# Aufgabenserie 4
## Integration (Riemann-Integral)

### Aufgabe 4.1: Integration der Potenzfunktionen (2+3+5=10P)

a) Berechnen Sie $\int_a^b x^2 \mathrm{d}x$, indem Sie das Intervall $[a,b]$ äquidistant zerlegen und mit Hilfe der Summenformel für die ersten $n$ Quadratzahlen einen expliziten Ausdruck für die Unter- und Obersumme finden.

b) Berechnen Sie in gleicher Weise $\int_a^b x^3 \mathrm{d}x$.
Im Gegensatz zur Quadratfunktion nimmt die Kubikfunktion für negative Argumente auch negative Werte an. Ist daher eine Fallunterscheidung notwendig, je nachdem ob $a < b < 0$, $a < 0 < b$ oder $0 < a < b$ gilt?

c) Begründen Sie für beliebiges $p \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\int_a^b x^p \, \mathrm{d}x = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

**Hinweis:** Wie in der Vorlesung gezeigt gilt $S_p(n) \equiv \sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + \frac{1}{2} n^p + \mathrm{O}(n^{p-1})$.

### Aufgabe 4.2: Integration eines Polynoms (3+3=6P)

Integrieren Sie die Polynomfunktion $f$ definiert durch $f(x) \coloneqq (x+3)\cdot(x+1)\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)$ über das Intervall $[-4,4]$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Auf welchen Teilintervallen von $[-4,4]$ hat das Polynom $f$ konstantes Vorzeichen? Geben Sie die Teilintervalle mit dem jeweiligen Vorzeichen an und integrieren Sie das Polynom über jedes dieser Teilintervalle separat. Addieren Sie schließlich die erhaltenen Ergebnisse auf.

b) Integrieren Sie $f$ über das gessamte Intervall $[-4,4]$ in der üblichen Vorgehensweise, ohne der Tatsache Beachtung zu schenken, daß $f$ in dem Integrationsintervall mehrfach das Vorzeichen wechselt. Vergleichen Sie mit dem Ergebniss aus a). Welche geometrische Bedeutung bzw. Interpretation hat das Integral?

### Aufgabe 4.3: Unter- & Obersummen ganzzahliger Potenzfunktionen (4+5+5+5*=14P)

Es sei $0 < a < b$ und $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei $\mathcal{Z} = (x_i)_{i=0}^n$ eine beliebige *Zerlegung* des Intervalls $[a,b]$, d.h. es gelte $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Außerdem sei mit $p_s$ die Potenzfunktion $x \mapsto x^s$ für $x \geqq 0$ bezeichnet, wobei nur ganzahlige Exponenten zu betrachten sind.

a) Zeigen Sie analog zur Vorlesung: $\underline{S}(\mathcal{Z},p_3) < \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4 < \overline{S}(\mathcal{Z},p_3)$.

b) Verallgemeinern Sie die obige Ungleichung auf beliebiges $s \in \mathbb{N}$, indem Sie zeigen:

$$\underline{S}(\mathcal{Z},p_s) \;<\; \tfrac{1}{s+1}b^{s+1} - \tfrac{1}{s+1}a^{s+1} \;<\; \overline{S}(\mathcal{Z},p_s).$$

c) Zeigen Sie ebenfalls analog zur Vorlesung: $\underline{S}(\mathcal{Z},p_{-3}) < \frac{1}{2}a^{-2} - \frac{1}{2}b^{-2} < \overline{S}(\mathcal{Z},p_3)$.

d) Verallgemeinern Sie auch diese Ungleichung auf negative ganzzahlige Exponenten, indem Sie für $s \in \mathbb{N}$ mit $s \neq 1$ zeigen:

$$\underline{S}(\mathcal{Z},p_{-s}) \;<\; \tfrac{1}{s-1}a^{-s+1} - \tfrac{1}{s-1}b^{-s+1} \;<\; \overline{S}(\mathcal{Z},p_{-s}).$$

Warum ist der Fall $s = 1$ ausgenommen?

**Aufgabe 4.4: Integration weiterer Funktionen** **(4+5+4+5*=13P)**

a) Berechnen Sie $\int_0^x \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$, indem Sie dieses Integral rein geometrisch auf ein Integral einer geeigneten Potenzfunktion zurückführen. Welchen Wert hat das Integral $\int_1^x \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$?
**Hinweis:** Die (Quadrat)Wurzelfunktion ist die Umkehrfunktion der Quadratfunktion.

b) Zeigen Sie

$$\int_1^x t^{1/2}\,\mathrm{d}t = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{x^3}-1}{\sqrt[n]{x}-1}\right]^{-1} \cdot \left(x^{3/2}-1\right),$$

indem Sie die Unter- und Obersumme der Wurzelfunktion bezüglich einer *geometrischen Zerlegung* des Intervalls $[1,x]$ berechnen und dann die Anzahl der Zerlegungspunkte gegen Unendlich schicken.

c) Vergleichen Sie die Gleichung in b) mit dem Ergebnis aus a). Gegen welchen Wert sollte der Term $\frac{\sqrt[2n]{x^3}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ konvergieren, wenn $n$ gegen Unendlich strebt. Überprüfen Sie Ihre Vermutung numerisch, indem Sie für $x > 1$ einen Wert wählen sowie für $n$ möglichst große Werte einsetzen. Hängt der Grenzwert von $x$ ab? Was hat der Term mit einem Differenzen- bzw. Differntialquotienten zu tun, die Ihnen vielleicht noch aus der Schule bekannt sind?

d) Zeigen Sie ebenfalls unter Verwendung *geometrischer Zerlegungen* des Intervals $[1,x]$ die Gleichung

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot(\sqrt[n]{x}-1)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot(1-1/\sqrt[n]{x})\right).$$

**Aufgabe 4.5: Fragen zur Begriffsbildung** **(2+2+3+3×4*=7P)**

a) Definieren Sie, was man genau unter einer *beschränkten Menge* reeller (oder auch komplexer) Zahlen verstehen soll. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Präzisieren Sie die Aussage, $f$ sei *beschränkt*. Unter welchen Umständen nennt man eine reell- oder komplexwertige Funktion beschränkt?

b) Geben Sie eine abzählbare Menge reeller Zahlen an, die zwar beschränkt ist aber weder über ein *Minimum* noch über ein *Maximum* verfügt. Geben Sie das *Infimum* und *Supremum* der Menge an.
**Achtung:** Ein *offenes Intervall* kommt nicht als beispielhafte Menge in Frage, da dieses *überabzählbar* ist.

c) Es sei $0 < a < b$. Unter einer geometrischen Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ versteht man für ein $n \in \mathbb{N}$ die Folge von Zwischenpunkten $a = x_0 < ... < x_n = b$ mit $x_k := a(b/a)^{k/n}$ für $k \in \{0,...,n\}$. Wie ist die geometrische Zerlegung eines Intervalls sinnvoller Weise zu definieren, wenn das Intervall keine Teilmenge der positiven reellen Zahlen ist?
**Beachte:** Der Ausdruck $(b/a)^{k/n}$ ist im allgemeinen nur für $b/a > 0$ definiert.

d) (Diskussionsaufgabe) Vergleichen Sie die anschauliche mit der formalen Definition des Integrals. Wo sehen Sie vor und Nachteile?

e) (Diskussionsaufgabe) Diskutieren Sie die Linearität des Integrals. Inwieweit ergibt sich diese aus der geometrischen Definition des Integrals über den signierten (vorzeichenbehafteten) Flächeninhalt zwischen der Abszisse (x-Achse) und dem Funktionsgraphen.

f) (Diskussionsaufgabe) Stellen Sie mathematische Begriffe zusammen, die in der Vorlesung gefallen sind und die noch genauer erläutert werden sollten.

*Bitte die Abgaben im Moodle hochladen bis zum 24.05.2019, 17:00 Uhr.*