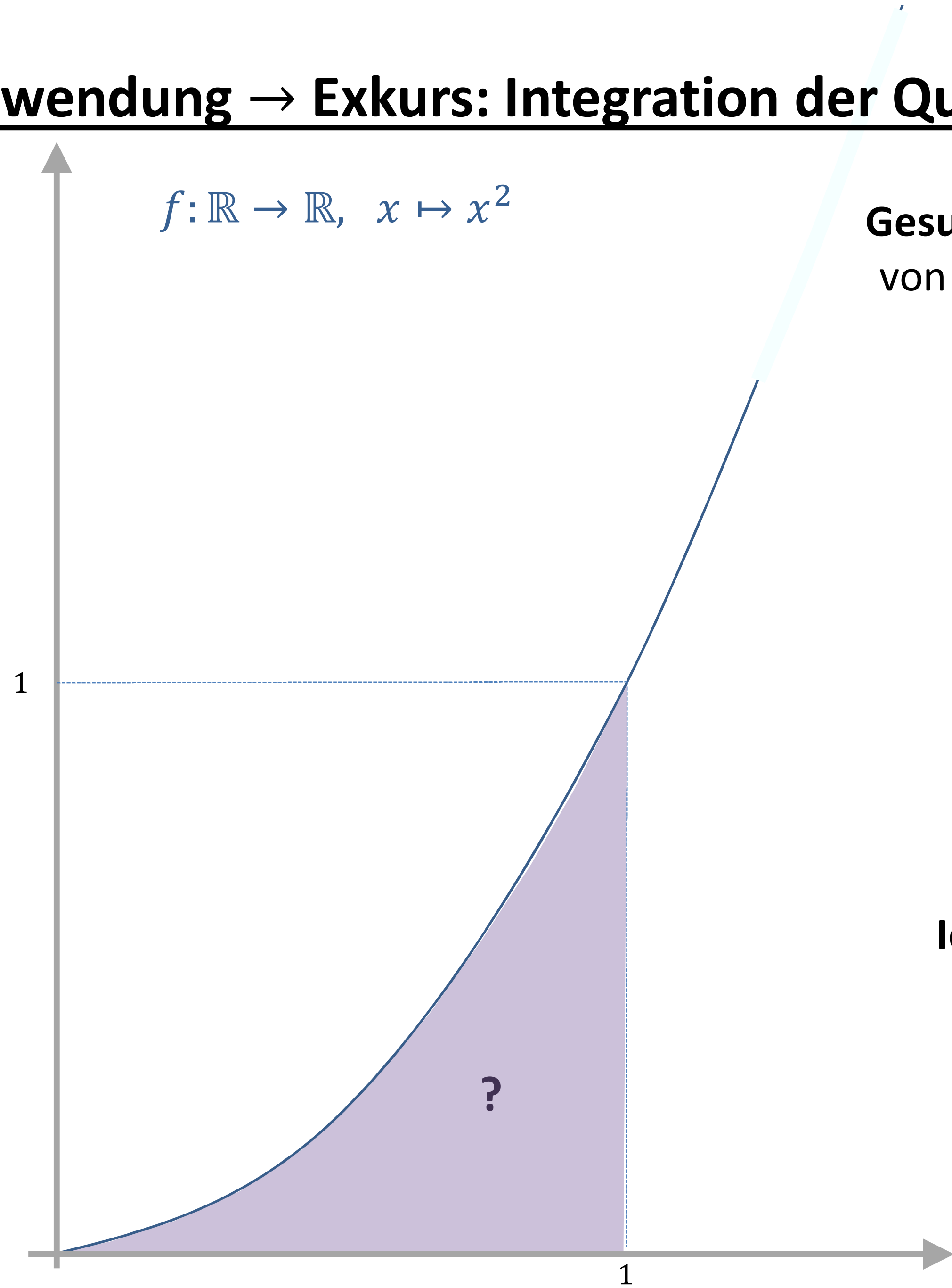
Mathematik für Informatiker 2

Sprung in die Analysis

Martin Rheinländer

Zum Integral

Anwendung → Exkurs: Integration der Quadratfunktion



Gesucht: Fläche zwischen dem Graphen von f und der Abszisse (x-Achse) über dem Intervall $[0,1]$.

→ **Integral** der Funktion f über dem Intervall $I = [0,1]$.

$$\mathcal{I}(f) \equiv \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$$

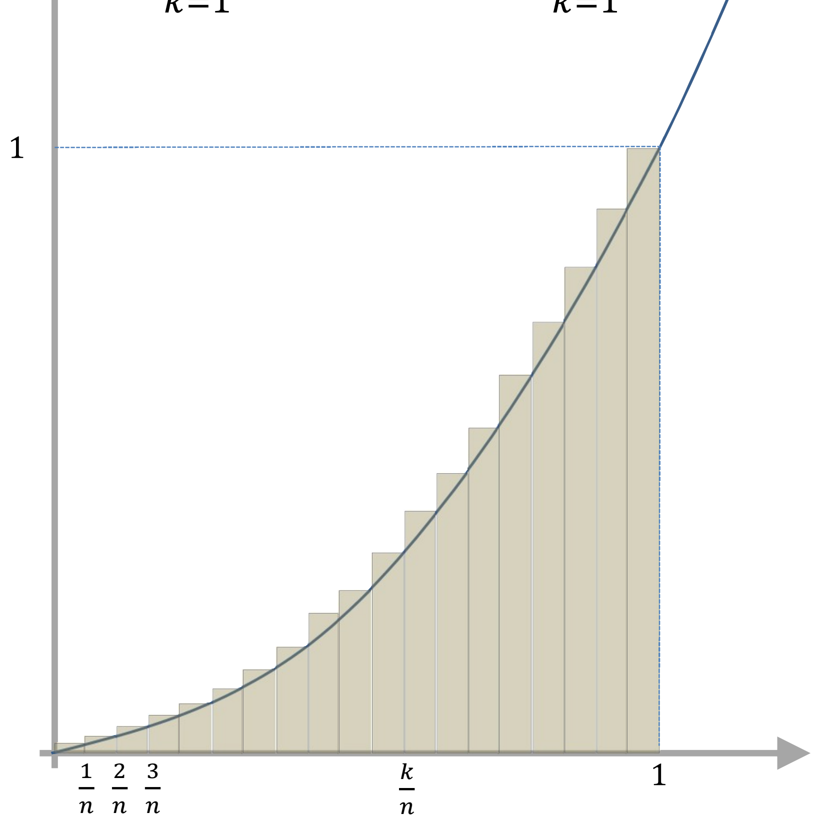
Idee: Integral kann näherungsweise (approximativ) berechnet werden.

Beachte: Genau genommen wird die Fläche zwischen den Intervallenden durch die Parallelen zur Ordinaten (Vertikalen, y-Achse) begrenzt.

Näherungsweise Berechnung des Integrals der Quadratfunktion

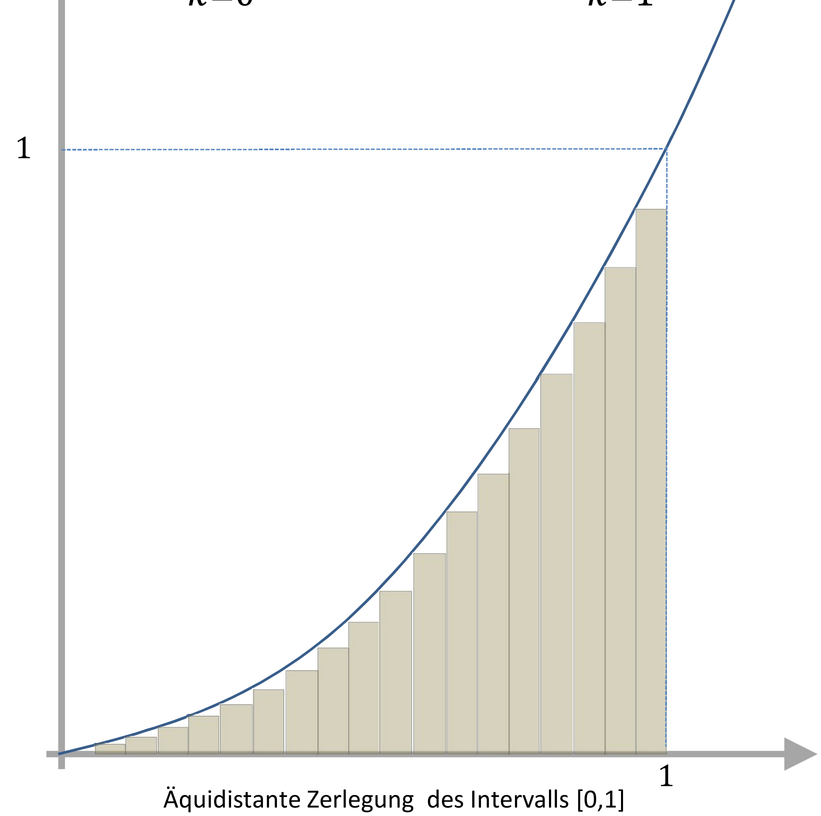
Obersumme $$= \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$



Untersumme $$= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$



Berechnung der Unter- und Obersumme

Es gilt:

$$\text{Untersumme} \quad \leq \quad \text{Integral } \mathcal{J}(f) \quad \leq \quad \text{Obersumme}$$

bzw.

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \quad \leq \quad \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \quad \leq \quad \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

bzw.

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \quad \leq \quad \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \quad \leq \quad \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Beachte: Obersumme − Untersumme $= \frac{1}{n}$

⇒ *Ober-* und *Untersumme* nähern sich für immer größer werdendes n (man sagt für n gegen Unendlich, kurz für $n \to \infty$) einander an. Da das Integral zwischen beiden liegt, muß auch die Annäherung (Approximation) an das Integral immer besser bzw. genauer werden.

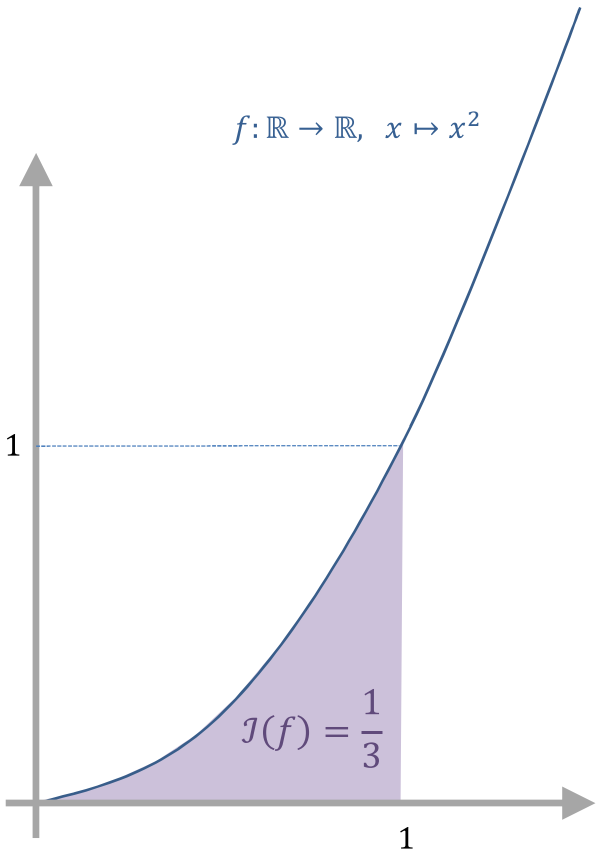
Untersumme $$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot (n-1) \cdot n \cdot (2n-1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2}$$

Obersumme $$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2}$$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$

Exkurs: Integration der Quadratfunktion (Vollzug des Grenzübergangs)



$$\text{Untersumme} \quad = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \frac{1}{3}$$

$$\text{Obersumme} \quad = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{I}(f) \equiv \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{3}$$

Allgemeiner gilt für $p \in \mathbb{N}$: $$\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{p+1}$$

Beachte: Die Gleichung gilt sogar auch dann, wenn p einem allgemeineren Zahlenbereich angehört. Genauer gilt für $p > -1$ Gleichheit. Im Falle $p = -1$ wird die rechte Seite unsinnig (da $1/0$ nicht definiert ist). Im Falle $p < -1$ wird die rechte Seite negativ, obwohl die zu integrierende Funktion (d.h. der Integrand) $x \mapsto x^p$ weiterhin positiv ist und damit auch sein Integral positiv sein muß. Dieser Widerspruch zeigt, daß die Gleichung für $p < -1$ nicht bestehen kann. Tatsächlich ist das Integral für $p < -1$ ein nicht konvergentes *uneigentliches Integral*. Wegen der *Singularität* des Integranden für $x = 0$ hat das Wert sozusagen den Wert unendlich.

Anschauliche Einführung des *Integrals*

Allgemeines Setting:

- f sei eine *„anständige"*, *reellwertige* und *nicht negative* Funktion auf $D_f \subset \mathbb{R}$,
  d.h. f ist vom Typ $f\colon D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$
- $a, b \in D_f$ mit $a \leq b$.
- $[a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R}\colon \quad a \leq x \leq b\} \subset D_f$

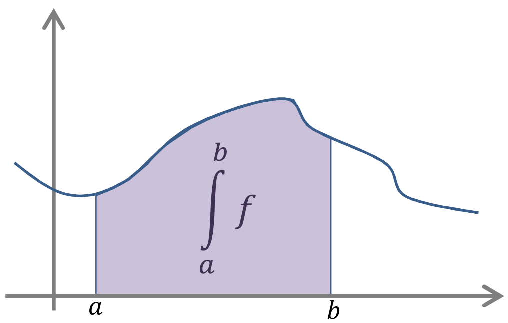
D_f ist der Definitionsbereich der Funktion f. $[a, b]$ ist ein sogenanntes kompaktes Intervall, weil die beiden Endpunkte a und b ebenfalls dazugehören. Unter einem Intervall versteht man eine zusammenhängende Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

„Definition": Unter dem Integral von f über dem Teilintervall $[a, b]$ versteht man den Inhalt des Flächenstücks zwischen der Abszisse bzw. der x-Achse (als untere Begrenzung) und dem Graphen von f (als obere Begrenzung), welches bei der üblichen Orientierung der Abszisse links von dem Geradenabschnitt zwischen den Punkten $(a, 0)$ und $\big(a, f(a)\big)$ sowie rechts durch den Geradenabschnitt zwischen den Punkten $(b, 0)$ und $\big(b, f(b)\big)$ begrenzt ist.

Schreibweise für das Integral von f über $[a, b]$:

$$\int_a^b f \;\equiv\; \int_a^b f\,(x)\,\mathrm{d}x \;\equiv\; \int_a^b f\,(t)\,\mathrm{d}t \;\equiv\; \ldots$$

Beispiel:

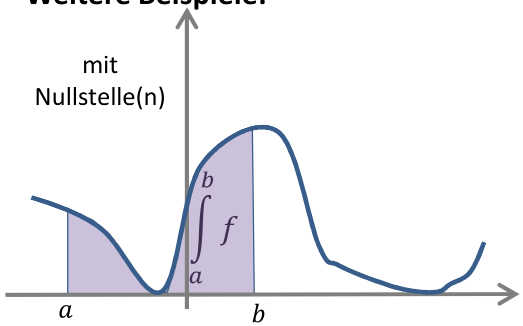


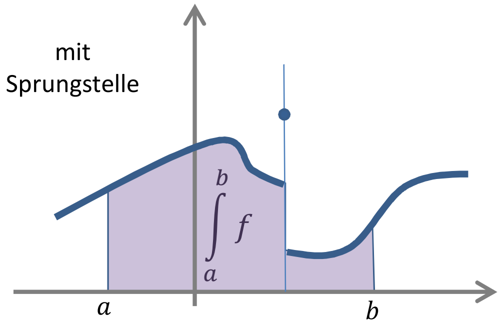
Bem.: Bei der zweiten und dritten Schreibweise erscheint die Integrationsvariable x bzw. t in zwar redundanter aber suggestiver Weise als Argument von f und hinter dem Inkrementsymbol d, (das d steht für Differenz bzw. Differential) was formal an die näherungsweise Berechnung des Integrals durch *Riemann*sche Summen (→ Ober- und Untersummen) erinnert. Ähnlich der Benennung des Laufindexes einer Summe ist die Wahl der Integrationsvariable irrelevant, solange sich keine Verwechselung mit anderen Variablen ergibt. Der Vorteil dieser etwas umständlicheren Schreibweise ergibt sich vor allem bei der formalen Anwendung gewisser Integrationsregeln (partielles Integrieren, Substitution) zur Berechnung von Integralen, sowie in dem Fall, daß f von mehreren Variablen (Parametern) abhängt. Das Integralzeichen selbst stellt ein stilisiertes S dar, welches abkürzend für die Summen steht, aus deren Grenzwert das Integral konkret berechnet werden kann. Tritt das Inkrementzeichen d auf, so ist es mit dem Integralzeichen als ein einheitliches Symbol zu sehen.

Bem.: Die auf der Anschauung basierende Definition des Integrals genügt nicht der geforderten Genauigkeit einer mathematischen Definition und entspricht daher auch keiner üblichen Definition des Integrals, das (für unterschiedliche Funktionsklassen) auf verschiedene Weise definiert wird, obwohl die anschauliche Bedeutung bzw. Interpretation (sofern vorhanden) gerade der obigen Definition entspricht. Kritisch an der obigen Definition ist einerseits, daß offen gelassen wird, was eine „anständige" (engl. *well-behaved*) Funktion sein soll. Noch ungenauer ist die Verwendung des anschaulich zwar sehr verständlichen mathematisch aber (zunächst einmal) höchst unpräzisen Begriffs des Flächeninhalts. Es bleibt nämlich ganz unklar, wie der Flächeninhalt eines krummlinig berandeten Flächenstücks auf eindeutige Weise bestimmbar ist. Letztendlich steckt hinter dem Flächeninhalt ein ganz ähnlicher Grenzwertprozeß wie bei dem Integral selbst.

Eigenschaften des *Integrals*

Weitere Beispiele:





Wie lassen sich die „anständigen" Funktionen d.h. die im anschaulichen Sinne *integrablen* Funktionen charakterisieren?

Der Graph der Funktion sollte abschnittsweise einer glatten Kurve entsprechen. Zwischen zwei glatten Kurvenabschnitten kann sich eine Knickstelle oder Sprungstelle befinden. Der Graph darf die x-Achse berühren oder abschnittsweise mit ihr zusammenfallen, ohne sie zu schneiden bzw. zu unterschreiten.

Es sei $a \leq b \leq c$ mit $[a,c] \subset D_f$:

1) $$\int_a^a f = 0$$

Das Integral über einem Punkt (d.h. über einem Intervall mit verschwindender Ausdehnung bzw. Länge) verschwindet ebenfalls.

2) $$\int_a^{b} f + \int_{b}^c f = \int_a^c f$$

Diese Eigenschaft reflektiert die anschauliche Tatsache , daß sich bei nicht überlappenden Flächenstücken, welche höchstens Randpunkte gemeinsam haben, die Inhalte der Einzelflächen zum Gesamtflächeninhalt addieren.

3) $$\int_b^a f := -\int_a^b f$$

denn $\int_a^b f + \int_b^a f = \int_a^a f = 0$.

Die Integralschreibweise mit einer unteren und oberen Integrationsgrenze erlaubt es, eine Orientierung d.h. einen Durchlaufungssinn des Integrationsintervalls bzw. eine Integrationsrichtung festzulegen (nämlich von der unteren zur oberen Integrationsgrenze). Standardmäßig entspricht die kleinere bzw. linke Intervallgrenze der unteren, die rechte bzw. größere Intervallgrenze der oberen Integrationsgrenze. Es ist jedoch sinnvoll auch ein Vertauschen der Integrationsgrenzen zuzulassen, wodurch die Integrationsrichtung umgeklappt wird. Aus dem Permanenzprinzip für die Eigenschaften 1) und 2) (d.h. der Beibehaltung dieser Eigenschaften) ergibt sich dann, daß das Vertauschen der Integrationsgrenzen einem Vorzeichenwechsel des Integrals entsprechen muß.

Statt das Integral mit Integrationsgrenzen zu versehen, ist auch folgende alternative Schreibweise üblich, bei der das Integrationsintervall $[a,b]$ unter bzw. unten neben das Integralzeichen geschrieben wird: $\int_{[a,b]} f$.

Weitere Eigenschaften des *Integrals*

- $f \leq g \;:\Leftrightarrow\; \forall x \in D_f \cap D_g:\; f(x) \leq g(x)$

$$[a,b] \subset D_f \cap D_g \;\wedge\; f\big|_{[a,b]} \leq g\big|_{[a,b]} \;\Rightarrow\; \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Monotonie des Integrals

- Konstanten $c_1, c_2 \geq 0$, Integrationsgrenzen $a < b$:

$$c_1 \leq f \leq c_2 \;\Rightarrow\; c_1 \cdot (b-a) \leq \int_a^b f \leq c_2 \cdot (b-a)$$

Abschätzungen

– Anschauliche Begründung mittels Bildchen: ✔
– Formale Begründung ergibt sich aus der Monotonie des Integrals unter Verwendung von:

$$\int_a^b c_i = \int_a^b c_i \cdot 1 = c_i \cdot \int_a^b 1 = c_i \cdot (b-a)$$

Folgende Fakten (Eigenschaften) wurden benutzt:
Integral der Einsfunktion = Länge des Integrationsintervalls,
Herausziehen von Konstanten.

- Definition des Integrals für reellwertige Funktionen mit nicht ausschließlich nicht-negativer Bildmenge

$$\int_a^b f := \int_a^b \max(0, f) - \int_a^b \max(0, -f)$$

$$\int_a^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g) \;=\; \lambda \cdot \int_a^b f \;+\; \mu \cdot \int_a^b g$$

Linearität des Integrals

Integralfunktion ergibt sich durch eine variable obere (bzw. untere) Integrationsgrenze.
So läßt sich aus einer Funktion eine neue gewinnen.

Gegeben: $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$

$u \in [a,b] \;\Rightarrow\;$ zugehörige Integralfunktion : $\quad F(x) \coloneqq \displaystyle\int_u^x f(t) \cdot \mathrm{d}t$

Es gilt: $\quad F\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(u) = 0.$

Transformation von Integralen: Verschiebungen

$$\int_a^b f(t) \cdot \mathrm{d}t = \int_{a+\varsigma}^{b+\varsigma} f\,(\theta - \varsigma) \cdot \mathrm{d}\theta \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_a^b f(t+\varsigma) \cdot \mathrm{d}t = \int_{a+\varsigma}^{b+\varsigma} f\,(\theta) \cdot \mathrm{d}\theta$$