Allgemeine Ober- und Untersummen $x \mapsto x^2$

Wie verhalten sich bei der Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ die Ober- und Untersummen hinsichtlich einer allgemeinen (nicht unbedingt äquidistanten) Zerlegung $a = x_0 < x_1 \; \dots \; < x_n = b$ des Intervalls $[a, b]$?

Untersumme: $\underline{S}(\mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 \cdot (x_i - x_{i-1})$ **Obersumme:** $\overline{S}(\mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot (x_i - x_{i-1})$

Allgemeiner Fakt (zur Faktorisierung von Differenzen zweier dritten Potenzen):

$$u^3 - v^3 \;=\; (u - v)(u^2 + uv + v^2) \qquad \Leftrightarrow \qquad u^2 + uv + v^2 \;=\; \frac{u^3 - v^3}{u - v}$$

Anwendung: $x_{i-1} < x_i \quad \Rightarrow \quad x_{i-1}^2 < x_i^2$

$$\Rightarrow \quad x_{i-1}^2 < \; \tfrac{1}{3}\left(x_i^2 + x_i x_{i-1} + x_{i-1}^2\right) \; < \; x_i^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_{i-1}^2 < \; \frac{1}{3} \cdot \frac{x_i^3 - x_{i-1}^3}{x_i - x_{i-1}} \; < \; x_i^2$$

$$\underline{S}(\mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_{i-1}^2} \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad < \quad \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3 - x_{i-1}^3}{x_i - x_{i-1}} \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad < \quad \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i^2} \cdot (x_i - x_{i-1}) = \overline{S}(\mathcal{Z})$$

Teleskopsumme

$$\Rightarrow \quad \underline{S}(\mathcal{Z}) \; < \; \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - x_{i-1}^3 < \overline{S}(\mathcal{Z}) \qquad \Rightarrow \qquad \underline{S}(\mathcal{Z}) \; < \; \tfrac{1}{3}(x_n^3 - x_0^3) \; < \; \overline{S}(\mathcal{Z})$$

$$\Rightarrow \quad \underline{S}(\mathcal{Z}) < \; \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3) \; < \; \overline{S}(\mathcal{Z}) \qquad \Rightarrow \quad \sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(a,b)} \underline{S}(\mathcal{Z}) \; \leq \; \tfrac{1}{3} b^3 - \tfrac{1}{3} a^3 \; \leq \inf_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(a,b)} \overline{S}(\mathcal{Z})$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\int_a^b x^2 \, \mathrm{d}x \; = \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{3} a^3}$$

Integrierbarkeit von $x \mapsto x^2$ über $[a, b]$ vorausgesetzt.

Beachte: $x \mapsto x^2$ ist streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$.

Integration von $1/x^2$

$0 < a < b,\qquad \int_a^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = ?$ $\qquad x \mapsto \frac{1}{x^2}$ ist streng monoton **fallend** auf $(0,\infty)$

$\mathcal{Z} = (x_i)_{i=0}^n$ sei **Zerlegung** des Intervalls $[a,b]$

Untersumme: $\underline{S}(\mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}(x_i - x_{i-1})$ Obersumme: $\overline{S}(\mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i-1}^2}(x_i - x_{i-1})$

- $x_{i-1} < x_i \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x_{i-1}} > \frac{1}{x_i} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x_{i-1}^2} > \frac{1}{x_{i-1}\cdot x_i} > \frac{1}{x_i^2}$
- $\frac{1}{x_{i-1}\cdot x_i}\cdot(x_i - x_{i-1}) = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}\cdot x_i} = \frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}$

$$\Rightarrow\quad \underline{S}(\mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i-1}\cdot x_i}(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i-1}^2}(x_i - x_{i-1}) = \overline{S}(\mathcal{Z})$$

$\Rightarrow\quad \underline{S}(\mathcal{Z}) < \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} < \overline{S}(\mathcal{Z})$ Teleskopsumme: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

$\Rightarrow\quad \underline{S}(\mathcal{Z}) < \frac{1}{a} - \frac{1}{b} < \overline{S}(\mathcal{Z}) \qquad \Rightarrow\quad \sup_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}(a,b)} \underline{S}(\mathcal{Z}) \le \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \le \inf_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}(a,b)} \overline{S}(\mathcal{Z})$

$\Rightarrow\quad \boxed{\int_a^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$ Integrierbarkeit von $x \mapsto 1/x^2$ über $[a,b]$ vorausgesetzt.

Integralberechnung mittels geometrischer Zerlegung

$$\int_a^b x^r \, \mathrm{d}x = \; ?$$ mit $r \in \mathbb{R}$. $r \neq -1$.

Warum $r = -1$ ausgenommen ist, ergibt sich erst aus dem Resultat der nachfolgenden Rechnung.

Betrachte *geometrische* Zerlegung: $\mathcal{Z}: \quad a = x_0 < \ldots < x_n = b$

$$x_k := a \cdot (a/b)^{k/n}$$

$$\Delta x_k := x_{k+1} - x_k = a \cdot (b/a)^{k/n} \cdot \left((b/a)^{1/n} - 1\right)$$

Untersumme: $\underline{S}(\mathcal{Z}) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^r \cdot (x_{k+1} - x_k)$

Falls $r > 0$. Obersumme für $r < 0$.

Obersumme: $\overline{S}(\mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^r \cdot (x_k - x_{k-1})$

Falls $r > 0$. Untersumme für $r < 0$.

$$\begin{aligned}
\underline{S}(\mathcal{Z}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(a \cdot (b/a)^{k/n}\right)^r \cdot a \cdot (b/a)^{k/n} \cdot \left((b/a)^{1/n} - 1\right) \\
&= a^{r+1} \cdot \left((b/a)^{1/n} - 1\right) \sum_{k=0}^{n-1} (b/a)^{(r+1)k/n} = a^{r+1} \cdot \left((b/a)^{1/n} - 1\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left((b/a)^{(r+1)/n}\right)^k \\
&= a^{r+1} \cdot \left((b/a)^{1/n} - 1\right) \cdot \frac{(b/a)^{r+1} - 1}{(b/a)^{(r+1)/n} - 1} = \left[\frac{(a/b)^{(r+1)/n} - 1}{(a/b)^{1/n} - 1}\right]^{-1} \cdot a^{r+1} \cdot \left((b/a)^{r+1} - 1\right) \\
&= \left[\frac{\left((b/a)^{1/n}\right)^{r+1} - 1}{(b/a)^{1/n} - 1}\right]^{-1} \cdot \left(b^{r+1} - a^{r+1}\right) \qquad w := (b/a)^{1/n} \xrightarrow{n \to \infty} 1 \\
&= \left[\frac{w^{r+1} - 1}{w - 1}\right]^{-1} \cdot \left(b^{r+1} - a^{r+1}\right) \xrightarrow{w \to 1} \frac{1}{r+1} \cdot \left(b^{r+1} - a^{r+1}\right) = \int_a^b x^r \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$r = -1$ ist ausgeschlossen wegen der „verbotenen“ (nicht widerspruchsfrei erklärbaren) Division durch 0.

Für $0 < r$ ist $x \mapsto x^r$ streng monoton fallend.
Für $r > 0$ ist $x \mapsto x^r$ streng monoton wachsend.
Die Bezeichnungen Unter- und Obersummen sind dann zu vertauschen.

Ein besonderes Integral

$$\int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \ \mathbf{?}$$

Was ist das Problem mit dem Integral?

Allgemein gilt : $$\int_1^x \frac{1}{t^r}\ \mathrm{d}t \ = \ \frac{x^{r+1}}{r+1} - \frac{1}{r+1}$$

Die Gleichung ist jedoch für $r = -1$ sinnlos, da dann durch 0 zu dividieren wäre.

Betrachte Grenzwert $r \to -1$ bzw. $h := r + 1 \ \to \ 0$

$h = 1/n$

$$\int_1^x \frac{1}{t^r}\ \mathrm{d}t \ = \ \frac{x^{r+1}}{r+1} - \frac{1^{r+1}}{r+1} \ = \ \frac{x^{r+1}-1}{r+1} \ = \ \frac{x^h - 1}{h} \xrightarrow{h\to 0} \ ?$$

Anders formuliert : $$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{1/n}-1}{1/n} \ = \ \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \left(\sqrt[n]{x} - 1\right)\right) \ = \ ?$$

Bleiben wir aber zunächst beim Integral!