Kombinatorische Berechnung von Quadratsummen

Gesucht: $S_2(n) := \sum_{k=1}^{n} k^2$

Gesucht ist eine explizite Berechnungsformel, mit welcher sich $S_2(n)$ als Funktion von n direkt berechnen läßt.

Idee: 1) Suche eine Menge $\mathcal{S}_n$ mit $|\mathcal{S}_n| = S_2(n)$.
2) Berechne $|\mathcal{S}_n|$ durch eine geschickte Zerlegung.

Ad 1) $\mathcal{M}_3(\ell) := \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3: \quad a, b < c \leq \ell\}$ Es gilt: $|\mathcal{M}_3(n+1)| = S_2(n)$.

$$\mathcal{M}_3(n+1) := \biguplus_{k=2}^{n+1} \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3: \quad a, b < c = k\}$$

Zerlegung von $\mathcal{M}_3(n+1)$ durch Klassifikation nach dem Wert der größten Zahl c.

Summenregel & Produktregel

$$\Rightarrow \qquad |\mathcal{M}_3(n+1)| := \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = S_2(n)$$

Ad 2) $\forall (a,b,c) \in \mathcal{M}_3(n+1) \subset \mathbb{N}^3$:

$$a < b \quad \text{XOR} \quad a = b \quad \text{XOR} \quad b < a.$$

Für $(a,b,c) \in \mathcal{M}_3(n+1) \subset \mathbb{N}^3$ trifft stets genau einer der folgenden drei Fälle zu:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \mathcal{M}_3(n+1) = \; & \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3: \; \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} < c \leq n+1\} \\ & \uplus \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3: \; \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b} < c \leq n+1\} \\ & \uplus \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3: \; \boldsymbol{b} < \boldsymbol{a} < c \leq n+1\}\end{aligned}$$

Zerlegung von $\mathcal{M}_3(n+1)$ mittels Trichotomiegesetz
$a < b, \; a = b, \; b < a.$
D.h. die Elemente von $\mathcal{M}_3(n+1)$ werden nach der Anordnungsrelation der ersten beiden Komponenten klassifiziert.

Kombinatorische Berechnung von Quadratsummen (Forts.)

Verwendung der *Gleichmächtigkeitsregel*:

$\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3\colon\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} < c \leq n+1\}$ $\leftrightarrow$ Menge der 2-elementigen Teilmengen von $\{1,2,\dots,n+1\}$

„→“ : $T := \{b,c\} \quad \Rightarrow \quad T \subset \{1,\dots,n+1\} \ \wedge \ |T| = 2$

„←“ : $T \subset \{1,\dots,n+1\} \ \wedge \ |T| = 2 \quad \Rightarrow \quad a = b := \min T\,,\ c := \max T$

$\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3\colon\ \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b} < c \leq n+1\}$ $\leftrightarrow$ Menge der 3-elementigen Teilmengen von $\{1,2,\dots,n+1\}$

„→“ : $T := \{a,b,c\} \quad \Rightarrow \quad T \subset \{1,\dots,n+1\} \ \wedge \ |T| = 3$

„←“ : $T \subset \{1,\dots,n+1\} \ \wedge \ |T| = 3 \quad \Rightarrow \quad a := \min T,\ b := \min(T \setminus \{\min T\}),\quad c := \max T$

$\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3\colon\ \boldsymbol{b} < \boldsymbol{a} < c \leq n+1\}$ $\leftrightarrow$ Menge der 3-elementigen Teilmengen von $\{1,2,\dots,n+1\}$

„→“ : $T := \{a,b,c\} \quad \Rightarrow \quad T \subset \{1,\dots,n+1\} \ \wedge \ |T| = 3$

„←“ : $T \subset \{1,\dots,n+1\} \ \wedge \ |T| = 3 \quad \Rightarrow \quad b := \min T,\ a := \min(T \setminus \{\min T\}),\quad c := \max T$

analog zum vorherigen Fall

Also folgt:

$\#\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3\colon\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} < c \leq n+1\} = \binom{n+1}{2}$

$\#\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3\colon\ \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b} < c \leq n+1\} = \#\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3\colon\ \boldsymbol{b} < \boldsymbol{a} < c \leq n+1\} = \binom{n+1}{3}$

$$\Rightarrow \quad |\mathcal{M}_3(n+1)| = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{3} = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$$

Kombinatorische Berechnung von Quadratsummen (explizite Formel)

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = |\mathcal{M}_3(n+1)| = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$$

Vorwegnahme: $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot \ldots \cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3} \\
&= \frac{(n+1)\cdot n}{2\cdot 1} + 2\cdot\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{3\cdot 2\cdot 1} \\
&= \frac{1}{2}(n+1)\cdot n + \frac{1}{3}\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1) \\
&= (n+1)\cdot n\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(n-1)\right) \\
&= (n+1)\cdot n\cdot\left(\frac{1}{3}n+\frac{1}{6}\right) \qquad = \frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}$$