema da Contenção)**.** Seja R um anel noetheriano e I um ideal em R. Quando temos $I^{(a)} \subseteq I^b$?

Esta pergunta empacota várias perguntas juntas. Para começar, esta questão contém o problema da igualdade, dado que a b-ésima potência simbólica coincide com a b-ésima potência ordinária se e śo se $I^{(b)} \subseteq I^b$. Quando a resposta é não, o problema da contenção é uma forma de medir quão diferentes são as potências simbólicas e ordinárias. Se tivermos uma resposta particular para o problema da contenção, digamos $I^{(a)} \subseteq I^b$, podemos daqui concluir uma estimativa por baixo para o mínimo grau dum elemento em $I^{(a)}$. De facto, isto implica

$$\alpha\left(I^{(a)}\right) \geqslant \alpha\left(I^b\right) = b\alpha(I).$$

Em geral, o problema da contenção é díficil de resolver, se bem que podemos responder à pergunta completamente se tivermos uma descripção explícita das potências simbólicas e ordinárias do nosso ideal. O problema está no facto de que ter uma descripção explícita das potências simbólicas é muito raro.

Exercício 4.2. Resolve o problema da contenção para ideais de determinantes genéricos.

Exercício 4.3. A segunda potência simbólica do ideal monomial $I = (xy, xz, yz) \subseteq k[x, y, z]$ não coincide com o seu quadrado. No entanto, mostra que $I^{(3)} \subseteq I^2$.

Sobre um anel de Gorenstein, o problema da contenção pode ser reformulado como uma pergunta homológica, um facto aplicado por Alexandra Seceleanu em [Sec15] e mais tarde usado em [Gri18, Chapter 3] e [Gri] para estudar o problema da contenção para ideais generados pelos menores 2×2 de matrizes 2×3 em dimensão 3.

Exercício 4.4. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local de Gorenstein e P um ideal primo de altura $\dim R - 1$. Dados $a \geqslant b$, mostra que $P^{(a)} \subseteq P^b$ se e só se o homomorfismo $\operatorname{Ext}^d_R(R/P^b, R) \to \operatorname{Ext}^d_R(R/P^a, R)$ induzido pela projecção canónica é zero.

Mas não é sequer claro que o problema 4.1 faz sempre sentido. Isto é, dado b, deve forçosamente existir um a tal que $I^{(a)} \subseteq I^b$? Se para qualquer b existe sempre um a, então as duas famílias graduadas de ideais $\{I^n\}$ e $\left\{I^{(n)}\right\}$ são cofinais, e por isso induzem topologias equivalentes. Em 1985, Schenzel [Sch85] deu uma caracterização de quando $\{I^n\}$ e $\left\{I^{(n)}\right\}$

[6] The Containment Problem, no original.

são cofinais. Em particular, se R é um anel regular e I um ideal radical em R, então $\{I^n\}$ e $\{I^{(n)}\}$ são sempre cofinais. No entanto, a caracterização de Schenzel não nos dá informação sobre a relação entre a e b.

Só no fim dos anos 90 é que Irena Swanson mostrou que as topologias I-ádica e I-simbólica são equivalentes se e só se são linearmente equivalentes.[7]

Teorema 4.5 (Swanson, 2000, [Swa00])**.** Seja R um anel noetheriano, e I e J dois ideais em R. As seguintes condições são equivalentes:

(i) $\{I^n : J^\infty\}$ é cofinal com $\{I^n\}$.

(ii) Existe c tal que $(I^{cn} : J^\infty) \subseteq I^n$ para todo o $n \geqslant 1$.

Em particular, dado um ideal radical num anel regular, existe um inteiro c tal que $I^{(cn)} \subseteq I^n$ para todo o $n \geqslant 1$. Mais surpreendentemente, sobre um anel regular esta constante pode ser tomada uniformemente, ou seja dependendo apenas em R.

Definiçao 4.6 (Big height)**.** Seja I um ideal sem primos embebidos. A *altura grande*[8] de I é a altura máxima de um primo associado de I. Se a altura e a altura grande de I coincidirem, isto é se todos os primos associados a I tiverem a mesma altura, dizemos que I tem *altura pura.*

Teorema 4.7 (Ein–Lazarsfeld–Smith, Hochster–Huneke, Ma–Schwede [ELS01, HH02, MS18a])**.** Seja R um anel regular e I um ideal radical em R com altura grande h. Temos $I^{(hn)} \subseteq I^n$ para todo o $n \geqslant 1$.

Observação 4.8. Equivalentemente, $I^{(n)} \subseteq I^{\lfloor \frac{n}{h} \rfloor}$ para todo o $n \geqslant 1$.

É importante notar que não podemos substituir a altura grande pela altura no Teorema 4.7.

Exemplo 4.9. Consideremos o ideal

$$I = (x, y) \cap (y, z) \cap (x, z) \cap (a) = (xya, xza, yza) \subseteq k[x, y, z, a],$$

com altura 1 e altura grande 2. Se tentarmos substituir grande altura por altura no Teorema 4.7, teríamos $I^{(n)} = I^n$ para qualquer $n \geqslant 1$. No entanto, tal como no Exemplo 2.2, $I^{(2)} \neq I^2$; basta notar que

$$xyza^2 \in I^{(2)} = (x, y)^2 \cap (y, z)^2 \cap (x, z)^2 \cap (a)^2,$$

enquanto que todos os elementos em I^2 têm grau pelo menos 6.

Exercício 4.10. Dados inteiros $c < h$, constrói um ideal I com altura c e altura grande h num anel de polinómios tal que $I^{(cn)} \nsubseteq I^n$ para algum n. Dica: usa o Exercício 4.51.

[7]Cuidado: as palavras *linearmente equivalentes* foram usadas no passado para indicar outras condições. Por exemplo, Schenzel usou este termo para se referir á condição de que $I^{(n+k)} \subseteq I^n$ para todo o $n \geqslant 1$ e alguma constante k.

[8]Neste caso escolhi traduzir o termo original, *big height*, apesar de ainda não ter visto este termo traduzido na literatura.

Ein, Lazarsfeld, e Smith provaram o Teorema 4.7 no caso geométrico em equicaracterística 0, usando ideais de multiplicadores[9]. Hochster e Huneke usaram técnicas de redução a característica p e técnicas de *tight closure*[10] para provar o resultado no caso de equicaracterística. Recentemente, Ma e Schwede usaram ideias que aparecem na recente solução da Conjectura do Somando Directo[11] para definir um análogo de ideais de teste/multiplicadores em característica mista, o que lhes permitiu demonstrar uma versão do Teorema 4.7 em característic mista.

Dado um ideal I e algum $t \geqslant 0$, o ideal de multiplicadores $\mathcal{J}(R, I^t)$ mede as singularidades de $V(I) \subseteq \operatorname{Spec}(R)$, reescaladas por t em certo sentido. Não vamos dar uma definição aqui, mas pode ser encontrada por exemplo em [ELS01, MS18a]. A demonstração do Teorema 4.7 em característica 0 tem por base algumas propriedades-chave dos ideais de multiplicadores:

- $I \subseteq \mathcal{J}(R, I)$;
- Para qualquer $n \geqslant 1$, temos $\mathcal{J}\left(R, \left(P^{(nh)}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \subseteq P$ se P for um primo de altura h;
- Para inteiros $n \geqslant 1$, temos $\mathcal{J}\left(R, I^{tn}\right) \subseteq \mathcal{J}\left(R, I^t\right)^n$.

Dadas estas propriedades, para qualquer ideal P de altura h temos

$$P^{(hn)} \subseteq \mathcal{J}\left(R, \left(P^{(nh)}\right)\right) \subseteq \mathcal{J}\left(R, \left(P^{(nh)}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n \subseteq P^n.$$

Em característica p, uma ideia semelhante também funciona, substituíndo ideais de multiplicadores por ideais de teste.

Observação 4.11. Como corolário do Teorema 4.7, obtemos uma constante uniforme c como no teorema 4.5. De facto, a altura grande de qualquer ideal é no máximo a dimensão d do anel, e por isso $I^{(dn)} \subseteq I^n$ para qualquer n. Podemos melhorar esta constante para $d-1$, dado que as potências simbólicas de ideais maximais coincidem com as potências ordinárias.

Sobre anéis não-regulares, as topologias induzidas pelas potências simbólicas e ordinárias são equivalentes para qualquer ideal primo num contexto bastante geral:

Teorema 4.12 (Huneke–Katz–Validashti, Proposition 2.4 in [HKV09])**.** Seja R um domínio completo local. Para todos os ideais primos P, existe uma constante h tal que $P^{(hn)} \subseteq P^n$.

No entanto, num contexto não-regular, a existência de um tal h que seja independente de P é um problema em aberto. A existência de um tal h dá-nos uma equivalñecia uniforme entre as topologias induzidas pelas potências simbólicas e ordinárias, pelo que dizemos que anés com esta propriedade têm a Propriedade das Topologias Simbólicas Uniformes[12].

Pergunta 4.13 (Uniform Symbolic Topologies)**.** Seja R um domínio local completo. Existe uma constante uniforme h dependendo apenas em R tal que

$$P^{(hn)} \subseteq P^n$$

para todos os primos P e todos os $n \geqslant 1$?

[9] Tradução livre.
[10] Tradução?
[11] Tradução livre de Direct Summand Conjecture.
[12] Uniform Symbolic Topologies Property, no original.

A resposta é sabida ser sim em alguns contextos especiais.

Teorema 4.14 (Huneke–Katz–Validashti, 2009, [HKV09])**.** Seja R um anel reduzido local tal que R tem uma singularidade isolada. Assumamos que R é equidimensional e essencialmente de tipo finito sobre um corpo de característica prima ou zero, ou tal que R tem característica prima e é F-finito. Existe um $h \geqslant 1$ com a seguinte propriedade: para todos os ideais I contendo pelo menos um elemento regular cujas topologias I-simbólica e I-àdica são equivalentes, $I^{(hn)} \subseteq I^n$ para todo o $n \geqslant 1$.

O resultado deles, no entanto, não nos dá estimativas eficientes para o valor de h. Em geral, encontrar estimativas explícitas e melhores possíveis para esta constante é um problema muito difícil. O caso dos primos monomiais sobre anéis tóricos normais foi resolvido completamente por Robert M. Walker [Wal16, Wal18].

Exemplo 4.15 (Carvajal-Rojas — Smolkin, 2018)**.** Seja k um corpo de característica prima e consideremos $R = k[a,b,c,d]/(ad - bc)$. Para todos os ideais primos P em R, temos $P^{(2n)} \subseteq P^n$ para qualquer $n \geqslant 1$.

4.2 A característic prima é nossa amiga

Existem perguntas livres de característica que são mais fáceis de atacar usando técnicas em característica prima. A demonstração de Hochster e Huneke de que $I^{(hn)} \subseteq I^n$ em anéis regulares é um exemplo desta ideia [HH02]. Mais surpreendentemente, uma solução em característica p pode por vezes ser usada para resolver o problema mesmo em equicaracterística 0, através de um método conhecido como reducção a característica prima. Vamos focar-nos no problema da contenção para ideais radicais em anéis regulares de característica prima p, e dar a prova de Hochster e Huneke do Teorema 4.7.

Quando temos uma anel de característica prima p, ganhamos uma ferramenta simples mas muito poderosa:

Definiçao 4.16. Seja R um anel de característica prima p. O (homomorfismo de) *Frobenius* é o R-homomorfism dado por $F(x) = x^p$. Denotamos a e-sima iteração de Frobenius, $F^e(x) = x^{p^e}$, por F^e. A e-sima iteração do Frobenius leva o ideal I para outro ideal, conhecido como a e-sima *potência Frobenius* de I, que denotamos por $I^{[p^e]}$:

$$I^{[p^e]} := \left(a^{p^e} : a \in I\right).$$

Escrevemos $F^e_*(R)$ para denotar a imagem natural de F^e. Este é um R-módulo no grupo abeliano R, mas com estrutura de R-módulo dada pela acção do Frobenius: $r \cdot F^e_*(s) = F^e_*(r^{p^e} s)$.

Observação 4.17. Se $I = (a_1, \ldots, a_n)$, então $I^{[p^e]} = \left(a_1^{p^e}, \ldots, a_n^{p^e}\right)$.

Em álgebra comutativa de característica prima, frequentemente estudamos propriedades do anel R através da estrutura de módulo de $F^e_*(R)$. Muitas singularidades interessantes podem ser identificadas através da estrutura de R-módulo de $F^e_*(R)$; estas são conhecidas como F-singularidades.

Vamos focar-nos em anéis regulares de característica prima. Um dos principais factos que vamos precisar é que num anel regular, Frobenius é um homomorfismo plano. Este é um dos pontos em que é crucial que o nosso anel seja regular é crucial: o facto de que Frobenius é plano *caracteriza* anéis regulares.

Teorema 4.18 (Kunz, 1969 [Kun69])**.** Seja R um anel local reduzido de característica prima p. As seguintes condições são equivalentes:

- R é um anel regular.
- R é plano sobre R^p.
- $F_*^e(R)$ é um R-módulo.

Este teorema tem muitas consequências importantes.

Lema 4.19. Seja R um anel regular de característica p. Para quaisquer ideais I e J em R e qualquer $q = p^e$,

$$(J : I)^{[q]} = \left(J^{[q]} : I^{[q]}\right).$$

Demonstração. Dado que $F_*^e(R)$ é um R-módulo plano pelo Teorema 4.18, este é um caso particular de [Mat89, Theorem 7.4 (iii)]. □

Lema 4.20. Se R é um anel regular de caaracterística prima p, Frobenius preserva primos associados, isto é, $\operatorname{Ass}(R/I) = \operatorname{Ass}\left(R/I^{[q]}\right)$ para qualquer $q = p^e$.

Demonstração. Frobenius é exacto [Kun69, Theorem 2.1], e por isso leva resoluções livres minimais para resoluções livres minimais. Em particular, se Q é um ideal primo em R, o Frobenius leva uma resolução livre minimal de $(R/I)_Q$ para uma resolução livre minimal de $\left(R/I^{[q]}\right)_Q$. Mais, o comprimento das resoluções é preservado, e por isso as dimensões projectivas coincidem. Pela fórmula de Auslander-Buchsbaum, isto implica que os depths também coincidem, e por isso

$$\operatorname{depth}(R/I)_Q = 0 \text{ se e só se } \operatorname{depth}\left(R/I^{[q]}\right)_Q = 0.$$

Pelo Lema 1.8, isto completa a prova. □

Observação 4.21. Um dos ingredientes-chave que vamos usar para provar $I^{(hn)} \subseteq I^n$ é entender qual é o número mínimo de geradores de I depois de localizarmos a cada primo associado. Se $I = Q$ é um ideal primo de altura h, o único primo associado a Q é o próprio Q, e Q_Q é o único ideal maximal num anel regular local de dimensão h, pelo que é minimamente gerado por h elementos. Para um ideal radical I de altura grande h, I_P é gerado por h elementos ou menos quando localizamos a cada primo associado P. De facto, dado que I é radical, $I = P \cap J$, onde J contém elementos que não estão em P, e por isso $I_P = P_P$, que é gerado por tantos elementos quanto a altura de P. Por definição, este número é no máximo h.

Os resultados em [HH02] cobrem um caso mais geral: não é necessário assumir que I é radical. As ideias principais são as mesmas, mas o número máximo de geradores que precisamos para I_P, onde P varia sobre os primos associados a I, não é necessariamente a altura grande h. Para evitar este problema, Hochster e Huneke mostram que podem substituir I_P por uma redução minimal de I_P, que é gerado por tantos elementos quanto o *analytic spread* de I_P. Não vamos discutir este caso em detalhe aqui, mas este número é de facto no máximo a altura grande de P. A forma geral do teorema 4.7 é assim a seguinte: temos $I^{(hn)} \subseteq I^n$ para qualquer $n \geqslant 1$, onde h pode ser qualquer um dos seguintes números (por ordem crescente de refinamento):

- o máximo valor do número mínimo de geradores de I_P, onde P varia sobre os primos associados a I,
- a altura máxima dum primo associado a I, ou
- o máximo valor do *analytic spread* de I_P, onde P varia sobre os primos associados a I.

Quando I é um ideal radical, estes invariantes coincidem todos três. Para mais sobre reduções e o *analytic spread*, recomendo o excelente [SH06, Chapter 8].

Como vimos no Exercício 1.28, se quisermos provar uma certa contenção de ideais, é suficiente mostrar que a contenção é satisfeita localmente. Vamos usar esta ideia repetidamente.

Com as ferramentas apropriadas, a conclusão do Teorema 4.7 em característica p para $n = p^e$ é uma aplicação extraordinária do Princípio do Pombal.

Lema 4.22 (Hochster-Huneke [HH02])**.** Suponhamos que I é um ideal radical ideal com altura grande h num anel regular R contendo um corpo de característica prima p. Para qualquer $q = p^e$,

$$I^{(hq)} \subseteq I^{[q]}.$$

Demonstração. Pelo Exercício 1.28, basta mostrar que isto é verdade depois de localizarmos em cada primo associado a $I^{[q]}$. Pelo Lema 4.20, os primos associados a $I^{[q]}$ coincidem com os primos associados a I. Seja P um primo associado a I, e notemos que I_P é gerado no máximo por h elementos. Em R_Q, queremos mostrar que

$$I_Q^{hq} \subseteq I_Q^{[q]}.$$

Consideremos geradores $x_1, \ldots, x_h$ para I_Q. Precisamos de mostrar que

$$(x_1, \ldots, x_h)^{hq} \subseteq (x_1^q, \ldots, x_h^q).$$

Consideremos o elemento $x_1^{a_1} \cdots x_h^{a_h}$ com $a_1 + \cdots + a_h \geqslant hq$. Dado que $(x_1, \ldots, x_h)^{hq}$ é gerado pelos elementos desta forma, basta mostrar que $x_1^{a_1} \cdots x_h^{a_h} \in (x_1^q, \ldots, x_h^q)$. Visto que assumimos que $a_1 + \cdots + a_h \geqslant hq$, o Princípio do Pombal garante que $a_i \geqslant q$ para algum i, e por isso $x_i^{a_i} \in (x_1^q, \ldots, x_h^q)$. □

De facto, se seguirmos a mesma técnica mas usarmos o poder máximo do Princípio do Pombal, podemos mostrar a Conjectura de Harbourne 4.33, que vamos discutir mais tarde, para potências de p, um facto notado por Craig Huneke:

Exercício 4.23. Suponhamos que I é um ideal radical de altura grande h num anel regular R contendo um corpo de característica prima p. Mostra que para qualquer $q = p^e$,

$$I^{(hq-h+1)} \subseteq I^{[q]} \subseteq I^q.$$

Como colorário, obtemos uma resposta afirmativa para a pergunta de Huneke 4.32, que vamos discutir em breve, em característica 2, isto é, $I^{(3)} \subseteq I^2$.

Para mostrar que $I^{(hn)} \subseteq I^n$ para qualquer $n \geqslant 1$, precisamos de usar técnicas de *tight closure*. A teoria de *tight closure*, desenvolvida por Hochster e Huneke, tem imensas aplicações importantes em álgebra comutativa.

Definiçao 4.24 (Tight Closure)**.** Seja R um domínio de característica prima p. Dado um ideal I em R, a *tight closure* de I é o ideal

$$I^* = \left(z \in A \,|\, \text{ existe algum } c \in R \text{ não-zero tal que } cz^q \in I^{[q]} \text{ para todo o } q = p^e \gg 0\right).$$

Observação 4.25. Temos sempre $I \subseteq I^*$.

Por vezes, é mais simples provar que um elemento está contido na *tight closure* dum ideal do que no próprio ideal. Esta ideia é particularmente útil num anel regular, já que todos os ideais coincidem com a sua *tight closure*.

Teorema 4.26 (Theorem (4.4) in [HH90])**.** Seja R um anel regular contendo um corpo de característica prima. Então $I = I^*$ para qualquer ideal I em R.

Teorema 4.27 (Hochster–Huneke, [HH02])**.** Seja R um anel regular de característica p, e I um ideal radical de altura grande h. Então para cada $n \geqslant 1$, $I^{(hn)} \subseteq I^n$.

Demonstração. Fixemos n. Vamos mostrar que se $u \in I^{(hn)}$, então $u \in (I^n)^*$, e visto que R é regular, isto implica que $u \in I^n$. Precisamos de encontrar um elemento não-zero c tal que $cr^q \in (I^n)^q$ para todo o $q = p^e$.

Dado $q = p^e$, podemos escrever $q = an + r$ para inteiros positivos $a, r \geqslant 0$ com $r < n$. Então $u^a \in \left(I^{(hn)}\right)^a \subseteq I^{(han)}$, e

$$I^{hn}u^a \subseteq I^{hr}u^a \subseteq I^{hr}I^{(han)} \subseteq I^{(han+hr)} = I^{(hq)}.$$

Dado que $I^{(hq)} \subseteq I^{[q]}$, temos $I^{hn}u^a \subseteq I^{[q]}$. Elevemos ambos os lados a n:

$$I^{hn^2}u^{an} \subseteq \left(I^{[q]}\right)^n = (I^n)^{[q]}.$$

Pela nossa escolha de a, sabemos que $q \geqslant an$, e por isso

$$I^{hn^2}u^q \subseteq I^{hn^2}u^{an} \subseteq (I^n)^{[q]}.$$

Dado que R é um domínio, existe algum elemento não-zero em $c \in I^{hn^2}$, e tal elemento não depende da escolha de q. Um tal c satisfaz $cu^q \in (I^n)^{[q]}$, e por isso $u \in I^n$. $\square$

Isto pode ser generalizado. O seguinte é [ELS01, Theorem 2.2] no caso de variedades complexas suaves, e mais geralmente [HH02, Theorem 2.6]:

Teorema 4.28 (Ein–Lazersfeld–Smith, Hochster–Huneke)**.** Seja I um ideal radical num anel regular contendo um anel, e h a altura grande de I. Para qualquer $n \geqslant 1$ e $k \geqslant 0$, temos $I^{(hn+kn)} \subseteq \left(I^{(k+1)}\right)^n$.

Exercício 4.29. Mostra o Teorema 4.28 em característica prima, essencialmente repetindo a prova do Teorema 4.27.

Se tomarmos $k = 0$, obtemos $I^{(hn)} \subseteq I^n$. Mais ainda, em característica prima p, podemos obter uma extensão da Conjectura de Harbourne (que vamos discutir na próxima secção) para potências de p:

Lema 4.30. Seja I um ideal radical num anel regular R de característica prima p e h a altura grande de I. Para qualquer $q = p^e$,

$$I^{(hq+kq-h+1)} \subseteq \left(I^{(k+1)}\right)^{[q]}.$$

Demonstração. Pelo Exercício 1.28, basta provar esta contenção depois de localizarmos em qualquer primo associado a $\left(I^{(k+1)}\right)^{[q]}$. Dado que

$$\operatorname{Ass}\left(\left(I^{(k+1)}\right)^{[q]}\right) = \operatorname{Ass}\left(I^{(k+1)}\right) = \operatorname{Ass}(I),$$

na verdade basta localizar nos primos associados a I. Se P é um primo associado a I, o que temos de provar em R_P é o seguinte:

$$P_P^{hq+kq-h+1} \subseteq \left(P_P^{[q]}\right)^{k+1}.$$

Basta agora usar um argumento semelhante ao Lema 4.22, com os detalhes completos em [HH02, Lemma 2.4 (a)]. □

4.3 A Conjectura de Harbourne

O Teorema 4.7 pode por vezes ser melhorado.

Exemplo 4.31. O ideal $I = (x, y) \cap (x, z) \cap (y, z)$ que vimos no Exemplo 2.2 tem altura pura 2, e por isso o Teorema 4.7 implica que $I^{(2n)} \subseteq I^n$ para qualquer $n \geqslant 1$. No entanto, $I^{(3)} \subseteq I^2$, apesar do teorema apenas garantir $I^{(4)} \subseteq I^2$.

Pergunta 4.32 (Huneke, 2000)**.** Para um ideal primo P de altura 2 num anel local regular contendo um corpo, temos $P^{(3)} \subseteq P^2$?

Esta pergunta continua em aberto mesmo en dimensão 3. Harbourne propôs a seguinte generalização da Pergunta 4.32, primeiro publicada em [HH13, BRH+09]:

Conjectura 4.33 (Harbourne, 2006)**.** Seja I um ideal radical homogéneo em $k[\mathbb{P}^N]$, e h a altura grande de I. Para qualquer $n \geqslant 1$,

$$I^{(hn-h+1)} \subseteq I^n.$$

Observação 4.34. Equivalentemente, a Conjectura de Harbourne pergunta se $I^{(n)} \subseteq I^{\lceil \frac{n}{h} \rceil}$ para qualquer $n \geqslant 1$.

Observação 4.35. Quando $h = 2$, a conjectura pergunta se $I^{(2n-1)} \subseteq I^n$, e em particular se $I^{(3)} \subseteq I^2$.

Como vimos antes, $I^{(hn-h+1)} \subseteq I^n$ é satisfeito em característica prima p se tomarmos $n = p^e$. Há vários casos em que sabemos que esta conjectura é satisfeita:

- Se I for um ideal monomial ([BRH⁺09, Example 8.4.5]);
- se I corresponde a um conjunto genérico de pontos em $\mathbb{P}^2$ ([BH10]) ou $\mathbb{P}^3$ ([Dum15]);
- se I corresponde a uma configuração de pontos em estrela ([HH13]),

entre outros. Vamos ver que a conjectura também é satisfeita se I define um anel F-puro, o que em particular recupera o resultado sobre ideais monomiais.

Exercício 4.36. Seja I um ideal monomial livre de quadrados. Mostra que I satisfaz a Conjectura de Harbourne.

Dica: dado um ideal monomial, podemos tomar uma espécie de potência de Frobenius de imitação:

$$I^{[n]} = \left(f^n \,\middle|\, f \in I \text{ é um monómio}\right).$$

Tal como a notação sugere, estes comportam-se muito como as potências de Frobenius.

Infelizmente, a Conjectura 4.33 é demasiado geral; não é satisfeita por todos os ideais homogenéos radicais, nem mesmo por ideais de pontos.

Exemplo 4.37 (Fermat configurations of points)**.** Seja $n \geqslant 3$ um inteiro e consideremos um corpo k de característica diferente de 2 tal que k contém n raízes de unidade distintas. Seja $R = k[x, y, z]$, e consideremos o ideal

$$I = (x(y^n - z^n), y(z^n - x^n), z(x^n - y^n)).$$

Quando $n = 3$, este ideal corresponde a uma configuração de 12 pontos em $\mathbb{P}^2$, como descrito na Figura 1. Em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, estes 12 points são dados pelos 3 pontos coordenados juntamente com os 9 pontos definidos pelas intersecções de $y^3 - z^3$, $z^3 - x^3$ e $x^3 - y^3$.

O ideal radical I tem altura pura 2. No entanto, $I^{(3)} \nsubseteq I^2$, o elemento $f = (y^n - z^n)(z^n - x^n)(x^n - y^n) \in I^{(3)}$ mas não é um elemento de I^2. Isto pode ser demonstrado através de argumentos geométricos, notando que f define 9 linhas, que passam pelos 12 points três a três.

Isto foi primeiro descoberto por Dumnicki, Szemberg e Tutaj-Gasińska [DSTG13] em $k = \mathbb{C}$, e depois extendido em [HS15, Proposition 3.1] para qualquer k e qualquer n. Outras extensões deste exemplo podem ser encontradas em [Dra17, MS18b].

Outras configurações de pontos em $\mathbb{P}^2$ produzem ideais que falham $I^{(3)} \subseteq I^2$, tais como as configurações de Klein e Wiman [Sec15]. Dada uma configuração de pontos em $\mathbb{P}^k$ que produz um ideal I com $I^{(hn-h+1)} \nsubseteq I^n$, podemos produzir outros contra-exemplos através de homomorfisms planos $\mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$, como demonstrado no trabalho de Solomon Akesseh [Ake17].

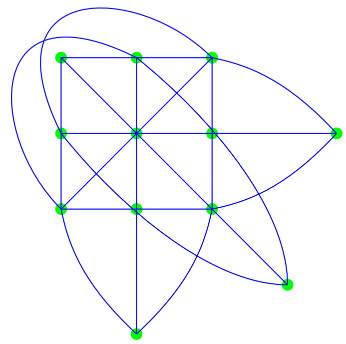

Figura 1: Fermat configuration of points when $n = 3$.

Exemplo 4.38. Harbourne e Seceleanu [HS15] mostraram que $I^{(hn-h+1)} \subseteq I^n$ pode falhar para valores de n arbitrariamente grandes em característica prima. No entanto, estes contra-exemplos são construídos duma forma que depende de n, ou seja, para cada n existe um ideal I_n de altura pura 2 (correspondendo, mais uma vez, a uma configuração especial de pontos em $\mathbb{P}^2$) que falha $I_n^{(hn-h+1)} \subseteq I_n^n$.

No entanto, todos estes exemplos satisfazem a seguinte conjectura:

Conjectura 4.39 (Harbourne stable [Gri])**.** Se I é um ideal radical de altura grande h num anel regular, então $I^{(hn-h+1)} \subseteq I^n$ para todo o $n \gg 0$.

Essencialmente, estamos a perguntar se a Conjectura de Harbourne é satisfeita para n grande — onde suficientemente grande depende de I, tal como os exemplos de Harbourne e Seceleanu sugerem [HS15]. Não temos nenhum contra-exemplo para esta conjectura.

There are also no known prime counterexamples to Conjectura de Harbourne. In particular, $P^{(3)} \subseteq P^2$ could still hold for prime ideals over a power series ring.

4.4 A Conjectura de Harbourne em característica p

Vamos mostrar que a Conjectura de Harbourne é satisfeita por ideais I para os quais R/I é um anel com boas propriedades: se R/I for F-puro.

Definiçao 4.40 (Anel F-finito)**.** Seja A um anel noetheriano de característica prima p. Dizemos que A é *F-finito* se A é um módulo finitamente gerado sobre si próprio através da acção do Frobenius.

Definiçao 4.41. Quando A é F-finito e reduzido, podemos falar do anel das p^e-ésimas raízes de A, denotado por $F_*^e A$, e podemos identificar a inclusão $A \hookrightarrow F_*^e A$ com F^e. O facto de que A é F-finito implica que $F_*^e A$ é um módulo finitamente gerado sobre A para qualquer $q = p^e$.

Exemplo 4.42. Se k é um corpo perfeito, então $k[x_1, \ldots, x_n]$ é F-finito. Aliás, qualquer álgebra essencialmente de tipo finito sobre k é F-finita.

Vamos estudar anéis F-puros, que foram introduzidos por Hochster e Roberts em [HR76].

Definiçao 4.43 (F-puro ring)**.** Seja A um anel noetheriano de característica prima p. Dizemos que A é *F-puro* se para qualquer A-módulo M, $F \otimes 1 \colon A \otimes M \longrightarrow A \otimes M$ é injectivo.

Definiçao 4.44 (Anel F-split)**.** Seja A um anel noetheriano de característica prima p. Dizemos que A é *F-split*[13] se a inclusão $R \hookrightarrow F_*^e R$ se cinde[14] para qualquer (equivalentemente, algum) $q = p^e$, isto é, se existe um homomorfismo de R-módulos $F_*^e R \hookrightarrow R$ tal que a composição

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] & F_*^e R \arrow[l, bend left, dashed] \end{tikzcd}$$

é a identidade em R.

Lema 4.45. Se A é F-finito, então A é F-puro se e só se A é F-split.

Demonstração. Em [HR76, Corollary 5.3]. □

O seguinte teorema caracteriza os ideais num anel regular local que definem anéis F-puros:

Teorema 4.46 (Critério de Fedder para F-puridade, Theorem 1.12 em [Fed83])**.** Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local regular de característica prima p. Dado um ideal I em R, R/I é F-puro se e só se para qualquer $q = p^e \gg 0$, temos

$$\left(I^{[q]} : I\right) \nsubseteq \mathfrak{m}^{[q]}.$$

Uma das vantagens deste critério é que também é suficiente testar $\left(I^{[p]} : I\right) \nsubseteq \mathfrak{m}^{[p]}$. Isto é algo que podemos testar com Macaulay2 [GS] quando R é um anel de polinómios sobre um corpo de característica p, onde tomamos para $\mathfrak{m}$ o ideal gerado por todas as variáveis.

Eis alguns exemplos de anéis F-puros:

- Anéis regulares são sempre F-puros.
- SE I é um ideal monomial livre de quadrados num anel de polinónios sobre um corpo, então R/I é um anel F-puro. (Exercício!)
- Anéis de Veronese de anéis de polinómios são F-puros: a k-áGlgebra gerada por todos os monómios em v variáveis num grau fixo d.
- Anéis de determinantes genéricos são F-puros.

Agora estamos preparados para mostrar que se R é um anel regular e R/I é F-puro, então I satisfaz a Conjectura de Harbourne. Eis o resultado que estamos a tentar mostrar:

Teorema 4.47 (Theorem 3.3 in [GH19])**.** Seja R um anel regular de característica prima p. Seja I um ideal em R com altura grande h. Se R/I é F-puro, então I satisfaz a Conjectura de Harbourne, isto é, para qualquer $n \geqslant 1$ temos $I^{(hn-h+1)} \subseteq I^n$.

[13] Traduçso?

[14] Esta parece ser a tradução para português de *split*.

Este teorema também é válido em alguns anéis singulares: se R é um anel F-finito Gorenstein, basta assumir que I tem dimensão projectiva finita [GMS19].

A ideia da demonstração é estudar os ideais $\left(I^n : I^{(hn-h+1)}\right)$. O ideal $(J : I)$ mede o falhanço de $I \subseteq J$, com $(J : I) = R$ precisamente quando $I \subseteq J$. Para mostrar que $\left(I^n : I^{(hn-h+1)}\right) = R$, precisamos de mostrar que este ideal contém algum ideal *grande*; o Critério de Fedder 4.46 aponta-nos para um candidato perfeito. A demonstração em [GH19] segue estes passos: mostramos que

$$\left(I^{[q]} : I\right) \subseteq \left(II^{(n)} : I^{(n+h)}\right)^{[q]},$$

para *qualquer* ideal I e qualquer $q = p^e \gg 0$, e quando R/I é F-puro isto implica a Conjectura de Harbourne. A prova que vamos mostrar aqui usa as mesmas técnicas, mas vamos na verdade demonstrar um lema mais poderoso.

Lema 4.48. Seja R um anel regular de característica prima p. Seja I um ideal radical em R e h a altura grande de I. Para qualquer $n \geqslant 1$,

$$\left(I^{[q]} : I\right) \subseteq \left(II^{(n)} : I^{(n+h)}\right)^{[q]}$$

para $q = p^e \gg 0$.

Demonstração. Primeiro, notamos que

$$\left(II^{(n)} : I^{(n+h)}\right)^{[q]} = \left(\left(II^{(n)}\right)^{[q]} : \left(I^{(n+h)}\right)^{[q]}\right),$$

pelo Lema 4.19. Seja $s \in \left(I^{[q]} : I\right)$. Então $sI^{(n+h)} \subseteq sI \subseteq I^{[q]}$, e assim

$$s\left(I^{(n+h)}\right)^{[q]} \subseteq \left(sI^{(n+h)}\right)\left(I^{(n+h)}\right)^{q-1} \subseteq I^{[q]}\left(I^{(n+h)}\right)^{q-1}.$$

Vamos mostrar que

$$\left(I^{(n+h)}\right)^{q-1} \subseteq \left(I^{(n)}\right)^{[q]},$$

o que implica que

$$s\left(I^{(n+h)}\right)^{[q]} \subseteq \left(II^{(n)}\right)^{[q]},$$

completando a prova.

Pelo Lema 1.19,

$$\left(I^{(n+h)}\right)^{q-1} \subseteq I^{((n+h)(q-1))}.$$

Pelo Lema 4.30 com $k = n-1$, obtemos o seguinte:

$$I^{(hq+(n-1)q-h+1)} \subseteq \left(I^{(n)}\right)^{[q]}.$$

Vamos mostrar que para $q \gg 0$, $\left(I^{(n+h)}\right)^{q-1} \subseteq I^{(hq+(n-1)q-h+1)}$, o que concluirá a prova de que $\left(I^{(n+h)}\right)^{q-1} \subseteq \left(I^{(n)}\right)^{[q]}$. Basta-nos agora mostrar que

$$(n+h)(q-1) \geqslant hq + (n-1)q - h + 1$$

desde que $q \gg 0$. Para verificar esta desigualdade para $q \gg 0$, basta comparar os coeficientes de q e notar que $n+h \geqslant n+h-1$. Outra opção é resolver a desigualdade explicitamente, e concluir que basta tomar $q \geqslant n+1$. $\square$

Corolŕio 4.49. Seja R um anel regular de característica prima p, e I um ideal em R com altura grande h. Se R/I é F-puro, então para qualquer $n \geqslant 1$ temos

$$I^{(n+h)} \subseteq II^{(n)}.$$

Demonstração. O primeiro passo é reduzir ao caso local, o que podemos fazer usando o Exercício 1.28, o facto de que a grande altura dum ideal não pode aumentar após uma localização, e que qualquer localização dum anel F-puro é F-pura [HR74, 6.2]. Por isso, podemos agora supor que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel regular local, e que R/I é F-puro.

Fixemos $n \geqslant 1$, e seja q como no Lema 4.48. Para qualquer $q \gg 0$,

$$\left(I^{[q]} : I\right) \subseteq \left(II^{(n)} : I^{(n+h)}\right)^{[q]}.$$

Se $I^{(n+h)} \nsubseteq II^{(n)}$, então teríamos $\left(II^{(n)} : I^{(n+h)}\right)^{[q]} \subseteq \mathfrak{m}^{[q]}$, contradizendo o Critério de Fedder. $\square$

Finalmente, podemos agora mostrar que a Conjectura de Harbourne é satisfeita para quaisquer ideais definindo um anel F-puro.

Exercício 4.50. Prova o Teorema 4.47 usando o Corolário 4.49. Isto é, mostra que se R é um anel regular de característica p e R/I é F-puro, entšo I satisfaz a Conjectura de Harbourne.

É natural perguntar se podemos melhorar a resposta ao Problema da Contenção dada pelo Teorema 4.47. Por exemplo, para cada $n \geqslant 1$ poderíamos ter $I^{(hn-h)} \subseteq I^n$, o que infelizmente não é verdade para todos os ideais definindo? anéis F-puros.

Exercício 4.51. Seja $R = k[x_1, \ldots, x_d]$ e consideremos o ideal monomial livre de quadrados

$$I = \bigcap_{i<j} (x_i, x_j).$$

Mostra que por um lado temos $I^{(2n-1)} \nsubseteq I^n$ para qualquer $n \geqslant 1$, mas $I^{(2n-2)} \nsubseteq I^n$ para $n < d$. ¿O que acontece para $n = d$? Podemos generalizar este exemplo para qualquer altura maior que 2?

Por outro lado, o Corolário 4.49 implica algo mais forte do que a Conjectura de Harbourne.

Exercício 4.52. Seja R um anel regular de característica $p > 0$, e consideremos o ideal I em R tal que R/I é F-puro. Mostra que dado um inteiro $c \geqslant 1$, se $I^{(hk-c)} \subseteq I^k$ para algum n, então $I^{(hn-c)} \subseteq I^n$ para todo o $n \gg 0$.

Quando R/I é F-regular, podemos de facto melhorar o Teorema 4.47.

Definiçao 4.53 (Anel F-regular)**.** Um anel Noetheriano reduzido F-finito R diz-se *F-regular* se para cada $c \in R$ que não pertence a nenhum primo minimal de R existe $e \gg 0$ tal que o homomorfismo $R \to R^{1/p^e}$ que envia 1 para c^{1/p^e} se cinde como um homomorfismo de R-módulos.

Anéis de determinantes rings e anéis Veronese são exemplos de anéis F-regulares.

Teorema 4.54 (Theorem 4.1 em [GH19])**.** Seja R um anel F-finito regular de característica prima p, e consideremos um ideal I em R com altura grande h tal que R/I é F-regular. Para qualquer $n \geqslant 1$,

$$I^{((h-1)n+1)} \subseteq I^{n+1}.$$

Quando $h = 2$, isto significa que $I^{(n)} = I^n$ para qualquer n.

Este teorema essencialmente diz que se R/I é F-regular, então I satisfaz uma versão da Conjectura de Harbourne em que substituímos a altura grande h de I por $h - 1$.

Este resultado segue dum critério tipo Fedder para F-regularidade juntamente com o seguinte lema [GH19, Lemma 3.2]:

Lema 4.55. Seja R um anel regular de característica prima p, I um ideal em R, e $h \geqslant 2$ a altura grande de I. Então para cada $d \geqslant h - 1$ e para todo o $q = p^e$,

$$\left(I^d : I^{(d)}\right)\left(I^{[q]} : I\right) \subseteq \left(I I^{(d+1-h)} : I^{(d)}\right)^{[q]}.$$

O critério de tipo Fedder de que precisamos foi provado por Donna Glassbrenner:

Teorema 4.56 (Glassbrenner's Criterion for strong F-regularity [Gla96])**.** Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel F-finito regular local de característica prima p. Dado um ideal radical próprio I de R, R/I é F-regular se e só se para cada elemento $c \in R$ que não esteja em nenhum primo minimal de I, $c\left(I^{[q]} : I\right) \nsubseteq \mathfrak{m}^{[q]}$ para cada $q = p^e \gg 0$.

Exercício 4.57. Seja I um ideal num anel noetheriano. Mostra que $\left(I^d : I^{(d)}\right)$ contém sempre um elemento que não está contido me nenhum dos primos minimais de I.

Exercício 4.58. Prova o Teorema 4.54 usando o Lema 4.55.

Exercício 4.59. Encontra exemplos de primos de altura 2 definindo anéis F-regulares que não sejam gerados por sequências regulares.

Índice

Referências

[GVV07] A note on rees algebras and the mfmc property. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 48:141–150, 2007.

[Ake17] Solomon Akesseh. Ideal containments under flat extensions. *J. Algebra*, 492:44–51, 2017.

[BRH+09] T. Bauer, S. Di Rocco, B. Harbourne, M. Kapustka, A. Knutsen, W. Syzdek, and T. Szemberg. A primer on Seshadri constants. *Contemporary Mathematics*, vol. 496:39–70, 2009.

[BCG+16] Cristiano Bocci, Susan Cooper, Elena Guardo, Brian Harbourne, Mike Janssen, Uwe Nagel, Alexandra Seceleanu, Adam Van Tuyl, and Thanh Vu. The waldschmidt constant for squarefree monomial ideals. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 44(4):875–904, Dec 2016.

[BH10] Cristiano Bocci and Brian Harbourne. Comparing powers and symbolic powers of ideals. *J. Algebraic Geom.*, 19(3):399–417, 2010.

[BJNB19] Holger Brenner, Jack Jeffries, and Luis Núñez-Betancourt. Quantifying singularities with differential operators. *Advances in Mathematics*, 358:106843, 2019.

[Bre79] Henrik Bresinsky. Monomial space curves in A^3 as set-theoretic complete intersections. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 75(1):23–24, 1979.

[Bro79] Markus P. Brodmann. Asymptotic stability of $\mathrm{Ass}(M/I^nM)$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 74(1):16–18, 1979.

[BV88] Winfried Bruns and Udo Vetter. *Determinantal rings*, volume 1327 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[Bui95] Alexandru Buium. Differential characters of abelian varieties over p-adic fields. *Inventiones mathematicae*, 122(2):309–340, 1995.

[CFG+16] Susan Cooper, Giuliana Fatabbi, Elena Guardo, Anna Lorenzini, Juan Migliore, Uwe Nagel, Alexandra Seceleanu, Justyna Szpond, and Adam Van Tuyl. Symbolic powers of codimension two Cohen-Macaulay ideals, 2016. arXiv:1606.00935.

[CEHH16] Susan M. Cooper, Robert J. D. Embree, Tai Ha, and Andrew H. Hoefel. Symbolic powers of monomial ideals. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 60:39–55, 2016.

[Cow84] R. C. Cowsik. Symbolic powers and number of defining equations. In *Algebra and its applications (New Delhi, 1981)*, volume 91 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 13–14. Dekker, New York, 1984.

[CN76] R. C. Cowsik and M. V. Nori. On the fibres of blowing up. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 40(1-4):217–222 (1977), 1976.

[Cut91] Steven Dale Cutkosky. Symbolic algebras of monomial primes. *J. Reine Angew. Math.*, 416:71–89, 1991.

[DDSG+18] Hailong Dao, Alessandro De Stefani, Eloísa Grifo, Craig Huneke, and Luis Núñez Betancourt. Symbolic powers of ideals. In *Singularities and foliations. geometry, topology and applications*, volume 222 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 387–432. Springer, Cham, 2018.

[DN96] Emanuela De Negri. K-algebras generated by pfaffians. *Math. J. Toyama Univ*, 19:105–114, 1996.

[DSGJ] Alessandro De Stefani, Eloísa Grifo, and Jack Jeffries. A Zariski-Nagata theorem for smooth $\mathbb{Z}$-algebras. *To appear in J. Reine Angew. Math.*

[DEP80] Corrado DeConcini, David Eisenbud, and Claudio Procesi. Young diagrams and determinantal varieties. *Invent. Math.*, 56(2):129–165, 1980.

[Dem82] Jean-Pierre Demailly. Formules de jensen en plusieurs variables et applications arithmétiques. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 110:75–102, 1982.

[Dra17] Ben Drabkin. Configurations of linear spaces of codimension two and the containment problem, 2017. arXiv:1704.07870.

[DGSS17] Ben Drabkin, Eloísa Grifo, Alexandra Seceleanu, and Branden Stone. Computations involving symbolic powers, 2017. arXiv:1712.01440.

[Dum15] Marcin Dumnicki. Containments of symbolic powers of ideals of generic points in $\mathbb{P}^3$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143(2):513–530, 2015.

[DSTG13] Marcin Dumnicki, Tomasz Szemberg, and Halszka Tutaj-Gasińska. Counterexamples to the $I^{(3)} \subseteq I^2$ containment. *J. Algebra*, 393:24–29, 2013.

[ELS01] Lawrence Ein, Robert Lazarsfeld, and Karen E. Smith. Uniform bounds and symbolic powers on smooth varieties. *Invent. Math.*, 144 (2):241–25, 2001.

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[EH79] David Eisenbud and Melvin Hochster. A Nullstellensatz with nilpotents and Zariski's main lemma on holomorphic functions. *J. Algebra*, 58(1):157–161, 1979.

[EM97] David Eisenbud and Barry Mazur. Evolutions, symbolic squares, and Fitting ideals. *J. Reine Angew. Math.*, 488:189–201, 1997.

[Fed83] Richard Fedder. F-purity and rational singularity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 278(2):461–480, 1983.

[FMX18] Louiza Fouli, Paolo Mantero, and Yu Xie. Chudnovsky's conjecture for very general points in $\mathbb{P}_k^N$, 2018.

[Gla96] Donna Glassbrenner. Strongly F-regularity in images of regular rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(2):345 – 353, 1996.

[GM92] Shiro Goto and Mayumi Morimoto. Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 116(2):305–311, 1992.

[GNS91a] Shiro Goto, Koji Nishida, and Yasuhiro Shimoda. The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space curves. *J. Math. Soc. Japan*, 43(3):465–481, 07 1991.

[GNS91b] Shiro Goto, Koji Nishida, and Yasuhiro Shimoda. Topics on symbolic Rees algebras for space monomial curves. *Nagoya Math. J.*, 124:99–132, 1991.

[GNW94] Shiro Goto, Koji Nishida, and Keiichi Watanabe. Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves and counterexamples to Cowsik's question. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 120(2):383–392, 1994.

[GS] Daniel R. Grayson and Michael Stillman. *Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry.*

[Gri] Eloísa Grifo. A stable version of Harbourne's Conjecture and the containment problem for space monomial curves. Preprint, arXiv:1809.06955.

[Gri18] Eloísa Grifo. Symbolic powers and the containment problem. *PhD Thesis*, 2018.

[GH19] Eloísa Grifo and Craig Huneke. Symbolic powers of ideals defining F-pure and strongly F-regular rings. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (10):2999–3014, 2019.

[GMS19] Eloísa Grifo, Linquan Ma, and Karl Schwede. Symbolic power containments in singular rings in positive characteristic, 2019.

[HH13] Brian Harbourne and Craig Huneke. Are symbolic powers highly evolved? *J. Ramanujan Math. Soc.*, 28A:247–266, 2013.

[HS15] Brian Harbourne and Alexandra Seceleanu. Containment counterexamples for ideals of various configurations of points in $\mathbf{P}^N$. *J. Pure Appl. Algebra*, 219(4):1062–1072, 2015.

[Her80] J Herzog. Note on complete intersections. *preprint*, 1980.

[HU90] Jürgen Herzog and Bernd Ulrich. Self-linked curve singularities. *Nagoya Math. J.*, 120:129–153, 1990.

[Hoc73] Melvin Hochster. Criteria for equality of ordinary and symbolic powers of primes. *Mathematische Zeitschrift*, 133:53–66, 1973.

[HH90] Melvin Hochster and Craig Huneke. Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(1):31–116, 1990.

[HH02] Melvin Hochster and Craig Huneke. Comparison of symbolic and ordinary powers of ideals. *Invent. Math. 147 (2002), no. 2, 349–369*, November 2002.

[HR74] Melvin Hochster and Joel L. Roberts. Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay. *Advances in Math.*, 13:115–175, 1974.

[HR76] Melvin Hochster and Joel L. Roberts. The purity of the Frobenius and local cohomology. *Advances in Math.*, 21(2):117–172, 1976.

[HS02] Serkan Hoşten and Gregory G. Smith. Monomial ideals. In *Computations in algebraic geometry with Macaulay 2*, volume 8 of *Algorithms Comput. Math.*, pages 73–100. Springer, Berlin, 2002.

[HH92] Sam Huckaba and Craig Huneke. Powers of ideals having small analytic deviation. *Amer. J. Math.*, 114(2):367–403, 1992.

[Hun86] Craig Huneke. The primary components of and integral closures of ideals in 3-dimensional regular local rings. *Mathematische Annalen*, 275(4):617–635, Dec 1986.

[HKV09] Craig Huneke, Daniel Katz, and Javid Validashti. Uniform Equivalente of Symbolic and Adic Topologies. *Illinois Journal of Mathematics*, 53(1):325–338, 2009.

[HU89] Craig Huneke and Bernd Ulrich. Powers of licci ideals. In *Commutative algebra (Berkeley, CA, 1987)*, volume 15 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 339–346. Springer, New York, 1989.

[JMnV15] Jack Jeffries, Jonathan Montaño, and Matteo Varbaro. Multiplicities of classical varieties. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 110(4):1033–1055, 2015.

[Joy85] A. Joyal. δ-anneaux et vecteurs de Witt. *C.R. Acad. Sci. Canada*, VII(3):177–182, 1985.

[KS19] Jesse Kim and Irena Swanson. Many associated primes of powers of primes. *J. Pure Appl. Algebra*, 223(11):4888–4900, 2019.

[Kun69] Ernst Kunz. Characterizations of regular local rings for characteristic p. *Amer. J. Math.*, 91:772–784, 1969.

[Las05] Emanuel Lasker. Zur theorie der moduln und ideale. *Mathematische Annalen*, 60:20–116, 1905.

[LS06] Aihua Li and Irena Swanson. Symbolic powers of radical ideals. *Rocky Mountain J. Math.*, 36(3):997–1009, 2006.

[Lyu88] Gennady Lyubeznik. On the arithmetical rank of monomial ideals. *J. Algebra*, 112(1):86–89, 1988.

[MS18a] Linquan Ma and Karl Schwede. Perfectoid multiplier/test ideals in regular rings and bounds on symbolic powers. *Invent. Math.*, 214(2):913–955, 2018.

[MS18b] Grzegorz Malara and Justyna Szpond. On codimension two flats in Fermat-type arrangements. In *Multigraded algebra and applications*, volume 238 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 95–109. Springer, Cham, 2018.

[Mat80] Hideyuki Matsumura. *Commutative algebra*, volume 56 of *Mathematics Lecture Note Series*. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., second edition, 1980.

[Mat89] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

[MnNnB19] Jonathan Montaño and Luis Núñez Betancourt. Splittings and Symbolic Powers of Square-free Monomial Ideals. *International Mathematics Research Notices*, 07 2019. rnz138.

[Mor91] Marcel Morales. Noetherian symbolic blow-ups. *J. Algebra*, 140(1):12–25, 1991.

[Mor99] Susan Morey. Stability of associated primes and equality of ordinary and symbolic powers of ideals. *Comm. Algebra*, 27(7):3221–3231, 1999.

[Nag62] Masayoshi Nagata. *Local rings*. Interscience, 1962.

[Nag65] Masayoshi Nagata. *The Fourteenth Problem of Hilbert*. Tata Institute of Fundamental Research, 1965.

[Noe21] Emmy Noether. Idealtheorie in ringbereichen. *Mathematische Annalen*, 83(1):24–66, 1921.

[Rat76] Louis J. Ratliff. On prime divisors of I^n, n large. *Michigan Math. J.*, 23(4):337–352, 1976.

[Ree58] David Rees. On a problem of Zariski. *Illinois Journal of Mathematics*, 2(1):145–149, 1958.

[Rob85] Paul C. Roberts. A prime ideal in a polynomial ring whose symbolic blow-up is not Noetherian. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 94(4):589–592, 1985.

[Sch85] Peter Schenzel. Symbolic powers of prime ideals and their topology. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 93(1):15–20, 1985.

[Sch91] Peter Schenzel. Examples of gorenstein domains and symbolic powers of monomial space curves. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 71(2):297 – 311, 1991. Special Issue In Honor of H. Matsumura.

[Sec15] Alexandra Seceleanu. A homological criterion for the containment between symbolic and ordinary powers of some ideals of points in $\mathbb{P}^2$. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 219(11):4857 – 4871, 2015.

[Sri91] Hema Srinivasan. On finite generation of symbolic algebras of monomial primes. *Comm. Algebra*, 19(9):2557–2564, 1991.

[Swa00] Irena Swanson. Linear equivalence of topologies. *Math. Zeitschrift*, 234:755–775, 2000.

[SH06] Irena Swanson and Craig Huneke. *Integral closure of ideals, rings, and modules*, volume 13. Cambridge University Press, 2006.

[SS17] T. Szemberg and J. Szpond. On the containment problem. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 66(2):233–245, 2017.

[Val81] Giuseppe Valla. On determinantal ideals which are set-theoretic complete intersections. *Comp. Math*, 42(3):11, 1981.

[Wal16] Robert M. Walker. Rational singularities and uniform symbolic topologies. *Illinois J. Math.*, 60(2):541–550, 2016.

[Wal18] Robert M. Walker. Uniform symbolic topologies in normal toric rings. *J. Algebra*, 511:292–298, 2018.

[Zar49] Oscar Zariski. A fundamental lemma from the theory of holomorphic functions on an algebraic variety. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 29:187–198, 1949.