Kommentar zum Beweis der allgemeinen binomischen Formel

Induktionsbeweis beantwortet nur unzureichend die
Frage: Warum ergeben sich gerade die Binomialkoeffizienten beim Ausmultiplizieren eines Binoms?

Dies liegt daran, daß der Induktionsbeweis lediglich auf der Rekursionsgleichung der Binomialkoeffizienten als wesentlicher *struktureller Eigenschaft* beruht.

Angenommen, wir wüßten noch nicht, daß die Koeffizienten beim Ausmultiplizieren eines Binoms den Binomialkoeffizienten entsprechen, wie sie bereits definiert und berechnet wurden.

Rein Struktureller Beweis: Es sei

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} c(n,k)\ x^k\ y^{n-k}.$$

c steht für *coefficient*.

Zeige: Die Koeffizienten $c(n,k)$ erfüllen die gleiche *Rekursionsgleichung* wie die Teilmengen-Auswahlkoeffizienten (Binomialkoeffizienten) und sind zudem gleich *initialisiert*.

einerseits

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} c(n+1,k)\ x^k\ y^{n+1-k} \qquad (*)$$

andererseits

$$= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n} c(n,k)\ x^k\ y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} c(n,k)\ x^{k+1}\ y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} c(n,k)\ x^k\ y^{n-k+1}$$

$$= c(n,n)x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} c(n,k)\ x^{k+1}\ y^{n+1-(k+1)} + \sum_{k=1}^{n} c(n,k)\ x^k\ y^{n+1-k} + c(n,0)y^{n+1}$$

$$= c(n,n)x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} c(n,k-1)\ x^k\ y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} c(n,k)\ x^k\ y^{n+1-k} + c(n,0)y^{n+1}$$

$$= c(n+1,n+1)x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} [c(n,k-1)+c(n,k)]\ x^k\ y^{n+1-k} + c(n+1,0)y^{n+1} \qquad (**)$$

Koeffizientenvergleich zwischen $(*)$ und $(**)$ $\Rightarrow$ $c(n+1,k) = c(n,k-1)+c(n,k)$

Zu fordernde Initialisierung: $c(n+1,n+1) = c(n,n) = 1, \quad c(n+1,0) = c(n,0) = 1$

Unmittelbare Folgerungen

Horizontale Summe: $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

Alternative Begründungen:

- *Klassifikation* der Potenzmenge nach der *Kardinalität* der Teilmengen

$$\mathcal{P}(X) = \dot{\bigcup_{0\le k\le n}} \mathcal{P}_k(X) \equiv \dot{\bigcup_{0\le k\le n}} \{T \in \mathcal{P}(X): \quad |T| = k\}$$

$$2^n = \#\mathcal{P}(X) = \sum_{k=0}^{n} \#\mathcal{P}_k(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

- *Induktionsbeweis* unter Verwendung der Rekursionsformel (vergleichsweise umständlich und wenig erhellend)

Alternierende horizontale Summe:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot (-1)^k = (1-1)^n = 0$$

Anwendung: Beantwortung der Frage, warum man beim Teilflächenproblem zunächst auf die falsche Fährte gelockt wird.

Weitere kombinatorische Deutung der Binomialkoeffizienten

Frage: Auf wieviele Weisen lassen sich k (**un**unterscheidbare) schwarze und $n-k$ (**un**unterscheidbare) weiße Kugeln anordnen?

$a(n,k) \;=\;$ #Möglichkeiten, k schwarze und $n-k$ weiße Kugeln linear anzuordnen.

Beispiel: ● ● ○ ● ○ ● ○ oder ○ ● ○ ● ○ ● ●

Es wird zwischen rechts und links unterschieden, d .h. die lineare Anordnung ist orientiert.

Herleitung einer *Rekursionsgleichung* für die $a(n,k)$'s:

Klassifiziere (n,k)-Anordnungen nach der Farbe der letzten Kugel (rechtsaußen).

Wegnahme der rechtsaußen Kugel

bei schwarzer Färbung: $n \to n-1, \quad k \to k-1$

bei weißer Färbung: $n \to n-1, \quad k \to k$

Anzahl der schwarzen Kugeln reduziert sich in diesem Fall nicht.

$$\Rightarrow \qquad a(n,k) = \underbrace{a(n-1,k-1)}_{\substack{\text{\# (n,k)-Anordnungen mit} \\ \text{schwarzer Kugel rechtsaußen}}} + \underbrace{a(n-1,k)}_{\substack{\text{\# (n,k)-Anordnungen mit} \\ \text{weißer Kugel rechtsaußen}}}$$

Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$a(n,0) = 1$ (nur weiße Kugeln), $[a(n,1) = n$ (nur eine schwarze Kugel, restliche weiß)]

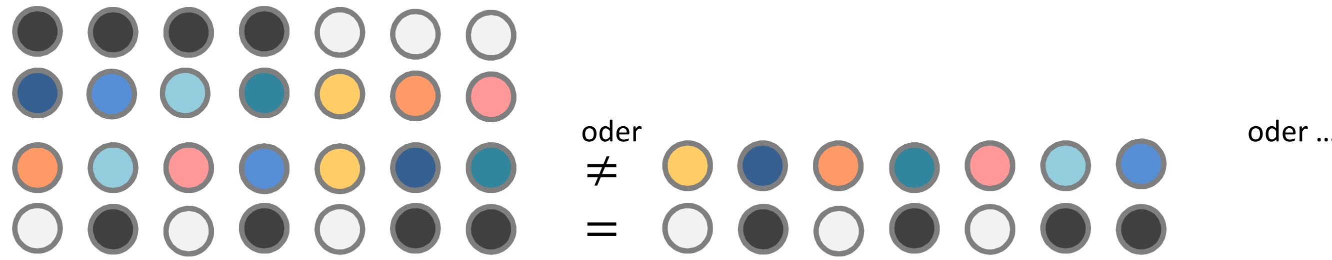
$a(n,n) = 1$ (nur schwarze Kugeln) außerdem: $k > n \;\Rightarrow\; a(n,k) = 0$

$\Rightarrow$ Koeffizienten $a(n,k)$ erfüllen dieselbe Rekursionsgleichung & dieselben Anfangs- bzw. Randbedingungen wie Binomialkoeffizienten $\Rightarrow$ $\forall\, n,k \in \mathbb{N}$: $a(n,k) = \binom{n}{k}$. ■

(n,k)-Anordnung = Anordnung von n Kugeln bestehend aus k schwarzen und $n-k$ weißen. Die Kugeln gleicher Farbe sind ununterscheidbar.

Alternative Erklärung für die zweite Deutung

Veranschaulichung der Vorgehensweise



Zunächst werden sämtliche Kugeln unterschiedlich gefärbt, so daß sie alle unterscheidbar sind. In diesem Zustand gibt es $n!$ Anordnungen. Danach erhalten die Kugeln wieder ihre ursprüngliche schwarze oder weiße Farbe zurück. **Frage:** Wieviele Anordnungen der bunt gefärbten Kugeln ergeben schließlich dieselbe Anordnung schwarzer und weißer Kugeln? Antwort: $k! \cdot (n-k)!$.
#Anordnungen der bunten Kugeln $=$ #Anordnung der schwarzen & weißen Kugeln $\times\ k! \times\ (n-k)!$.

Betrachte Menge $\mathrm{Bij}(\{1,\dots,n\})$ der bijektiven Abbildungen $f\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$
Klassifiziere diese nach der Bildmenge $B_k \subset \{1,\dots,n\}$ von $\{1,\dots,k\}$:

$$\mathrm{Bij}(\{1,\dots,n\}) = \dot{\bigcup_{\substack{B_k \subset \{1,\dots,n\} \\ |B_k| = k}}} \left\{ f \in \mathrm{Bij}(\{1,\dots,n\}) \mid \ f(\{1,\dots,k\}) = B_k \right\}$$

$$\left\{ f \in \mathrm{Bij}(\{1,\dots,n\}) \mid \ f(\{1,\dots,k\}) = B_k \right\} \overset{\text{bij.}}{\leftrightarrow} \mathrm{Bij}(\{1,\dots,k\}, B_k) \times \mathrm{Bij}\Big(\{k+1,\dots,n\}, \{1,\dots,n\} \setminus B_k\Big)$$

Eindeutige Entsprechung zwischen den bijektiven Abbildungen „B_k“ und den Funktionspärchen der Produktmenge auf der rechten Seite.

$$\Rightarrow \ \#\left\{ f \in \mathrm{Bij}(\{1,\dots,n\}) \mid \ f(\{1,\dots,k\}) = B_k \right\} = k! \cdot (n-k)!$$

nach Produktregel bzw. Multiplikationsregel

Alternative Erklärung für die zweite Deutung (Fortsetzung der Rechnung)

Zweifaches Abzählen

$$n! = \#\mathrm{Bij}(\{1,\dots,n\}) = \sum_{\substack{B_k\subset\{1,\dots,n\}\\ |B_k|=k}} \#\left\{ f\in \mathrm{Bij}(\{1,\dots,n\}) \mid \quad f(\{1,\dots,k\}) = B_k \right\}$$

$$= \sum_{\substack{B_k\subset\{1,\dots,n\}\\ |B_k|=k}} k!\cdot(n-k)!$$

Es gilt: $\left\{ f\in \mathrm{Bij}(\{1,\dots,n\}) \mid \quad f(\{1,\dots,k\}) = B_k \right\}$

$= \quad \mathrm{Bij}\left(\{1,\dots,k\}, B_k\right)$

$\quad \times\ \mathrm{Bij}\left(\{1,\dots,n\}\setminus\{1,\dots,k\},\ \ \{1,\dots,n\}\setminus B_k\right)$

$$= k!\cdot(n-k)! \sum_{\substack{B_k\subset\{1,\dots,n\}\\ |B_k|=k}} 1$$

Definition des Binomialkoeffizienten

$$= k!\cdot(n-k)!\cdot\binom{n}{k}$$

Also: $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Anmerkung: Die Frage, warum sich beim Binomischen Lehrsatz gerade die kombinatorisch definierten Binomialkoeffizienten ergeben, läßt sich mittels ihrer zweiten kombinatorischen Bedeutung leicht beantworten. Beim Ausmultiplizieren der n'ten Potenz des Binoms $x+y$ ergeben sich als aufzusummierende Produkte alle 2^n möglichen aus dem „Alphabet“ x und y bildbaren n-Wörter. Diejenigen Wörter, in denen x gleich oft auftaucht (und dementsprechend auch y gleich oft vertreten ist) lassen sich zu einem Term zusammenfassen. Der Koeffizient vor dem Term $x^k y^{n-k}$, welcher k-mal den Faktor x und $n-k$-mal den Faktor y enthält, entspricht der Anzahl der Möglichkeiten k schwarze Kugeln (stellvertretend für x) und $n-k$ weiße Kugeln (stellvertretend für y)anzuordnen. Dies sind gerade $a(n,k) = \binom{n}{k}$ viele .