Übersicht bisheriger Abschätzungen

Beidseitige Abschätzungen:

	Linke / untere …		rechte / obere …	
1)	$\mathrm{e}^{-\frac{p(p-1)}{2(n-p+1)}} \leq$	w_p	$\leq \mathrm{e}^{-\frac{p(p-1)}{2n}}$	Folge der Wahrscheinlichkeiten, daß unter p Personen keine zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. $p \in \mathbb{N}, p \to \infty \;\Rightarrow\; w_p \to 0$. Untere Abschätzung nur gültig für $p \leq n = 365$ (Tage im Jahr).
2)	$\log N - 1 <$	$T(N)$	$< \log N + 1$	Folge der durchschnittlichen Teiler-Anzahl der ersten N natürlichen Zahlen. $N \in \mathbb{N}, N \to \infty \;\Rightarrow\; T(N) \to \infty$
3)	$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq$	$\binom{n}{k}$	$\leq \left(\mathrm{e} \cdot \frac{n}{k}\right)^k$	Folge der k'ten Binomialkoeffizienten. $n \in \mathbb{N}, n \to \infty \;\Rightarrow\; \binom{n}{k} \to \infty$
4)	$\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \leq$	$\binom{2m}{m}$	$\leq \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}$	Zentrale Binomialkoeffizienten $m \in \mathbb{N},\; m \to \infty \;\Rightarrow\; \binom{2m}{m} \to \infty$

$\left(w_p\right)_p$ ist eine Nullfolge, die sogar für $p \geq 366$ konstant Null ist. Die anderen drei Folgen werden mit wachsendem Parameter/Folgenargument N, n bzw. m beliebig groß. Dabei wächst $T(N)$ *logarithmisch*, $\binom{n}{k}$ *polynomial* (wie Potenz) und $\binom{2m}{m}$ *exponentiell* mit dem zusätzlichen Dämpfungsfaktor $1/\sqrt{2m}$.

Beachte, daß die Folgenglieder von 1) und 2) gebrochen rationale Werte annehmen, 3) und 4) dagegen ganzzahlig sind.

Mathematik für Informatiker 2

Asymptotische Notationsweisen

Landau-Symbole & asymptotische Äquivalenz

Martin Rheinländer

Was ist Asymptotik?

Wortherkunft

$\sigma\upsilon\mu\pi\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\iota\nu$ = zusammentreffen, zusammenfallen, zusammenstürzen

Symptom = Anzeichen, Kennzeichen oder Merkmal, charakteristische Erscheinung *einhergehend* bzw. **zusammenfallend** mit einer (negativen) Entwicklung insb. Krankheit.

Bedeutung in der Geometrie

***A**symptote* an den Graphen einer Funktion

Beispiel*: Asymptoten* der *Hyperbel* $(x^2 - y^2 = 1)$

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

Asymptoten $x \mapsto \pm x$

Asymptote: *Gerade*, der sich eine ins Unendliche verlaufende *Kurve* beliebig nähert, ohne sie zu erreichen [d.h. ohne *zusammenzufallen*, daher die verneinende Vorsilbe **A**-].
(Duden Deutsches Universalwörterbuch)

Allgemeine Bedeutung in der Mathematik

Asymptotik einer Folge, Funktion, Summe etc. = Ungefähres Verhalten (bzw. näherungsweise Verhaltensbeschreibung) dieses Objekts, wenn ein darin vorkommender Parameter auf einen gewissen *Grenzwert* zuläuft.

Vergleich mit bzw. **Näherung durch**

unbekanntes / kompliziertes Objekt ⟺ vertraute, einfache Objekte

Eine asymptotische Berechnungsformel bzw. Abschätzung muß nicht generell gelten, sondern erst, wenn der betreffende Parameter dem betrachteten Grenzwert hinreichend nahe gekommen ist. Im allgemeinen ist die Approximationsgüte umso besser, je näher der Parameter dem Grenzwert kommt.

Eine Asymptote zu einer Kurve liefert ein anschauliches Paradebeispiel dafür, wie ein relativ kompliziertes Objekt (Kurve) durch ein einfacheres Objekt , die Asymptote als asymptotisch verlaufende Gerade, angenähert werden kann.

Wozu Asymptotik in der Informatik?

Komplexitätsanalyse von Algorithmen:
Laufzeitkomplexität ergibt sich aus der Anzahl durchzuführender Operationen in Abhängigkeit von der Größe n der ein- bzw. übergegebenen Datenmenge.
Speicherkomplexität ergibt sich aus der Größe des benötigten Speicherplatzes.

$T(n) =$ Laufzeit eines Algorithmus (Programms auf einem bestimmten Computersystem)

Da exakte Berechnung /Bestimmung der Laufzeitfunktion $n \mapsto T(n)$ oft nicht möglich ist (prinzipiell oder praktisch) $\rightarrow$ suche näherungsweise Berechnung .

Daher ist zur Bewertung eines Algorithmus´ von besonderem Interesse:
Asymptotik seines Laufzeitverhaltens bei zunehmenden Datenvolumen, d.h. wie schnell strebt $T(n)$ gegen Unendlich für $n \rightarrow \infty$?

„Messen" der Wachstumsgeschwindigkeit einer unbekannten/schwierigen Funktion durch Vergleich mit bekannten Referenzfunktionen.

Z.B. Versuche $T(n)$ in gewisse Hierarchie vergleichsweise einfacher, aber immer schneller wachsender Funktionen einzuordnen $\rightarrow$ „Komplexitätsklassen"

$$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec \sqrt[p]{n} \prec n \prec n\log n \prec n^p \prec n^{\log n} \prec c^n \prec n^n \prec c^{c^n}$$

Frage: Wie läßt sich die Beschreibung von $T(n)$ noch weiter verfeinern bzw. präzisieren?

Beachte: $p \in \mathbb{N}, c > 1$

„Philosophie“

Asymptotik dient

- der Vereinfachung (funktionaler Abhängigkeiten),
- der Annäherung komplizierter Funktionen durch einfache,
- der Präzisierung des Konvergenzverhaltens,
- dem Vergleich des Wachstums- oder Abfallsverhalten von Funktionen,
- der Beschreibung einer Abweichung (Fehlers) zwischen Funktionen.

Die genannten Aspekte stehen nicht im Gegensatz zueinander sondern ergänzen oder bedingen sich sogar.

Qualitative Beschreibung des Wachstumsverhaltens im Hinblick auf eine gegebene Vergleichsfunktion bzw. Vergleichsfolge g.

Gesucht: Präzise mathematische Formulierung von Aussagen wie

- f wächst schneller als g, oder
- f wächst genauso schnell wie g,
- etc.

Warum die Apostrophierung *qualitativ*: Die Landau-Symbole ermöglichen insofern nur eine qualitative Beschreibung des Wachstumsverhaltens, weil diese verwendet werden können, wenn die bloße Existenz gewisser Konstanten gewährleitet ist, ohne diese genau spezifizieren oder gar optimieren zu müssen. Die quantitative Größer der Konstanten bleibt ausgeblendet bzw. belanglos.
Man beachte, daß sich der Begriff der *asymptotischen Äquivalenz* neben der Angabe von Abschätzungskonstanten auch zu einer genauen und in dieser Hinsicht als *quantitativ* zu bezeichnenden Beschreibung des Wachstumsverhaltens eignet.

Unter einer **Folge** versteht man eine Funktion mit einer diskreten (d.h. endlichen oder abzählbar unendlichen) Definitionsmenge. Üblicherweise ist damit eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gemeint.

Definiton der *Landau*-Symbole für Folgen

$$\mathbf{O}(\boldsymbol{g}) := \Big\{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,\big|\quad \exists\, C > 0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in \mathbb{N}:\quad n > n_0 \ \Rightarrow\ \ 0 \leq |f(n)| < C \cdot |g(n)| \Big\}$$

$\mathrm{O}(g)$ enthält alle Funktionen f, die irgendwann dauerhaft (d.h. für fast alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. für alle bis auf endlich viele) von g übertroffen werden können, wenn man g nur mit einer *hinreichend großen Konstante* C (abhängig von f) multipliziert. g kann f durch Multiplikation mit einer Konstanten „einholen“.

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{g}) := \Big\{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,\big|\quad \exists\, c > 0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in \mathbb{N}:\quad n > n_0 \ \Rightarrow\ \ 0 \leq c \cdot |g(n)| < |f(n)| \Big\}$$

$\Omega(g)$ enthält alle Funktionen f, die irgendwann g „dauerhaft“ übertreffen können, wenn man g nur mit einer *hinreichend kleinen Konstanten* c (abhängig von f) multipliziert.

$$\boldsymbol{\Theta}\ \boldsymbol{g}\ := \begin{array}{l} f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,\big|\quad \exists\, C_1, C_2 > 0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in \mathbb{N}: \\ n > n_0 \ \Rightarrow\ \ C_1 \cdot |g(n)| < f(n) < C_2 \cdot |g(n)| \end{array}$$

$\Theta(g)$ enthält alle Funktionen f, die sich durch g bei Multiplikation mit einer jeweils geeigneten Konstanten sowohl „dauerhaft“ unter- wie überbieten lassen. $\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{g}) = \mathbf{O}(\boldsymbol{g}) \cap \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{g})$

$$\mathbf{o}(\boldsymbol{g}) := \Big\{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,\big|\quad \forall\, \epsilon > 0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in \mathbb{N}:\quad n > n_0 \ \Rightarrow\ \ 0 \leq |f(n)| < \epsilon \cdot |g(n)| \Big\}$$

$\mathrm{o}(g)$ enthält alle Funktionen f, die irgendwann „dauerhaft“ von g übertroffen werden , selbst wenn g mit einer *noch so kleinen Konstante* ϵ multipliziert wird.

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{g}) := \Big\{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,\big|\quad \forall\, C > 0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in \mathbb{N}:\ n > n_0 \ \Rightarrow\ \ 0 \leq C \cdot |g(n)| < |f(n)| \Big\}$$

$\omega(g)$ enthält alle Funktionen f, die g irgendwann „dauerhaft“ übertreffen, selbst wenn g mit einer *noch so großen Konstante* C multipliziert wird.

Beachte: $\mathrm{o}(g) \cap\ \omega(g) = \emptyset$,
Inklusionen: $\mathrm{o}(g) \subset\ \mathrm{O}(g)$, $\omega(g)\ \subset\ \Omega(g)$

Notation für *asymptotische* Wachstumsvergleiche

Es gelte: $|f(n)|, |g(n)| \to \infty$ für $n \to \infty$.

Verhalten von f bzgl. g	Relation	*Landau*-Symbol	Kurzdefinition
f wächst **schwächer als** g	$f \prec g$	$f \in \mathrm{o}(g)$	$f(n)/g(n) \longrightarrow 0$
f wächst **höchstens wie** g	$f \preccurlyeq g$	$f \in \mathrm{O}(g)$	$f(n)/g(n)$ **beschränkt** für $n \to \infty$
f wächst **wie** g	$f \asymp g$	$f \in \Theta(g)$	$f \in \mathrm{O}(g) \wedge g \in \mathrm{O}(f)$
f wächst **mindestens wie** g	$f \succcurlyeq g$	$f \in \Omega(g)$	$g \in \mathrm{O}(f)$
f wächst **stärker als** g	$f \succ g$	$f \in \omega(g)$	$g \in \mathrm{o}(f)$

Die *asymptotischen Wachstumsrelationen* für *asymptotisch positive Folgen* verhalten sich analog zu den Ordnungsrelationen $<, \leq, =, \geq, >$ der reellen Zahlen.

Satz: Die Relation(en)

$\prec, \preccurlyeq, \asymp, \succcurlyeq, \succ$ sind *transitiv*. z.B. $f \prec g \wedge g \prec h \Rightarrow f \prec h$

$\preccurlyeq, \asymp, \succcurlyeq$ sind *reflexiv*. $f \preccurlyeq f$, $f \asymp f$, $f \succcurlyeq f$

$\asymp$ ist *symmetrisch*. $f \asymp g \Leftrightarrow g \asymp f$

$$f \asymp g \Leftrightarrow f \succcurlyeq g \wedge g \succcurlyeq f$$
$$f \preccurlyeq g \Leftrightarrow g \succcurlyeq f$$
$$f \prec g \Leftrightarrow g \succ f$$

Achtung: Das Ω-Symbol wird vor allem in der Zahlentheorie anders definiert: $f \in \Omega(g)$ g.d.w. $\exists\, c > 0$: $cg(n) < f(n)$ für unendlich viele n.

Unterschiedliche Sprechweisen

Sprechweise 1	Sprechweise 2	Sprechweise 3	Relations-symbol	*Landau*-Symbol
f wächst **schwächer als** g	f wächst langsamer als g	f ist gegenüber g asymptotisch vernachlässigbar	$f \prec g$	$f \in \mathrm{o}(g)$
f wächst **höchstens wie** g	f wächst nicht wesentlich schneller als g	g ist eine obere asymptotische Schranke für f	$f \preccurlyeq g$	$f \in \mathrm{O}(g)$
f wächst **wie** g	f wächst genauso schnell wie g	f ist durch g asymptotisch scharf beschränkt.	$f \asymp g$	$f \in \Theta(g)$
f wächst **mindestens wie** g	f wächst nicht wesentlich langsamer als g	g ist eine asymptotisch untere Schranke für f	$f \succcurlyeq g$	$f \in \Omega(g)$
f wächst **stärker als** g	f wächst schneller als g	f ist gegenüber g asymptotisch dominant	$f \succ g$	$f \in \omega(g)$

Falls $f(n), g(n) \to 0$ für $n \to \infty$ sagt man:

f verschwindet **schneller** als g	$f \prec g$	$f \in \mathrm{o}(g)$
f verschwindet **mindestens so schnell** wie g	$f \preccurlyeq g$	$f \in \mathrm{O}(g)$
f verschwindet **ebenso schnell** wie g	$f \asymp g$	$f \in \Theta(g)$
f verschwindet **höchstens so schnell** wie g	$f \succcurlyeq g$	$f \in \Omega(g)$
f verschwindet **langsamer** als g	$f \succ g$	$f \in \omega(g)$

verschwinden =
gegen Null streben
bzw. konvergieren
(betragsmäßig immer kleiner werden)

Beispielhafte Verwendung der *Landau*-Notation

$$\mathrm{e}^{-\frac{p(p-1)}{2(n-p+1)}} \leq w_p \leq \mathrm{e}^{-\frac{p(p-1)}{2n}}$$

$$w_p \in O\left(\mathrm{e}^{-\frac{p(p-1)}{2n}}\right) \qquad p \to \infty$$

$$w_p \in \Omega\left(\mathrm{e}^{-\frac{p(p-1)}{2(n-p+1)}}\right) \qquad p \to \infty$$

$$\frac{1}{k^k} \cdot n^k \equiv \left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \mathrm{e}^k \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^k \equiv \left(\frac{\mathrm{e}}{k}\right)^k \cdot n^k$$

$$\binom{n}{k} \in \Theta\left(\frac{1}{k^k} \cdot n^k\right) = \Theta\left(n^k\right) \qquad n \to \infty$$

Man beachte den Informationsverlust, denn der „Gag“ insbesondere der oberen Abschätzung liegt ja gerade in dem Auffinden der Abschätzungskonstanten wie e^k bzw. $(\mathrm{e}/k)^k$.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2^{2m}}{\sqrt{m}} \leq \binom{2m}{m} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2^{2m}}{\sqrt{m}}$$

$$\binom{2m}{m} \in \Theta\left(\frac{2^{2m}}{\sqrt{m}}\right) \qquad m \to \infty$$

Differenz der Abschätzungen wird beliebig groß.

$$\log N - 1 < T(N) < \log N + 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \log N < T(N) < 2 \cdot \log N$$

N hinreichend groß.

$$T(N) \in \Theta(\log N) \qquad N \to \infty$$

Differenz der Abschätzungen bleibt beschränkt. Eigentlich liegt hier eine viel genauere asymptotische Beschreibung vor, als durch das Θ-Symbol angedeutet.

Beispielhafte Verwendung der Landau Notation

Vermeidung überflüssiger Detail-Information:

Achtung: Das Gleichheitszeichen ist hier im Sinne „ist geich einem Element der Menge“ oder „plus ein Element der Menge“ zu verstehen. Weiteres zur Notationsweise später.

Summenformeln für Potenzen natürlicher Zahlen

$$S_1(n) := \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\cdot n(n+1) \qquad \begin{cases} S_1(n) &= O(n^2) \\ &= \frac{1}{2}\cdot n^2 + o(n^2) \\ &= \frac{1}{2}\cdot n^2 + O(n) \end{cases}$$

$$S_2(n) := \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\cdot n(n+1)(2n+1) \qquad \begin{cases} S_2(n) &= O(n^3) \\ &= \frac{1}{3}\cdot n^3 + o(n^3) \\ &= \frac{1}{3}\cdot n^3 + O(n^2) \end{cases}$$

$$S_3(n) := \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\cdot n^2(n+1)^2 \qquad \begin{cases} S_3(n) &= O(n^4) \\ &= \frac{1}{4}\cdot n^4 + o(n^4) \\ &= \frac{1}{4}\cdot n^4 + O(n^3) \end{cases}$$

$$S_4(n) := \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(3n^2+3n-1) \qquad \begin{cases} S_4(n) &= O(n^5) \\ &= \frac{1}{5}\cdot n^5 + o(n^5) \\ &= \frac{1}{5}\cdot n^5 + O(n^4) \end{cases}$$

Allgemein: $S_p(n) = O(n^{p+1}) = \frac{1}{p+1}n^{p+1} + O(n^p)$

Frage: Welche der asymptotischen Darstellungen von $S_p(n)$ reicht für einen „Integrator“ mittels Ober- und Untersummen aus?

Antwort: Die erste Darstellung ist zu ungenau.
Die Zweite (mit dem klein-oh) genügt jedoch schon vollkommen, da die Summe anschliessend durch n^{p+1} dividiert wird und dabei alle bis auf den führenden Term verschwinden.
Beachte:
$\frac{o(n^{p+1})}{n^{p+1}} = o(1) \to 0$ für $n \to \infty$.

Die dritte Darstellung gibt zusätzlichen Aufschluß über die Größenordnung der Abweichung gegenüber der Verwendung der exakten Summenformel.

Asymptotische Äquivalenz

$$\log N \;-1 < \;T(N)\; < \;\log N \quad +1$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\log N - 1}{\log} < \frac{T(N)}{\log N} < \frac{\log N +}{\log N}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 - \frac{1}{\log N} < \frac{T(N)}{\log N} < 1 + \frac{1}{\log N}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{T(N)}{\log N} \to 1 \quad \text{für} \quad N \to \infty$$

$$\Leftrightarrow: \qquad T \simeq \log N \quad \text{für} \quad N \to \infty$$

$$\frac{S_3(n)}{\frac{1}{4}\cdot n^4} = \frac{\frac{1}{4}\cdot n^2 (n+1)^2}{\frac{1}{4}\cdot n^4} = \frac{\frac{1}{4}\cdot n^2 \cdot (n^2+2n+1)}{\frac{1}{4}\cdot n^4}$$

$$= 1 + 2\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{S_3(n)}{\frac{1}{4}\cdot n^4} \to 1 \quad \text{für} \quad N \to \infty$$

$$\Leftrightarrow: \qquad S_3(n) \simeq \tfrac{1}{4}\cdot n^4 \quad \text{für} \quad N \to \infty$$

Diese beiden Beispiele motivieren folgende Definition:

Def.: Die Folgen f, g sind *asymptotisch äquivalent*, $f \simeq g :\Leftrightarrow \quad \frac{f(n)}{g(n)} \to 1 \quad$ für $\quad n \to \infty$.

Der *absoluter Fehler* (bzw. die absolute Abweichung) kann durchaus divergieren, während der *relative Fehler* (bzw. die relative Abweichung) beliebig klein wird.

Relativer Fehler: $\quad \frac{f(n)-g(n)}{g(n)} = \frac{f(n)}{g(n)} - \frac{g(n)}{g(n)} = \frac{f(n)}{g(n)} - 1 \to 0 \quad$ für $\quad n \to \infty$

d.h. Verschwinden des relativen Fehlers für $n \to \infty$

Definition der *asymptotische Äquivalenz* mittels *Landau*-Symbol:

Die Symmetrie ist hier nicht unmittelbar ersichtlich!

$$f \simeq g \quad \Leftrightarrow \quad f = g + \mathrm{o}(g) \qquad\qquad f(n) \simeq g(n) \quad \Leftrightarrow \quad f(n) = g(n) + \mathrm{o}\big(g(n)\big)$$

Bei vorliegender asymptotischer Äquivalenz können f und g wechselseitig als Näherung (Approximation) für die jeweils andere Funktion verwendet werden (wenn es nicht unbedingt auf den absoluten Fehler ankommt).

Hierarchische Anordnung bzgl. des asymptotischen Wachstums

Wie schnell strebt eine gegebene Folge (Funktion) $f(n)$ gegen Unendlich für $n \to \infty$?
Diese Frage läßt sich nur beantworten, indem man f mit anderen Funktionen vergleicht.

Hierarchie einfacher, monoton wachsender & unbeschränkter Folgen bzgl. ihres Wachstums für $n \to \infty$:

$$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec \sqrt[p]{n} \prec n \prec n\log n \prec n^p \prec n^{\log n} \prec c^n \prec n^n \prec c^{c^n}$$

konstant, beschränkt | doppelt-logarithmisch | logarithmisch | wurzelhaft | linear | linear-logarithm. | polymial | exponentiell

$$1 \prec f(n) \prec g(n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{g(n)} \prec \frac{1}{f(n)} \prec 1$$

Umgekehrte Hierarchie „implodierender“ Folgen bzgl. Ihres Verschwindens für $n \to \infty$:

$$1 \succ \frac{1}{\log\log n} \succ \frac{1}{\log n} \succ \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \succ \frac{1}{n} \succ \frac{1}{n\log n} \succ \frac{1}{n^p} \succ \frac{1}{n^{\log n}} \succ \frac{1}{c^n} \succ \frac{1}{n^n} \succ \frac{1}{c^{c^n}}$$

Präzisierung: $\quad n^{\alpha_1}\cdot(\log n)^{\alpha_2}\cdot(\log\log n)^{\alpha_3} \prec n^{\beta_1}\cdot(\log n)^{\beta_2}\cdot(\log\log n)^{\beta_3}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha_1 < \beta_1 \\ \text{oder } \alpha_1 = \beta_1 \ \wedge \ \alpha_2 < \beta_2 \\ \text{oder } \alpha_1 = \beta_1 \ \wedge \ \alpha_2 = \beta_2 \ \wedge \ \alpha_3 < \beta_3 \end{array}\right.$$

Wo sind folgende Folgen (Funktionen) einzuordnen?

$$f_1(n) = \sqrt{\log\, n}$$

$$f_2(n) = (\log n)^\beta \quad \text{mit} \quad \beta > 0$$

beachte: $p \in \mathbb{N}, c > 1$

quadratisch $p = 2$,
kubisch $p = 3$,
polynomial

Zum Wachstum des Logarithmus

Beobachtung: Schlussendlich übertrifft jede Wurzel den Logarithmus. (strenger Beweis?)

Z.B. Beispiel (nach D.E. Knuth et al.): $\lg n \prec \sqrt[10\,000]{n}$

Zwar: $n = 10^{100}$ (1 Googol): $\lg 10^{100} = 100 > \sqrt[10\,000]{10^{100}} = (10^{100})^{0{,}0001} = 10^{100\cdot 0{,}0001} = 10^{0{,}01} = \underbrace{\sqrt[100]{10}}_{\approx 1{,}02}$

Aber: $n = 10^{10^{100}}$ (1 Googolplex): $\lg 10^{10^{100}} = 10^{100} < \sqrt[10\,000]{10^{10^{100}}} = 10^{10^{100}\cdot 10^{-4}} = 10^{10^{100-4}} = 10^{10^{96}}$

Es kann überraschend lange dauern, bis sich die Asymptotik bemerkbar macht.
Dies ist bei dem asymptotischen Vergleich des Laufzeitverhaltens verschiedener alternativer Algorithmen zu berücksichtigen. Es kann durchaus sein, daß sich der Algorithmus mit der schlechteren Asymptotik als der praktisch vorteilhaftere erweist. Dies liegt zum einen daran, daß wesentliche Konstanten oftmals nicht spezifiziert sind, zum anderen daran, daß das Verhalten im Endlichen anders ist, als die Asymptotik suggeriert, welche erst ab einer Datengröße außerhalb des Relevanzbereiches „zuschlägt“. Generell ist es möglich, daß asymptotisch vernachlässigbare Terme zunächst dominant sein können.

Ein Googol ist bereits so groß, daß dieses die Anzahl der Nukleonen (Protonen & Neutronen) im gesamten Universum übertreffen könnte.