Einige analytische Vorüberlegungen
zur
Exponentialfunktion und den Logarithmen

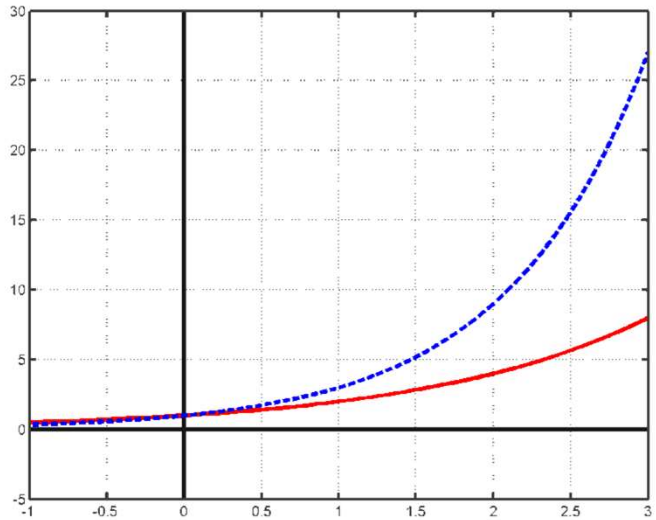
Erinnerung an die Exponentenfunktionen

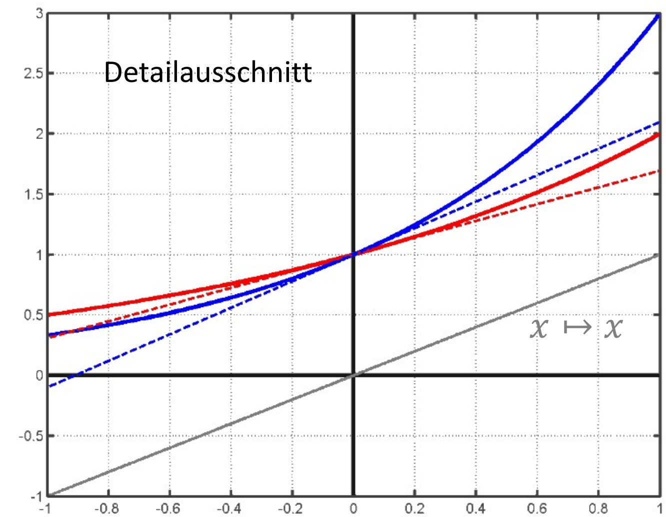
Exponentenfunktion zur Basis $a > 0 \quad (a \neq 1)$

$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_a(x) = a^x$

$x \mapsto 2^x$

$x \mapsto 3^x$





Gestrichelt sind die Tangenten an die jeweiligen Exponentialfunktionen im Nullpunkt eingezeichnet. Beachtenswert ist, daß die rote Tangente langsamer und die blaue Tangente leicht schneller ansteigt als die Identität (graue Linie) mit der Steigung 1. Für welche Basis hat die Tangente im Nullpunkt genau die Steigung 1?

Wesentliche Eigenschaften der Exponentenfunktionen:

1) $\forall a > 0: \quad f_a(0) = 1$ wegen $a^0 = 1$.

2) $\forall a > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}: \quad f_a(x+y) = f_a(x) \cdot f_a(y)$ folgt aus den Potenzgesetzen: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

3) $\forall a > 0: \quad f_a(1) = a$ wegen $a^1 = a$.

Bem.: Die augenscheinliche Eigenschaft 1) ist eine Konsequenz aus 2). Die Gleichung von Eigenschaft 2) wird als *Funktionalgleichung* der Exponentenfunktionen bezeichnet. Es wird später gezeigt, daß die einzigen „vernünftigen“ Funktionen, welche dieser Gleichung genügen, die Exponentenfunktionen sind. Mit Eigenschaft 3) läßt sich eine spezielle Exponentenfunktion gegenüber der Gesamtheit aller Exponentenfunktionen festlegen. Mit anderen Worten: Eine Exponentenfunktion ist durch ihren Wert an der Stelle 1 eindeutig charakterisiert (man beachte den Unterschied zur Stelle 0); dieser Wert entspricht gerade ihrer Basis.

Die Exponentialfunktion = eine besondere Exponentenfunktion

Beh.: Diejenige Exponentenfunktion, welche bei Null die *Steigung* 1 hat, reproduziert sich beim Ableiten.

$$f_a'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f_a(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x\cdot a^h - a^x\cdot 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(a^x\cdot\frac{a^h-1}{h}\right) = a^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = a^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^{0+h}-a^0}{h}$$

$$= f_a(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f_a(0+h)-f_a(0)}{h} = \boldsymbol{f_a'(0)\cdot f_a(x)}$$

Heuristische **Vorgehensweise,** dient der Findung mathematischer Resultate, ohne sich streng rechtfertigen zu lassen.

Frage: Für welchen Wert der Basis a ergibt sich $f_a'(0) = 1$?

$$f_a'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = 1 \qquad \Rightarrow \quad \frac{a^h-1}{h}\approx 1$$

für „hinreichend" kleine $h > 0$.

Setze $h = 1/n$. Dann gilt für hinreichend große $n\in\mathbb{N}$: $\dfrac{a^{1/n}-1}{1/n}\approx 1$ Löse nun nach a auf:

$$\frac{a^{1/n}-1}{1/n}\approx 1 \quad\Leftrightarrow\quad a^{1/n}-1\approx 1/n \quad\Leftrightarrow\quad a^{1/n}\approx 1+1/n \quad\Leftrightarrow\quad a\approx\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n$$

Vermutung: Unter der Annahme, daß der Grenzwert $\mathrm{e} \coloneqq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existiert, sollte dieser der gesuchten Basis entsprechen. Das ist tatsächlich der Fall.

Def.: Die Exponentenfunktion zur *Euler*schen Zahl e wird auch *Exponentialfunktion* genannt.

Erinnerung an den Logarithmus

Einige Beispiele:

$2^3 = 8$	$\Rightarrow$	3 ist der *Logarithmus* von 8 zur Basis 2: $3 = \log_2 8$.
$\sqrt[3]{8} = 8^{1/3} = 2$	$\Rightarrow$	$\frac{1}{3}$ ist der *Logarithmus* von 2 zur Basis 8: $\frac{1}{3} = \log_8 2$.
$3^2 = 9$	$\Rightarrow$	2 ist der *Logarithmus* von 9 zur Basis 3: $2 = \log_3 9$.
$\sqrt[2]{9} = 9^{1/2} = 3$	$\Rightarrow$	$\frac{1}{2}$ ist der *Logarithmus* von 3 zur Basis 9: $\frac{1}{2} = \log_9 3$.
$\sqrt{4} = 4^{1/2} = 2$	$\Rightarrow$	$\frac{1}{2}$ ist der *Logarithmus* von 2 zur Basis 4: $\frac{1}{2} = \log_4 2$.

$\log_4 8 \;=\; \textbf{?} \qquad 8 = 4 \cdot 2 = 4^1 \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 4^{1+\frac{1}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad \log_4 8 = \frac{3}{2}$

Allgemein definiert man für $a > 0, a \neq 1$: $\quad a^x = y \;:\Rightarrow\; \log_a y := x$

Der *Logarithmus* von y zur Basis $a > 0$ mit $a \neq 1$ ist diejenige Zahl, mit der man a potenzieren (exponenzieren) muß, um y zu erhalten.

x heiß *Logarithmus* zum *Numerus* y. Der Logarithmus ist also diejenige Zahl, die sich aus einer gegebenen Zahl (lat. *numerus*, griech. *arithmos*) durch eine Überlegung bzw. (Be-)Rechnung (griech. *logos*) ergibt.
logos & *arithmos* → Logarithmus.

Generell gilt: $\quad a^{\log_a x} = x \quad \wedge \quad \log_a a^x = x$

Logarithmusfunktionen: $\quad \log_a\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a x$
heißt die Logarithmusfunktion (kurz: der Logarithmus) zur Basis a.

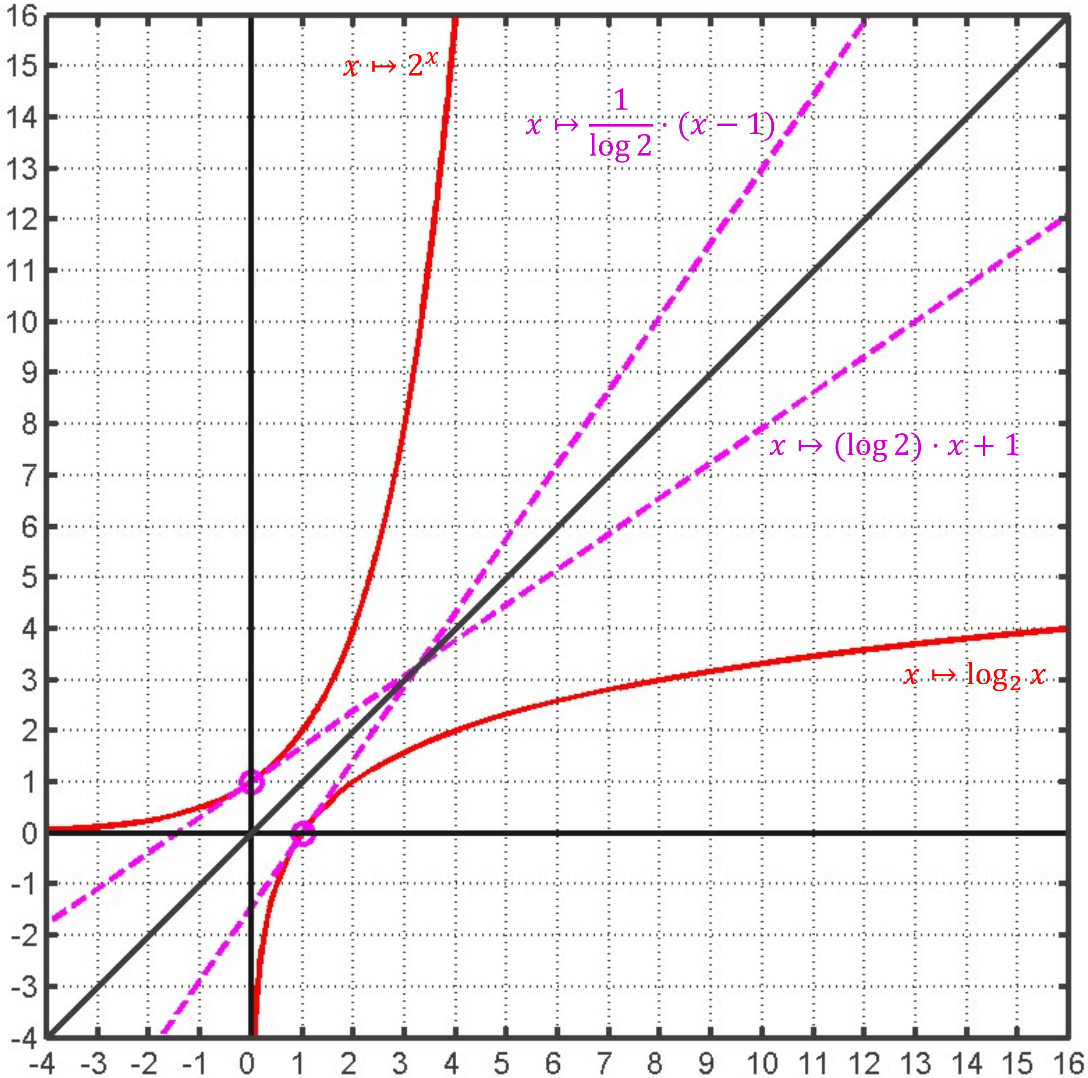
Beachte, daß ab jetzt das Argument des Logarithmus ebenfalls mit x bezeichnet wird.

Bezeichnungen: Basis

$a = 2$:	*binärer* (bzw. dualer) Logarithmus	$\log_2 =: \mathrm{lb} \equiv \mathrm{ld}$
$a = 10$:	*dekadischer* Logarithmus	$\log_{10} =: \lg \equiv \mathrm{ld}$
$a = \mathrm{e}$:	*natürlicher* Logarithmus	$\log_{\mathrm{e}} =: \ln \equiv \log$

Die Beispiele zeigen: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

Erinnerung an die *Logarithmus*funktionen



- Die Logarithmusfunktion zur Basis a ist die *Umkehrfunktion* der Exponentenfunktion zur Basis a.
- Der Graph einer Logarithmusfunktion ergibt sich durch Spiegelung des Graphen der entsprechenden Exponentenfunktion an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.
- Tangenten an den Graphen der Exponentenfunktion gehen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden auf Tangenten an den Graphen der zugehörigen Logarithmusfunktion über.

Spiegelung einer Geraden G an der Winkelhalb.:

$$G\colon\ x \mapsto y = g(x) \coloneqq\ m(x-\overline{x}) + \overline{y}$$

$$G \coloneqq \{(x, g(x))\colon\ x \in \mathbb{R}\}$$

Gespiegelte Gerade H:

$$H \coloneqq \{(g(x), x)\colon\ x \in \mathbb{R}\}$$

$$\coloneqq \{(g(h(y)), h(y))\colon\ y \in \mathbb{R}\}$$

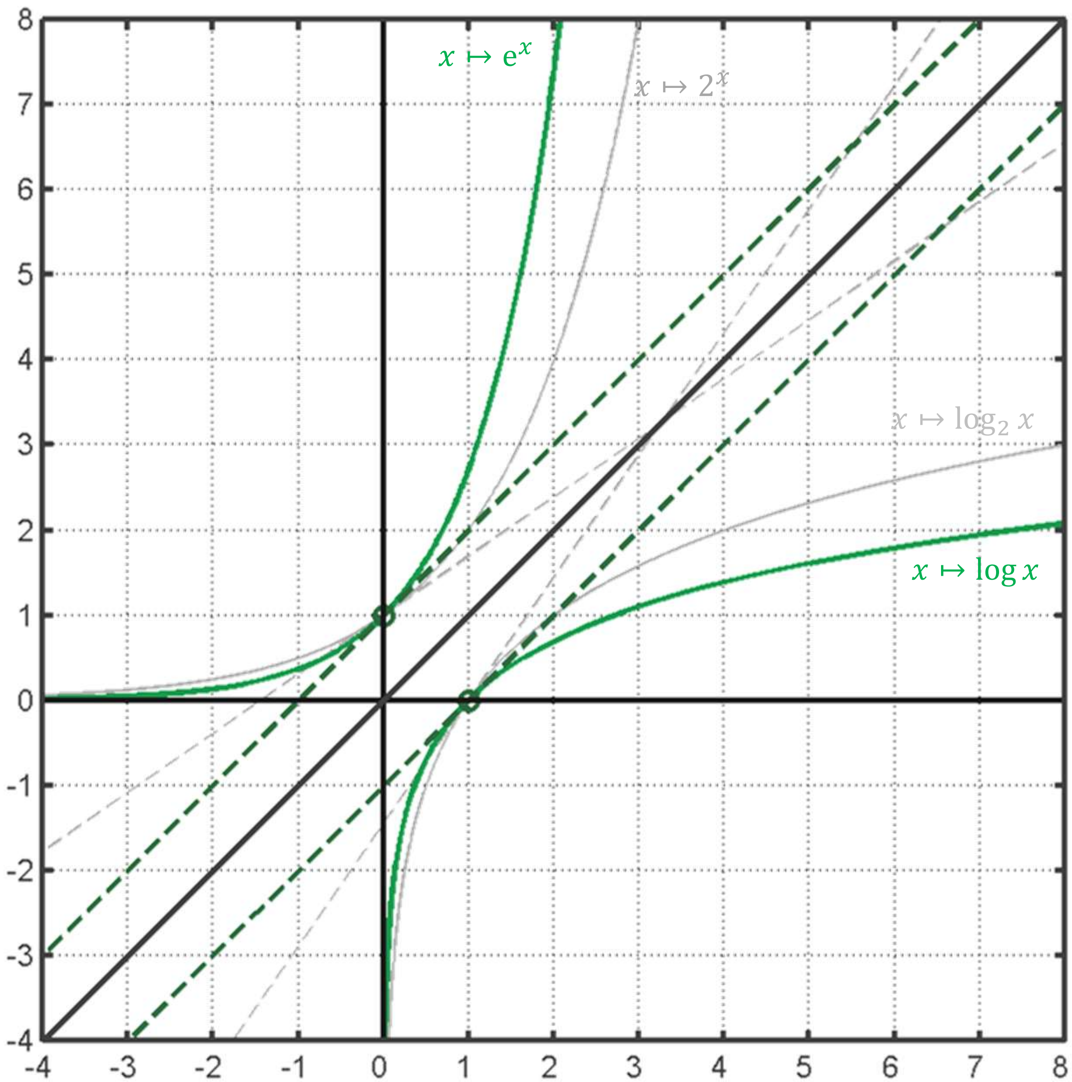
$$\coloneqq \{(y, h(y))\colon\ y \in \mathbb{R}\}$$

$h = g^{-1}$
$x = h(y)$
(Umkehrfunktion)

H erweist sich also als Graph der Umkehrfunktion-

$$H\colon\ y \to x = h(y) \coloneqq \tfrac{1}{m}(y-\overline{y}) + \overline{x}$$

Die Funktion des *natürlichen Logarithmus*



Die Eulersche Zahl e ist als Basis der Exponentialfunktion bzw. des natürlichen Logarithmus so gewählt, daß die Tangente an den Graphen der Exponentialfunktion im Punkt $(0,1)$ die Steigung 1 hat und folglich wegen $\exp(0) \equiv \mathrm{e}^0 = 1$ gegeben ist durch:

$$x \mapsto \tau_{\exp}(x) = x + 1$$

Durch Spiegelung dieser Geraden an der parallel verlaufenden Winkelhalbierenden ergibt sich die Tangente an den Graphen des natürlichen Logarithmus im Punkt $(1,0)$.

$$x \mapsto \tau_{\log}(x) = x - 1$$

Aus der Graphik ist ersichtlich:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ \mathrm{e}^x \geq x + 1$$

Durch „Spiegelung" ergibt sich daraus die **Abschätzung** für den Logarithmus

$$\forall x \in \mathbb{R}^+: \ \log x \leq x - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall h > -1: \ \log(1 + h) \leq h$$

Diese Abschätzung liefert (wie ersichtlich) für betragsmäßig kleine h einen guten Näherungswert für den Logarithmus.

Ein formaler Beweis der Ungleichung (*) [sowie der Ungleichung (**)] kann mit Hilfe der Differentialrechnung erst erbracht werden, wenn die Exponentialfunktion analytisch genau definiert ist.

Eigenschaften der *Logarithmus*funktionen

1) $\forall a > 0,\ a \neq 1:\quad \log_a 1 = 0$

2) $\forall a > 0,\ a \neq 1,\ \ \forall x, y > 0:\quad \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

3) $\forall a > 0,\ a \neq 1:\quad \log_a a = 1$

Bem.: Die drei Eigenschaften korrespondieren mit den drei genannten Eigenschaften der Exponentenfunktionen. Gleichwie sämtliche Exponentenfunktionen bei 0 den Wert 1 annehmen, so verschwinden sämtliche Logarithmusfunktionen bei 1. Insbesondere folgt 1) aber auch direkt aus 2). Außerdem entspricht die Basis einer Logarithmusfunktion dem Urbild von 1. Jede „anständige“ reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, die der Funktionalgleichung unter 2) genügt, erweist sich als eine Logarithmusfunktion zu einer gewissen Basis.

Herleitung der *Funktionalgleichung* von Logarithmusfunktionen für $x, y > 0$:

$$xy = x \cdot y$$

$$= a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}$$ Substitution durch Potenzdarstellung mittels Logarithmen

$$= a^{\log_a x + \log_a y}$$ Funktionalgleichung der Exponentenfunktionen angewendet

Logarithmieren der Gleichung

$$\Rightarrow \quad \log_a xy = \log_a a^{\log_a x + \log_a y}$$

Definition des Logarithmus angewendet

$$= \log_a x + \log_a y$$ Q.E.D.

Charakterisierung des natürlichen Logarithmus: Der natürliche Logarithmus ist die einzige Logarithmusfunktion, welche bei e den Wert 1 annimmt bzw. welche bei 1 die Steigung 1 aufweist. Für eine „anständige“ Funktion $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ bestehen die folgenden Implikationen.

$$\left.\begin{aligned} \forall x, y \in (0,\infty):\ f(xy) &= f(x) + f(y) \\ f(\mathrm{e}) &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f = \log$$

bzw. ohne Bezugnahme auf Eulersche Zahl e

$$\left.\begin{aligned} \forall x, y \in (0,\infty):\ f(xy) &= f(x) + f(y) \\ f'(1) &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f = \log$$

Weitere Rechenregeln

Eine weitere Rechenregel für Potenzen: $\forall a > 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R}$: $(a^x)^y = a^{xy}$

$\Rightarrow$ eine weitere Rechenregel für Logarithmen: $(b > 0)$

$$b^x = \left(a^{\log_a b}\right)^x = a^{(\log_a b)\cdot x} \equiv a^{x\cdot \log_a b}$$

$$\Rightarrow \quad \log_a b^x = \log_a\left(a^{x\cdot \log_a b}\right) = x \cdot \log_a b$$

- Also gilt: $\forall a, b > 0, \forall x \in \mathbb{R}$: $\boldsymbol{\log_a b^x = x \cdot \log_a b}$
- $\forall a, b > 0$: $b^{\log_b a} = a$

$$\Rightarrow \quad \log_a\left(b^{\log_b a}\right) = \log_a a \quad \Rightarrow \quad \log_b a \cdot \log_a b = 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Universalität von Exponentialfunktion & natürlichen Logarithmus:

- $\boldsymbol{a^x} = \left(\mathrm{e}^{\log a}\right)^x = \boldsymbol{\mathrm{e}^{x \cdot \log a}}$
- $x = \mathrm{e}^{\log x} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\log_a x} = \log_a\left(\mathrm{e}^{\log x}\right) = \boldsymbol{\log_a \mathrm{e} \cdot \log x} = \boldsymbol{\frac{\log x}{\log a}}$

Historische Bedeutung der Logarithmen als Hilfsmittel für das praktische Rechnen

Logarithmieren verwandelt eine Multiplikation in eine Addition und eine Wurzel in eine Division

Vorgehensweise zur Berechnung eines Produkts $x \cdot y$:

- Schlage in Logarithmentafel $\log x$ und $\log y$ nach (ggf. Verbesserung der Werte durch lineare Interpolation)
- Addiere die Logarithmen
- Bestimme mittels Logarithmentafel das Produkt xy als Numerus zu $\log x + \log y$ (ggf. ist eine weitere Linearinterpolation zur Wertverbesserung durchzuführen).