Information Scientists Do Mathematics.

Vorlesung **Mathematik für Informatiker II** 24. Mai 2019
(an der Universität Heidelberg)
Dozent: *Dr. Martin Rheinländer*
Tutoren: *Armand Rousselot, Vasil Manev, Max Bréard*

Aufgabenserie 5
Logarithmus & Exponentialfunktion

Aufgabe 5.1: Rechnen mit Potenzen & Logarithmen (6×2+3=15P)

Die folgenden Aufgaben sind als Rechentraining gedacht und mögen den einen oder anderen an Aufgaben aus der Schulzeit erinnern.

a) Vereinfachen Sie den ersten Term und finden Sie reelle Zahlen x und y, welche die beiden Gleichungen lösen.

$$\text{i) } \left(\frac{8x^2\cdot y}{12y^2x} : \frac{xy}{x^3y^2}\right) : \frac{15x^2y^{-2}}{3xy^{-1}} \qquad \text{ii) } 4^x + 2^{x+1} = 80 \qquad \text{iii) } 7^{y+2} - \frac{1}{7}\cdot 7^{y+1} - 14\cdot 7^{y-1} + 2\cdot 7^y = 48$$

b) Berechnen bzw. vereinfachen Sie auch die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich.

$$\text{i) } \frac{\log_4 45 + 2\cdot\log_4(1/3)}{\log_4 75 - \log_4 3} \qquad \text{ii) } -\log_6 \log_7 \sqrt[3]{\sqrt{7}} \qquad \text{iii) } \sqrt{x^{1+1/(2\cdot\log_4 x)} + 8^{1/(3\log_{x^2} 2)+1}}$$

c) Für welche reelle Zahl x gilt $\quad \lg_{0,2} x = \dfrac{\lg 36 - 2}{\lg 15 - 2\lg 5}$?

Aufgabe 5.2: Numerische Berechnungen ((4+5)+6+10*+5=20P)

Für die beiden ersten Teilaufgaben ist eine *dekadische Logarithmentafel* (z.B. aus der Vorlesungspräsentation) zu verwenden. Die notwendigen Rundungen sind sowohl mit konstanter Interpolation (gewöhnliches Runden) wie auch mit linearer Interpolation durchzuführen. Aufgaben c) und d) ist dagegen mit Hilfe eines Computers bzw. Taschenrechners durchzuführen.

a) Berechnen Sie unter Verwendung einer Logarithmentafel die siebte Wurzel aus 506.623.120.463.

b) Bestimmmen Sie einen möglichst guten Näherungswert für den natürlichen Logarithmus von 1024. Die Basis des natürlichen Logarithmus ist durch $\mathrm{e} \approx 2,718281828$ gegeben.

c) Nutzen Sie die durch $\ell_n(x) \coloneqq n\cdot\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$ definierte Folge, um den natürlichen Logarithmus von $x \in \{1/5,\, 5\}$ näherungsweise zu bestimmen. Für welche n erreicht man eine Genauigkeit von 5 bzw. 10 Stellen. Vergleichen Sie dazu die Näherungswerte mit den Ausgabewerten Ihres Rechners für $\log x$. Wie beurteilen Sie das Konvergenzverhalten bzw. die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge $\big(\ell_n(x)\big)$? Ist $\ell_n(x)$ als Näherungsformel für $\log x$ praxistauglich. Welche Wurzeln würden Sie berechnen, wenn Sie diese von Hand ohne Computer bzw. Taschenrechner ausrechnen müßten.

d) Wie läßt sich vergleichseweise bequem aus den Angaben $\sqrt[64]{2} \approx 1,0109$ und $\sqrt[64]{3} \approx 1,0173$ ein Näherungswert für $\log 2592$ gewinnen? Wieviele Stellen ergeben sich dabei korrekt?

Aufgabe 5.3: Eine Besonderheit der Kehrwertfunktion **(5P)**

Es seien $0 < a < b$ und $\sigma > 0$. Dann gilt

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{\sigma a}^{\sigma b} \frac{\mathrm{d}t}{t}\,.$$

Weisen Sie diese Aussage nach, indem Sie das Flächenstück A_1 betrachten, welches sich über dem Intervall $[a,b]$ zwischen der Abszisse und dem Graphen der Kehrwertfunktion befindet. Strecken Sie das Flächenstück vertikal um den Faktor $1/\sigma$, um das Flächenstück A_2 zu erhalten, welches anschließend durch eine horizontale Streckung um den Faktor σ zum Flächenstück A_3 wird. Zeigen Sie, daß sich dies durch eine geeignete Verschiebung paßgenau unter den Graphen der Kehrwertfunktion fügen läßt. Benutzen Sie die Transformationsregeln für Integrale unter Verschiebungen und Streckungen (bzw. Stauchungen).

Aufgabe 5.4: Konsequenzen der logarithmischen Funktionalgleichung **(10+5*+2*=10P)**

Es sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eine logarithmische Funktion, d.h. es gelte $f(xy) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$. Folgende Aussagen sind zu beweisen:

a) Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und alle $q \in \mathbb{Q}$ gilt: $f(x^q) = q \cdot f(x)$.

b) Es sei $a > 1$. Dann ist f auf $a^{\mathbb{Q}} := \{a^q : q \in \mathbb{Q}\}$ *streng monoton wachsend* bzw. *streng monoton fallend*, falls $f(a) > 0$ respektive $f(a) < 0$ gilt.

c) Zeigen Sie, daß f in jedem Punkt $\xi \in \mathbb{R}^+$ *stetig* ist, wenn f bei 1 *stetig* ist.
Anmerkung: Eine Funktion $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* im Punkt $\xi \in D$, wenn folgendes gilt:

$$\forall (x_n) \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}): \quad x_n \xrightarrow{n\to\infty} \xi \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(\xi)\,.$$

Bitte die Abgaben im Moodle hochladen bis zum 07.06.2019, 17:00 Uhr.