Weitere Rechenregeln

Eine weitere Rechenregel für Potenzen: $\forall a > 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}$: $(a^x)^y = a^{xy}$

$\Rightarrow$ eine weitere Rechenregel für Logarithmen: $(b > 0)$

$$b^x = \left(a^{\log_a b}\right)^x = a^{(\log_a b)\cdot x} \equiv a^{x\cdot \log_a b}$$

$$\Rightarrow \quad \log_a b^x = \log_a\left(a^{x\cdot \log_a b}\right) = x \cdot \log_a b$$

- Also gilt: $\forall a, b > 0, \forall x \in \mathbb{R}$: $\boldsymbol{\log_a b^x = x \cdot \log_a b}$
- $\forall a, b > 0$: $b^{\log_b a} = a$

$$\Rightarrow \quad \log_a\left(b^{\log_b a}\right) = \log_a a \quad \Rightarrow \quad \log_b a \cdot \log_a b = 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Universalität von Exponentialfunktion & natürlichen Logarithmus:

- $\boldsymbol{a^x} = \left(\mathrm{e}^{\log a}\right)^x = \boldsymbol{\mathrm{e}^{x\cdot \log a}}$
- $x = \mathrm{e}^{\log x} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\log_a x} = \log_a\left(\mathrm{e}^{\log x}\right) = \boldsymbol{\log_a \mathrm{e} \cdot \log x} = \boldsymbol{\frac{\log x}{\log a}}$

Historische Bedeutung der Logarithmen als Hilfsmittel für das praktische Rechnen

Logarithmieren verwandelt eine Multiplikation in eine Addition und eine Wurzel in eine Division

Vorgehensweise zur Berechnung eines Produkts $x \cdot y$:
- Schlage in Logarithmentafel $\log x$ und $\log y$ nach (ggf. Verbesserung der Werte durch lineare Interpolation)
- Addiere die Logarithmen
- Bestimme mittels Logarithmentafel das Produkt xy als Numerus zu $\log x + \log y$ (ggf. ist eine weitere Linearinterpolation zur Wertverbesserung durchzuführen).

Logarithmentafel

B. Mantissen der Briggsschen Logarithmen.

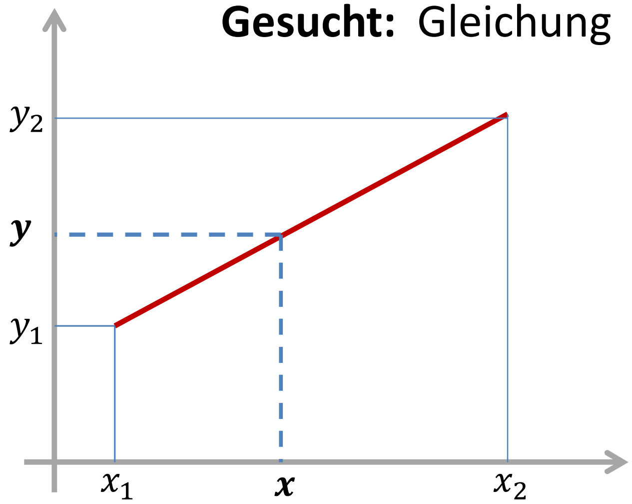
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	00 000	00 432	00 860	01 284	01 703	02 119	02 531	02 938	03 342	03 743
11	04 139	04 532	04 922	05 308	05 690	06 070	06 446	06 819	07 188	07 555
12	07 918	08 279	08 636	08 991	09 342	09 691	10 037	10 380	10 721	11 059
13	11 394	11 727	12 057	12 385	12 710	13 033	13 354	13 672	13 988	14 301
14	14 613	14 922	15 229	15 534	15 836	16 137	16 435	16 732	17 026	17 319
15	17 609	17 898	18 184	18 469	18 752	19 033	19 312	19 590	19 866	20 140
16	20 412	20 683	20 952	21 219	21 484	21 748	22 011	22 272	22 531	22 789
17	23 045	23 300	23 553	23 805	24 055	24 304	24 551	24 797	25 042	25 285
18	25 527	25 768	26 007	26 245	26 482	26 717	26 951	27 184	27 416	27 646
19	27 875	28 103	28 330	28 556	28 780	29 003	29 226	29 447	29 667	29 885
20	30 103	30 320	30 535	30 750	30 963	31 175	31 387	31 597	31 806	32 015
21	32 222	32 428	32 634	32 838	33 041	33 244	33 445	33 646	33 846	34 044
22	34 242	34 439	34 635	34 830	35 025	35 218	35 411	35 603	35 793	35 984
23	36 173	36 361	36 549	36 736	36 922	37 107	37 291	37 475	37 658	37 840
24	38 021	38 202	38 382	38 561	38 739	38 917	39 094	39 270	39 445	39 620
25	39 794	39 967	40 140	40 312	40 483	40 654	40 824	40 993	41 162	41 330
26	41 497	41 664	41 830	41 996	42 160	42 325	42 488	42 651	42 813	42 975
27	43 136	43 297	43 457	43 616	43 775	43 933	44 091	44 248	44 404	44 560
28	44 716	44 871	45 025	45 179	45 332	45 484	45 637	45 788	45 939	46 090
29	46 240	46 389	46 538	46 687	46 835	46 982	47 129	47 276	47 422	47 567
30	47 712	47 857	48 001	48 144	48 287	48 430	48 572	48 714	48 855	48 996
31	49 136	49 276	49 415	49 554	49 693	49 831	49 969	50 106	50 243	50 379
32	50 515	50 651	50 786	50 920	51 055	51 188	51 322	51 455	51 587	51 720
33	51 851	51 983	52 114	52 244	52 375	52 504	52 634	52 763	52 892	53 020
34	53 148	53 275	53 403	53 529	53 656	53 782	53 908	54 033	54 158	54 283
35	54 407	54 531	54 654	54 777	54 900	55 023	55 145	55 267	55 388	55 509
36	55 630	55 751	55 871	55 991	56 110	56 229	56 348	56 467	56 585	56 703
37	56 820	56 937	57 054	57 171	57 287	57 403	57 519	57 634	57 749	57 864
38	57 978	58 092	58 206	58 320	58 433	58 546	58 659	58 771	58 883	58 995
39	59 106	59 218	59 329	59 439	59 550	59 660	59 770	59 879	59 988	60 097
40	60 206	60 314	60 423	60 531	60 638	60 746	60 853	60 959	61 066	61 172
41	61 278	61 384	61 490	61 595	61 700	61 805	61 909	62 014	62 118	62 221
42	62 325	62 428	62 531	62 634	62 737	62 839	62 941	63 043	63 144	63 246
43	63 347	63 448	63 548	63 649	63 749	63 849	63 949	64 048	64 147	64 246
44	64 345	64 444	64 542	64 640	64 738	64 836	64 933	65 031	65 128	65 225
45	65 321	65 418	65 514	65 610	65 706	65 801	65 896	65 992	66 087	66 181
46	66 276	66 370	66 464	66 558	66 652	66 745	66 839	66 932	67 025	67 117
47	67 210	67 302	67 394	67 486	67 578	67 669	67 761	67 852	67 943	68 034
48	68 124	68 215	68 305	68 395	68 485	68 574	68 664	68 753	68 842	68 931
49	69 020	69 108	69 197	69 285	69 373	69 461	69 548	69 636	69 723	69 810
50	69 897	69 984	70 070	70 157	70 243	70 329	70 415	70 501	70 586	70 672
51	70 757	70 842	70 927	71 012	71 096	71 181	71 265	71 349	71 433	71 517
52	71 600	71 684	71 767	71 850	71 933	72 016	72 099	72 181	72 263	72 346
53	72 428	72 509	72 591	72 673	72 754	72 835	72 916	72 997	73 078	73 159
54	73 239	73 320	73 400	73 480	73 560	73 640	73 719	73 799	73 878	73 957
55	74 036	74 115	74 194	74 273	74 351	74 429	74 507	74 586	74 663	74 741
56	74 819	74 896	74 974	75 051	75 128	75 205	75 282	75 358	75 435	75 511
57	75 587	75 664	75 740	75 815	75 891	75 967	76 042	76 118	76 193	76 268
58	76 343	76 418	76 492	76 567	76 641	76 716	76 790	76 864	76 938	77 012
59	77 085	77 159	77 232	77 305	77 379	77 452	77 525	77 597	77 670	77 743
60	77 815	77 887	77 960	78 032	78 104	78 176	78 247	78 319	78 390	78 462
61	78 533	78 604	78 675	78 746	78 817	78 888	78 958	79 029	79 099	79 169
62	79 239	79 309	79 379	79 449	79 518	79 588	79 657	79 727	79 796	79 865
63	79 934	80 003	80 072	80 140	80 209	80 277	80 346	80 414	80 482	80 550
64	80 618	80 686	80 754	80 821	80 889	80 956	81 023	81 090	81 158	81 224
65	81 291	81 358	81 425	81 491	81 558	81 624	81 690	81 757	81 823	81 889
66	81 954	82 020	82 086	82 151	82 217	82 282	82 347	82 413	82 478	82 543
67	82 607	82 672	82 737	82 802	82 866	82 930	82 995	83 059	83 123	83 187
68	83 251	83 315	83 378	83 442	83 506	83 569	83 632	83 696	83 759	83 822
69	83 885	83 948	84 011	84 073	84 136	84 198	84 261	84 323	84 386	84 448
70	84 510	84 572	84 634	84 696	84 757	84 819	84 880	84 942	85 003	85 065
71	85 126	85 187	85 248	85 309	85 370	85 431	85 491	85 552	85 612	85 673
72	85 733	85 794	85 854	85 914	85 974	86 034	86 094	86 153	86 213	86 273
73	86 332	86 392	86 451	86 510	86 570	86 629	86 688	86 [illegible]	86 806	86 864
74	86 923	86 982	87 040	87 099	87 157	87 216	87 274	87 332	87 390	87 448
75	87 506	87 564	87 622	87 679	87 737	87 795	87 852	87 910	87 967	88 024
76	88 081	88 138	88 195	88 252	88 309	88 366	88 423	88 480	88 536	88 593
77	88 649	88 705	88 762	88 818	88 874	88 930	88 986	89 042	89 098	89 154
78	89 209	89 265	89 321	89 376	89 432	89 487	89 542	89 597	89 653	89 708
79	89 763	89 818	89 873	89 927	89 982	90 037	90 091	90 146	90 200	90 255
80	90 309	90 363	90 417	90 472	90 526	90 580	90 634	90 687	90 741	90 795
81	90 849	90 902	90 956	91 009	91 062	91 116	91 169	91 222	91 275	91 328
82	91 381	91 434	91 487	91 540	91 593	91 645	91 698	91 751	91 803	91 855
83	91 908	91 960	92 012	92 065	92 117	92 169	92 221	92 273	92 324	92 376
84	92 428	92 480	92 531	92 583	92 634	92 686	92 737	92 788	92 840	92 891
85	92 942	92 993	93 044	93 095	93 146	93 197	93 247	93 298	93 349	93 399
86	93 450	93 500	93 551	93 601	93 651	93 702	93 752	93 802	93 852	93 902
87	93 952	94 002	94 052	94 101	94 151	94 201	94 250	94 300	94 349	94 399
88	94 448	94 498	94 547	94 596	94 645	94 694	94 743	94 792	94 841	94 890
89	94 939	94 988	95 036	95 085	95 134	95 182	95 231	95 279	95 328	95 376
90	95 424	95 472	95 521	95 569	95 617	95 665	95 713	95 761	95 809	95 856
91	95 904	95 952	95 999	96 047	96 095	96 142	96 190	96 237	96 284	96 332
92	96 379	96 426	96 473	96 520	96 567	96 614	96 661	96 708	96 755	96 802
93	96 848	96 895	96 942	96 988	97 035	97 081	97 128	97 174	97 220	97 267
94	97 313	97 359	97 405	97 451	97 497	97 543	97 589	97 635	97 681	97 727
95	97 772	97 818	97 864	97 909	97 955	98 000	98 046	98 091	98 137	98 182
96	98 227	98 272	98 318	98 363	98 408	98 453	98 498	98 543	98 588	98 632
97	98 677	98 722	98 767	98 811	98 856	98 900	98 945	98 989	99 034	99 078
98	99 123	99 167	99 211	99 255	99 300	99 344	99 388	99 432	99 476	99 520
99	99 564	99 607	99 651	99 695	99 739	99 782	99 826	99 870	99 913	99 957

Die *dekadischen* bzw. B*rigg*schen Logarithmen wurden als effektives Rechenhilfsmittel verwendet, bevor die elektronische Kleinrechner auf-kamen.

Mantisse = Ziffern nach dem Komma eines Logarithmus von lat. *mantis(s)a =* Zugabe, Beilage

Scan aus : Des Ingenieurs Taschenbuch – herausgegeben vom akademischen Verein Hütte, Berlin 1902

Lineare Interpolation



Gesucht: Gleichung der Geraden durch die Punkte $(x_1\,,y_1)$ und $(x_2\,,y_2)$.

$$f(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\cdot y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\cdot y_2$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot (x - x_1) + y_1$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot (x - x_2) + y_2$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

$x = 0$ liefert
y-Achsenabschnitt
$\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$

Beispiele:

- $(x_1, y_1) = (43100, 63448)$ $\quad (x_2, y_2) = (43200, 63548)$ $\quad x = 43189$

$$y = \frac{43200 - 43189}{43200 - 43100}\cdot 63448 + \frac{43189 - 43100}{43200 - 43100}\cdot 63548 = \frac{11}{100}\cdot 63448 + \frac{89}{100}\cdot 63548$$

$$= 63000 + \left(\frac{11}{100}\cdot 448 + \frac{89}{100}\cdot 548\right) = 63000 + \underbrace{0{,}11\cdot 448 + 0{,}89\cdot 548}_{\approx \frac{1}{10}\cdot 448 + \frac{9}{10}\cdot 548}$$

siehe Interp. auf der nächsten Folie

- $(x_1, y_1) = (675000, 82930)$ $\quad (x_2, y_2) = (676000, 82995)$ $\quad x = 675243$

$$y = \frac{676000 - 675243}{6760000 - 675000}\cdot 82930 + \frac{675243 - 675000}{676000 - 675000}\cdot 82995 = \frac{757}{1000}\cdot 82930 + \frac{243}{1000}\cdot 82995$$

$$= 82900 + \underbrace{0{,}757\cdot 30 + 0{,}243\cdot 95}_{\approx \frac{3}{4}\cdot 30 + \frac{1}{4}\cdot 95}$$

siehe Interp. auf der nächsten Folie

$\mathbf{43\,189 \cdot 675\,243} \quad = ?$

Tabelle: Ablesen der benötigte Mantissen

$$43{,}2 \;\to\; 63\,548 \qquad \log_{10}\; 43\,189 \;\lesssim\; 4{,}63548$$
$$67{,}5 \;\to\; 82\,930 \qquad \log_{10} 675\,243 \;\gtrsim\; 5{,}82930$$
$$10{,}46478 \;\approx\; \log_{10} 43\,189 \;+ \log_{10} 675\,243$$
$$= \log_{10}(43\,189 \cdot 675\,243)$$

Tabelle: Ablesen der umgekehrten Zuordnung Mantissen → Numerus

$$46\,478 \;\lesssim\; 46\,538 \to 29{,}2 \qquad 43\,189 \;\cdot\; 675\,243 \;\approx 2{,}92 \cdot 10^{10} = \; 29\,200\,000\,000$$

Exaktes Ergebnis: $43\,189 \cdot 675\,243 \;\; = 29\,163\,069\,927$ $\quad\Rightarrow$ Relativer Fehler : $\frac{29\,200-29\,163}{29163} \lesssim 0.0013 < \; 1{,}5‰$

Verbesserung durch *lineare Interpolation*

$$\left\{\begin{array}{ll} 43{,}1 \to \;\; 63\,448 & \log_{10} 43\,100 \approx 4{,}63448 \\ 43{,}2 \to \;\; 63\,548 & \log_{10} 43\,200 \approx 4{,}63548 \end{array}\right.$$

$$0{,}11 \cdot 448 + 0{,}89 \cdot 548 = 537$$ Interpolation

$$\Rightarrow \;\; \log_{10} 43189 \;\approx\; 4{,}63537$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 67{,}5 \to 82\,930 & \log_{10} 675\,000 \approx 5{,}82930 \\ 67{,}6 \to 82\,995 & \log_{10} 675\,000 \approx 5{,}82995 \end{array}\right.$$

$$0{,}757 \cdot 30 + 0{,}243 \cdot 95 \approx 45{,}8$$ Interpolation

$$\Rightarrow \;\; \log_{10} 675243 \approx 5{,}829458$$

$$\log_{10} \;\; 43\,189 \;\approx\; \;\; 4{,}635370$$
$$\log_{10} 675\,243 \;\approx\; \;\; 5{,}829458$$
$$10{,}464828$$

$$46\,482\,8 \approx 46\,482 \left\{\begin{array}{ll} 46\,389 & \to \;29{,}1 \\ 46\,538 & \to \;29{,}2 \end{array}\right.$$

$$\underbrace{\frac{538-482}{538-389} \cdot 29{,}1 + \frac{482-389}{538-389} \cdot 29{,}2}_{\text{Interpolation}} = \frac{56}{149} \cdot 29{,}1 + \frac{93}{149} \cdot 29{,}2 \;\approx\; \frac{1}{3} \cdot 29{,}1 + \frac{2}{3} \cdot 29{,}2 \;\; = \frac{1}{3} \cdot 87{,}5 \;\; = 29\frac{1}{6}$$
$$= 29{,}1667$$

$$43\,189 \;\cdot\; 675\,243 \;\approx 2{,}91667 \cdot 10^{10} = \; 29\,166\,700\,000$$ $\Rightarrow$ Relativer Fehler : $\frac{29\,166-29\,163}{29163} \lesssim \; 0.00011$

$$\approx 0{,}1‰$$

$\sqrt[3]{\mathbf{18\,191\,447}} = {\color{red}?}$

Ablesen der benötigte Mantissen aus der Logarithmen Tabelle

$$\begin{cases} 18{,}1 \rightarrow 25\,768 \\ 18{,}2 \rightarrow 26\,007 \end{cases} \qquad \log_{10} 18\,191\,447 \lesssim 7{,}26\,007$$

$$\begin{aligned} \log_{10} \sqrt[3]{18\,191\,447} &= \log_{10} 18\,191\,447^{1/3} &&= \frac{1}{3} \cdot \log_{10} 18\,191\,447 \\ &\lesssim \frac{1}{3} \cdot 7{,}26\,007 &&= 7{,}26007 : 3 \\ &\approx 2{,}333333 + 0{,}08669 &&= 2{,}42002 \end{aligned}$$

Ablesen des zugehörigen Numerus aus der Logarithmen Tabelle

$$42002 \begin{cases} 41\,996 \rightarrow 26{,}3 \\ 42\,160 \rightarrow 26{,}4 \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{18\,191\,447} = 10^2 \cdot 2{,}63 = 263$$

Ergebnis entspricht der exakten Lösung:
$263^3 = 18\,191\,447$