Grundlegende mathematische Begriffe aus der Vorlesung

Vorlesung Mathematik für Informatiker II

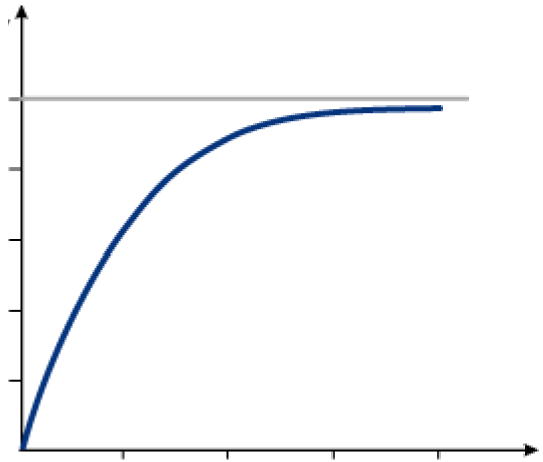
Universität Heidelberg

Max Bréard, Vasil Manev, Armand Rousselot

Supremum/Infimum

Obere Schranke: $S \in R$ heißt obere Schranke zu einer Menge A, falls $\forall\, a \in A : a \leq S$
Untere Schranke: $s \in R$ heißt untere Schranke zu einer Menge A, falls $\forall\, a \in A : a \geq s$
Supremum: kleinste Obere Schranke einer Menge
Infimum: größte Untere Schranke einer Menge

Für Funktionen: Betrachte die Bildmenge



Beispiele:

$X' := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\} \subseteq \mathbb{R} \quad \rightarrow \sup X' = 2, max\, X' = 2$

$X := \{x \in \mathbb{R} : x < 2\} \subseteq \mathbb{R} \quad \rightarrow \sup X = 2, X \text{ hat } kein\ Maximum$

Bild: https://elearning.physik.uni-frankfurt.de/data/FB13-PhysikOnline/lm_data/lm_281/modul_2/teil_5/node21.html

Beschränkheit

Eine Funktion/Menge heißt nach oben/unten beschränkt wenn ein Supremum/Infimum existiert. $(\quad \neq \infty)$

Es muss kein Minimum/Maximum existieren.

Beispiel:

$$M = \{ x \in \mathbb{Q} \mid \exists r \in \mathbb{R} : \frac{1}{r} < x \wedge -\frac{1}{r} + 1 > x \}$$

Monotonie

Eine Funktion $f:R\to R$ heißt auf einem Intervall *I* monoton steigend falls:

$\forall\ a,b\in I, a<b\to f(a)\leq f(b)$

Eine Funktion $f:R\to R$ heißt auf einem Intervall *I* monoton fallend falls:

$\forall\ a,b\in I, a<b\to f(a)\geq f(b)$

Eine Funktion $f:R\to R$ heißt auf einem Intervall *I* streng monoton steigend falls:

$\forall\ a,b\in I, a<b\to f(a)<f(b)$

Eine Funktion $f:R\to R$ heißt auf einem Intervall *I* streng monoton fallend falls:

$\forall\ a,b\in I, a<b\to f(a)>f(b)$

Monotonie

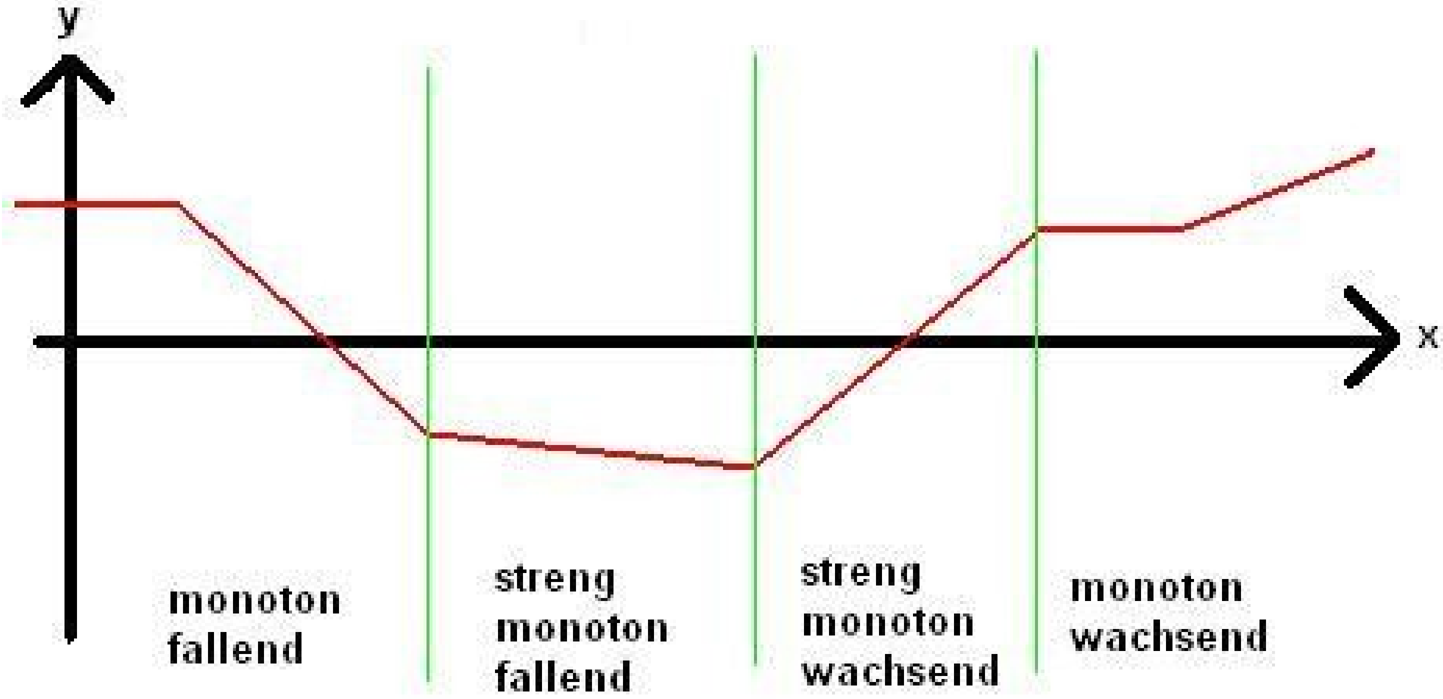


Bild: https://www.frustfrei-lernen.de/mathematik/monotonie-monton-steigend-fallend.html

Teleskopsumme

Eine Teleskopsumme ist eine endliche Differenzsumme bei der sich alle Nachbarglieder (außer dem ersten und dem letzten) gegenseitig aufheben.

Beispiel:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + ... + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

Eine Reihe, deren Teilsummen Teleskopsummen sind, nennt man Teleskopreihe. Eine Teleskopreihe wie (*) ist genau dann konvergent wenn $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert g konvergiert. Die Summe der Reihe ist dann gleich a_1- g:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i - a_{i+1}) = a_1 - \lim_{k\to\infty} a_k = a_1 - g$$

Abzählbar und überabzählbare Unendlichkeiten

Abzählbare Mengen können endlich und unendlich sein. Endliche Mengen sind immer abzählbar, während unendliche Mengen genau dann abzählbar sind, falls es zwischen dieser Menge und den natürlichen Zahlen eine Bijektion gibt.
Beispiel: die ganzen Zahlen:

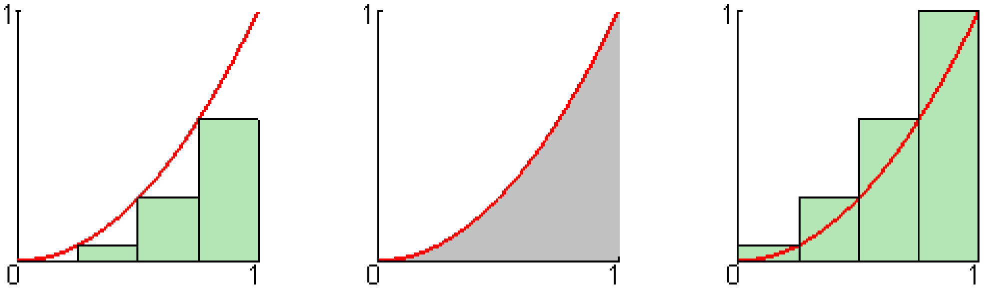
$$f:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{N},\; f(n)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor(-1)^{n}\rightarrow f \textit{ ist bijektiv} \rightarrow \mathbb{Z} \textit{ ist abzählbar}$$

Eine überabzählbare Menge ist jede Menge an Elementen, die nicht abzählbar ist.
Beispiel:
Lasst uns die Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 betrachten. $\{r\in\mathbb{R} : r\in[0,1]\}$
Angenommen wir finden eine Funktion f, die jedem r eine natürlich Zahl zuweist. Nun können wir die reellen Zahlen nach der durch f zugewiesenen Reihenfolge auflisten.
Jetzt konstruieren wir eine neue Zahl r' wie folgt: Wir wählen die erste Nachkommastelle so, dass sie von der f(1) verschieden ist, die zweite verschieden von f(2) usw. Damit ist r' verschieden von allen f(n). Es gilt aber auch 0<r<1, also ist unsere Funktion keine Bijektion nach [0,1], es folgt ein Widerspruch.

n	f(n)
1	0.3445..
2	0.8643..
3	0.2385..
4	0.7691..

Äquidistante Zerlegung

Wie der Name sagt ist die Äquidistante Zerlegung eine Aufteilung eines Intervalls in n gleich große Teile (Balken) Der Unterschied zwischen Ober-



und Untersumme ist in der Graphik gut zu erkennen, links in der Untersumme werden die Balken strikt unter den Graphen angesetzt während rechts in der Obersumme die Balken strikt darüber angesetzt werden (Achtung: wenn die Funktion fällt statt zu steigen kehrt sich die Formel um, damit die Balken richtig angesetzt werden. Auf einem Intervall [a, b]

hat ein Balken die Breite $\Delta x = \frac{a-b}{n}$ .Damit geht für $n \to \infty$ die Balkenbreite gegen 0.

Bild: https://www.dom-gymnasium.de/mathpage/12/Integration/integral01.html

Geometrische Zerlegung

Bei der geometrischen Zerlegung nimmt die Schrittgröße zu. Wie in der Graphik zu sehen ist, werden die einzelnen Bereiche immer größer, je weiter wir in positive x-Richtung gehen. Das kann bei der Berechnung des Integrals helfen, da sich so oftmals Terme geschickt kürzen lassen, die bei der äquidistanten Zerlegung erst im limes verschwinden.

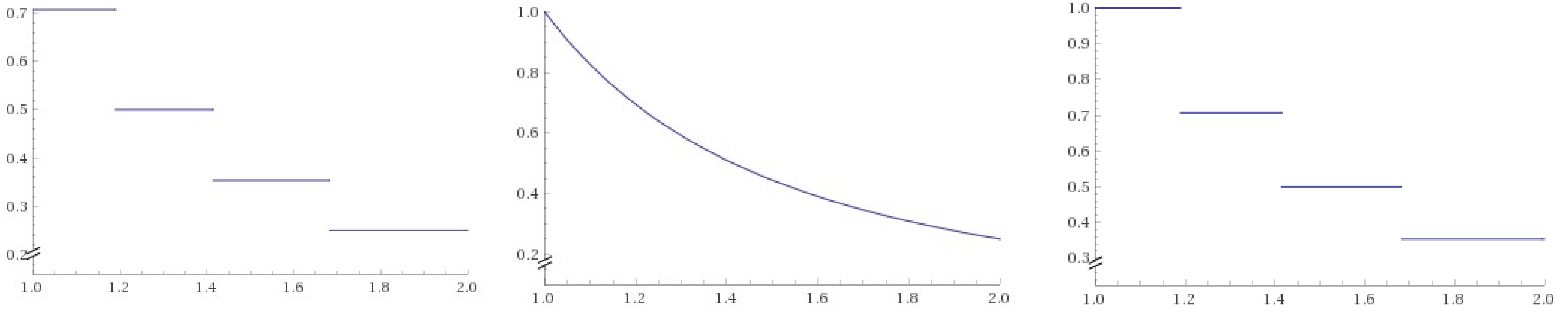


Bild: https://www.wolframalpha.com

O-Notation

Es seien eine Funktion f und eine Funktion g, wenn f in derselben oder in einer niedrigeren Größenordnung wie g liegt (die asymptotisch Obere Schranke), dann gilt:

$$f \in O(g) \Leftrightarrow \exists C > 0, x_0 \in \mathbb{R} : \forall x > x_0 : |f(x)| \leq C|g(x)|$$

Das bedeutet, wenn f bis auf eine Konstante langsamer wächst als g ist f in O(g).

Somit gilt z.B.:

$$\log_2(5x^8) \in O(\log(x))$$

Da sich hier immer noch ein Faktor finden lässt, so dass C*log(x) ab einem bestimmten Punkt schneller wächst.
Aber:

$$x^{\frac{1}{k}} \notin O(x^{\frac{1}{k+1}})$$

Wir können hiermit eine Inklusionskette bilden:

$$O\left(\frac{1}{x}\right) \subset O(1) \subset O(\log(x)) \subset O(x^{\frac{1}{k}}) \subset O(x) \subset O(x^k) \subset O(2^x) \subset O(x!) \subset O(x^x) \quad \forall k > 1$$

Achtung: Die Reihenfolge dreht sich um, wenn wir $x \to 0$ betrachten.

Linearität von Integralen

Eine Funktion f heißt linear wenn sie 2 Bedingungen erfüllt:
(i) f(a*x) = a*f(x)

(ii) f(x + y) = f(x) + f(y)

Diese Eigenschaften erfüllt auch das Integral. Dies kann man sich mit der anschaulichen Definition (Fläche unter dem Graphen) klarmachen.

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$