Mathematik für Informatiker 2

Abschätzen
Grundlagen der Asymptotik

Martin Rheinländer

Abschätzungen wozu?

Allgemeine Abschätzung für Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k^k} \equiv \frac{n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \equiv \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{i+1} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i}$$

gegeläufig: absteigend im Zähler, aufsteigend im Nenner

gleichläufig: absteigend im Zähler, absteigend im Nenner

Idee zur Gewinnung einer Abschätzung: Ersetze eine der beiden Faktoriellen durch entsprechende Potenz. A priori ist nicht klar, ob überhaupt und falls doch in welcher Richtung sich eine Abschätzung ergibt, wenn gleichzeitig beide Faktoriellen durch die jeweilige Potenz ersetzt werden, weil der Zähler und damit der Bruch dadurch vergrößert wird, während der Nenner durch Vergrößerung einen verkleinerten Bruch ergibt . Daher ist es keineswegs unmittelbar ersichtlich, ob der Bruch dadurch als ganzes vergrößert oder verkleinert wird.

Naheliegende Abschätzungen: $\frac{n^k}{k^k} \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$

Erwünscht: Abschätzung nur durch Potenzen, denn diese lassen sich wesentlich effizienter berechnen als Faktorielle (Algorithmus „Schnelles Potenzieren“)

Triviale Abschätzung nach oben: $0 \leq k \leq n$: $\binom{n}{k} \leq n^k$

Beobachtung: $1 \leq i < k \leq n \Rightarrow \frac{n}{k} \leq \frac{n-i}{k-i}$

Denn:

$$\frac{n}{k} \leq \frac{n-i}{k-i} \iff n(k-i) \leq (n-i)k \iff -ni \leq -ik \iff k \leq n$$

Abschätzung nach unten: $1 < k \leq n$: $\binom{n}{k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i} \geq \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n}{k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k$

Gesucht: Ähnliche Abschätzung nach oben. Genauer:

$\exists\, c > 0$ derart, daß für alle $1 < k \leq n$: $\binom{n}{k} \leq \left(c \cdot \frac{n}{k}\right)^k = c^k \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^k$?

Zur Motivation des Abschätzens (siehe auch später): Es geht z.B. darum, eine Vorstellung davon zu erhalten, wie schnell die Binomialkoeffizienten anwachsen z.B. bei festem k aber größer werdendem n. Dazu sind sie mit anderen Funktionen/Ausdrücken zu vergleichen, die uns vertrauter sind.

Allgemeine Abschätzung für Binomialkoeffizienten

Ausgangspunkt: *Binomische Formel*

Für $x > 0$ gilt: $$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \geq \binom{n}{k} x^k$$

Also: $$\frac{(1+x)^n}{x^k} \geq \binom{n}{k}$$

Setze $x = \frac{k}{n}$: $$\underbrace{\left(1+\frac{k}{n}\right)^n}\cdot\left(\frac{n}{k}\right)^k \geq \binom{n}{k}$$

Ideale Vorgehensweise: Wähle x so, daß linke Seite minimal wird.

Extremwertrechnung liefert: $x = \frac{k}{n-k}$. Einfacher ist zunächst die Wahl $x = \frac{k}{n}$.

Benutze: Monotonie der e-Funktion &

allgemeine Abschätzung für den natürlichen Logarithmus : $\forall x > 0: \quad \log x \leq x - 1$

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\cdot\log\left(1+\frac{k}{n}\right)} \leq \mathrm{e}^{n\cdot\left(1+\frac{k}{n}-1\right)} = \mathrm{e}^{n\cdot\frac{k}{n}} = \mathrm{e}^k$$

Daher gilt $\forall n \geq k$: $$\boldsymbol{\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \mathrm{e}^k\cdot\left(\frac{n}{k}\right)^k}$$

Verschärfung: Es gilt sogar $$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i} \leq \mathrm{e}^k\cdot\left(\frac{n}{k}\right)^k$$

Begründung:

Zusätzliche Annahme $0 < x \leq 1$: $$(1+x)^n \geq \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}x^i \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(1+x)^n}{x^k} \geq \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\frac{1}{x^{k-i}}$$

Wegen $0 < x \leq 1$ folgt $\frac{1}{x^{k-i}} \geq 1$. $$\frac{(1+x)^n}{x^k} \geq \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}$$

Rest analog zu oben.

Bewertung der Abschätzung

$$\left(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}\right)^{\boldsymbol{k}} \leq \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} \leq \mathrm{e}^{\boldsymbol{k}} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}\right)^{\boldsymbol{k}}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} < \frac{n^2}{2}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} < \frac{n^3}{6}$$

Zentraler Binomialkoeffizient: $n = 2m,\ k = m$

Abschätzung $\Rightarrow$ $\binom{2m}{m} \leq \frac{\mathrm{e}^m}{m^m} \cdot (2m)^m = 2^m \cdot \mathrm{e}^m$

Andererseits gilt: $2^m \cdot \mathrm{e}^m > 2^m \cdot 2^m = 2^{2m} = \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} > \binom{2m}{m}$

Damit erweist sich die Abschätzung als „grottenschlecht“

Abschätzung des mittleren Binomialkoeffizienten

Satz: Für alle $m \geq 1$ gilt: $$\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \leq \binom{2m}{m} \leq \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}$$

Beweis:

1. Etappe: Umformung in günstige Darstellung

$$\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{m! \cdot m!} = \frac{(2m)!! \cdot (2m-1)!!}{(m!)^2} = \frac{2^m \cdot m! \cdot (2m-1)!!}{(m!)^2}$$

$$= \frac{2^m \cdot (2m-1)!!}{m!} = \frac{2^m \cdot 2^m \cdot (2m-1)!!}{2^m \cdot m!}$$

$$= \frac{2^{2m} \cdot (2m-1)!!}{(2m)!!}$$

$$= 2^{2m} \cdot \frac{(2m-1)}{2m} \cdot \frac{(2m-3)}{(2m-2)} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

Direkte Abschätzung der einzelnen Quotienten durch 1 liefert bereits bekannte Abschätzung.

Doppelfakultät: $(2m)!! =$ Produkt der ersten m geraden Zahlen von 2 bis $2m$. Analog ist $(2m+1)!!$ definiert.

Abschätzung des mittleren Binomialkoeffizienten (nach) von oben ↓

2. Etappe: Abschätzung nach oben

$$(2m+1)\cdot\binom{2m}{m}^2 =$$

$$= \quad (2m+1)\cdot 2^{2m}\cdot 2^{2m}\cdot\frac{(2m-1)(2m-1)}{2m\cdot 2m}\cdot\frac{(2m-3)(2m-3)}{(2m-2)(2m-2)}\cdot\ldots\cdot\frac{3\cdot 3}{4\cdot 4}\cdot\frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}$$

$$= \quad 2^{4m}\cdot\underbrace{\frac{(2m+1)(2m-1)}{2m\cdot 2m}}_{<1}\cdot\underbrace{\frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m-2)(2m-2)}}_{<1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{5\cdot 3}{4\cdot 4}}_{<1}\cdot\underbrace{\frac{3\cdot 1}{2\cdot 2}}_{<1}\cdot 1$$

$$(2m+1)\cdot\binom{2m}{m}^2 \le 2^{4m} \quad\Leftrightarrow\quad \binom{2m}{m} \le \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m+1}} \le \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}$$

Abschätzung der Quotienten folgt aus: $(x+1)(x-1) = x^2-1 < x^2$

Eigentlich handelt es sich um eine Abschätzung des *Wallisschen Produkts*.