Logarithmus & Exponentialfunktion im Einsatz

Man beachte im folgenden das Zusammenspiel von Kombinatorik und Analysis (Exponentialfunktion, Logarithmus, Abschätzung), um den recht komplizierten kombinatorischen Ausdruck vereinfachend abzuschätzen. Erst dadurch läßt sich schließlich ein aussagekräftiges Ergebnis gewinnen!

Zurück zu den Abzählproblemen …

Mindestens zwei Personen unter Ihnen
haben am gleichen Tag Geburtstag.

Wer möchte dagegen halten?

Totsicher ist die Wette erst bei 366 bzw. 367 Personen. ← Schubfachprinzip.

Kombinatorische Rechnung zum Geburtstagsparadoxon

Wo tauchen die absteigenden Faktoriellen sonst noch auf?

Wahrscheinlichkeit, daß unter p Personen keine zwei am gleichen Tag Geburtstag haben?

$$\text{Kombinatorische Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{Anzahl der zulässigen Möglichkeiten}}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten}}$$

$p = 2$: $\quad w_2 = \frac{n(n-1)}{n^2} \quad = 1 - \frac{1}{n}$

$p = 3$: $\quad w_3 = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \quad = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)$

$$w_p = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-p+1}{n} = \prod_{k=1}^{p-1} \frac{n-k}{n} \quad = \frac{n^{\underline{p}}}{n^p}$$

mit n erweitert!

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit w_p ergibt sich als Verhältnis der p'ten abst. Faktoriellen zur p'ten Potenz von n.

Unter p Personen haben genau dann keine zwei am gleichen Tag Geburtstag, wenn die Abbildung *Person* $\mapsto$ *Geburtstag* injektiv. Also gilt:

$$w_p = \frac{\text{Anzahl der injektiven Abbildungen von } \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, n\}}{\text{Anzahl aller Abbildungen}} = \frac{n^{\underline{p}}}{n^p} = \frac{(n-1)^{\underline{p-1}}}{n^{p-1}}$$

Analytische Rechnung zum Geburtstagsparadoxon

$$w_p = \prod_{k=1}^{p-1} \frac{n-k}{n} = \prod_{k=1}^{p-1} 1 - \frac{k}{n} \qquad \Rightarrow \qquad \log w_p = \sum_{k=1}^{p-1} \log\left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

Zwischenbetrachtung: $\frac{x-1}{x} \leq \log x \leq x - 1$

Funktionsgraph $\rightarrow$ $\log x \leq x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\log x \geq 1 - x$

$x \rightarrow \frac{1}{x}$ $\quad -\log \frac{1}{x} \geq 1 - \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \log x \geq \frac{x-1}{x}$

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1 - \frac{k}{n} - 1}{1 - \frac{k}{n}} \leq \log w_p = \sum_{k=1}^{p-1} \log\left(1 - \frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{p-1} 1 - \frac{k}{n} - 1$$

$$-\underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} \frac{k}{n-k}} \leq \log w_p = \sum_{k=1}^{p-1} \log\left(1 - \frac{k}{n}\right) \leq -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{p-1} k$$

$$\frac{-1}{n-p+1} \sum_{k=1}^{p-1} k \leq \ldots.$$

$$\frac{1}{n-k} \leq \frac{1}{n-p+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1}{n-p+1} \leq \frac{-1}{n-k}$$

Abschätzung nur gültig für $p \leq n$.

Abschätzung der Wahrscheinlichkeit

Annahme: $1 \le p \le n$.

$$\frac{-1}{n-p+1}\sum_{k=0}^{p-1} k \quad \le \quad \log w_p \quad \le \quad -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{p-1} k$$

$$-\frac{p(p-1)}{2(n-p+1)} \quad \le \quad \log w_p \quad \le \quad -\frac{p(p-1)}{2n}$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{p(p-1)}{2(n-p+1)}} \quad \le \quad w_p \quad \le \quad \mathrm{e}^{-\frac{p(p-1)}{2n}}$$

Geben Sie hier eine Formel ein.

Numerische Auswertung (ohne Taschenrechner):

Eulersche Zahl $\mathrm{e} = 2.7\,18\,28\,18\,28\,45\,90\,46\ldots$, Tage im Jahr $n = 365$

$\mathrm{e} \approx 2.7 = \frac{27}{10}$ $\quad$ $\mathrm{e} \ge \frac{27}{10}$

Wie ist p zu wählen, damit gilt: $\frac{p(p-1)}{2n} \approx 1$? Antwort: $p = 27$.

$\mathrm{e}^{-1} \le \frac{10}{27}$ $\quad$ $\mathrm{e}^{-1} \approx \frac{10}{27} = \frac{30}{81} \le \frac{32}{80} = \frac{4\cdot 8}{10\cdot 8} = \frac{4}{10} = 0.4$

$25^2 = 625$, $\quad$ $27^2 = (25+2)^2 = 625 + 4\cdot 25 + 4 = 729 = 2\cdot 365 - 1$

$p = 27$: $\quad w_{27} \le 0.4^{\frac{27(27-1)}{730}} = 0.4^{\frac{702}{730}} \gtrsim 0.4^1 = 0.4$

Bereits bei 27 Personen liegt die Wahrscheinlichkeit bei etwa über 40%, daß keine zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. Bei 50 Personen beträgt sie schon unter 3,5% (mit TR).

Untere Schranke $\mathrm{e}^{-\frac{27\cdot(27-1)}{2\cdot(365-27+1)}} \approx 0.3551$ (mit TR) $\le w_{27} = 0.3823\ldots$