

# Кристаллооптика. Двойное лучепреломление

Гончаров Марк

17 июня 2021 г.

## Аннотация

Данная статья написана для презентации вопроса по выбору на экзамене МФТИ 2021 года 4 семестр, курс "Оптика".

Научный руководитель: Николай Леонидович Меньших - преподаватель кафедры общей физики МФТИ, научный сотрудник ИТПЭ РАН.

Преподаватель: Владимир Валерьевич Вановский - сотрудник кафедры общей физики.

## 1 Цель работы

Научиться анализировать необыкновенную волну. Для этого будем определять главные показатели преломления  $n_o$  и  $n_e$  исландского шпата двумя способами:

1. Снимем зависимость  $\psi = f(\varphi)$  для обеих волн. По полученным данным определим показатели преломления.
2. Измерим для каждого из лучей угол падения  $\varphi$  в условиях полного внутреннего отражения.

## 2 Общая теория

Рассмотрим волну, распространяющуюся вдоль оси  $Oz$ , тогда мы можем записать для неё уравнения Максвелла

$$\begin{cases} (\text{rot } \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ (\text{rot } \mathbf{H})_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}, \end{cases} \quad (1.1)$$

Важными частными решениями этой системы являются

$$E_y = H_x = A_y \cos(\omega t - kz + \varphi_y). \quad (1.2.1)$$

$$E_x = H_y = A_x \cos(\omega t - kz + \varphi_x). \quad (1.2.2)$$

Так как в любой точке пространства концы векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  движутся по отрезкам прямых линий в плоскости, то такая волна называется **линейно поляризованной**.

Если волны (1.2.1) и (1.2.2) распространяются одновременно, то концы векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  движутся по эллипсам в плоскости  $(E_x, E_y)$ . Такая волна называется **эллиптически поляризованной**.

Устройства, с помощью которых из естественного света получают поляризованный, называются **поляризаторами**. Они основаны на одном из принципов:

1. **Дихроизм** - способность вещества поглощать свет по-разному в зависимости от его поляризации. На его действии основано действие используемых в лабораториях *поляроидных плёнок* (например, хинин). Такая плёнка сильно поглощает свет, плоскость поляризации которого перпендикулярна направлению выравнивания кристаллов (линейный дихроизм).

Интересно также явление кругового дихроизма - различное поглощения излучения с левой и правой поляризациями.

2. **Двойное лучепреломление** - наблюдаем его в анизотропных кристаллах. Анизотропия проявляется в зависимости этих кристаллов коэффициента преломления от поляризации световой волны
3. Поляризация света при отражении и преломлении. Мы можем воспользоваться, тем, что из формулы Френеля для волны, плоскость **E** которой находится в плоскости падения коэффициент отражения  $\rho_{||}$  :

$$\rho_{||} = \frac{\tan^2(\varphi - r)}{\tan^2(\varphi + r)}, \quad (1.3)$$

где  $\varphi$  - угол падения и  $r$  - угол преломления. Тогда при  $\varphi_B = \arctan n$  имеем  $\rho_{||} = 0$ , то есть волна вся проходит внутрь, не отражаясь. Такой угол называется **углом Брюстера**.

4. При *рассеянии* света на частицах пыли волна также оказывается поляризованной, причём преимущественно перпендикулярно падающему лучу.

При пропускании поляризованного света через поляризатор для интенсивности света выполняется закон **Малюса**

$$I = I_0 \cos^2 \varphi \quad (1.4),$$

где  $\varphi$  - угол между направлением электрических колебаний волны и разрешённым направлением поляризатора.

**Степень поляризации** будем вычислять, как

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad (1.5).$$

### 3 Двойное лучепреломление

Рассмотрим потенциальные ямы вблизи узлов решётки

$$U = a_x x^2 + a_y y^2 + a_z z^2. \quad (2.1)$$

Мы работаем с **одноосными** кристаллами, то есть с теми для которых  $a_y = a_z = a_{\perp}$ ,  $a_x = a_{||}$ . В данном случае  $Ox$  - **оптическая ось** кристалла.

Соответственно введём коэффициенты  $\alpha$  - поляризуемость,  $\varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость. Тогда

$$\mathbf{P} = \alpha_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \alpha_{||} \mathbf{E}_{||}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \varepsilon_{||} \mathbf{E}_{||} \quad (2.2).$$

Связь этих же векторов из *уравнений Максвелла*

$$\mathbf{D} = -\frac{c}{\omega} [\mathbf{k}, \mathbf{H}], \quad \mathbf{H} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k}, \mathbf{E}] \quad (2.3).$$

*Вектор Пойнтинга*, то есть вектор плотности потока энергии в данном случае вычисляется, как

$$\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \quad (2.4).$$

Одновременно условия (2.2) и (2.3) могут выполняться только в двух случаях. Для их характеристики введём понятие **главного сечения** - плоскость вектора  $\mathbf{k}$  и оптической оси  $\psi$ . Обозначим эту плоскость  $\Theta$ .

Тогда обыкновенная волна:  $\mathbf{D} \perp \Theta$ , необыкновенная:  $\mathbf{D} \in \Theta$ . Если с обыкновенной волной мы умеем работать, то для необыкновенной необходимо вывести важные соотношения.

Найдём фазовую скорость  $v = \frac{\omega}{k}$ . Из рисунка  $|\mathbf{k}, \mathbf{H}| = kH$ ,  $|\mathbf{k}, \mathbf{E}| = kE \cos \alpha$ , поэтому из первого и второго уравнений (2.3) соответственно:

$$v = c \frac{H}{D}, \quad v = c \frac{E}{H} \cos \alpha \quad (2.4).$$

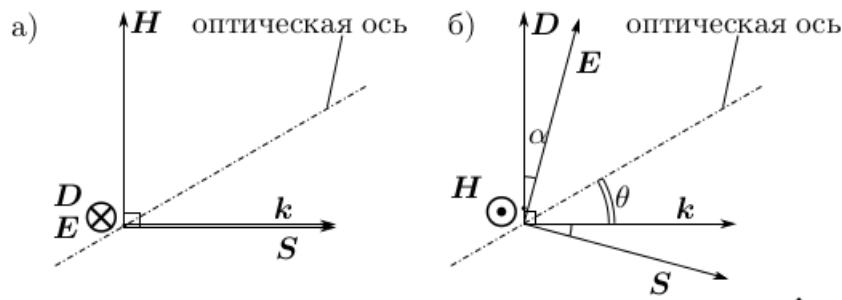


Рис. 1: Обыкновенная (а), необыкновенная (б)

Умножаем равенства:

$$v = c \sqrt{\frac{E \cos \alpha}{D}} = c \sqrt{\frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})}{D^2}} \quad (2.5).$$

Самое интересное - скалярное произведение. Мы писали проекции вектора  $\mathbf{D}$  - (2.2). Также очевидно из геометрии, что  $D_{||} = D \sin \theta$ ,  $D_{\perp} = D \cos \theta$ . Поэтому для фазовой скорости можем получить окончательное соотношение

$$v = c \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_{||}} + \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_{\perp}}}.$$

## 4 Ход лучей в пластинке

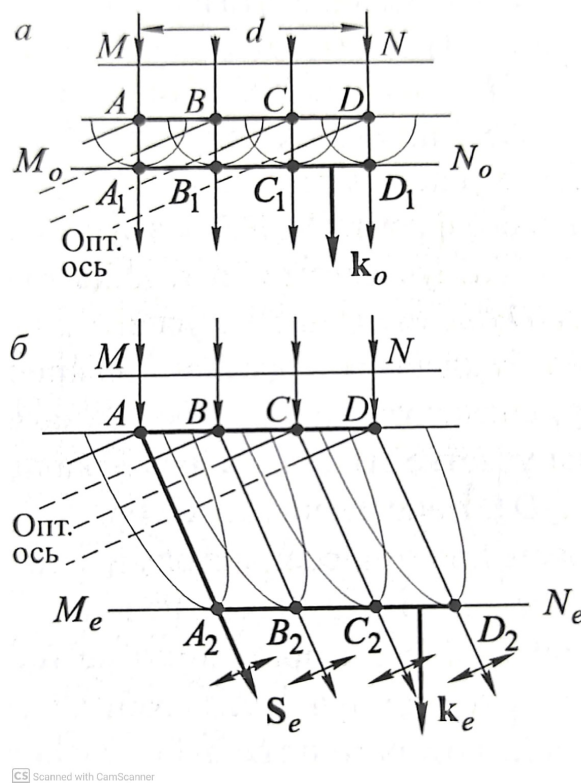


Рис. 2: Построение Гюйгенса

Пусть оптическая ось кристалла составляет угол  $\alpha$  с поверхностью и лежит в плоскости рисунка выше. В падающем свете будем считать, что содержатся обе компоненты вектора  $\mathbf{E}$ .

1. Волна одновременно достигла поверхности MN.

2. Возбуждаются вторичные волны. Источники: возбуждаемые падающей волной осцилляторы среды.
3. Если  $\mathbf{E} \perp \psi$ , где  $\psi$  плоскость рисунка, то возникают легко описываемые сферичные волны с  $n_o = const$ . Это случай обыкновенной волны (на рисунке а).
4. Для случая  $\mathbf{E} \notin \psi$  наблюдаем необыкновенные волны - эллипсоиды. На рисунке обозначим волновой фронт (поверхность одной фазы). Т.к.  $v_{phase} \propto n^{-1}$ , то видно на рисунке изображён отрицательный кристалл ( $n_e < n_o$ ) из-за вытягивания волнового фронта перпендикулярно оптической оси.
5. Получается необыкновенная волна "убегает" своей фазой в сторону, тем самым энергия переносится не перпендикулярно MN. При этом волновой вектор  $\mathbf{k} \perp MN$  для согласования с законами преломления. С помощью этого явления можно рассеивать энергию необыкновенной волну, тем самым создавать неплохие поляроиды.
6. В нашем эксперименте оптическая ось сонаправлена длинному катету, поэтому мы не наблюдаем этого явления. Расхождения лучей на выходе шпата в нашем случае обусловлено разным показателем преломления для разных поляризаций  $\mathbf{E}$ , что влияет на закон Снелиуса на выходе из призмы.

## 5 Экспериментальная установка

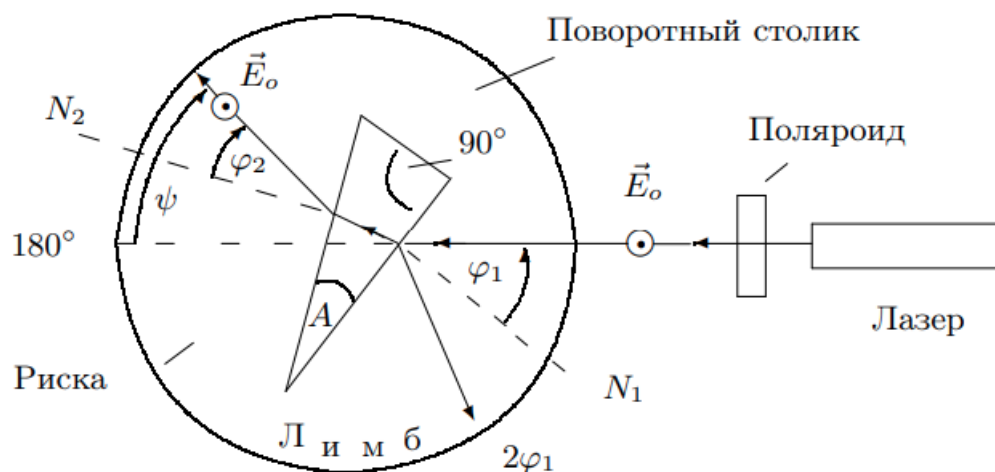


Рис. 3: Схема экспериментальной установки

В нашем случае источник излучения He-Ne лазер. Причём излучение его линейно поляризовано, засчёт брьюстеровских окошек в кювете лазера. Ход лучей будем анализировать по углам  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , связанными соотношением:

$$\varphi_2 + \varphi_1 = A + \psi.$$

## 6 Выполнение лабораторной работы

1. Запишем показания установки:  $\lambda = 650 \pm 5 \text{ нм}$ .
2. Отъюстируем установку.
3. Для определения угла  $A$  при вершине призмы измерим положение отчётной риски на лимбе, когда луч строго идёт назад для длинного катета и гипотенузы. По формуле  $A = \varphi_1 - \varphi_2$  найдём угол при вершине призмы

$$A = 39.0 \pm 0.5.$$

Абсолютная погрешность  $0.5 = 0.25 + 0.25$  для каждого из измерений углов.

- Определим, какой луч соответствует вертикально поляризованному, а какой горизонтально поляризованному свету. Для этого я воспользовался установкой 3.7.3, в которой рассматривали луч, отражённый от чёрного зеркала под углом Брюстера. Минимум интенсивности наблюдался при горизонтальной поляризации поляроида. Таким образом, по шкале поляроида:  $159^\circ$  - горизонтальная и  $69^\circ$  - вертикальная поляризации.
- Для вычисления коэффициента преломления по двум направлениям, непосредственно снимем показания  $\varphi_1$  и  $\psi$ . Далее вычисляем угол  $\psi = \varphi_1 + \varphi_2 - A$ , затем вычисляем тригонометрические функции от данных углов и окончательно подставляем значения в

$$n = \frac{1}{\sin A} \sqrt{\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos A}.$$

Получаем таблицу:

40	34	31	29	28	27	27	27,5	28,5	29,5	31	33	$\varphi_2$
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	$\varphi_1$
0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	$\sigma(\varphi)$
74	63	55	48	42	36	31	26,5	22,5	18,5	15	12	$\psi$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\sigma(\psi)$
0,087	0,175	0,262	0,349	0,436	0,524	0,611	0,698	0,785	0,873	0,960	1,047	$\varphi_1$
0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	$\sigma(\varphi)$
1,29	1,10	0,96	0,84	0,73	0,63	0,54	0,46	0,39	0,32	0,26	0,21	$\psi$
0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	$\sigma(\psi)$
<b>1,64</b>	<b>1,64</b>	<b>1,64</b>	<b>1,64</b>	<b>1,64</b>	<b>1,63</b>	<b>1,63</b>	<b>1,63</b>	<b>1,64</b>	<b>1,64</b>	<b>1,64</b>	<b>1,65</b>	<b>n</b>
0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	$\sigma(n)$

Рис. 4: Полученные данные для обыкновенной волны

- Погрешность для  $n$  нашли через сумму относительных погрешностей  $\frac{1}{\sin A}$  и половины относительной погрешности от подкоренного выражения. Для тригонометрических величин относительная погрешность

$$\delta = \left| \frac{\sin(\alpha + \Delta\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin \alpha} \right|.$$

Основная погрешность набегала из-за косвенности измерения  $\psi$ . Мы компенсируем эту погрешность большим количеством измерений.

- Как видим, получили значения очень близкие с табличными. Более того, подтвердили теорию о том, что в исландском шпате  $n_o \approx const$ , то есть не зависит от угла падения.
- Проведём аналогичный эксперимент, но уже для необыкновенной волны. Для этого изменил поляризацию света, проходящего через исландский шпат.

Теперь явно видна зависимость показателя преломления от угла падения луча, что и подтверждает теорию двойного лучепреломления.

- В конце немного исследуем область отрицательных углов падения. При некотором значении мы получаем эффект полного внутреннего отражения (луч исчезает). Найдём эти углы:  $\varphi_{1o} = (-1 \pm 0.25)^\circ$ ,  $\varphi_{1e} = (-6 \pm 0.25)^\circ$ . Тогда по аналогичной формуле, считая  $\psi = \pi/2$ :

$$n = \frac{1}{\sin A} \sqrt{\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos A}.$$

Итого:  $n_o = 1.63 \pm 0.06$ ,  $n_e = 1.46 \pm 0.06$ .

25	23	22	21	21	21	21,5	22	23	24,5	25,5	27,5	$\varphi_2$
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	$\varphi_1$
0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	$\sigma(\varphi)$
59	52	46	40	35	30	25,5	21	17	13,5	9,5	6,5	$\psi$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\sigma(\psi)$
0,087	0,175	0,262	0,349	0,436	0,524	0,611	0,698	0,785	0,873	0,960	1,047	$\varphi_1$
0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	$\sigma(\varphi)$
1,03	0,91	0,80	0,70	0,61	0,52	0,45	0,37	0,30	0,24	0,17	0,11	$\psi$
0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	$\sigma(\psi)$
1,47	1,48	1,49	1,48	1,49	1,50	1,51	1,51	1,51	1,52	1,51	1,52	n
0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	$\sigma(n)$

Рис. 5: Полученные данные для необыкновенной волны

## 7 Вывод

1. Мы познакомились с основными явлениями, лежащими в основе создания поляридов.
2. Научились экспериментально отличать обыкновенную и необыкновенную волны.

## 8 Приложение



Рис. 6: Слева поляризованная необыкновенная волна. Справа волна от источника.

## 9 Литература

1. Кириченко Н.А. "Принципы оптики". Глава 12: "Элементы кристаллооптики".
2. Максимычев А.В. "Лабораторный практикум по общей физике". Том 2: "Оптика". Раздел 7: "Поляризация. Кристаллооптика".
3. Локшин Г.Р. "Основы волновой оптики". Глава 5: "Волны в анизотропных средах. Элементы кристаллооптики".