Beziehungen zwischen Binomialkoeffizienten

Es gilt: $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1} \quad = \binom{n}{k-1} \cdot \binom{n-k+1}{1}$

Anschaulicher Beweis:

Aus einer Klasse von n Kindern soll eine k-köpfige Mannschaft ausgewählt werden, wobei eines der ausgewählten Kinder als „Kapitän" benannt werden soll. #Möglichkeiten = ?

Vorgehensweise 1: Zunächst werden k Kinder ausgewählt. Gemäß der Definition der Binomialkoeffizienten hat man dafür $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. Danach steht für die Festlegung des Kapitäns jedes der k Kinder aus der gewählten Mannschaft zur Verfügung. Daher gibt es insgesamt $\binom{n}{k} \cdot k$ Auswahlmöglichkeiten.

Vorgehensweise 2: Zuerst wird unter den n Kindern ein Anführer der Mannschaft bestimmt. Dafür bestehen $\binom{n}{1} = n$ Möglichkeiten. Danach werden von den verbleibenden $n-1$ Kindern $k-1$ weitere ausgewählt, die den Rest der Mannschaft ausmachen. Gemäß Definition der Binomialkoeffizienten geht dies auf $\binom{n-1}{k-1}$´fache Weise, so daß insgesamt $n \cdot \binom{n-1}{k-1}$ Auswahlmöglichkeiten existieren.

Da jede denkbare Mannschaftszusammensetzung (Konstellation) durch beide Vorgehensweisen erzeugt werden kann, sind diese äquivalent. Es muß daher gelten:

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{1} = \binom{n}{1} \cdot \binom{n-1}{k-1} \quad \Leftrightarrow \quad \binom{n}{k} \cdot k = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

Formalisierter Beweis der Beziehung

Formaler Beweis: n-Menge $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ (Z.B. Menge von n Kindern)

$Y := \mathcal{P}_k(X)$ (Menge der k-Teilmengen von X)

Definiere *Relation* R zwischen X und $Y = \mathcal{P}_k(X)$: $(x, T) \in R \iff x \in T$

Ein Element von $x \in X$ steht in Relation zu einer k-Teilmenge $T \subset X$, wenn x in T liegt, also $x \in T$ gilt.

Doppeltes Abzählen:

$$\begin{aligned}
\#R &= \sum_{x \in X} \#\{T \in \mathcal{P}_k(X) \colon\ x \in T\} \\
&= \sum_{x \in X} \#\mathcal{P}_{k-1}(X \setminus \{x\}) \\
&= \sum_{x \in X} \binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-1}{k-1} \cdot \sum_{x \in X} 1 \\
&= \binom{n-1}{k-1} \cdot n
\end{aligned}$$

Gleichheitsprinzip benutzt

$$\begin{aligned}
\#R &= \sum_{T \in \mathcal{P}_k(X)} \#\{x \in X \colon\ x \in T\} \\
&= \sum_{T \in \mathcal{P}_k(X)} k \\
&= k \cdot \sum_{T \in \mathcal{P}_k(X)} 1 \\
&= k \cdot \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Identität kann auch mittels der expliziten Darstellungsformel verifiziert werden. ■

Verallgemeinerung: $\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} = \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$

Summenformeln im „*Pascal*schen Dreieck“

Matrixanordnung der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$: n Zeilenindex, k Spaltenindex

Oberer Index
= erster Index.

$$
\begin{array}{c|l}
 & k \longrightarrow \\
 & \begin{array}{cccccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \\
1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 1 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & & \ddots
\end{array} \\
n \downarrow &
\end{array}
$$

Als doppelt indizierte Größen lassen sich die Binomialkoeffizienten in einer Matrix anordnen, die einen unendlich ausgedehnten Quadranten (d.h. eine Viertelebene) überdeckt, weil die unendliche Menge $\mathbb{N}_0$ sowohl für den oberen Index n als auch für den unteren Index k als Indexmenge fungiert. Da die Binomialkoeffizienten für $k > n$ verschwinden, ergibt sich eine (unendlich) ausgedehnte untere Dreiecksmatrix. Man beachte, daß bei der klassischen Darstellung des Pascalschen Dreiecks aufeinanderfolgende Zeilen gegeneinander versetzt (verschoben) sind, um die Rekursionsbeziehung besser bzw.in symmetrischer Weise hervorzuheben. Dadurch erhält man eine Anordnung der Koeffizienten in Form eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Scheitelspitze nach oben weist.

vertikale Summe $$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

diagonale Summe $$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

Da Dreiecksmatrizen stets invertierbar sind (aufgrund ihres vollen Rangs) sind folgende Fragen sinnvoll: Aus welchen Koeffizienten setzt sich die unendliche inverse Matrix zusammen? Wie sehen die Inversen der quadratischen Teilmatrizen aus?

Induktiver Beweis der Summenformeln unter Anwendung der Rekursionsbeziehung

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

vertikale Summe

Beweis: Induktionsschritt $A(k) \Rightarrow A(k+1)$

$$\underbrace{\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots + \binom{n+k}{n}} + \binom{n+(k+1)}{n} = \ldots$$

$$\ldots = \binom{n+k+1}{n+1} + \binom{n+k+1}{n} = \binom{n+k+2}{n+1} \checkmark$$

■

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

diagonale Summe

Beweis: Induktionsschritt $A(k) \Rightarrow A(k+1)$

$$\underbrace{\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \ldots + \binom{n+k}{k}} + \binom{n+k+1}{k+1} = \ldots$$

$$\ldots = \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+2}{k+1} \checkmark$$

■

Kombinatorische Interpretation der *vertikalen* Summenformel

#(5-Teilmengen) der 9-Menge $\{1,2,\dots,9\} \quad = \quad \binom{9}{5}$

5-Teilmengen = aufsteigend geordnete Tupel:

$$(a,b,c,d,e) \text{ mit } 1 \le a < b < c < d < e \le 9$$

Klassifiziere nach dem *größten Element*:

Klasse	Laufbereich der Variablen	#Elemente
$(1,2,3,4,5)$	--	$1 = \binom{4}{4}$
$(a,b,c,d,6)$	$1 \le a < b < c < d \le 5$	$\binom{5}{4}$
$(a,b,c,d,7)$	$1 \le a < b < c < d \le 6$	$\binom{6}{4}$
$(a,b,c,d,8)$	$1 \le a < b < c < d \le 7$	$\binom{7}{4}$
$(a,b,c,d,9)$	$1 \le a < b < c < d \le 8$	$\binom{8}{4}$

$$\Rightarrow \qquad \binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} = \binom{9}{5}$$

Kombinatorische Interpretation der *diagonalen* Summenformel

#(4-Teilmengen) der $(n+5)$-Menge $\{1,2,\ldots,n+5\}$ $= \binom{n+5}{4}$

4-Teilmengen = aufsteigend geordnete Tupel:

$$(u,v,w,x) \text{ mit } 1 \leq u < v < w < x \leq n+5$$

Klassifiziere nach der mit 1 beginnenden, *lückenlosen Anfangssequenz*

Klasse	Laufbereich der Variablen	#Elemente
$(1,2,3,4)$	--	$1 = \binom{n}{0}$
$(1,2,3,x)$	$5 \leq x \leq n+5$	$\binom{n+5-4}{1} = \binom{n+1}{1}$
$(1,2,w,x)$	$4 \leq w < x \leq n+5$	$\binom{n+5-3}{2} = \binom{n+2}{2}$
$(1,v,w,x)$	$3 \leq v < w < x \leq n+5$	$\binom{n+5-2}{3} = \binom{n+3}{3}$
(u,v,w,x)	$2 \leq u < v < w < x \leq n+5$	$\binom{n+5-1}{4} = \binom{n+4}{4}$

$$\Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4} = \binom{n+5}{4}$$

Unvollständige alternierende horizontale Summe

$$\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{\ell}\binom{n}{\ell} = (-1)^{k}\binom{n-1}{k}$$

Beweis: Die Summe erweist sich als *Teleskopsumme*.

$$\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{\ell}\binom{n}{\ell} = \binom{n}{0}+\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell}\binom{n}{\ell} = \binom{n}{0}+\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell}\left[\binom{n-1}{\ell-1}+\binom{n-1}{\ell}\right]$$

$$= \binom{n}{0} + \sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell}\binom{n-1}{\ell-1} + \sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell}\binom{n-1}{\ell}$$

$$= \binom{n}{0} - \binom{n-1}{0} + \sum_{\ell=2}^{k}(-1)^{\ell}\binom{n-1}{\ell-1} + \sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell}\binom{n-1}{\ell}$$

$$= 1-1+\sum_{\ell=1}^{k-1}(-1)^{\ell-1}\binom{n-1}{\ell} + \sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell}\binom{n-1}{\ell}$$

$$= 1-1+\sum_{\ell=1}^{k-1}(-1)^{\ell-1}\left[\binom{n-1}{\ell}-\binom{n-1}{\ell}\right] + (-1)^{k}\binom{n-1}{k} = (-1)^{k}\binom{n-1}{k} \qquad \blacksquare$$

Bereits bekannter Spezialfall:

$k=n$: vollständige alternierende horizontale Summe: $\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^{\ell}\binom{n}{\ell} = (-1)^{n}\binom{n-1}{n} = 0$

Kombinatorische Deutung?

Welcher Binomialkoeffizient ist bei festem n der größte?

Absorptions- und Extraktionsregeln

Je nach Sichtweise wird ein Faktor aus dem linken Binomialkoeffizient extrahiert oder in den rechten Binomialkoeffizienten absorbiert.

Diagonale Rekursion der Binomialkoeffizienten (bereits behandelt):

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} \quad \Leftrightarrow \quad (k+1)\cdot\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\cdot\binom{n}{k}$$

Man beachte den Unterschied: Oben wird zuerst der Kapitän und dann die Restmannschaft ausgewählt. Unten wird erst die Mannschaft ohne Kapitän ausgewählt und danach aus den verbliebenen Personen ein Kapitän bestimmt.

Horizontale Rekursion der Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} \quad \Leftrightarrow \quad (k+1)\cdot\binom{n}{k+1} = (n-k)\cdot\binom{n}{k}$$

Interpretation analog zur diagonalen Rekursion: Wähle zunächst aus n Personen $k+1$ Personen aus und von diesen einen Anführer. Wähle zunächst von n Personen k aus und von den verbleibenden $n-k$ Personen eine weitere als Kapitän.

$$\frac{n-k}{k+1} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n-1}{2} > k \qquad \Rightarrow \; k < \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$$

Binomialkoeffizienten wachsen, solange $k < \lfloor n/2 \rfloor$ ist.

$$\frac{n-k}{k+1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n-1}{2} = k \qquad \Rightarrow n \text{ ist ungerade } \wedge\; k = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \qquad \Rightarrow \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2\rceil}$$

$$\frac{n-k}{k+1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n-1}{2} < k \qquad \Rightarrow \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor < k \;\Rightarrow\; k \geq \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$$

Binomialkoeffizienten fallen, sobald $\lfloor n/2 \rfloor < k$ bzw. $k \geq \lceil n/2 \rceil$ ist.

$$\Rightarrow n = 2m: \qquad \max_{0\le k\le 2} \binom{2m}{k} = \binom{2m}{m}$$

$$\Rightarrow n = 2m{+}1: \qquad \max_{0\le k\le 2m+1} \binom{2m+1}{k} = \binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$$

Die Binomialkoeffizienten weisen für festes n und variables k ein *unimodales* (buckelförmiges) Wachstumsverhalten auf.

Ziel: Nachvollziehen der Beobachtung, daß der bzw. die mittleren Binomialkoeffizienten (im geraden bzw. ungeraden Fall) den größten Wert in einer Zeile erreichen. Die beiden Rekursionen ergeben sich auch aus der expliziten Darstellung mittels Faktorieller.