Как нам победить преобразование Лапласа

1. Вводные

Пусть дана система с рациональной передаточной функцией $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ – отношением многочленов $N(p)$, $D(p)$ с вещественными коэффициентами. Требуется по заданному одностороннему воздействию $x(t)$, $t \geq 0$ найти отклик $y(t)$. Порядок действий таков:

1. Находим Лаплас-образ воздействия

$$x(p) = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt$$

2. Умножаем его на $H(p)$ с тем, чтобы найти образ отклика $y(p) = H(p)x(p)$.
3. Возвращаемся во временную область обратным преобразованием Лапласа

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j}\int y(p)e^{+pt}dp$$

Результат $y(t)$ готов.

Техника отыскания передаточных функций в общих чертах известна – комплексные амплитуды, импедансы, метод контурных токов или узловых потенциалов. Остается обсудить переходы $x(t) \quad \Leftrightarrow \quad x(p)$ из временной области в частотную и обратно.

2. Из временной области в частотную

Прежде всего, преобразование Лапласа линейно – взвешенной сумме сигналов отвечает такая же сумма откликов

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha x_1(p) + \beta x_2(p),$$

где α, β – произвольные комплексные коэффициенты. Полезно знать поведение образов при масшбабировании времени, дифференцировании и интегрировании. Если $x(t) \quad \Leftrightarrow \quad x(p)$, то

$$x(at) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a}x(\frac{p}{a}),$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad px(p) + x(t)|_{t=0},$$

$$\int_0^t x(u)\,du \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x(p)}{p}.$$

Полезно знать, что образ δ-функции – это тождественная единица:

$$\delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad 1$$

Вместе с правилами дифференцирования-интегрирования это дает образы производной от δ-функции

$$\frac{d}{dt}\delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad p$$

и первообразной от нее

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(u)\,du = \theta(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{p}$$

Вообще же, класс сигналов, Лаплас образы которых эффективно вычисляются, довольно узок. Он ограничен линейными комбинациями функций $t^k e^{\mu t}$ – экспонент от t с произвольным комплексным показателем μ и полиномиальным ростом типа t^k.

В основе всего лежит легко вычисляемый Лаплас образ экспоненты:

$$e^{\mu t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{p-\mu}.$$

Как частные случаи отсюда получаются: образ единичной ступени $\theta(t) = e^{\mu t}|_{\mu=0}$

$$\theta(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{p},$$

образы односторонних гармоник

$$\cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega}\Big) = \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

$$\sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2j}\Big(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega}\Big) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

образы односторонних гармоник с экспоненциальным затуханием

$$e^{-\delta\omega t}\cos\eta\omega t = \frac{p+\delta\omega}{p^2+2\delta\omega p+\omega^2},$$

$$e^{-\delta\omega t}\sin\eta\omega t = \frac{\eta\omega}{p^2+2\delta\omega p+\omega^2}, \quad \eta = \sqrt{1-\delta^2}.$$

и многое другое, что проще вывести, чем запомнить.

Лаплас-образы экспонент – это всегда рациональные функции с простыми (не кратными) полюсами. Кратные полюсы появляются в образах экспонент с полиномиальным по t ростом. Нахождение образов таких функций опирается на простой трюк с дифференцированием по p:

$$\frac{d}{dp}x(p) = \frac{d}{dp}\int x(t)e^{-pt}dt = -\int tx(t)e^{-pt}dt.$$

А это дает образ сигнала $tx(t)$:

$$tx(t) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{d}{dp}x(p).$$

Каждое умножение сигнала на t – есть дифференцирование его образа по p (с минусом).

Простые примеры:

$$t \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{d}{dp}\Big(\frac{1}{p}\Big) = \frac{1}{p^2}.$$

$$te^{\mu t} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{d}{dp}\Big(\frac{1}{p-\mu}\Big) = \frac{1}{(p-\mu)^2}.$$

Или, более общо

$$\frac{t^k}{k!} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{p^{k+1}},$$

$$\frac{t^k}{k!}e^{\mu t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{(p-\mu)^{k+1}}.$$

3. Из частотной области во временную

В подавляющем большинстве случаев вычисление обращения преобразования Лапласа можно обойти, разложив рациональную функцию $y(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ в сумму по всем полюсам μ_j (корням знаменателя $D(p)$) элементарных дробей вида $\frac{A_j}{p-\mu_j}$ и воспользовавшись заготовкой

$$e^{\mu t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{p-\mu}.$$

Но этап отыскания коэффициентов A_j оказывается довольно трудоемкими. Несколько проще обращение лапласа вычисляется через вычеты. Известно что,

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j}\int \frac{N(p)}{D(p)}e^{pt}dp = \frac{1}{2\pi j}\int F(p)dp = \sum_{\mu_j}[\mathrm{Res}F(p)]_{p=\mu_j}.$$

Иными словами, интеграл от функции $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}e^{pt}$ есть сумма вычетов $[\mathrm{Res}F(p)]_{p=\mu_j}$ этой функции во всех ее полюсах – корнях знаменателя $D(p)$.

Вычет функции $F(p)$ в полюсе μ – это не более как коэффициент C_{-1} в разложении этой функции в ряд Лорана (аналог ряда Тейлора) в окрестности полюса. Для полюса кратности $k \geq 1$ это разложение имеет вид:

$$F(p) = \frac{C_{-k}}{(p-\mu)^k} + \dots + \frac{C_{-1}}{(p-\mu)} + C_0 + C_1(p-\mu) + C_2(p-\mu)^2 + \dots$$

Чтобы найти вычет

$$[\mathrm{Res}F(p)]_{p=\mu} = C_{-1}$$

достаточно умножить обе части на $(p-\mu)^k$, $(k-1)$ раз продифференцировать все по p с тем, чтобы сделать константой фактор $(p-\mu)^{k-1}$ при C_{-1}, а затем обнулить все лишнее, положив $p = \mu$.

$$C_{-1} = [\mathrm{Res}F(p)]_{p=\mu} = \frac{1}{(k-1)!}\Big[\frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}}F(p)(p-\mu)^k\Big]_{p=\mu}.$$

Вычеты по полюсам кратности $k = 1$ находятся совсем просто:

$$C_{-1} = [\mathrm{Res}F(p)]_{p=\mu} = \Big[\frac{N(p)}{D(p)/(p-\mu)}e^{pt}\Big]_{p=\mu}.$$

Если через $D_\mu(p)$ обозначить результат $D(p)/(p-\mu)$ исключения корня μ в многочлене $D(p)$, получится

$$C_{-1} = [\mathrm{Res}F(p)]_{p=\mu} = \frac{N(\mu)}{D_\mu(\mu)}e^{\mu t}$$

Нетрудно сообразить что исключение корня можно заменить дифференцированием многочлена $D(p)$ по p:

$$C_{-1} = [\mathrm{Res}F(p)]_{p=\mu} = \frac{N(\mu)}{\frac{dD(p)}{dp}|_{p=\mu}} e^{\mu t}$$

С полюсами высших кратностей все несколько сложнее. К примеру, вычет в полюсе кратности $k = 2$ может быть найден по схеме

$$C_{-1} = [\mathrm{Res}F(p)]_{p=\mu} = \Big[\frac{d}{dp}\Big(\frac{N(p)e^{pt}}{D_\mu(p)}\Big)\Big]_{p=\mu}.$$

Вычисление реализуется в три этапа. Исключаем полюс кратности 2 при $p = \mu$, заменив знаменатель на $D_\mu(p) = \frac{D(p)}{(p-\mu)^2}$. Дифференцируем все что получилось по p. В результат подставляем $p = \mu$.

В случае полюса кратности k все то же самое, только более тяжеловесно, поскольку диффернцировать по p приходится много раз. Такие дела.

4. Примеры

4.1. Отклики звеньев первого порядка

Изучим отклики интегрирующего и дифференцирующего звеньев с передаточными функциями $H(s) = \frac{s}{s+1}$ и $\frac{1}{s+1}$, где $s = \frac{p}{\omega_0}$.

4.2. Импульсные реакции

Если $x(t) = \delta(t)$, то $x(s) = 1$ и $y(s) = H(s)x(s) = H(s)$.

Дифференцирующее звено:

$$y(s) = \frac{s}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \delta(t) - e^{-t}$$

Интегрирующее звено:

$$y(s) = \frac{1}{s+1} = \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{-t}$$

В реальном времени импульсные реакции размерности обратного времени имеют вид

$$y(t) = \frac{1}{\tau}(\delta(t/\tau) - e^{-t/\tau}) = \delta(t) - \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$$

$$y(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$$

4.3. Переходные характеристики

Если $x(t) = \theta(t)$, то $x(s) = \frac{1}{s}$ и $y(s) = H(s)x(s) = \frac{H(s)}{s}$.

Дифференцирующее звено:

$$y(s) = \frac{1}{s}\frac{s}{s+1} = \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{-t}$$

Интегрирующее звено:

$$y(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s+1}$$

Ищем вычеты $F(s)=\frac{e^{st}}{s(s+1)}$ в полюсах $s=0$ $s=-1$.

$$[\mathrm{Res}F(s)]_{s=0}=\frac{e^{st}}{(s+1)}|_{s=0}=1$$

$$[\mathrm{Res}F(s)]_{s=-1}=\frac{e^{st}}{s}|_{s=-1}=-e^{-t}.$$

Поэтому

$$y(t)=1-e^{-t}.$$

4.4. Отклик на линейное воздействие

Если $x(t)=t$ то $x(s)=\frac{1}{s^2}$ и $y(s)=\frac{H(s)}{s^2}$.

Дифференцирующее звено:

$$y(s)=\frac{1}{s(s+1)},\quad F(s)=\frac{e^{st}}{s(s+1)}$$

$$[\mathrm{Res}F(s)]_{s=0}=\frac{e^{st}}{(s+1)}|_{s=0}=1$$

$$[\mathrm{Res}F(s)]_{s=-1}=\frac{e^{st}}{(s)}|_{s=-1}=-e^{-t}$$

Так что, $y(t)=1-e^{-t}$.

Интегрирующее звено:

$$y(s)=\frac{1}{s^2(s+1)},\quad F(s)=\frac{e^{st}}{s^2(s+1)}$$

$$[\mathrm{Res}F(s)]_{s=0}=\frac{d}{ds}\frac{e^{st}}{(s+1)}|_{s=0}=t-1$$

$$[\mathrm{Res}F(s)]_{s=-1}=\frac{e^{st}}{s^2}|_{s=-1}=e^{-t}$$

Так что, $y(t)=t-(1-e^{-t})$.

4.5. Отклик на экспоненциальное воздействие

Пусть $x(t)=e^{-\alpha t}$, $x(s)=\frac{1}{s+\alpha}$.

Дифференцирующее звено:

$$y(s)=\frac{s}{(s+1)(s+\alpha)},\quad F(s)=\frac{se^{st}}{(s+1)(s+\alpha)}$$

$$[\mathrm{Res}F(s)]_{s=-1}=\frac{se^{st}}{s+\alpha}|_{s=-1}=\frac{e^{-t}}{1-\alpha}$$

$$[\mathrm{Res}F(s)]_{s=-\alpha}=\frac{se^{st}}{s+1}|_{s=-\alpha}=\frac{-\alpha e^{-\alpha t}}{1-\alpha}$$

$$y(t)=\frac{e^{-t}-\alpha e^{-\alpha t}}{1-\alpha}\rightarrow_{\alpha\to 1}e^{-t}(1-t)$$

Интегрирующее звено:

$$y(s)=\frac{1}{(s+1)(s+\alpha)},\quad F(s)=\frac{e^{st}}{(s+1)(s+\alpha)}$$

$$[\mathrm{Res} F(s)]_{s=-1} = \frac{e^{st}}{s+\alpha}|_{s=-1} = -\frac{e^{-t}}{1-\alpha}$$

$$[\mathrm{Res} F(s)]_{s=-\alpha} = \frac{e^{st}}{s+1}|_{s=-\alpha} = \frac{e^{-\alpha t}}{1-\alpha}$$

$$y(t) = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-t}}{1-\alpha} \to_{\alpha\to 1} te^{-t}$$

Пусть $x(t) = e^{-t}$ (случай $\alpha = 1$), $x(s) = \frac{1}{s+1}$. Дифференцирующее звено:

$$y(s) = \frac{s}{(s+1)^2}, \quad F(s) = \frac{se^{st}}{(s+1)^2}$$

Полюс кратности 2 при $s = -1$

$$[\mathrm{Res} F(s)]_{s=-1} = \frac{d}{ds} se^{st}|_{s=-1} = e^{-t}(1-t)$$

Интегрирующее звено:

$$y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}, \quad F(s) = \frac{e^{st}}{(s+1)^2}$$

$$[\mathrm{Res} F(s)]_{s=-1} = \frac{d}{ds} e^{st}|_{s=-1} = te^{-t}$$

4.6. Отклик на гармоническое воздействие

Пусть $x(t) = \cos \nu t$, $x(s) = \frac{s}{s^2+\nu^2}$. Интегрирующее звено:

$$y(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+\nu^2)}, \quad F(s) = \frac{se^{st}}{(s+1)(s+j\nu)(s-j\nu)}$$

$$[\mathrm{Res} F(s)]_{s=-1} = \frac{se^{st}}{s^2+\nu^2}|_{s=-1} = -\frac{e^{-t}}{1+\nu^2}$$

$$[\mathrm{Res} F(s)]_{s=j\nu} = \frac{se^{st}}{(s+j\nu)(s+1)}|_{s=j\nu} = \frac{e^{j\nu t}}{2(1+j\nu)}$$

$$[\mathrm{Res} F(s)]_{s=-j\nu} = \frac{se^{st}}{(s-j\nu)(s+1)}|_{s=-j\nu} = \frac{e^{-j\nu t}}{2(1-j\nu)}$$

$$y(t) = -\frac{e^{-t}}{1+\nu^2} + \frac{1}{\sqrt{1+\nu^2}} \cos(\nu t + \varphi); \quad \mathrm{tg}\, \varphi = \nu.$$

5. Отклики звеньев второго порядка

5.1. Переходные характеристики

Имеем: $x(t) = \theta(t)$, $x(s) = \frac{1}{s}$.

Для фильтра нижних частот с $H(s) = \frac{1}{s^2+2\xi s+1}$ $y(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{1}{s(s+\mu_+)(s+\mu_-)}$, где $\mu_+ = \xi + j\eta$, $\mu_- = \xi - j\eta$, $\eta = \sqrt{1-\xi^2}$. ($\mu_+ + \mu_- = 2\xi$, $\mu_+ - \mu_- = 2j\eta$, $\mu_+\mu_- = 1$). Ищем вычеты

$$F(s) = \frac{e^{st}}{s(s+\mu_+)(s+\mu_-)}$$

$$[\mathrm{Res}F(s)]_{s=0} = 1$$

$$[\mathrm{Res}F(s)]_{s=-\mu_+} = \frac{e^{-\mu_+ t}}{-\mu_+(\mu_- - \mu_+)} = \frac{e^{-\mu_+ t}}{2j\eta\mu_+}$$

$$[\mathrm{Res}F(s)]_{s=-\mu_-} = \frac{e^{-\mu_- t}}{-\mu_-(\mu_+ - \mu_-)} = -\frac{e^{-\mu_- t}}{2j\eta\mu_-}$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi t}}{2j\eta}(\frac{e^{j\eta t}}{\xi - j\eta} - \frac{e^{-j\eta t}}{\xi + j\eta}) =$$

$$= 1 - \frac{e^{-\xi t}}{2j\eta}(e^{j\eta t}(\xi + j\eta) - e^{-j\eta t}(\xi - j\eta)) =$$

$$= 1 - e^{-\xi t}(\cos\eta t + \frac{\xi}{\eta}\sin\eta t).$$

Для полосового звена с $H(s) = \frac{s}{s^2+2\xi s+1}$ $y(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{1}{(s+\mu_+)(s+\mu_-)}$.

$$F(s) = \frac{e^{st}}{(s+\mu_+)(s+\mu_-)}$$

$$[\mathrm{Res}F(s)]_{s=-\mu_+} = \frac{e^{-\mu_+ t}}{(\mu_- - \mu_+)} = -\frac{e^{-\mu_+ t}}{2j\eta}$$

$$[\mathrm{Res}F(s)]_{s=-\mu_-} = \frac{e^{-\mu_- t}}{(\mu_+ - \mu_-)} = +\frac{e^{-\mu_- t}}{2j\eta}$$

$$y(t) = \frac{e^{-\xi t}}{2j\eta}(e^{j\eta t} - e^{-j\eta t}) = \frac{e^{-\xi t}}{\eta}\sin\eta t.$$

Для звена верхних частот с $H(s) = \frac{s^2}{s^2+2\xi s+1}$ $y(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{s}{(s+\mu_+)(s+\mu_-)}$.

$$F(s) = \frac{se^{st}}{(s+\mu_+)(s+\mu_-)}$$

$$[\mathrm{Res}F(s)]_{s=-\mu_+} = \frac{-\mu_+ e^{-\mu_+ t}}{(\mu_- - \mu_+)} = \frac{\mu_+ e^{-\mu_+ t}}{2j\eta}$$

$$[\mathrm{Res}F(s)]_{s=-\mu_-} = \frac{-\mu_- e^{-\mu_- t}}{(\mu_+ - \mu_-)} = -\frac{\mu_- e^{-\mu_- t}}{2j\eta}$$

$$y(t) = \frac{e^{-\xi t}}{2j\eta}(e^{-j\eta t}(\xi + j\eta) - e^{+j\eta t}(\xi - j\eta)) =$$

$$= e^{-\xi t}(\cos\eta t - \frac{\xi}{\eta}\sin\eta t).$$