Kombinatorische
Berechnung von Potenzsummen

Die bereits vorgestellte Idee, die Summe der ersten n Quadratzahlen $S_2(n)$ kombinatorisch als Kardinalität einer gewissen Mengen zu interpretieren, die sich durch eine geschickte Zerlegung abzählen läßt, wird nun aufgegriffen, um eine explizite Berechnungsformel für Potenzsummen $S_p(n)$ mit beliebigen Exponenten $p \in \mathbb{N}$ herzuleiten. Die Erkenntnisse über Potenzsummenformeln, welche uns die Rekursionsgleichung des letzten Abschnitts geliefert hat, finden sich so durch eine alternative Herleitung bestätigt und lassen sich dank der expliziten Summenformel erweitern.
Interessanterweise kommen erneut die Mengenzerlegungskoeffizienten (Stirling-Zahlen zweiter Art) ins Spiel; Grund genug sich auch diesen noch einmal zuzuwenden.

Martin Rheinländer

Kombinatorische Berechnung von Kubiksummen

Gesucht: Möglichst expliziter Ausdruck für $S_3(n) := \sum_{k=1}^{n} k^3 = ?$

Betrachte dazu die Tupelmenge $\mathcal{M}_3(n) := \{(a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4 \colon \; a,b,c < d \leq n+1\}$.

Idee: Zerlege $\mathcal{M}_3(n)$ auf zweifache Weise
- um zu zeigen: $\#\mathcal{M}_3(n) = S_3(n)$.
- um $\mathcal{M}_3(n)$ alternativ abzuzählen.

1. Zerlegung von $\mathcal{M}_3(n)$:

$$\mathcal{M}_3(n) = \biguplus_{k=2}^{n+1} \{(a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4 \colon \; a,b,c < d = k\}$$

Zerlegung erfolgt nach dem Wert der vierten (und größten) Komponente

$$\Rightarrow \quad \#\mathcal{M}_3(n) = \sum_{k=2}^{n+1} \#\{(a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4 \colon \; a,b,c < d = k\} = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = S_3(n) \; \checkmark$$

2. Zerlegung von $\mathcal{M}_3(n)$ nach den *Größenbeziehungen* zwischen a, b und c:

Zu unterscheidende Fälle:

$\boldsymbol{a = b = c} < d$

$\boldsymbol{a < b = c} < d$	$\boldsymbol{a = b < c} < d$
$\boldsymbol{b < c = a} < d$	$\boldsymbol{b = c < a} < d$
$\boldsymbol{c < a = b} < d$	$\boldsymbol{c = a < b} < d$

$\boldsymbol{a < b < c} < d$	$\boldsymbol{a < c < b} < d$
$\boldsymbol{b < c < a} < d$	$\boldsymbol{c < b < a} < d$
$\boldsymbol{c < a < b} < d$	$\boldsymbol{b < a < c} < d$

Analog zur Berechnung von $S_2(n)$ folgt:

$$S_3(n) = 1 \cdot \binom{n+1}{2} + 2 \cdot 3 \cdot \binom{n+1}{3} + 2 \cdot 3 \cdot \binom{n+1}{4}$$

Kombinatorische Berechnung von Summen vierter Potenzen

2. Zerlegung von $\mathcal{M}_4(n) := \left\{(a,b,c,d,e) \in \mathbb{N}^5\colon\ \ a,b,c,d < e \leq n+1\right\}$ nach den *Größenbeziehungen* zwischen a,b,c,d und e:

Beachte: Ein ***Schema*** ist im wesentlichen durch die Abfolge von Kleiner- und Gleichheitszeichen zwischen den Tupelkomponenten definiert. Durch das Schema wird die Anzahl und Größe der „Töpfe“ festgelegt.

- (a,b,c,d) besteht aus **4** unterschiedlichen Zahlen:
  Anordnungsschema $\boldsymbol{a < b < c < d} < e$ ermöglicht $4! = 24$ Vertauschungsmöglichkeiten.
  $\Rightarrow$ Anzahl möglicher Tupel: $\mathbf{24}$

- (a,b,c,d) besteht aus **3** unterschiedlichen Zahlen (d.h. zwei Zahlen sind gleich):

Schema 1	Schema 2	Schema 3
$\boldsymbol{a = b < c < d} < e$	$\boldsymbol{a < b = c < d} < e$	$\boldsymbol{a < b < c = d} < e$

  Die Schemata ermöglichen jeweils $4!/2! = 24/2 = 12$ Vertauschungsmöglichkeiten.
  $\Rightarrow$ Anzahl möglicher Tupel: $3 \cdot 12 = \mathbf{36}$

- (a,b,c,d) besteht aus **2** unterschiedlichen Zahlen (d.h. drei oder jeweils zwei Zahlen sind gleich):

Schema 1	Schema 2	Schema 3
$\boldsymbol{a = b = c < d} < e$	$\boldsymbol{a < b = c = d} < e$	$\boldsymbol{a = b < c = d} < e$

  Schema 1 & 2 ermöglichen jeweils $4!/3! = 24/6 = 4$ Vertauschungsmöglichkeiten.
  Schema 3 ermöglicht $4!/(2! \cdot 2!) = 24/4 = 6$ Vertauschungsmöglichkeiten.
  $\Rightarrow$ Anzahl möglicher Tupel: $4 + 4 + 6 = \mathbf{14}$

- (a,b,c,d) besteht nur aus **1** Zahl.
  Resultierendes Schema $\boldsymbol{a = b = c = d} < e$ ermöglicht eine (also keine zusätzl.) Vertauschungsmöglichkeit.
  $\Rightarrow$ Anzahl möglicher Tupel: $\mathbf{1}$

Analog zur Berechnung von $S_2(n)$ folgt:

$$S_4(n) = \#\mathcal{M}_4(n) = 1 \cdot \binom{n+1}{2} + 14 \cdot \binom{n+1}{3} + 36 \cdot \binom{n+1}{4} + 24 \cdot \binom{n+1}{5}$$

Beobachtung: Zerlegung nach Größenbeziehungen führt zu immer unübersichtlicheren Fallunterscheidungen.

Zwischenüberlegung

Die Berechnung der Koeffizienten vor den Binomialkoeffizienten gestaltet sich bei der bisherigen Vorgehensweise mit wachsendem p zunehmend schwieriger, da die Schemata im Prinzip von Hand durch vollständiges Auflisten abgezählt werden müssen. Die Besetzungsmöglichkeiten zu den Schemata, welche eine gleiche Anzahl von verschiedenen Tupelkomponenten zulassen (d.h. eine gleiche Anzahl von Gleichheitszeichen aufweisen), sind jeweils durch *Polynomialkoeffizienten* zu berechnen und aufzuaddieren.
Es stellt sich die Frage, ob sich diese Vorgehensweise derart vereinfachen läßt, daß die in der Summenformel auftretenden Faktoren, welche vor den Binomialkoeffizienten stehen, direkt berechnet werden können.

Die Faktoren vor den Binomialkoeffizienten beziehen sich auf die Klasseneinteilung der 4-Tupel hinsichtlich der Anzahl paarweise verschiedener Komponenten:

- 4-Tupel, welche vier verschiedene Zahlen enthalten.
- 4-Tupel, welche aus drei verschiedenen Zahlen zusammengesetzt sind.
- 4-Tupel, welche nur zwei verschiedene Komponenten aufweisen.
- konstante 4-Tupel.

Umgekehrte Perspektive: Gegeben $1 \leq \ell \leq 4$ verschiedene Zahlen. Wie viele unterschiedliche 4-Tupel lassen sich daraus zusammensetzen, wenn jede der ℓ gegebenen Zahlen mindestens eine Komponente besetzt?

Es gibt genau so viele unterschiedliche 4-Tupel wie Möglichkeiten bestehen, den 4 Tupelkomponenten die ℓ Zahlen surjektiv zuzuordnen.

Kombinatorische Berechnung von Potenzsummen

$$S_p(n) := \sum_{k=1}^{n} k^p = ?$$

Betrachte dazu folgende Menge:

$$\mathcal{M}_p(n) := \left\{ \left(a_1, \dots, a_p, a_{p+1}\right) \in \mathbb{N}^{p+1}: \quad a_1, \dots, a_p < a_{p+1} \le n+1 \right\}$$

1. Zerlegung von $\mathcal{M}_p(n)$:

$$\mathcal{M}_p(n) = \biguplus_{k=2}^{n+1} \left\{ \left(a_1, \dots, a_p, a_{p+1}\right) \in \mathbb{N}^{p+1}: \quad a_1, \dots, a_p < a_{p+1} = k \right\}$$

Klassifikation der $(p+1)$-Tupel in $\mathcal{M}_p(n)$ nach ihrem Maximalwert d.h. nach dem Wert von a_{p+1}.

Daraus folgt der Zusammenhang zu der zu berechnenden Größe $S_p(n)$, denn: $\#\mathcal{M}_p(n) = S_p(n)$.

$$\#\mathcal{M}_p(n) = \sum_{k=2}^{n+1} \# \left\{ \left(a_1, \dots, a_p, a_{p+1}\right) \in \mathbb{N}^{p+1}: \quad a_1, \dots, a_p < a_{p+1} = k \right\} = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^p = \sum_{k=1}^{n} k^p \checkmark$$

2. Zerlegung von $\mathcal{M}_p(n)$:

$$\mathcal{M}_p(n) = \biguplus_{\ell=1}^{p} \underbrace{\left\{ \left(a_1, \dots, a_{p+1}\right) \in \mathbb{N}^{p+1}: \quad a_1, \dots, a_p < a_{p+1} \le n+1 \quad \wedge \quad \#\{a_1, \dots, a_p\} = \ell \right\}}_{=:\ \mathcal{M}_{p,\ell}(n)}$$

Klassifikation der Tupel in $\mathcal{M}_p(n)$ nach der Anzahl der vorkommenden Zahlen, d.h. nach der Anzahl der verschiedenen Zahlen (Werte), die sich unter den $p+1$ Komponenten befinden.

Mit dieser Zerlegung gelingt eine explizite Berechnung von $\#\mathcal{M}_p(n)$.

Beachte, daß z.B. $\{1,2,1,4,2,2,3,1\} = \{1,2,3,4\}$.

Illustration zu den beiden Zerlegungen …

… am Beispiel der Menge $\mathcal{M}_3(3) := \left\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{N}^{3+1}:\ a_1, a_2, a_3 < a_4 \leq 3 + 1\right\} = \ \ldots$

$$= \left[\begin{array}{ccccc}
(1,1,1,\mathbf{2}) & & & & \\
\hline
(1,1,1,\mathbf{3}) & (1,1,2,\mathbf{3}) & (1,2,2,\mathbf{3}) & & \\
(2,2,2,\mathbf{3}) & (1,2,1,\mathbf{3}) & (2,1,2,\mathbf{3}) & & \\
 & (2,1,1,\mathbf{3}) & (2,2,1,\mathbf{3}) & & \\
\hline
(1,1,1,\mathbf{4}) & (1,1,2,\mathbf{4}) & (1,1,3,\mathbf{4}) & (2,2,3,\mathbf{4}) & (1,2,3,\mathbf{4}) \\
(2,2,2,\mathbf{4}) & (1,2,1,\mathbf{4}) & (1,3,1,\mathbf{4}) & (2,3,2,\mathbf{4}) & (1,3,2,\mathbf{4}) \\
(3,3,3,\mathbf{4}) & (2,1,1,\mathbf{4}) & (3,1,1,\mathbf{4}) & (3,2,2,\mathbf{4}) & (2,1,3,\mathbf{4}) \\
 & (1,2,2,\mathbf{4}) & (1,3,3,\mathbf{4}) & (2,3,3,\mathbf{4}) & (2,3,1,\mathbf{4}) \\
 & (2,1,2,\mathbf{4}) & (3,1,3,\mathbf{4}) & (3,2,3,\mathbf{4}) & (3,1,2,\mathbf{4}) \\
 & (2,2,1,\mathbf{4}) & (3,3,1,\mathbf{4}) & (3,3,2,\mathbf{4}) & (3,2,1,\mathbf{4})
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\mathbf{1^3 = 1} \\
\mathbf{2^3 = 8} \\
\mathbf{3^3 = 27}
\end{array}$$

Zerlegung bzgl. des Werts des Maximalelements

$$\left.\begin{array}{l}
\#\left\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{N}^4:\ a_1 a_2, a_3 < a_4 = \mathbf{2}\right\} = 1^3 = 1 \\
\#\left\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{N}^4:\ a_1 a_2, a_3 < a_4 = \mathbf{3}\right\} = 2^3 = 8 \\
\#\left\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{N}^4:\ a_1 a_2, a_3 < a_4 = \mathbf{4}\right\} = 3^3 = 27
\end{array}\right]$$

Summe 36 ✓

Illustration zu den beiden Zerlegungen …

… am Beispiel der Menge $\mathcal{M}_3(3) := \left\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{N}^{3+1}:\ \ a_1, a_2, a_3 < a_4 \leq 3 + 1\right\} =$ …

$$
= \left\{
\begin{array}{lllll}
(1,1,1,\mathbf{2}) & & & & \\
\hline
(1,1,1,\mathbf{3}) & (1,1,2,\mathbf{3}) & (1,2,2,\mathbf{3}) & & \\
(2,2,2,\mathbf{3}) & (1,2,1,\mathbf{3}) & (2,1,2,\mathbf{3}) & & \\
 & (2,1,1,\mathbf{3}) & (2,2,1,\mathbf{3}) & & \\
\hline
(1,1,1,\mathbf{4}) & (1,1,2,\mathbf{4}) & (1,1,3,\mathbf{4}) & (2,2,3,\mathbf{4}) & (1,2,3,\mathbf{4}) \\
(2,2,2,\mathbf{4}) & (1,2,1,\mathbf{4}) & (1,3,1,\mathbf{4}) & (2,3,2,\mathbf{4}) & (1,3,2,\mathbf{4}) \\
(3,3,3,\mathbf{4}) & (2,1,1,\mathbf{4}) & (3,1,1,\mathbf{4}) & (3,2,2,\mathbf{4}) & (2,1,3,\mathbf{4}) \\
 & (1,2,2,\mathbf{4}) & (1,3,3,\mathbf{4}) & (2,3,3,\mathbf{4}) & (2,3,1,\mathbf{4}) \\
 & (2,1,2,\mathbf{4}) & (3,1,3,\mathbf{4}) & (3,2,3,\mathbf{4}) & (3,1,2,\mathbf{4}) \\
 & (2,2,1,\mathbf{4}) & (3,3,1,\mathbf{4}) & (3,3,2,\mathbf{4}) & (3,2,1,\mathbf{4})
\end{array}
\right\}
$$

Zerlegung nach $\#\{a_1, a_2, a_3\}$

$\mathcal{M}_3(3,1) := \left\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{N}^4:\ \ a_1 a_2, a_3 < a_4 \leq 4,\ \ \#\{\boldsymbol{a_1 a_2, a_3}\} = \mathbf{1}\right\}$ → Anzahl: **6**

$\mathcal{M}_3(3,2) := \left\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{N}^4:\ \ a_1 a_2, a_3 < a_4 \leq 4,\ \ \#\{\boldsymbol{a_1 a_2, a_3}\} = \mathbf{2}\right\}$ → Anzahl: **24**

$\mathcal{M}_3(3,3) := \left\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{N}^4:\ \ a_1 a_2, a_3 < a_4 \leq 4,\ \ \#\{\boldsymbol{a_1 a_2, a_3}\} = \mathbf{3}\right\}$ → Anzahl: **6**

Summe 36 ✓

Kombinatorische Berechnung von Potenzsummen (Forts.)

$$\mathcal{M}_{p,\ell}(n) := \left\{ \left(a_1, \dots, a_p, a_{p+1}\right) \in \mathbb{N}^{p+1} \mid \quad a_1, \dots, a_p < a_{p+1} \le n+1 \quad \wedge \quad \#\{a_1, \dots, a_p\} = \ell \right\}$$

$$= \biguplus_{1 \le n_1 < \dots < n_\ell < n_{\ell+1} \le n+1} \underbrace{\left\{ \left(a_1, \dots, a_p, a_{p+1}\right) \in \mathbb{N}^{p+1} \mid \quad \underline{\{a_1, \dots, a_p\} = \{n_1, \dots, n_\ell\}} \quad \wedge \quad a_{p+1} = n_{\ell+1} \right\}}_{=: \mathcal{M}_{p,\ell}(n_1, \dots, n_\ell, n_{\ell+1}; n)}$$

Achtung, hier handelt es sich um die Gleichheit zweier Mengen und **nicht** um die Gleichheit zweier Tupel, daher können die Indizes p und ℓ unterschiedlich sein.

Zur Menge der Tupelkomponenten $\{a_1, \dots, a_p, a_{p+1}\}$:

$$\exists \ell \in \mathbb{N}: \ 1 \le \ell \le p, \ \exists n_1, \dots, n_\ell, n_{\ell+1} \in \mathbb{N}: \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \le n_1 < \dots < n_\ell < n_{\ell+1} \le n+1 \\ \{n_1, \dots, n_\ell\} = \{a_1, \dots, a_p\} \\ n_{\ell+1} = a_{p+1} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{M}_{p,\ell}(n_1, \dots, n_\ell, n_{\ell+1}; n) = \quad \dots$$

$$= \left\{ \left(a_1, \dots, a_p, n_{\ell+1}\right) \in \mathbb{N}^{p+1} \mid \quad \exists f: \{1, \dots, p\} \xrightarrow{\text{surj.}} \{n_1, \dots, n_\ell\}: \quad \left(a_1, \dots, a_p\right) = \left(f(1), \dots, f(p)\right) \right\}$$

$\#\mathcal{M}_{p,\ell}(n_1, \dots, n_\ell, n_{\ell+1}; n) =$ Anzahl der **surjektiven** Abbildungen von einer p-Menge in eine ℓ-Menge

$$= \#\left\{ f: \{1, \dots, p\} \longrightarrow \{n_1, \dots, n_\ell\}: \ f \ \text{surjektiv} \right\} = S(p, \ell) \cdot \ell!$$

Erinnerung:

Ein p-Tupel über einer Menge $\{n_1, \dots, n_\ell\}$ ist (abstrakt gesehen nichts anderes als) eine Abbildung von $\{1, \dots, p\}$ nach $\{n_1, \dots, n_\ell\}$.

Es gilt: $\#\{ (a_1, \dots, a_p) \mid \ a_1, \dots, a_p \in \{n_1, \dots, n_\ell\}\} \ \equiv \ \#\{f: \{1, \dots, p\} \to \{n_1, \dots, n_\ell\}\} = \ell^p$

Ein „surjektives" Tupel ist ein Tupel, welches jedes der ℓ Elemente der Menge $\{n_1, \dots, n_\ell\}$ mindestens einmal enthält.

$$\#\{ (a_1, \dots, a_p) \mid \ \{a_1, \dots, a_p\} = \{n_1, \dots, n_\ell\}\} \ \equiv \ \#\{f: \{1, \dots, p\} \to \{n_1, \dots, n_\ell\} \mid \ f(\{1, \dots, p\}) = \{n_1, \dots, n_\ell\}\}$$

$$\equiv \ \#\{f: \{1, \dots, p\} \to \{n_1, \dots, n_\ell\} \mid \ f \ \text{surjektiv}\} \ = S(p, \ell) \cdot \ell!$$

Kombinatorische Berechnung von Potenzsummen (Forts.)

Somit folgt nun:

$$\begin{aligned}
S_p(n) &= \#\mathcal{M}_p(n) \\
&= \sum_{\ell=1}^{p} \#\mathcal{M}_{p,\ell}(n) \\
&= \sum_{\ell=1}^{p} \left(\sum_{1 \le n_1 < \ldots < n_\ell < n_{\ell+1} \le n+1} \#\mathcal{M}_{p,\ell}(n_1, \ldots, n_\ell, n_{\ell+1}; n) \right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{p} \left(\sum_{1 \le n_1 < \ldots < n_\ell < n_{\ell+1} \le n+1} S(p,\ell) \cdot \ell! \right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{p} S(p,\ell) \cdot \ell! \cdot \left(\sum_{1 \le n_1 < \ldots < n_\ell < n_{\ell+1} \le n+1} 1 \right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{p} S(p,\ell) \cdot \ell! \cdot \binom{n+1}{\ell+1} \qquad \equiv \sum_{\ell=2}^{p+1} S(p,\ell-1) \cdot (\ell-1)! \cdot \binom{n+1}{\ell}
\end{aligned}$$

Stirling-Zahlen 2. Art (Mengenzerlegungskoeffizienten)

$S(n,k) =$ #Möglichkeiten, eine n-Menge in k (disjunkte, nichtleere) Teilmengen zu partitionieren.

Rekursionsgleichung: $S(n,k) = S(n-1,k-1) \; + \; k \cdot S(n-1,k)$

Aus der kombinatorischen Definition (bzw. aus der Anschauung) folgt:

$\forall n \in \mathbb{N}$: $S(n,1) = S(n,n) = 1$

$\forall n,m \in \mathbb{N}$: $S(n,n+m) = 0$

Beachte Parallelen und Unterschiede zu den Binomialkoeffizienten:
$b(n,1) = n$ aber $b(n,n) = 1$.

Stirling-Zahlen 2. Art mit Index 0:

$\forall n \in \mathbb{N}$: $S(0,n) := 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $S(n,0) := 0$

$b(n,0) = 1$ insbesondere $b(0,0) = 1$.

$S(n-1,k-1) \; = \; S(n,k) \; - k \cdot S(n-1,k)$

Aber $S(0,0) := 1$

Denn: $S(0,0) = S(1,1,) - 1 \cdot S(0,1) \; = 1 - 1 \cdot 0 = 1$

Matrix der Stirling-Zahlen 2. Art

$S(0,0)$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	…
$S(1,0)$	$S(1,1)$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	…
$S(2,0)$	$S(2,1)$	$S(2,2)$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	…
$S(3,0)$	$S(3,1)$	$S(3,2)$	$S(3,3)$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	…
$S(4,0)$	$S(4,1)$	$S(4,2)$	$S(4,3)$	$S(4,4)$	$\cdot$	$\cdot$	…
$S(5,0)$	$S(5,1)$	$S(5,2)$	$S(5,3)$	$S(5,4)$	$S(5,5)$	$\cdot$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

	0	1	2	3	4	5	6	…
0	1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	…
1	0	1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	…
2	0	1	1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	…
3	0	1	3	1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	…
4	0	1	7	6	1	$\cdot$	$\cdot$	…
5	0	1	15	25	10	1	$\cdot$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Einzelpunkte stehen jeweils für eine Null.

Die Notwendigkeit der Definition der Stirling-Zahlen mit dem Index 0 erklärt sich auch aus ihrer algebraischen Bedeutung.

$S(n,k)$ findet sich in der n'ten Zeile und k'ten Spalte, wobei jeweils ab Null gezählt wird..

Die „neue" Formel zur Potenzsummenberechnung auf der Probe

Erinnerung: $$S_p(n) = \sum_{\ell=1}^{p} \binom{n+1}{\ell+1} \cdot S(p,\ell) \cdot \ell!$$

$$S_1(n) = \binom{n+1}{2} \cdot S(1,1) \cdot 1! = \frac{1}{2}(n+1)n \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n^2+n}) \checkmark$$

$$S_2(n) = \binom{n+1}{2} \cdot S(2,1) \cdot 1! + \binom{n+1}{3} \cdot S(2,2) \cdot 2!$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)n \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{6}(n+1)n(n-1) \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{2}(n^2+n) + \frac{1}{3}(n^3-n)$$

$$= \frac{1}{6}(3n^2+3n) + \frac{1}{6}(2n^3-2n) = \frac{1}{6}(\boldsymbol{2n^3+3n^2+n}) \checkmark$$

$$S_3(n) = \binom{n+1}{2} \cdot S(3,1) \cdot 1! + \binom{n+1}{3} \cdot S(3,2) \cdot 2! + \binom{n+1}{4} \cdot S(3,3) \cdot 3!$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)n \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{6}(n+1)n(n-1) \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{24}(n+1)n(n-1)(n-2) \cdot 1 \cdot 6$$

$$= \frac{1}{2}(n^2+n) + (n^3-n) + \frac{1}{4}(n^3-n)(n-2)$$

$$= \frac{1}{4}(2n^2+2n) + \frac{1}{4}(4n^3-4n) + \frac{1}{4}(n^4-n^2-2n^3+2n) = \frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2) = \frac{1}{4}\boldsymbol{n^2(n+1)^2} \checkmark$$

Zusammenfassung/ Zusammenstellung:

$$\boldsymbol{S_1(n) = \binom{n+1}{2}} \qquad \boldsymbol{S_2(n) = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3}}$$

$$\boldsymbol{S_3(n) = \binom{n+1}{2} + 6 \cdot \binom{n+1}{3} + 6 \cdot \binom{n+1}{4}}$$

Folgerungen

Satz: $\forall p, n \in \mathbb{N}$: $S_p(n) \equiv \sum_{k=1}^{n} k^p = \varsigma_p(n)$ mit $\varsigma_p(x) := \sum_{\ell=1}^{p} \binom{x+1}{\ell+1} \cdot S(p,\ell) \cdot \ell!$.

Die Summe kann ebenso gut mit $k = 0$ beginnen.

Damit findet sich bestätigt: Die Summe der p'ten Potenzen zu den ersten n natürlichen Zahlen ist durch ein Polynom in n vom Grade $p+1$ gegeben.

Für das Interpolationspolynom ς_p der p'ten Potenzsummen gilt:

- $\deg \varsigma_p = p+1$
- $\varsigma_p(x) = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + \frac{1}{2} x^p + O(x^{p-1})$
- 0 ist eine Nullstslle: $\varsigma_p(0) = 0$
- -1 ist eine Nullstelle: $\varsigma_p(-1) = 0$

Darüberhinaus gilt (hier ohne Beweis): 0 und -1 sind doppelte Nullstellen für ungerades $p \geq 3$; $-1/2$ ist einfache Nullstelle für gerades p. Ferner gilt $\varsigma_p(1-n) = (-1)^{p+1} \cdot \varsigma_p(n)$.

Das Interpolationspolynom in ausmultiplizierter Form:

$$\varsigma_p(x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} \cdot B_k \cdot x^{p+1-k}$$

Diese Gleichung wird ggf. zu einem späteren Zeitpunkt bewiesen.

Die ersten acht **Bernoulli-Zahlen**.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
B_k	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	…

Zusammenhang zu Interpolationsmethoden

beziehungsweise zur

Darstellungsmöglichkeit von Polynomen

Potenzsummenformeln sind Polynome. Doch Polynome lassen sich in recht unterschiedlicher Weise darstellen, was rein äußerlich zu unterschiedlichen Potenzsummenformeln führt. Um dies besser einordnen zu können, soll hier darauf eingegangen werden, nicht zuletzt deswegen weil die Darstellung von Polynomen bzw. das Aufstellen/Bestimmen von Polynomen mit vorgegebenen Eigenschaften von ganz generellem Interesse ist z.B. bei der polynomialen Interpolation. Tatsächlich läßt sich die Bestimmung von Potenzsummenformeln als ein polynomiales Interpolationsproblem begreifen.

Was ist ein eine Interpolationsaufgabe?

interpolare (lat.) = *auffrischen, ausbessern* aber auch *verfälschen, abändern*

*Polynom*interpolation **am Beispiel eines Polynoms 4. Grades**

Gesucht: Polynom $q \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{R}}(4)$

$\mathrm{Pol}_{\mathbb{R}}(4)$ = Menge der Polynome über $\mathbb{R}$ (d.h. mit reellwertigen Koeffizienten) vom Grad kleiner gleich 4.

mit $q(\zeta_1) = \eta_1, \quad q(\zeta_2) = \eta_2, \quad q(\zeta_3) = \eta_3, \quad q(\zeta_4) = \eta_4, \quad q(\zeta_5) = \eta_5.$

$$q \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{R}}(4) \quad \Leftrightarrow \quad \exists a_0, a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{R}: \quad q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

Anders ausgedrückt: Gesucht sind $a_0, a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
q(\zeta_1) &= a_0 + a_1\zeta_1 + a_2\zeta_1^2 + a_3\zeta_1^3 + a_4\zeta_1^4 = \eta_1 \\
q(\zeta_2) &= a_0 + a_1\zeta_2 + a_2\zeta_2^2 + a_3\zeta_2^3 + a_4\zeta_2^4 = \eta_2 \\
q(\zeta_3) &= a_0 + a_1\zeta_3 + a_2\zeta_3^2 + a_3\zeta_3^3 + a_4\zeta_3^4 = \eta_3 \\
q(\zeta_4) &= a_0 + a_1\zeta_4 + a_2\zeta_4^2 + a_3\zeta_4^3 + a_4\zeta_4^4 = \eta_4 \\
q(\zeta_5) &= a_0 + a_1\zeta_5 + a_2\zeta_5^2 + a_3\zeta_5^3 + a_4\zeta_5^4 = \eta_5
\end{aligned}$$

Generell gilt aufgrund des Identitätssatzes für Polynome über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, welcher aus dem Fundamentalsatz der Algebra resultiert: Ein Polynom vom Grad n ist durch die Werte an $n+1$ Stellen (auch **Stützstellen** genannt) eindeutig festgelegt. Daher besitzt das obige Interpolationsproblem eine eindeutige Lösung unter den Polynomen vom Grad kleiner gleich 4. Beachte, daß die Stützstellen verschieden sein müssen (ansonsten ergibt sich bei unterschiedlichen Werten an der gleichen Stelle ein Widerspruch zur Eindeutigkeit des Funktionswertes).

⇒ Die unbekannten Koeffizienten ergeben sich als Lösung eines 5x5 LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & \zeta_1 & \zeta_1^2 & \zeta_1^3 & \zeta_1^4 \\ 1 & \zeta_2 & \zeta_2^2 & \zeta_2^3 & \zeta_2^4 \\ 1 & \zeta_3 & \zeta_3^2 & \zeta_3^3 & \zeta_3^4 \\ 1 & \zeta_4 & \zeta_4^2 & \zeta_4^3 & \zeta_4^4 \\ 1 & \zeta_5 & \zeta_5^2 & \zeta_5^3 & \zeta_5^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ \eta_5 \end{pmatrix}$$

Die resultierende Systemmatrix stellt eine *Vandermonde-Matrix* dar. Diese ist genau dann invertierbar (siehe IMI 1), wenn die Stützstellen $\zeta_1, \dots, \zeta_5$ Paarweise verschieden sind, d.h. $\zeta_i \neq \zeta_j$ für $i \neq j$. Aufgrund der Invertierbarkeit der Systemmatrix besitzt das LGS eine eindeutige Lösung.

Lagrangesche Interpolation **am Beispiel eines Polynoms 4. Grades**

Kann man das Lösen eines Gleichungssystems vermeiden? JA! Aber …

Def.: *Lagrange*sche Interpolationspolynome zu den **Stützstellen** $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5$:

$$L_1(x) := \frac{(x-\zeta_2)(x-\zeta_3)(x-\zeta_4)(x-\zeta_5)}{(\zeta_1-\zeta_2)(\zeta_1-\zeta_3)(\zeta_1-\zeta_4)(\zeta_1-\zeta_5)}$$

$$L_2(x) := \frac{(x-\zeta_1)(x-\zeta_3)(x-\zeta_4)(x-\zeta_5)}{(\zeta_2-\zeta_1)(\zeta_2-\zeta_3)(\zeta_2-\zeta_4)(\zeta_2-\zeta_5)}$$

$$L_3(x) := \frac{(x-\zeta_1)(x-\zeta_2)(x-\zeta_4)(x-\zeta_5)}{(\zeta_3-\zeta_1)(\zeta_3-\zeta_2)(\zeta_3-\zeta_4)(\zeta_3-\zeta_5)}$$

$$L_4(x) := \frac{(x-\zeta_1)(x-\zeta_2)(x-\zeta_3)(x-\zeta_5)}{(\zeta_4-\zeta_1)(\zeta_4-\zeta_2)(\zeta_4-\zeta_3)(\zeta_4-\zeta_5)}$$

$$L_5(x) := \frac{(x-\zeta_1)(x-\zeta_2)(x-\zeta_3)(x-\zeta_4)}{(\zeta_5-\zeta_1)(\zeta_5-\zeta_2)(\zeta_5-\zeta_3)(\zeta_5-\zeta_4)}$$

$$L_i(x) := \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{5} \frac{x-\zeta_j}{\zeta_i-\zeta_j}$$

$$\Rightarrow \quad L_i(\zeta_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$$

$$q_{\mathrm{L}}(x) := \eta_1 L_1(x) + \eta_2 L_2(x) + \eta_3 L_3(x) + \eta_4 L_4(x) + \eta_5 L_5(x)$$

Es gilt für $i \in \{1,2,3,4,5\}$: $q_{\mathrm{L}}(\zeta_i) := \eta_i$.

Aufgrund des Identitätssatzes für Polynome folgt dann: $\forall x \in \mathbb{R}$: $q(x) = q_{\mathrm{L}}(x)$.

*Newton*sche Interpolation am Beispiel eines Polynoms 4. Grades

*Newton*scher Ansatz für Interpolationspolynom:

$$
\begin{aligned}
q_{\mathrm{N}}(x) \;=\; \nu_0 \;&+\; \nu_1 \cdot (x-\zeta_1)\;\ldots\\
&+\; \nu_2 \cdot (x-\zeta_1)\cdot(x-\zeta_2)\;\ldots\\
&+\; \nu_3 \cdot (x-\zeta_1)\cdot(x-\zeta_2)\cdot(x-\zeta_3)\;\ldots\\
&+\; \nu_4 \cdot (x-\zeta_1)\cdot(x-\zeta_2)\cdot(x-\zeta_3)\cdot(x-\zeta_4)
\end{aligned}
$$

Einsetzen der Stützstellen $\rightarrow$ Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten $\nu_0, \nu_1, \nu_2,\ \nu_3, \nu_4$:

$$
\begin{aligned}
q_{\mathrm{N}}(\zeta_1) &= \nu_0 \;\ldots\ldots\ldots = \eta_1\\
q_{\mathrm{N}}(\zeta_2) &= \nu_0 + \nu_1(\zeta_2-\zeta_1) \;\ldots\ldots\ldots = \eta_2\\
q_{\mathrm{N}}(\zeta_3) &= \nu_0 + \nu_1(\zeta_3-\zeta_1) + \nu_2(\zeta_3-\zeta_1)(\zeta_3-\zeta_2) \;\ldots\ldots\ldots = \eta_3\\
q_{\mathrm{N}}(\zeta_4) &= \nu_0 + \nu_1(\zeta_4-\zeta_1) + \nu_2(\zeta_4-\zeta_1)(\zeta_4-\zeta_2) + \nu_3(\zeta_4-\zeta_1)(\zeta_4-\zeta_2)(\zeta_4-\zeta_3) \;\ldots\ldots = \eta_4\\
q_{\mathrm{N}}(\zeta_5) &= \nu_0 + \nu_1(\zeta_5-\zeta_1) + \nu_2(\zeta_5-\zeta_1)(\zeta_5-\zeta_2) + \nu_3(\zeta_5-\zeta_1)(\zeta_5-\zeta_2)(\zeta_5-\zeta_3)\;\ldots\\
&\quad + \nu_4(\zeta_5-\zeta_1)(\zeta_5-\zeta_2)(\zeta_5-\zeta_3)(\zeta_5-\zeta_4) \;\ldots = \eta_5
\end{aligned}
$$

Die unbekannten Koeffizienten $\nu_0, \nu_1, \nu_2,\ \nu_3, \nu_4$ ergeben sich als Lösungen eines LGS, dessen Systemmatrix *Dreiecksgestalt* aufweist:

$$
\begin{pmatrix}
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
1 & \zeta_2-\zeta_1 & \cdot & \cdot & \cdot\\
1 & \zeta_3-\zeta_1 & (\zeta_3-\zeta_1)(\zeta_3-\zeta_2) & \cdot & \cdot\\
1 & \zeta_4-\zeta_1 & (\zeta_4-\zeta_1)(\zeta_4-\zeta_2) & (\zeta_4-\zeta_1)(\zeta_4-\zeta_2)(\zeta_4-\zeta_3) & \cdot\\
1 & \zeta_5-\zeta_1 & (\zeta_5-\zeta_1)(\zeta_5-\zeta_2) & (\zeta_5-\zeta_1)(\zeta_5-\zeta_2)(\zeta_5-\zeta_3) & (\zeta_5-\zeta_1)(\zeta_5-\zeta_2)(\zeta_5-\zeta_3)(\zeta_5-\zeta_4)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\nu_0\\ \nu_1\\ \nu_2\\ \nu_3\\ \nu_4\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\\ \eta_4\\ \eta_5\end{pmatrix}
$$

Wiederum aufgrund des Identitätssatzes für Polynome: $\forall x \in \mathbb{R}:\quad q(x) = q_{\mathrm{N}}(x).$

Für paarweise verschiedene Stützstellen hat die Koeffizientenmatrix vollen Rang und ist daher invertierbar.

Vergleich der Interpolationsmethoden bzw. der Darstellungsweisen von Polynomen

Darstellung als Linearkombination von Monomen
Invertieren der Vandemonde-Matrix ist aufwendig, Darstellung ist am übersichlichsten und kann effizient ausgewertet werden.

$$q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = \quad a_0 + (a_1 + (a_2 + (a_3 + a_4 \cdot x) \cdot x) \cdot x\,) \cdot x$$

Auswertung mit vier Multiplikationen

***Lagrange*sche Darstellung (bzw. Vorgehensweise):**
(++) Das Interpolationspolynom kann sofort angegeben werden.
(--) Die Darstellung des Interpolationspolynoms ist unübersichtlich und ineffizient für Auswertungen.

***Newton*sche Darstellung (bzw. Vorgehensweise):**
(+) Aufgrund der Dreiecksgestalt der Koeffizientenmatrix lassen sich die Koeffizienten leicht sukzessiv berechnen.
(+) Weitere Stützstellen können hinzugefügt werden, ohne daß das Interpolationspolynom komplett neu berechnet werden muß.
(+ --) Auswertung kann ebenfalls effizient vorgenommen werden, wenngleich die Darstellung nicht so übersichtlich ist.

$$q_{\mathrm{N}}(x) = \nu_0 + \Big(\nu_1 + \Big(\nu_2 + \big(\nu_3 + \nu_4 \cdot (x - \zeta_4)\big) \cdot (x - \zeta_3)\Big) \cdot (x - \zeta_2)\,\Big) \cdot (x - \zeta_1)$$

Auswertung mit vier Multiplikationen

Anwendung der Newtoninterpolation

$$S_3(n) = \sum_{k=0}^{n} k^3$$

$$\begin{aligned}
S_3(-1) &= 0 \\
S_3(0) &= 0 \\
S_3(1) &= 1 \\
S_3(2) &= 1 + 8 = 9 \\
S_3(3) &= 1 + 8 + 27 = 36 \\
S_3(4) &= 1 + 8 + 27 + 64 = 100 \\
S_3(5) &= 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225
\end{aligned}$$

Ansatz: $S_3(x) \;=\; \mu_1 \binom{x+1}{2} + \mu_2 \binom{x+1}{3} + \mu_3 \binom{x+1}{4}$

$$= \mu_1 \frac{(x+1)x}{2} + \mu_2 \frac{(x+1)x(x-1)}{6} + \mu_3 \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{24}$$

Einsetzen:

$x = 1$: $\quad S_3(1) = \mu_1 \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mu_1 = 1}$

$x = 2$: $\quad S_3(2) = 1 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} + \mu_2 \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6} = 9 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mu_2 = 6}$

$x = 3$: $\quad S_3(3) = 1 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + 6 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{6} + \mu_3 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{24} = 36 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\mu_3} = 36 - 6 - 24 = \boldsymbol{6}$

$$S_3(x) \;=\; \binom{x+1}{2} + 6 \cdot \binom{x+1}{3} + 6 \cdot \binom{x+1}{4}$$