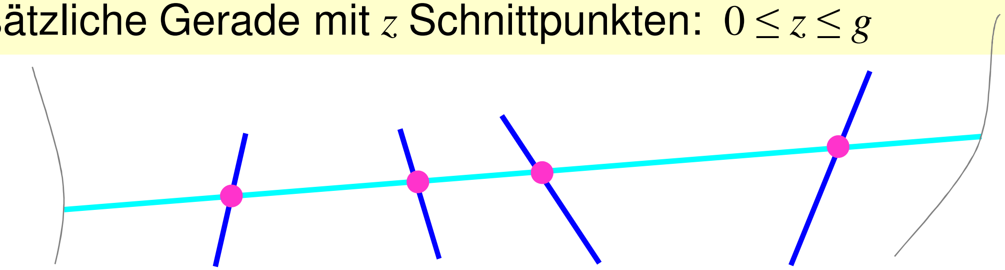
Beweis der Gesetzmäßigkeit

Angenommen Formel richtig, falls #Geraden = $g \leq n$, d.h. es gelte

$$g + s + 1 = f\,.$$

Betrachte zusätzliche Gerade mit z Schnittpunkten: $0 \leq z \leq g$



• Mindestens ein vorhandenes Flächenstück wird in zwei neue Flächenstücke zerlegt.

• Für jeden der z neuen Schnittpunkte wird ein weiteres Flächenstück in zwei neue Flächenstücke zerlegt.

•Insgesamt erhöht sich Anzahl der Flächenstücke um $1+z$.

$$(g + s + 1) + (1+z) = f + (1+z)$$

(#neuer Geraden=1) + (#neuer Schnittpunkte= z) = (#hinzugekommener Flächenstücke=$1+z$)

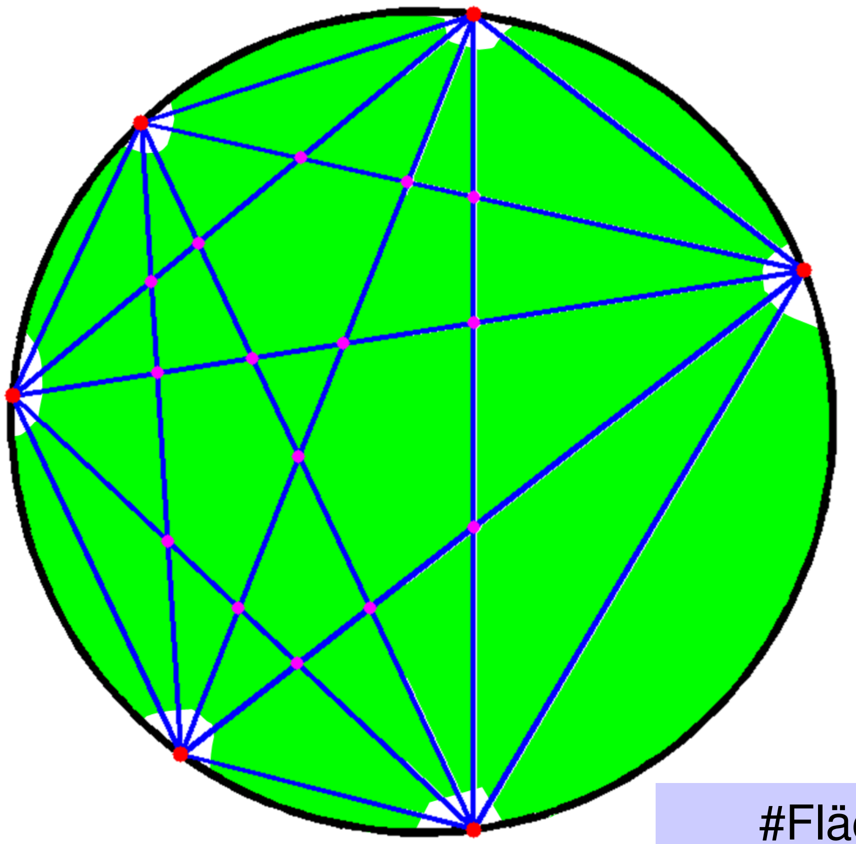
$$(g+1) + (s+z) + 1 = f + (1+z)$$

Umsortieren der Summanden auf der linken Seite erlaubt Interpretation im gewünschten Sinne.

Somit gilt auch für $g = n+1$:

#Geraden + #Schnittpunkte + 1 = #Flächen

Anwendung des Resultats



Bechte, daß jeder Geradenabschnitt den Rand des modifizierten Gebiets (wie die Kreislinie) genau in zwei Punkten schneidet.

Beobachtung:

- **#Flächen**stücke bleibt gleich, wenn Eckpunkte *ausgeschnitten* werden.
- ***Schnittpunkte*** sind allesamt **einfach** von jeweils zwei Geraden (Diagonalen).
- Somit sind Voraussetzungen des allgemeinen Resultats erfüllt. Es gilt also:

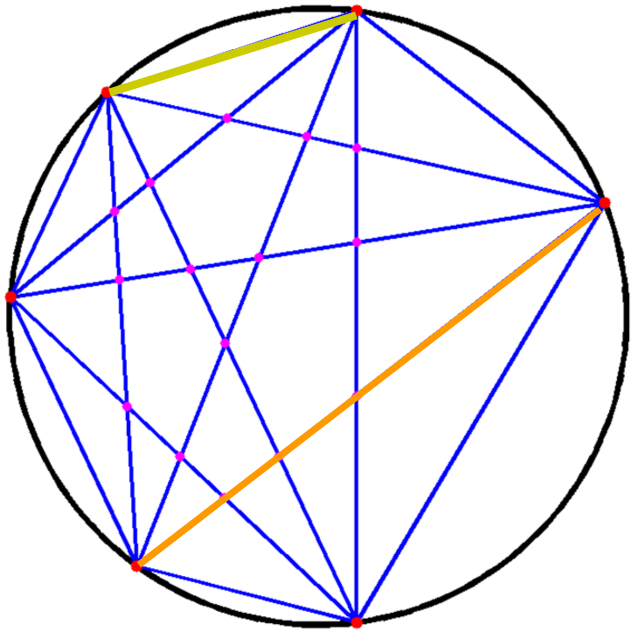
#Flächen = #Geraden + #Schnittpunkte + 1

#Geraden = **?**

#Schnittpunkte = **?**

als Funktion bzw. in Abhängigkeit von n.

Anzahl der Geraden (Seiten & Diagonalen)

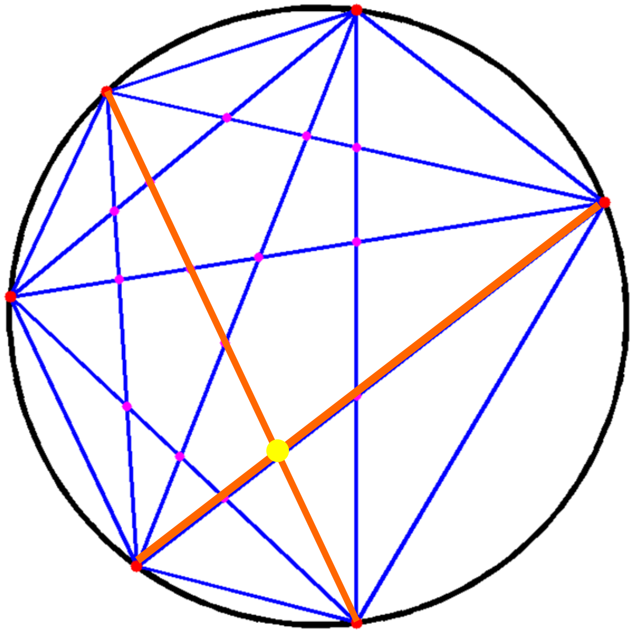


Gerade $=$ Verbindungslinie zwischen zweien der n Eckpunkte

#Geraden $=$ #Möglichkeiten aus n Objekten 2 auszuwählen

$$\#\text{Geraden} = \binom{n}{2}$$

Anzahl der Knoten (Schnittpunkte der Diagonalen)



- Jeweils 4 beliebige Eckpunkte $\rightarrow$ ein (konvexes) Viereck im Innern des Kreises.
- Jedes Viereck besitzt genau einen Schnittpunkt seiner beiden Diagonalen.
- Jedem Schnittpunkt können eindeutig genau vier Eckpunkte zugeordnet werden
- 1-1 Beziehung zwischen Vierecken und Schnittpunkten

#Knoten = #möglicher Vierecke, die aus den n Eckpunkten bildbar sind

= #Möglichkeiten aus n Objekten (Eckpunkten) 4 auszuwählen

$$\#\text{Schnittpunkte} = \binom{n}{4}$$

Zusammenfügen der Teilergebnisse

#Flächen_{stücke} = #Schnittpunkte + #Geraden + 1

$$\#\text{Flächen} = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$$

- Anschauliche Bedeutung bzw. **Definition** der

  „Teilmengenauswahlkoeffizienten“ (*Binomialkoeffizienten*):

$\binom{n}{k}$ = Anzahl der Möglichkeiten aus einer Menge mit n verschiedenen Objekten k Objekte auszuwählen.

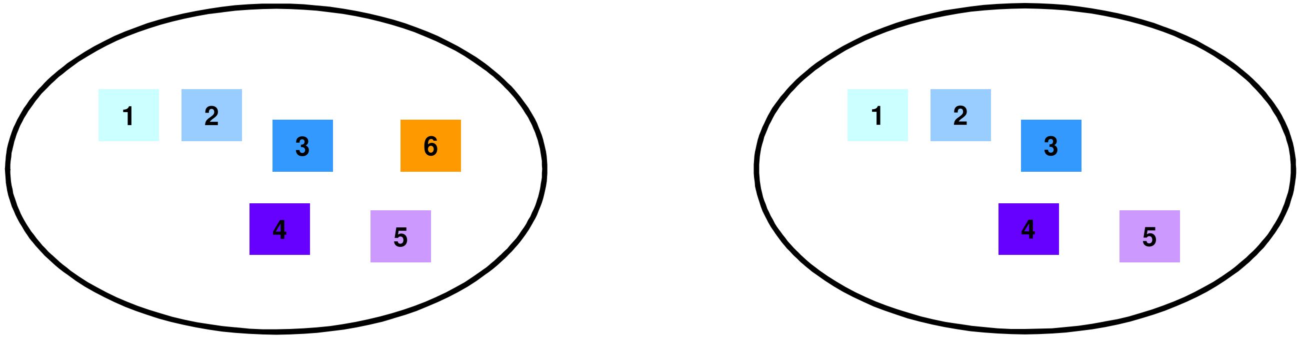
- Konkrete **Berechnung** der *Binomialkoeffizienten* **?**

Bemerkung: Die übliche Bezeichnungsweise „Binomialkoeffizient“ erscheint an dieser Stelle völlig unmotiviert. Da sie aber die übliche ist, greifen wir auf sie zurück.

Rekursionsbeziehung der Binomialkoeffizienten (am Beispiel)

$\binom{6}{3} = ?$

$\mathcal{M}_6$ $\mathcal{M}_5$



Anzahl der $\mathbf{3}$ -elementigen Teilmengen von $\mathcal{M}_6$ **ohne** das neue Element
= Anzahl der $\mathbf{3}$ -elementigen Teilmengen von $\mathcal{M}_5$

Anzahl der $\mathbf{3}$ -elementigen Teilmengen von $\mathcal{M}_6$ **mit** dem neuen Element
= Anzahl der $\mathbf{2}$ -elementigen Teilmengen von $\mathcal{M}_5$

$$\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$$

Allgemein:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Berechnung der Binomialkoeffizienten (mittels *Pascalschem* Dreieck)

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \;\longrightarrow\; \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

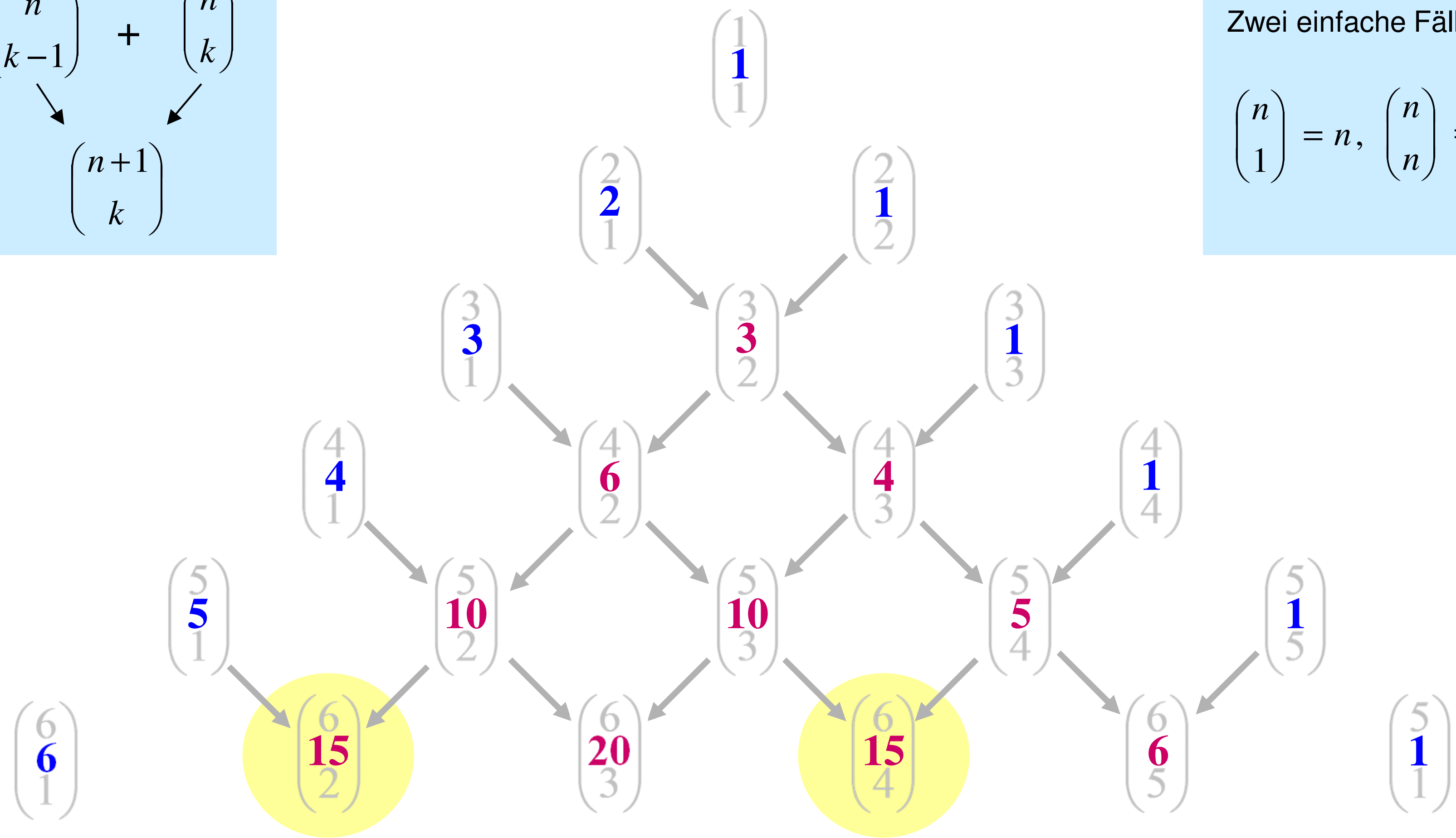
$$\binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

Zwei einfache Fälle:

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1$$

Berechnung der Binomialkoeffizienten (mittels *Pascalschem* Dreieck)

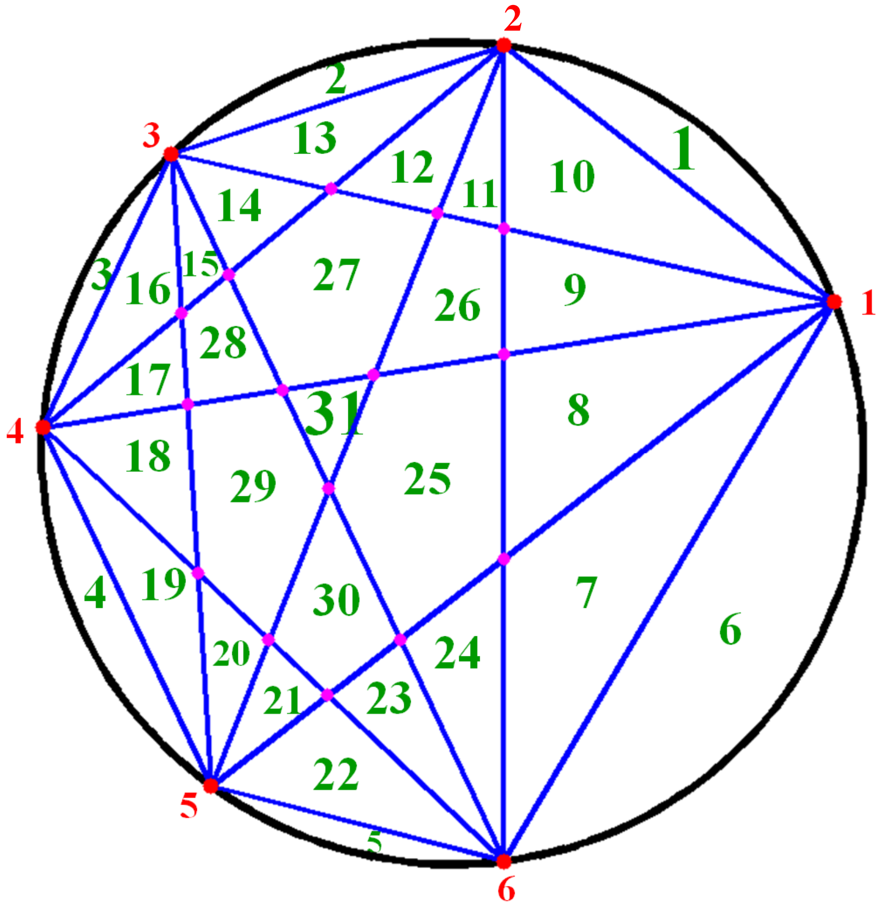
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \;\longrightarrow\; \binom{n+1}{k}$$



Zwei einfache Fälle:

$$\binom{n}{1} = n\,, \quad \binom{n}{n} = 1$$

Test der neuen Vorhersage $n = 6$



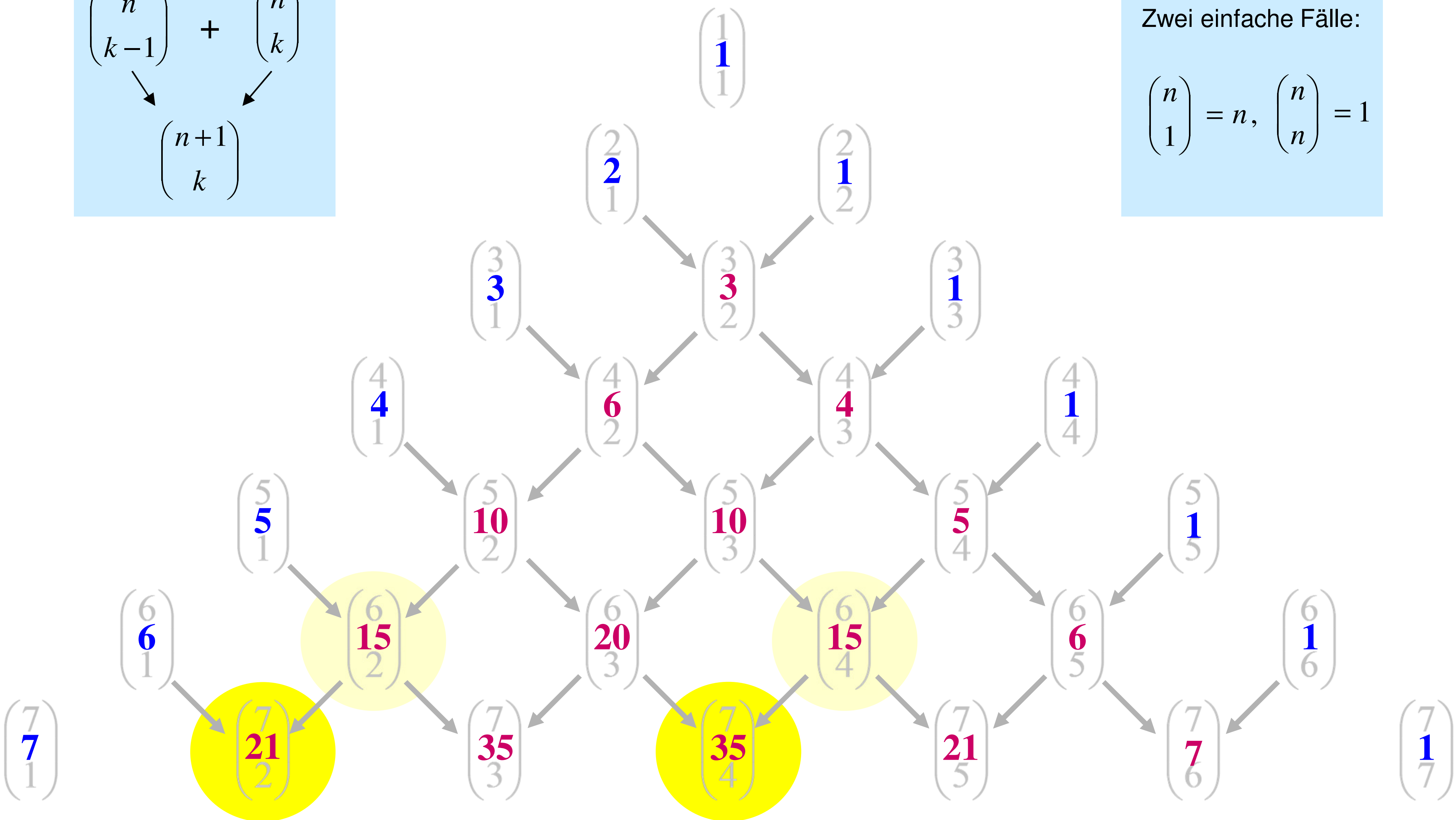
$$\#\text{Flächenstücke} = \binom{6}{4} + \binom{6}{2} + 1 = 15 + 15 + 1 = 31$$ ✔

Berechnung der Binomialkoeffizienten (mittels *Pascalschem* Dreieck)

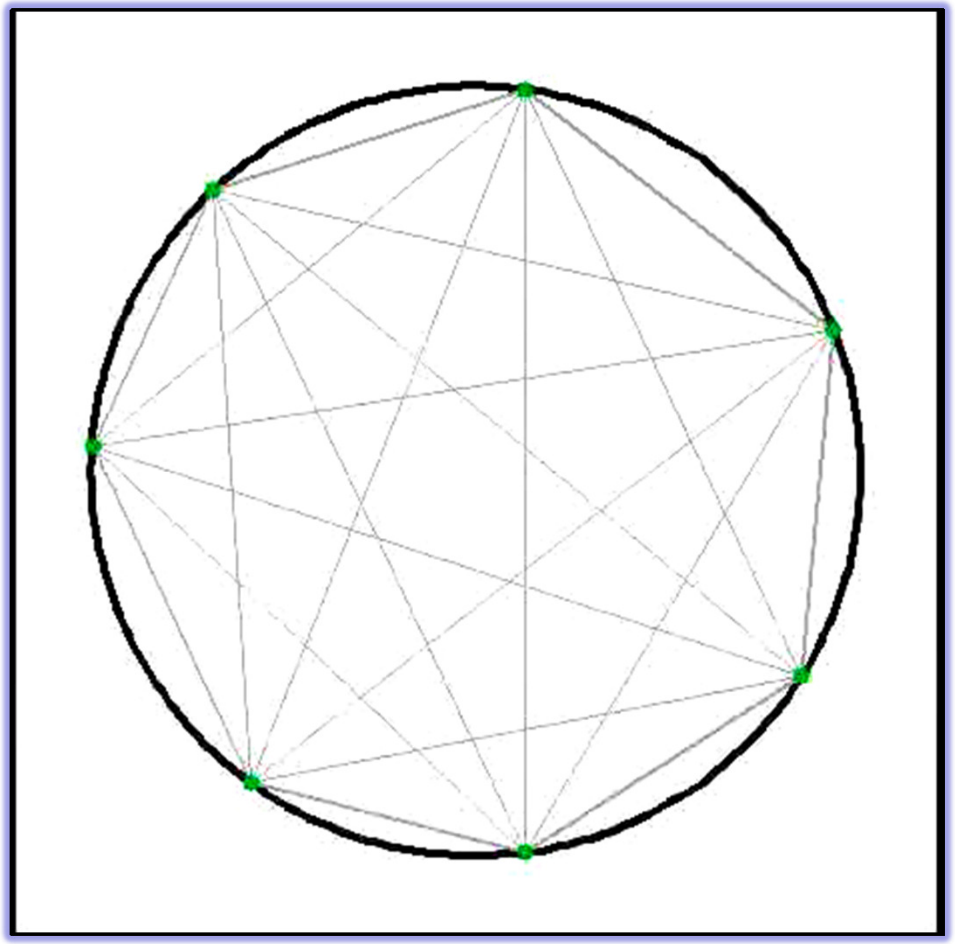
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \;\longrightarrow\; \binom{n+1}{k}$$

Zwei einfache Fälle:

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1$$



Test der neuen Vorhersage $n = 7$



innerer Flächenstücke $= 22$

äußere Flächenstücke pro Eckpunkt $= 5$

Flächenstücke = $22 + 7 \cdot 5 = 57$

$$\#\text{Flächenstücke} = \binom{7}{4} + \binom{7}{2} + 1 = 35 + 21 + 1 = 57$$ ✔

Zusammenfassendes Theorem

Satz: Bei dem Teilflächenproblem mit n vorgegebenen Eckpunkten ergeben sich maximal

$$\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + \binom{n}{0}$$

Flächenstücke. Die maximale Anzahl wird genau dann erreicht, wenn sich jeweils nur zwei Verbindungslinien der Eckpunkte in einem Punkt schneiden.

Frage: Welcher Umstand hat uns anfangs auf die falsche Fährte gelockt? Anders formuliert, unter welchen Umständen gilt

$$2^{n-1} = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + \binom{n}{0} \quad ?$$

Die Antwort ist möglichst allgemein zu begründen.

$\binom{n}{0} := 1$ Man hat nur eine Möglichkeit, aus einer Menge mit n Elementen 0 Elemente, also keins, zu entnehmen. Bzw. die einzige Teilmenge, welche keine Elemente enthält, ist die leere Menge.

Die Moral der Geschichte ...

Was lehrt dieses Beispiel generell (über die Mathematik hinaus)?

Es kann durchaus lohnend sein, genauer (kritischer) hinzugucken.

Das Beispiel sollte dazu anhalten, weniger oberflächlich an Fragestellungen heranzugehen und gewissen Aussagen nicht ohne eine kritische Auseinandersetzung zu vertrauen. Aufgrund der „Experimente“ erscheint es zunächst äußerst plausibel, ein *exponentielles* Anwachsen der Teilflächenanzahl zu vermuten. Darauf gestützte Prognosen hinsichtlich des weiteren Anwachsens (durch eine Extrapolation der vorhandenen „Daten“ bzw. „Statistik“) erweisen sich jedoch als falsch, da die Zunahme an Teilflächen tatsächlich nur polynomial schnell (wie n^4) erfolgt. Jedoch führt erst eine sehr viel gründlichere Analyse zu diesem Resultat.

Ähnliche Beispiele finden sich auch anderswo in der Mathematik, siehe zum Beispiel die *Fermatschen-Zahlen* (welche zunächst den Anschein erwecken, als handele es sich sämtlich um Primzahlen).

In diesem Zusammenhang sei auch daran erinnert, daß sich in der Mathematik etliche Beispiele finden lassen, die eindrucksvoll belegen, wie „leicht“ sich die Intuition der (meisten) Menschen täuschen läßt (z.B. im Umgang mit dem Unendlichen).