Mathematik für Informatiker 2

Potenzsummen

$$S_p(n) := \sum_{k=1}^{n} k^p \; = \; ?$$

Martin Rheinländer

Rekursionsformel zur Berechnung von Potenzsummen

$$(x+1)^{p+1} - x^{p+1} = \sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} x^i - x^{p+1}$$

Anwendung des **binomischen Lehrsatzes**

$$= \binom{p+1}{p+1} x^{p+1} + \binom{p+1}{p} x^p + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p+1}{i} x^i - x^{p+1}$$

$$= x^{p+1} + (p+1)x^p + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p+1}{i} x^i - x^{p+1} = (p+1)x^p + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p+1}{i} x^i$$

Also folgt für $x = k \in \mathbb{N}$:

$$\Leftrightarrow \quad (k+1)^{p+1} - k^{p+1} = (p+1)k^p + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p+1}{i} k^i$$

Summation über k von 1 bis n

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^{p+1} - k^{p+1}\right] = (p+1) \sum_{k=1}^{n} k^p + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p+1}{i} k^i$$

Vertauschen der Summations-reihenfolge

Teleskopsumme

$$\Leftrightarrow \quad (n+1)^{p+1} - 1 = (p+1) \cdot S_p(n) + \sum_{i=0}^{p-1} \left(\binom{p+1}{i} \sum_{k=1}^{n} k^i \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad = (p+1) \cdot S_p(n) + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p+1}{i} S_i(n)$$

$p \in \mathbb{N}_0$

Rekursionsformel zur Berechnung von Potenzsummen (Forts.)

$$\Leftrightarrow \quad (p+1)\cdot S_p(n) + \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p+1}{i} S_i(n) = (n+1)^{p+1} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (p+1)\cdot S_p(n) = (n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{i=0}^{p-1}\binom{p+1}{i} S_i(n)$$

Einsetzen für $p = 0$ liefert:
$S_0(n) = n$

$$\Leftrightarrow \quad S_p(n) = \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+1}\left(\binom{p+1}{0}\underbrace{S_0(n)}_{=n} + \sum_{i=1}^{p-1}\binom{p+1}{i} S_i(n)\right)$$

$$= \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} - \frac{n+1}{p+1} - \frac{1}{p+1}\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p+1}{i} S_i(n)$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$S_p(n) = \frac{(n+1)^{p+1} - (n+1)}{p+1} - \frac{1}{p+1}\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p+1}{i} S_i(n)$$

Per vollständiger Induktion liefert die Rekursionsformel folgende Aussage:

Fazit: Die Summe $S_p(n)$ der p'ten Potenzen von 1 bis n kann durch ein Polynom in n vom Grad $p+1$ berechnet werden. Der führende Term des Polynoms (für $n \to \infty$) ist gegeben durch $\frac{1}{p+1}n^{p+1}$. Woran erinnert das?

Eine zahlentheoretische Folgerung aus der Rekursionsformel

Erinnerung: $$S_p(n) = \frac{(n+1)^{p+1}-(n+1)}{p+1} - \frac{1}{p+1}\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p+1}{i} S_i(n)$$

$p \to p-1$

$n \to n-1$

$$S_{p-1}(n-1) = \frac{n^p - n}{p} - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p-2}\binom{p}{i} S_i(n-1) \in \mathbb{N}$$

Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Dann folgt: $\forall i \in \{1,\dots,p-1\}$: $p \mid \binom{p}{i} = \frac{p\cdot(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-i+1)}{i\cdot(i-1)\cdot\ldots\cdot 1}$

Denn: $$\underbrace{\binom{p}{i}}_{\in \mathbb{N}} \cdot \underbrace{i\cdot(i-1)\cdot\ldots\cdot 1}_{\text{nicht durch } p \text{ teilbar, da } p \text{ prim und alle Faktoren kleiner } p} = \underbrace{p\cdot(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-i+1)}_{\text{durch } p \text{ teilbar}} \quad \Rightarrow p \mid \binom{p}{i}$$

$$\underbrace{S_{p-1}(n-1)}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p-2}\binom{p}{i} S_i(n-1)}_{\in \mathbb{N}\text{, da jeder Summand den durch p teilbaren Faktor } \binom{p}{i} \text{ enthält.}} = \underbrace{\frac{n^p-n}{p}}_{\Rightarrow \text{ Quotient ist eine natürliche Zahl}} \quad \Rightarrow p \mid n^p - n$$

Fazit (Kleiner Satz von Fermat): Es seien $n, p \in \mathbb{N}$ und p prim. Dann gilt $p \mid n^p - n = (n^{p-1}-1)\cdot n$.
Ist n kein Vielfaches von p ($p \nmid n$), dann gilt auch $p \mid n^{p-1} - 1$.

Andere Formulierung: $n^p \equiv n \mod p$ bzw. $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Berechnung einiger Potenzsummen

$$S_p(n) = \frac{(n+1)^{p+1} - (n+1)}{p+1} - \frac{1}{p+1} \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p+1}{i} S_i(n) \qquad \text{für } p \geq 1.$$

$$S_0(n) = \sum_{k=1}^{n} k = n$$ (der Vollständigkeit halber)

$$S_1(n) = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n - 1}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \tfrac{1}{2} n(n+1)$$

$$= \boldsymbol{\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}} = \boldsymbol{\tfrac{1}{2}(n^2 + n)}$$

Beachte, daß die Rekursionsformel bereits ihre eigene Initialisierung enthält.
Die „leere Summe" $\sum_{i=1}^{0}$ ...ist gleich Null zu setzen.

$$S_2(n) = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{3} - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{1} \binom{3}{i} S_i(n)$$

$$= \tfrac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - \tfrac{1}{3}(n+1) - \tfrac{1}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot S_1(n)$$

$$= \tfrac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 2n) - \tfrac{1}{2}(n^2 + n) = \boldsymbol{\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}} = \boldsymbol{\tfrac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)}$$

$$S_3(n) = \frac{(n+1)^4 - (n+1)}{4} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2} \binom{4}{i} S_i(n)$$

$$= \tfrac{1}{4}(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - \tfrac{1}{4}(n+1) - \tfrac{1}{4} \cdot \binom{4}{1} \cdot S_1(n) - \tfrac{1}{4} \cdot \binom{4}{2} \cdot S_2(n)$$

Berechnung einiger Potenzsummen (Forts.)

$$S_3(n) = \frac{1}{4}(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - \frac{1}{4}(n+1) - \frac{1}{4}\cdot\binom{4}{1}\cdot S_1(n) - \frac{1}{4}\cdot\binom{4}{2}\cdot S_2(n)$$

$$= \frac{1}{4}(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n) - S_1(n) - \frac{1}{4}\cdot 6\cdot S_2(n)$$

$$= \frac{1}{4}(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n) - \frac{1}{2}(n^2 + n) - \frac{1}{4}\cdot 6\cdot\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

$$= \frac{1}{4}(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n) - \frac{1}{4}(2n^2 + 2n) - \frac{1}{4}\cdot(2n^3 + 3n^2 + n)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}\left(n^4 + 2n^3 + n^2\right)} = \boldsymbol{\frac{1}{4}n^2\left(n^2 + 2n + 1\right)} = \boldsymbol{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$$

Zusammenfassung

$$S_0(n) = \sum_{k=1}^n k^0 = \boldsymbol{n}$$

$$S_1(n) = \sum_{k=1}^n k = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(n^2 + n\right)}$$

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^n k^2 = \boldsymbol{\frac{1}{6}\left(2n^3 + 3n^2 + n\right)}$$

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^n k^3 = \boldsymbol{\frac{1}{4}\left(n^4 + 2n^3 + n^2\right)}$$

Verhalten von $S_p(n)$ für große n

Beh.: $S_p(n) \;=\; \frac{1}{p+1}\, n^{p+1} \;+\; \frac{1}{2} n^p \;+\; O(n^{p-1})$ (für $n \to \infty$)

Mit dem Symbol $O(n^{p-1})$ werden Terme zusammengefaßt, die ein Polynom in n darstellen, dessen Grad kleiner gleich $p-1$ ist.

Bew. (per Induktion über p):

Induktionsanfang ($p = 2$): $S_2(n) \;=\; \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \;=\; \frac{1}{2+1}n^{2+1} + \frac{1}{2}n^2 + O(n^{2-1}) \quad \checkmark$$

Induktionsschritt:

$$\frac{1}{p+1}(n+1)^{p+1} = \frac{1}{p+1}\left(n^{p+1} + \binom{p+1}{p} n^p + O(n^{p-1})\right) = \frac{1}{p+1}n^{p+1} + n^p + O(n^{p-1})$$

$$\frac{1}{p+1}\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p+1}{i} S_i(n) = \frac{1}{p+1}\binom{p+1}{p-1} S_{p-1}(n) + \frac{1}{p+1}\sum_{i=1}^{p-2}\binom{p+1}{i} S_i(n)$$

$$= \frac{1}{p+1}\frac{(p+1)p}{2}\left(\frac{1}{p}n^p + O(n^{p-1})\right) + \sum_{i=1}^{p-2} O(n^{i+1})$$

$$= \frac{1}{2}n^p + O(n^{p-1}) + O(n^{p-1}) \qquad = \frac{1}{2}n^p + O(n^{p-1})$$

Also folgt:

$$S_p(n) = \frac{(n+1)^{p+1} - (n+1)}{p+1} - \frac{1}{p+1}\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p+1}{i} S_i(n)$$

$$= \frac{1}{p+1}n^{p+1} + n^p + O(n^{p-1}) - O(n) - \left(\frac{1}{2}n^p + O(n^{p-1})\right)$$

$$= \frac{1}{p+1}n^{p+1} + \frac{1}{2}n^p + O(n^{p-1}) \quad \checkmark$$

Beachte folgende Rechenregeln:
$O(n^{p-1}) \pm O(n^{p-1}) = O(n^{p-1})$
Exemplarisch: $O(n) + O(n^2) = O(n^2)$

$\blacksquare$