Zusammenfassung

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^3) \qquad x \to 0$$

Bedeutet konkret:

$$\exists\, C > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}: \quad |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2) \right| < C|x|^3$$

$$\left| \frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2) \right| = \left| \frac{x^3}{1-x} \right| = \frac{|x|^3}{|1-x|} \leq 2 \cdot |x|^3 \qquad \text{für } |x| < 0{,}5\,.$$

Vermutung: $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \text{für } |x| < 1$$

Folgerung: $$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + (-x)^4 + \ldots$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^k \qquad \text{für } |x| < 1$$

↷ geometrische & alternierende geometrische Reihe

Reihenentwicklung mittels Polynomdivision $1:(1+x)$

$$
\begin{array}{l}
1 : (1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \quad \text{Rest } -x^5 \\
\underline{-(1+x)} \\
\quad -x \\
\quad \underline{-(-x-x^2)} \\
\qquad x^2 \\
\qquad \underline{-(x^2+x^3)} \\
\qquad\quad -x^3 \\
\qquad\quad \underline{-(-x^3-x^4)} \\
\qquad\qquad x^4 \\
\qquad\qquad \underline{-(x^4+x^5)} \\
\qquad\qquad\quad -x^5
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - \frac{x}{1+x} \\
&= 1 - x + \frac{x^2}{1+x} \\
&= 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{1+x} \\
&= 1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{1+x} \\
&= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \frac{x^5}{1+x}
\end{aligned}
$$

Probe:

$$
\begin{aligned}
(1+x)\cdot\frac{1}{1+x} = 1 = (1+x)\cdot\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \frac{x^5}{1+x}\right) \\
= (1 - x + x^2 - x^3 + x^4) + (x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5) - (1+x)\cdot\frac{x^5}{1+x} \\
= 1 + x^5 - x^5 = 1 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Reihenentwicklung mittels Polynomdivision $\quad 1 : (x+1)$

$$1 : (x+1) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \qquad \text{Rest } -\frac{1}{x^5}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\
\quad -\frac{1}{x} \\
\quad \underline{-\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} \\
\qquad \frac{1}{x^2} \\
\qquad \underline{-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} \\
\qquad\quad -\frac{1}{x^3} \\
\qquad\quad \underline{-\left(-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)} \\
\qquad\qquad \frac{1}{x^4} \\
\qquad\qquad \underline{-\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)} \\
\qquad\qquad\quad -\frac{1}{x^5}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1} &= \frac{1}{x} - \frac{\frac{1}{x}}{x+1} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x^2}}{x+1} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{\frac{1}{x^3}}{x+1} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{\frac{1}{x^4}}{x+1} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} - \frac{\frac{1}{x^5}}{x+1}
\end{aligned}$$

Probe: z.B.

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x^2}}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{x+1}{x} - \frac{x+1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \quad \checkmark$$

Fazit: Reihenentwicklung mittels Polynomdivision

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \frac{x^5}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + O(x^5) \qquad x \to 0$$

$$\Vert$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} - \frac{\frac{1}{x^5}}{x+1}$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + O\left(\frac{1}{x^6}\right) \qquad x \to \infty$$

Entwickeln einer Wurzelfunktion

$$f: [-1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \sqrt{1+x}$$

Gesucht: Polynom p vom Grad 3 mit $f(x) = p(x) + O(x^4)$ für $x \to 0$.

D.h. finde Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\sqrt{1+x} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + O(x^4) \qquad x \to 0$$

Berechnung von $\boldsymbol{\alpha_0}$: $\alpha_0 = p(0) = f(0) = 1$

Tatsächlich gilt $\sqrt{1+x} = 1 + O(x)$ bzw. $\sqrt{1+x} - 1 = O(x)$ für $x \to 0$, denn:

$$\left|\sqrt{1+x} - 1\right| \equiv \frac{|x|}{\sqrt{1+x} + 1} \leq |x| \qquad \text{falls} \quad |x| < 1.$$

Berechnung von $\boldsymbol{\alpha_1}$: $\sqrt{1+x} = 1 + \alpha_1 x + O(x^2)$

Quadrieren: $1 + x = \left(1 + \alpha_1 x + O(x^2)\right)^2$

$$= 1 + 2\alpha_1 x + O(x^2)$$

Hier gehen die Rechenregeln für die Landau-Symbole ein!

Koeffizientenvergleich
in der 1. Ordnung (vor x) $\quad 1 = 2\alpha_1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}$

Entwickeln einer Wurzelfunktion (Forts.)

Tatsächlich gilt $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2)$ bzw. $\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{1}{2}x\right) = O(x^2)$ für $x \to 0$, denn:

$$\left|\sqrt{1+x} - \left(1+\frac{1}{2}x\right)\right| = \frac{\left|\left(\sqrt{1+x} - \left(1+\frac{1}{2}x\right)\right)\left(\sqrt{1+x} + \left(1+\frac{1}{2}x\right)\right)\right|}{\sqrt{1+x} + \left(1+\frac{1}{2}x\right)}$$

$$= \frac{\left|1+x - \left(1+x+\frac{x^2}{4}\right)\right|}{\sqrt{1+x} + \left(1+\frac{1}{2}x\right)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{1+x} + \left(1+\frac{1}{2}x\right)}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{1+x} + \left(1+\frac{1}{2}x\right)} \leq \frac{1}{2} \cdot x^2 \qquad \text{falls} \quad |x| < 1$$

Beachte: Der Koeffizient α_1 ist so gewählt, daß das sogenannte **Residuum** minimiert wird:

$$\text{Residuum} \qquad r_u(x) := u(x)^2 - (1+x) = 0$$

Residuum von f *verschwindet* gemäß Definition von f, denn f ist eine Lösung der Gleichung $u^2(x) = 1 + x$. Die Funktion u sei in einer Umgebung der Null definiert.

Der Koeffizient α_1 soll so bestimmt werden, daß das lineare Polynom p_1 mit $p_1(x) \coloneqq 1 + \alpha_1 x$ eine möglichst gute Näherungslösung darstellt. Dies ist genau dann der Fall, wenn das Residuum $r_{p_1}(x) := p_1(x)^2 - (1+x)$ möglichst klein wird. Konkret heißt das, daß Residdum soll keine linearen Terme enthalten. Diese Forderung liefert genau die Bestimmungsgleichung für α_1.

Entwickeln einer Wurzelfunktion (Forts.)

Berechnung von $\boldsymbol{\alpha_2}$: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha_2 x^2 + O(x^3)$

Quadrieren:

$$1 + x = \left(1 + \frac{1}{2}x + \alpha_2 x^2 + O(x^3)\right)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{4}x^2 + x + 2\alpha_2 x^2 + O(x^3)$$

Hier gehen die Rechenregeln für die Landau-Symbole ein!

Koeffizientenvergleich in der 2. Ordnung (vor x^2)

$$0 = \frac{1}{4} + 2\alpha_2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_2 = -\frac{1}{8}$$

Berechnung von $\boldsymbol{\alpha_3}$: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + O(x^4)$

Quadrieren:

$$1 + x = \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \alpha_3 x^3 + O(x^4)\right)^2$$

Hier gehen die Rechenregeln für die Landau-Symbole ein!

$$= \underbrace{1 + \frac{1}{4}x^2}_{\text{quadrat. Terme}} + \underbrace{2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}x - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8}x^2 + 2 \cdot 1 \cdot \alpha_3 x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{8}x^2}_{\text{gemischte Terme}} + O(x^4)$$

$$= 1 + x + 0 \cdot x^2 + \left(2\alpha_3 - \frac{1}{8}\right)x^3 + O(x^4)$$

Koeffizientenvergleich in der 3. Ordnung (vor x^3)

$$0 = 2\alpha_3 - \frac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_3 = \frac{1}{16}$$

Entwickeln einer Wurzelfunktion (Forts.)

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + O(x^4) \qquad x \to 0$$

$$\exists\, \epsilon > 0, \quad \exists\, C > 0, \quad \forall\, |x| < \epsilon: \qquad \left|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3\right| < C \cdot x^4$$

Vergleich mit der *Binomialreihe*: $\sqrt{1+x} \equiv (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k$

Erinnerung: $\binom{1/2}{k} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}$

$$\binom{1/2}{0} = 1 \quad ✔ \quad \text{(leeres Produkt)}$$

$$\binom{1/2}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \quad ✔$$

$$\binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2} = -\frac{1}{8} \quad ✔$$

$$\binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{16} \quad ✔$$