Groß O und klein o für $x \to a$

- $f(x) \in \mathrm{O}\big(g(x)\big)$ für $x \to a$ g.d.w.

$$\exists\, C > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\; x \in \mathbb{R}: \quad 0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)| < C \cdot |g(x)|$$

kürzere Schreibweise: $f \in \mathrm{O}(g)$ für $x \to a$

- $f(x) \in \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ für $x \to a$ g.d.w.

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\; x \in \mathbb{R}: \quad 0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)| < \epsilon \cdot |g(x)|$$

kürzere Schreibweise: $f \in \mathrm{o}(g)$ für $x \to a$

Erste Beispiele:

$x^2 \in \mathrm{o}(x)$ für $x \to 0$ — x^2 strebt viel schneller gegen 0 als x für x gegen 0

aber

$x^{-1} \in \mathrm{o}(x^{-2})$ für $x \to 0$ — $\frac{1}{x}$ strebt viel langsamer gegen ∞ als $\frac{1}{x^2}$ für $x \to 0$

$x \in \mathrm{o}(x^2)$ für $x \to \infty$ — x^2 strebt viel schneller gegen ∞ als x für $x \to \infty$

$x^{-2} \in \mathrm{o}(x^{-1})$ für $x \to \infty$ — $\frac{1}{x}$ strebt viel langsamer gegen 0 als $\frac{1}{x^2}$ für $x \to \infty$

Entsprechend läßt sich auch der Begriff der **asymptotischen Äquivalenz** für den Fall $x \to a$ definieren.

Besonderheiten der Notation

Im Zusammenhang mit den Landau-Symbolen benutzt man meist das *Gleichheitszeichen* " $=$ " im Sinne des *Elementzeichens (Zugehörigkeitszeichens)* " $\in$ ".

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{g}) \quad \text{statt} \quad f \in O(g) \qquad\qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{O}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big) \quad \text{statt} \quad f(x) \in O\big(g(x)\big)$$

Landau-Symbole sollten daher möglichst auf der rechten Seite einer Gleichung stehen. Das Gleichheitszeichen kann nur in einer Richtung (von links nach rechts) gelesen werden.

$f = O(g)$ lies: f ist (gleich) groß Oh von g Dagegen sinnlos: $O(g)$ ist (gleich) f.

„Unfug“ bei Nicht-Beachtung: Beispiel: $\begin{cases} x^2 + 5 = O(x^2) \\ \quad\;\; 2x^2 = O(x^2) \end{cases}$

Also: $x^2 + 5 = O(x^2) = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 5 = 2x^2$

Beachte ferner: Eine Gleichung der Form $7x^5 + 8x^4 + O(x^3) = O(x^5)$

ist als *mengentheoretische Inklusion* zu verstehen: $7x^5 + 8x^4 + O(x^3) \subset O(x^5)$

Eine solche Gleichung kann sich beispielsweise in einer Rechnung ergeben, um einen längeren (schließlich doch irrelevanten) Ausdruck durch ein Landau-Symbol zu ersetzen.

Frage: Warum & wozu die Schreibweise mit dem $=$ Zeichen?

1) Tradition, **2)** $\exists$ sowieso unterschiedliche Bedeutungen des Gleichheitszeichens: Zuweisungsoperator n=n+1, Zuordnung einer Eigenschaft bzw. Subsummieren unter Oberbegriff: Apfel = grün (nicht immer!), Kirsche = rot oder Apfel = Frucht, Möhre = Gemüse usw.. Gleichheitszeichen wird als „ist“ gelesen. **Am wichtigsten: 3)** Es läßt sich sehr praktisch mit den Landau-Symbolen (insbesondere dem Groß-Oh und dem Klein-Oh) rechnen, wenn man diese als eine nicht näher spezifizierte bzw. nicht genau bekannte Rest-Funktion ansieht. Das Mitführen solcher Rest-Funktionen erlaubt es, ein äußerst unpräzises Ungefähr-Zeichen $\approx$ in ein Gleichheitszeichen $=$ zu verwandeln. Das Landau-Symbol läßt zwar die genaue Gestalt der Restfunktion **o**ffen, transportiert aber wesentliche Information über die Größenordnung dieser Rest-Funktion (bei Annäherung an eine bestimmte Stelle). Daraus ergibt sich ein Indikator für den ungefähren Gültigkeitsbereich einer Näherungsrechnung.

Die Schreibweise $f(x) \in O\big(g(x)\big)$ ist eigentlich mißverständlich, denn es ist nicht klar, ob damit eine Aussage über die Funktion f oder den Funktionswert $f(x)$ gemacht werden sollt.

Regeln für das Rechnen mit Groß-O und klein-o

Satz: f, g Folgen bzw. Funktionen, c Konstante

1) $c \cdot O(g) = O(g)$ $\qquad c \cdot O(g) := \{ c \cdot f \mid f = O(g)\}$

2) $O\big(O(g)\big) = O(g)$ $\qquad O\big(O(g)\big) := \bigcup_{f \in O(g)} O(f)$

3) $O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$

4) $f \cdot O(g) = O(f \cdot g)$

5) $O(f) + O(g) = O(|f| + |g|)$

6) $o(g) \cdot O(g) = o(g^2)$

7) $o(g) + O(g) = O(g)$

8) $O\big(g + o(g)\big) = O(g)$

Beachte ferner:

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad x^{n+1} = o(x^n) \qquad x \to 0$

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad x^n = o(x^{n+1}) \qquad x \to \infty$

$o(1)$ = Menge aller *Nullfolgen* (d.h. mit Grenzwert 0) bzw.
Menge aller Funktion, welche im betrachteten Grenzwert verschwinden.

$O(1)$ = Menge aller *beschränkten* Folgen (Betrag bleibt unterhalb einer gewissen Konstanten auch Schranke genannt) bzw. Menge aller Funktionen, welche im betrachteten Grenzwert beschränkt bleiben.

Es handelt sich hier jeweils um die Gleichheit von Mengen.

Verifikation zweier Rechenregeln

Beh.: $O\big(O(g)\big) = O(g) \qquad x \to 0$

Zeige: $O\big(O(g)\big) \subset O(g)$ d.h. $w \in O\big(O(g)\big) \Rightarrow w \in O(g)$.

Sei $w \in O\big(O(g)\big) \equiv \bigcup_{f \in O(g)} O(f) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, f \in O(g):\; w \in O(f)$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\, \delta_1, C_1 > 0:\; |x| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f(x)| < C_1 \cdot |g(x)| \\ \exists\, \delta_2, C_2 > 0:\; |x| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |w(x)| < C_2 \cdot |f(x)| \end{cases}$$

Daher gilt für $\delta := \min(\delta_1, \delta_2):\; |x| < \delta \;\Rightarrow\; |w(x)| < C_1 \cdot C_2 \cdot |g(x)|$

Also $w \in O(g)$ mit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ und $C := C_1 \cdot C_2$.

Trivialerweise $O(g) \subset O\big(O(g)\big)$ da $g \in O(g)$.

Beh.: $O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g) \qquad x \to 0$

Zeige zunächst $O(f) \cdot O(g) \subset O(f \cdot g)$. Sei also $w \in O(f) \cdot O(g)$.

$$\Rightarrow \quad \exists u \in \mathrm{O}(f) \wedge \exists\, v \in O(g):\; w = u \cdot v$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists u \in \mathrm{O}(f) \;\Leftrightarrow\; \exists \delta_1, C_1 > 0:\; |x| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |u(x)| < C_1 \cdot |f(x)| \\ \exists v \in \mathrm{O}(g) \;\Leftrightarrow\; \exists \delta_2, C_2 > 0:\; |x| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |v(x)| < C_2 \cdot |g(x)| \end{cases}$$

Daher gilt für $\delta := \min(\delta_1, \delta_2):\; |x| < \delta \;\Rightarrow\; |w(x)| = |u(x)| \cdot |v(x)| < C_1 \cdot C_2 \cdot |f(x) \cdot g(x)|$

Also $w \in O(f \cdot g)$ mit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ und $C := C_1 \cdot C_2$.

Umgekehrt $w \in O(f \cdot g) \Rightarrow \frac{w}{g} = O(f) \;\Rightarrow\; \frac{w}{g} \cdot g = O(f) \cdot O(g)$. Also $O(f) \cdot O(g) \subset O(f \cdot g)$.

N.B.: Die Definition von Groß-Oh bedingt, daß f und g in einer (einseitigen) Umgebung von Null verschieden sind, wegen des <-Zeichens.

Erstes Rechenbeispiel zum Umgang mit dem O-Symbol

$$f(y) = y + y^2 + O(y^4)$$

$$y = g(x) = 2x + x^2 + O(x^4)$$

Gesucht: $f\big(g(x)\big) = \ldots + O(x^4)$? für $x \to 0$

$$f\big(g(x)\big) = 2x + x^2 + O(x^4) + \big(2x + x^2 + O(x^4)\big)^2 + O\Big(\big(2x + x^2 + O(x^4)\big)^4\Big)$$

$$\begin{aligned}
\big(2x + x^2 + O(x^4)\big)^2 &= 4x^2 + x^4 + O(x^4)\cdot O(x^4) + 2\cdot 2x\cdot x^2 + 2\cdot 2x\cdot O(x^4) + 2\cdot x^2\cdot O(x^4) \\
&= 4x^2 + x^4 + O(x^4\cdot x^4) + 4x^3 + 4x\cdot O(x^4) + 2x^2\cdot O(x^4) \\
&= 4x^2 + 4x^3 + x^4 + O(x^8) + 4\cdot O(x^5) + 2\cdot O(x^6) \\
&= 4x^2 + 4x^3 + O(x^4) + O(x^5) + O(x^6) + O(x^8) \\
&= 4x^2 + 4x^3 + O(x^4)
\end{aligned}$$

$$O\Big(\big(2x + x^2 + O(x^4)\big)^4\Big) = \ldots = O(x^4)$$

Beim Rechnen mit den Landau-Symbolen vereinfacht sich die Rechnung dadurch, daß man nur die Terme der führenden Ordnung im Blick haben muß und die übrigen in dem Groß-Oh Term absorbieren (verschwinden lassen) kann. Das kleinschrittige Ausmultiplizieren, wie hier vorgeführt, ist nicht erforderlich, da sich die führenden Terme schnell überblicken lassen. Die ausführliche Rechnung dient hier lediglich zur Bestätigung und Kontrolle!

Also: $f\big(g(x)\big) = 2x + 5x^2 + 4x^3 + O(x^4)$

Es gilt für $n \in \mathbb{N}$: $O(x^{n+1}) \subset O(x^n)$ für $x \to 0$ **aber** $O(x^n) \subset O(x^{n+1})$ für $x \to \infty$.

Approximation von Funktionen durch Polynome bzw. abgebrochene Potenzreihenentwicklungen

1) Gebrochen rationale Funktionen
2) Wurzelfunktionen
3) Exponentialfunktion & Logarithmus

Frage: Existiert beispielsweise für die Funktion $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ eine brauchbare näherungsweise Vereinfachung, bei der die aufwendige Division vermieden wird? Die Näherung sollte mindestens in einer hinreichend kleinen Umgebung eines vorgegebenen x-Wertes (z.B. des Nullpunkts) gültig sein.

Zwei beispielhafte Näherungen:

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 \quad \text{für} \quad |x| \ll 1 \qquad\qquad \frac{1}{1-x} \approx 1 + x \quad \text{für} \quad |x| \ll 1$$

Multiplikation mit $1 - x$

Residuum: $1 \approx 1 - x$ $\qquad\qquad$ $1 \approx 1 - x^2$

Fehler: $\frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$ $\qquad\qquad$ $\frac{1}{1-x} - (1 + x) = -\frac{x^2}{1-x}$

Entwickeln einer *gebrochen rationalen* Funktion

Wie verhält sich $f(x) = \frac{1}{1-x}$ in der Nähe des *Nullpunkts* $(x = 0)$, für kleine x mit $|x| < 1$?

$f(0) = \frac{1}{1-0} = 1$

f verhält sich anständig bei 0 (*stetig* und daher *lokal beschränkt*)

$$\frac{1}{1-x} = O(1) \qquad x \to 0$$

Keine große Erkenntnis!

Wie läßt sich f in der Umgebung von 0 genauer annähern?

Vermutung: $\frac{1}{1-x} = 1 + O(x) \qquad x \to 0$

Nachrechnen: $\frac{1}{1-x} = 1 + O(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-x} - 1 = O(x)$

$$\frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} = \frac{x}{1-x} = x \cdot \frac{1}{1-x} = x \cdot O(1) = O(x) \quad ✔$$

Wie läßt sich die Entwicklung verbessern?

$$0 \in \ \dots \subset O(x^2) \subset O(x) \subset O(1)$$

Multipliziere Gleichung $\frac{1}{1-x} = 1 + O(x)$ mit $1 - x$.

$$1 = 1 - x + (1-x) \cdot O(x) = 1 - x + O(x) + O(x^2)$$

Wenn sich hinter $O(x)$ der Term $x + O(x^2)$ verbörge, so ergäbe sich die Gleichung $1 = 1 + O(x^2)$.

Vermutung: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2) \qquad x \to 0$

Entwickeln einer *gebrochen rationalen* Funktion (Forts.)

Vermutung: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2) \qquad x \to 0$

Nachrechnen: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-x} - (1+x) = O(x^2)$

$$\frac{1}{1-x} - (1+x) = \frac{1}{1-x} - \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{x^2}{1-x} = x^2 \cdot O(1) = O(x^2) \checkmark$$

Wie läßt sich die Entwicklung verbessern, d.h. eine Ordnung weitertreiben?

Multipliziere wiederum die Gleichung $\frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2)$ mit $1 - x$.

$$1 = (1-x)(1+x) + (1-x) \cdot O(x^2) = 1 - x^2 + \underbrace{O(x^2)}_{O(x^2) \to x^2 + O(x^3)} + O(x^3)$$

Vermutung: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^3) \qquad x \to 0$

Nachrechnen: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^3) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2) = O(x^3)$

$$\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2) = \frac{1}{1-x} - \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^3}{1-x} = \frac{x^3}{1-x} = x^3 \cdot O(1) = O(x^3) \checkmark$$

Zusammenfassung

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^3) \qquad x \to 0$$

Bedeutet konkret:

$$\exists\, C > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}: \quad |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2) \right| < C|x|^3$$

$$\left| \frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2) \right| = \left| \frac{x^3}{1-x} \right| = \frac{|x|^3}{|1-x|} \leq 2 \cdot |x|^3$$

für $|x| < 0{,}5$.

Vermutung: $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$ für $|x| < 1$

Folgerung: $$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + (-x)^4 + \ldots$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^k$$ für $|x| < 1$

↷ geometrische & alternierende geometrische Reihe

Reihenentwicklung mittels Polynomdivision $\mathbf{1 : (1+x)}$

$$1 : (1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \quad \text{Rest } -x^5$$

$$
\begin{array}{l}
\underline{-(1+x)} \\
\quad -x \\
\quad \underline{-(-x-x^2)} \\
\qquad x^2 \\
\qquad \underline{-(x^2+x^3)} \\
\qquad\quad -x^3 \\
\qquad\quad \underline{-(-x^3-x^4)} \\
\qquad\qquad x^4 \\
\qquad\qquad \underline{-(x^4+x^5)} \\
\qquad\qquad\quad -x^5
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - \frac{x}{1+x} \\
&= 1 - x + \frac{x^2}{1+x} \\
&= 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{1+x} \\
&= 1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{1+x} \\
&= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \frac{x^5}{1+x}
\end{aligned}
$$

Probe:

$$
\begin{aligned}
(1+x)\cdot\frac{1}{1+x} = 1 &= (1+x)\cdot\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \frac{x^5}{1+x}\right) \\
&= (1 - x + x^2 - x^3 + x^4) + (x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5) - (1+x)\cdot\frac{x^5}{1+x} \\
&= 1 + x^5 - x^5 \quad = 1 \quad ✔
\end{aligned}
$$

Reihenentwicklung mittels Polynomdivision $1 : (x+1)$

$$1 : (x+1) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \qquad \text{Rest } -\frac{1}{x^5}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\
\quad -\frac{1}{x} \\
\quad \underline{-\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} \\
\qquad \frac{1}{x^2} \\
\qquad \underline{-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} \\
\qquad\quad -\frac{1}{x^3} \\
\qquad\quad \underline{-\left(-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)} \\
\qquad\qquad \frac{1}{x^4} \\
\qquad\qquad \underline{-\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)} \\
\qquad\qquad\quad -\frac{1}{x^5}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1} &= \frac{1}{x} - \frac{\frac{1}{x}}{x+1} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x^2}}{x+1} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{\frac{1}{x^3}}{x+1} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{\frac{1}{x^4}}{x+1} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} - \frac{\frac{1}{x^5}}{x+1}
\end{aligned}$$

Probe: z.B.

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x^2}}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{x+1}{x} - \frac{x+1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \quad \checkmark$$

Fazit: Reihenentwicklung mittels Polynomdivision

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \frac{x^5}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + O(x^5) \qquad x \to 0$$

||

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} - \frac{\frac{1}{x^5}}{x+1}$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + O\left(\frac{1}{x^6}\right) \qquad x \to \infty$$