Anzahl von Verteilungs- Zuordnungsmöglichkeiten

	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv
X_n unterscheidbar Y_r unterscheidbar	r^n	$r^{\underline{n}} = \binom{r}{n} \cdot n!$	$S(n,r) \cdot r!$	$r! = n!$
X_n **un**unterscheidbar Y_r unterscheidbar	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!} = \binom{n+r-1}{n}$	$\frac{r^{\underline{n}}}{n!} = \binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
X_n unterscheidbar Y_r **un**unterscheidbar	$\sum_{i=1}^{r} S(n,i)$	0 oder 1	$S(n,r)$	1
X_n **un**unterscheidbar Y_r **un**unterscheidbar	$\sum_{i=1}^{r} P(n,i)$	0 oder 1	$P(n,r)$	1

Beachte, nur in der ersten Zeilen werden Abbildungen im mathematisch präzisen Sinne abgezählt.

Zwei skizzenhafte Beweise mittels „Bars & Bulltes“:

Begründung zu „**beliebige** Zuordnung von X_n ununterscheidbar nach Y_n unterscheidbar“:

Berechne die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten von n Bulltes • und $r-1$ Trennstrichen | .

Begründung zu „**surjektive** Zuordnung von X_n ununterscheidbar nach Y_n unterscheidbar“:

Argumentation 1: Ordne n Bulltes linear an. Dann existieren $n-1$ Zwischenräume. Um die Bullets surjektiv auf r Fächer zu verteilen, benötigt man $r-1$ Trennstriche. Wie viele Möglichkeiten gibt es, unter den $n-1$ Zwischenräumen $r-1$ Zwischenausräume auszuwählen, um dort die Trennstriche einzufügen bzw. zu plazieren?

Alternative Argumentation 2: Sondere von n Bullets ein Bullet ab (dies ist das Bullet, welches sich mindestens im ersten Fach befindet). Wie viele Möglichkeiten bestehen $r-1$ Trennstriche mit rechtsseitigen Bullets „|• “ (denn in jedem Fach muß sich mindestens ein Bullet befinden) und die $n-(r-1)-1 = n-r$ verbleibenden Bullet neben dem ersten ausgesonderten Bullet anzuordnen?

Anzahl von Verteilungsmöglichkeiten

Wie viele Möglichkeiten existieren, die Objekte eines n-elementigen Objektreservoirs X_n auf ein r-elementiges Fächerreservoir Y_r zu verteilen?

Die Antwort hängt wesentlich davon ab, ob man die Objekte bzw. die Fächer als *unterscheidbar* oder als *nicht unterscheidbar* d.h. als ***un**unterscheidbar* betrachtet. Im Falle ununterscheidbarer Objekte oder Fächer kann man nicht mehr von einer Objekt- oder Fächermenge reden, da die Elemente einer Menge per definitionem als unterscheidbar angesehen werden. Daher die Bezeichnungsweise *Reservoir* statt Menge.

- **Beliebige** Verteilung: Die Fächer dürfen beliebig mit Objekten gefüllt werden oder auch ganz leer bleiben.
- **Injektive** Verteilung: Jedes Fach darf höchstens ein Objekt aufnehmen (bedingt $n \leq r$) .
- **Surjektive** Verteilung: Jedes Fach soll mindestens ein Objekt enthalten (bedingt $n \geq r$) .
- **Bijektive** Verteilung: In jedem Fach befindet sich genau ein Objekt (bedingt $n = r$) .

	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv
X_n unterscheidbar Y_r unterscheidbar	r^n	$r^{\underline{n}}$	$S(n,r) \cdot r!$	$r! = n!$
X_n ununterscheidbar Y_r unterscheidbar	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!} = \binom{n+r-1}{n}$	$\frac{r^{\underline{n}}}{n!} = \binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
X_n unterscheidbar Y_r ununterscheidbar	$\sum_{i=1}^{r} S(n,i)$	0 oder 1	$S(n,r)$	1
X_n ununterscheidbar Y_r ununterscheidbar	$\sum_{i=1}^{r} P(n,i)$	0 oder 1	$P(n,r)$	1

Anmerkung zur Sprechweise: Bei einer beliebigen Abbildung wird jedem Element der Ausgangsmenge (Definitionsmenge) ein Element der Zielmenge (Wertemenge) zugeordnet (nicht umgekehrt). Anders ausgedrückt, jedes Element der Ausgangsmenge wird auf ein Element der Zielmenge abgebildet bzw. „geschickt". Dabei muß aber nicht jedes Element der Zielmenge von einem Element der Ausgangsmenge „getroffen" werden. Die Zuordnung ist daher durchaus gerichtet. Man kann sagen: Jedem x wird ein y zugeordnet = jedes x wird einem y zugeordnet aber nicht jedem y wird ein x zugeordnet.