Vorlesung **Mathematik für Informatiker II** 14. Juni 2019
(an der Universität Heidelberg)
Dozent: *Dr. Martin Rheinländer*
Tutoren: *Armand Rousselot, Vasil Manev, Max Bréard*

Aufgabenserie 7

Asymptotische Notation
Polynomiale Entwicklung von Funktionen

Aufgabe 7.1: Zum Gebrauch der Landau-Notation bzw. des O-Symbols (2+3+5+5=15P)

a) Was ist mit der Schreibweise "$f(x) \simeq g(x)$ für $x \to a$" gemeint?

b) Begründen Sie die Implikation: $f \simeq g \;\Rightarrow\; f \asymp g$. Gilt auch die umgekeherte Folgerung? Begründen Sie Ihre Antwort ggf. mit einem Gegenbeispiel.

c) Es sei $c > 0$ eine Konstante. Weshalb gilt $\sqrt{x+c} = \sqrt{x} + \mathrm{O}(1)$ für $x \to \infty$. Präzisieren Sie die Gleichung, indem Sie $\mathrm{O}(1)$ durch $\mathrm{O}(g)$ mit einer geeigneten Funktion g ersetzen.

d) Es sei H_n die n'te harmonische Zahl. Erläutern und begründen Sie die Gleichung $H_n = \log n + \mathrm{O}(1)$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 7.2: Rechenregeln für Groß-Oh und Klein-oh (5×2=10P)

Es seien f, g zwei reellwertige Funktionen, welche in der Umgebung $\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < 1\}$ von a definiert sind. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

a) $\mathrm{O}(f) + \mathrm{O}(f) = \mathrm{O}(f)$

b) $\mathrm{O}(f) + \mathrm{o}(f) = \mathrm{O}(f)$

c) $\mathrm{O}(f) + \mathrm{O}(g) = \mathrm{O}\big(|f| + |g|\big)$

d) $\mathrm{O}(f) \cdot \mathrm{o}(f) = \mathrm{o}(f^2)$

e) $f \cdot \mathrm{O}(g) = \mathrm{O}(fg)$

Alle Landau-Symbole beziehen sich natürlich auf denselben Grenzwert $x \to a$.

Aufgabe 7.3: Dazwischen ist immer noch Platz! (5P)

Bekanntlich existiert zu zwei rationalen (reellen) Zahlen $a < b$ stets eine dritte rationale (reelle) Zahl c, welche zwischen diesen beiden liegt[1], so daß $a < c < b$ gilt.
Zeigen Sie eine analoge Eigenschaft für Folgen hinsichtlich der Relation *asymptotisch vernachlässigbar*, welche mit dem Symbol $\prec$ bezeichnet wird. Seien also $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zwei Folgen, welche entweder beide gegen Null oder gegen Unendlich streben (für $n \to \infty$). Gilt $f \prec g$, so gibt es auch eine Folge $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $f \prec h \prec g$.

Aufgabe 7.4: Polynomiale Näherung gebrochen rationaler Funktion (5+5+5+2*+8*=15P)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ zwei (von Null verschiedene) Konstanten. Entwickeln Sie den gebrochen rationalen Ausdruck

$$g(x) := \frac{1}{1 + ax + bx^2}$$

[1] Genauer liegen sogar zwischen zwei rationalen (reellen) Zahlen (überabzählbar) unendlich viele weitere rationale (reelle) Zahlen. Es gibt daher keine benachbarten reellen Zahlen.

um den Nullpunkt bis einschließlich zur vierten Ordnung, indem Sie Polynome $p_0, p_1, ..., p_4$ bestimmen mit

$$p_k(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_k x^k \equiv \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^i \qquad \text{und} \qquad g(x) - p_k(x) = O(x^{k+1}) \quad \text{für } x \to 0.$$

Probieren Sie die folgenden drei alternativen Methoden aus, die Polynome zu finden, und vergleichen Sie die Ergebnisse.

a) Bestimmen Sie die (Koeffizienten der) Polynome $p_0, p_1, ..., p_4$, indem Sie das *Residuum* $r_k(x) := (1+ax+bx^2)p_k(x)-1$ durch eine geeignete Wahl der Koeffizienten asymptotisch für $x \to 0$ minimieren.

b) Ermitteln Sie $p_0, p_1, ..., p_4$ durch fortgesetzte Polynomdivision.

c) Betrachten Sie die Entwicklung des Ausdrucks $f(y) := \frac{1}{1+y}$ bis einschließlich zur vierten Ordnung. Setzen Sie in dieser Entwicklung $y = ax + bx^2$ und multiplizieren Sie die Binome aus, um die Terme nach den Potenzen von x zu sortieren.

d) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die beiden Sonderfälle $a = 0$ bzw. $b = 0$ betrachten.

e) Nehmen Sie an, es gelte für geeignete Konstanten α, β und γ

$$1 + ax + bx^2 = \alpha(x - \beta)(x - \gamma) \qquad \text{oder} \qquad 1 + ax + bx^2 = \alpha(x - \beta)^2.$$

Wie ließen sich unter Verwendung dieser Umstände die polynomialeen Näherungen für g bestimmen? Führen Sie beispielhafte Rechnungen durch.

Aufgabe 7.5: Polynomiale Näherungen von Wurzelfunktionen **(5+5+5+5*=15P)**

Bestimmen Sie für die folgenden Wurzelfunktionen die Näherungspolynome vom Grad drei, so daß der Fehler von der Ordnung $O(x^4)$ ist, wenn x gegen 0 strebt.

a) $w_1(x) := \sqrt{1 + ax + bx^2}$

b) $w_2(x) := \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

c) $w_3(x) := \sqrt[3]{1+x}$

d) $w_4(x) := (1+x)^{2/3}$

Falls Sie zur Berechnung eines Polynoms unterschiedliche Rechenwege kennen, ist es zur Kontrolle und zur Übung sinnvoll, diese jeweils auszuführen. Dies sollte bei a), b) und d) der Fall sein. Zur Probe können die Koeffizienten der Polynome zu w_3 und w_4 direkt mit Hilfe geeigneter (nicht ganzzahliger) Binomialkoeffizienten berechnet werden.

Aufgabe 7.6: Entwicklungen um einen beliebigen Entwicklungspunkt ξ **(5+5*+5+5*=10P)**

Es sei ξ ein (innerer) Punkt des Definitionsbereichs der zu betrachtenden Funktion. Finden Sie Polynome a, b, c, d vom Grad 4 mit

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{1}{1-x} - a(x) \\ \sqrt{1+x} - b(x) \\ \log x - c(x) \\ \mathrm{e}^x - d(x) \end{array}\right\} = O\big((x-\xi)^5\big) \quad \text{für } x \to \xi.$$

Geben Sie die Polynome in Potenzen von $x - \xi$ an.

Aufgabe 7.7: Ergänzungen zur Vorlesung **($4+4+2+5+5^*+5^*=15$P)**

a) Bestimmen Sie die Näherungspolynome T_5 und T_6 für die Exponentialfunktion. Haben Sie eine Vermutung, welche Werte sich für die Koeffizienten α_5 und α_6 ergeben sollten?

b) Bestimmen Sie ebenfalls die Näherungspolynome L_5 und L_6 für die verschobene Logarithmusfunktion ℓ mit $\ell(x) \coloneqq \log(1+x)$. Welche Erwartung haben Sie hier hinsichtlich der zu ermittelnden Koeffizienten λ_5 und λ_6?

c) Bei der Bestimmung der Koeffizienten von Näherungspolynomen spielt der folgende Sachverhalt eine wesentliche Rolle: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\alpha x^n = O(x^{n+1}) \quad \text{für } x \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 0.$$

Begründen Sie diese Aussage.

d) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen

$$x \mapsto x, \qquad x \mapsto \sqrt{x}, \qquad x \mapsto x^2, \qquad x \mapsto \sqrt{10} \cdot x^3, \qquad x \mapsto 10^x$$

in einem Koordinatensystem, bei welchem beide Achsen mit einer logarithmischen[2] Einteilung (Skala) versehen sind.

e) (Diskussionsaufgabe) In gewissen (vergleichsweise einfachen) Fällen läßt sich bei der Berechnung von Näherungspolynomen ein Bildungsgesetz für die Polynomkoeffizienten leicht erkennen. Man kann dann die Polynome beliebig zu einer sogenannten *Potenzreihe* fortsetzen. Dementsprechend bezeichnet man

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{als Exponentialreihe} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \quad \text{als Logarithmusreihe.}$$

Bei der Betrachtung einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ stellt sich zunächst die Frage nach ihrem Konvergenzverhalten, d.h. es ist zu klären für welche $x \in \mathbb{R}$ der Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \coloneqq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ überhaupt existiert. Versuchen Sie einmal, die Konvergenzfrage für die Exponentialreihe und die Logarithmusreihe zu diskutieren. Beachten Sie dabei auch die auffällige Beziehung zwischen der Logarithmusreihe und der alternierenden geometrischen Reihe.

f) (Bonus) Betrachten Sie die folgende Funktionalabbildung F, welcher einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine andere Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zuordnet:

$$F(f)(x) = h(x) \coloneqq f(2x) - f(x)^2.$$

Untersuchen Sie, ob F auf der Menge der Polynome injektiv und surjektiv ist.

Bitte die Abgaben im Moodle hochladen bis zum 28.06.2019, 17:00 Uhr.

[2] Gemeint ist hier der dekadischer Logarithmus. Warum wohl?