

CONJECTURE DE POINCARÉ

GILBERT HECTOR

1. INTRODUCTION

On appelle *variété de Poincaré* toute variété compacte à bord Π de dimension 3 qui est simplement connexe. Une telle variété est orientable et son bord $\partial\Pi$ est une sphère \mathbb{S}^2 . Le but de ce travail est de prouver la conjecture de Poincaré:

Conjecture. *Toute variété de Poincaré Π est homéomorphe au disque D^3 de dimension 3*

D'après les travaux de J.R. Munkres et J.H.C. Whitehead, on sait que toute variété de dimension 3 admet exactement une structure différentiable. Donc on supposera toujours que les variétés considérées sont différentiables (de classe C^∞) et il reviendra au même de montrer qu'une variété de Poincaré Π est homéomorphe, difféomorphe ou DM-difféomorphe (i.e. difféomorphe par morceaux) au disque D^3 : dans tous les cas on dira simplement que Π est un *cube*.

Après quelques préliminaires permettant de fixer le cadre du travail, nous décrirons les grandes étapes de la preuve.

1.1. Position générale. Soient W une variété ouverte (sans bord) et $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}$ une submersion. Un plongement:

$$\epsilon : \mathbb{S}^2 \rightarrow W$$

de \mathbb{S}^2 dans W est en *position générale* par rapport à φ si:

- a) $\varphi \circ \epsilon : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Morse;
- b) cette fonction de Morse est *stricte* c.à.d. si σ et τ sont des singularités telles que $\varphi(\sigma) = \varphi(\tau)$ alors $\sigma = \tau$.

La condition b) signifie que le feuilletage singulier induit par $\varphi \circ \epsilon$ sur \mathbb{S}^2 n'admet pas de liaison de selles.

1.2. Variétés étalonnées. Modifications par isotopie. Rappelons qu'une variété à bord est un rétracte par déformation de son intérieur. On appellera *étalonnage* d'une variété de Poincaré Π la donnée d'un diagramme:

$$(1) \quad \Pi \xrightarrow{\theta} W \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

où φ est une submersion de l'intérieur W de Π sur \mathbb{R} et θ est un plongement tel que $\partial\theta = \theta|_{\partial\Pi}$ est en position générale par rapport à φ .

La première procédure de modification des étalonnages consistera à changer θ par isotopie de plongements tout en conservant φ . Si $(\theta_t)_{t \in [0,1]}$ est une telle isotopie et si θ_1 est encore en position générale, $\varphi_1 = \varphi \circ \theta_1$ sera un étalonnage obtenu en *modifiant φ par isotopie* (cette procédure simple permet déjà d'altérer de façon notable certaines propriétés homotopiques de φ).

Soit (Π, φ) une variété de Poincaré étalonnée.

1.3. Lamination définie par un étalonnage. Genre. La trace sur Π du feuilletage \mathcal{F}_φ défini par φ sur W est un "feuilletage singulier" que nous appellerons la *lamination associée* à l'étalonnage. Elle sera désignée par \mathcal{L}_φ .

Les feuilles de \mathcal{L}_φ seront les composantes connexes des traces sur Π des feuilles de \mathcal{F}_φ ou en d'autres termes les composantes connexes des "surfaces" de niveau $\varphi^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Il y aura un nombre fini de *feuilles singulières*: ce sont celles qui passent par les points singuliers de $\partial\varphi = \varphi|_{\partial\Pi}$. On montrera au §2 qu'elles ont le type d'homotopie d'une surface compacte; les autres feuilles dites *régulières* sont des surfaces compactes usuelles.

On observera au §2 que le genre des feuilles singulières et régulières de \mathcal{L}_φ est uniformément borné, ce qui nous permettra de définir le *genre* de \mathcal{L}_φ par:

$$g(\varphi) = \sup_{L \in \mathcal{L}_\varphi} g(L)$$

Si $g(\varphi) = 0$, c.à.d. si toutes les feuilles de \mathcal{L}_φ sont planaires, on dira que l'étalonnage φ est *planaire*.

En particulier, on remarquera que si toutes les feuilles régulières de \mathcal{L}_φ sont des disques D^2 , alors toute feuille singulière est un joint de deux disques; on dira qu'on a un *étalonnage par disques* (voir au §5).

1.3.1. *Exemples.* A partir de submersions des \mathbb{R}^3 sur \mathbb{R} décrites dans [] et en choisissant un plongement convenable $\theta : D^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, on pourra construire des étalonnages de D^3 de genre g pour tout $g \in \mathbb{N}$

La première étape de la preuve sera:

Théorème A. *Toute variété de Poincaré Π admettant un étalonnage planaire est un cube.*

Ce résultat contient le théorème de Schoenflies dont on fera l'usage dans les parties 3 et 4.

Théorème de Schoenflies. *Toute sphère plongée dans \mathbb{R}^3 borde un disque.*

On ramènera les étalonnages de genre > 0 au cas planaire par un procédé de *découpage* (inverse de la somme connexe) que nous décrivons rapidement.

1.4. **Disques réguliers et découpages.** Un disque $(\Delta, \partial\Delta) \subset (\Pi, \partial\Pi)$ plongé différenciablement est en *position générale par rapport à φ* si:

- a) Δ est transverse à $\partial\Pi$ et $\partial\Delta$ est en position générale par rapport à $\partial\varphi$, en particulier $\partial\Delta$ ne rencontre aucune singularité de $\partial\varphi$;
- b) Δ est en position générale par rapport à φ , i.e. la restriction φ_Δ de φ à Δ est une fonction de Morse stricte au sens de 1.1.

Un tel disque est dit *régulier* si $\Delta \cap \partial\Pi = \partial\Delta$.

Un disque régulier Δ découpe Π en deux sous-variétés de Poincaré Π' et Π'' qui seront des variétés différentiables à coins. Grâce à un lissage (arbitrairement petit) de ces coins, et en prenant les restrictions de φ , on obtiendra deux variétés de Poincaré étalonnées (Π', φ') et (Π'', φ'') obtenues par *découpage de (Π, φ) suivant Δ* .

Pour montrer que Π est un cube, il suffira alors de montrer qu'il en est ainsi pour Π' et Π'' . On remarquera aussi que si Π'' est un cube, on obtiendra φ' en modifiant φ par isotopie: en effet Π sera isotope à Π' par une isotopie à support dans un voisinage Ω de Π'' , difféomorphe à \mathbb{R}^3 .

La procédure s'étend aux découpages multiples suivant une famille finie de disques réguliers deux à deux disjoints. Compte tenu du théorème A, la preuve de la conjecture est donc ramenée au:

Théorème B. *Toute variété de Poincaré étalonnée de genre $g(\varphi) > 0$ peut être découpée en un nombre fini de variétés de Poincaré étalonnées planaires.*

C'est évidemment ici que se situe la plus grosse difficulté du travail; le problème consiste à construire une famille convenable de disques réguliers.

1.5. Systèmes réducteurs de disques. Considérons une variété de Poincaré étalonnée (Π, φ) de genre $g(\varphi) > 0$. Soit $\mathcal{D} = (\Delta_j)_{j \in J}$ une famille finie de disques réguliers deux à deux disjoints.

Soit $L \in \mathcal{L}_\varphi$ une feuille fixée. Pour tout j , l'intersection $L \cap \Delta_j$ est une famille de courbes dont toute composante connexe a au plus un point multiple (en fait double!). Alors

$$G(L, \mathcal{D}) = \bigcup_{j \in J} (L \cap \Delta_j)$$

est un système fini de courbes de L qui définit un graphe fini dessiné sur L ; on désigne par \tilde{L} la surface (régulière ou singulière, connexe ou non) obtenue en coupant L le long de $G(L, \mathcal{D})$.

On dira que:

- a) \mathcal{D} est un *système réducteur* pour L (ou \mathcal{D} *réduit* L) si toute composante connexe de \tilde{L} est plane.
- b) \mathcal{D} est un *système réducteur* de φ (ou \mathcal{D} *réduit* φ) si \mathcal{D} réduit toute feuille $L \in \mathcal{L}_\varphi$.

Evidemment le théorème B découle de:

1.6. Théorème. *Toute variété de Poincaré étalonnée (Π, φ) de genre $g(\varphi) > 0$ admet un système réducteur de disques.*

Le plan de travail est le suivant:

Au §2 on reprend et précise certaines notions et constructions évoquées au §1, notamment laminations associées et découpages.

Les §3 et 4 sont consacrés à la preuve du théorème B. Cette preuve est faite en deux temps: au §3 on introduit une notion de système réducteur de sphères dont on n'exige pas qu'elles soient disjointes. On les sépare au §4 puis on revient aux systèmes réducteurs de disques.

Au §5, on prouve le théorème A.

2. GÉNÉRALITÉS SUR LAMINATIONS ET DÉCOUPAGES

Avant de partir dans la preuve du théorème B à la section 3, nous revenons donc sur certaines définitions et constructions évoquées dans l'introduction.

On se donne donc une variété de Poincaré étalonnée:

$$\Pi \xrightarrow{\theta} W \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

On désigne par \mathcal{F}_φ et \mathcal{L}_φ le feuilletage sur W et la lamination sur Π induites par φ . On désigne par $Sing(\mathcal{L}_\varphi)$ l'ensemble fini des points singuliers de la lamination. Pour chaque $\sigma \in Sing(\mathcal{L}_\varphi)$ on choisit une carte locale $\Omega_\sigma(x, y, z)$ centrée en σ et vérifiant $dz = \varphi^*dt$; on suppose ces cartes locales deux à deux disjointes et on désigne leur réunion par Ω .

Enfin, on introduit un champ de vecteurs Z sur W tel que $d\varphi(Z) = 1$; c'est un champ transverse à \mathcal{F}_φ qui préserve \mathcal{F}_φ . Evidemment il n'est pas complet, mais on supposera qu'il est tangent à $\partial\Pi$ en dehors de Ω .

2.1. Définitions. Rappelons qu'une feuille $L \in \mathcal{L}_\varphi$ est tout simplement une composante connexe de $\tilde{L} \cap \Pi$ avec $\tilde{L} \in \mathcal{F}_\varphi$. Comme L est fermée dans W , la feuille L est compacte. Elle passe par, au plus, une singularité $\sigma \in Sing(\mathcal{L}_\varphi)$; si c'est le cas, on dira que c'est une feuille *singulière*, *extrémale* ou *feuille-selle* suivant la nature de σ .

La lamination \mathcal{L}_φ a un nombre fini de feuilles singulières, toutes les autres sont dites *régulières*.

Pour définir le genre des feuilles et décrire la structure locale de \mathcal{L}_φ , nous introduisons pour chaque feuille L un système fondamental de *voisinages canoniques*, désignés par $\mathcal{C}(L, \varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$. Donner une définition abstraite de ces voisinages serait fastidieux, nous les décrirons plutôt au cas par cas. On a deux premières observations:

- 2.2. Lemme.** a) Pour toute feuille $L \in \mathcal{L}_\varphi$, on a $\partial L = \partial\Pi \cap L \neq \emptyset$;
b) Si L est régulière, L admet des voisinages canoniques de la forme $\mathcal{C}(L, \varepsilon) \cong L \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ feuilletés trivialement.

Démonstration. Pour a) il faut montrer que \mathcal{L}_φ n'admet pas de feuille L qui soit une surface fermée. Effectivement, dans le cas contraire, L disconnecterait Π et serait le bord d'une sous-variété Q , la restriction $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}$ de φ à Q serait une submersion telle que $\varphi(\partial Q) = \varphi(L)$ serait réduite à un point impliquant $\varphi(Q) = \text{cte}$.

Le point b) découle immédiatement du fait que \mathcal{F}_φ est simple et que Z est tangent à $\partial\Pi$ au voisinage de ∂L . On obtient $\mathcal{C}(L, \varepsilon)$ comme image de $L \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ par le flot ϕ engendré par Z . \square

Bien sûr toute composante connexe de ∂L est une feuille de la lamination $\mathcal{L}_{\partial\varphi}$ définie par $\partial\varphi$ sur $\mathbb{S}^2 = \partial\Pi$; une composante non triviale

est donc un cercle ou un joint de deux cercles. Passons à la description des voisinages canoniques pour les feuilles singulières.

2.3. Cas des feuilles singulières extrémales. Considérons le cas où $\sigma \in \text{Sing}(\mathcal{L}_\varphi)$ est un minimum de $\partial\varphi$ et soit Ω_σ la carte locale au voisinage de σ introduite plus haut. La trace $\partial\Pi \cap \Omega$ est le paraboloïde $z = x^2 + y^2$. Il découpe Ω en deux regions:

$$\Omega^+ \text{ définie par } z \geq x^2 + y^2 \text{ et } \Omega^- \text{ définie par } z \leq x^2 + y^2.$$

Il y a alors visiblement exactement deux cas possibles:

2.3.1. $\Omega \cap \Pi = \Omega^+$. On dira que Π est *située au dessus de $\partial\Pi$ au voisinage de σ* . Cela signifie que σ est aussi un minimum pour φ ; c'est un *minimum absolu* de \mathcal{L}_φ .

Dans ce cas $L(\sigma) = \{\sigma\}$ et Ω^+ est un voisinage ouvert saturé de $L(\sigma)$ feuilleté par disques. Les voisinages canoniques seront les cubes feuilletés:

$$\mathcal{C}(L(\sigma), \varepsilon) = \Omega^+ \cap \varphi^{-1}([0, \varepsilon])$$

2.3.2. $\Omega \cap \Pi = \Omega^-$. On dira que Π est *située en dessous de $\partial\Pi$ au voisinage de σ* . Le point σ n'est plus un minimum pour φ ; c'est un *minimum apparent* de \mathcal{L}_φ .

En premier lieu on remarque que la feuille $L(\sigma)$ est une surface à bord usuelle, σ en est un point intérieur. Et pour ce qui est des voisinages canoniques, la situation est complémentaire de la précédente. Le voisinage $\mathcal{C}(L(\sigma), \varepsilon)$ sera obtenu en "évidant" un produit $L(\sigma) \times [-\varepsilon, \varepsilon] \subset W$ construit par intégration du champ Z :

$$(L(\sigma), \varepsilon) = L(\sigma) \times [-\varepsilon, \varepsilon] - \overset{\circ}{\Omega}^+$$

On retiendra surtout:

2.3.3. i) Toutes les feuilles contenues dans $\mathcal{C}(L(\sigma), \varepsilon)$ sont de même genre;

ii) si σ est un minimum apparent, il existe des feuilles $L' \subset \mathcal{C}(L(\sigma), \varepsilon)$ telles que $\pi_1(L') \rightarrow \pi_1(\mathcal{C}(L(\sigma), \varepsilon))$ a un noyau non trivial.

2.4. Cas des feuilles-selles. Passons au cas où $\sigma \in \text{Sing}(\mathcal{L}_\varphi)$ est un point-selle. A nouveau on se place dans Ω_σ , la trace $\Omega_\sigma \cap \partial\Pi$ est définie par $z = x^2 - y^2$; on définit Ω^+ et Ω^- comme en 2.3.

Nous nous restreindrons au cas où $\Pi \cap \Omega = \Omega^+$, i.e. Π est située au dessus de $\partial\Pi$ au voisinage de σ (le cas $\Pi \cap \Omega = \Omega^-$ s'obtenant par analogie).

2.4.1. Faisons d'abord une description locale et pour cela, designons par $(\omega_t)_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]}$ les plaques de φ dans Ω_σ . L'intersection:

$$\Pi \cap \omega_t$$

est un disque pour $t > 0$; un joint de deux disques pour $t = 0$ et une somme disjointe de deux disques pour $t < 0$.

En particulier $L(\sigma)$ est une feuille singulière, disconnectée localement par σ . C'est aussi un retracte par déformation de la surface usuelle à bord $F = L(\sigma) \cup \omega_0$. Le genre de $L(\sigma)$ est alors bien défini par $g(L) = g(F)$.

2.4.2. *Typologie des feuilles-selles.* On se rappelle que puisque σ est une selle de $\partial\varphi$, une des composantes connexe de $\partial L(\sigma)$ est singulière, c'est un joint de deux cercles $\beta = \beta' * \beta''$. Les feuilles-selles vont alors se répartir en trois classes que l'on peut caractériser par la nature d'un système fondamental de voisinages connexes $\mathcal{C}(\beta)$ de β dans $L(\sigma)$.

Concrètement on dira que:

i) $L(\sigma)$ est de *type I* si σ ne disconnecte pas $L(\sigma)$. En coupant $L(\sigma)$ en σ on obtient donc une surface connexe $\tilde{L}(\sigma)$ avec deux coins σ' et σ'' appartenant à deux composantes connexes (eventuellement confondues) $\tilde{\beta}'$ et $\tilde{\beta}''$ de $\partial\tilde{L}(\sigma)$. En lissant ces coins, on voit que $\tilde{L}(\sigma)$ est une surface à bord usuelle et on retrouve $L(\sigma)$ en identifiant σ' et σ'' . Les voisinages $\mathcal{C}(\beta)$ annoncés seront obtenus de même à partir de voisinages $\mathcal{C}(\tilde{\beta})$ de $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}' \cup \tilde{\beta}''$ dans $L(\sigma)$.

Il faut encore distinguer deux cas:

i.a) $\tilde{\beta}' = \tilde{\beta}'' = \tilde{\beta}$; tout voisinage $\mathcal{C}(\tilde{\beta})$ est un anneau et $\mathcal{C}(\beta)$ obtenu par identification de σ' et σ'' est un pantalon singulier qui est encore une surface plane.

En coupant $L(\sigma)$ en σ on diminue le nombre de cercles plongés dans $\partial\mathcal{L}(\sigma)$, on dira que σ et $L(\sigma)$ sont de *type (I,b)*. On notera que

$$g(L(\sigma)) = g(\tilde{L}(\sigma)).$$

i.b) $\tilde{\beta}' \neq \tilde{\beta}''$; tout voisinage $\mathcal{C}(\tilde{\beta})$ dans $\tilde{L}(\sigma)$ sont des pantalons et $\mathcal{C}(\beta)$ obtenu par identification de σ' et σ'' est une surface singulière de genre 1. En coupant $L(\sigma)$ en σ on diminue le genre:

$$g(\tilde{L}(\sigma)) = g(L(\sigma)) - 1$$

On dira que σ et $L(\sigma)$ sont de *type (I,g)*.

ii) $L(\sigma)$ est de *type II* si σ disconnecte $L(\sigma)$ donc coupe $L(\sigma)$ en deux surfaces $L'(\sigma)$ et $L''(\sigma)$ (surfaces usuelles après un lissage de leurs coins σ' et σ'') vérifiant

$$g(L'(\sigma)) + g(L''(\sigma)) = g(L(\sigma)).$$

Tout voisinage $\mathcal{C}(\beta)$ est un joint de deux cylindres.

2.4.3. *Voisinages canoniques de $L(\sigma)$.* Pour les feuilles-selles on obtiendra des voisinages canoniques en procédant comme en 2.3.2 mais en prenant la surface F introduite en 2.4.1 à la place de $L(\sigma)$. On considère les produits $F \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ dans W (construits à l'aide de Z) puis on pose:

$$\mathcal{C}(L(\sigma), \varepsilon) = F \times [-\varepsilon, \varepsilon] - \overset{\circ}{\Omega}^-$$

Pour décrire rapidement ces voisinages on introduit les surfaces de niveau:

$$\mathcal{C}_t(L(\sigma), \varepsilon) = \mathcal{C}(L(\sigma), \varepsilon) \cap \varphi^{-1}(t), \quad , \quad t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

i) Si $L(\sigma)$ est de type I, alors \mathcal{C}_t est connexe pour tout t , c'est une feuille de \mathcal{L}_φ . En outre pour tout $t \geq 0$ on a:

$$g(\mathcal{C}_t) = g(L(\sigma))$$

Par contre, pour $t < 0$:

$$g(\mathcal{C}_t) = \begin{cases} g(L(\sigma)) & \text{si } \sigma \text{ est de type (I,b)} \\ g(L(\sigma)) - 1 & \text{si } \sigma \text{ est de type (I,g)} \end{cases}$$

ii) Si $L(\sigma)$ est de type II, \mathcal{C}_t est encore une feuille pour $t \geq 0$, mais c'est la réunion de deux feuilles distinctes \mathcal{C}'_t et \mathcal{C}''_t pour $t < 0$. Suivant la valeur de t on a:

$$g(\mathcal{C}_t) = g(L(\sigma))$$

$$g(\mathcal{C}'_t) + g(\mathcal{C}''_t) = g(L(\sigma))$$

De toutes ces descriptions et classifications, on retiendra surtout les deux faits suivants:

2.5. Deux propriétés. i) La nature d'un point-selle σ (et donc de la feuille $L(\sigma)$) est caractérisé par la forme des voisinages $\mathcal{C}(\beta)$ de la composante singulière β de $\partial L(\sigma)$.

ii) Pour tout voisinage canonique $\mathcal{C}(L, \varepsilon)$ et toute feuille $L' \subset \mathcal{C}(L, \varepsilon)$ on a:

$$\pi_1(L') \rightarrow \pi_1(\mathcal{C}(L, \varepsilon)) \text{ est injectif et } g(L') \leq g(L).$$

En particulier le genre $g(L(x))$ où $L(x)$ est la feuille passant par $x \in \Pi$ est une fonction semi-continue superieurement sur le compact Π . Elle est donc bornée.

2.6. Définition. Si (Π, φ) est une variété de Poincaré étalonnée on appelle *genre* de φ (ou de \mathcal{L}_φ) le nombre:

$$g(\varphi) = \sup_{L \in \mathcal{L}_\varphi} g(L).$$

Dans le cours de la preuve du théorème B, on aura besoin à certains moments de procéder par récurrence sur le genre des feuilles: de réduire une feuille $L \in \mathcal{L}_\varphi$ en une feuille \hat{L} de genre inférieur mais appartenant à un autre étalonnage $\hat{\varphi}$. On utilise pour cela la procédure d'incision qui suit.

2.7. Incision suivant un disque Δ : description. i) Soit $A \subset \Pi$ un disque plongé dans l'intérieur de Π . On relie un point N de A , extremum pour $\varphi|_A$, à $\partial\Pi$ par un chemin simple λ . Le complexe $\lambda \cup A$ admet un voisinage difféomorphe à \mathbb{R}^3 et d'après le théorème de Schoenflies, tout voisinage tubulaire Θ de $\lambda \cup A$ est un cube dont le bord $\partial\Theta$ est une sphère S_A que l'on peut supposer réunion de deux hémisphères (disques) S_A^\pm tels que:

a) $S_A^+ = S_A \cap \partial\Pi$;

b) $\Delta = S_A^-$ est un disque régulier $(\Delta, \partial\Delta) \subset (\Pi, \partial\Pi)$.

Le disque Δ découpe Π en deux sous-variétés de Poincaré $\hat{\Pi}$ et Θ . Comme la deuxième est par construction un cube, $\hat{\Pi}$ est difféomorphe à Π et la restriction $\hat{\varphi}$ de φ à $\hat{\Pi}$ est, après lissage, un étalonnage de Π , modifié de φ par isotopie, que l'on dira aussi *obtenu par incision de Π suivant le disque A* .

ii) Supposons alors le disque A transverse à une feuille L et soit α un cercle plongé dans $A \cap L$. Pour un choix convenable de Θ le disque $\Delta = S_A^-$ intersectera L suivant deux cercles α' et α'' isotopes à α dans L . Bien plus $\hat{L} = L \cap \hat{\Pi}$ sera une feuille ou réunion de feuilles de $\mathcal{L}_{\hat{\varphi}}$,

ayant le type d'homotopie de la surface obtenue en coupant L le long de α .

De façon plus précise, on a:

- a) Si α découpe L en une surface connexe L' alors \hat{L} sera une feuille de $\mathcal{L}_{\hat{\varphi}}$ et on aura:

$$g(\hat{L}) = g(\hat{L}')$$

- b) Si α découpe L en deux sous-surfaces L' et L'' alors \hat{L} aura deux composantes connexes \hat{L}' et \hat{L}'' ayant le type d'homotopie respectif de L' et L'' et on aura:

$$g(\hat{L}') + g(\hat{L}'') = g(L') + g(L'') = g(L)$$

3. DISQUES ET SPHÈRES ESSENTIELS

Cette section est une étape intermédiaire dans la preuve du théorème B, on y introduit des familles de disques et sphères appelés *essentiels* à partir desquels, au §4, on construira les systèmes réducteurs de disques nécessaires pour prouver le théorème B.

On fixe une variété de Poincaré étalonnée (Π, φ) ; tous les disques et sphères considérés seront supposés plongés dans l'intérieur de Π et les sphères seront supposées en position générale au sens de (1.1).

Pour les disques on considère des plongements de paires:

$$(A, \partial A) \subset (\Pi, F)$$

où F sera une surface plongée dans Π (la plupart du temps une feuille de \mathcal{L}_{φ}). Ce disque sera en position générale par rapport à φ si A est transverse à L et $\varphi|_A$ est une fonction de Morse stricte. Un tel disque sera *régulier* si $A \cap F = \partial A$.

3.1. Définition. Soit $L \in \mathcal{L}_{\varphi}$. Un disque $(A, \partial A) \subset (\Pi, L)$ sera *essentiel* pour L si le cercle $\alpha = \partial A$ ne disconnecte pas L et la surface \tilde{L} obtenue en coupant L le long de α vérifie:

$$g(\tilde{L}) = g(L) - 1$$

Notre premier résultat sera le:

3.2. Théorème. *Toute feuille $L \in \mathcal{L}_\varphi$ admet un disque essentiel.*

Ce disque sera régulier si L est une feuille régulière à bord connexe ou une feuille-selle de type (I,g) i.e. une feuille dont le point singulier σ ne disconnecte pas $L(\sigma)$ mais modifie le genre. Il ne sera pas régulier en général.

Paradoxalement la preuve est plus simple pour certaines feuilles singulières.

3.3. Proposition. *Toute feuille selle de type (I,g) admet un disque essentiel.*

Démonstration. Soient $L(\sigma)$ une feuille-selle et $\beta = \beta' * \beta''$ la composante singulière de ∂L ; chacun des cercles β' et β'' définit une classe non nulle dans $H_1(L)$. En outre la courbe β découpe $\partial\Pi$ en trois morceaux B_0 , B' et B'' dont les deux derniers sont des disques plongés dans $\partial\Pi$ vérifiant:

- a) $\partial B' = \beta'$ et $\partial B'' = \beta''$;
- b) $B' \cap B'' = \{\sigma\}$.

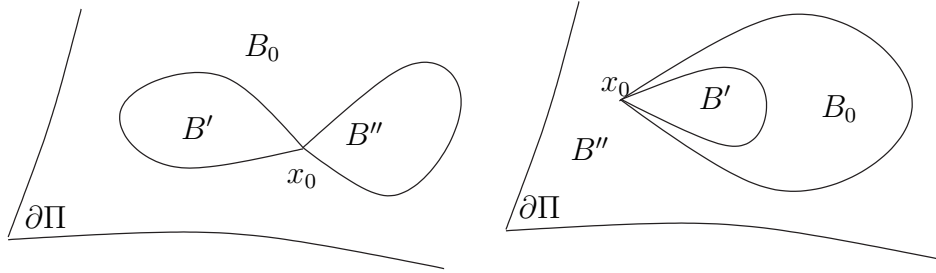


FIGURE 1

La configuration globale de L est représentée par la figure suivante:

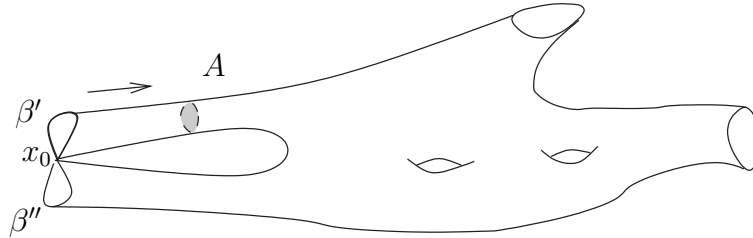


FIGURE 2

On obtient A en déplaçant B' dans $\overset{\circ}{\Pi}$ par une isotopie à support dans une carte locale contenant B' et préservant L . \square

Il nous reste à considérer trois types de feuilles:

- a) les feuilles régulières;
- b) les feuilles-selle de type (I,b);
- c) les feuilles-selle de type II.

C'est le cas a) qui sera le plus complexe, les deux autres s'en déduiront en (3.9).

3.4. Fermeture F de L . Prolongement de l'inclusion $j : L \rightarrow \Pi$. Soit L une feuille régulière, sa *fermeture* est la surface compacte fermée F de même genre que L . On plonge une fois pour toutes L dans F .

Soit $\{\beta_1, \dots, \beta_l\}$ l'ensemble des composantes connexes de ∂L . Pour chaque j , β_j borde un disque $\Delta_j \subset F$ et si on fixe $z_0 \in \partial \Pi - \partial L$, alors pour tout j , il existe exactement un disque $B_j \subset \partial \Pi$ tel que: $\partial B_j = \beta_j$ et $z_0 \in B_j$. On prolonge alors l'inclusion $j : L \rightarrow \Pi$ en une application f de F dans Π en paramétrant chaque disque $B_j \subset \partial \Pi$ à l'aide du disque $\Delta_j \subset F$ correspondant; l'application

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & \Pi \\ \uparrow & \nearrow j & \\ L & & \end{array}$$

est DM-différentiable; c'est une DM-immersion mais ce n'est pas un DM-plongement par défaut d'injectivité. On remarquera aussi que F ne coïncide pas avec le bord de l'une ou l'autre variété obtenue en coupant Π le long de L .

On dira qu'un plongement $\tilde{f} : F \rightarrow \overset{\circ}{\Pi}$ coïncide essentiellement avec j s'il existe une famille de disques ouverts $\tilde{\Delta}_j \supset \Delta_j$, deux à deux disjoints tels que:

$$\tilde{f}(z) = f(z) = j(z)$$

pour tout $z \notin \bigcup_j \tilde{\Delta}_j$.

3.5. Lemme. *Pour toute feuille L régulière, la DM-immersion $f : F \rightarrow \Pi$ peut être approchée par un plongement \tilde{f} qui coïncide essentiellement avec j .*

Démonstration. Il suffit en fait de remédier au défaut d'injectivité. Pour cela on remarque que, vu le choix des disques B_j en (3.4), $B_j \cap B_k \neq \emptyset$ implique que les disques B_j et B_k sont emboîtés i.e. on a $B_j \subset B_k$ ou $B_k \subset B_j$. On ordonne les disques B_j par inclusion, il y a un élément minimal, mettons B_1 , on le déplace vers l'intérieur de Π au moyen d'une isotopie locale à support dans une carte locale contenant B_1 (comme dans la preuve de (3.3)). En répétant un nombre fini de fois cette opération, on aboutira à une application \tilde{f} injective qu'il suffira de lisser.

Elle coïncidera essentiellement avec j car toutes les isotopies locales utilisées peuvent être choisies dans un voisinage arbitrairement petit de $\partial\Pi$. \square

Désormais nous identifions la fermeture F avec son image par \tilde{f} dans Π . Considérons l'ensemble \mathcal{H} de toutes les applications différentiables $h : D^2 \rightarrow \Pi$ tels que h est transverse à F et $[\partial h] \in \pi_1(F)$ est non nulle (avec $\partial h = h|_{\partial D^2}$).

3.6. Lemme. *Il existe $h_0 \in \mathcal{H}$ telle que $h_0^{-1}(F) = \partial D^2$.*

Démonstration. Pour tout $h \in \mathcal{H}$, on désigne par $c(h)$ le nombre de composantes connexes de $h^{-1}(F)$. Soit $h_0 \in \mathcal{H}$ tel que $c(h_0)$ est minimal. Il suffit de montrer que $c(h_0) = 1$.

Or dans le cas contraire, l'ensemble $K(h_0) = \{\gamma_0 = \partial D^2, \gamma_1, \dots, \gamma_l\}$ des composantes connexes de $h_0^{-1}(F)$ est une famille de cercles plongés dans D^2 et deux à deux disjoints. Cette famille découpe D^2 en un nombre fini de surfaces dont l'une au moins est un disque Δ dont le bord $\partial\Delta$ est un des éléments de $K(h_0)$, mettons γ_l .

Si $[\gamma_l] \in \pi_1(F)$ était nulle, il existerait une application $\lambda : \Delta \rightarrow F$ coïncidant avec h_0 sur $\partial\Delta$. En remplaçant $h_0|_\Delta$ par λ , on obtiendrait une application:

$$h'_0 : D^2 \rightarrow \Pi$$

telle que $\partial h'_0 = \partial h_0$ et qui, mise transverse à F vérifierait

$$c(h'_0) = c(h_0) - 1;$$

ce qui est contradictoire avec le choix de h_0 . Donc la restriction h_Δ de h à Δ appartient à \mathcal{H} , elle vérifie $c(h_\Delta) = 1$, encore par choix de h_0 on aura $h_\Delta = h_0$ d'où le résultat. \square

3.7. Lemme. *Il existe un disque régulier:*

$$(A, \partial A) \subset (\Pi, F)$$

tel que $[\partial A] \in \pi_1(F)$ est non nulle.

Démonstration. Considérons l'application h_0 fournie par le lemme 3.6; son image $h_0(D^2)$ est entièrement contenue dans l'une des deux sous-variétés obtenues en coupant Π le long de F que l'on désigne par Q . La surface F est une composante connexe de ∂Q et le lacet ∂h_0 définit un élément non nul du noyau de

$$\pi_1(i) : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(Q)$$

induit par l'inclusion canonique $i : F \rightarrow Q$.

Par le "Loop Theorem" de Dehn-Papakyriakopoulos-Stallings, il existe un disque régulier

$$(A, \partial A) \subset (Q, F)$$

tel que $[\partial A] \in \pi_1(F)$ est non nul. \square

On arrive au résultat pour les feuilles régulières.

3.8. Proposition. *Toute feuille régulière $L \subset \mathcal{L}_\varphi$ admet un disque essentiel.*

Démonstration. Elle est encore en deux temps.

Considérons le disque A fourni par 3.7; d'après 3.5 on peut supposer que $\partial A = F \cap A$ est contenu dans L et la classe $[\partial A]$ de ∂A dans $\pi_1(L)$ est toujours non nulle, par contre $A \cap L$ n'est plus nécessairement réduit à ∂A . Il y a deux cas:

- a) $\alpha = \partial A$ ne disconnecte pas L mais découpe L en une surface L' de genre $g(L') < g(L) - 1$ et donc A est essentiel pour L ;
- b) α coupe F et donc aussi L en deux surfaces F' et F'' (resp. L' et L'') toutes deux de genre non nul, puisque la classe de α est non nulle dans $\pi_1(F)$.

A partir de là, on procède par récurrence sur le genre de L . On a $g(L) \geq 2$. On applique la procédure d'incision de Π suivant le disque A décrite en (2.7). On obtient une variété étalonnée $(\hat{\Pi}, \hat{\varphi})$ avec $\hat{\Pi} \subset \Pi$ et des feuilles \hat{L}' et \hat{L}'' de la lamination associée $\mathcal{L}_{\hat{\varphi}}$, contenues dans L et ayant le type d'homotopie respectif de L' et L'' . Par hypothèse de récurrence, \hat{L}' admet un disque essentiel:

$$(B, \partial B) \subset (\hat{\Pi}, \hat{L}')$$

Comme $\hat{\Pi} \subset \Pi$, ce sera également un disque essentiel pour L . \square

3.9. Corollaire. *Toute feuille-selle de type (I, b) ou II admet un disque essentiel.*

Démonstration. Soit σ la selle appartenant à L , on utilise très fortement le fait que σ ne modifie pas le genre. On considère un disque régulier $(\Delta, \partial\Delta) \subset (\Pi, \partial\Pi)$ contenu dans une carte locale au voisinage de σ . On utilise Δ pour déformer φ par isotopie comme en (3.8).

Ici la variété $\hat{L} \subset L$ obtenue par déformation sera connexe ou non, mais régulière et de même genre global que L . On lui applique le résultat de 3.8. Le disque $(B, \partial B)$ ainsi obtenu sera essentiel pour L \square

3.10. Définition. Soit $L \in \mathcal{L}_\varphi$. Une famille finie $\mathcal{D} = (A_j)_{j \in J}$ de disques deux à deux disjoints essentiels pour L sera dite *complète* si la famille de cercles $\{\partial A_j\}$ découpe L en surfaces planaires (une ou plusieurs).

3.11. Théorème. *Toute feuille $L \in \mathcal{L}_\varphi$ admet une famille complète de disques essentiels.*

Démonstration. La preuve est par récurrence sur le genre; pour les feuilles de genre 1, c'est le théorème 3.2. Soit donc L de genre $g(L) > 1$ et soit $(A, \partial A)$ le disque essentiel pour L fourni par 3.2. Par l'incision de Π suivant A , on construit un étalonnage $(\hat{\Pi}, \hat{\varphi})$ ayant une feuille \hat{L} composante connexe de la trace de L sur $\hat{\Pi}$ et de genre

$$g(\hat{L}) = g(L) - 1.$$

Par application de l'hypothèse de récurrence, cette feuille admet une famille complète $\{B_1, \dots, B_l\}$; par construction $B_j \subset \Pi$; $B_j \cap A = \emptyset$ donc (A, B_1, \dots, B_l) est une famille complète pour L . \square

Pour des raisons qui apparaîtront au §4, le passage des disques essentiels aux disques réducteurs exigera une mutation des disques en sphères.

3.12. Définition. On appellera *famille de sphères essentielles* pour L toute famille $\mathcal{S} = (S_j)$ de sphères plongées deux à deux disjointes et contenant une famille \mathcal{D} complète de disques essentiels pour L .

3.13. Théorème. *Pour toute feuille $L_0 \in \mathcal{L}_\varphi$ il existe une famille finie $\mathcal{S} = (S_j)$ de sphères plongées deux à deux disjointes et un voisinage saturé M de L_0 dans Π tels que \mathcal{S} est un système complet de sphères essentielles pour toute feuille $L \subset M$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{D} = (A_j)$ une famille complète de disques essentiels pour L_0 fournie par 3.11. Un voisinage tubulaire $\epsilon(A_j)$ est un cube et son bord S_j est une sphère qu'on peut supposer transverse à L_0 et telle que $S_j \cap L_0$ est isotope à ∂A_j . On peut aussi supposer que ces sphères sont deux à deux disjointes. Donc \mathcal{S} est une famille complète de sphères essentielles pour L_0 . Par transversalité, et grâce au fait que

$$g(L) \leq g(L_0)$$

pour L voisine de L_0 (cf. (2.5.ii)), ce sera vrai pour les feuilles voisines. \square

On dira que \mathcal{S} est un système de sphères essentielles pour M .

4. SYSTÈMES REDUCTEURS - PREUVE DU THÉORÈME B

Soit (Π, φ) une variété de Poincaré étalonnée de genre $g(\varphi) > 0$. L'objectif ici est de construire un système réducteur de disques au sens de la définition ??, le système sera obtenu au terme d'un parcours en trois étapes:

a) On réunit un nombre fini de systèmes de sphères essentielles données en (3.12) et (3.13). Leur trace sur toute feuille L découpera cette feuille en surfaces planaires. Ce sera un système de sphères faiblement réducteur (voir 4.1).

On pourra supposer que toutes ces sphères sont deux à deux transverses, mais à priori elles ne seront pas disjointes.

b) Pour faire de ce système (ou famille) de sphères un système réducteur, il faudra les disjointer: ce sera le but des deux procédures de *scindement* et d'*ajustement* (voir 4.5 et 4.6).

c) Finalement, on transformera le système réducteur de sphères en un système réducteur de disques (voir 4.9).

Le recours aux systèmes de sphères est nécessaire pour passer l'étape 2: essayer de réaliser une opération analogue directement avec des systèmes de disques semble impossible et d'ailleurs introduirait inévitablement des sphères.

On fixe (Π, φ) de genre $g(\varphi) > 0$. A nouveau toutes les sphères et disques considérés seront supposés plongés dans $\overset{\circ}{\Pi}$ et en position générale par rapport à φ au sens de §3.

4.1. Définitions. a) Soit $\mathcal{S} = (S_j)$ une famille finie de sphères deux à deux transverses. La famille de courbes $G(L, \mathcal{S}) = \bigcup_j (S_j \cap L)$ est un graphe fini G dessiné sur L ; il découpe L en une famille finie de sous-surfaces. On dira que \mathcal{S} est un *système faiblement réducteur* pour L si toutes ces surfaces sont planaires. On dira aussi que \mathcal{S} *réduit faiblement* L .

b) Plus généralement soit M un fermé saturé de Π , une famille \mathcal{S} de sphères deux à deux transverses *réduit faiblement* M si elle réduit faiblement toute feuille $L \subset M$.

c) Ces systèmes seront *réducteurs* si les sphères sont deux à deux disjointes.

4.2. Remarque. Evidemment un système de sphères $\mathcal{S} = (S_j)$ qui réduit une feuille L réduit également (i.e. découpe en surfaces planaires) toute sous-surface $F \subset L$. On a alors un critère simple et facile à utiliser: le système réduit L si et seulement si il réduit toute sous-surface $F \subset L$ de genre 1 homéomorphe au tore troué T_*^2 .

4.3. Exemples. a) Si $\mathcal{S} = (S_j)$ est un système complet de sphères essentielles pour un fermé saturé $M \subset \Pi$, alors \mathcal{S} est en particulier un système réducteur pour M .

b) Soit alors $\{M^{(1)}, \dots, M^{(r)}\}$ un recouvrement de Π par des fermés saturés $M^{(i)}$ admettant chacun un système complet $\mathcal{S}^{(i)}$ de sphères essentielles. Quitte à modifier certaines de ces sphères par des isotopies arbitrairement petites, on pourra supposer que toutes les sphères du système:

$$\mathcal{S} = \bigcup_i \mathcal{S}^{(i)}$$

sont deux à deux disjointes ou transverses. Donc \mathcal{S} sera un système faiblement réducteur pour Π .

Le problème c'est qu'il ne sera pas réducteur tout court, car ses éléments ne seront pas deux à deux disjointes.

Il faut introduire un processus permettant de transformer les systèmes faiblement réducteurs de sphères en systèmes réducteurs. Ce processus se fera en deux étapes: scindement et ajustement.

4.4. Définition. *Scindement d'une sphère S le long d'un disque $\Delta \subset \Sigma$ contenu dans une sphère transverse Σ .*

Soit (S, Σ) un couple de sphères transverses et soit Δ un disque de Σ tel que $\Delta \cap S = \partial\Delta$. La sphère S partage Π en deux sous-variétés; nous désignons par Q celle qui contient Δ . Un voisinage tubulaire $\epsilon(\Delta)$

de Δ dans Q découpe Q en deux DM-variétés Q' et Q'' dont les bords sont des DM-sphères. En les lissant, on obtiendra un couple (S', S'') de sphères plongées dont on dira qu'il a été obtenu par *scindement* de S le long de $\Delta \subset \Sigma$.

L'observation suivante est crucial:

4.5. Lemme. *Soit $F \subset L$ un tore troué contenu dans une feuille L . Si la sphère S réduit F il en est de même pour le système (S', S'', Σ) .*

Démonstration. Quitte à bouger F par une petite isotopie, on peut supposer ∂F transverse à Σ de sorte que $F \cap \Sigma$ est une courbe (eventuellement non connexe et singulière) définissant un cycle relatif de $(F, \partial F)$ de classe $[F \cap \Sigma] \in H_1(F, \partial F)$. Il y a deux cas:

- a) $[F \cap \Sigma] \neq 0$, la courbe $F \cap \Sigma$ découpe F en surfaces planaires et la sphère Σ réduit F ;
- b) $[F \cap \Sigma] = 0$ et $F \cap \Sigma$ découpe en surfaces à bord connexe dont exactement une, notée G , est de genre 1, les autres de genre 0 étant alors des disques; en particulier l'inclusion de G dans F est une équivalence d'homotopie.

Quitte à bouger G par une isotopie de L , on pourra alors supposer que:

$$G \cap \epsilon(\Delta) = \emptyset$$

Ceci signifie que la famille de courbes $G \cap S$ qui par hypothèse réduit G n'a pas été modifiée au cours de le scindement. Donc $G \cap S$ est contenu dans $(G \cap S') \cup (G \cap S'')$ ce qui implique que G est aussi réduite par le système (S', S'') . C'est vrai pour F isotope à G . \square

On étend maintenant cette opération à des systèmes de sphères plus complexe.

4.6. Définition. *Ajustement d'un système $\mathcal{S} = (S_j)$ de sphères à une sphère transverse Σ .*

On considère une famille finie $\mathcal{S} = (S_j)$ de sphères deux à deux disjointes et Σ une sphère transverse à toutes les S_j . L'ensemble $\bigcup_j (S_j \cap \Sigma)$ est une famille finie de cercles deux à deux disjoints de Σ . On désigne par $c(\mathcal{S}, \Sigma)$ le nombre de ces cercles et avec la procédure habituelle on montre qu'il existe un disque $\Delta \subset \Sigma$ et un indice j_0 tels que:

$$S_{j_0} \cap \Delta = \partial \Delta \text{ et } S_j \cap \Delta = \emptyset \text{ pour } j \neq j_0$$

On scinde S_{j_0} le long de Δ ; on obtient un système

$$\mathcal{S}^{(1)} = (S_1, \dots, S'_{j_0}, S''_{j_0}, S_{j_0+1}, \dots, S_l)$$

qui vérifie: $c(\mathcal{S}^{(1)}, \Sigma) = c(\mathcal{S}, \Sigma) - 1$. Donc en répétant $c(\mathcal{S}, \Sigma)$ -fois le procédé on aboutira à un système de sphères $\hat{\mathcal{S}}$ dont on dira qu'il a été *obtenu par ajustement* de \mathcal{S} à Σ . Sa première qualité est le fait que pour tout $S \in \hat{\mathcal{S}}$, on a:

$$S \cap \Sigma = \emptyset$$

La deuxième qualité de $\hat{\mathcal{S}}$ dérive immédiatement du lemme 4.5, par application du critère de réduction des tores troués 4.2.

4.7. Lemme. *Si $\mathcal{S} = (S_j)$ est un système de sphères réducteur pour un fermé saturé M alors $\hat{\mathcal{S}} \cup \{\Sigma\}$ est également un système réducteur pour M .*

On est maintenant sur la voie pour transformer le système faiblement réducteur \mathcal{S} de Π décrit en 4.3.b) en un système réducteur.

4.8. Théorème. *Il existe un système de sphères réducteur pour Π tout entier.*

Démonstration. On procède en deux temps:

a) Soient M et N deux fermés saturés de Π admettant des systèmes réducteurs de sphères $\mathcal{S} = (S_j)$ et $\mathcal{G} = (\Sigma_i)$. Quitte à déformer les Σ_i par une isotopie arbitrairement petite, on pourra supposer que Σ_i est transverse à S_j pour tout (i, j) et donc que $\mathcal{S} \cup \mathcal{G}$ est un système faiblement réducteur pour $M \cup N$. On ajuste récursivement \mathcal{S} à chacun des sphères Σ_i , le résultat sera un système de sphères qui réduit $M \cup N$ d'après (4.7).

b) On reprend la notation de 4.3.b) et on pose:

$$\tilde{M}^{(j)} = M^{(1)} \cup \dots \cup M^{(j)} = \tilde{M}^{(j-1)} \cup M^{(j)}$$

Alors le procédé a), nous définit de proche en proche un système réducteur de sphères pour $\tilde{M}^{(r)} = \Pi$. \square

Il ne reste plus qu'à transformer le système réducteur de sphères en un système réducteur de disques:

4.9. Théorème. *Tout étalonnage (Π, φ) admet un système de disques réguliers qui réduit Π .*

Démonstration. Soit $\mathcal{S} = (S_j)$ le système réducteur de sphères fourni par (4.8); ces sphères sont deux à deux disjointes. Chaque S_j borde une sous-variété de Poincaré $Q_j \subset \Pi$, pour chaque j , on relie le pôle nord N_j de S_j (le maximum de $\varphi|_{S_j}$) à la sphère $\partial\Pi$ par un chemin simple λ_j tel que $\lambda_j \cap \lambda_k = \emptyset$ si $j \neq k$. Finalement on prend un voisinage

tubulaire Θ_j de $\lambda_j \cup Q_j$ dont le bord $\partial\Theta_j = \Lambda_j$ est une DM-sphère que l'on peut supposer réunion de deux disques tels que:

- a) $\Lambda_j^+ = \Lambda_j \cap \partial\Pi$;
- b) $(\Lambda_j^-, \partial\Lambda_j^-) \subset (\Pi, \partial\Pi)$ est un disque régulier.

Le système $\mathcal{D} = (\Lambda_j^-)$ sera le système réducteur de disques annoncé. \square

5. LAMINATIONS PLANAIRES: PREUVE DU THÉORÈME A

Dans cette dernière section visant à démontrer le théorème A, il sera utile de reprendre la description des laminations \mathcal{L}_φ sous un point de vue légèrement différent.

Pour cela, on transforme le champ de vecteurs Z sur W introduit au début de la section 2 en un champ \hat{Z} tel que:

- a) \hat{Z} est partout tangent à $\partial\Pi$ et sa restriction à $\partial\Pi$ est un champ de gradients sur $\partial\varphi$.

\hat{Z} est transverse à \mathcal{F}_φ donc à \mathcal{L}_φ en dehors des singularités.

Evidemment, \hat{Z} ne préserve pas \mathcal{F}_φ , mais on pourra toujours construire les voisinages $\mathcal{C}(L, \varepsilon)$ des feuilles singulières en utilisant ses courbes intégrales.

5.1. Strates ouvertes et strates fermées. La réunion des feuilles régulières de \mathcal{L}_φ est un ouvert de Π ayant un nombre fini de composantes connexes appelées les *strates ouvertes* de \mathcal{L}_φ .

Soit V une strate ouverte, $]u, v[= \varphi(V)$ et soit L une feuille contenue dans V .

- a) Par intégration de \hat{Z} on construit un difféomorphisme:

$$\psi : L \times]u, v[\rightarrow V$$

qui s'étend évidemment en une application différentiable surjective:

$$\bar{\psi} : L \times [u, v] \rightarrow K = \bar{V} \subset \Pi.$$

On dira que $K = \bar{V}$ est une *strate fermée* de \mathcal{L}_φ contenant L , on le désigne par fois par $K(L)$.

Les strates fermées sont exactement les morceaux obtenus en coupant Π le long des feuilles singulières: ce sont des DM-variétés à bord et à coins.

Posons $K_u = K \cap \varphi^{-1}(u)$ et $K_v = K \cap \varphi^{-1}(v)$. Ce sont des connexes (image par $\bar{\psi}$ de $L \times \{u\}$ et $L \times \{v\}$ appelés les deux *frontières* de K .

Par définition des strates ouvertes, il existe deux singularités $\sigma, \tau \in \text{Sing}(\varphi)$ telles que $\varphi(\sigma) = u$ et $\varphi(\tau) = v$, i.e. $\sigma \in K_u$ et $\tau \in K_v$. En outre on a $K_u \subset L(\sigma)$ et $K_v \subset L(\tau)$ et les inclusions seront des égalités sauf si σ (resp. τ) est une selle de type I auquel cas K_u (resp. K_v) sera seulement une des composantes singulières de $L(\sigma)$ (resp. $L(\tau)$).

5.2. Strates de disques. Si L est un disque D^2 , la strate fermée $K(L)$ sera appelé une *strate de disques*, nous nous proposons ici de donner une description complète de ce type de strates dans le cas où la singularité τ telle que $\varphi(\tau) = v$ est un extremum absolu.

Pour fixer les idées, supposons que τ est un maximum absolu; dans ce cas l'application $\bar{\psi}$ s'écrit:

$$\bar{\psi} : D^2 \times [u, v] \rightarrow K$$

avec $\bar{\psi}_v(D^2 \times \{v\}) = \tau$. Il y a quatre situations possibles suivant la nature de $\bar{\psi}_v$ et de σ .

- a) σ est extremum absolu donc un minimum donc $K_u = L(\sigma) = \{\sigma\}$, alors $\partial K \cong \mathbb{S}^2$ i.e. $K = \Pi$ feuilleté par disques et Π est un cube.
- b) σ est un minimum apparent: $K_u = L(\sigma)$ est un disque et $\sigma \in \overset{\circ}{K}_u$. La strate fermée K est encore un cube feuilleté en disques suivant la figure ??.
- c) σ est une selle de type II et K_u est un disque: c'est une des composantes de $L(\sigma)$ avec $\sigma \in \partial K_u$. La strate est bien sûr un cube.
- d) σ est une selle de type (I,b). Alors $K_u = L(\sigma)$ est un anneau singulier, l'application $\bar{\psi}_u$ consiste à identifier deux points du bord de $D^2 \times \{u\}$. La strate K n'est plus un cube, son groupe fondamental est \mathbb{Z} .

Pour la suite du travail, on va focaliser l'attention sur les extrema apparents; en les éliminant (voir 5.4) on ramènera la preuve du théorème A au cas des laminations par disques.

5.3. Structure semi-locale de φ au voisinage d'un maximum apparent. Soit τ un maximum apparent de \mathcal{L}_φ i.e. un maximum de $\partial\varphi$ qui n'est pas un maximum de φ .

- i) Grâce à la description usuelle des fonctions de Morse sur \mathbb{S}^2 , on voit que τ admet un voisinage $\Sigma \subset \partial\Pi$ qui est un cylindre saturé pour $\mathcal{L}_{\partial\varphi}$ avec deux singularités: τ et un point-selle σ (cf. figure ??).

Puisque τ est un maximum apparent, Π est situé au-dessus de Σ au voisinage de τ donc aussi au-dessus de Σ au voisinage de σ . Comme

conséquence, on voit que les voisinages canoniques $\mathcal{C}(\eta)$ de la composante singulière β de $\partial L(\sigma)$ sont des joints de cylindres. D'après (2.4) et (2.5), on voit que σ est une selle de type (I,b).

ii) Pour simplifier, on suppose que $\varphi(\sigma) = 0$, un voisinage tubulaire Θ de Σ dans Π est homéomorphe au cylindre plein $C \times [0, 1]$ où C est l'anneau $\mathbb{S}^1 \times I$. On plonge ce voisinage tubulaire dans \mathbb{R}^3 de façon à ce que Θ soit situé au-dessus de Σ et φ s'identifie avec la projection sur l'axe \vec{oz} .

Enfin on considère le cube $E \subset \mathbb{R}^3$ bordé par la sphère S réunion des deux disques $A \subset \Sigma$ et B dans le plan $z = 0$ de bord β' . Ce cube est feuilleté en disques par $\varphi \equiv z$. On pose:

$$\hat{\Theta} = \Theta \cup E$$

on a les propriétés suivantes:

- a) $\hat{\Theta}$ est DM-difféomorphe à Θ ;
- b) le plongement $\varepsilon : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \Theta$ d'image Σ est isotope à un plongement $\hat{\varepsilon} : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \hat{\Theta}$ transverse à la projection z .

En termes de variétés étalonnées (Π, φ) , on voit que la construction précédente a consisté à réaliser une somme connexe $\hat{\Pi} = \Pi \sharp E$ (avec $\hat{\Pi}$ difféomorphe à Π après lissage) et à étendre φ en une submersion $\hat{\varphi}$ de $\hat{\Pi}$ sur \mathbb{R} . C'est un étalonnage de Π obtenu en modifiant φ par isotopie. En raison de la condition b) ci-dessus on a

5.3.1. $\hat{\varphi}$ a deux singularités de moins que φ .

En répétant ce processus en nombre fini de fois, on aboutit à

5.4. Proposition. *Tout étalonnage planaire (Π, φ) est isotope à un étalonnage planaire sans extremum apparent*

L'étape suivant est la dernière, elle va consister à montrer que toute lamination planaire sans extremum apparent est une lamination par disques.

Pour cela, on recouvre Π par un nombre fini $\{M_1, \dots, M_r\}$ de voisinages canoniques de feuilles, dont les intersections deux à deux sont vides ou réduites à une feuille régulière.

On fixe une feuille L_0 de \mathcal{L}_φ ; on pourra alors supposer la numérotation choisie de telle sorte que:

- a) $L_0 \subset M_1$;
- b) Tous les ensembles M^j définis par

$$M^j = M_1 \cup \dots \cup M_j = M^{j-1} \cup M_j$$

soient connexes avec $M^R = \Pi$. On désignera par L_j la feuille régulière $M^{j-1} \cap M_j$.

5.5. Lemme. *Si φ n'admet pas d'extremum apparent, alors pour tout j on a une inclusion:*

$$0 \rightarrow \pi_1(L_0) \rightarrow \pi_1(M^j)$$

Démonstration. On remarque tout d'abord que d'après la description des voisinages canoniques faite au §2, on voit que l'absence d'extrema apparent implique que pour toute feuille $L \subset M_j$ on a une injection:

$$(2) \quad 0 \rightarrow \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M_j) \text{ (voir 2.3.3 et 2.5)}$$

On procède par induction sur j . D'après (5.5.1) on a une injection:

$$0 \rightarrow \pi_1(L_0) \rightarrow \pi_1(M_1).$$

Supposons donc qu'on a

$$(3) \quad 0 \rightarrow \pi_1(L_0) \rightarrow \pi_1(M^{j-1})$$

et montrons qu'il en est de même pour l'inclusion de L_0 dans M^j .

Pour cela considérons un lacet α de L_0 homotope à zero dans M^j et soit

$$h : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (\Pi, L_0)$$

une application différentiable vérifiant $h(\partial D^2) = \alpha$ transverse à $L_j = M^{j-1} \cap M_j$ et telle que le nombre $c(h)$ de composantes connexe de $h^{-1}(L_j)$ soit minimal. La famille de cercles $h^{-1}(L_j)$ découpe D^2 en surfaces compactes dont l'une au moins est un disque Δ de bord $\gamma = \partial \Delta$ est une composante connexe de $h^{-1}(L_j)$. Alors:

a) $[\gamma] \in \pi_1(L_j)$ est nulle d'après (5.5.1) ou l'hypothèse de récurrence (5.5.2).

b) Donc $h(D^2) \cap L_j = 0$ par minimalité de $c(h)$.

Ceci implique que $[\alpha] \in \pi_1(L_0)$ est nulle par (5.5.2) et démontre le lemme. \square

Comme $M^r = \Pi$, on en déduit

5.6. Proposition. *Toute lamination planaire sans extremum apparent est une lamination par disques.*

On arrive au bout

5.7. Théorème. *Si (Π, φ) est un étalonnage par disques, alors Π est un cube.*

Démonstration. La preuve est par récurrence sur le nombre $s(\varphi)$ de singularités de φ . Le cas $s(\varphi) = 2$ a été décrit en (5.2.a).

Dans le cas général, remarquons que toute selle est de type II et toute feuille singulière est un joint de deux disques (voir 5.2). On prend τ un maximum de φ , c'est un point singulier adhérent à une strate K par disques décrite en (5.2.c); c'est un cube qui admet un voisinage Ω dans W difféomorphe à \mathbb{R}^3 . On modifie le plongement

$$\theta : \Pi \rightarrow W$$

par une isotopie à support dans Ω et réduisant les deux singularités τ et σ de K . On obtient un étalonnage φ' de Π tel que:

$$s(\varphi') = s(\varphi) - 2$$

On arrive au résultat en un nombre fini d'étapes □

5.8. Remarque finale. On peut évidemment se demander pourquoi on n'a pas procédé à l'élimination des extrema apparents dans le cas des laminations de genre > 0 . La raison en est que dans la somme connexe décrite en (5.3) on modifie la feuille singulière $L(\sigma)$ en collant un disque par son bord sur un des cycles β' de la composante singulière β de $\partial L(\sigma)$. Si l'on applique la même construction à une feuille $L(\sigma)$ de type (I,g) le résultat \tilde{L} ne sera plus une surface puisque les voisinages de σ dans \tilde{L} seront de la forme ??.

Lemme 5.1. *Soient M et N deux fermés saturés de Π admettant des systèmes réducteurs utilisables $\mathcal{S} = (S_j)$ et $\mathcal{G} = (\Sigma_i)$. Alors $M \cup N$ admet un système réducteur utilisable.*

Démonstration. Grace à ?? .ii) on pourra déformer légèrement les éléments de \mathcal{G} pour les rendre transverses à \mathcal{S} et donc on peut supposer que $\mathcal{S} \cup \mathcal{G}$ est un système réducteur pour $M \cup N$.

On ajoute alors succesivement \mathcal{S} à chacune des sphères Σ_i ; le résultat découle de 4.5. \square

Théorème 5.2. *Il existe un système réducteur utilisable pour la variété Π toute entière.*

Démonstration. Par ?? et ?? .i) toute feuille L possède un voisinage fermé saturé T qui admet un système réducteur utilisable \mathcal{S}_T . On recouvre M par un nombre fini de tels voisinages et on applique 5.1 pour obtenir de proche en proche un système réducteur utilisable de

$$\hat{T}_s = T_1 \cup \dots \cup T_s = \hat{T}_{s-1} \cup T_s$$

pour tout s . \square

6. DISQUES ESSENTIELS POUR UNE FEUILLE

Dans cette section, on introduit les objets concrets: des disques plongés dans $\overset{\circ}{\Pi}$ qui permettront plus tard au ?? de ramener l'étude des variétés étalonnées de genre > 0 à celle des variétés étalonnées planaires.

On se donne une variété étalonnée $\phi : P \xrightarrow{\theta} W \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ avec $\Pi = \theta(P)$ et on désigne par $\Pi^{[1]}$ la sous-variété fermée de Π réunion de toutes les feuilles de \mathcal{L}_ϕ de genre ≥ 1 . Soit L une feuille contenue dans $\Pi^{[1]}$.

Définition 6.1. a) Un cercle α plongé dans l'intérieur de L sera dit *essentiel de type I, II ou III* pour L si la condition correspondante est satisfaite:

- (I) La classe $[\alpha] \in H_1(L, \partial L)$ est non nulle; la surface L' obtenue en coupant L le long de α est connexe mais vérifie $g(L') < g(L)$;
- (II) $[\alpha] = 0$ et α découpe L en deux surfaces L' et L'' telles que $g(L') \cdot g(L'') \neq 0$, en particulier $g(L') < g(L)$ et $g(L'') < g(L)$;
- (III) $[\alpha] = 0$ et α découpe L en deux surfaces L' et L'' vérifiant $\partial L' = \alpha$ et $g(L') = g(L)$.

b) Un disque $(A, \partial A) \subset (\Pi, L)$ plongé dans $\overset{\circ}{\Pi}$, en position générale par rapport à φ et transverse à L sera dit *essentiel de type I, II ou III* pour L s'il en esy ainsi pour le cercle $\alpha = \partial A$.

En fait les disques de type I seront les plus importants; on a une caractérisation commune pour les cycles (cercles?) et les disques de type I ou II.

Remarque 6.2. Soient $x_0 \in \partial L$ un point base fixé et $N(L)$ le sous-groupe distingué de $\pi_1(L, x_0)$ engendré par $\pi_1(\partial L, x_0)$. Si α est un cercle plongé dans L , on désigne par $\hat{\alpha}$ un lacet en x_0 obtenu en joignant α à x_0 par un chemin simple λ . Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:

- i) α est essentiel de type I ou II;
- ii) $[\hat{\alpha}] \in \pi_1(L, x_0) - N(L)$.

Notre premier résultat sera le suivant:

Théorème 6.3. *Toute feuille L de genre ≥ 1 admet un disque essentiel de type I.*

Rappelons qu'un disque plongé $(A, \partial A) \subset (\Pi, L)$ est *régulier* si $A \cap L = \partial A$. Les disques fournis par le théorème 6.3 seront réguliers si L est singulière ou régulière à bord connexe; il s'en seront pas en général. Pour la preuve de 6.3, on distinguera trois cas:

- a) L est singulière;
- b) L est régulière à bord connexe;
- c) L est régulière.

Preuve de 6.3 pour L singulière. Paradoxalement la preuve est la plus simple lorsque L est singulière. En effet, dans ce cas, ∂L a une composante $\beta = \beta' \vee \beta''$ qui est un joint de deux cercles.

locale préservant la feuille L .

Pour le cas où L est régulière, on a besoin d'un intermédiaire.

Proposition 6.4. *Toute feuille régulière de genre non nul et bord non connexe admet un disque essentiel de type III.*

Preuve. Evidemment L admet un cycle α essentiel de type III, il ne reste donc plus qu'à montrer que α est le bord d'un disque essentiel A .

Pour cela soit $\{\beta_1, \dots, \beta_l\}$ l'ensemble des composantes connexes de ∂L . On fixe un point $z_0 \in \partial \Pi - \partial L$. Pour chaque j il existe exactement

un disque $B_j \subset \partial\Pi$ de bord β_j , tel que $z_0 \notin B_j$. En particulier $B_j \cap B_k \neq \emptyset$ impliquera que les deux disques sont emboîtés.

La surface L'' découpée par α dans L est compacte planaire, donc difféomorphe à une sous-surface Σ de D^2 . Le bord de Σ a $l + 1$ composantes connexes $\{\gamma_0 = \partial D^2, \gamma_1, \dots, \gamma_l\}$, et pour $j \geq 1$, la courbe γ_j est le bord d'un disque Γ_j . Soit $\hat{h} : \Sigma \rightarrow L''$ une paramétrisation L'' telle que $\hat{h}(\gamma_0) = \alpha$. Pour une numérotation convenable, la restriction de \hat{h} à γ_j sera une paramétrisation de β_j ; on prolonge \hat{h} sur Γ_j en une paramétrisation de B_j .

L'application $h : D^2 \rightarrow \Pi$ ainsi obtenue sera DM-différentiable: elle ne sera pas un DM-plongement par défaut d'injectivité. La preuve de 6.4 est complétée par:

Lemme 6.5. *L'application h est approchable par un plongement h' de D^2 dans $\overset{\circ}{\Pi}$ de bord α et essentiel de type I (III?) pour L .*

Preuve du lemme. On ordonne les disques B_j par inclusion. Il y a un élément minimal, mettons B_1 . On pose $\Sigma_1 = \Sigma \cup \Gamma_1$. La restriction h_1 de h à Σ_1 est un plongement:

$$h'_1 : \Sigma_1 \rightarrow \overset{\circ}{\Pi}$$

qui coïncide avec h_1 en dehors d'un petit voisinage de Γ_1 .

Un plongement h' énoncé est obtenu en répétant l fois cette opération, construisant une suite de plongements "emboîtés":

$$h'_j : \Sigma_j \rightarrow \overset{\circ}{\Pi}$$

où $\Sigma_j = \Sigma_{j-1} \cup B_j$ et la numérotation des $\{B_j\}_j$ étant retouchée en conséquence. \square

Ceci ramène la preuve de 6.3 au cas des feuilles régulières à bord connexe:

Proposition 6.6. *Si toute feuille régulière de genre non nul à bord connexe admet un disque essentiel de type I, alors il en est de même pour toute feuille régulière de genre non nul*

Preuve de la proposition. Soit L régulière de genre non nul, et soit $(\Delta, \partial\Delta) \subset (\Pi, L)$ le disque essentiel de type III fourni par 6.4.

On réduit Π suivant le disque Δ (cf. ??), la trace $\hat{L} = L \cap \hat{H}$ a deux composantes connexes \hat{L}' et \hat{L}'' difféomorphes respectivement aux deux composantes L' et L'' de L définies par Δ . Alors \hat{L}' est régulière

à bord connexe de genre non nul. Par hypothèse elle admet un disque $(\hat{A}, \partial\hat{A}) \subset (\hat{\Pi}, \hat{L}')$ de type I. Mais \hat{A} est plongé dans $\overset{\circ}{\Pi}$, c'est un disque essentiel de type I pour L .

Il nous reste à démontrer 6.4 pour les feuilles régulières à bord connexe, pour lesquelles on va montrer que les disques essentiels obtenus seront aussi réguliers.

On fixe L régulière à bord connexe. Elle partage Π en deux DM-sous-variétés Π_L^+ et Π_L^- . Le bord ∂L est un cercle plongé dans $\partial\Pi$, il partage $\partial\Pi$ en deux disques Δ^+ et Δ^- , avec:

$$\Delta^+ = \partial\Pi \cap \Pi_L^+ \quad \text{et} \quad \Delta^- = \partial\Pi \cap \Pi_L^-.$$

On construit un involution:

$$\sigma : \partial\Pi \rightarrow \partial\Pi$$

qui fixe ∂L et échange les deux disques Δ^+ et Δ^- .

Soit γ un lacet dans L . Comme Π est simplement connexe, il existe une application différentiable $h : D^2 \rightarrow \Pi$ telle que $h(\partial D^2) = \gamma$. On la met transverse à L , l'ensemble $h^{-1}(L)$ est alors une famille finie $K(h) = \{\gamma_0 = \partial D^2, \gamma_1, \dots, \gamma_l\}$ de cercles deux à deux disjoints plongés dans D^2 . Le nombre l est la *complexité* du couple (h, γ) , notée $c(h, \gamma)$. Elle est nulle si et seulement si $h(D^2) \subset \Pi_L^+$ ou $h(D^2) \subset \Pi_L^-$. \square

Proposition 6.7. *Pour toute feuille L régulière à bord connexe et de genre non nul, il existe un couple (h, γ) tel que:*

- i) $[\gamma] \in H_1(L, \partial L)$ est non nulle;
- ii) $c(h, \gamma) = 0$.

Preuve de la proposition. Bien sûr, il existe un couple (γ, h) tel que $[\gamma] \neq 0$ et $c(h, \gamma)$ soit minimale. On va montrer que cette complexité est en fait nulle.

En effet dans le cas contraire, chaque élément γ_j de $K(h)$ borde un disque $\Gamma_j \subset D^2$. On ordonne les éléments de $K(h)$ par inclusion des disques correspondants; il existe un élément minimal, mettons γ_1 .

On désigne par h_1 la restriction de h à Γ_1 . La complexité $c(h_1, h(\gamma_1))$ est nulle donc d'après le choix de (h, γ) , la classe $[\gamma_1] \in H_1(L, \partial L)$ est nulle. Par suite le lacet $h_1(\gamma_1)$ est homotope à ∂L dans L . Quitte à déformer h par homotopie, on pourra supposer que $h(\gamma_1) \subset \partial L$ et $h(\Gamma_1) \subset \Delta^+$ (ou $h(\Gamma_1) \subset \Delta^-$).

On considère $\tilde{h} : D^2 \rightarrow \Pi$ définie par:

$$\tilde{h}(z) = \begin{cases} h(z) & \text{pour } z \notin \Gamma_1 \\ \sigma \circ h(z) & \text{pour } z \in \Gamma_1 \end{cases}$$

Cette application n'est pas transverse à L . Le cercle γ_1 est un lien de tangence qui disparaîtra par une déformation arbitrairement petite. Cref on obtiendra un couple (h', γ) tel que:

$$c(h', \gamma) < c(h, \gamma)$$

ce qui est impossible. \square

Fin de la preuve de 6.3. Prennons L régulière à bord connexe. En transformant légèrement la proposition 6.7, on pourra supposer qu'il existe un lacet γ dans L tel que:

- (1) $[\gamma] \in H_1(L, \partial L)$ est non nulle;
- (2) la classe de γ dans $\pi_1(L, x_0)$ est contenue dans le noyau de l'homomorphisme $\pi_1(j^\pm)$ induit par l'un des plongements canoniques $j^\pm : L \rightarrow \Pi_L^\pm$. On obtiendra le disque essentiel régulier $(A, \partial A)$ par application du "loop theorem" avec le sous-groupe distingué $N = [\pi_1(L, x_0), \pi_1(L, x_0)]$

Loop Theorem. Soient M une variété de dimension 3 et $j : L \rightarrow M$ l'inclusion canonique de ∂M dans M . Soit N un sous-groupe normal de $\pi_1(L, x_0)$ alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- i) il existe $v \in \pi_1(L, x_0) - N$ tel que $[v] \in \ker \pi_1(j)$;
- ii) il existe un disque régulier $(A, \partial A) \subset (M, L)$ tel que $[\partial A] \in \pi_1(L, x_0) - N$.