Erste Anwendungen
Abzählen von Abbildungen

Sind zwei (endliche) Mengen X_n und Y_r gegeben, so läßt sich daraus eine „komplexere“ Menge erzeugen, nämlich die Menge der Abbildungen $Abb(X_n, Y_r) \equiv Y_r^{X_n}$ von X_n nach Y_r. Diese Menge soll als erstes abgezählt werden, wobei die Kardinalitäten der Definitionsmenge (Ausgangsmenge) X_n und der Wertemenge (Zielmenge) Y_r als bekannt vorausgesetzt werden. Auch die möglichen *bijektiven*, *injektiven* und *surjektiven* Abbildungen lassen sich verhältnismäßig leicht abzählen.

Über die Anzahl der Abbildungen zwischen zwei Mengen haben wir bereits kurz in IMI 1 gesprochen; insbesondere im Zusammenhang mit der Erfassung sämtlicher binärer logischer Verknüpfungen.

Abzählen von Abbildungen

Generelle Abbildungen

Satz: Es seien X_n und Y_r zwei endliche Mengen mit $|X_n| = n$ und $|Y_r| = r$. Dann gilt:

1) Es gibt genau r^n Abbildungen von X nach Y, also

$$\#\mathrm{Abb}(X_n, Y_r) \equiv \#\{f: X_n \to Y_r\} = r^n.$$

2) Es gibt genau $r^{\underline{n}}$ *injektive* Abbildungen von X_n nach Y_r, also

$$\#\mathrm{Inj}(X_n, Y_r) \equiv \#\left\{f: X_n \overset{\text{inj.}}{\longrightarrow} Y_r\right\} = r^{\underline{n}}.$$

Korollar (Folgerung)**:** Falls $n = r$ ist, so gibt es genau $n!$ *Bijektionen* (Permutationen) zwischen X und Y.

Beweis: Betrachte als geordnete Mengen: $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y_r = \{y_1, \dots, y_r\}$

Ad 1) $\mathrm{Abb}(X_n, Y_r)$ und $(Y_r)^n$ sind gleichmächtig, denn die Zuordnung

$$f \in \mathrm{Abb}(X_n, Y_r) \quad \mapsto \quad \big(f(x_1), \dots, f(x_n)\big) \in \underbrace{Y_r \times \dots \times Y_r}_{} = |Y_r|^n$$

ist *bijektiv*, weil jede Abbildung aus $\mathrm{Abb}(X_n, Y_r)$ auch umgekehrt eindeutig durch ein Tupel aus $(Y_r)^n$ dargestellt wird. *Gleichheitsprinzip* und *Produktregel* liefern daher:

$$\#\mathrm{Abb}(X_n, Y_r) = |Y_r|^n = r^n.$$

$X^n \equiv X \times \dots \times X \leftrightarrow \{f: \{1, \dots, n\} \to X\} \equiv \mathrm{Abb}(\{1, \dots, n\}, X) \quad \wedge \quad |X^n| = |X|^n \quad \Rightarrow \quad \#\mathrm{Abb}(\{1, \dots, n\}, X) = |X|^n$

Informeller Beweis: Man betrachte n unterschiedliche Kugeln, die in r unterscheidbare Fächer sortiert werden sollen. Durch die Verteilung der Kugeln auf die Fächer entsteht eine Abbildung von der n-Menge der Kugeln in die r-Menge der Fächer. Können die Kugeln irgendwie plaziert werden, so gibt es für jede Kugel r Möglichkeiten insgesamt r^n Möglichkeiten. Darf sich in jedem Fach höchstens eine Kugel befinden, so gibt es für die erste Kugel r Möglichkeiten, für die zweite jedoch nur $r-1$, da bereits ein Fach besetzt ist. Entsprechend bestehen für die zweite Kugel $r-2$ Möglichkeiten usw. bis für die n'te Kugel nur noch $r-n+1$ Möglichkeiten verbleiben. *In toto*, erhält man dann $r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot (r-n+1) = r^{\underline{n}}$ Möglichkeiten.

Abzählen von Abbildungen (Forts.) *Injektive* Abbildungen

Ad 2) Beweis per *Induktion* über n. **Induktionsanfang** $(n = 1)$ $\#\mathrm{Inj}(X_1, Y_r) = r^{\underline{1}} = r$.

Induktionsschritt:

Klassifikation von $\mathrm{Inj}(X_{n+1}, Y_r)$ nach $f(x_{n+1}) \in Y_r$

$$\mathrm{Inj}(X_{n+1}, Y_r) = \left\{ f : X_{n+1} \xrightarrow{\text{injektiv}} Y_r \right\} = \dot{\bigcup_{1 \le i \le r}} \left\{ f : X_{n+1} \xrightarrow{\text{injektiv}} Y_r \mid f(x_{n+1}) = y_i \right\}$$

Bijektion: $\left\{ f : X_{n+1} \xrightarrow{\text{injektiv}} Y_r \mid f(x_{n+1}) = y_i \right\} \leftrightarrow \mathrm{Inj}\big(X_{n+1} - \{x_{n+1}\},\, Y_r - \{y_i\}\big)$

$$\#\mathrm{Inj}(X_{n+1}, Y_r) = \sum_{1 \le i \le r} \#\left\{ f : X_{n+1} \xrightarrow{\text{injektiv}} Y_r \mid f(x_{n+1}) = y_i \right\}$$

Summenregel

$$= \sum_{1 \le i \le r} \#\mathrm{Inj}\big(\underbrace{X_{n+1} - \{x_{n+1}\}}_{n\text{-Menge}},\, \underbrace{Y_r - \{y_i\}}_{(r-1)\text{-Menge}} \big)$$

Gleichheitsprinzip

Induktionsvoraussetzung

$$= \sum_{1 \le i \le r} (r-1)^{\underline{n}} = (r-1)^{\underline{n}} \sum_{1 \le i \le r} 1$$

$$= (r-1)^{\underline{n}} \cdot r = r^{\underline{n+1}}$$

■

Abzählen von Abbildungen (Forts.) *Surjektive* Abbildungen

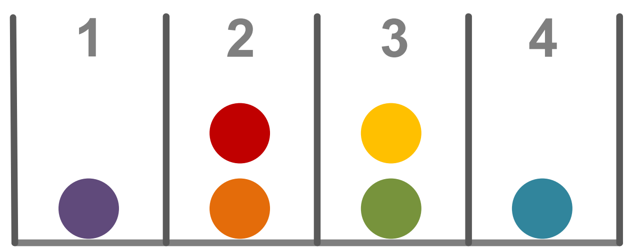
$X_n = n$-Menge, d.h. $|X_n| = n$ $\qquad$ $Y_r = r$-Menge, d.h. $|Y_r| = r$

Frage: Wie viele *surjektive* Abbildungen existieren zwischen X_n und Y_r ?

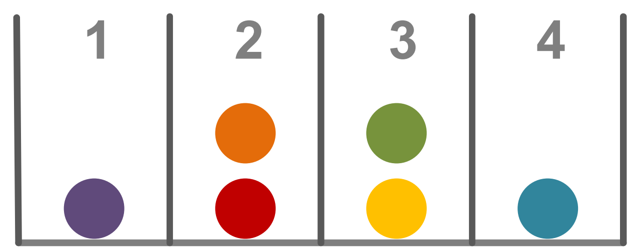
$$\binom{n}{r} \cdot r! \cdot r^{n-r} \qquad ?$$

Eine fragwürdige Herleitung? Sollen n (unterscheidbare) Kugeln auf r (unterscheidbare) Fächer *surjektiv* verteilt werden, so ist dies nur für $n \geq r$ möglich. Surjektiv bedeutet dabei, daß sich in jedem Fach mindestens eine Kugel befindet. Daher liegt es nahe zu versuchen, die surjektiven Abbildungen in folgender Weise abzuzählen: Zunächst wählt man r der n Kugeln aus. Dafür ergeben sich $\binom{n}{r}$ Möglichkeiten. Dann verteilt man diese r Kugeln *bijektiv* auf die r Fächer, was auf $r!$ Weisen bewerkstelligt werden kann. Die verbliebenen $n - r$ Kugeln können dann in beliebiger Weise in die r Fächer sortiert werden. Da dies einer beliebigen Abbildung von einer $n - r$-Menge in eine r-Menge entspricht, gibt es dafür r^{n-r} Möglichkeiten. Insgesamt ergeben sich nach dieser Argumentation $\binom{n}{r} \cdot \boldsymbol{r}! \cdot \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{n-r}}$ Möglichkeiten, die n Kugeln surjektiv in den r Fächern unterzubringen. Für den Fall, daß wegen $r > n$ gar keine surjektive Abbildung existiert, verschwindet der Ausdruck wegen des Binomialkoeffizienten. Auch wenn dieser Umstand als Indiz für die Stimmigkeit der Berechnung gewertet werden mag, so erweist sich die hergeleitete Formel als falsch, da der Argumentation keine Klassifikation der surjektiven Abbildungen in disjunkte Teilmengen zugrunde liegt. Mit anderen Worten, bei der durchgeführten Abzählung kommt es zu Mehrfachzählungen.

Beispiel einer Mehrfachzählung (Verteilung von 6 Kugeln auf 4 Fächer):



Verteilung 1



Verteilung 2

Zunächst werden 4 der 6 Kugeln ausgewählt. Dies geschieht bei den beiden Verteilungen auf unterschiedliche Weise. Daher werden diese bei der obigen Berechnung als verschieden betrachtet, obwohl sie sich doch im Nachhinein als identisch herausstellen. Dies liegt an der Möglichkeit, die restlichen Kugeln so zu verteilen, daß sich schließlich in beiden Fällen die gleiche Verteilung ergibt. Man beachte, daß die Reihenfolge, in welcher die Kugeln den Fächern zugeordnet werden, für den Vergleich zweier Verteilungen nicht berücksichtigt werden darf. (D.h. es kommt nur auf das Resultät an, nicht wie dieses erzielt wurde.)

Nochmals: Anzahl *injektiver* Abbildungen

Um eine Idee zu bekommen, wie sich die Anzahl der *surjektiven* Abbildungen berechnen läßt, schauen wir uns nochmals die Abzählung der injektiven Abbildungen aus anderer Perspektive an. Es gilt:

$$\text{Abbildung ist injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \#\text{Definitionsmenge} = \#\text{Bildmenge}$$

Aus jeder **injektiven** Abbildung ergibt sich (in umkehrbar eindeutiger Weise) eine **bijektive** Abbildung, wenn man die Wertemenge auf die Bildmenge verkleinert.

(Injektive) Abbildungen lassen sich nach ihrer Bildmenge **klassifizieren**, denn:

Generell gilt (ob injektiv oder nicht) für $f, g\colon\ X_n \longrightarrow Y_r$: $\quad f(X_n) \neq g(X_n) \quad \Rightarrow \quad f \neq g$

Wie viele *injektive* Abbildungen gibt es von X_n nach Y_r?

- Es existieren $\binom{r}{n}$ Möglichkeiten, eine n-Teilmenge $B_n \subset Y_r$ als Bildmenge auszuwählen.
- Es existieren $n!$ Bijektionen zwischen den n-Mengen X_n und B_n.
- Eine bijektive Abbildung $f\colon X_n \to B_n$ läßt sich quasi als Tupel verstehen:

$$\left(B_n, \tilde{f}\right) \ \in \ \{T \subset Y_r\colon |T| = n\} \ \times \ \mathrm{Bij}(n)$$

$\mathrm{Bij}(n)$ ist Menge aller Bijektionen zwischen zwei abstrakten n-Mengen, insbesondere die Menge aller bijektiven Selbstabbildungen der Menge $\{1, \dots, n\}$.

Indiziert man die Elemente der n-Mengen X_n und B_n jeweils von 1 bis n, so ergibt sich aus $\tilde{f} \in \mathrm{Bij}(n)$ eine bijektive Abbildung zwischen X_n und B_n.

Produktregel
des Abzählens
$\Rightarrow$

$$\#\left\{f\colon X_n \xrightarrow{\text{injektiv}} Y_r\right\} \ = \ \binom{r}{n} \cdot n!$$

Durch Vergleich mit der anderen Abzählung ergibt sich ein expliziter Ausdruck für die Binomialkoeffizienten; darauf kommen wir weiter unten zurück.

Anzahl *surjektiver* Abbildungen

Besteht eine ***Parallele*** zwischen *injektiven* und *surjektiven* Abbildungen?

Charakterisierung injektiver bzw. surjektiver Abbildungen

1) Abbildung ist *injektiv* $\Leftrightarrow$ #Definitionsmenge = #Bildmenge
2) Abbildung ist *surjektiv* $\Leftrightarrow$ #Fasermenge = #Wertemenge (Zielmenge)

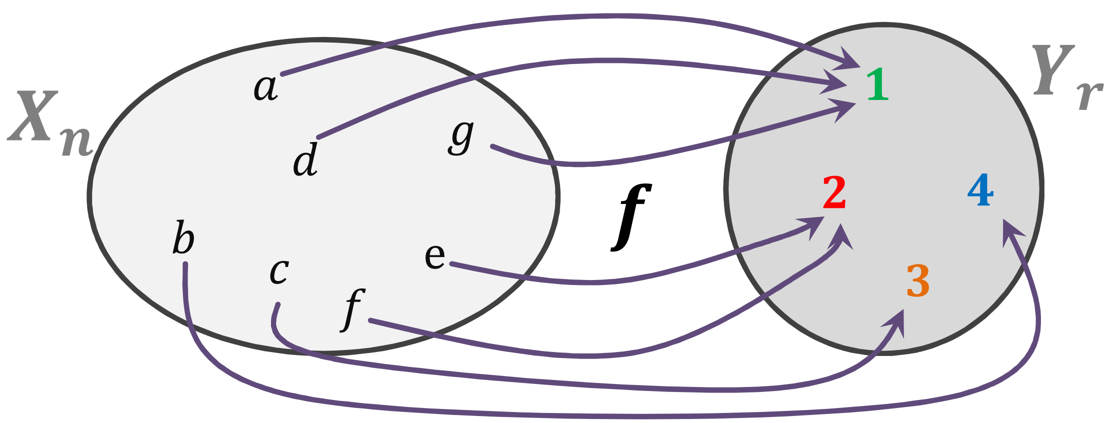
Auch zu jeder **surjektiven** Abbildung ergibt sich (in umkehrbar eindeutiger Weise) eine **bijektive** Abbildung, wenn man die zugehörige *kanonisch induzierte Abbildung* auf ihrer Fasermenge betrachtet (d.h. man ersetzt quasi die ursprüngliche Definitionsmenge durch die Fasern).

Fasermenge von $f\colon X_n \to Y_r$: $\mathcal{F}_f := \underbrace{\{f^{-1}(\{y\}):\ y \in Y_r\}}_{\text{Menge aller Fasern bzw. aller Niveaumengen von } f.} \subset \mathcal{P}(X_n)$

Kan. Induzierte Abbildung auf der Fasermenge $\overline{f}\colon \mathcal{F}_f \to Y_r$:

$$\overline{f} : f^{-1}(\{y\}) \mapsto \overline{f}\big(f^{-1}(\{y\})\big) := y$$

Beispiel:



Auflistung aller Fasern:

$$\begin{cases} f^{-1}(\{1\}) = \{a, d, g\} \\ f^{-1}(\{2\}) = \{e, f\} \\ f^{-1}(\{3\}) = \{c\} \\ f^{-1}(\{4\}) = \{b\} \end{cases}$$

Kanonisch induzierte Abbildung $\overline{f}$ auf der Fasermenge

$$\begin{cases} \overline{f}(\{a, d, g\}) = 1 \\ \overline{f}(\{e, f\}) = 2 \\ \overline{f}(\{c\}) = 3 \\ \overline{f}(\{b\}) = 4 \end{cases}$$

$\overline{f}$ ist bijektiv.

Achtung: Der Begriff Fasermenge kann auch synonym für eine einzelne Faser bzw. Niveaumenge stehen. In diesem Sinne wird er aber hier nicht gebraucht. Vielmehr steht die Fasermenge hier für die Gesamtheit aller Fasern bzw. Niveaumengen.

Anzahl *surjektiver* Abbildungen (Forts.)

Fasermenge (Faserzerlegung, Auffaserung) = disjunkte Zerlegung (Partition) der Definitionsmenge.

(Surjektive) Abbildungen $f\colon X_n \to Y_r$ lassen sich nach ihren Fasermengen *klassifizieren*, denn zwei Abbildungen sind niemals gleich, wenn sie sich bzgl. ihrer Faserzerlegung unterscheiden.

Es gibt genau so viele Klassen, wie es Möglichkeiten gibt, die n-elementige Definitionsmenge in r jeweils nichtleere Teilmengen zu zerlegen.

Def.: Der ***Mengenzerlegungskoeffizient*** $S(n,r)$ zu den Parametern $n, r \in \mathbb{N}$ entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, eine n-Menge in r *paarweise disjunkte* und jeweils *nichtleere* Teilmengen vollständig aufzuteilen.
Die Zahlen $S(n,r)$ für $n, r \in \mathbb{N}$ (bzw. $\mathbb{N}_0$) werden allgemein als **Stirling-Zahlen zweiter Art** bezeichnet.

Nun gilt:

- $\exists\ S(n,r)$ Möglichkeiten die n-elementige Definitionsmenge X_n in r Fasern zu zerlegen.
- $\exists\ r!$ Möglichkeiten die r Fasern bijektiv auf die r-elementige Wertemenge Y_r abzubilden.
- Analog zur Abzählung der injektiven Abbildungen folgt:

$$\overset{\text{Produktregel des Abzählens}}{\Rightarrow} \qquad \#\left\{f\colon X_n \xrightarrow{\text{surjektiv}} Y_r\right\} = S(n,r)\cdot r!$$

Zusammenfassung

$$\#\left\{f\colon X_n \xrightarrow{\textbf{injektiv}} Y_r\right\} = b(r,n)\cdot n! \equiv \underbrace{\binom{r}{n}}_{\substack{\textit{Teilmengenauswahlkoeffizient}\ (\textbf{Binomialkoeffizient})\ \text{zu den Parametern}\ r,n}}\cdot n! \qquad \neq 0 \text{ für } r \geq n$$

$$\#\left\{f\colon X_n \xrightarrow{\textbf{surjektiv}} Y_r\right\} = S(n,r)\cdot r! \equiv \underbrace{\left\{ n \atop r \right\}}_{\substack{\textit{Mengenzerlegungskoeffizient}\ (\textbf{Stirling Zahl 2. Ordnung})\ \text{zu den Parametern}\ n,r}}\cdot r! \qquad \neq 0 \text{ für } n \geq r$$

Es gelten ähnliche *Rekursionsgleichungen* für alle $m,\ell \in \mathbb{N}$:

$$b(m,\ell) = b(m-1,\ell-1) + 1\cdot b(m-1,\ell) \quad \text{bzw.} \quad \binom{m}{\ell} = \binom{m-1}{\ell-1} + 1\cdot\binom{m-1}{\ell}$$

$$S(m,\ell) = S(m-1,\ell-1) + \ell\cdot S(m-1,\ell) \quad \text{bzw.} \quad \left\{ m \atop \ell \right\} = \left\{ m-1 \atop \ell-1 \right\} + \ell\cdot\left\{ m-1 \atop \ell \right\}$$

Beweis als Übungsaufgabe.

Die Abzählung injektiver und surjektiver Abbildungen zeigt eine übereinstimmende Struktur auf (bzw. verläuft nach einem gleichartigen Schema). Die Binomialkoeffizienten sind jedoch sehr viel leichter explizit anzugeben als die Stirling Zahlen zweiter Ordnung.

Initialisierung der Stirling Zahlen 2. Ordnung: $S(0,0) = 1,\ S(0,\ell) = 0$ für $\ell > 0$ und $S(m,0) = 0$ für $m > 0$.

Binomialkoeffizienten (revisted)

- Kombinatorische Definition (Wiederholung)
- Explizite Berechnungsformel
- Der binomische Lehrsatz ($\rightarrow$ Namensklärung)
- Unmittelbare Folgerungen aus dem binomischen Lehrsatz
- Weitere kombinatorische Deutung der Binomialkoeffizienten

- Beziehungen zwischen Binomialkoeffizienten
- Summenformeln im *Pascal*schen Dreieck
- Induktive versus kombinatorische Beweise
- Auf- und absteigendes (unimodales)Verhalten der Binomialkoeffizienten.

Kombinatorische Definition der Binomialkoeffizienten

Definition: Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen (k-Teilmengen) einer n-Menge wird als *Binomialkoeffizient* zu den Indizes n und k be-zeichnet. Man schreibt dafür $b(n,k) \equiv \binom{n}{k}$.

Einige Werte: $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $\binom{n}{0} := 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad k > n \;\Rightarrow\; \binom{n}{k} = 0$

Beachte: Die Definition von Binomialkoeffizienten wie $\binom{0}{0}$ oder allgemein $\binom{n}{0}$ mag anschaulich mehr oder weniger plausibel erscheinen. Eine Rechtfertigung erfährt sie vor allem dadurch, daß mit dieser Setzung die Rekursionsgleichung korrekt initialisiert wird.

Zwei erste Eigenschaften:

Rekursionsgleichung: $\forall n,k \in \mathbb{N}$: $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Auch *Rekurrenzgleichung* genannt.

Beweis: Es sei X eine n-Menge. Fixiere ein Element $x_0 \in X$.

Klassifiziere die k-Teilmengen von X nach der Zugehörigkeit von x_0.

Es gibt $\binom{n-1}{k-1}$ verschiedene k-Teilmengen von X, welche x_0 enthalten.

Es gibt $\binom{n-1}{k}$ verschiedene k-Teilmengen von X, welche x_0 **nicht** enthalten. ■

Symmetrie: $\forall n \in \mathbb{N}_0, \forall k \in \{0,1,\dots,n\}$: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Beweis: Zu jeder k-Teilmenge einer n-Menge X gehört als Komplement in eindeutiger Weise eine $n-k$ Teilmenge. ■

Aufgrund der hiesigen Definition wäre die Bezeichnung **Teilmengen-Auswahlkoeffizient** oder **Teilmengen-Anzahlkoeffizient** weit sinnvoller. Die Bezeichnung Binomialkoeffizienten ergibt sich auf den nächsten Folien.

Explizite Darstellung der Binomialkoeffizientzen

Satz: $$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \equiv \frac{n(n-1)\cdot\ \ldots\cdot\ (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Beweis: (Zweifaches Abzählen) $X_k = k$-Menge, $Y_n = n$-Menge, $k \leq n$

Klassifiziere injektive Abbildungen $f \in \mathrm{Inj}(X_k, Y_n)$ nach ihrer Bildmenge $f\,(X_k) = S$. Jede *injektive* Abbildung wird durch Einschränkung ihrer Wertemenge auf ihre Bildmenge bijektiv. Also folgt:

$$\mathrm{Inj}(X_k, Y_n) = \dot{\bigcup_{\substack{S\subset Y_n\\|S|=k}}} \mathrm{Bij}(X_k, S)$$

Additionsprinzip / Summenregel

$$\#\,\mathrm{Inj}(X_k, Y_n) = \sum_{\substack{S\subset Y_n\\|S|=k}} \#\,\mathrm{Bij}(X_k, S)$$

Anzahl der injektiven (insbesondere auch bijektiven) Abbildungen wurde bereits berechnet.

$$n^{\underline{k}} = \sum_{\substack{S\subset Y_n\\|S|=k}} k!$$

$$n^{\underline{k}} = k! \sum_{\substack{S\subset Y_n\\|S|=k}} 1$$

$$n^{\underline{k}} = k! \cdot \binom{n}{k}$$

Beachte: Zwei Abbildungen unterscheiden sich schon dann, wenn sie sich in ihrer Wertemenge unterscheiden, erst recht aber wenn sie sich in ihrer Bildmenge unterscheiden.

Bemerkung: Quasi als Korollar ergibt sich, daß ein Produkt von k aufeinanderfolgeden natürlichen Zahl-en durch $k!$ teilbar ist.

■

Namensklärung: Der binomische Lehrsatz

Satz: Es seien x, y Elemente eines kommutativen Rings (Körpers). Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \, y^k \, .$$

Beweis per Induktion über n:

Induktionsanfang: $(x+y)^1 = x + y = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y$ ✔

Induktionsbehauptung

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k \, y^{n+1-k}$$

Induktionsschritt:

Einsetzen der Induktionsvoraussetzung

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} \, y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n+1-k}$$

$$= \binom{n}{n} x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} \, y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n+1-k} + \binom{n}{0} y^{n+1}$$

Substitution: $k := \ell - 1$

$$= 1 \cdot x^{n+1} + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell-1} x^{\ell} \, y^{n-\ell+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n+1-k} + 1 \cdot y^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k \, y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] x^k \, y^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k \, y^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k \, y^{n+1-k}$$

■

Der binomische Lehrsatz beantwortet die Frage, wie ein Binom in ausmultiplizierter Form dargestellt werden kann.