Entwickeln der Exponentialfunktion

Charakterisierung der Exponentialfunktion $f_{\mathrm{e}}\colon\ x \mapsto \mathrm{e}^x$

i) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $\quad f_{\mathrm{e}}(x+y) = f_{\mathrm{e}}(x)\cdot f_{\mathrm{e}}(y)$

ii) $f_{\mathrm{e}}'(0) = 1$

Die Exponentialfunktion ist die einzige „anständige“ (stetige) Funktion, die den Bedingungen i) und ii) genügt.

Gleichung (*) ist als Folgerung aus i) eine notwendige Bedingung für i), d.h. jede Funktion die (*) nicht erfüllt kann auch i) nicht genügen.

i) $\overset{x=y}{\Longrightarrow} \quad f_{\mathrm{e}}(2x) = f_{\mathrm{e}}(x)\cdot f_{\mathrm{e}}(x) \qquad (*)$

Zur Vorgehensweise: Es soll gelten: $T_{i+1}(x) = T_i(x) + \alpha_i x^i$.
Zur Berechnung von T_k hangelt man sich am besten Schritt für Schritt hoch, indem man bei T_0 beginnend sukzessive T_1, T_2 usw. bestimmt.

Gesucht: $T_k(x) \coloneqq \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_k x^k$

$$\begin{cases} T_k(2x) \overset{\mathrm{m}}{=} T_k(x)\cdot T_k(x) + O(x^{k+1}) \quad \text{für: } x \to 0 & (**) \\ T_k'(0) \overset{\mathrm{m}}{=} 1 & (***) \end{cases}$$

Bestimmung von $\boldsymbol{\alpha_0}$: Sei $T_0(x) \coloneqq \alpha_0$

$$T_0(2x) \overset{\mathrm{m}}{=} T_0(x)^2 + O(x) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_0 \overset{\mathrm{m}}{=} \alpha_0^2 + O(x) \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 - \alpha_0^2 \equiv \alpha_0(1-\alpha_0) \overset{\mathrm{m}}{=} 0 \quad \begin{cases} \alpha_0 \overset{\mathrm{m}}{=} 0 \\ \alpha_0 \overset{\mathrm{m}}{=} 1 \end{cases}$$

$$1 = f_{\mathrm{e}}(0) \overset{\mathrm{m}}{=} T_0(0) + O(x) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha_0 \overset{\mathrm{m}}{=} 1}$$

Bestimmung von $\boldsymbol{\alpha_1}$: Sei $T_1(x) \coloneqq 1 + \alpha_1 x$

$$T_1(2x) \overset{\mathrm{m}}{=} T_1(x)^2 + O(x^2) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2\alpha_1 x \overset{\mathrm{m}}{=} 1 + 2\alpha_1 x + O(x^2) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \overset{\mathrm{m}}{=} O(x^2)$$

$$(***) \quad \Rightarrow \quad T_1'(0) = 1 \qquad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha_1 \overset{\mathrm{m}}{=} 1}$$

Es ergibt sich eine triviale Gleichung, so daß α_1 nicht daraus ermittelt werden kann sondern durch eine weitere Bedingung bestimmt muß. Dieser Umstand spiegelt die Situation bei den Exponentenfunktionen wider, die neben der Funktionalgleichung erst durch eine zusätzliche Eigenschaft eindeutig festgelegt werden können.

Berechnung von $\boldsymbol{\alpha_2}$: Sei $T_2(x) \coloneqq 1 + x + \alpha_2 x^2$.

$$\begin{aligned} T_2(2x) &\overset{\mathrm{m}}{=} T_2(x)\cdot T_2(x) + O(x^3) \\ \Leftrightarrow \quad 1 + 2x + 4\alpha_2 x^2 &\overset{\mathrm{m}}{=} (1 + x + \alpha_2 x^2)\cdot(1 + x + \alpha_2 x^2) + O(x^3) \\ \Leftrightarrow \quad 1 + 2x + 4\alpha_2 x^2 &\overset{\mathrm{m}}{=} 1 + x^2 + 2x + 2\alpha_2 x^2 + O(x^3) \\ \Leftrightarrow \quad (-1 + 2\alpha_2)x^2 &\overset{\mathrm{m}}{=} O(x^3) \quad \Rightarrow \quad -1 + 2\alpha_2 \overset{\mathrm{m}}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha_2 \overset{\mathrm{m}}{=} \tfrac{1}{2}} \end{aligned}$$

$\overset{\mathrm{m}}{=}$ „must be equal“ (geforderte Gleichheit) „soll bzw. muß gleich sein“

Entwickeln der Exponentialfunktion

Berechnung von $\boldsymbol{\alpha_3}$: Sei $T_3(x) \coloneqq 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \alpha_3 x^3.$

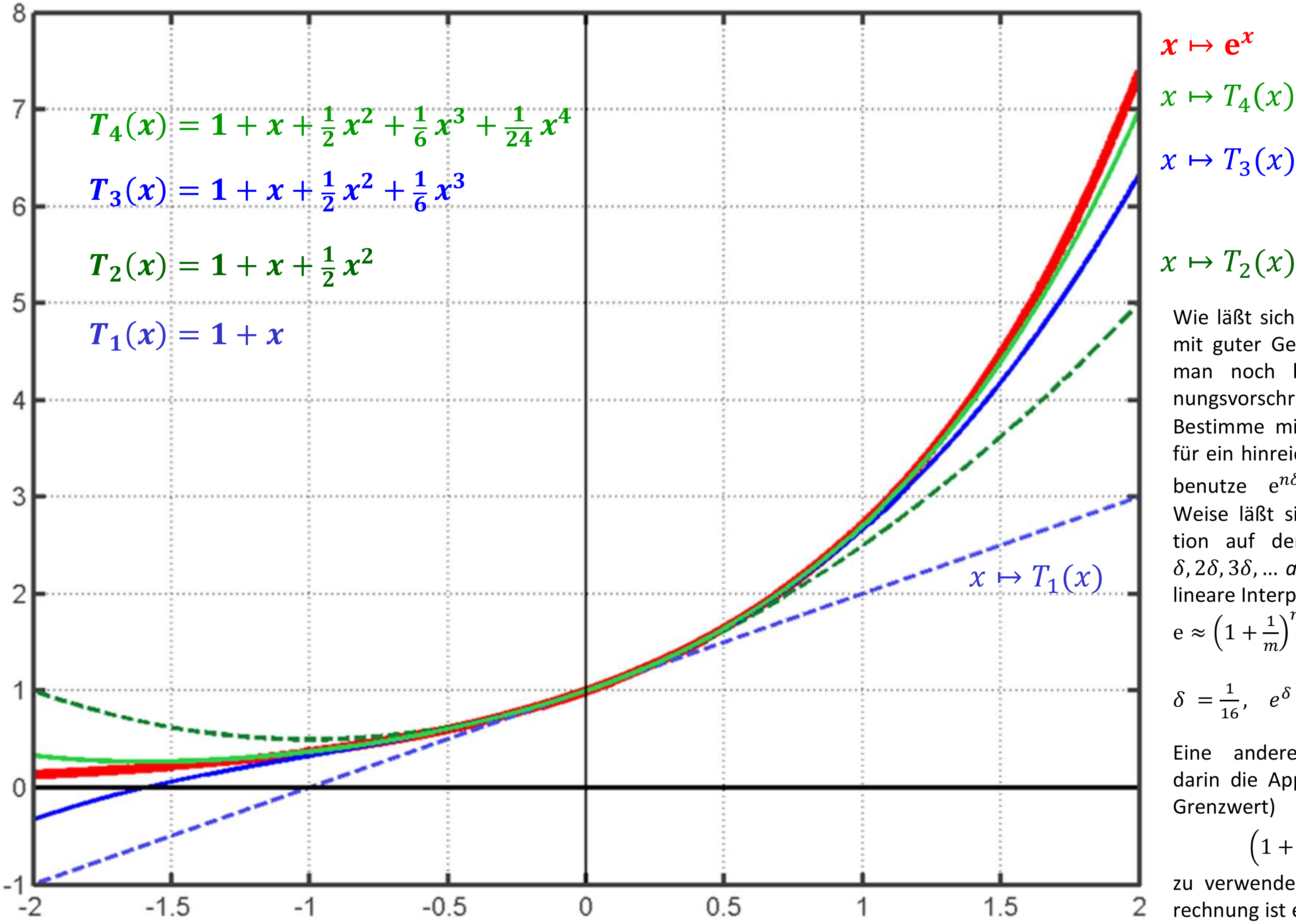
$$
\begin{aligned}
& & T_3(2x) &\overset{\text{m}}{=} T_3(x) \cdot T_3(x) + O(x^4) \\
&\Leftrightarrow & 1 + 2x + 2x^2 + 8\alpha_3 x^3 &\overset{\text{m}}{=} \left(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \alpha_3 x^3\right) \cdot \left(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \alpha_3 x^3\right) + O(x^4) \\
&\Leftrightarrow & 1 + 2x + 2x^2 + 8\alpha_3 x^3 &\overset{\text{m}}{=} 1 + x^2 + 2x + x^2 + 2\alpha_3 x^3 + x^3 + O(x^4) \\
&\Leftrightarrow & (-1 + 6\alpha_3)x^3 &\overset{\text{m}}{=} O(x^4) \qquad \Rightarrow \; -1 + 6\alpha_3 \overset{\text{m}}{=} 0 \qquad \Rightarrow \; \boldsymbol{\alpha_3 \overset{\text{m}}{=} \frac{1}{6}}
\end{aligned}
$$

Berechnung von $\boldsymbol{\alpha_4}$: Sei $T_4(x) \coloneqq 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \alpha_4 x^4.$

$$
\begin{aligned}
& & T_4(2x) &\overset{\text{m}}{=} T_4(x) \cdot T_4(x) + O(x^5) \\
&\Leftrightarrow & 1 + 2x + 2x^2 + \tfrac{8}{6}x^3 + 16\alpha_4 x^4 &\overset{\text{m}}{=} \left(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \alpha_4 x^4\right) \cdot \left(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \alpha_3 x^3\right) + O(x^5) \\
&\Leftrightarrow & 1 + 2x + 2x^2 + \tfrac{4}{3}x^3 + 16\alpha_4 x^4 &\overset{\text{m}}{=} 1 + x^2 + \tfrac{1}{4}x^4 + 2x + x^2 + \tfrac{2}{6}x^3 + 2\alpha_4 x^4 + x^3 + \tfrac{2}{6}x^4 + O(x^5) \\
&\Leftrightarrow & 16\alpha_4 x^4 &\overset{\text{m}}{=} \tfrac{1}{4}x^4 + 2\alpha_4 x^4 + \tfrac{2}{6}x^4 + O(x^5) \\
&\Leftrightarrow & \left(-\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} + 14\alpha_4\right)x^4 &\overset{\text{m}}{=} O(x^5) \qquad \Rightarrow \; -\frac{7}{12} + 14\alpha_4 \overset{\text{m}}{=} 0 \qquad \Rightarrow \; \boldsymbol{\alpha_4 \overset{\text{m}}{=} \frac{1}{24}}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{T_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4}$$

Graphischer Vergleich: Exponetialfunktion vs. polynomiale Näherungen



Wie läßt sich die Exponentialfunktion mit guter Genauigkeit plotten, wenn man noch keine explizite Berechnungsvorschrift hat?
Bestimme mit hoher Genauigkeit e^δ für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ und benutze $\mathrm{e}^{n\delta} = \left(\mathrm{e}^\delta\right)^n$. Auf diese Weise läßt sich die Exponentialfunktion auf dem *äquidistanten Gitter* $\delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$ *abtasten* und dann durch lineare Interpolation fortsetzen. Z.B.
$\mathrm{e} \approx \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ für m hinreich. groß.

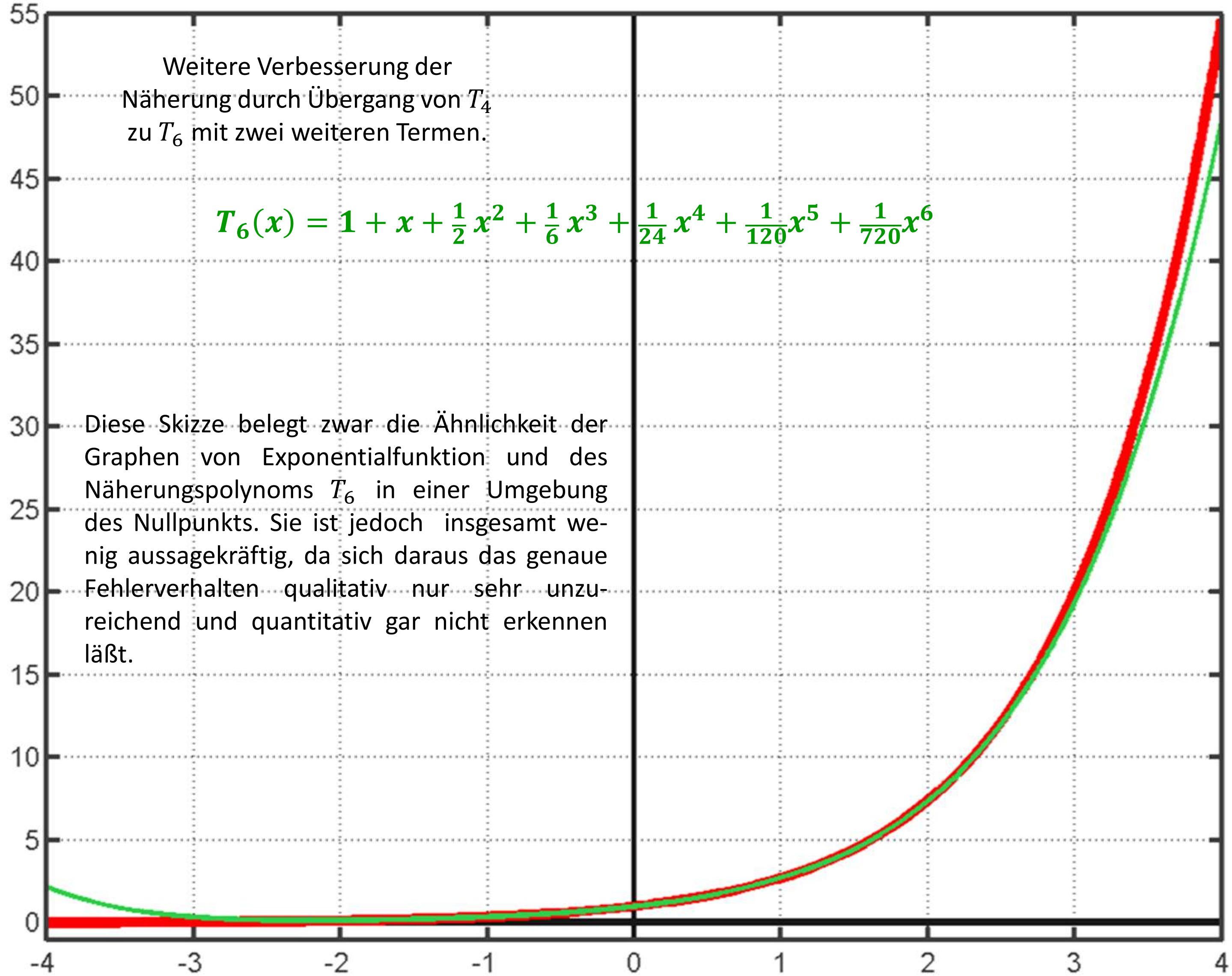
$\delta = \frac{1}{16}, \quad e^\delta = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\mathrm{e}}}}}$

Eine andere Möglichkeit besteht darin die Approximation (bzw. den Grenzwert)

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}^x$$

zu verwenden. Zur effektiveren Berechnung ist es sinnvoll, für n Zweierpotenzen einzusetzen. (Warum?)

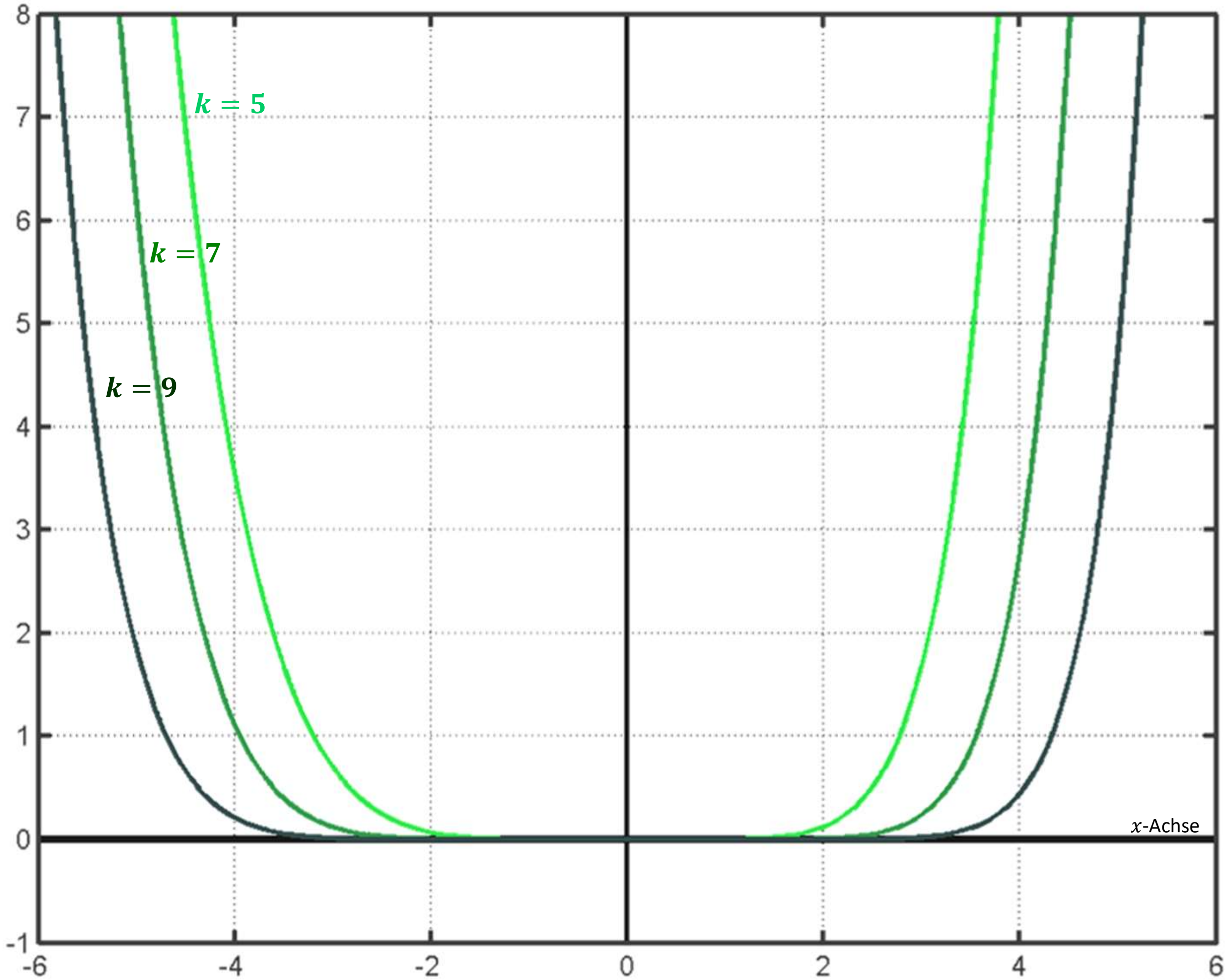
Graphischer Vergleich: Exponetialfunktion vs. polynomiale Näherungen



Graphischer Vergleich: Exponentialfunktion vs. polynomiale Näherungen

Absoluter Fehler $= \mathrm{e}^x - T_k(x)$

$k = \mathbf{9} \quad \mathbf{7} \quad \mathbf{5}$



Beobachtung: Die *Talsohlen* liegen recht symmetrisch zur y-Achse, wobei sie leicht nach links verschoben sind. Läßt sich das erklären?

Außerdem steigen die rechten Äste der Kurven (über der positiven x-Achse) steiler auf als die linken. Mögliche Begründung:
$\mathrm{e}^x - T_k(x) \simeq \mathrm{e}^x$ für $x \to \infty$,
$\mathrm{e}^x - T_k(x) \simeq -T_k(x) \simeq -x^k/k!$ für $x \to -\infty$.
Dabei nimmt die Exponentialfunktion sehr viel schneller „Fahrt auf“ als das Polynom $-T_k(x)$ bzw. der monomiale Term – $x^k/k!$.

Beachte: Bei den Näherungspolynomen von ungeradem Grad ist der Fehler stets positiv, d.h. die Graphen der Polynome liegen stets unterhalb des Graphen der Exponentialfunktion.

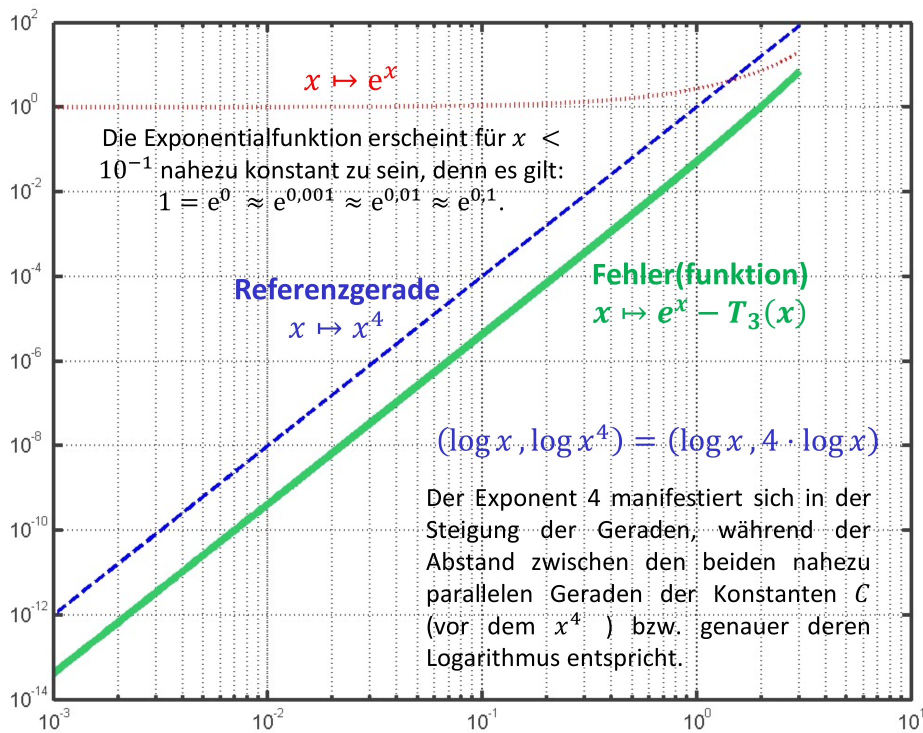
Graphischer Vergleich: Exponentialfunktion vs. polynomiale Näherungen

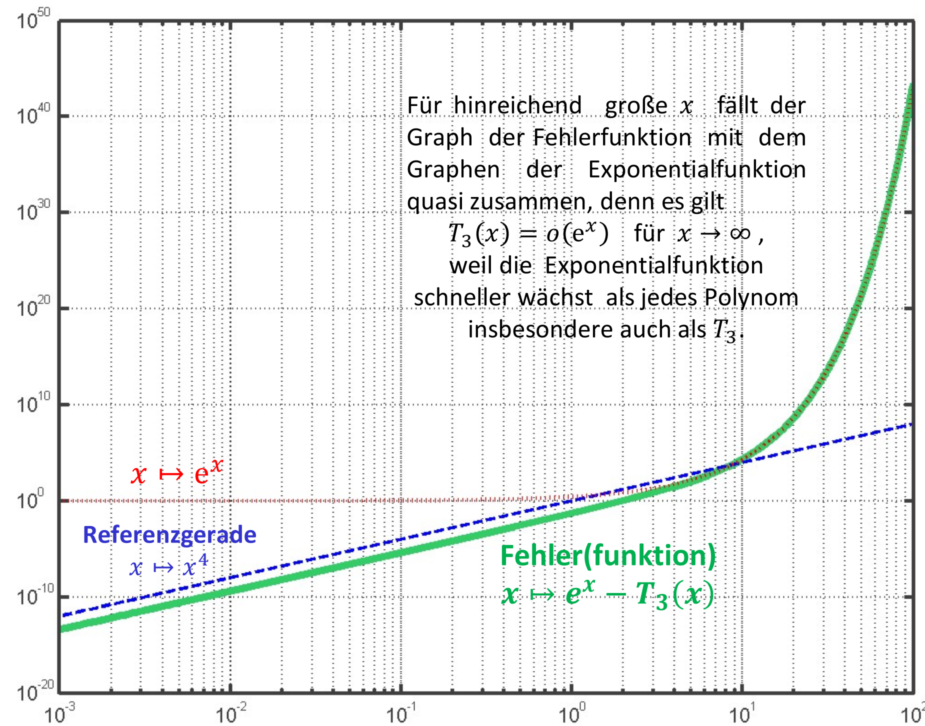
Wie läßt sich numerisch die Aussage bestätigen: $\mathrm{e}^x - T_k(x) = O\left(x^{k+1}\right)$?

Beachte: Im hiesigen Fall ($k = 3$) gilt, daß der Fehler immer positiv ist bzw. kein Vorzeichenwechsel hat Genauer gilt:
$\forall\, x \in \mathbb{R}: \ \mathrm{e}^x - T_3(x) \geq 0$

Betrachte dazu

den absoluten Fehler $= |\mathrm{e}^x - T_3(x)|$ in *doppelt logarithmischer Auftragung*.





Beobachtung: Graph der Fehlerfunktion $x \mapsto |\mathrm{e}^x - T_3(x)|$ verläuft parallel zur Referenzgeraden.
$\Rightarrow$ Computerplot bestätigt eindrucksvoll die Vermutung, daß der Fehler der Näherung T_3 mit derselben Ordnung verschwindet (für $x \to 0$) wie das zu T_3 gehörige Residuum. Also gilt: $\mathrm{e}^x - T_3(x) = O(x^4)$ für $x \to 0$.
D.h.: $\mathrm{e}^x - T_3(x) \approx C \cdot x^4 + \ldots$ (weitere offenbar kaum ins Gewicht fallende Terme für $0{,}001 \leq x \leq 3$).

Entwickeln des natürlichen Logarithmus‘

Charakterisierung des natürlichen Logarithmus $\log$

i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$: $\quad \log(xy) = \log x + \log y$

ii) $\log'(1) = 1$

Erinnerung: Der natürliche Logarithmus wurde (in der Vorlesung) über das Integral der Kehrwertfunktion definiert: $\log x := \int_1^x \mathrm{d}t/t$. Für $x \to 0$ strebt das Integral gegen $-\infty$, so daß sich $\log 0$ mit Hilfe des Integrals nicht definieren läßt. Anhand der Funktionalgleichung kann man zeigen, daß die Logarithmusfunktionen prinzipiell im Nullpunkt keine Fortsetzung erlauben, wenn die Funktionalgleichung ihre Gültigkeit für $x = 0$ nicht verlieren soll.

Beachte: $\log$ ist im Nullpunkt nicht sinnvoll fortsetzbar.

Angenommen $\log(0)$ existiert doch.

$$\stackrel{\text{i)}}{\Longrightarrow} \quad \log 0 = \log(0 \cdot 0) = \log 0 + \log 0 \quad \Rightarrow \quad \log 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall x: \; 0 = \log 0 = \log(0 \cdot x) = \log 0 + \log x = \log x \quad \Rightarrow \quad \forall x: \; \log x = 0$$

$\Rightarrow$ $\quad \log$ entspricht der Nullfunktion. Widerspruch. ↯

Konsequenz: $\log$ kann nicht für $x \to 0$ entwickelt bzw. angenähert werden.

Alternative Vorgehensweisen:

1) entwickele für $x \to a > 0$ (z.B. $a = 1$),
2) modifiziere log-Funktion.

$$\ell: (-1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \ell(x) := \log(1 + x)$$

Dies entspricht einer Verschiebung um 1 nach links. Ersetzt man in dem Näherungspolynom von ℓ zum Entwicklungspunkt 0 die Variable x durch $x - 1$, so ergibt sich das Näherungspolynom von log zum Entwicklungspunkt 1.

Gesucht: Entwicklung von ℓ für $x \to 0$.

Benötigt: Funktionalgleichung für ℓ .

$$\forall x, y \in (-1, \infty): \quad \underbrace{\log\big((1 + x)(1 + y)\big)}_{\log(1 + x + y + xy)} = \log(1 + x) + \log(1 + y)$$

$$\forall x, y \in (-1, \infty): \quad \ell(x + y + xy) = \ell(x) + \ell(y)$$

Sind $|x|, |y| \ll 1$, so daß $|x|, |y| \ll |xy|$ ist, dann ist $|xy|$ gegenüber $|x|$ und $|y|$ vernachlässigbar klein und die Gleichung besagt, daß sich ℓ in diesem Fall annähernd linear verhält.

Entwickeln des natürlichen Logarithmus (Teil 1)

Charakterisierung der Funktion ℓ

i) $\forall x, y \in (-1, \infty)$: $\ell(x + y + xy) = \ell(x) + \ell(y)$

ii) $\ell'(0) = 1$

i) $\xRightarrow{x=y}$ $\ell(2x + x^2) = 2\ell(x)$ $(*)$

Gesucht: $L_k(x) \coloneqq \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_k x^k$ $\begin{cases} L_k(2x + x^2) \overset{m}{=} 2L_k(x) + O(x^{k+1}) & \text{für } x \to 0 \quad (**) \\ L_k'(0) \overset{m}{=} 1 & (***) \end{cases}$

Bestimmung von $\boldsymbol{\lambda_0}$: Sei $L_0(x) \coloneqq \lambda_0$.

$L_0(2x + x^2) \overset{m}{=} 2L_0(x) + O(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_0 \overset{m}{=} 2\lambda_0 + O(x) \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 \overset{m}{=} 2\lambda_0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda_0 \overset{m}{=} 0}$

Ergebnis entspricht Erwartung, denn: $\ell(x) \overset{m}{=} L_0(x) + O(x)$ für $x \to 0$ $\Rightarrow$ $0 = \ell(0) \overset{m}{=} L_0(0) = \lambda_0$.

Bestimmung von $\boldsymbol{\lambda_1}$: Sei $L_1(x) \coloneqq \lambda_1 x$.

$L_1(2x + x^2) \overset{m}{=} 2L_1(x) + O(x^2) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 \cdot (2x + x^2) \overset{m}{=} 2\lambda_1 x + O(x^2) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 x^2 \overset{m}{=} O(x^2)$

$(***) \Rightarrow L_1'(0) \overset{m}{=} 1 \quad \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_1 \overset{m}{=} 1}$

Bestimmung von $\boldsymbol{\lambda_2}$: Sei $L_2(x) \coloneqq x + \lambda_2 x^2$.

$$L_2(2x + x^2) \overset{m}{=} 2L_2(x) + O(x^3)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + x^2 + \lambda_2 \cdot (2x + x^2)^2 \overset{m}{=} 2 \cdot (x + \lambda_2 x^2) + O(x^3)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + x^2 + 4\lambda_2 x^2 + O(x^3) \overset{m}{=} 2x + 2\lambda_2 x^2 + O(x^3)$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + 2\lambda_2)x^2 \overset{m}{=} O(x^3) \quad \Rightarrow \quad 1 + 2\lambda_2 \overset{m}{=} 0 \quad \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_2 \overset{m}{=} -\frac{1}{2}}$$

Entwickeln des natürlichen Logarithmus (Teil 2)

Berechnung von $\boldsymbol{\lambda_3}$: Sei $L_3(x) \coloneqq x - \frac{1}{2}x^2 + \lambda_3 x^3$.

$$L_3(2x + x^2) \stackrel{\mathrm{m}}{=} 2L_3(x) + O(x^4)$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x + x^2) - \frac{1}{2}(2x + x^2)^2 + \lambda_3(2x + x^2)^3 \stackrel{\mathrm{m}}{=} 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \lambda_3 x^3\right) + O(x^4)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + x^2 - 2x^2 - 2x^3 + 8\lambda_2 x^3 + O(x^4) \stackrel{\mathrm{m}}{=} 2x - x^2 + 2\lambda_3 x^3 + O(x^4)$$

$$\Leftrightarrow \quad (-2 + 6\lambda_3)x^3 \stackrel{\mathrm{m}}{=} O(x^4)$$

$$\Rightarrow \quad -2 + 6\lambda_3 \stackrel{\mathrm{m}}{=} 0 \qquad \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_3 \stackrel{\mathrm{m}}{=} \frac{1}{3}}$$

Das Augenmerk muß eigentlich nur auf die kubischen Terme gerichtet sein. Terme niedrigerer Ordnung müssen sich auf beiden Seiten wegheben (wenn die Koeffizienten richtig bestimmt wurden). Terme höherer Ordnung werden von dem $O(x^4)$ -Term absorbiert.

Berechnung von $\boldsymbol{\lambda_4}$: Sei $L_4(x) \coloneqq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \lambda_4\, x^4$.

$$L_4(2x + x^2) \stackrel{\mathrm{m}}{=} 2L_4(x) + O(x^5)$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x + x^2) - \frac{1}{2}(2x + x^2)^2 + \frac{1}{3}(2x + x^2)^3 + \lambda_4(2x + x^2)^4 \stackrel{\mathrm{m}}{=} 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \lambda_4 x^4\right) + O(x^5)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + x^2 - 2x^2 - 2x^3 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{8}{3}x^3 + 4x^4 + 16\lambda x^4 + O(x^5) \stackrel{\mathrm{m}}{=} 2x - x^2 + \tfrac{2}{3}x^3 + 2\lambda_5 x^4 + O(x^5)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - x^2 + \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{7}{2}x^4 + 16\lambda x^4 + O(x^5) \stackrel{\mathrm{m}}{=} 2x - x^2 + \tfrac{2}{3}x^3 + 2\lambda_5 x^4 + O(x^5)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{7}{2} + 14\lambda_4\right)x^4 \stackrel{\mathrm{m}}{=} O(x^5)$$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{7}{2} + 14\lambda_4 \stackrel{\mathrm{m}}{=} 0 \qquad \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_4 \stackrel{\mathrm{m}}{=} -\frac{1}{4}}$$

$$L_4(x) = x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4$$