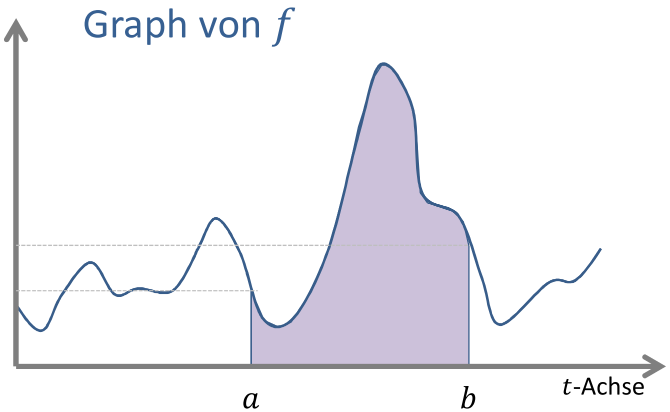
# Transformation von Integralen

Streckung bzw. Stauchung des Integrationsintervalls




$$\int_{\sigma a}^{\sigma b} f(\theta/\sigma) \cdot \mathrm{d}\theta \;=\; \sigma \cdot \int_a^b f(t) \cdot \mathrm{d}t$$

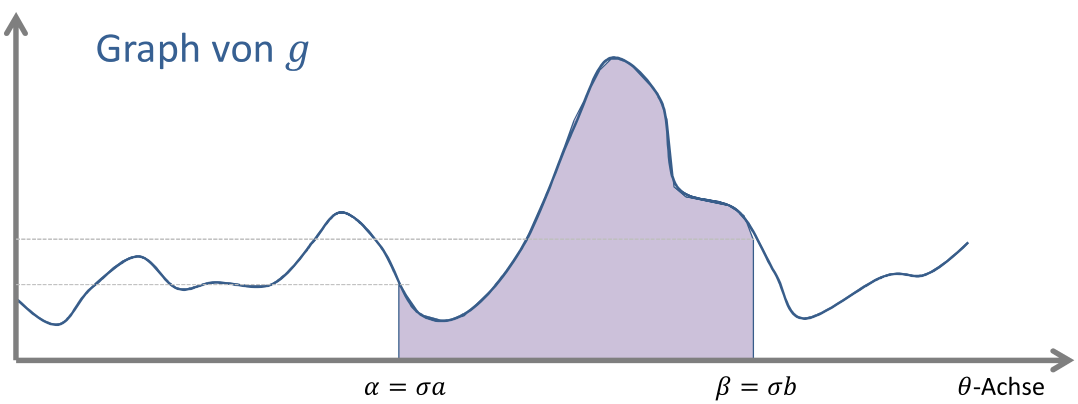
$$\Leftrightarrow \quad \int_a^b f(t) \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma} \cdot \int_{\sigma a}^{\sigma b} f(\theta/\sigma) \cdot \mathrm{d}\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{\alpha/\sigma}^{\beta/\sigma} f(t) \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta/\sigma) \cdot \mathrm{d}\theta$$

$\theta = \sigma \cdot t$ (Streckung für $\sigma > 1$)

$t = \theta/\sigma$ (Stauchung für $\sigma > 1$)

$$g(\theta) = f(\theta/\sigma)$$
$$f(t) = g(\sigma \cdot t)$$




$$\int_{\sigma a}^{\sigma b} g(\theta) \cdot \mathrm{d}\theta \;=\; \int_a^b g(\sigma t) \cdot \sigma\,\mathrm{d}t$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{\sigma a}^{\sigma b} g(\theta) \cdot \mathrm{d}\theta = \sigma \cdot \int_a^b g(\sigma t) \cdot \mathrm{d}t$$

# „Im Grenzwert vereinfacht sich vieles ... “

**Eine exemplarische, eindrückliche Gegenüberstellung**

**„Diskrete“ Potenzsummen**

$$S_4(n) = \sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$S_5(n) = \sum_{k=0}^{n} k^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

$$S_6(n) = \sum_{k=0}^{n} k^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

**versus** **„Kontinuierliche“ Potenzsummen** (Integrale von Potenzfunktionen)

$$\int_0^a x^4 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,a^5$$

$$\int_0^a x^5 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\,a^6$$

$$\int_0^a x^6 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\,a^7$$

# Grundbegriffe zum *Riemann*-Integral

(kompaktes) **Intervall**: $I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R}: \quad a \leq x \leq b\}$

**Zerlegung** $\mathcal{Z} = (x_i)_{i=0}^n$ eines Intervalls $I = [a, b]$: $\quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

(*endliche, streng monoton wachsende Folge* bzw. entsprechendes *Tupel*)

$k$'tes Teilintervall der Zerlegung: $I_k = [x_{k-1}, x_k]$

$n - 1$ Zwischenpunkte zerlegen das Intervall in $n$ Teilintervalle.

$k$'tes Inkrement: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

Länge des $k$'ten Teilintervalls.

**Feinheitsmaß** der Zerlegung: $\max\limits_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k = \max\limits_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$

$\mathfrak{Z}(I) \equiv \mathfrak{Z}(a, b)$ = Menge der Zerlegungen auf dem Intervall $I = [a, b]$.

Betrachte nun:
1) Intervall $I = [a, b]$
2) Zerlegung $\mathcal{Z} = (x_i)_{i=0}^n$
3) beschränkte Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$

**Definition** der *Unter*- bzw. *Obersumme* von $f$ bzgl. der Zerlegung $\mathcal{Z}$

**Untersumme:**

$$\underline{S}(\mathcal{Z}, f) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \inf_{x \in I_k} f(x) \cdot \Delta x_k \equiv \sum_{k=1}^{n} \inf f\left([x_{k-1}, x_k]\right) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

**Obersumme:**

$$\overline{S}(\mathcal{Z}, f) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in I_k} f(x) \cdot \Delta x_k \equiv \sum_{k=1}^{n} \sup f\left([x_{k-1}, x_k]\right) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

# Definition des *Riemann*-Integrals

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{Z}_1 = (x_i)_{i=0}^m \in \mathfrak{Z}(a,b) \\ \mathcal{Z}_2 = (y_i)_{i=0}^n \in \mathfrak{Z}(a,b) \end{array}\right\}$$

$\mathcal{Z}_2$ heißt **Verfeinerung** von $\mathcal{Z}_1$ $\;:\Leftrightarrow \mathcal{Z}_1 \subset \mathcal{Z}_2$

$\{x_1, \dots, x_m\} \subset \{y_1, \dots, y_n\}$

$\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ ist die kleinste Verfeinerung, welche $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathfrak{Z}(a,b)$ enthält.

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt .

**Lemma (Monotonieeigenschaft der Unter- und Obersummen) :**

i) $\forall\, \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(a,b)$: $\quad \underline{S}(\mathcal{Z}, f) \le \overline{S}(\mathcal{Z}, f)$

ii) $\mathcal{Z}_1 \subset \mathcal{Z}_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{S}(\mathcal{Z}_1, f) \le \underline{S}(\mathcal{Z}_2, f) \quad \wedge \quad \overline{S}(\mathcal{Z}_1, f) \ge \overline{S}(\mathcal{Z}_2, f)$

**Folgerung:** $\forall \mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathfrak{Z}(a,b)$: $\quad \underline{S}(\mathcal{S}, f) \le \overline{S}(\mathcal{T}, f)$ Untersummen sind stets kleiner gleich Obersummen.

**Bew.:** $\underline{S}(\mathcal{S}, f) \le \underline{S}(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}, f) \le \overline{S}(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}, f) \le \overline{S}(\mathcal{T}, f)$ ■

**Def.:**

**Unterintegral** $\underline{\mathrm{J}}(f) := \sup\limits_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(a,b)} \underline{S}(\mathcal{Z}, f)$

**Oberintegral** $\overline{\mathrm{J}}(f) := \inf\limits_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(a,b)} \overline{S}(\mathcal{Z}, f)$

**Def.:** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt heißt (*Riemann-*)*integrierbar*, falls $\underline{\mathrm{J}}(f) = \overline{\mathrm{J}}(f)$.

$$\int_a^b f := \underline{\mathrm{J}}(f) = \overline{\mathrm{J}}(f)$$

Diese Zahl heißt **Integral** von $f$ über dem Intervall $[a,b]$.

Genauer: *Riemann*- bzw. *Darboux-Integral* im Gegensatz zum *Lebesgue-Integral*.

# Zur Integrabilität & Existenz des Integrals

Generell sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

**Satz (*Riemann*sches Integrabilitätskriterium):**

$$f \text{ integrierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \;\; \exists \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}(a,b): \;\; \left|\overline{S}(\mathcal{Z},f) - \underline{S}(\mathcal{Z},f)\right| < \epsilon$$

**Def.:** $(\mathcal{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{Z}(a,b)$ heißt **Zerlegungsnullfolge** des kompakten Intervalls $[a,b]$

$$:\Leftrightarrow \quad \#\mathcal{Z}_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \quad \wedge \quad \Delta(\mathcal{Z}_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

**Satz (Bedeutung der Zerlegungsnullfolgen):** $(\mathcal{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{Z}(a,b)$ Zerlegungsnullfolge

Dann gilt:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \underline{S}(\mathcal{Z}_n,f) = \sup\limits_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}(a,b)} \underline{S}(\mathcal{Z},f) = \underline{\mathrm{J}}(f) \\ \lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}(\mathcal{Z}_n,f) = \inf\limits_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}(a,b)} \overline{S}(\mathcal{Z},f) = \overline{\mathrm{J}}(f) \end{cases}$$

„Technisches" **Lemma** zum Beweis des Satzes:

Es sei $\mathcal{T},\mathcal{S} \in \mathfrak{Z}(a,b)$, $\quad \|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad \forall x \in [a,b]: \;\; f(x) \le \|f\|_\infty$

Dann gilt:

$$\begin{cases} \underline{S}(\mathcal{T}) \le \underline{S}(\mathcal{T}\cup\mathcal{S}) \le \underline{S}(\mathcal{T}) + 2\cdot\#\mathcal{S}\cdot\|f\|_\infty\cdot\Delta(\mathcal{T}) \\ \overline{S}(\mathcal{T}) \ge \overline{S}(\mathcal{T}\cup\mathcal{S}) \ge \overline{S}(\mathcal{T}) - 2\cdot\#\mathcal{S}\cdot\|f\|_\infty\cdot\Delta(\mathcal{T}) \end{cases}$$

## Zwei Standard-Zerlegungsnullfolgen

Erinnerung: $(x_k)_{k=0}^{n}$ ist Zerlegung eines kompakten Intervalls $[a, b]$, falls

$$a = x_0 < x_1 < \quad \ldots \quad < \quad x_n = b.$$

Zerlegung in Form einer **arithmetischen Progression** (**äquidistante Zerlegung**)

Zerlegungspunkte $\quad x_k := a + k \cdot \frac{b-a}{n}$

Inkremente $\quad \Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ (Inkrement hängt nicht von $k$ ab!)

Feinheitsmaß $\quad \Delta := \max_k \Delta x_k = \frac{b-a}{n}$

Beachte: $\quad x_k = \frac{x_{k+1}+x_{k-1}}{2} \qquad \Delta x_k = \Delta x_{k+1} = \ldots$

Zerlegung in Form einer **geometrischen Progression**

Zerlegungspunkte $\quad x_k := a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{k/n}$

Inkremente $\quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{n}} \cdot \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right)$

Feinheitsmaß $\quad \Delta := \max_k \Delta x_k = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n-1}{n}} \cdot \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right) \leq b \cdot \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right)$

Beachte: $\quad x_k = \sqrt{x_{k+1} \cdot x_{k-1}} \qquad \Delta x_{k+1} = (b/a)^{1/n} \cdot \Delta x_k$