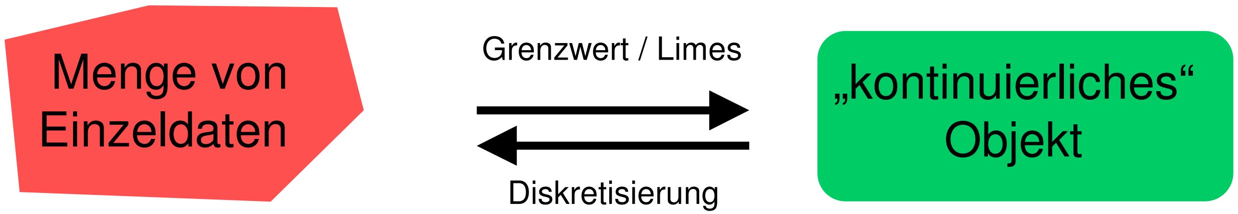
Wozu Analysis in der Informatik?

Im Gegensatz zur **diskreten Mathematik** ist die **Analysis** für die Informatik zunächst nur von untergeordneter Bedeutung. Doch:

Die Analysis stellt grundlegende Rechentechniken bereit, die u.a. auch bei der Analyse von Algorithmen relevant sind. Ferner durchdringt sie viele mathematische Gebiete, die für die Informatik und ihre Anwendungen von großem Interesse sind:

- Wissenschaftliches Rechnen,
- Bildverarbeitung,
- (Datenanalyse?),
- Statistik, …

Wechselspiel: diskret $\leftrightarrow$ kontinuierlich



Im Grenzwert vereinfacht sich manches (nicht alles) $\rightarrow$ ggf. nützlich für die Entwicklung und Analyse von Algorithmen. Insbesondere ergibt sich so der theoretische Hintergrund für viele „Näherungs-Algortihmen". Vieles läßt sich nur näherungsweise berechnen. Doch wenn nicht ganz klar ist, was man annähert, ist es problematisch zu entscheiden, wie man sich korrekt und effizient annähern kann.

Man kann einen Grenzwert durch eine endliche Summe approximieren, aber auch umgekehrt eine endliche Summe durch einen Grenzwert.

Für Vorlesung: Elementare Kombinatorik als Anknüpfungspunkt

Verteilungsproblem: Wieviel Möglichkeiten gibt es, eine gegebene Anzahl von Prozessen auf eine feste Anzahl von Prozessoren zu verteilen?

Wieviele Möglichkeiten gibt es überhaupt, eine Menge von n (unterscheidbaren) Objekten zu partitionieren, d.h. vollständig in paarweise disjunkte Untermengen aufzuteilen? Sei $B_n \in \mathbb{N}$ die gesuchte natürliche Zahl.

Kombinatorik & Analysis liefern:

$$\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^x - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} \qquad\qquad B_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Ausdrücke enthalten unendliche Summen, transzendente Zahlen (e = Eulersche Zahl) und Funktionen (Exponentialfunktion), die selbst über Grenzwerte definiert sind.

→ (praktische?) Berechnungsmöglichkeit von B_n:

$$B_n = \operatorname{round}\left[\frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{m} \frac{k^n}{k!}\right]$$

mit $m \in \mathbb{N}$ hinreichend groß
(ergibt sich aus Fehlerabschätzung)

Weiteres Beispiel

Gleichheit zwischen

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ \dots}_{\textit{unendlicher}\ \text{Summe}} \quad \& \quad = \quad \underbrace{(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^4)\cdot(1+x^8)\cdot \dots}_{\textit{unendlichem}\ \text{Produkt}}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j \ = \ \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 + x^{2^k}\right) \qquad ?$$

Beachte; daß zunächst einmal geklärt werden müßte, in welchem Sinne eine unendliche Summe bzw. ein unendliches Produkt erklärt sein soll.

Algebraisch-analytische Begründung:

$$\sum_{j=0}^{m} x^j = \frac{1 - x^{m+1}}{1-x} \quad \xrightarrow{m\to\infty} \quad \frac{1}{1-x} \quad \text{falls} \quad |x| < 1.$$

Beweis der Summenformel z.B. per Induktion.

Hinter dem Ausgangsprodukt verbirgt sich ein **Teleskopprodukt.**

$$\prod_{k=0}^{n}\left(1 + x^{2^k}\right) = \frac{\cancel{1-x^2}}{1-x}\cdot\frac{\cancel{1-x^4}}{\cancel{1-x^2}}\cdot\frac{\cancel{1-x^8}}{\cancel{1-x^4}}\cdot\frac{\cancel{1-x^{16}}}{\cancel{1-x^8}}\cdot \ \dots \ \cdot\frac{1-x^{2^{n+1}}}{\cancel{1-x^{2^n}}}$$

$$= \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \frac{1}{1-x} \quad \text{falls} \quad |x| < 1.$$

Beachte: $S(n) \neq P(n)$

aber $S(2^{n+1}-1) \ = \ P(n).$

3. binomische Formel: $(a-b)(a+b) = \ a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad a + b = \frac{a^2-b^2}{a-b}$

Weiteres Beispiel (Forts.)

$$\underbrace{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ \ldots}_{\textit{unendliche}\text{ Summe (Reihe)}} = \underbrace{(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^4)\cdot(1+x^8)\cdot\ldots}_{\textit{unendliches}\text{ Produkt}}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1+x^{2^k}\right)$$

„Kombinatorische“ Begründung: (benutzt Zerlegungseigenschaft der natürlichen Zahlen)

Fakt: Jede natürliche Zahl n besitzt genau eine Darstellung als Summe von Zweierpotenzen.

D.h.: $\forall n\in\mathbb{N}:\ \exists!\, i\in\mathbb{N},\ \exists!\, k_1,\ldots,k_i\in\mathbb{N}_0:\ k_1<\ \ldots<k_i \quad\wedge\quad n=2^{k_1}+\ \ldots\ +\ 2^{k_i}$

$\Leftrightarrow \quad \forall n\in\mathbb{N}:\ \exists!\, I\subset\mathbb{N}_0,:\quad n=\sum_{\kappa\in I}2^\kappa$

A priori ist nicht klar, wie ein **unendliches** Produkt von Binomen auszumultiplizieren ist, es sei denn, daß in jedem Binom einer der Summanden gleich 1 ist.

Ausmultiplizieren des (unendlichen) Produkts:

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+x^{2^k}\right) = 1+\sum_{\substack{I\subset\mathbb{N},\\ 0<|I|<\infty}}\prod_{\kappa\in I}x^{2^\kappa} = 1+\sum_{\substack{I\subset\mathbb{N},\\ 0<|I|<\infty}}x^{\sum_{\kappa\in I}2^\kappa} = 1+\sum_{n\in\mathbb{N}}x^n = \sum_{j=0}^{\infty}x^j$$

Analog zum Ausmultiplizieren von n Binomen hat man beim Ausmultiplizieren des unendlichen Produkts für jede (endliche) Teilmenge von $\mathbb{N}$ (statt von $\{1,\ldots,n\}$) das Produkt der zugehörigen Potenzen von x zu bilden, welches wiederum eine Potenz von x bildet. Diese Potenzen sind dann nach gleichen Exponenten zusammenzufassen und insgesamt aufzusummieren.

Auf dieser Zerlegungseigenschaft basiert das binäre Zahlensystem.

Anwendung

Wie viele Möglichkeiten ζ_n existieren, eine natürliche n als Summe von Einsen und Zweien zu schreiben, wobei es auf die Reihenfolge der Summanden nicht ankommen soll?

Beispiel: $n = 5$: $\left\{\begin{array}{l} 5 = 2+2+1 \\ 5 = 2+1+1+1 \\ 5 = 1+1+1+1+1 \end{array}\right. \Rightarrow \zeta_5 = 3$ $\left\{\begin{array}{l} 5 = 2\cdot 2+1\cdot 1 \\ 5 = 1\cdot 2+3\cdot 1 \\ 5 = 5\cdot 1 \end{array}\right.$

Es gilt offenbar: $\zeta_n = \lfloor n/2 \rfloor + 1$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
ζ_n	1	2	2	3	3	4	4	5	...

Beispielhafte Berechnung der ζ_n's mittels **Potenzreihen**

$$\zeta_n = \#\left\{(u,v) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : \quad u\cdot 2 + v \cdot 1 = 2u + v = n \right\}$$

Entspricht der Anzahl an Möglichkeiten, eine natürliche Zahl als Summe einer geraden und einer beliebigen natürlichen Zahl zu schreiben?

$$(1 + x^{2\cdot 1} + x^{2\cdot 2} + x^{2\cdot 3} + x^{2\cdot 4} + \ \dots) \cdot (1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ \dots) =$$

$$= 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{2u+v=n} x^{2u+v} \right) = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{2u+v=n} 1 \right) x^n = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \zeta_n \, x^n$$

Andererseits:

$$(1 + x^{2\cdot 1} + x^{2\cdot 2} + x^{2\cdot 3} + x^{2\cdot 4} + \ \dots) \cdot (1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ \dots)$$

$$= \left(1 + (x^2)^1 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + (x^2)^4 + \ \dots \right) \cdot (1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + \ \dots)$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x}$$

Anwendung (Forts.)

$$1+\sum_{n\in\mathbb{N}}\zeta_n\,x^n = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

Partialbruchzerlegung

Die unbekannten A, B und C sind so zu bestimmen, daß die Gleichungskette fortbesteht.

Rechnerische Durchführung der Partialbruchzerlegung an der Tafel.

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ \dots = 1+\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+-\ \dots = 1+\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ \dots\ )$$

$$= 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\ \dots = 1+\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)x^n$$

Anwendung (Forts.)

$$1+\sum_{n\in\mathbb{N}}\zeta_n\,x^n \quad =\frac{1}{4}\left(\frac{2}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(2+\sum_{n\in\mathbb{N}}2(n+1)x^n \quad + \quad 1+\sum_{n\in\mathbb{N}}x^n \quad + \quad 1+\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n x^n\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(4+\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(2(n+1)+1+(-1)^n\right)\cdot x^n\right)$$

$$=1+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{2(n+1)+1+(-1)^n}{4}\cdot x^n$$

$$\Rightarrow\quad \zeta_n=\frac{2(n+1)+1+(-1)^n}{4}\;=\;\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1 \quad ✓$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
ζ_n	1	2	2	3	3	4	4	5	...

Beispiel einer Partialbruchzerlegung

Gesucht sind (rationale) Koeffizienten A, B und C mit:

$$\frac{1}{(1-x)^2\cdot(1+x)} = \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x}$$

Zerlegung des Bruchs auf der linken Seite in Partialbrüche.

| Multiplikation mit $(1-x)^2 \cdot (1+x)$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = A\cdot(1+x) + B\cdot(1-x)\cdot(1+x) + C\cdot(1-x)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad = A + Ax + B - Bx^2 + C - 2Cx + Cx^2$$

$$\Leftrightarrow \quad = A+B+C + (A-2C)\cdot x + (C-B)x^2$$

Koeffizientenvergleich liefert LGS für die drei Unbekannten:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x^0: & A+B+C = 1 \\ x^1: & A-2C = 0 \\ x^2: & C-B = 0 \end{array} \right.$$

$A = 2C$

$C = B$

$2C + C + C = 4C = 1$

$C = \frac{1}{4}$

$A = \frac{1}{2}$

$B = \frac{1}{4}$

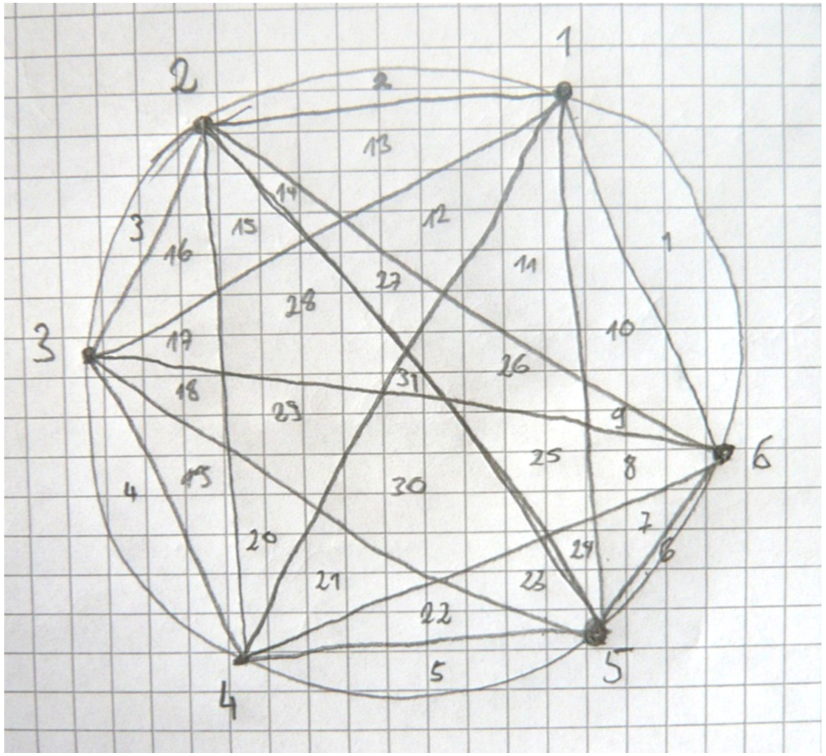
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(1-x)^2\cdot(1+x)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

Das Teilflächenproblem

Ein geometrisch-kombinatorisches Problem

(Fensterverwaltung → Aufteilung eines Bildschirms in Bereiche)

Ein mathematisches Problem für zwischendurch



Wodurch ist die Anzahl der Teilflächen bzw. Flächenstücke bestimmt?

Sicherlich durch die **Anzahl** der vorgegebenen Punkte auf der Kreislinie.

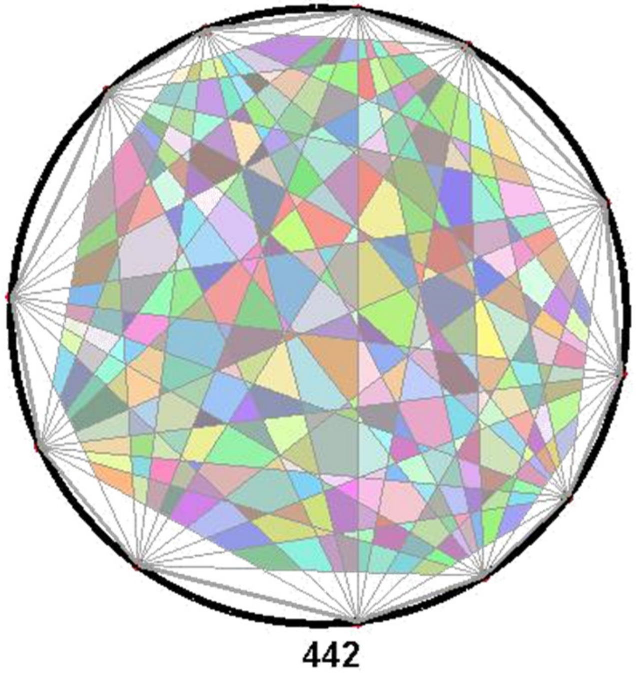
Auch durch deren **Lage** auf dem Kreis?

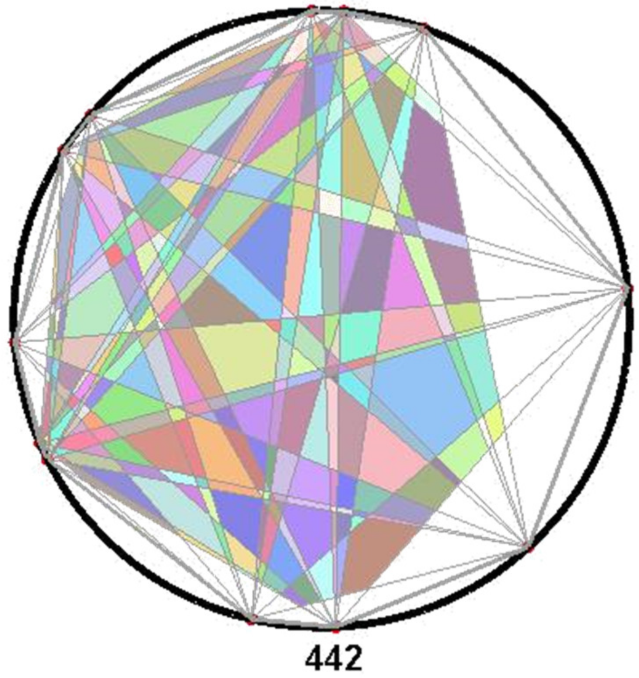
Das Teilflächenproblem

• Auswählen von $n > 1$ ***Eckpunkten*** auf einer Kreislinie

• Verbinden aller Eckpunkte untereinander liefert ***Geraden***, nämlich die ***Seiten*** & ***Diagonalen*** eines n-Ecks.

Frage: Wieviel *Flächenstücke* ergeben sich *maximal*, d.h. wenn die Eckpunkte so angeordnet sind, daß sich immer nur genau zwei Diagonalen in einem Punkt schneiden?

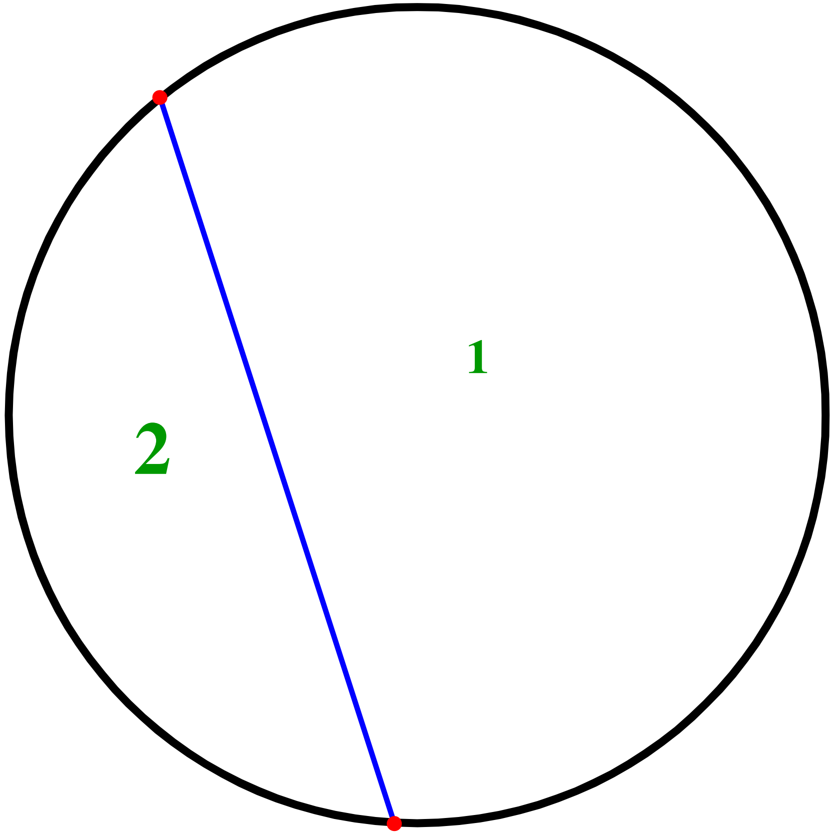


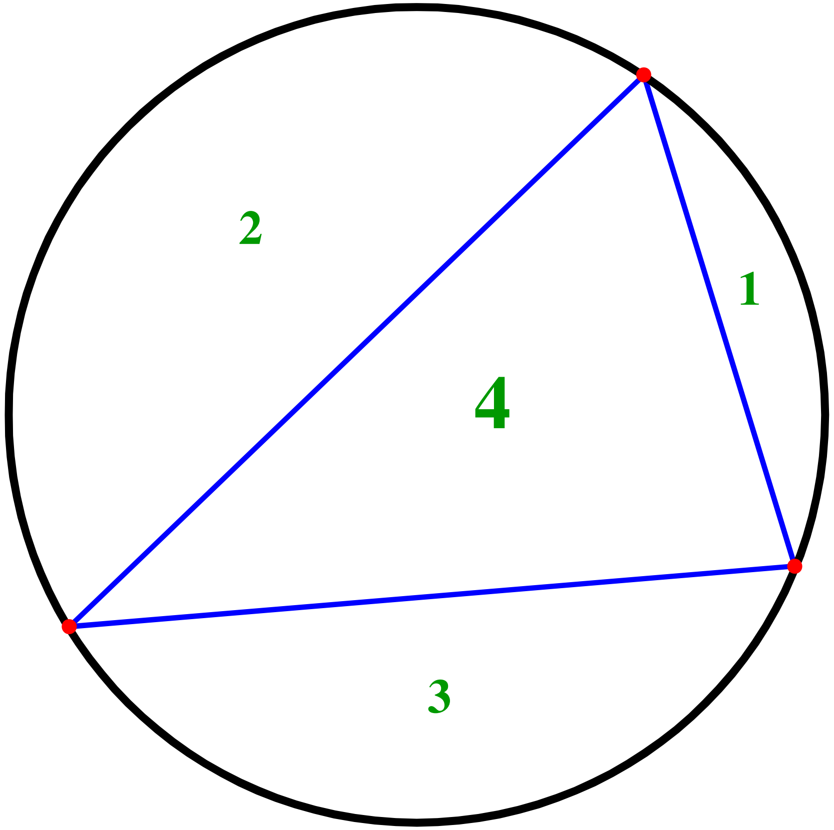


12 Vertices unregelmäßig angeordnet

12 Vertices zufällig angeordnet

Suche nach einer Vermutung





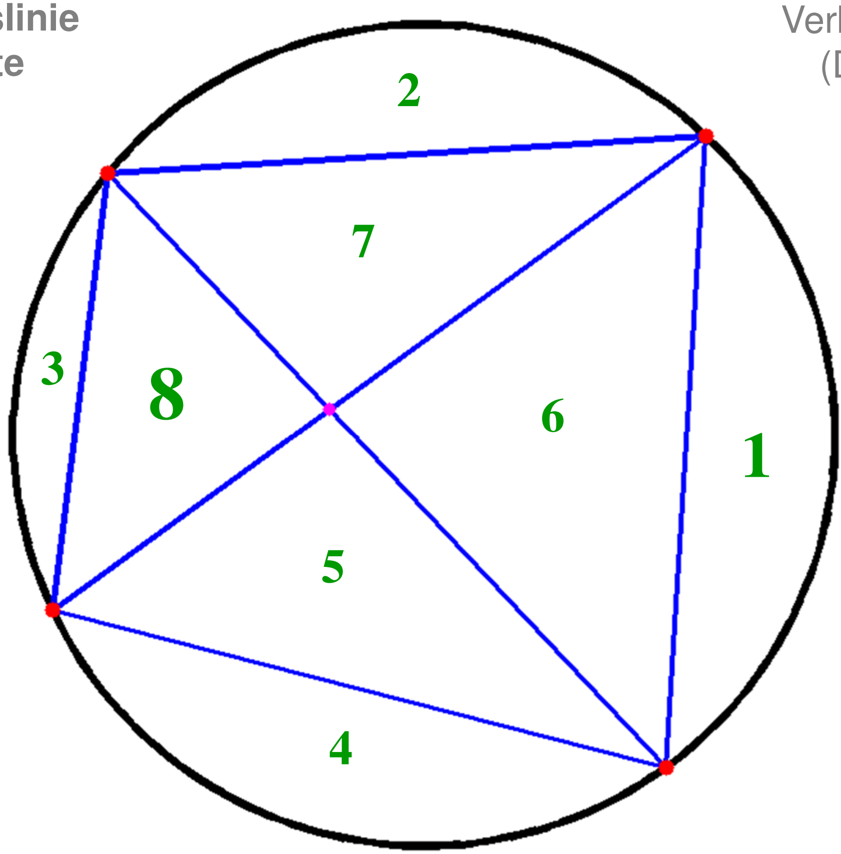
2 Eckpunkte $\longrightarrow$ 2 Flächenstücke

3 Eckpunkte $\longrightarrow$ 4 Flächenstücke

Suche nach einer Vermutung (Forts.)

Erinnerung zur Sprechweise
Eckpunkte = auf Kreislinie vorgegebene Punkte

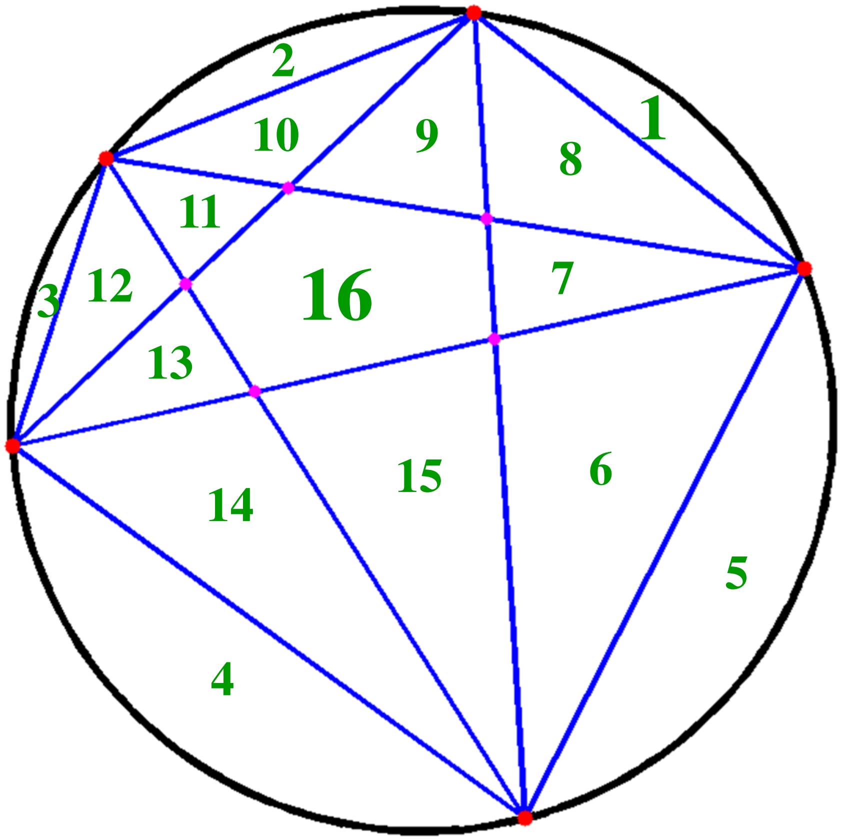
Dagegen: **Schnittpunkte** der Verbindungslinien/Geraden (Diagonalen) liegen im Inneren des Kreises



4 Eckpunkte $\rightarrow$ 8 Flächenstücke

$$8 = 2^3 = 2^{4-1}$$

Suche nach einer Vermutung (Forts.)



5 Eckpunkte $\rightarrow$ 16 Flächenstücke

$$16 = 2^4 = 2^{5-1}$$

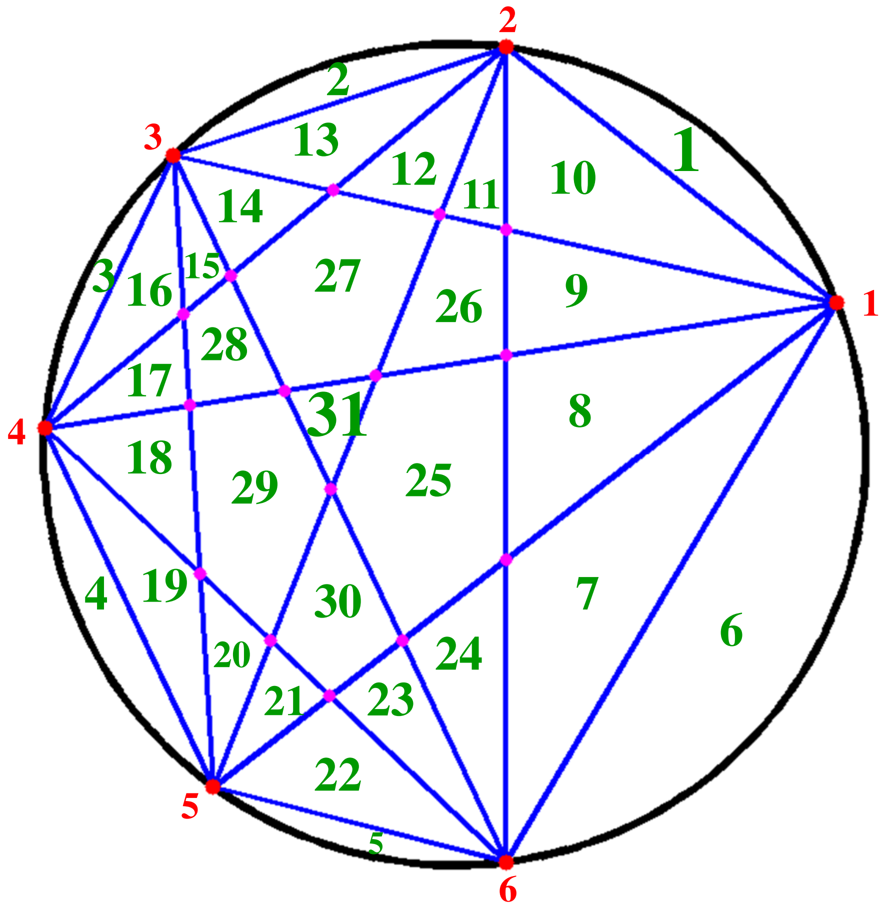
Die Vermutung

#Eckpunkte	#Flächenstücke
1	$1 = 2^0$
2	$2 = 2^1$
3	$4 = 2^2$
4	$8 = 2^3$
5	$16 = 2^4$
6	$32 = 2^5$?

Gilt

n Eckpunkte $\longrightarrow$ 2^{n-1} Flächenstücke **?**

Die Vermutung auf dem Prüfstand für $n = 6$



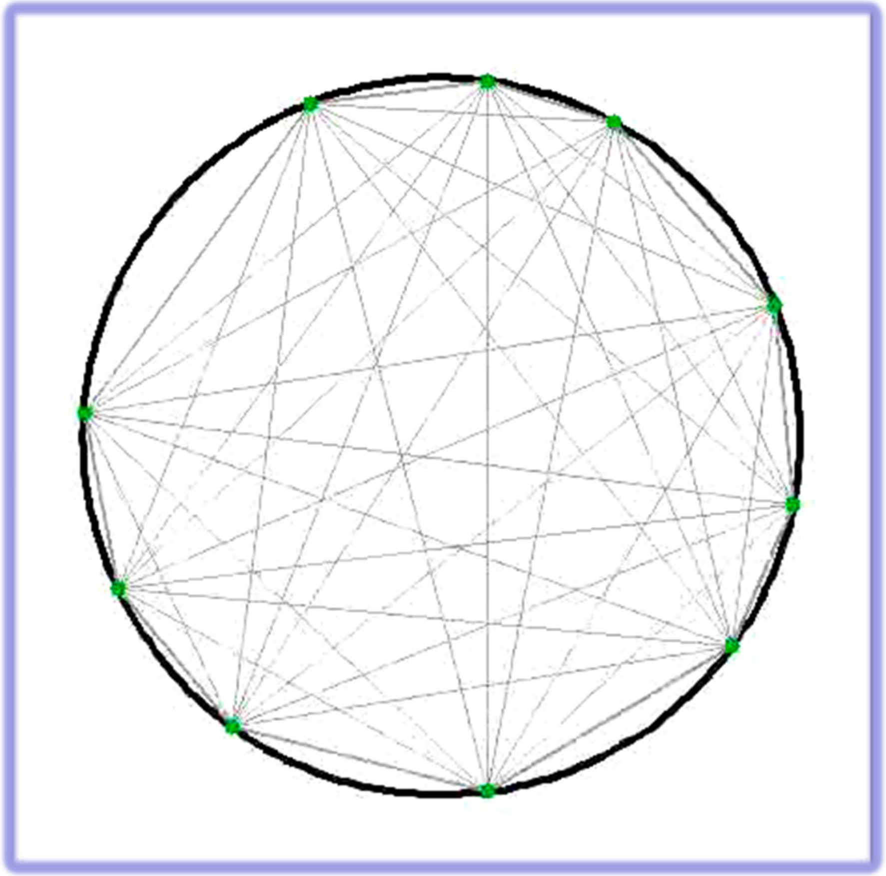
6 Eckpunkte $\rightarrow$ **31** Flächenstücke

$$31 \neq 32 = 2^5 = 2^{6-1}$$

Da ist doch was faul!
Verzählt?!

Die Vermutung auf dem Prüfstand für $n = 10$

Vorhersage: #Flächenstücke $= 2^{10-1} = 2^9 = \mathbf{512}$



Zählung: #Flächenstücke $= \underbrace{176}_{\text{innere}} + \underbrace{10 \cdot 8}_{\text{äußere}} = \mathbf{256}$ $\Rightarrow$ Falsche Vorhersage! ☹

Beachte: An jeden der n Eckpunkte grenzen n sogenannte äußere Teilflächen. Vier dieser äußeren Teilflächen, nämlich diejenigen, die durch eine Seite des n-Gons getrennt sind, grenzen jedoch auch an den jeweiligen Nachbarknoten. Daher können einem Knoten davon nur die Hälfte, also zwei Teilflächen, zugeordnet werden. Zu jedem Knoten gehören daher $n-2$ äußere Flächenstücke, die beim Färben nicht miterfaßt und abzählt wurden.

Zweifel

~~n Eckpunkte $\rightarrow$ 2^{n-1} Flächenstücke~~

Warum sollte sich die Anzahl der Flächenstücke durch Hinzunahme eines Eckpunktes verdoppeln?

Hinzunahme eines $(n+1)$'ten Eckpunktes
$\rightarrow$ n zusätzliche Verbindungslinien bzw. Geraden

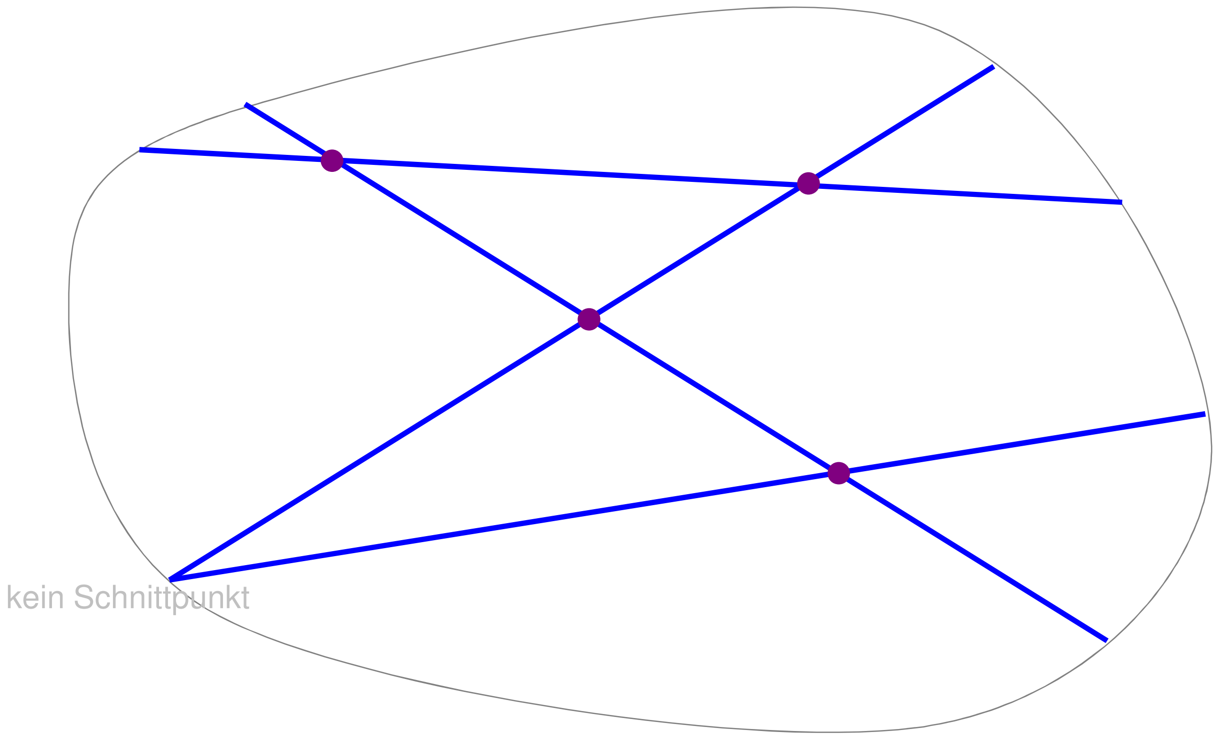
Im Mittel müßte jedes der 2^{n-1} vorhandenen Flächenstücke durch einen der n zusätzlichen Geraden halbiert werden.

$\rightarrow$ (Begründung der) **Vermutung erscheint aus theoretischer Sicht abwegig.**

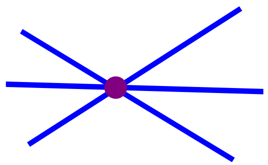
Weiteres Vorgehen: Versuche durch *Spezialisierung* oder durch *Verallgemeinerung* ein ähnliches aber *vereinfachtes* Problem zu analysieren.

Eine allgemeinere Fragestellung

Wie hängt die *Anzahl resultierender* ***Flächenstücke*** von der *Anzahl vorhandener* ***Geraden*** und der *Anzahl ihrer* ***Schnittpunkte*** ab?



Ausgeschlossen: mehrfache Schnittpunkte, beispielsweise

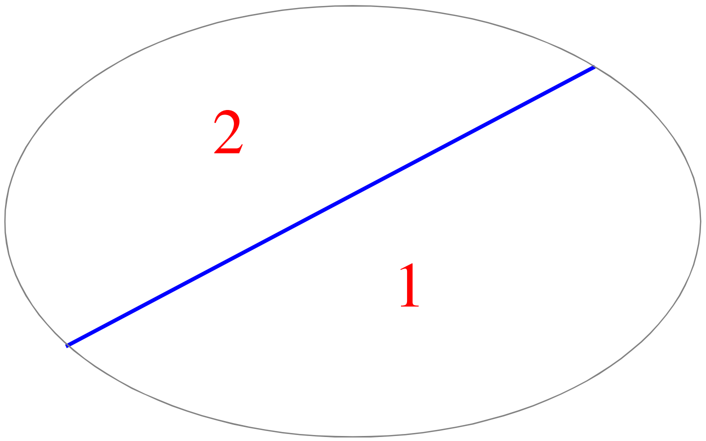


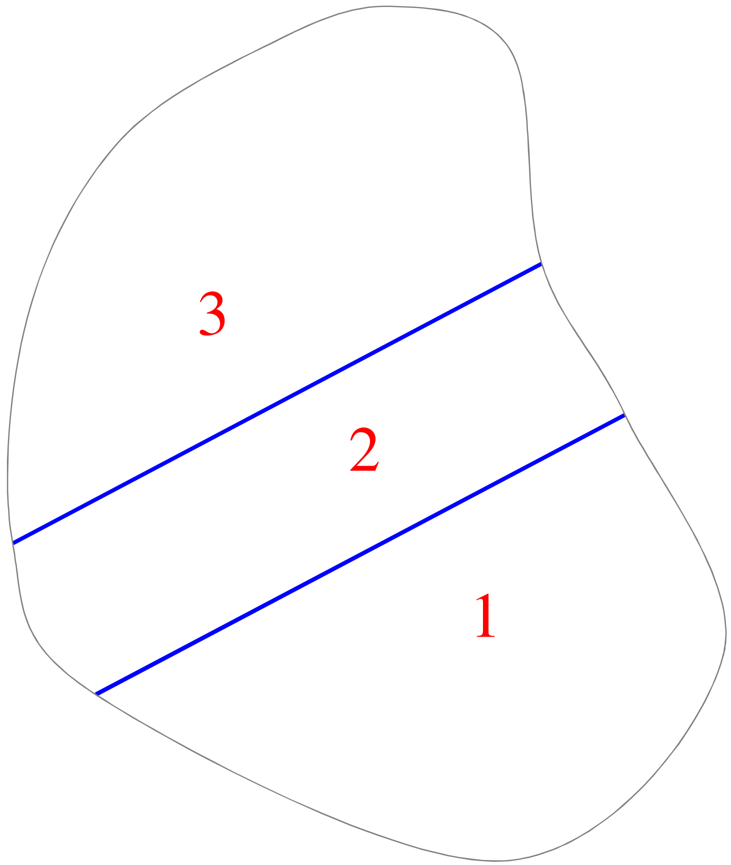
Erlaubt: nur **einfache** Schnittpunkte (von jeweils zwei Geraden)

Schnittpunkte müssen im Inneren liegen.

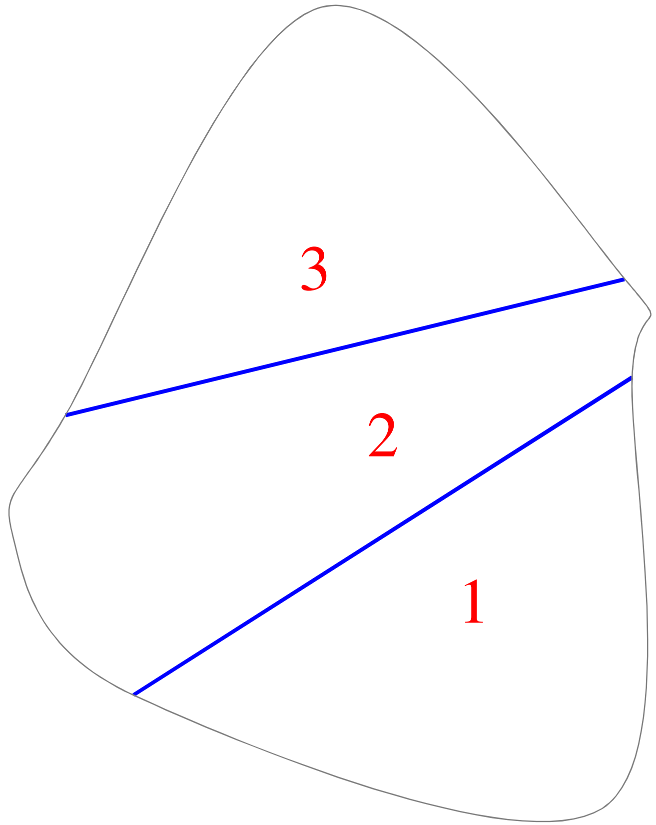
Das Gebiet sollte so beschaffen sein, daß der Gebietsrand von jeder Gerade genau zweimal geschnitten und nicht berührt wird. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn das Gebiet *streng konvex* ist , d.h. daß auch die kürzeste (geradlinige) Verbindung zweier Randpunkte stets im Inneren des Gebiets verläuft, wodurch geradlinige Randabschnitte ausgeschlossen sind.

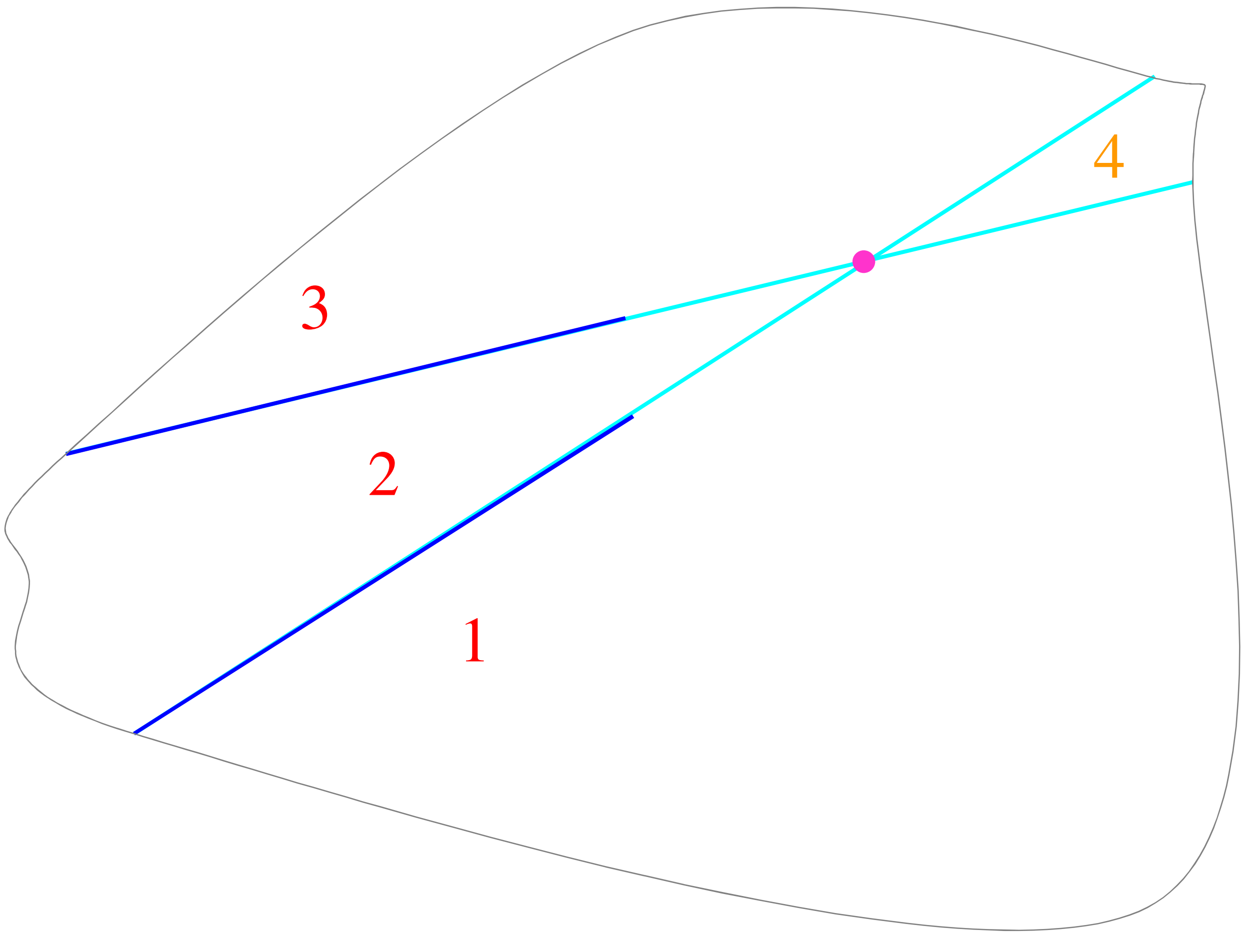
Suche nach einem Zusammenhang (Ausprobieren einfacher Beispiele)

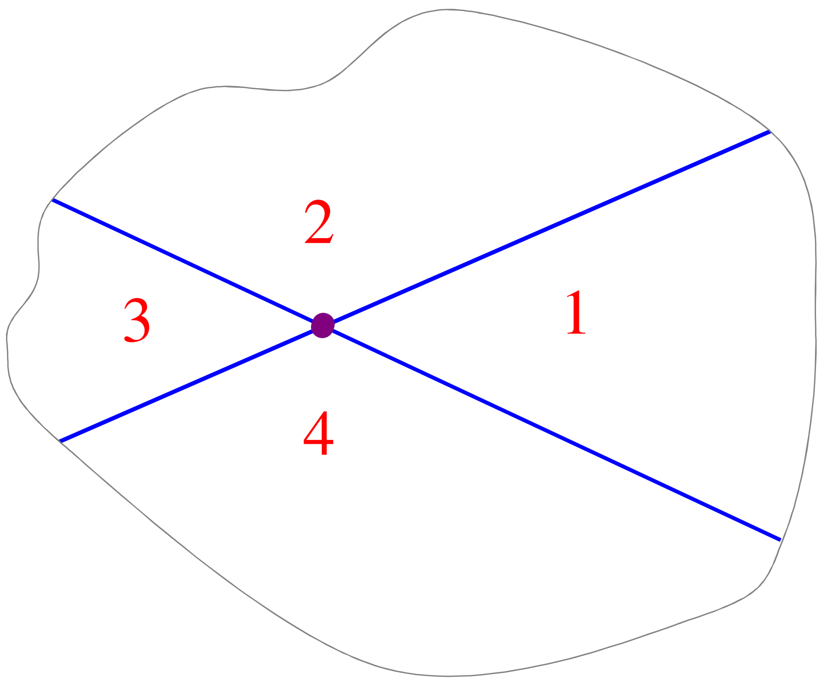




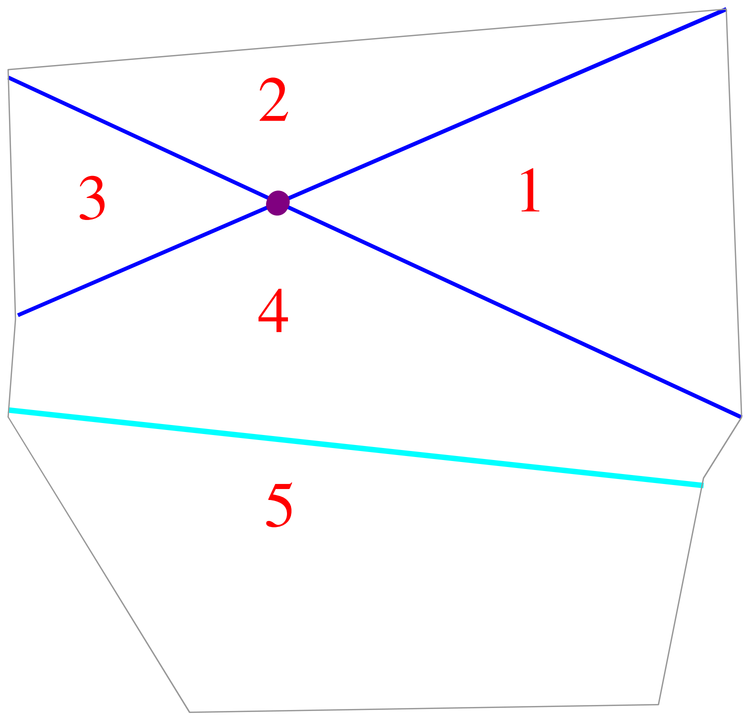
Suche nach einem Zusammenhang **Beispiel 2**



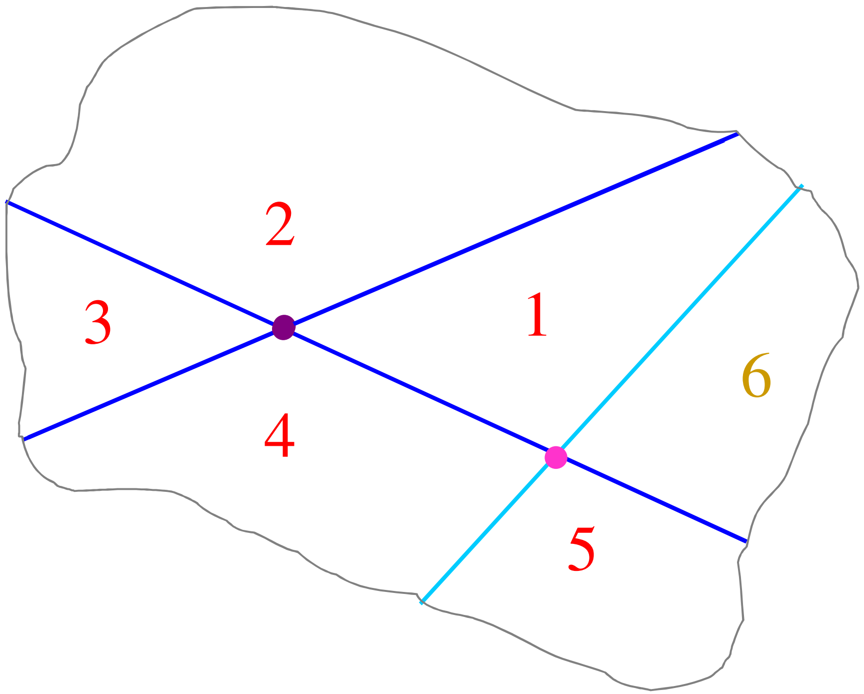

4
3
2
1

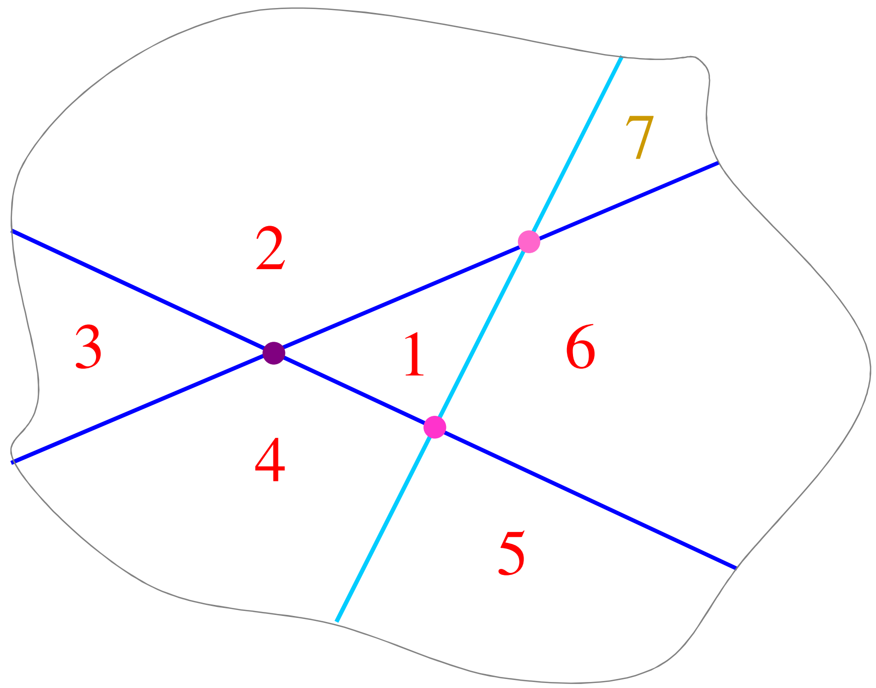

2
3
1
4

Suche nach einem Zusammenhang **Beispiel 4**



Suche nach einem Zusammenhang Beispiel 5




7
2
3
1
6
4
5

Aufstellen einer Gesetzmäßigkeit

#Geraden	#Schnittpunkte	#Flächenstücke
1	0	2
2	0	3
2	1	4
3	0	4
3	1	5
3	2	6
3	3	7

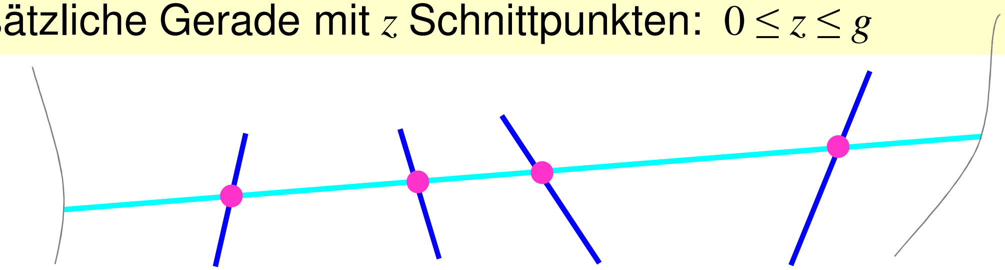
#**G**eraden + #**S**chnittpunkte + 1 = #**F**lächen

Beweis der Gesetzmäßigkeit

Angenommen Formel richtig, falls #Geraden = $g \leq n$, d.h. es gelte

$$\boldsymbol{g + s + 1 = f} \,.$$

Betrachte zusätzliche Gerade mit z Schnittpunkten: $0 \leq z \leq g$



- Mindestens ein vorhandenes Flächenstück wird in zwei neue Flächenstücke zerlegt.
- Für jeden der z neuen Schnittpunkte wird ein weiteres Flächenstück in zwei neue Flächenstücke zerlegt.
- Insgesamt erhöht sich Anzahl der Flächenstücke um $1+z$.

$$\boldsymbol{(g + s + 1) + (1+z) = f + (1+z)}$$

(#neuer Geraden=1) + (#neuer Schnittpunkte= z) = (#hinzugekommener Flächenstücke=$1+z$)

$$\boldsymbol{(g+1) + (s+z) + 1 = f + (1+z)}$$

Umsortieren der Summanden auf der linken Seite erlaubt Interpretation im gewünschten Sinne.

Somit gilt auch für $g = n+1$:

#Geraden + #Schnittpunkte + 1 = #Flächen