Die Berechnung des Grenzwerts der Untersummen bzw. Obersummen zu der geometrischen Zerlegung führt auf einen Differentialquotienten.

$$w := (b/a)^{1/n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$w = (b/a)^{1/n} = 1 + h \quad \text{mit} \quad h \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\lim_{w\to 1} \frac{w^{r+1} - 1}{w - 1} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{r+1} - 1}{h} = (x^{r+1})' \Big|_{x=1} = (r+1)\cdot x^r \Big|_{x=1} = r+1$$

Fazit: $\forall\, 0 < a < b, \quad \forall r \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}:$

$$\int_a^b t^{-r}\,\mathrm{d}t = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1} =: \underbrace{\frac{1}{r+1}\, x^{r+1}}_{\text{Stammfunktion}} \Big|_a^b$$

Folgerung: Die Stammfunktion einer Potenzfunktion ist wiederum eine Potenzfunktion und zwar mit einem um Eins vergrößerten Exponenten. Einzige Ausnahme bildet die Kehrwertfunktion, denn die Stammfunktion zu $t \mapsto t^{-1}$ kann nicht die konstante Funktion $t^0 \equiv 1$ sein kann. Außerdem ist der Faktor $\frac{1}{r+1}$ nicht für $r = -1$ auswertbar.

Ein besonderes Integral

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \textbf{?}$$

Was ist das Problem mit dem Integral?

Allgemein gilt : $$\int_1^x \frac{1}{t^r}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{r+1}}{r+1} - \frac{1}{r+1}$$

Die Gleichung ist jedoch für $r = -1$ sinnlos, da dann durch 0 zu dividieren wäre.

trachte Grenzwert $r \to -1$ bzw. $h \coloneqq r+1 \to 0$

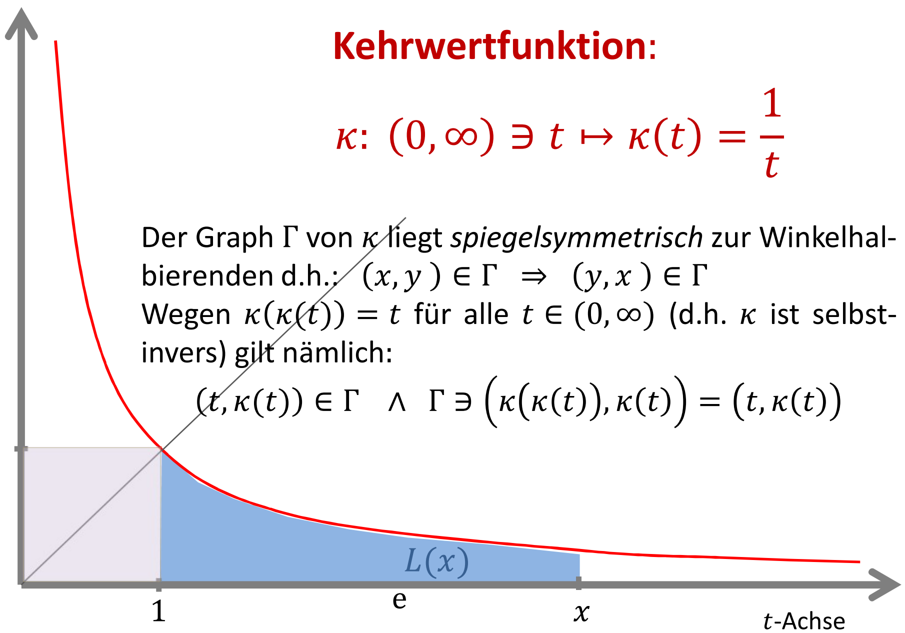
$h = 1/n$

$$\int_1^x \frac{1}{t^r}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{r+1}}{r+1} - \frac{1^{r+1}}{r+1} = \frac{x^{r+1}-1}{r+1} = \frac{x^h - 1}{h} \xrightarrow{h \to 0} ?$$

Anders formuliert : $$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{1/n}-1}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \left(\sqrt[n]{x} - 1\right)\right) = ?$$

Bleiben wir aber
zunächst beim Integral!

Qualitative Betrachtung der „Integralfunktion“ zur Kehrwertfunktion



Kehrwertfunktion:

$$\kappa\colon\ (0,\infty) \ni t \mapsto \kappa(t) = \frac{1}{t}$$

Der Graph Γ von κ liegt *spiegelsymmetrisch* zur Winkelhalbierenden d.h.: $(x, y) \in \Gamma \ \Rightarrow\ (y, x) \in \Gamma$
Wegen $\kappa(\kappa(t)) = t$ für alle $t \in (0,\infty)$ (d.h. κ ist selbstinvers) gilt nämlich:

$$(t, \kappa(t)) \in \Gamma \ \wedge\ \Gamma \ni \big(\kappa(\kappa(t)), \kappa(t)\big) = (t, \kappa(t))$$

Zugehörige **Integralfunktion**
(mit Nullstelle bei 1)

$$L\colon\ (0,\infty) \ni x \mapsto L(x) := \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Eigenschaften von L:

- **Vorzeichen:**

  $L(1) = 0$ Da $\int_1^1 \ldots = 0$.

  $$\left.\begin{array}{l} 0 < x < 1 \ \Rightarrow\ L(x) < 0 \\ 1 < x \ \Rightarrow\ L(x) > 0 \end{array}\right\}$$

  Begründung: κ positiv.

- **Monotonie:** *streng monoton wachsend*, dabei allmählich abflachend, da κ positiv & streng monoton fallend [mit $\lim_{t\to\infty} \kappa(t) = 0$]

- **Tangente** im Punkt $(1{,}0)$ hat (vermutl.) Steigung 1, da $\kappa(1) = 1$.

  $$L(1+h) - L(1) = L(1+h) = \int_1^{1+h} \frac{\mathrm{d}t}{t} \approx \kappa(t)\Big|_{t=1} \cdot h = 1 \cdot h \quad \Rightarrow\quad L'(1) \approx 1$$

  Beachte, daß die Tangente an die Kehrwertfunktion im Punkt $(1{,}1)$ d.h. im Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden senkrecht zu dieser stehen muß aufgrund der Spiegelsymmetrie. Daher gilt $\kappa'(1) = -1$.

- **Noch unklar:** $\lim_{x\searrow 0} L(x) = -\infty$ und $\lim_{x\nearrow\infty} L(x) = \infty$ **?**

Könnte nur einer der Grenzwerte existieren?

Nein, aufgrund der Spiegelsymmetrie des Graphen der Kehrwertfunktion an der Winkelhalbierenden, bedingen die beiden Grenzwerte einander! Falls einer der Grenzwerte existiert, so müßte gelten:

$$-\lim_{x\searrow 0} L(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t} = \lim_{x\nearrow\infty} L(x)$$

Beachte: Es handelt sich hier um **uneigentliche Integrale**, die hier Sinne des Flächeninhalts unter dem Graphen der Kehrwertfunktion zu verstehen sind.

Tafel $\rightarrow$ qualitative Skizze des Graphen von L.

Abschätzung der Integralfunktion L

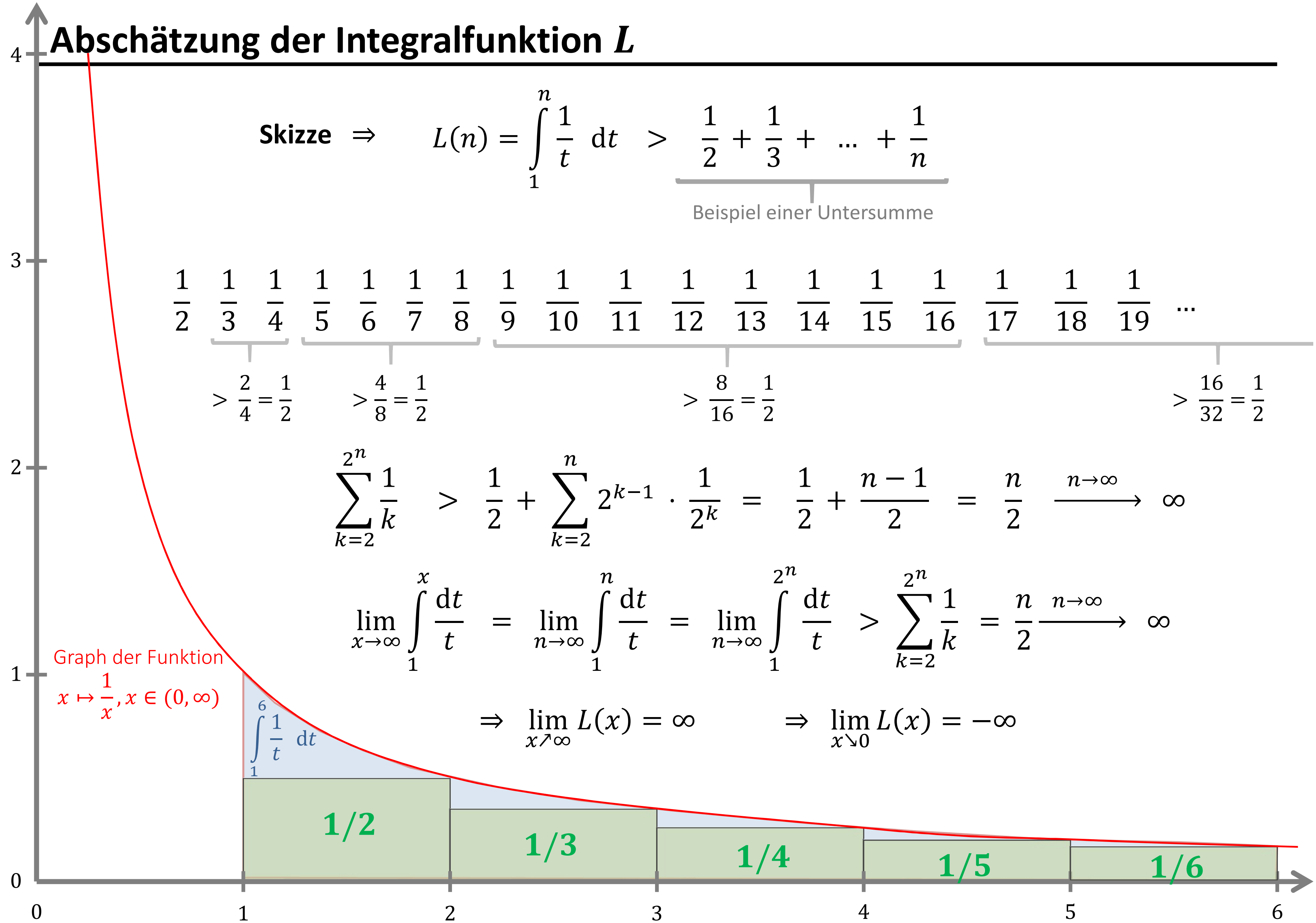
Skizze $\Rightarrow$ $$L(n) = \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \;>\; \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}_{\text{Beispiel einer Untersumme}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}}\quad \underbrace{\frac{1}{3}\;\frac{1}{4}}_{>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}\quad \underbrace{\frac{1}{5}\;\frac{1}{6}\;\frac{1}{7}\;\frac{1}{8}}_{>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}}\quad \underbrace{\frac{1}{9}\;\frac{1}{10}\;\frac{1}{11}\;\frac{1}{12}\;\frac{1}{13}\;\frac{1}{14}\;\frac{1}{15}\;\frac{1}{16}}_{>\frac{8}{16}=\frac{1}{2}}\quad \underbrace{\frac{1}{17}\;\frac{1}{18}\;\frac{1}{19}\;\dots}_{>\frac{16}{32}=\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{k=2}^{2^n} \frac{1}{k} \;>\; \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} \;=\; \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} \;=\; \frac{n}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

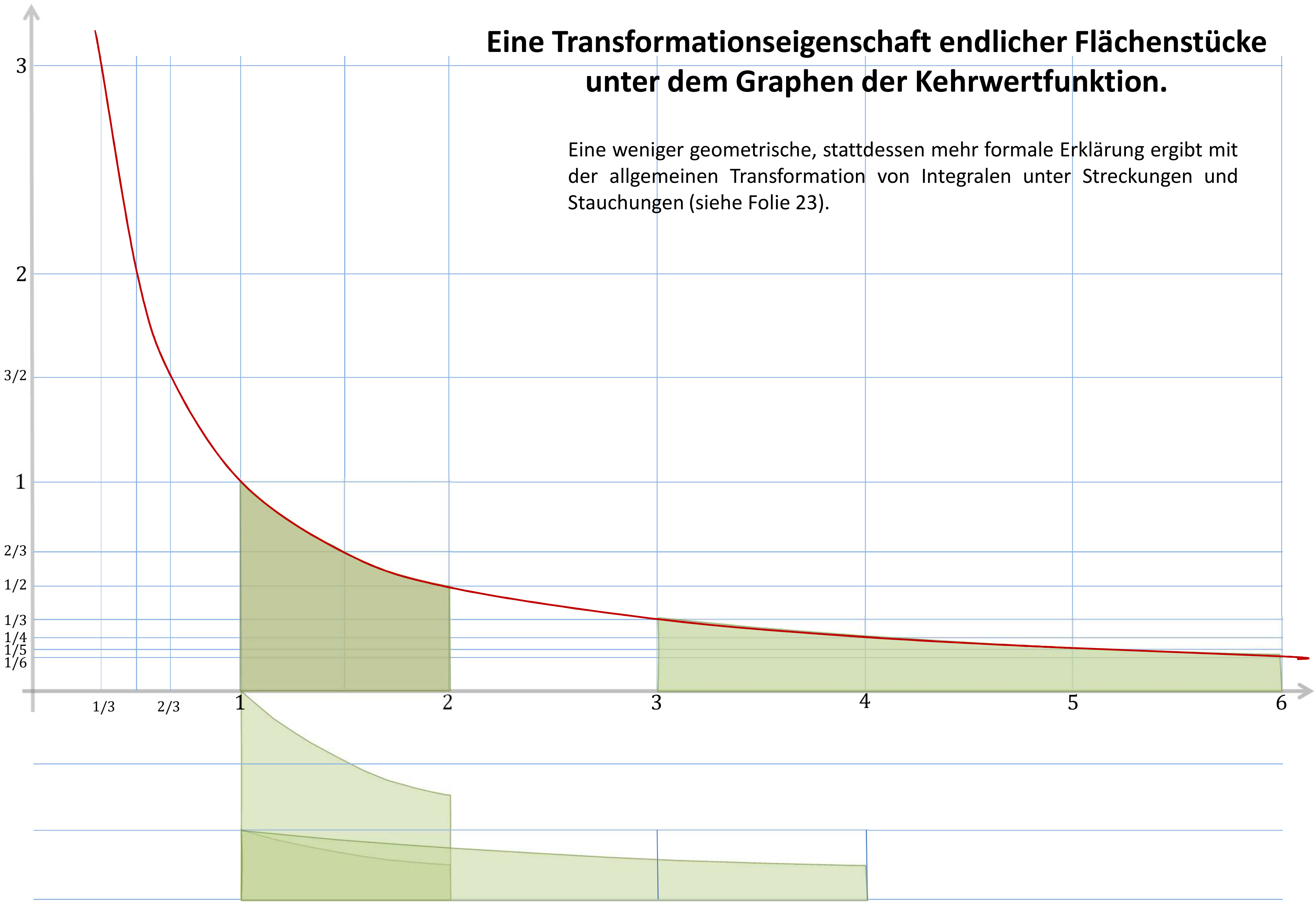
$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_1^{2^n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \;>\; \sum_{k=2}^{2^n} \frac{1}{k} \;=\; \frac{n}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\nearrow\infty} L(x) = \infty \qquad\qquad \Rightarrow \lim_{x\searrow 0} L(x) = -\infty$$

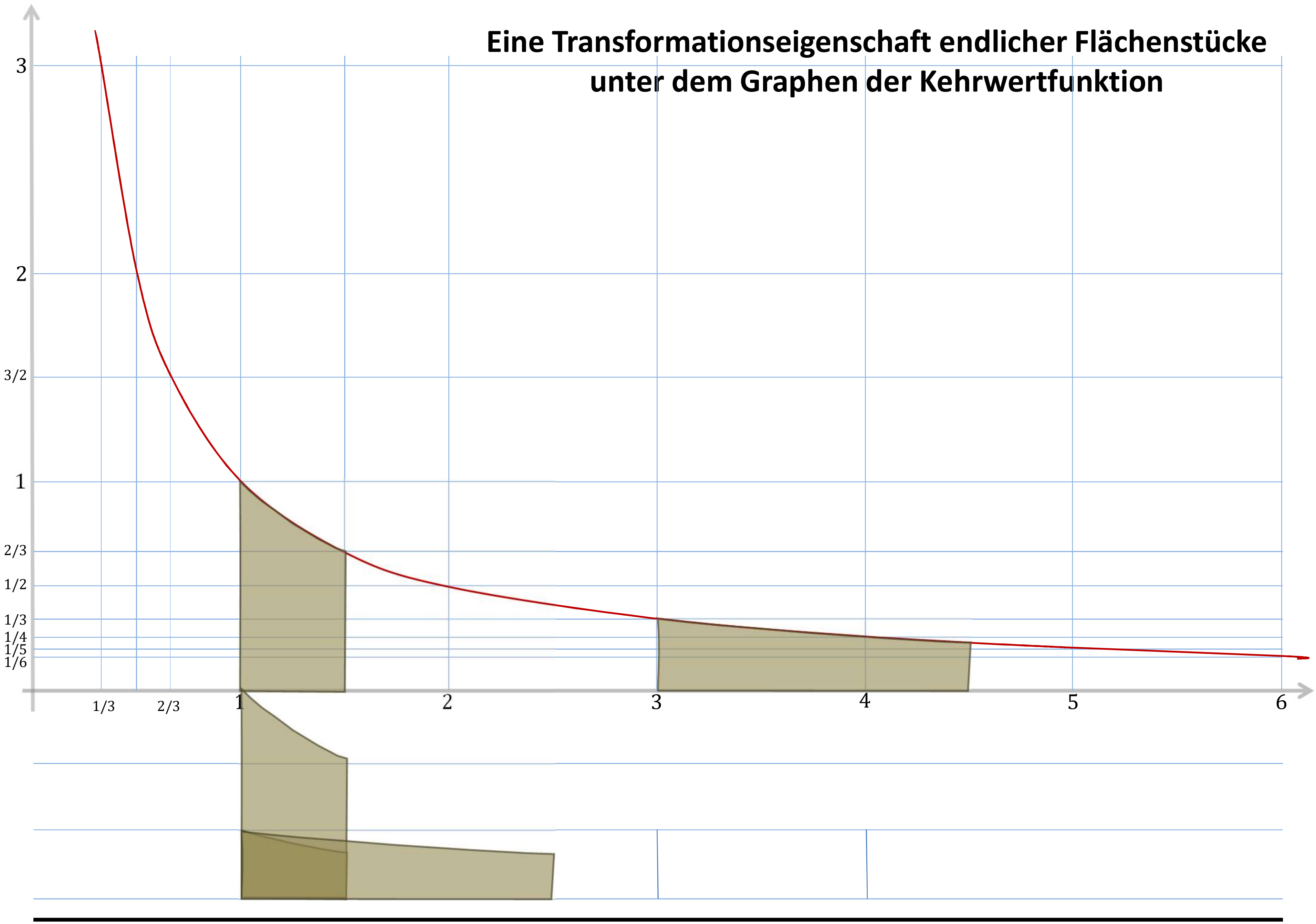


Eine Transformationseigenschaft endlicher Flächenstücke unter dem Graphen der Kehrwertfunktion.

Eine weniger geometrische, stattdessen mehr formale Erklärung ergibt mit der allgemeinen Transformation von Integralen unter Streckungen und Stauchungen (siehe Folie 23).



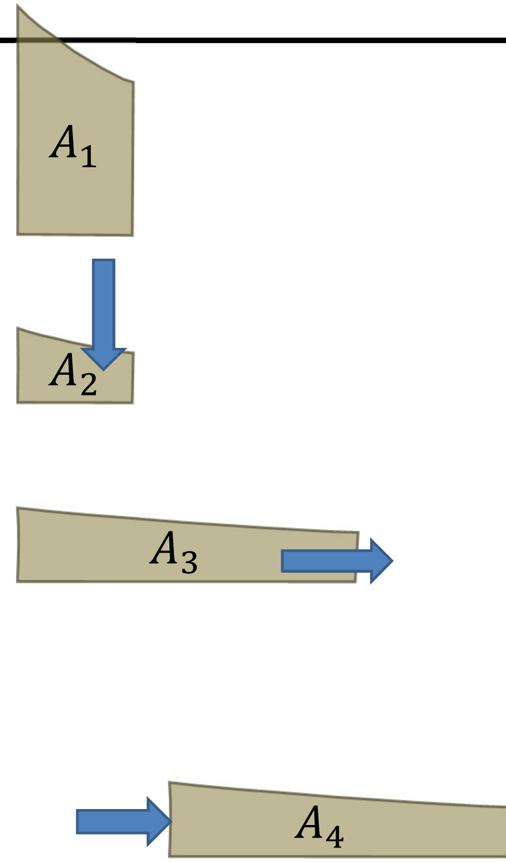
Eine Transformationseigenschaft endlicher Flächenstücke unter dem Graphen der Kehrwertfunktion



Zusammenfassung der Beobachtung

Gegeben: Flächenstück unter dem Graphen der Kehrwertfunktion über dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$.

- ***Streckung*** des Flächenstücks um den Faktor $1/\sigma$ in *vertikale* Richtung (d.h. Stauchung um den Faktor σ). Die invariante *Fixpunktgerade* entspricht dabei der x-Achse.
- ***Streckung*** des Flächenstücks um Faktor σ in *horizontale* Richtung. Die invariante *Fixpunkt-gerade* entspricht dabei der Vertikalen durch den Punkt a auf der x-Achse.



$$|A_1| = \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$|A_4| = \int_{\sigma a}^{\sigma b} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

→ **Beobachtung:** Das so transformierte Flächen-stück fügt sich nach ***Verschiebung*** um die *signierte* Strecke $(\sigma - 1)a$ passgenau unter den Graphen der Kehrwertfunktion über dem Intervall $[\sigma a, \sigma b]$ ein.

Es gilt also: $|A_1| = |A_3| = |A_4|$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{t} \cdot \mathrm{d}t = \int_{\sigma a}^{\sigma b} \frac{1}{t} \cdot \mathrm{d}t$$

Hintereinander ausgeführte Streckungen um den Faktor σ bzw. $1/\sigma$ verändern im allgemeinen zwar die Form nicht aber den Inhalt eines Flächenstücks. Eine einfache Streckung der Ebene (bzw. eines zweidim. Vektorraums) um den Faktor σ ist eine lineare Selbstabbildung , die eine gewisse Basis (b_1, b_2) auf die Basis $(\sigma b_1, b_2)$ abbildet. b_1 entspricht der „Streckrichtung“, b_2 der „invarianten Korichtung“. Jede Gerade in b_1-Richtung bleibt invariant unter der Streckung, während die Gerade durch den Nullpunkt in b_2-Rchtung sogar eine **Fixpunktgerade** ist.
Linear-algebraisch gesehen ist eine einfache Streckung (in einem Vektorraum) eine diagonalisierbare Endomorphismus mit den Eigenwerten σ und 1, wobei σ nur die geometrische Vielfachheit 1 haben darf.

Formale Begründung der Beobachtung

Beobachtung: $\forall 0 < a < b, \forall \sigma > 0: \quad \int_a^b \frac{1}{t} \cdot \mathrm{d}t = \int_{\sigma a}^{\sigma b} \frac{1}{t} \cdot \mathrm{d}t$

Erinnerung:

Betrachte Funktion: $f\colon\ [a,b] \ni t \mapsto f(t)$

Strecke t-Achse um Faktor σ zur θ-Achse (Streckzentrum sei der Nullpunkt).
Dadurch wird folgende Transformation von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ definiert: $t \mapsto \sigma t =: \theta, \quad \theta \mapsto \theta/\sigma = t$

Streckt man den Graphen der Funktion f mit, so kann man diesen als Graphen einer neuen Funktion $\widehat{f}$ betrachten, definiert durch:

$$\widehat{f} : [\sigma a, \sigma b] \ni \theta \mapsto f(\theta/\sigma)$$

Es gilt dann: $\int_{\sigma a}^{\sigma b} \widehat{f}(\theta) \cdot \mathrm{d}\theta \equiv \int_{\sigma a}^{\sigma b} f(\theta/\sigma) \cdot \mathrm{d}\theta = \sigma \cdot \int_a^b f(t) \cdot \mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b f(t) \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma} \cdot \int_{\sigma a}^{\sigma b} f(\theta/\sigma) \cdot \mathrm{d}\theta$

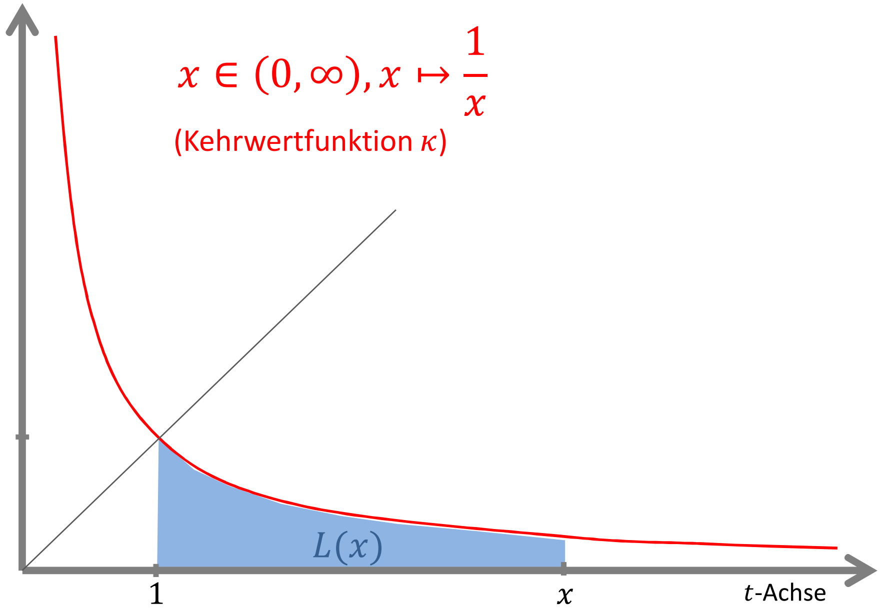
Anwendung auf die Kehrwertfunktion:

Umbenennung der Integrationsvariable

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{\sigma} \cdot \int_{\sigma a}^{\sigma b} \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta/\sigma} = \frac{1}{\sigma} \cdot \sigma \int_{\sigma a}^{\sigma b} \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta} = \int_{\sigma a}^{\sigma b} \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta} = \int_{\sigma a}^{\sigma b} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$\blacksquare$

Weitere Eigenschaften der Integralfunktion



Definiere Funktion $L\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ als *Integral* der Kehrwertfunktion mit variabler Obergrenze:

$$L(x) := \int_1^x \frac{1}{t} \cdot \mathrm{d}t$$

Behauptung:

1) $\forall x, y \in (0, \infty)$: $L(xy) = L(x) + L(y)$

2) $L'(1) = 1$

Beachte: 1) $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\int_1^{xy} \frac{1}{t} \cdot \mathrm{d}t = \int_1^{x} \frac{1}{t} \cdot \mathrm{d}t + \int_1^{y} \frac{1}{t} \cdot \mathrm{d}t$

O.E.d.A. kann $x \leq y$ angenommen werden (ansonsten führe Umbenennung durch).

Dann sind drei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $1 \leq x \leq y$ $\Rightarrow$ $y \leq xy$

Fall 2: $x \leq 1 \leq y$ Unterfälle a) $1 \leq xy \leq y$ b) $x \leq xy \leq 1$

Fall 3: $x \leq y \leq 1$ $\Rightarrow$ $xy \leq x$

o.E.d.A. = ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$(0, \infty) \equiv \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$

Nachweis der weiteren Eigenschaften (Teil 1)

Ad 1) $\forall x, y \in (0,\infty)$: $L(xy) = L(x) + L(y)$

Fall 1: $1 \le x \le y \quad \Rightarrow \quad 1 \le x \le xy$

$$L(xy) = \int_1^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_x^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Anwendung der speziellen Transformationsformel

$$= L(x) + \int_1^{y} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= L(x) + L(y)$$

Erinnerung:

$$\int_a^b \frac{1}{t} \cdot \mathrm{d}t = \int_{\sigma a}^{\sigma b} \frac{1}{t} \cdot \mathrm{d}t$$

Fall 2: $0 < x \le 1 \le y$

a) $1 \le xy$

$$L(xy) = \int_1^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_x^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_x^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^{y} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= L(x) + L(y)$$

Nachweis der weiteren Eigenschaften (Teil 2)

Ad 1) $\forall x, y \in (0,\infty)$: $L(xy) = L(x) + L(y)$

Fall 2: $0 < x \le 1 \le y$

b) $x \le xy \le 1$

$$L(xy) = \int_1^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\int_{xy}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= -\int_x^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_x^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_{xy}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= -\int_x^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_x^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^{y} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= L(x) + L(y)$$

Fall 3: $0 < x \le y \le 1$

$\Rightarrow xy \le x \le y \le 1$

$$L(xy) = \int_1^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\int_{xy}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= -\int_{xy}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_y^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= -\int_x^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_y^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^{y} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= L(x) + L(y)$$

Nachweis der weiteren Eigenschaften (Teil 3)

Ad 2) $L'(1) = 1$

$$L'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{L(1+h) - L(1)}{h}$$

Erinnerung an die
Definition der Ableitung mittels
Differentialquotienten

$$L(1) = \int_1^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = 0, \quad L(1+h) = \int_1^{1+h} \frac{\mathrm{d}t}{t}\,, \qquad h > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \min\left\{\frac{1}{t}:\ 1 \le t \le 1+h\right\} = \frac{1}{1+h} \\ \max\left\{\frac{1}{t}:\ 1 \le t \le 1+h\right\} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad h \cdot \frac{1}{1+h} \quad \le \quad L(1+h) - L(1) \quad = \quad L(1+h) \quad \le \quad h \cdot 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+h} \quad \le \quad \frac{L(1+h) - L(1)}{h} = \frac{L(1+h)}{h} \quad \le \quad 1$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & h \searrow 0 & \downarrow & h \searrow 0 & \downarrow \\ 1 & \le & L'(1) & \le & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad L'(1) = 1$ Q.E.D. ■

Analog ist der Fall $h < 0$ zu behandeln.

Wachstum des Logarithmus

Satz: Der natürliche Logarithmus wächst langsamer als jede Potenz mit positiven Exponenten:

$$\forall \epsilon > 0: \quad \frac{\log x}{x^\epsilon} \xrightarrow{x\to\infty} 0\,.$$

Beweis: Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Setze $\alpha = \epsilon/2$.

$$\forall t > 1: \quad \frac{1}{t} \equiv t^{-1} < t^{-1+\alpha} \equiv \frac{1}{t^{1-\alpha}}$$

Integration liefert $\forall x > 1$:

Integrationsregel für Potenzfunktionen angewendet.

$$\log x := \int_1^x t^{-1}\,\mathrm{d}t < \int_1^x t^{-1+\alpha}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\frac{1}{(-1+\alpha)+1}\, t^{-1+\alpha+1}\Big|_1^x}_{=\frac{1}{\alpha}(x^\alpha - 1)}$$

Also folgt für alle $\forall x > 1$: $\quad \log x < \alpha^{-1}(x^\alpha - 1) < \alpha^{-1} x^\alpha$

$$0 < \frac{\log x}{x^\epsilon} < \frac{\alpha^{-1}x^\alpha}{x^{2\alpha}} = \alpha^{-1}x^{-\alpha} \equiv \frac{1}{\alpha\, x^\alpha} \xrightarrow{x\to\infty} 0 \qquad \blacksquare$$

Zwar überschreitet $\log x$ für $x \to \infty$ jede positive Schranke, d.h. $\log x$ wird beliebig groß, dies geschieht jedoch derart langsam, daß $\log x$ gegenüber jeder Potenz x^ϵ mit (noch so kleinem) positivem Exponenten vernachlässigbar gering wird, wenn x nur hinreichend groß gewählt ist.

$\log(x) := L(x)$