Anwendung: Abschätzung der *Harmonischen* mittels Integral (nach unten)

Def.: k'te harmonische Zahl H_k = Summe der ersten k Stammbrüche

$$H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}$$

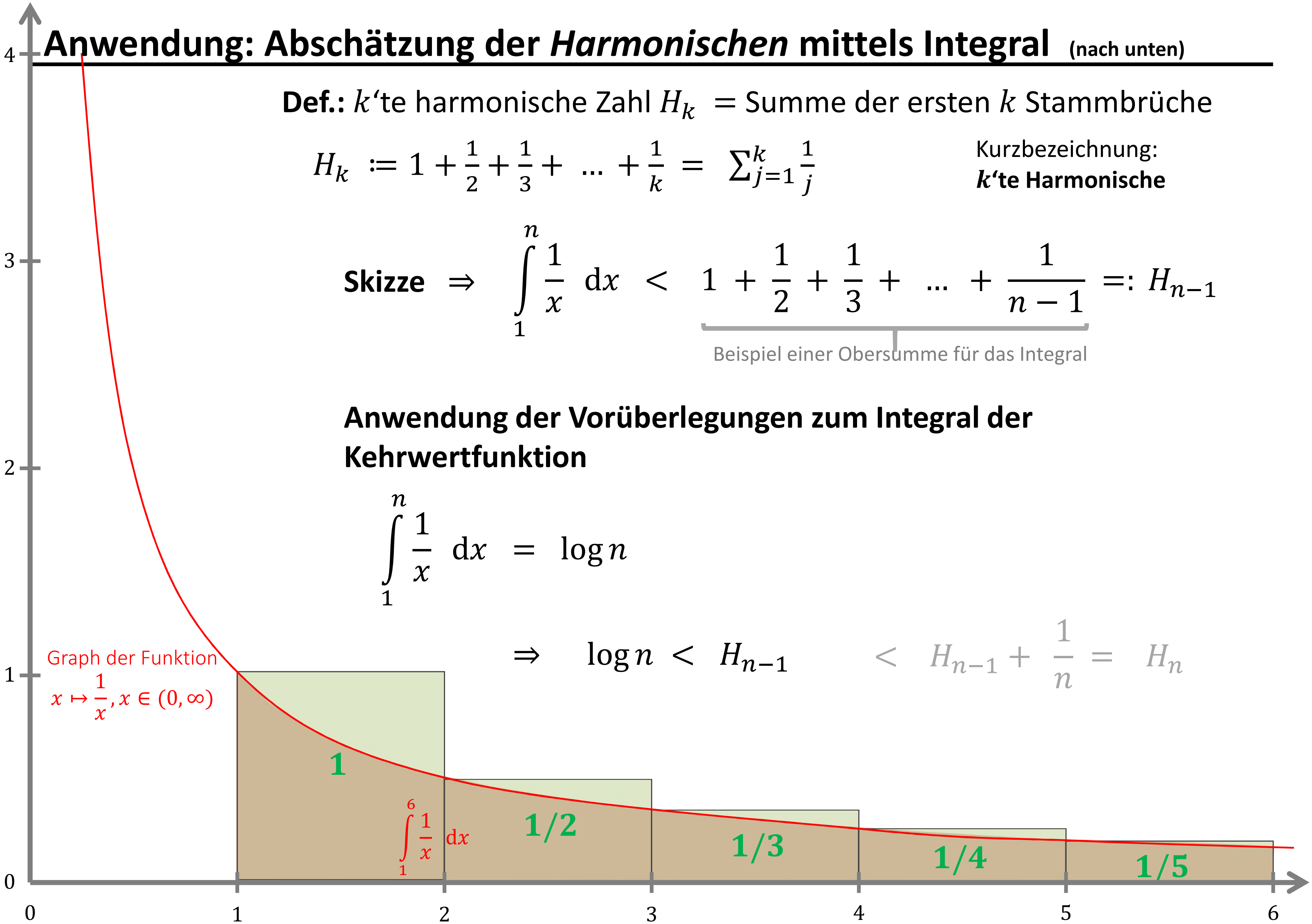
Kurzbezeichnung: **k'te Harmonische**

Skizze $\Rightarrow$ $$\int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x < \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}}_{\text{Beispiel einer Obersumme für das Integral}} =: H_{n-1}$$

Anwendung der Vorüberlegungen zum Integral der Kehrwertfunktion

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log n$$

$$\Rightarrow \quad \log n < H_{n-1} \quad < H_{n-1} + \frac{1}{n} = H_n$$



Anwendung: Abschätzung der *Harmonischen* mittels Integral (nach oben)

Skizze $\Rightarrow \quad \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;>\; \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \dots\ +\frac{1}{n}}_{\text{Beispiel einer Untersumme}} \;=\; H_n - 1$

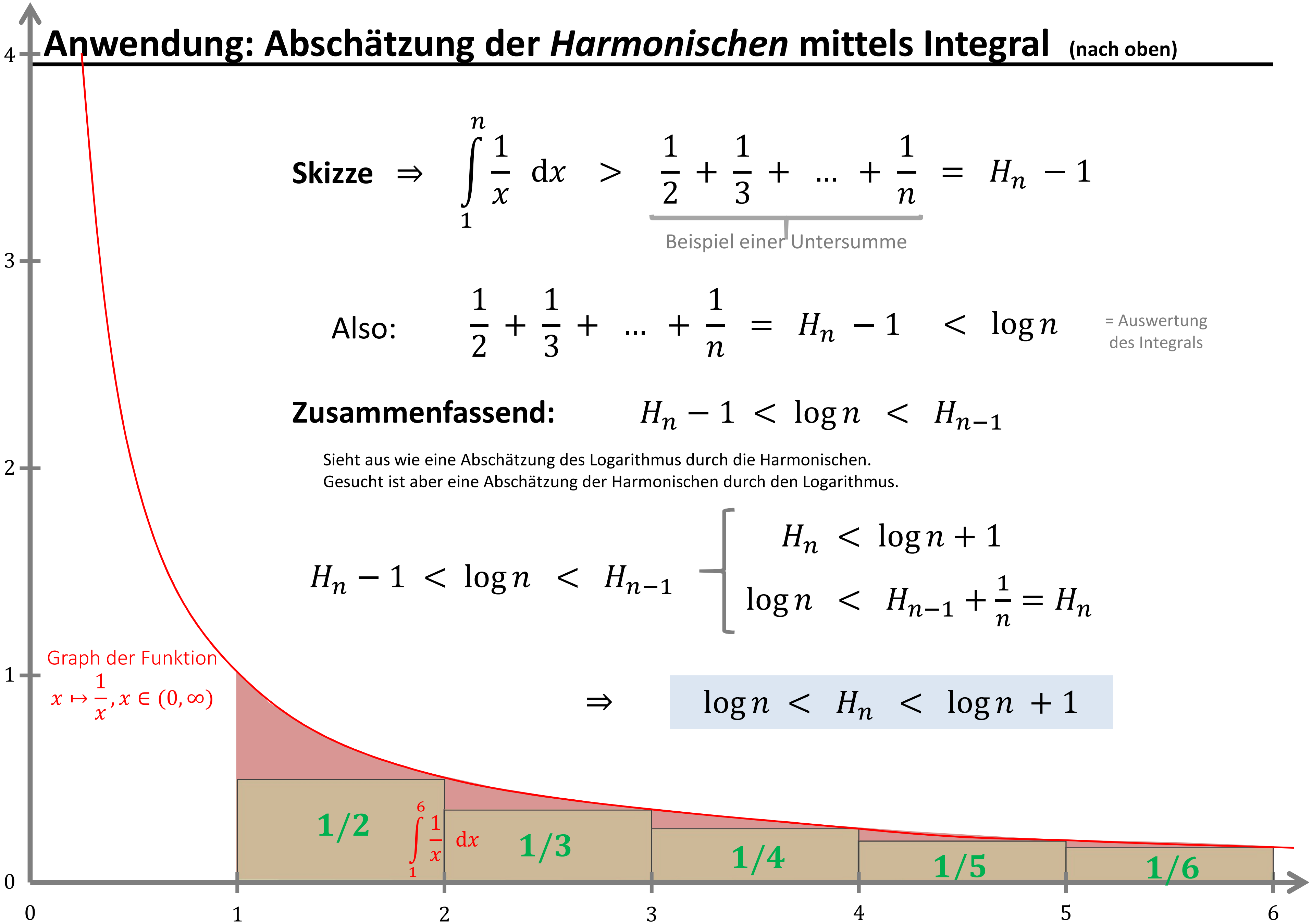
Also: $\displaystyle\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \dots\ +\frac{1}{n} \;=\; H_n - 1 \;<\; \log n$ = Auswertung des Integrals

Zusammenfassend: $\quad H_n - 1 \;<\; \log n \;<\; H_{n-1}$

Sieht aus wie eine Abschätzung des Logarithmus durch die Harmonischen.
Gesucht ist aber eine Abschätzung der Harmonischen durch den Logarithmus.

$$H_n - 1 \;<\; \log n \;<\; H_{n-1} \quad \left\{ \begin{array}{l} H_n \;<\; \log n + 1 \\ \log n \;<\; H_{n-1} + \frac{1}{n} = H_n \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\log n \;<\; H_n \;<\; \log n + 1}$$



Noch eine Wette

Was ist die durchschnittliche Anzahl von Teilern der ersten N natürlichen Zahlen?

$N = 10$:

$$T(10) = \frac{\tau(1)+\tau(2)+\tau(3)+\tau(4)+\tau(5)+\tau(6)+\tau(7)+\tau(8)+\tau(9)+\tau(10)}{10}$$

$$= \frac{1+2+2+3+2+4+2+4+3+4}{10} = \frac{27}{10} = 2{,}7$$

Wetten es gibt eine Taste auf Ihrem Schultaschenrechner, mit der sich diese Frage per Tastendruck in guter Näherung beantworten läßt, und zwar um so besser, je größer N gewählt ist? Welche Taste könnte das sein?

Man beachte, daß die Auswertung von $\tau(n)$ ein recht mühsames Unterfangen ist, da dazu zunächst die *Primzahlzerlegung* von n ermittelt werden muß.

Wer traut sich eine Schätzung abzugeben? $T(1.000.000) = T(10^6) = ?$

Anwendung: Berechnung der *mittleren Teiler-Anzahl*

$\tau(n) := \#\{\, 1 \leq j \leq n \;:\; j|n \,\}$

Teileranzahl-Funktion

$T(N) := \dfrac{1}{N} \sum\limits_{1 \leq k \leq N} \tau(k)$?

Problem: Berechnung von $\tau(n)$ erfordert Primzahlzerlegung von n

$X := \{1, \dots, N\}, \qquad Y := \{1, \dots, N\} \qquad\qquad (x,y) \in R \;\Leftrightarrow\; x|\,y$

$y = n \;\rightarrow$

$\downarrow\; x = k$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
2		•		•		•		•		•		•		•	
3			•			•			•			•			•
4				•				•				•			
5					•					•					•
6						•						•			
7							•							•	
8								•							
9									•						
10										•					
11											•				
12												•			
13													•		
14														•	
15															•

$$\sum_{1 \leq n \leq N} \tau(n) = \sum_{1 \leq n \leq N} \#\{\, 1 \leq k \leq n :\; k|\,n \,\}$$

$$= \sum_{1 \leq k \leq N} \#\{\, 1 \leq n \leq N :\; k|\,n \,\}$$

$$= \sum_{1 \leq k \leq N} \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$$

$$T(N) = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq k \leq N} \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$$

Vereinfachung durch Abschätzung

$$\frac{1}{N}\sum_{1\le k\le N}\left(\frac{N}{k}-1\right) \le \overbrace{\frac{1}{N}\sum_{1\le k\le N}\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor}^{T(N)} \le \frac{1}{N}\sum_{1\le k\le N}\frac{N}{k}$$

$$\sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k}-1 \le \frac{1}{N}\sum_{1\le k\le N}\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor \le \sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k} =: H_N$$

Zwischenbetrachtung:

$n \ge 2$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

$$H_n - 1 < \log n < H_{n-1}$$

$$\log n < H_n < \log n + 1$$

$H_{n-1} + \frac{1}{n}$

Addiere zur 2. oberen Ungleichung auf der rechten Seite $\frac{1}{n}$
→ 1. untere Ungleichung

Addiere zur 1. oberen Ungleichung 1
→ 2. untere Ungleichung

Anwendung:

$$H_N - 1 < T(N) < H_N$$

$$\log N - 1 < T(N) < \log N + 1$$

$$\lim_{N\to\infty} T(N)/\log N = 1 \quad \Leftrightarrow \quad T(N) \simeq \log N$$

Beispiel: $T(1.000.000) = T(10^6) = ?$
$T(10^6) = \log(10^6) = 6\cdot\log 10 \approx 6\cdot 2{,}5 = 3\cdot 5 = 15$

$\log(10) = 2{,}3026\ldots.$
$\log(10^6) = 13{,}8155\ldots.$

- Diskussion des *Geburtstagsparadoxons*.
- Berechnung der durchschnittlichen Teiler-Anzahl unter den ersten n natürlichen Zahlen. $\rightarrow$ nochmalige Anwendung des doppelten Abzählens.

Was lehren die beiden Beispiele?