Vorlesung **Mathematik für Informatiker II** 07. Juni 2018
(an der Universität Heidelberg)
Dozent: *Dr. Martin Rheinländer*
Tutoren: *Armand Rousselot, Vasil Manev, Max Bréard*

Information Scientists Do Mathematics.

Aufgabenserie 6
Abschätzungen

In der Vorlesung wurde der natürliche Logarithmus mit Hilfe des Integrals der Kehrwertfunktion

$$\log x \equiv \ln x \equiv L(x) \coloneqq \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

definiert. Eine andere Möglichkeit bietet die "logarithmische Folge" $\big(\ell_n(x)\big)_n$ mit

$$\ell_n(x) \coloneqq n \cdot \big(\sqrt[n]{x} - 1 \big)\,.$$

Auf die logarithmische Folge stößt man, indem man zu dem obigen Integral die Obersumme bezüglich der geometrischen Zerlegung des Intervalls $[1, x]$ berechnet, welche aus $n-1$ inneren Zwischenpunkten besteht (d.h. die Randpunkte 1 und x nicht mitgezählt). Es gilt

$$n \cdot \big(\sqrt[n]{x} - 1 \big) \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \;<\; \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \;<\; n \cdot \big(\sqrt[n]{x} - 1 \big)\,.$$

Aus der logarithmischen Folge ergibt sich quasi durch Umkehrung der Rechenoperationen die Folge $\big(e_n(x)\big)_n$ mit

$$e_n(y) \coloneqq \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n,$$

die wir aus naheliegenden Gründen als "exponentielle Folge" oder als **Verzinsungsfolge** (warum?) bezeichnen.

Aufgabe 6.1: Standardabschätzung für den natürlichen Logarithmus (5P)

Beweisen Sie unter Verwendung der Integraldefinition des natürlichen Logarithmus die Ungleichung

$$\log x \leqq x - 1 \qquad \text{für alle } x > 0.$$

Aufgabe 6.2: Die *Bernoulli*sche Ungleichung (8P)

Die *Bernoulli*sche Ungleichung erweist sich trotz ihrer Einfachheit als erstaunlich hilfreich, wenn es darum geht, vergleichsweise unhandliche Potenzausdrücke zu vereinfachen bzw. loszuwerden. Dies geschieht durch eine relativ grobe Abschätzung nach unten, die in manchen Fällen aber durchaus ausreicht, um ganz interessante Ergebnisse herzuleiten. Zwei Beispiele dazu finden sich in den weiteren Aufgaben.

Man beweise folgende Aussage: $\forall n \in \mathbb{N}_0,\ \forall x \geqq -1: \quad (1+x)^n \geqq 1 + nx\,.$
Die Ungleichung ist streng erfüllt, falls $x \neq 0$ und $n \geqq 2$ gilt.

Anmerkung: Für $x \geqq 0$ ergibt sich die Ungleichung direkt aus dem binomischen Lehrsatz. Hier soll die Ungleichung per vollständiger Induktion nachgewiesen werden. Dabei ist es sinnvoll, gewisse Spezialfälle separat zu betrachten.

Aufgabe 6.3: Monotonie der Verzinsungsfolge **(5+10=15P)**

Das Ziel der folgenden Aufgabe besteht darin zu zeigen, daß die Verzinsungsfolge streng monoton wachsend in n ist, d.h. es gilt

$$e_n(x) \equiv \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \;<\; \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \equiv e_{n+1}(x),$$

wobei $x > -n$ vorauszusetzen ist. Die Verifikation der Ungleichung erweist sich als schwieriger, als es zunächst den Anschein hat. Woran könnte das liegen?

a) Betrachten Sie die Teilfolge $\left(e_{2^k}(x)\right)_k$ und begründen Sie, warum diese bezüglich k streng monoton wachsend ist (für $x \neq 0$). **Hinweis:** Es gilt für alle $x \neq 0$: $1 + x < \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2$. Folgern Sie daraus die Ungleichung $e_{2^k}(x) < e_{2^{k+1}(x)}$.

b) Beweisen Sie die obige Ungleichung, indem Sie $e_{n+1}(x)/e_n(x) > 1$ zeigen. Formen Sie dazu den Quotienten geeignet um und verwenden Sie die Bernoullische Ungleichung zur Abschätzung nach unten.

Aufgabe 6.4: Abschätzung der n'ten Wurzel und Folgerungen **(5+3+10*+2+5*=10P)**

a) Zeigen Sie, daß sich für alle $x > 0$ die n'te Wurzel $\sqrt[n]{x}$ nach oben abschätzen läßt durch $1 + \frac{x-1}{n}$ d.h. es gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geqq 0: \quad \sqrt[n]{x} \leqq 1 + \frac{x-1}{n}.$$

Hinweis: Starten Sie mit dem Ansatz $\sqrt[n]{x} = 1 + h_n(x)$ mit $-1 < h_n(x)$. Potenzieren Sie die beiden Seiten der Gleichung mit n und wenden Sie die Bernoullische Ungleichung an.

b) Folgern Sie aus a), daß die n'te Wurzel aus $x > 0$ unabhängig von x gegen 1 konvergiert.

c) (Bonus) Es sei $0 < a \neq 1$. Begründen Sie, daß die Menge $a^{\mathbb{Q}} \coloneqq \{a^q :\ q \in \mathbb{Q}\}$ **dicht** in $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} :\ x > 0\}$ liegt, d.h. es gilt: $\forall x > 0, \forall \epsilon > 0, \exists w \in a^{\mathbb{Q}} : \quad |x - w| < \epsilon$.

d) Folgern Sie aus b): $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0:\ \ell_n(x) \coloneqq n \cdot \left(\sqrt[n]{x} - 1\right) \leqq x - 1$ und schließlich $\ell(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} \ell_n(x) \leqq x - 1$ für alle $x > 0$.

e) (Bonus) (Beidseitige Abschätzung der n'ten Wurzel) Für alle $x > 0$ gilt $1 + \dfrac{\log x}{n} \leqq \sqrt[n]{x} \leqq 1 + \dfrac{x-1}{n}$. Wie ergibt sich die untere Abschätzung der n'ten Wurzel?

Aufgabe 6.5: (Untere) Abschätzung des zentralen Binomialkoeffizienten **(2+10=12P)**

Betrachten wir die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für ein festes gerades $n = 2m$, so ist der sogenannte *mittlere* bzw. *zentrale Binomialkoeffizient* $\binom{2m}{m}$ der größte unter diesen. In der Vorlesung sind wir bereits der Frage nachgegangen, wie schnell die zentralen Binomialkoeffizienten für $m \to \infty$ wachsen. Da die Summe aller $m+1$ Binomialkoeffizienten zu festem oberen Index n durch 2^n gegeben ist, folgt trivialer Weise $\binom{2m}{m} < 2^{2m} = 4^m$. Um herauszufinden, welcher Anteil an der "Gesamtmasse" 2^{2m} aller Binomialkoeffizienten (mit oberem Index $2m$) dem zentralen Binomialkoeffizient zukommt, versucht man diesen in der Form $f(m) \cdot 2^{2m}$ darzustellen. Der Faktor $f(m)$, welcher formal durch $\binom{2m}{m}/2^{2m}$ gegeben ist, entspricht dem relativen Anteil des zentralen Binomialkoeffizienten an der Gesamtmasse 2^{2m}. In der Vorlesung wurde bereits die explizite Darstellung

$$f(m) \;=\; \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \;=\; \prod_{k=1}^{m} \frac{2k-1}{2k} \equiv \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$$

hergeleitet. Offensichtlich gilt $f(m) < 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Die Frage ist nun, wie sich $f(m)$ für $m \to \infty$ verhält. In der Vorlesung wurde bereits die obere Abschätzung

$$f(m) < \frac{1}{\sqrt{2m+1}} < \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

nachgewiesen.

a) Warum sollte $\frac{1}{2m+1} < f(m)$ gelten für alle $m \in \mathbb{N}$?
Hinweis: Die Antwort kann durch ein einfaches Argument gegeben werden, welches keine Rechnung erfordert.

b) Zeigen Sie für alle $m \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2\sqrt{m}} < f(m)$.
Hinweis: Betrachten Sie $2m \cdot f(m)^2$ und verfahren Sie ähnlich zur Vorgehensweise in der Vorlesung bei der Herleitung der oberen Abschätzung $f(m) < \frac{1}{\sqrt{2m}}$.

Bitte die Abgaben im Moodle hochladen bis zum 14.06.2018, 17:00 Uhr.