

Содержание

1. Представление о системе	3
2. Линейные системы	5
3. Стационарные системы	7
4. Передаточная функция	13
5. Как возникают комплексные системы	18
6. Аналитические сигналы	23
7. Нули и полюсы	26
8. Элементарные системы	30
9. Как найти передаточную функцию	34
10.Импедансы двухполюсников	39
11.Реализация передаточных функций	45
12.Графики частотно-фазовых характеристик	52
13.Мостовые схемы	58
14.Синтез фильтров	62
15.Обратные связи и активные фильтры	67
16.Факторизация систем	76
17.Ряды Фурье	79
18.Преобразование Фурье	82
19.Аналитичность и односторонность	88
20.Преобразование Лапласа	91
21.Реакции на элементарные воздействия	106

Линейные стационарные системы

1. Представление о системе

Многие математические модели физической реальности явно или неявно используют представление о системе. Под системой понимают некий абстрактный объект (черный ящик) со входом x и выходом y . Подразумевается, что на вход можно подавать воздействия – сигналы $x(t)$, наблюдая отклики $y(t)$ на выходе. Системный подход отличает чрезвычайная общность. Его применение осмыслено в любой ситуации, когда между парой физических параметров имеется связь.



Рис. 1. Система

В теории электрических цепей система – это, в первую очередь, четырехполюсник, рис. 2а, построенный как трехполюсник с общей шиной. Напряжение $u_1(t)$ на входных зажимах рассматривается как вход, а напряжение $u_2(t)$ – как выход. В этой же модели можно выделить и другие системы. Достаточно выбрать любые две из четырех переменных состояния (u_1, u_2, i_1, i_2) и объявить одну из них входом, а другую – выходом. Двухполюсник рис. 2б с переменными состояния напряжение/ток (u/i) также можно рассматривать как систему со входом $i(t)$ и выходом $u(t)$ или как обращенную систему со входом $u(t)$ и выходом $i(t)$.

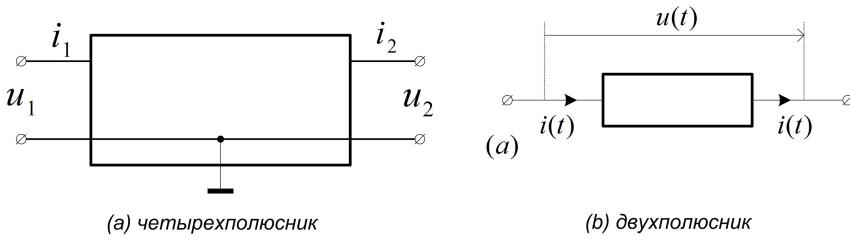


Рис. 2. Системы в электрических цепях

Вообще, наряду с любой системой со входом x и выходом y можно рассматривать обращенную систему со входом y и выходом x . Для этого вовсе не обязательно подавать сигналы на выход, что не всегда

возможно физически. Достаточно просто изменить постановку, начав интересоваться не тем, какие выходы y могут наблюдаться при данном входе x , а тем, какие входы x могут привести к наблюдению данного выхода y .

С каждой системой связано пространство входов $X = \{x(t)\}$ и пространство выходов $Y = \{y(t)\}$. И то и другое – это множества всех мыслимых функций непрерывного времени t . Эти множества являются линейными пространствами, поскольку произвольная линейная комбинация $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ функций $x_1(t), x_2(t)$ также является функцией. Размерности этих пространств, разумеется, бесконечны – конечных базисов в них не существует.

Декартово произведение $X \times Y$ пространств входов/выходов образует линейное же фазовое пространство системы – множество траекторий $(x(t), y(t))$.

С формальных позиций, система – это оператор $H : X \rightarrow Y$, отображающий пространство входов в пространство выходов: $y(t) = Hx(t)$. Описание системы оператором H грешит одним недостатком – оно порождает иллюзию однозначности соответствия между входом и выходом. На самом деле такая однозначность имеет место далеко не всегда: разные входы могут порождать один и тот же выход, при данном входе могут наблюдаться разные выходы (тогда единственность выхода обеспечивается наложением тех или иных начальных условий). Этого недостатка лишено описание системы указанием подмножества $S \subset X \times Y$ тех траекторий, которые она признает как допустимые. Можно представлять себе, что внутри системы сидит некий оракул, который по предъявлении сигнала $x(t)$ на вход и сигнала $y(t)$ в качестве выхода дает двоичный ответ: «годится», если $(x, y) \in S$, или «не годится», если $(x, y) \notin S$. На самом деле эти характеристики эквивалентны, если допустить многозначность оператора H .

Систему называют безынерционной, если ее оператор H однозначен – каждый вход вполне определяет единственный выход. К безынерционным системам относятся, например, идеальный усилитель с коэффициентом передачи K : $y(t) = Kx(t)$ и линия задержки: $y(t) = D_\tau x(t) = x(t - \tau)$.

Все, что не есть безынерционная система, относится к классу динамических систем. Такие системы обладают определенной «свободой воли» – вход влияет на выход, но определяет его не полностью. Отвечая на изменение на входе, динамическая система способна проявить «характер» – поведение, присущее именно ей.

Наглядный пример динамической системы – шарик в параболическом стакане. Положение стакана – это вход, а положение шарика –

выход. Изменение положения стакана влияет на положение шарика, но определяет его не полностью. Если стакан резко переместить, то шарик начнет совершать колебания в нем, пока не остановится в новом положении равновесия. Эти колебания и есть проявление его «свободы воли».

2. Линейные системы

Система **линейна**, если множество S ее допустимых траекторий является линейным подпространством фазового пространства $X \times Y$. Линейность равносильна выполнению для системы следующего **принципа суперпозиции**: если траектории $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ допустимы, то допустима и их линейная комбинация

$$(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$$

с произвольными коэффициентами α, β .

Следствия линейности идут настолько далеко, что непосредственно из определения они осознаются не сразу.

Прежде всего, если для линейной системы допустима траектория (x, y) , то для нее допустимы и все траектории $(\alpha x, \alpha y)$, пропорционально растянутые ($\alpha > 1$) или сжатые ($\alpha < 1$) в α раз. В частности, допустима нуль-траектория $(0, 0)$, которая получается при $\alpha = 0$. Присутствие нуль-траектории (нуль на входе – нуль на выходе) среди допустимых траекторий линейной системы обязательно и является следствием линейности. Нуль-траектория особая – она выделена среди прочих свойством инвариантности относительно умножения на скаляр. Никаких других особых в этом смысле траекторий не существует.

Линейная система инвариантна относительно пропорционального изменения масштабов сигналов на ее входе и выходе. Тем самым, если ее поведение известно в малом (в малой окрестности нуль-траектории), то оно известно и в целом. Малая окрестность нуль-траектории содержит, таким образом, полный слепок глобального поведения линейной системы.

Характеризующий линейную систему оператор H , $y(t) = Hx(t)$ задает линейное отображение $H : X \rightarrow Y$ пространства входов в пространство выходов: если $Hx_1 = y_1$ и $Hx_2 = y_2$, то

$$H(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Hx_1 + \beta Hx_2 = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

Линейность отображения H вовсе не означает его взаимную однозначность. Могут существовать входы, которые отображаются в

нуль. Их множество

$$X_0 = \{x(t) : Hx(t) = 0\} = \{x(t) : (x(t), 0) \in S\}$$

является линейным подпространством пространства входов: $X_0 \in X$. Это **нулевое пространство** системы.

С другой стороны, ненулевые выходы могут наблюдаться при нулевом входе – на выходе автономной системы. Множество таких выходов

$$Y_0 = \{y(t) : H0 = y(t)\} = \{y(t) : (0, y(t)) \in S\}$$

образует линейное подпространство пространства выходов: $Y_0 \in Y$. Это **собственное** (фундаментальное) **пространство** системы. Размерность собственного пространства часто оказывается конечной. Тогда ее называют порядком системы.

Входы, отличающиеся один от другого на элемент нулевого пространства X_0 , эквивалентны – отображаются системой в один и тот же выход. Эквивалентны и выходы, отличающиеся на элемент из собственного пространства Y_0 – все они являются образами одного и того же входа. Вообще, пространство входов X расщепляется в объединение непересекающихся классов $\{x + X_0\}$ эквивалентных входов, а пространство выходов Y – в объединение непересекающихся классов $\{y + Y_0\}$ эквивалентных выходов. Причем, оператор системы H «на самом деле» устанавливает взаимно-однозначное соответствие не между отдельными входами и выходами, а между классами эквивалентных входов и выходов.

Наряду с каждой системой $y = Hx$ можно рассматривать обращенную систему $x = H^{-1}y$. Обращения линейных систем отличаются особенно наглядной структурой. Для построения обращенной системы достаточно нулевое и собственное пространство поменять местами и рассмотреть обратное отображение классов эквивалентных выходов на классы эквивалентных входов, которое всегда хорошо определено в силу взаимной однозначности соответствия между классами. Собственное пространство обращенной системы всегда совпадает с нулевым пространством исходной и наоборот.

Широко известно интегральное представление линейного оператора H через функцию Грина, рис. 3. Пусть на вход системы с оператором H подано δ -воздействие $x_u(t) = \delta(t - u)$ в виде δ -импульса в момент времени u . При этом на выходе системы получится некоторый отклик $y_u(t) = g(u, t)$. Это и есть **функция Грина** системы.

Произвольный вход $x(t)$ можно представить суммой δ -импульсов

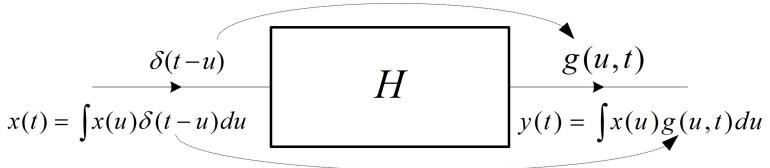


Рис. 3. Интегральное представление линейного оператора

$\delta(t - u)$ с весами $x(u)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\delta(t - u) du.$$

Для линейной системы выполняется принцип суперпозиции, согласно которому отклик на сумму δ -импульсов с весами $x(u)$ должен быть суммой откликов на каждый из них с теми же весами. Поэтому

$$y(t) = Hx(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)g(u, t) du.$$

Это представление ставит в соответствие каждому входу $x(t)$ вполне определенный выход $y(t)$, который является одним из представителей класса эквивалентных выходов $\{y + Y_0\}$, отличающихся на элемент собственного пространства системы Y_0 . Выбор этого представителя продиктован заданием конкретной функции Грина $g(u, t)$, которая при каждом данном u также определена лишь с точностью элемента из Y_0 .

Система удовлетворяет принципу причинности, если отклик на ее выходе не появляется раньше воздействия. Такие системы называют **реализуемыми** или **каузальными**. Функция Грина $g(u, t)$ реализуемой системы обращается в нуль в полуплоскости $t < u$.

3. Стационарные системы

Система стационарна (инвариантна во времени), если множество $S \subset X \times Y$ ее допустимых траекторий замкнуто относительно временных сдвигов. Иными словами, в стационарной системе из факта допустимости некоторой траектории $(x(t), y(t))$ вытекает допустимость всех траекторий $(x(t - \tau), y(t - \tau))$, сдвинутых по времени на произвольное τ .

В интуитивном плане стационарность эквивалентна отсутствию внутри системы встроенных часов. Таковое отсутствие снимает вопрос о синхронизации временной шкалы системы со шкалой времени внешнего наблюдателя. Выбор наблюдателем начала отсчета времени становится произвольным.

Наличие внутрисистемного времени ведет к нарушению стационарности. К примеру, система $y(t) = x(t) \sin \omega t$, в которой вход $x(t)$ умножается на привязанную ко внутреннему времени функцию $\sin \omega t$, линейна, но не стационарна, поскольку

$$y(t - \tau) = x(t - \tau) \sin \omega(t - \tau) \neq x(t - \tau) \sin \omega t.$$

Введем оператор задержки D_τ (левого сдвига на τ), действующий на сигналы $x(t)$ по правилу:

$$y(t) = D_\tau x(t) = x(t - \tau).$$

Операторы задержки можно перемножать, применяя их последовательно:

$$D_{\tau_1} D_{\tau_2} x(t) = D_{\tau_1} x(t - \tau_2) = x(t - \tau_2 - \tau_1).$$

Тогда оказывается, что $D_{\tau_1} D_{\tau_2} = D_{\tau_2} D_{\tau_1} = D_{\tau_1 + \tau_2}$. Кроме того, задержки обратимы:

$$D_\tau^{-1} = D_{-\tau}; \quad D_{-\tau} D_\tau = D_\tau D_{-\tau} = D_0 = 1.$$

Иными словами, множество операторов задержки образует коммутативную группу по умножению, тождественную (изоморфную) группе вещественных чисел τ со сложением в качестве групповой операции.

Группа задержек обладает инфинитезимальной (бесконечно малой) образующей, которой является оператор дифференцирования по времени:

$$\partial = \frac{d}{dt} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{D_{-\tau} - 1}{\tau}.$$

В самом деле,

$$\partial x(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{D_{-\tau} - 1}{\tau} x(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{x(t + \tau) - x(t)}{\tau} = \frac{dx}{dt}.$$

В свою очередь, оператор дифференцирования порождает группу $\{\partial^n, n \in \mathbb{Z}\}$ с умножением $\partial^n \partial^m = \partial^{n+m}$, изоморфную группе \mathbb{Z} целых чисел по сложению. Здесь $\partial^0 = 1$ – тождественный оператор, $\partial^n, n > 0$ – оператор n -кратного дифференцирования, ∂^{-1} – оператор перехода к

первообразной функции (оператор интегрирования), а ∂^{-m} – оператор m -кратного перехода к первообразной.

Операторы D_τ группы задержек представляются рядами по степеням образующей ∂ :

$$D_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \tau^n}{n!} \partial^n = e^{-\tau \partial}.$$

К этому представлению проводит разложение $x(t - \tau)$ в ряд Тейлора в окрестности точки t по степеням τ .

Вернемся к стационарным системам. Множество допустимых траекторий такой системы инвариантно относительно задержек:

$$(x, y) \in S \quad \Rightarrow \quad \forall \tau D_\tau(x, y) = (D_\tau x, D_\tau y) \in S.$$

Это эквивалентно следующему свойству системного оператора H :

$$Hx(t) = y(t) \quad \Rightarrow \quad \forall \tau HD_\tau x(t) = D_\tau y(t) = D_\tau Hx(t).$$

Сдвиг на τ входа $x(t)$ приводит к такому же сдвигу выхода $y(t)$.

Отсюда ясно, что система стационарна, если ее оператор H перестановочен (коммутирует) со всеми элементами группы задержек:

$$D_\tau H = HD_\tau.$$

Это эквивалентно требованию инвариантности H относительно сопряжений

$$H = D_{-\tau} HD_\tau.$$

Нулевое и собственное пространства стационарной системы инвариантны относительно сдвигов.

Пусть $x(t)$ принадлежит нулевому пространству X_0 , то есть $Hx = 0$. Тогда $x(t - \tau) = D_\tau x(t)$ также принадлежит X_0 , поскольку $HD_\tau x = D_\tau Hx = 0$. Аналогично, если $y(t)$ принадлежит собственному пространству Y_0 , $y(t) = H0$, то $D_\tau y(t) = D_\tau H0 = HD_\tau 0 = H0$.

В стационарной системе временной сдвиг входа приводит к такому же сдвигу выхода. В частности, это означает, что функция Грина $g(u, t)$ стационарной системы – ее реакция на сдвинутый на u вход $\delta(t - u)$ – может быть получена сдвигом на то же u реакции $g(0, t)$ на вход $\delta(t)$: $g(u, t) = g(0, t - u) = h(t - u)$. Оказывается, что линейная инвариантная во времени система вполне характеризуется откликом $h(t)$ на δ -воздействие $\delta(t)$ в момент нуль. Отклик $h(t)$ называют **импульсной реакцией** системы.

Интегральное представление оператора H линейной стационарной системы принимает форму свертки (интеграла Дюамеля):

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u) du.$$

Словами, отклик системы равен свертке входного сигнала с ее импульсной реакцией (разумеется, с точностью до элемента собственного пространства системы).

Импульсная реакция реализуемой системы, у которой отклик не может появиться раньше воздействия, равна нулю на отрицательной полуоси. Таким образом, для линейных стационарных систем факт выполнения принципа причинности выражается простым условием: $h(t) = 0, t < 0$.

Операция свертки сигналов

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u) du.$$

обладает рядом замечательных свойств. Она коммутативна (перестановочна):

$$(x * y) = (y * x)$$

и ассоциативна:

$$(x * y * z) = ((x * y) * z) = (z * (y * z)),$$

то есть обладает всеми свойствами обычного умножения. Это дает основание рассматривать свертку как операцию перемножения функций (сигналов).

Коммутативность свертки позволяет переписать формулу для отклика $y(t)$ в форме

$$y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)G_u x(t) du,$$

которая обнажает тот факт, что всякая стационарная линейная система на самом деле построена на линии задержки с континуальным числом отводов – она «собирает» отклик $y(t)$ как сумму по всем u сдвинутых по времени на u версий входа $x(t)$ с весами $h(u)$.

Элементарно проверяется, что задержка одного сигнала на τ_1 и другого на τ_2 приводит к задержке свертки на $\tau_1 + \tau_2$:

$$(D_{\tau_1}x * D_{\tau_2}y)(t) = D_{\tau_1}D_{\tau_2}(x * y)(t) = D_{\tau_1+\tau_2}(x * y)(t).$$

То есть операторы D_τ можно выносить за скобку свертки.

Импульсной реакцией тривиальной системы с $y(t) = x(t)$ является δ -функция: $h(t) = \delta(t)$. Это наблюдение приводит к следующим полезным формулам для свертки с δ -импульсом:

$$(\delta * x)(t) = x(t)$$

и для свертки со сдвинутым по времени δ -импульсом:

$$(D_\tau \delta * x)(t) = D_\tau(\delta * x)(t) = D_\tau x(t) = x(t - \tau).$$

Формулы эти остаются верными и когда $x(t) = \delta(t)$:

$$(\delta * \delta)(t) = \delta(t); \quad (D_\tau \delta * \delta)(t) = (\delta * D_\tau \delta)(t) = \delta(t - \tau).$$

Другие неожиданные свойства свертки обнаруживает техника интегрирования по частям. Рассмотрим дифференциал произведения

$$\begin{aligned} d[\partial^{-1}x(u)][y(t-u)] &= [x(u)][y(t-u)]du + [\partial^{-1}x(u)][\partial y(t-u)]d(t-u) = \\ &= [x(u)][y(t-u)]du - [\partial^{-1}x(u)][\partial y(t-u)]du \end{aligned}$$

Интегрируя это по u в бесконечных пределах найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} \partial^{-1}x(u)\partial y(t-u)du + [\partial^{-1}x(u)][y(t-u)] \Big|_{u=-\infty}^{u=+\infty}.$$

Назовем ситуацию регулярной для функций x, y , когда добавку

$$[\partial^{-1}x(u)][y(t-u)] \Big|_{u=-\infty}^{u=+\infty} = \partial^{-1}x(+\infty)y(-\infty) - \partial^{-1}x(-\infty)y(+\infty)$$

можно считать равной нулю. В регулярной ситуации оказывается справедливым тождество

$$\boxed{(x * y) = (\partial^{-1}x * \partial y),}$$

которое выражает факт равенства свертки двух функций свертке между первообразной от одной из них и производной от другой.

Приняв $x' = \partial^n x$ и $y' = \partial^m y$ и рассмотрев свертку $(x' * y')$, придем к тождеству

$$(\partial^n x * \partial^m y) = (\partial^{n-1}x * \partial^{m+1}y), \tag{1}$$

верному в регулярной ситуации для функций $\partial^{-1}x', y'$.

Свойство регулярности оказывается выполненным универсально, то есть сразу для всех производных и первообразных от функций x, y ,

если эти функции являются правосторонними – тождественно равными нулю на отрицательной полуоси времени. К правосторонним задавлено относятся импульсные реакции $h(t)$ реализуемых систем. Если для таких систем ограничиться также и правосторонними воздействиями $x(t)$, то правило (1) переноса оператора ∂ с одного аргумента свертки на другой становится верным безусловно.

Бросается в глаза, что требование правосторонности функций без ущерба можно заменить более слабым требованием их равенства нулю на интервале $(-\infty, -T)$ при сколь угодно большом T . Однако это мало что дает, поскольку для стационарных систем выбор начала отсчета времени произволен и его всегда можно сместить в точку $-T$. Существенно, таким образом, не положение точки $-T$, а бесконечность длины интервала $(-\infty, -T)$, на котором обе функции обращаются в нуль.

Свойства регулярности универсально выполняются также и для левосторонних функций, равных нулю на правой полуоси времени. К функциям этого рода приводят обращения реализуемых систем во времени, которые получаются при формальной замене t на $-t$. Примечательно, что воздействие на входе обращенной во времени реализуемой системы оказывает влияние только на прошлое, но не на будущее.

Импульсная реакция $h(t)$ не вполне подходит для экспериментального исследования – не ясно как δ -импульс можно подать на вход системы физически. На практике предпочитают пользоваться иными тестовыми сигналами, которые конструируются как последовательные первообразные от δ -импульса.

Первая первообразная от δ -импульса

$$\theta(t) = \partial^{-1}\delta(t) = \int_{-\infty}^t \delta(u) du = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0 \\ 0 & \text{при } t \leq 0 \end{cases}$$

известна как θ -функция (единичная ступень). Естественно, что ее производная – это δ -функция: $\partial\theta(t) = \partial\partial^{-1}\delta(t) = \delta(t)$.

Первообразная от $\theta_0(t) = \theta(t)$ – это линейно нарастающая функция

$$\theta_1(t) = \partial^{-1}\theta(t) = \int_{-\infty}^t \theta(u) du = t\theta(t); \quad \partial\theta_1(t) = \theta(t), \quad \partial^2\theta_1(t) = \delta(t).$$

Вообще, n -кратная первообразная θ -функции имеет вид

$$\theta_n(t) = \partial^{-n}\theta(t) = \frac{t^n}{n!}\theta(t); \quad \partial^n\theta_n(t) = \theta(t), \quad \partial^{(n+1)}\theta_n(t) = \delta(t).$$

Переходной характеристикой $h_n(t)$ порядка $n, n \geq 0$ называют

реакцию системы на тестовый входной сигнал $\theta_n(t)$. Имеем

$$h_n(t) = (\theta_n * h) = (\partial^{n+1} \theta_n * \partial^{-(n+1)} h) = (\delta * \partial^{-(n+1)} h) = \partial^{-(n+1)} h(t).$$

Таким образом, переходная характеристика $\theta_n(t)$ порядка n – это $(n+1)$ -кратная первообразная от импульсной реакции $h(t)$. В частности, чаще всего исследуемая экспериментально переходная характеристика $h_0(t)$ порядка нуль – реакция системы на единичную ступень $\theta_0(t) = \theta(t)$ – это первая первообразная от импульсной реакции $h(t)$.

Переходная характеристика $h_0(t)$ порядка нуль выделена среди прочих своей безразмерностью – ее значения не зависят от выбора единицы измерения времени. В отличие от нее, импульсная реакция имеет размерность $1/[T]$, такую же, как и у ее «предка» – обобщенной функции $\delta(t)$, а переходная характеристика $h_k(t)$ порядка $k > 1$ – размерность $[T^k]$. Значения этих характеристик при перекалибровке шкалы времени изменяются.

Каждая из переходных характеристик $h_n(t)$ дает о системе ту же информацию, что и ее импульсная реакция $h(t)$, поскольку $h(t) = \partial^{(n+1)} h_n(t)$. Более того, переходные характеристики можно использовать наравне с импульсными реакциями для нахождения откликов на односторонние входы $x(t)$:

$$y(t) = (h * x) = (\partial^{-(n+1)} h * \partial^{(n+1)} x) = (h_n * \partial^{(n+1)} x).$$

Отклик определяется сверткой переходной характеристики порядка $n \geq 0$ с $(n+1)$ -й производной от входа.

4. Передаточная функция

Всякая линейная система – это линейное отображение бесконечномерного пространства входов в такое же пространство выходов. В линейных пространствах конечной размерности n работает техника диагонализации линейных операторов H за счет перехода к базису из собственных векторов.

Число λ называют собственным значением линейного оператора с матрицей H , если существует вектор x – собственный вектор H , такой что $Hx = \lambda x$. Собственный вектор x удовлетворяет системе линейных уравнений $(H - \lambda I)x = 0$, которая имеет ненулевое решение лишь при условии, что $\det(H - \lambda I) = 0$. Это дает характеристическое уравнение степени n относительно собственных значений λ , которое имеет ровно n корней с учетом их кратностей.

В простой ситуации, когда все корни λ_i характеристического уравнения различны, матрицы уравнений $(H - \lambda_i I)x = 0$ имеют ранг

$(n - 1)$. При этом каждое из них определяет одномерное собственное пространство – пространство собственных векторов с собственным значением λ_i . Оператор H отображает собственные пространства в себя: $Hx = \lambda_i x$. Поэтому в базисе из собственных векторов матрица H становится диагональной. Ситуация с кратными корнями несколько сложнее – кратным корням отвечают многомерные собственные пространства, инвариантные относительно действия оператора H . Причем, прямое соответствие между кратностью корня и размерностью собственного пространства отсутствует.

Перенос этих представлений на линейные отображения функциональных пространств бесконечной размерности приводит в **частотную область**, которая дает мощные альтернативные средства анализа стационарных линейных систем.

В идейном плане все просто. Пусть дана система H , отображающая пространство входов X в пространство выходов Y . Сложность в том, что пространства эти слишком уж объемны – бесконечномерны. Хорошо бы разложить их на относительно простые подпространства, но так чтобы оператор системы H отображал каждое из этих подпространств внутрь себя. Тогда система распадется на подсистемы, действующие каждая в своем подпространстве. Изучив поведение систем в подпространствах, можем встать на путь факторизации: разложим вход $x(t)$ в сумму компонент $x_i(t), i \in I$ из подпространств, найдем отклик $y_i(t), i \in I$ на каждую из компонент, а затем соберем результат $y(t)$ как сумму частичных откликов $y_i(t)$.

Главная трудность на этом пути – выбрать подпространства так, чтобы оператор H отображал их в себя, обеспечивая «сцепление» каждого из подпространств входов с таким же подпространством выходов. Для произвольной линейной системы эти приводят к изучению собственных пространств самого оператора H , о котором мало что известно. Замечательно, что для стационарных (инвариантных во времени) систем «сцепление» удается обеспечить, выбрав в качестве подпространств собственные (инвариантные) пространства группы операторов сдвига во времени D_τ .

В самом деле, пусть $X_\lambda \subset X$ – собственное пространство оператора D_τ с собственным значением λ :

$$D_\tau X_\lambda = \lambda X_\lambda.$$

Обозначим через Y' образ X_λ при действии оператора H : $Y' = HX_\lambda$. Имеем

$$D_\tau Y' = D_\tau HX_\lambda = HD_\tau X_\lambda = \lambda HX_\lambda = \lambda Y'.$$

Значит Y' – это также собственное пространство D_τ с тем же собственным значением. Таким образом, оператор H произвольной линейной стационарной системы отображает собственные пространства операторов сдвига в себя. Это и открывает возможность факторизации стационарных систем по этим пространствам.

Простая иллюстрация природы «сцепления» инвариантных подпространств дана на рис. 4. Сдвиг $x(t - \tau)$ входа $x(t)$ из X_λ в то же время является и результатом $\lambda x(t)$ умножения $x(t)$ на собственное значение λ . Поскольку система линейна, отклик на $\lambda x(t)$ равен $\lambda y(t)$. Поскольку она стационарна, отклик на $x(t - \tau)$ равен $y(t - \tau)$. Но это один и тот же отклик. Поэтому $y(t - \tau) = \lambda y(t)$, то есть выход лежит в подпространстве с тем же собственным значением, что и вход.



Рис. 4. Механизм сцепления инвариантных пространств

Осталось выяснить, каковы же инвариантные подпространства группы операторов сдвига. Прежде всего, $D_\tau = e^{-\tau\partial}$. Поэтому собственное значение λ оператора дифференцирования ∂ одновременно является и собственным значением $e^{-\lambda\tau}$ оператора D_τ . Это означает, что инвариантные пространства оператора дифференцирования совпадают с инвариантными пространствами сразу всей группы операторов сдвига.

Собственные функции оператора дифференцирования элементарно находятся из уравнения:

$$\partial x(t) = \frac{dx}{dt} = \lambda x(t) \Rightarrow x(t) = ce^{\lambda t}.$$

Оказывается, что каждому комплексному числу $\lambda = p$ отвечает одномерное пространство V_p^1 функций $x(t) = c_p e^{pt}$, где c_p -произвольное комплексное число (**комплексная амплитуда**). Это пространство является сразу и собственным пространством оператора дифферен-

цирования с собственным значением p

$$\partial x(t) = \partial c_p e^{pt} = c_p \frac{d}{dt} e^{pt} = p c_p e^{pt} = p x(t)$$

и собственным пространством операторов сдвига

$$D_\tau x(t) = c_p e^{p(t-\tau)} = e^{-p\tau} c_p e^{pt} = e^{-p\tau} x(t)$$

с собственными значениями $e^{-p\tau}$.

Параметр $p = \delta + j\omega$ – это комплексная частота – точка в комплексной p -плоскости, элементами которой являются все мыслимые собственные значения оператора дифференцирования. Экспонента от комплексного аргумента определяется формулой

$$e^{pt} = e^{(\delta+j\omega)t} = e^{\delta t} e^{j\omega t} = e^{\delta t} (\cos \omega t + j \sin \omega t),$$

а собственная функция $x(t) = c_p e^{pt}$ с комплексной амплитудой

$$c_p = c_i + j c_q = |c_p| e^{j\varphi}; \quad |c_p| = \sqrt{c_i^2 + c_q^2}, \quad \varphi = \arg c_p = \operatorname{arctg} \frac{c_i}{c_q}$$

имеет вид

$$x(t) = c_p e^{pt} = |c_p| e^{j\varphi} e^{\delta t} e^{j\omega t} = |c_p| e^{\delta t} (\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)).$$

Это комплекснозначная функция, вещественная и мнимая части которой являются гармоническими колебаниями частоты ω с амплитудой, экспоненциально нарастающей по закону $e^{\delta t}$. Модуль комплексной амплитуды c_p имеет смысл амплитуды гармонического колебания, а ее аргумент $\arg c_p$ – смысл его начальной фазы.

Точкам $p = j\omega$ на мнимой оси p -плоскости отвечают пространства гармонических собственных функций вида

$$x(t) = c_p e^{j\omega t} = |c_p| (\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)).$$

Поведение систем в одномерных инвариантных пространствах описывается достаточно просто, рис. 5 Возьмем вход $x(t) = x_p e^{pt}$ из инвариантного пространства V_p^1 . Тогда выход $y(t)$ заведомо лежит в пространстве с тем же собственным значением p . Пусть система не изменяет размерность инвариантного пространства с собственным значением p . Такую точку p естественно назвать невырожденной. Тогда выход – это также некоторая функция из V_p^1 , то есть $y(t) = y_p e^{pt}$. Видно, что связь между входом и выходом вполне определяется комплексным числом

$$H(p) = \frac{y_p}{x_p}; \quad \Rightarrow \quad y_p = H(p)x_p,$$

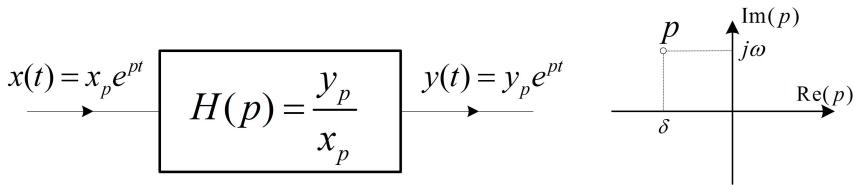


Рис. 5. Передаточная функция системы

которое задает закон преобразования комплексной амплитуды воздействия x_p в комплексную амплитуду отклика $y_p = H(p)x_p$.

Значение $H(p)$ может зависеть от выбора точки p . Эта зависимость задает некоторую функцию $H(p)$, определенную во всей p -плоскости. Это так называемая **передаточная функция** системы. Во всех точках, где система невырождена, передаточная функция принимает конечное, отличное от нуля, комплексное значение:

$$H(p) = |H(p)|e^{j \arg H(p)} = A(p)e^{j\psi(p)}.$$

Передаточная функция и дает описание системы в частотной области.

На мнимой оси p -плоскости, в области гармонических инвариантных пространств, передаточная функция становится **комплексным коэффициентом передачи**

$$H(p)|_{p=j\omega} = K(j\omega) = |K(j\omega)|e^{j \arg K(j\omega)} = A(\omega)e^{j\psi(\omega)}.$$

С этими коэффициентами ассоциирован гармонический анализ стационарных линейных систем.

Обсудим смысл комплексного коэффициента передачи. Пусть на входе системы действует комплексный гармонический сигнал с амплитудой x_m и нулевой начальной фазой: $x(t) = x_m e^{j\omega t}$. Отклик найдем умножением на коэффициент передачи:

$$y(t) = K(j\omega)x(t) = A(\omega)e^{j\psi(\omega)}x_m e^{j\omega t} = x_m A(\omega)e^{j(\omega t + j\psi(\omega))}.$$

Видно, что амплитуда отклика $y_m = x_m A(\omega)$ получается из амплитуды входа x_m умножением на модуль комплексного коэффициента передачи системы $A(\omega)$, а его фаза $\psi(\omega)$ равна аргументу коэффициента передачи.

Функцию $A(\omega) = |K(j\omega)|$ называют **амплитудно-частотной** (или просто амплитудной) характеристикой системы (АЧХ). Ее значение

в точке ω определяет закон преобразования амплитуды гармонического сигнала частоты ω при прохождении через систему. Функция $\psi(\omega) = \arg K(j\omega)$ – это **фазо-частотная** (фазовая) характеристика (**ФЧХ**). Ее значение в точке ω – это фазовый сдвиг (в радианах) между гармоническими сигналами на выходе и входе системы. Ясно, что задание АЧХ и ФЧХ вполне определяют комплексный коэффициент передачи системы: $K(j\omega) = A(\omega)e^{j\psi(\omega)}$.

Передаточные функции $H(p)$ широкого класса систем однозначно определяется аналитическим продолжением комплексного коэффициента передачи $K(j\omega)$ с мнимой оси на всю p -плоскость. Технически такое продолжение сводится к замене $j\omega$ на p с формальным распространением области определения на всю p -плоскость. Для таких систем задание АЧХ и ФЧХ вполне определяет и передаточную функцию в целом.

Пример 1. Идеальный усилитель со входом $x(t)$ и выходом $y(t) = Kx(t)$. Входу $x(t) = x_p e^{pt}$ из инвариантного пространства V_p^1 отвечает выход $y(t) = Kx(t) = Kx_p e^{pt}$ с амплитудой $y_p = Kx_p$. Передаточная функция постоянна $H(p) = K$. Она аналитична во всей комплексной плоскости, что всегда говорит о безынерционности системы. Комплексный коэффициент передачи тот же: $K(j\omega) = K$.

Пример 2. Линия задержки на τ со входом $x(t)$ и выходом $y(t) = x(t-\tau)$, реализующая оператор задержки D_τ . Откликом этой системы на вход $x(t) = x_p e^{pt}$ является выход $y(t) = x_p e^{p(t-\tau)} = x_p e^{-p\tau} e^{pt}$ с амплитудой $y_p = x_p e^{-p\tau}$. Для передаточной функции системы находим: $H(p) = \frac{y_p}{x_p} = e^{-p\tau}$. Эта функция аналитична во всей комплексной плоскости. Форма комплексного коэффициента передачи $K(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$ приводит к константе $A(\omega) = 1$ для амплитудно-частотной характеристики и линейной функции $\psi(\omega) = -\omega\tau$ – для фазо-частотной.

5. Как возникают комплексные системы

Привлечение частотной области к анализу стационарных линейных систем непременно сопровождается переходом от вещественных систем к комплексным. Это дает начало такому важному инструменту математической физики как **метод комплексных амплитуд**. После того, как технические приемы работы с этим методом освоены, вникать в природу комплексности становится, собственно говоря, неизбежно. Преодолевая начальный дискомфорт, каждый останавливается на некотором удовлетворяющем его запросы уровне понимания.

Мир комплексных систем на самом деле интересен и сам по себе, главным образом, в связи с цифровой обработкой сигналов. Причина же вторжения в этот мир при анализе сугубо вещественных систем чисто техническая – это просто вопрос удобства. Все дело в том, что в пространстве вещественных сигналов группа операторов сдвига не имеет одномерных собственных пространств. Минимальная размерность инвариантного вещественного пространства равна двум. К примеру, гармонические инвариантные пространства с частотами $p = j\omega$ – это двумерные линейные оболочки базисных гармонических сигналов $\cos \omega t, \sin \omega t$, состоящие из сигналов вида

$$x(t) = a \cos \omega t - b \sin \omega t \quad (2)$$

с произвольными векторами коэффициентов (a, b) .

Легко проверить, что сдвиг $D_\tau x(t) = x(t - \tau)$ выражается той же линейной комбинацией

$$x(t - \tau) = a' \cos \omega t - b' \sin \omega t,$$

но с другим вектором коэффициентов (a', b') вида

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega \tau & \sin \omega \tau \\ -\sin \omega \tau & \cos \omega \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = D_\tau \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Матрица D_τ , преобразующая вектор (a, b) в (a', b') , – это оператор поворота плоскости (a, b) на угол $\theta = \omega \tau$ по часовой стрелке. На самом деле эта матрица уже является комплексным числом

$$\begin{bmatrix} \cos \omega \tau & \sin \omega \tau \\ -\sin \omega \tau & \cos \omega \tau \end{bmatrix} = \cos \omega \tau - j \sin \omega \tau = e^{-j\omega \tau},$$

если заметить что между множеством комплексных чисел $z = u + jv$ и множеством матриц

$$\begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix} \quad (3)$$

с обычным матричным умножением имеется взаимно-однозначное соответствие (изоморфизм). В самом деле, Пусть $z = u + jv$, $Z = U + jV$. Тогда $zZ = (uU - vV) + j(uV + vU)$. Или в матричном виде

$$zZ = \begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & -V \\ V & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uU - vV & -uV - vU \\ uV + vU & uU - vV \end{bmatrix}$$

Если бы комплексные числа $z = u + jv$ изначально вводились как матрицы специального вида (3), это избавило бы от многих спекуляций по поводу мистической природы мнимой единицы – она оказалось бы просто матрицей

$$j = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad j^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1.$$

Далее, в невырожденной точке $j\omega$ стационарная система отображает двумерное пространство входов в двумерное же пространство выходов. Входу $x(t) = a \cos \omega t - b \sin \omega t$ должен при этом отвечать выход

$$y(t) = A \cos \omega t - B \sin \omega t,$$

вектор (A, B) коэффициентов которого есть результат линейного преобразования вектора (a, b) с некоторой невырожденной матрицей H .

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Это отображение стационарно, если матрица H коммутирует с матрицами сдвига во времени: $HD_\tau = D_\tau H$. Простая проверка показывает, что требование коммутативности выполняется только при условии, что $h_{11} = h_{22}$, $h_{21} = -h_{12}$. Но тогда матрица H также оказывается эквивалентной комплексному числу. Таким образом, закон преобразования двумерных инвариантных пространств стационарной системой сводится к умножению на комплексное число, эквивалентное комбинации поворота и растяжения. Не любое невырожденное линейное преобразование сводится к такой комбинации.

Можно отказаться от комплексных систем. Но тогда придется оперировать двумерными векторами коэффициентов (a, b) и матрицами линейных отображений H в форме (3), объявив областью значений комплексного коэффициента передачи $K(j\omega)$ множество этих матриц. При этом мы оказываемся в положении, когда фактическое оперирование комплексными числами маскируется запретом на упоминание о них. Разумеется, проще называть вещи своими именами.

Для окончательного перехода в комплексную область не хватает процедуры построения комплексного аналога вещественного гармонического сигнала. Такая процедура хорошо известна. Комплексный аналог $x^+(t)$ конструируется добавлением к вещественному сигналу $x(t) = a \cos \omega t - b \sin \omega t$ мнимой добавки

$$\begin{aligned} x^+(t) &= (a \cos \omega t - b \sin \omega t) + j(a \sin \omega t + b \cos \omega t) = \\ &= (a + jb)(\cos \omega t + j \sin \omega t) = (a + jb)e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Форма мнимой добавки определяется заменой $\cos \omega t \rightarrow \sin \omega t$, $\sin \omega t \rightarrow -\cos \omega t$ и приводит к комплексной гармонике $e^{j\omega t}$ с комплексной амплитудой $a + jb$.

В матричном виде этому отвечает переход от сигнала $x(t)$ к матрице

$$\begin{bmatrix} a \cos \omega t - b \sin \omega t & -a \sin \omega t - b \cos \omega t \\ a \sin \omega t + b \cos \omega t & a \cos \omega t - b \sin \omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}.$$

Полезность матричной формы обусловлена тем, что пару амплитуд (a, b) удается задать одним матричным множителем, который, к тому же, оказывается эквивалентным комплексному числу $a + jb$.

Переход к комплексному аналогу обратим. Исходный сигнал восстанавливается выделением вещественной части:

$$x(t) = \operatorname{Re}(x^+(t)) = \frac{x^+(t) + x^{+*}(t)}{2} = \operatorname{Re}((a+jb)e^{j\omega t}) = a \cos \omega t - b \sin \omega t.$$

Пример 1. Найдем комплексный аналог $x^+(t)$ сигнала $x(t) = \sqrt{3} \cos \omega t - \sin \omega t$:

$$\begin{aligned} x^+(t) &= (\sqrt{3} \cos \omega t - \sin \omega t) + j(\sqrt{3} \sin \omega t - \cos \omega t) = \\ &= (\sqrt{3} + j)(\cos \omega t + j \sin \omega t) = 2e^{j\frac{\pi}{6}} e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Можно действовать иначе: $x(t) = \sqrt{3} \cos \omega t - \sin \omega t = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$. Поэтому

$$x^+(t) = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + 2j \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = 2e^{j(\omega t + \frac{\pi}{6})}.$$

Пример 2. Найдем вещественный аналог $x(t)$ сигнала $x^+(t) = (1+j)e^{j\omega t}$:

$$x^+(t) = (1+j)e^{j\omega t} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\omega t} = \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + j\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$x(t) = \operatorname{Re}(x^+(t)) = \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Геометрическая иллюстрация этих переходов дана на рис. 6. Заметим, что комплексная гармоническая функция $e^{j\omega t}$ описывает равномерное движение по единичной окружности в комплексной плоскости: ее модуль

$$|e^{j\omega t}| = |\cos \omega t + j \sin \omega t| = \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = 1$$

всегда равен единице, а аргумент $\theta = \arctg \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} = \omega t$ линейно нарастает со временем. Работая с вещественным аналогом $\cos \omega t$, мы имеем дело с проекцией кругового движения на вещественную ось.

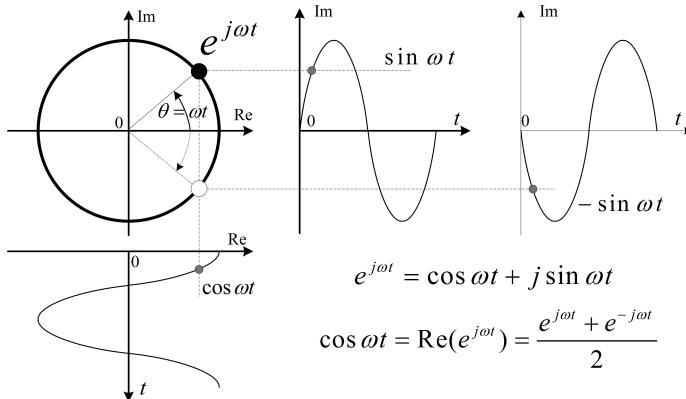


Рис. 6. Комплексные аналоги гармонических сигналов

Переход от вещественной функции $\cos \omega t$ к комплексному аналогу $e^{j\omega t}$ – это восстановление движения по окружности по его вещественной проекции. Оно обеспечивается добавлением второй проекции $\sin \omega t$. Получается $\cos \omega t + j \sin \omega t = e^{j\omega t}$. Заметим, что движение по окружности не восстанавливается по проекции на вещественную ось однозначно. В качестве второй проекции можно выбрать также и $-\sin \omega t$. Это приведет к функции $\cos \omega t - j \sin \omega t = e^{-j\omega t}$, которая описывает движение по той же окружности, но в противоположном направлении.

Проекция на вещественную ось – это сумма двух вращений в противоположные стороны:

$$\cos \omega t = \frac{e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}.$$

Вырисовывается следующая картина. На самом деле все системы комплексны. Их одномерные инвариантные пространства порождаются функциями $x_p e^{pt}$, которые задают движение точки в комплексной плоскости. Будучи существами «вещественными», мы не в состоянии наблюдать эти движения в полной мере, а вынуждены ограничиваться их вещественными проекциями. Каждая такая проекция есть сумма движения $x_p e^{pt}$ и сопряженного движения $x_p^* e^{p^*t}$. Мы не способны

подать на вход системы, «настоящий» комплексный сигнал $x_p e^{pt}$, а должны прибегать к вещественными комбинациям

$$x(t) = \frac{x_p e^{pt} + x_p^* e^{p^* t}}{2}$$

пар таких сигналов, взятых из пространств с собственными значениями p, p^* . При прохождении такой комбинации через систему на выходе получается сигнал

$$y(t) = \frac{H(p)x_p e^{pt} + H(p^*)x_p^* e^{p^* t}}{2},$$

где $H(p), H(p^*)$ – значения передаточной функции системы в точках p, p^* .

Назовем систему вещественной, если вещественный сигнал на ее входе всегда дает вещественный отклик. Для вещественности отклика $y(t)$ необходимо, чтобы второе слагаемое в числителе было результатом комплексного сопряжения первого. Это требует выполнения условия

$$H(p^*) = H^*(p),$$

которое и дает критерий вещественности системы в форме свойства ее передаточной функции. Система, с передаточной функцией, не удовлетворяющей этому свойству, вещественной не является.

Чаще всего приходится иметь дело с рациональными передаточными функциями в форме отношения двух многочленов

$$H(p) = \frac{B(p)}{A(p)}; \quad A(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i, B(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i$$

Такая передаточная функция описывает вещественную систему, если все коэффициенты a_i, b_i – вещественные числа. Тогда оператор комплексного сопряжения удается «опустить» на p , не меняя значений коэффициентов.

6. Аналитические сигналы

Вещественный сигнал $\cos \omega t$ преобразуется в комплексный аналог двумя способами:

$$\cos \omega t + j \sin \omega t = e^{j\omega t}; \quad \cos \omega t - j \sin \omega t = e^{-j\omega t}.$$

Первый приводит к комплексному гармоническому сигналу $e^{j\omega t}$, который описывает движение по окружности против часовой стрелки. Второй – к сигналу $e^{-j\omega t}$, задающему вращение в противоположную сторону.

Графиками этих функций являются спирали, закрученные вокруг оси t в разные стороны – правую и левую. Природа устроила так, что именно спирали оказываются собственными функциями оператора сдвига – поворот спирали эквивалентен ее перемещению. Это факт известен каждому, кто держал в руках штопор.

Сpirали могут быть левыми и правыми. Это обстоятельство приводит к выделению двух классов сигналов, **аналитических** (типа $e^{+j\omega t}$) и **антианалитических** (типа $e^{-j\omega t}$).

Названия эти навеяны представлениями из теории функций комплексного переменного. Известно, что экспонента $e^z = e^x e^{jy}$ от комплексного аргумента $z = x + jy$ принадлежит к классу целых функций, не имеющих особенностей нигде, кроме бесконечности (∞). Если цепная функция не имеет особенности также и в ∞ , то это константа. Если она имеет в ∞ бесконечный предел (полюс), то это многочлен. Экспонента же имеет в ∞ существенно особую точку, в которой предел отсутствует. Причем, в окрестности ∞ , она демонстрирует весьма забавное поведение. Если уходить в бесконечность по лучу, лежащему в левой полуплоскости, при $x < 0$, то никаких трудностей не обнаруживается – наблюдается экспоненциальное стремление к нулю из-за множителя $e^x = e^{-|x|}$. Проблемы с пределом возникают при движении к ∞ по лучу в правой полуплоскости, при $x > 0$. Тогда e^x уходит в бесконечность, а множитель $e^{jy} = \cos y + j \sin y$ дает осцилляции, которые обеспечивают отсутствие предела.

Если комплексную гармоническую функцию $e^{j\omega t}$ продолжить с вещественной оси t в комплексную плоскость $z = t + ju$, то у результирующей функции $e^{j\omega z} = e^{-\omega u} e^{j\omega t}$, рис. 7а, проблемы с пределом в бесконечности проявятся в нижней полуплоскости. При уходе же в ∞ по любому лучу в верхней полуплоскости будет наблюдаться экспоненциальное стремление к нулю по закону $e^{-\omega|u|}$.

Говорят, что экспонента $e^{j\omega z}$ принадлежит к классу функций, **строго аналитических** в верхней полуплоскости. К этому классу относят аналитические (без особенностей) в верхней полуплоскости функции, которые убывают на бесконечности достаточно быстро для того, чтобы интеграл по полуокружности C_R на рис. 7б стремился к нулю с ростом R . Ограничения таких функций на вещественную ось называют просто аналитическими функциями вещественной переменной t . Соответственно, экспонента $e^{-j\omega z}$ строго аналитична в ниж-

ней полуплоскости, а ее ограничение на вещественную ось относится к классу антианалитических функций.

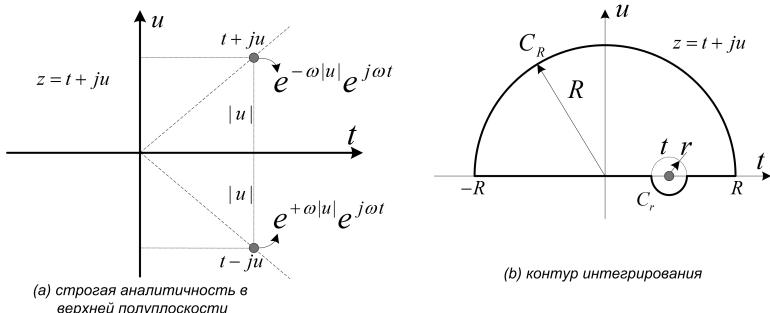


Рис. 7. Плоскость комплексного времени

Как станет ясно из дальнейшего, аналитичность связана с вращением против часовой стрелки – аналитические функции раскладываются по функциям $e^{+j\omega t}$ с положительными частотами. Соответственно, антианалитичность связана с вращением по часовой стрелке. В разложениях этих сигналов присутствуют только экспоненты $e^{-j\omega t}$ с отрицательными частотами.

Аналитические сигналы $x^+(t) = x(t) + j\tilde{x}(t)$ существенно комплексны, а их вещественная и мнимая части связаны интегральными преобразованиями Гильберта:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(u)}{t-u} du; \quad x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{x}(u)}{t-u} du. \quad (4)$$

Доказательство этого факта опирается на технику контурного интегрирования. Интеграл от функции $\frac{x(z)}{z-t}$ по выделенному на рисунке жирным контуру C равен вычету в единственной особой точке t :

$$\oint_C \frac{x(z)}{z-t} dz = 2\pi j x(t).$$

Это известный интеграл Коши из теории функций комплексного переменного. Он расщепляется в сумму интегралов по большой полуокружности C_R , $R \rightarrow \infty$, вещественной оси и малому полукругу C_r , $r \rightarrow 0$.

$$2\pi j x(t) = \oint_{C_R} + \int_{-\infty}^{\infty} + \oint_{C_r}.$$

Интеграл по C_R равен нулю в силу строгой аналитичности $\frac{x(z)}{z-t}$ в верхней полуплоскости. Интеграл по малому полукругу равен $\pi j x(t)$ – половине значения $2\pi j x(t)$ интеграла по малой окружности радиуса r . Поэтому

$$x(t) = \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(v)}{v-t} dv; \quad \Rightarrow \quad x_i(t) + jx_q(t) = \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_i(v) + jx_q(v)}{t-v} dv.$$

Формулы (4) получаются отсюда приравниванием вещественных и мнимых частей слева и справа от знака равенства.

По форме преобразования Гильберта (4) являются свертками с функцией $h(t) = \frac{1}{\pi t}$:

$$\tilde{x}(t) = (x * h)(t) = \left(x(u) * \frac{1}{\pi u} \right)(t); \quad x(t) = -(\tilde{x} * h)(t) = -\left(\tilde{x}(u) * \frac{1}{\pi u} \right)(t).$$

Они могут быть реализованы стационарной линейной системой с импульсной реакцией $h(t) = \frac{1}{\pi t}$. Разумеется, эта система не удовлетворяет принципу причинности – не относится к реализуемым.

Вещественный сигнал $x(t)$ можно преобразовать в комплексный аналитический эквивалент $x^+(t)$, добавив гильбертово преобразование $\tilde{x}(t)$ в качестве мнимой части:

$$x^+(t) = x(t) + j\tilde{x}(t); \quad \tilde{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(u)}{t-u} du;$$

Выражение для антианалитического эквивалента $x^-(t)$ отличается только знаком

$$x^-(t) = x(t) - j\tilde{x}(t).$$

Комплексные гармонические функции $e^{+j\omega t}$ и $e^{-j\omega t}$ как раз являются аналитическим и антианалитическим эквивалентами функции $\cos \omega t$, поскольку

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t}{t-u} du = \sin \omega t; \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t-u} du = -\cos \omega t$$

7. Нули и полюсы

В невырожденных точках p , там где передаточная функция $H(p)$ принимает конечное ненулевое значение, система отображает инвариантное пространства входов $x_p e^{pt}$ в такое же пространство выходов $y_p e^{pt}$ взаимно-однозначно: $y_p = H(p)x_p$. Невырожденность $H(p)$ во

всей p -плоскости говорит о том, что реализуемое системой отображение взаимно-однозначно в каждом из инвариантных пространств, а следовательно и взаимно-однозначно в целом. Такая система безынерционна – не относится к динамическим. Ее нулевое и собственное пространства нульмерны – содержат только тождественно нулевую функцию. Пример – оператор задержки D_τ с $H(p) = e^{-p\tau}$.

У передаточных функций динамических систем всегда имеются особые (вырожденные) точки. Они появляются там, где реализуемое системой отображение инвариантных пространств изменяет их размерность.

Более пристальный анализ обнаруживает, что на самом деле с каждой точкой p -плоскости связано не просто одномерное собственное пространство $V_p^1 = \{x_p e^{pt}\}$, а целое счетное семейство вложенных k -мерных инвариантных пространств

$$0 \subset V_p^1 \subset V_p^2 \subset \cdots \subset V_p^k \subset \cdots$$

Пространство V_p^k – это множество функций $A_k(t)e^{pt}$, где $A_k(t)$ – произвольный многочлен от t степени $(k-1)$:

$$A_k(t) = a_{k-1}t^{k-1} + a_{k-2}t^{k-2} + \cdots + a_2t^2 + a_1t + a_0.$$

Размерность V_p^k равна k – имеется ровно k коэффициентов a_i . Эти пространства действительно инвариантны относительно сдвигов D_τ . В самом деле, пусть $x(t) = A_k(t)e^{pt} \in V_p^k$. Тогда

$$y(t) = D_\tau x(t) = A_k(t - \tau)e^{p(t-\tau)} = e^{-p\tau}A_k(t - \tau)e^{pt}.$$

Немного напрягшись, можно заметить, что $A_k(t - \tau)$ – это также многочлен от t степени $(k-1)$. Более того, у многочленов $A_k(t - \tau)$ и $A_k(t)$ коэффициенты при t^{k-1} просто совпадают. Поэтому $y(t) \in V_p^k$.

Рассмотрим детальнее случай $k = 3$. Пусть $A(t) = at^2 + bt + c$. Вектор коэффициентов (a', b', c') многочлена $A(t - \tau) = a't^2 + b't + c'$ определяется по вектору (a, b, c) коэффициентов $A(t)$ линейным преобразованием с матрицей A_τ :

$$\begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{vmatrix} = A_\tau \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2\tau & 1 & 0 \\ \tau^2 & -\tau & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$$

Задача отыскания собственных значений оператора $D_\tau = e^{-p\tau}A_\tau$ сводится к нахождению корней уравнения $\det(D_\tau - \lambda I) = 0$ с матрицей

$$D_\tau - \lambda I = \begin{vmatrix} e^{-p\tau} - \lambda & 0 & 0 \\ -2\tau e^{-p\tau} & e^{-p\tau} - \lambda & 0 \\ \tau^2 e^{-p\tau} & -\tau e^{-p\tau} & e^{-p\tau} - \lambda \end{vmatrix}$$

Поскольку это матрица нижнетреугольная, ее детерминант равен произведению диагональных элементов:

$$\det(D_\tau - \lambda I) = (e^{-p\tau} - \lambda)^3.$$

Значит $\lambda = e^{-p\tau}$ – это собственные значения оператора D_τ кратности три. Таким образом, пространство V_p^3 – это собственное пространство оператора сдвига D_τ с собственным значением $\lambda = e^{-p\tau}$ кратности 3. Действуя по аналогии, можно показать, что и вообще пространства V_p^k являются собственным для D_τ с собственным значением $\lambda = e^{-p\tau}$ кратности k . Суть в том, что матрица $(D_\tau - \lambda I)$ всегда будет нижнетреугольной.

В невырожденных точках p -плоскости действие системы сводится к умножению входа $x(t) \in V_p^k$ на ненулевое конечное значение передаточной функции: $y(t) = H(p)x(t)$, $y(t) \in V_p^k$. При этом инвариантные пространства входов $V_p^k \subset X$, $k = 0, 1, 2, \dots$ взаимно-однозначно отображаются на инвариантные пространства выходов $V_p^k \subset Y$ той же размерности:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \subset & V_p^1 & \subset & V_p^2 & \subset & \dots & \subset & V_p^k & \subset & V_p^{k+1} & \subset & V_p^{k+2} & \subset & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \subset & V_p^1 & \subset & V_p^2 & \subset & \dots & \subset & V_p^k & \subset & V_p^{k+1} & \subset & V_p^{k+2} & \subset & \dots \end{array}$$

В вырожденных точках реализуемое системой отображение собственных пространств V_p^k их размерность не сохраняет. Размерность может уменьшаться на $k \geq 1$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \subset & V_p^1 & \subset & V_p^2 & \subset & \dots & \subset & V_p^k & \subset & V_p^{k+1} & \subset & V_p^{k+2} & \subset & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \subset & 0 & \subset & 0 & \subset & \dots & \subset & 0 & \subset & V_p^1 & \subset & V_p^2 & \subset & \dots \end{array}$$

Тогда пространства входов размерностей от 0 до k включительно отображаются в нуль, а пространство V_p^k становится нулевым пространством системы: $V_p^k \subset X_0$. Такие точки p -плоскости называют нулями передаточной функции $H(p)$ кратности k . Функция $H(p)$ действительно принимает в этих точках нулевое значение, поскольку одномерное пространство V_p^1 заведомо отображается в нуль.

Те точки p , в которых размерность инвариантных пространств повышается на k :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \subset & 0 & \subset & 0 & \subset & \dots & \subset & 0 & \subset & V_p^1 & \subset & V_p^2 & \subset & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \subset & V_p^1 & \subset & V_p^2 & \subset & \dots & \subset & V_p^k & \subset & V_p^{k+1} & \subset & V_p^{k+2} & \subset & \dots \end{array}$$

оказываются k -кратными полюсами передаточной функции $H(p)$. Полюсы p являются нулями передаточной функции $1/H(p)$ обращенной системы со входом y и выходом x . Поэтому передаточная функция $H(p)$ принимает в них бесконечное значение $H(p) = \frac{1}{0} = \infty$.

Каждому полюсу p кратности k отвечает собственное пространство системы $V_p^k \subset Y_0$. Функции из этого пространства могут присутствовать на выходе автономной системы с нулем на входе.

Подведем итоги. Итак, всякая стационарная линейная система вполне характеризуется передаточной функцией $H(p)$. В невырожденных точках p эта функция принимает конечное ненулевое значение, которое задает закон преобразования входов $x(t) = A_k(t)e^{pt}$, $x(t) \in V_p^k$ в выходы $y(t) = H(p)x(t)$, $y(t) \in V_p^k$.

Передаточная функция $H(p)$ может иметь нули – точки p , где она обращается в нуль, и полюсы, в которых она принимает бесконечное значение.

Нулю кратности k отвечает пространство входов $V_p^k = \{A_k(t)e^{pt}\} \subset X_0$, которые система отображает в нуль. Нулевое пространство системы $X_0 \subset X$ – это сумма пространств V_p^k по всем нулям p ее передаточной функции. Его размерность равна числу нулей с учетом их кратностей.

Полюсу кратности k отвечает собственное пространство выходов $V_p^k = \{A_k(t)e^{pt}\} \subset Y_0$. Это те сигналы, могут наблюдаться на выходе автономной системы с нулем на входе. Собственное пространство системы $Y_0 \subset Y$ – это сумма пространств V_p^k по всем полюсам p ее передаточной функции. Его размерность – порядок системы – это число полюсов с учетом их кратностей.

Для каждой системы $H(p)$ определено ее обращение с передаточной функцией $\frac{1}{H(p)}$. Полюсы обращенной системы совпадают с нулями исходной (с сохранением кратностей) и наоборот. При обращении системы ее нулевое и собственное пространства меняются местами, а в невырожденных точках p коэффициент $H(p)$ пересчета входа x_p в выход y_p ($y_p = H(p)x_p$) заменяется обратным коэффициентом пересчета y_p в x_p : $x_p = \frac{1}{H(p)}y_p$.

Передаточная функция системы важна еще и потому, что она позволяет судить об ее устойчивости.

Стационарная точка x_0 фазового пространства системы устойчива по Ляпунову, если для любой ее окрестности $U \ni x_0$ можно указать окрестность $V \supset U$, такую что траектории $x(t)$, начинающиеся в U при $t = 0$ остаются внутри V при всех $t > 0$. Точка x_0 асимптотически устойчива, если все траектории, начинающиеся в некоторой окрестно-

сти x_0 стремятся к x_0 при $t \rightarrow \infty$. Для нелинейных систем асимптотическая устойчивость не всегда влечет устойчивость по Ляпунову.

С линейными системами все проще. Линейная система асимптотически устойчива, если все траектории $(0, y(t))$ автономной системы сходятся к нулю $(0, 0)$ при $t \rightarrow \infty$. Из асимптотической устойчивости линейной системы вытекает ее устойчивость по Ляпунову. Могут, однако, существовать устойчивые по Ляпунову линейные системы, не являющиеся устойчивыми асимптотически.

Таким образом, устойчивость линейной системы определяется структурой ее собственного пространства $Y_0 \subset Y$. В свою очередь, это пространство вполне определяются набором полюсов передаточной функции системы.

Линейная система асимптотически устойчива, если и только если все полюсы $p = \delta + j\omega$ ее передаточной функции лежат в левой p -полуплоскости, при $\delta < 0$. Тогда все собственные функции $y(t) = A_k(t)e^{-|\delta|t}e^{j\omega t}$ стремятся к нулю в бесконечности. Присутствие хотя бы одного полюса в правой p -полуплоскости при $\delta > 0$ гарантирует наличие экспоненциально растущей собственной функции $y(t) = e^{\delta t}e^{j\omega t}$, что влечет как асимптотическую неустойчивость, так и неустойчивость по Ляпунову. Полюсы кратности 1 на мнимой оси, при $p = j\omega$ дают собственные функции вида $e^{j\omega t}$, которые не растут в бесконечности, но и не стремятся к нулю. Системы с такими полюсами неустойчивы асимптотически, но устойчивы по Ляпунову.

8. Элементарные системы

Далее обсуждаются некоторые элементарные системы с простыми передаточными функциями. Эти системы важны как строительные блоки для конструирования более сложных систем.

Пример 1. Идеальный дифференциатор, рис. 8 – система, формирующая производную от входного сигнала. Постоянную времени τ можно интерпретировать как коэффициент усиления, которому присвоена размерность времени с тем, чтобы уровнять размерности входного и выходного сигналов.

Пусть $x(t) = x_p e^{pt} \in V_p^1$. Тогда

$$y(t) = \tau \frac{dx}{dt} = p\tau x_p e^{pt} = y_p e^{pt}.$$

Передаточная функция

$$H(p) = \frac{y_p}{x_p} = \tau p$$

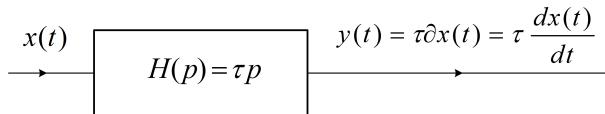


Рис. 8. Идеальный дифференциатор

имеет единственный нуль кратности 1 при $p = 0$. Нулевое пространство одномерно: $X_0 = \{c\}$ – это множество всех констант: постоянный вход $x(t) = c$ отображается дифференциатором нуль. Собственное пространство Y_0 нульмерно – содержит только нуль.

Комплексный коэффициент передачи дифференциатора имеет вид:

$$K(j\omega) = H(p)|_{p=j\omega} = j\omega\tau = \frac{j\omega}{\omega_1}; \quad \omega_1 = \frac{1}{\tau}.$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) $|K(j\omega)| = \frac{\omega}{\omega_1}$ линейно уходит в бесконечность, принимая единичное значение при $\omega = \omega_1$ – на частоте единичного усиления $\omega_1 = 1/\tau$. Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) постоянна: $\psi(\omega) = \arg(j) = \pi/2$. Дифференциатор дает опережение по фазе выходного сигнала на $\pi/2$ на всех частотах.

Пример 2. Идеальный интегратор, рис. 9 – система, формирующая первообразную от входного сигнала.

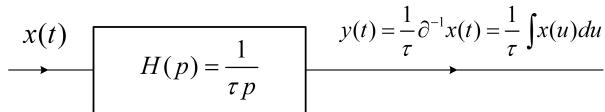


Рис. 9. Идеальный интегратор

Эта система является обращением дифференциатора. Ее передаточная функция имеет вид

$$H(p) = \frac{1}{\tau p}.$$

Имеется единственный полюс кратности 1 в нуле, который порождает одномерное собственное пространство $Y_0 = \{c\}$. При нулевом входе сигнал на выходе интегратора может принимать произвольное постоянное значение: $y(t) = c$, что и квалифицирует его как динамическую

систему. Интегратор не является асимптотически устойчивой системой ввиду наличия полюса на мнимой оси.

Комплексный коэффициент передачи интегратора имеет вид:

$$K(j\omega) = H(p)|_{p=j\omega} = \frac{1}{j\omega\tau} = \frac{\omega_1}{j\omega}; \quad \omega_1 = \frac{1}{\tau}.$$

АЧХ $|K(j\omega)| = \frac{\omega_1}{\omega}$ уходит в бесконечность в нуле, принимая единичное значение на частоте единичного усиления $\omega_1 = 1/\tau$. Бесконечное значение АЧХ в нуле говорит о том, что идеальный интегратор технически не реализуем. ФЧХ интегратора $\psi(\omega) = -\arg(j) = -\pi/2$ описывает запаздывание по фазе на $\pi/2$.

Пример 3. k -кратный дифференциатор – каскадное (последовательное) соединение k -дифференциаторов:

$$y(t) = \tau^k \partial^k x(t) = \tau^k \frac{d^k x(t)}{dt^k}.$$

Передаточная функция

$$H(p) = \tau^k p^k$$

имеет нуль кратности k при $p = 0$. Нулевое пространство $X_0 = V_0^k = \{A_k(t)\}$ порождено многочленами от t степени ($k - 1$).

$$|K(j\omega)| = \frac{\omega^k}{\omega_1^k}, \quad \psi(\omega) = \arg(j^k) = k\frac{\pi}{2}; \quad \omega_1 = \frac{1}{\tau}.$$

Пример 4. k -кратный интегратор – каскадное (последовательное) соединение k -интеграторов:

$$y(t) = \frac{1}{\tau^k} \partial^{-k} x(t).$$

Передаточная функция

$$H(p) = \frac{1}{\tau^k p^k}$$

имеет полюс кратности k в нуле. Собственное пространство $Y_0 = V_0^k = \{A_k(t)\}$ порождено многочленами степени ($k - 1$). Это выходы, которые могут наблюдаться при нулевом входе.

$$|K(j\omega)| = \frac{\omega_1^k}{\omega^k}, \quad \psi(\omega) = -\arg(j^k) = -k\frac{\pi}{2}; \quad \omega_1 = \frac{1}{\tau}.$$

Пример 5. Пропорциональный дифференциатор:

$$y(t) = (\tau \partial + 1)x(t) = \left(\tau \frac{d}{dt} + 1\right)x(t).$$

Пусть $x(t) = x_p e^{pt}$. Тогда

$$y(p) = x_p(p\tau + 1)e^{pt} = y_p e^{pt}; \quad \Rightarrow \quad H(p) = \frac{y_p}{x_p} = 1 + p\tau.$$

Имеется нуль при $p = -\omega_0 = -1/\tau$. Одномерное нулевое пространство X_0 порождено функциями $x(t) = ce^{-\omega_0 t}$.

Пример 6. Интегрирующее звено – обращение пропорционального дифференциатора:

$$y(t) = (\tau \partial + 1)^{-1}x(t). \quad H(p) = \frac{1}{1 + p\tau}.$$

Это система с полюсом в точке $p = -\omega_0 = -1/\tau$. Одномерное собственное пространство Y_0 порождено функциями $x(t) = ce^{-\omega_0 t}$. Система известна как простейший фильтр низких частот. Комплексный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = H(p)|_{p=j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

приводит к следующим формам АЧХ и ФЧХ:

$$|K(j\omega)| = \frac{1}{|1 + j\omega\tau|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}}; \quad \omega_0 = 1/\tau,$$

$$\psi(\omega) = \arg K(j\omega) = \arg 1 - \arg(1 + j\omega\tau) = -\arctg(\omega\tau) = -\arctg(\omega/\omega_0).$$

Частоту $\omega_0 = 1/\tau$ называют верхней граничной частотой. Это частота, на которой модуль коэффициента передачи падает до уровня $1/\sqrt{2} \simeq 0.7$ (-3 dB), а сдвиг по фазе достигает половины $-\pi/4$ предельного значения $-\pi/2$.

Пример 7. Пропорциональный интегратор:

$$y(t) = \left(\frac{1}{\tau} \partial^{-1} + 1\right)x(t) = \left(\frac{1}{\tau} \int dt + 1\right)x(t).$$

Это система с передаточной функцией

$$H(p) = \frac{1}{p\tau} + 1 = \frac{1 + p\tau}{p\tau}.$$

Имеется нуль при $p = -\omega_0 = -1/\tau$ и полюс в нуле. Нулевое пространство X_0 порождено функциями $ce^{-\omega_0 t}$, собственное пространство Y_0 – константами.

Пример 8. Дифференцирующее звено – обращение пропорционального интегратора:

$$y(t) = \left(\frac{1}{\tau} \partial^{-1} + 1 \right)^{-1} x(t). \quad H(p) = \frac{p\tau}{1 + p\tau}.$$

Это система с полюсом в точке $p = -\omega_0 = -1/\tau$ и нулем в точке нуль. Комплексный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = H(p)|_{p=j\omega} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

приводит к следующим формам АЧХ и ФЧХ:

$$|K(j\omega)| = \frac{|j\omega\tau|}{|1 + j\omega\tau|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_0}{\omega})^2}}; \quad \omega_0 = 1/\tau,$$

$$\psi(\omega) = \arg K(j\omega) = \arg j\omega\tau - \arg(1 + j\omega\tau) = \pi/2 - \arctg(\omega/\omega_0).$$

Это простейший фильтр верхних частот. Частота $\omega_0 = 1/\tau$ известна как нижняя граничная частота. Это частота, на которой модуль коэффициента передачи падает до уровня $1/\sqrt{2} \simeq 0.7$ (-3 dB), а опережение по фазе снижается с $\pi/2$ в нуле до $\pi/4$.

Почти все рассмотренные здесь системы нереализуемы технически, поскольку их амплитудно-частотные характеристики уходят в бесконечность либо на нулевой, либо на бесконечной частоте. Исключение составляют интегрирующие и дифференцирующие звенья из примеров 6 и 8, которые элементарно реализуются простейшими RC -цепочками.

9. Как найти передаточную функцию

Чтобы перевести разговоры о передаточных функциях в практическую плоскость, нужно развить какие-то методы их нахождения, опирающиеся на те или иные математические модели физических систем. Хотелось бы также иметь и методику экспериментального исследования этих функций.

Что касается отыскания передаточных функций, то существует два класса методов. Аналитический, опирающийся на описание систем дифференциальными уравнениями, и синтетический, базирующийся на конструировании сложных систем из простых.

Начнем с первого. Пусть система описана некоторыми дифференциальными уравнениями. Если система линейна и стационарна (инвариантна во времени), то это будут линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Для системы с одним входом $x(t)$ и одним выходом $y(t)$ речь непременно пойдет об уравнении вида:

$$B_m(\partial)y(t) = A_n(\partial)x(t),$$

где

$$A_n(\partial) = \sum_{i=0}^n a_i \partial^i = \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i}; \quad B_m(\partial) = \sum_{i=0}^m b_i \partial^i = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i}{dt^i},$$

линейные дифференциальные операторы степеней n и m .

Такая система стационарна. Она отображает инвариантное пространство входов $\{x(t) = x_p e^{pt}\}$ в пространство выходов $\{y(t) = y_p e^{pt}\}$ с тем же собственным значением p . Дифференцирование функций из этих пространств сводится к их умножению на p :

$$\partial^i x(t) = \frac{d^i}{dt^i} x_p e^{pt} = p^i x(t), \quad \partial^i y(t) = p^i y(t).$$

Поэтому

$$B_m(\partial)y_p e^{pt} = A_n(\partial)x_m e^{pt} \Rightarrow y_p B_m(p)e^{pt} = x_p A_n(p)e^{pt}.$$

Для передаточной функции это дает

$$H(p) = \frac{y_p}{x_p} = \frac{A_n(p)}{B_m(p)}.$$

Передаточная функция оказывается рациональной – отношением двух многочленов от p степеней n и m . Ее нули – это n корней многочлена $A_n(p)$ с учетом кратностей, полюсы – это m корней многочлена $B_m(p)$.

Если все коэффициенты a_i, b_i вещественны, то и система оказывается вещественной: $H(p^*) = H^*(p)$. Множество корней многочлена $A_n(p)$ с вещественными коэффициентами a_i замкнуто относительно операции комплексного сопряжения – если p -корень ($A_n(p) = 0$), то и p^* также является корнем, поскольку $A_n(p^*) = A_n^*(p) = 0$. Поэтому все нули и полюсы вещественной системы либо вещественны, либо образуют комплексно сопряженные пары ($p = \delta + j\omega, p^* = \delta - j\omega$).

Система асимптотически устойчива, если все полюсы $p_i = \delta_i + j\omega_i$ лежат в левой p -полуплоскости: $\delta_i < 0$. Для устойчивости по Ляпунову хватает условия $\delta_i \leq 0$.

Выясняется, что передаточные функции весьма широкого класса стационарных линейных систем крайне примитивны – являются вещественно-рациональными функциями комплексной частоты p . Собственно говоря, это и обуславливает чрезвычайную популярность частотной области в инженерной среде.

Синтетические подходы, опирающиеся на конструирования сложных систем из простых, чрезвычайно полезны при анализе электронных схем.

Наряду с каждой уже построенной системой $H(p)$ можно использовать ее обращение с передаточной функцией $H^{-1}(p) = 1/H(p)$. Две системы можно соединить каскадно (последовательно) так, чтобы выход одной был входом другой, или параллельно, объединив входы и объявив выход равным сумме выходов подсистем, рис. 10.

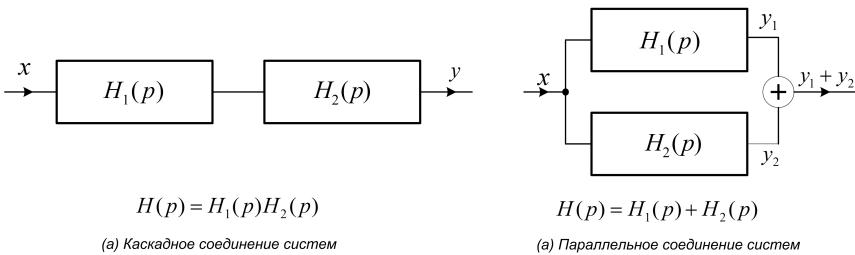


Рис. 10. Композиция систем

Каскадному соединению подсистем отвечает перемножение их передаточных функций:

$$H(p) = H_1(p)H_2(p).$$

Это совсем не так тривиально, как может показаться. Возможны варианты. Может оказаться так, что собственное пространство системы H_1 не пересекается нулевым пространством H_2 . Так бывает, когда полюсы $H_1(p)$ не совпадают с нулями $H_2(p)$. Тогда собственное пространство H_1 целиком «просачивается» на выход, становясь частью собственного пространства комбинированной системы H_1H_2 . При совпадении полюса H_1 с нулем H_2 происходит их взаимное сокращение. Это случай, когда часть собственного пространства H_1 попадает внутрь нулевого пространства H_2 . Стоит удивиться тому, что простое перемножение передаточных функций автоматически учитывает все аспекты анализа соотношений вложенности собственных и нулевых пространств – все сводится к возможным сокращениям нулей с полюсами.

Параллельному соединению подсистем отвечает сложение их передаточных функций:

$$H(p) = H_1(p) + H_2(p).$$

Здесь за невинным по форме сложением рациональных дробей также кроется весьма непростая эквилибристика с формированием нулевого и собственного пространств результирующей системы.

Если к уже имеющимся операциям обращения, перемножения и сложения передаточных функций добавить умножение на константу, то окажется, что все множество рациональных функций можно реализовать на базе одного только дифференциатора $H(p) = p$. Это раскрывает границы возможностей синтетического метода – из дифференциатора удается построить все рациональные передаточные функции и только их. Для расширения класса реализуемых систем требуются иные «кирпичи».

Перейдем к проблеме экспериментального исследования передаточных функций. При поверхностном взгляде все просто. Надлежит подать на вход системы сигнал $x(t) = x_p e^{pt}$ и измерить амплитуду y_p отклика $y(t) = y_p e^{pt}$. Тогда значение передаточной функции в точке p можно будет найти как отношение $H(p) = y_p/x_p$.

Проблема комплексности сигналов преодолевается просто: будем подавать и регистрировать вещественные сигналы

$$x(t) = \frac{x_p e^{pt} + x_p^* e^{p^* t}}{2} = |x_p| e^{\delta t} \cos(\omega t + \varphi); \quad p = \delta + j\omega, \varphi = \arg x_p.$$

При этом в анализе будут участвовать сразу две точки $-p$ и p^* . Но это не создает проблем, поскольку у вещественной системы $H(p^*) = H^*(p)$. Отклик системы примет форму

$$y(t) = \frac{x_p H(p) e^{pt} + x_p^* H^*(p) e^{p^* t}}{2} = |y_p| e^{\delta t} \cos(\omega t + \varphi + \psi(p)),$$

где $H(p) = |H(p)| e^{j\psi(p)}$, а $|y_p| = |H(p)| |x_p|$.

Экспериментальная задача сводится тогда к измерению амплитуды $|y_p|$ и относительной фазы $\psi(p)$ отклика в точке $p = \delta + j\omega$. Требуемое значение $H(p)$ определяется по результатам измерений как

$$H(p) = \frac{|y_p|}{|x_p|} e^{j\psi(p)}.$$

Настоящая трудность заключена в том, что обеспечить присутствие сигнала вида $e^{\delta t} \cos \omega t$ на входе системы в реальном физическом эксперименте совершенно невозможно. Этот сигнал неограничен

во времени. Формально это означает, что для проведения эксперимента потребуется бесконечное время. К тому же он неограниченно нарастает либо на положительной полуоси времени – при $\delta > 0$, либо на отрицательной – при $\delta < 0$.

Приходится ограничиваться гармоническими тестовыми сигналами $\cos \omega t$ с $\delta = 0$, что сужает область исследований до комплексных коэффициентов передачи $K(j\omega) = H(p)|_{p=j\omega}$. Но проблема неограниченности во времени не снимается и этим. В реальности используются тестовые сигналы, которые «включаются» в некоторый вполне конкретный момент времени. Возможность применения таких сигналов обосновывается так: если гармонический тестовый сигнал присутствовал не всегда, а был подан на вход в некоторый момент, то это может вызвать в системе переходный процесс, который будет искажать сигнал на выходе. Однако, если система асимптотически устойчива, то по прошествии достаточного времени она «забудет» о существовании момента включения и станет вести себя так, как если бы сигнал на ее входе присутствовал всегда. Тогда и следует произвести измерения амплитуды и фазы отклика.

Это простое наблюдение и лежит в основе **гармонического анализа** – одного из основных экспериментальных методов исследования стационарных линейных систем. Метод этот распространен настолько, что генератор синусоидальных тестовых сигналов обнаруживается в каждой лаборатории.

В обычной практике переходный процесс, вызванный изменением частоты входного сигнала, затухает быстрее, чем мы успеваем переключить свое внимание с генератора сигнала на измеритель отклика. Тогда о его существовании не приходится слишком беспокоиться. Легко, однако, представить себе систему, у которой от момента изменения частоты на входе до момента, когда можно будет измерять отклик, проходит, скажем, неделя.

Гармонический анализ позволяет снять амплитудно-частотную ($|K(j\omega)|$) и фазо-частотную ($\psi(\omega) = \arg K(j\omega)$) характеристики системы и, тем самым, экспериментально исследовать ее комплексный коэффициент передачи $K(j\omega) = |K(j\omega)|e^{j\psi(\omega)}$ – ограничение передаточной функции $H(p)$ на мнимую ось p -плоскости. Область его применения ограничена асимптотически устойчивыми системами с полюсами в левой полуплоскости. Уже присутствие полюса на мнимой оси приводит к трудностям. К примеру, если сигнал $\sin t$ подать на вход идеального интегратора в момент $t = 0$, то выходной сигнал $y(t)$ не

станет чисто гармоническим никогда:

$$y(t) = \int_0^t \sin(u) du = 1 - \cos t.$$

Добавляется незатухающий сигнал 1 из собственного пространства интегратора.

Передаточные функции широкого класса систем однозначно продолжаются с мнимой оси на всю p -плоскость. В теории функций комплексного переменного это известно как аналитическое продолжение. Продолжение рациональных функций достигается простой заменой аргумента $j\omega$ на комплексную переменную $p = \delta + j\omega$. Так что гармонический анализ, в принципе, подходит и для исследования передаточных функций в целом. В частности, с его помощью можно обнаруживать их нули и полюсы вне мнимой оси.

10. Импедансы двухполюсников

Электрическая RLC -цепь – это соединение элементарных двухполюсников трех типов – резисторов R , индуктивностей L и емкостей C . Выделяют частные классы RL - и RC -цепей, при построении которых обходятся без конденсаторов, или без индуктивностей. В LC -цепях к использованию допускаются только реактивные двухполюсники L и C . В активных цепях к основным конструктивным RLC -блокам добавляются идеальные усилители K .

Всякий двухполюсник – это система, преобразующая ток $i(t)$ в напряжение $u(t)$. Будучи системой, он обладает передаточной функцией $H(p) = \frac{u_p}{i_p}$, которая определяется как отношение комплексной амплитуды u_p напряжения к комплексной амплитуде тока i_p . Для измеряющейся в омах передаточной функции двухполюсника принято специальное название – **импеданс** $Z(p) = H(p)$.

Можно изменить точку зрения, начав считать напряжение $u(t)$ воздействием, а ток $i(t)$ – откликом. Это приведет к обращению передаточной функции $Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{i_p}{u_p}$. Комплексные проводимости $Y(p)$ называют **имmittансами**.

Импедансы $Z(j\omega)$ (и имmittансы $Y(j\omega)$) чаще всего рассматривают как функции, определенные на мнимой оси p -плоскости, в области гармонического анализа. Если быть педантом, то о передаточной функции $H(p)$ следует говорить отдельно, а импедансом называть лишь комплексный коэффициент передачи: $Z(j\omega) = H(p)|_{p=j\omega}$. Мы не придерживаемся этого правила, называя импедансом также и $H(p)$. При

таком подходе буква p приобретает смысл удобного сокращения для комбинации $j\omega$.

Резистор R , рис. 11а, – это безынерционная система. Его импеданс $Z(p) = R$ не зависит от частоты. Индуктивность L , рис. 11б, – это идеальный дифференциатор с импедансом $Z(p) = pL$. Наконец, емкость C , рис. 11с, – это идеальный интегратор с импедансом $Z(p) = 1/pC$. Индуктивность и емкость взаимно двойственны – одна из этих систем является обращением другой.

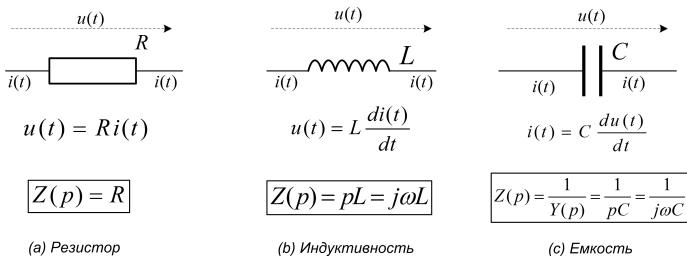


Рис. 11. Импедансы элементарных двухполюсников

Категория импеданса Z распространяет закон Ома $u = iR$, изначально выполняющийся для безынерционных резисторов, на все стационарные линейные двухполюсники: $u_p = i_p Z(p)$. Принципиальное отличие в том, что импеданс связывает не мгновенные значения тока и напряжения, а их комплексные амплитуды u_p, i_p – амплитуды комплексных сигналов $u_p e^{pt}, i_p e^{pt}$ из собственных пространств V_p^1 оператора задержки D_τ . В остальном импеданс Z совершенно аналогичен обычному сопротивлению R .

При расчете электрических цепей можно без ограничений применять весь арсенал традиционных методов и приемов, опирающихся на закон Ома. Для построения уравнений цепи можно применять метод контурных токов или метод узловых потенциалов. Топологию цепей можно упрощать, применяя теорему об эквивалентном генераторе. В конечном итоге расчет любой цепи сводится к решению системы линейных уравнений для комплексных амплитуд напряжений и/или токов.

Сложные цепи конструируются из простых последовательным или параллельным соединением компонентов. При последовательном соединении импедансы двухполюсников складываются: $Z = Z_1 + Z_2$, рис. 12а. Параллельному соединению, рис. 12б, отвечает сложение про-

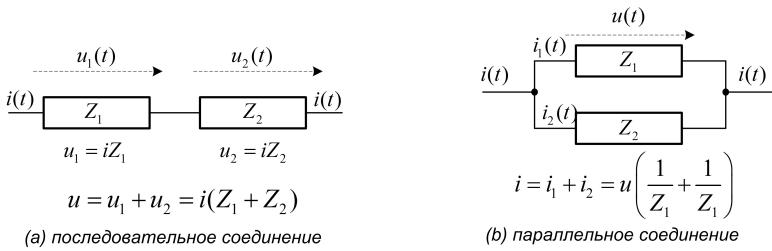


Рис. 12. Соединения импедансов

водимостей:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \Rightarrow Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = Z_1 || Z_2.$$

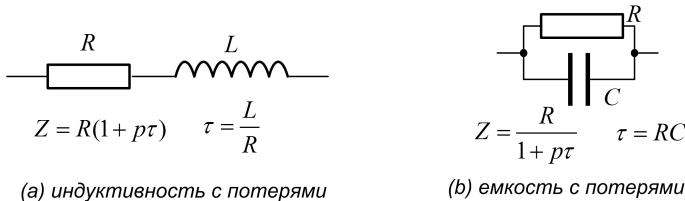


Рис. 13. Реактивные импедансы с потерями

Пример 1. Индуктивность с потерями, 13а. Импеданс этого двухполюсника $Z = R + pL = R(1 + p\frac{L}{R}) = R(1 + p\tau)$ характеризует его как пропорциональный дифференциатор с постоянной времени $\tau = L/R$. Проводимость $Y = \frac{1}{R} \frac{1}{1+p\tau}$ – это интегрирующее звено.

Найдем напряжение на этом двухполюснике, которое возникает при прохождении по нему гармонического тока $i(t) = i_m \cos \omega t$ с амплитудой i_m и нулевой начальной фазой. Комплексный эквивалент этого тока имеет вид $i^+(t) = i_m(\cos \omega t + j \sin \omega t) = i_m e^{j\omega t}$. Комплексная амплитуда напряжения определяется умножением комплексной амплитуды тока i_m на импеданс

$$u_m = Z(j\omega) i_m = i_m R(1 + j\omega\tau) = i_m R \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} e^{j\psi}; \quad \psi = \arctg \omega\tau.$$

Для искомого напряжения находим:

$$u(t) = \operatorname{Re}(u_m e^{j\omega t}) = i_m R \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \cos(\omega t + \psi).$$

Пример 2. Емкость с потерями. 13б. Импеданс

$$Z = \frac{R \frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{R}{1 + pRC} = \frac{R}{1 + p\tau}$$

отвечает интегрирующему звену с постоянной времени $\tau = RC$. Продуктивность $Y = \frac{1}{R}(1 + p\tau)$ – пропорциональному дифференциатору. Ток $i(t) = i_m \cos \omega t$ создает на этой цепи напряжение

$$u(t) = \frac{i_m R}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cos(\omega t + \psi); \quad \psi = -\arctg \omega\tau.$$

Значение импеданса $Z(j\omega)$ – это точка в комплексной Z -плоскости, рис. 14. На вещественной положительной полусоси этой плоскости лежат активные импедансы – резисторы. Их отличает отсутствие фазового сдвига между напряжением и током. Точки на отрицательной полусоси представляют отрицательные сопротивления. На мнимой оси Z -плоскости лежат реактивные импедансы – идеальные индуктивности $Z = j\omega L$ или емкости $Z = -j/\omega C$. Для положительных реактивных импедансов (индуктивностей) фазовый сдвиг между током и напряжением составляет $\arg(j) = +\pi/2$. Отрицательные реактивные импедансы (емкости) дают фазовый сдвиг $-\pi/2$.

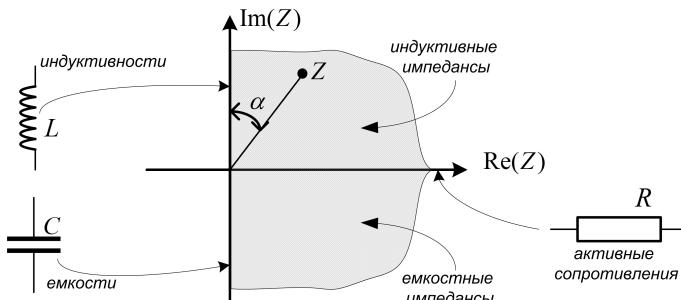


Рис. 14. Плоскость импедансов

Чисто активные и реактивные импедансы с нулевыми мнимой или вещественной частями – это, скорее, идеальные элементы. Импеданс любого физического двухполюсника обладает как активной, так и реактивной составляющими. Физический импеданс относят к реактивным, если представляющая его точка лежит «в окрестности» мнимой

оси. Реактивный импеданс является индуктивным, если эта точка лежит в верхней полуплоскости, и емкостным – если в нижней. Степень идеальности реактивного импеданса Z в технике принято характеризовать значением тангенса угла потерь $\operatorname{tg} \alpha$, рис. 14.

В электрических цепях наблюдаются явления резонансов.

Последовательный резонанс, рис. 15 возникает, когда на некоторой (резонансной) частоте ω_0 индуктивный импеданс одного из двух последовательно соединенных двухполюсников оказывается равным емкостному импедансу другого:

$$\operatorname{Im}(Z_1(j\omega_0)) = -\operatorname{Im}(Z_2(j\omega_0)).$$

На этой частоте суммарный импеданс $Z_1(j\omega_0) + Z_2(j\omega_0) = R$ оказывается чисто активным, а модули мнимых составляющих обоих импедансов принимают одно и то же значение $\varrho = |\operatorname{Im}(Z_1(j\omega_0))| = |\operatorname{Im}(Z_2(j\omega_0))|$, именуемое характеристическим сопротивлением. Добротность $Q = \varrho/R$ характеризует «остроту» резонанса. Резонанс оказывается ярко выраженным при больших Q , когда резонансное сопротивление R мало по сравнению с характеристическим сопротивлением ϱ . В этой ситуации на графике $|Z(j\omega)|$ модуля полного сопротивления наблюдается резкий провал в точке резонанса.

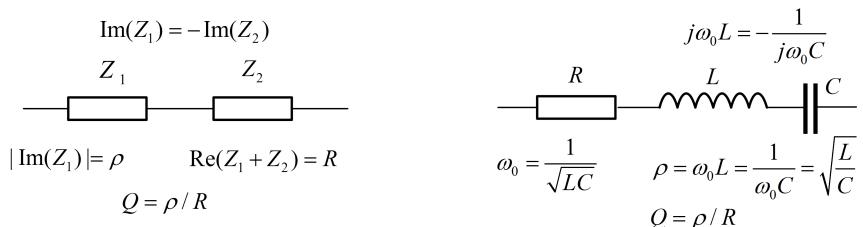


Рис. 15. Последовательный резонанс

Пример 3. Последовательный колебательный контур, рис. 15. Резонанс наблюдается на частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, на которой импедансы емкости и индуктивности принимают одно и то же абсолютное значение $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Полное сопротивление цепи составляет при этом R , что дает значение $Q = \varrho/R$ для добротности резонанса.

Полный импеданс контура

$$Z = R + pL + \frac{1}{pC} = R \left(1 + Q \left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right) \right) = R \left(1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) = R(1 + ja(\omega))$$

просто выражается через обобщенную расстройку

$$a(\omega) = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \simeq 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}; \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0.$$

Модуль импеданса $|Z| = R\sqrt{1 + |a(\omega)|^2}$ принимает минимальное значение $R = \varrho/Q$ на частоте резонанса и быстро растет при уходе от нее в ту или иную сторону.

Введя относительную частоту $s = p/\omega_0$ и положив $1/Q = 2\xi$, формулу для импеданса $Z(s)$ приведем к виду

$$Z(s) = R \left(1 + Q \left(s + \frac{1}{s} \right) \right) = \varrho \frac{s^2 + 2\xi s + 1}{s}.$$

Имеется полюс при $s = 0$ и два нуля. При $\xi > 1$ нули вещественны: $s_{\pm} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$. При $\xi > 1$ они образуют комплексно-сопряженную пару: $s_{\pm} = -\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2}$.

Параллельный резонанс, рис. 16, – это явление, двойственное к последовательному. Он наблюдается, когда на некоторой частоте ω_0 взаимно уничтожаются реактивные составляющие проводимостей двух параллельных ветвей:

$$\text{Im}(Y_1(j\omega_0)) = -\text{Im}(Y_2(j\omega_0)).$$

При этом полная проводимость становится вещественной $Y = Y_1 + Y_2 = 1/R$. Остроту резонанса характеризуется его добротность $Q = R/\rho$, где ρ – характеристическое сопротивление: $1/\varrho = |\text{Im}(Y_1(j\omega_0))| = |\text{Im}(Y_2(j\omega_0))|$. При высоких Q проводимость цепи имеет в точке резонанса выраженный минимум. Соответственно, сопротивление цепи – выраженный максимум.

Пример 4. Параллельный колебательный контур, рис. 16. Резонанс наблюдается на частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, на которой импедансы емкости и индуктивности принимают одно и то же абсолютное значение $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Полное сопротивление цепи составляет при этом R , что дает значение $Q = R/\varrho$ для добротности резонанса.

Полный импеданс контура

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{\frac{1}{R} + pC + \frac{1}{pL}} = \frac{R}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{R}{1 + ja(\omega)}$$

выражается через обобщенную расстройку

$$a(\omega) = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \simeq 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}; \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0.$$

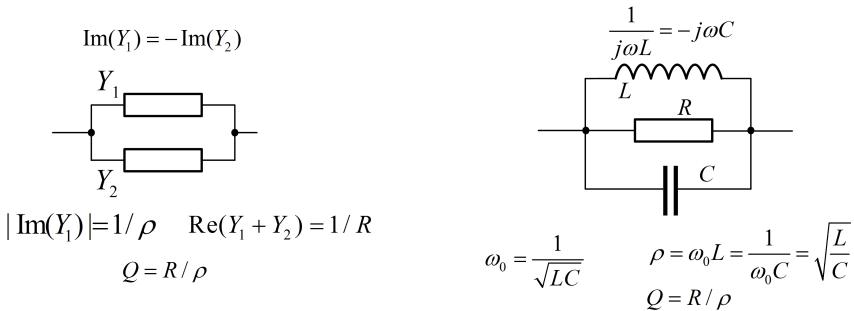


Рис. 16. Параллельный резонанс

Модуль импеданса $|Z| = R/\sqrt{1+|a(\omega)|^2}$ принимает максимальное значение $R = Q\rho$ на частоте резонанса и быстро падает при уходе от нее в ту или иную сторону. Границы полосы пропускания по уровню $1/\sqrt{2} \simeq 0.7$ достигаются при $a(\omega) = \pm 1$. Ширина полосы, найденная как разность положительных корней пары квадратных уравнений $a(\omega) = \pm 1$, составляет $\Delta\omega = \omega_0/Q$. К тому же результату приводит использование аппроксимации $a(\omega) \simeq 2Q\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \pm 1$, из которой вытекает оценка $\Delta\omega = \pm\omega_0/2Q$ для односторонних полос.

Введя относительную частоту $s = p/\omega_0$ и положив $1/Q = 2\xi$, формулу для импеданса $Z(s)$ приведем к виду

$$Z(s) = \frac{R}{1 + Q(s + \frac{1}{s})} = \rho \frac{s}{s^2 + 2\xi s + 1}.$$

Имеется нуль при $s = 0$ и два полюса. При $\xi > 1$ полюсы вещественны: $s_{\pm} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$. При $\xi > 1$ они образуют комплексно-сопряженную пару: $s_{\pm} = -\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2}$.

11. Реализация передаточных функций

Обсуждаемая здесь проблема реализации состоит в следующем. Пусть предъявлена некоторая передаточная функция $H(p)$. Требуется предложить электрическую схему четырехполюсника, передаточная функция которого совпадает с $H(p)$, то есть – реализовать функцию $H(p)$ физическим четырехполюсником. Набор «разрешенных средств» ограничен классом $RLCK$ -цепей, содержащих наряду с компонентами RLC идеальные усилители K .

Реализуемая в заявлении классе цепей передаточная функция должна быть вещественно-рациональной – отношением двух многочленов от p с вещественными коэффициентами:

$$H(p) = K_0 \frac{B(p)}{A(p)}; \quad A(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i, \quad B(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i$$

Выделив отдельно масштабный множитель K_0 , коэффициенты b_m, a_n при старших степенях p можно считать равными единице. К тому же, не особо ограничивая общность, можно принять, что степень многочлена числителя не превышает степени знаменателя: $m \leq n$. Это отсеивает вряд ли реализуемые технически системы, передаточная функция которых уходит в бесконечность при $p \rightarrow \infty$.

Удобно иметь дело с расширенной p -плоскостью с присоединенной бесконечно удаленной точкой ∞ . Удобство в том, что в расширенной плоскости, с учетом нулей и полюсов в бесконечности, у любой рациональной функции число нулей совпадает с числом полюсов. Можно сказать, что ограничение $m \leq n$ исключает системы с полюсом в бесконечно удаленной точке.

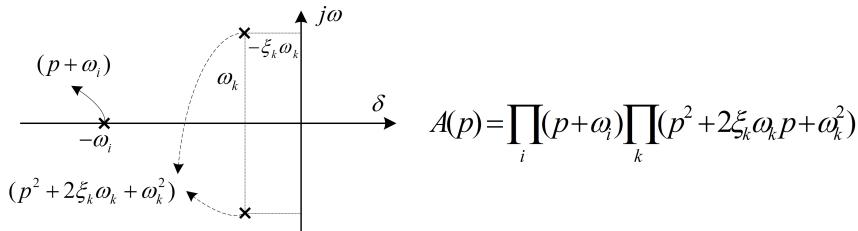


Рис. 17.

Многочлен знаменателя $A(p)$ можно разложить в произведение линейных и квадратичных множителей, рис. 17. Линейным множителям отвечают вещественные полюсы $H(p)$ в точках $p = -\omega_i$, а квадратичным – пары комплексно-сопряженных полюсов в точках $p = -\xi_k \omega_k \pm j\omega_k$. Аналогичное разложение числителя даст некоторый набор вещественных нулей и их комплексно сопряженных пар. Задав некоторым образом соответствие между нулями и полюсами, передаточную функцию $H(p)$ можно представить произведением ра-

циональных дробей первого и второго порядков:

$$H(p) = K_0 \left\{ \prod_i \frac{a_i p + b_i}{p + \omega_i} \right\} \left\{ \prod_k \frac{a_k p^2 + b_k p + c_k}{p^2 + 2\xi_k \omega_k p + \omega_k^2} \right\}$$

Здесь каждый из множителей первого порядка представляет вещественный полюс и вещественный нуль, а множитель второго порядка – пару комплексно-сопряженных полюсов и пару нулей.

Факторизация передаточной функции $H(p)$ в произведение позволяет реализовать ее каскадным соединением звеньев первого и второго порядков, так, как показано на рис. 18. Молчаливо предполагается, что для исключения взаимного влияния соединяемых звеньев между ними установлены идеальные буферные усилители.

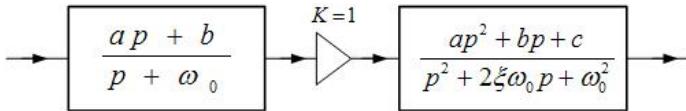


Рис. 18. Каскадное соединение звеньев

В свою очередь, звено первого порядка может быть реализовано параллельным соединением **полиномиальных** звеньев двух типов:

$$\begin{aligned} \frac{ap + b}{p + \omega_0} &= \frac{a}{p + \omega_0} \frac{p}{p + \omega_0} + && (\Phi B \dot{\chi}) \\ &+ \frac{b}{\omega_0} \frac{\omega_0}{p + \omega_0}. && (\Phi N \dot{\chi}) \end{aligned}$$

Дифференцирующее звено $p/(p+\omega_0)$ с нулем передачи в нуле, является фильтром верхних частот ($\Phi B \dot{\chi}$). У интегрирующего звена $\omega_0/(p+\omega_0)$ нуль передачи находится в бесконечности. Это фильтр нижних частот ($\Phi N \dot{\chi}$).

Звено второго порядка реализуется параллельным соединением полиномиальных звеньев трех типов

$$\begin{aligned} \frac{ap^2 + bp + c}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} &= a \frac{p^2}{(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)} + && (\Phi B \dot{\chi}) \\ &+ \frac{b}{\omega_0} \frac{\omega_0 p}{(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)} + && (\Pi \Phi) \\ &+ \frac{c}{\omega_0^2} \frac{\omega_0^2}{(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)} && (\Phi N \dot{\chi}) \end{aligned}$$

У фильтра верхних частот (ФВЧ) имеется нуль кратности два в нуле, у фильтра нижних частот (ФНЧ) – нуль кратности два в бесконечности и у полосового фильтра (ПФ) – один нуль в нуле и один в бесконечности.

Если отвлечься от масштабного множителя, то звено первого порядка характеризуется единственным параметром – характерной частотой ω_0 (частотой среза). У звеньев второго порядка таких параметров уже два – это частота ω_0 и постоянная затухания ξ . Параметр $Q = 1/2\xi$ называют добротностью звена. Переход к безразмерной частоте $s = p/\omega_0$ приводит к следующим каноническим формам передаточных функций полиномиальных звеньев:

$$\frac{s}{s+1}, \quad \frac{1}{s+1}, \quad \frac{s^2}{s^2 + 2\xi s + 1}, \quad \frac{s}{s^2 + 2\xi s + 1}, \quad \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1}.$$

Полюс звеньев первого порядка находится при $s = -1$, а единственный нуль лежит либо в нуле (ФВЧ), либо в бесконечности (ФНЧ).

Звенья второго порядка представляют особый интерес при малом затухании $\xi < 1$ ($Q > 1/2$), когда они реализуют пару комплексно сопряженных полюсов $s_{\pm} = -\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2}$. При $\xi > 1$ полюсы $s_{\pm} = -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$ становятся вещественными и звено второго порядка сводится к каскадному соединению двух звеньев порядка один. Пара нулей звена второго порядка распределена между нулем и бесконечностью. Три возможные варианта распределения и дают звенья трех типов – ФВЧ (оба нуля в нуле), ФНЧ (оба нуля в бесконечности) и ПФ (по одному нулю в нуле и бесконечности).

Таким образом, произвольная передаточная функция $H(p)$ может быть реализована последовательно-параллельным соединением полиномиальных звеньев всего пяти типов – двух типов звеньев первого порядка и трех типов звеньев порядка два. К реализации этих «строительных блоков» и сводится проблема синтеза.

Звенья первого порядка просто реализуются делителями напряжения.

Делитель напряжения, рис. 19а, – это простейший способ построить четырехполюсник из двух двухполюсников с импедансами Z_1, Z_2 . Передаточная функция делителя находится в два хода: напряжение e на входе создает ток $i = e/(Z_1 + Z_2)$, а выходное напряжение u получается как результат протекания этого тока по Z_2 : $u = iZ_2 = eZ_2/(Z_1 + Z_2)$. Это и дает выражение для передаточной функции делителя:

$$H(p) = Z_2/(Z_1 + Z_2).$$

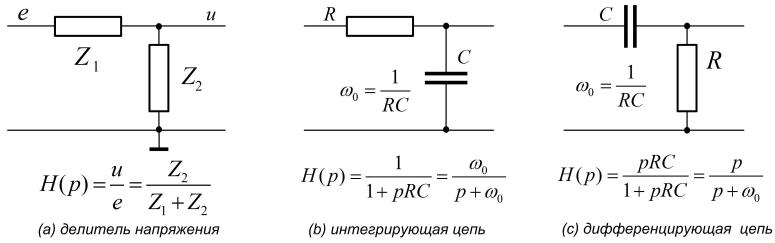


Рис. 19. Звенья первого порядка

Два возможные варианта построения делителя из резистора и конденсатора и приводят к двум типам звеньев первого порядка – интегрирующей цепи рис. 19b и дифференцирующей цепи 19c.

Те же результаты дают делители напряжения из резистора и индуктивности, рис. 20.

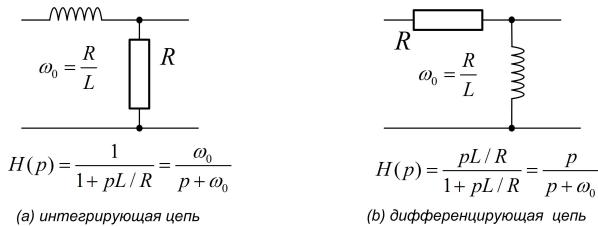


Рис. 20. Индуктивные звенья

Вообще, если емкостной и индуктивный импедансы привести к виду

$$Z_C = \frac{1}{pC} = \frac{R}{pRC} = \frac{R}{s}; \quad s = pRC = p\tau = \frac{p}{\omega_0},$$

$$Z_L = pL = Rp \frac{L}{R} = sR; \quad s = p \frac{L}{R} = p\tau = \frac{p}{\omega_0},$$

то становится ясно, что замена в схеме емкостей индуктивностями сводится к замене $s \Leftrightarrow 1/s$ в передаточной функции. Такая замена переводит интегрирующее звено в дифференцирующее и наоборот.

Те же звенья можно реализовать делителем тока, рис. 21. Входной ток i создает на параллельном соединении импедансов Z_1, Z_2 напряжение $u = i \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$. Токи i_1, i_2 в ветвях определяются делением этого

напряжения на Z_1, Z_2 . Для передаточной функции от i до i_1 получается

$$H(p) = \frac{i_1}{i} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

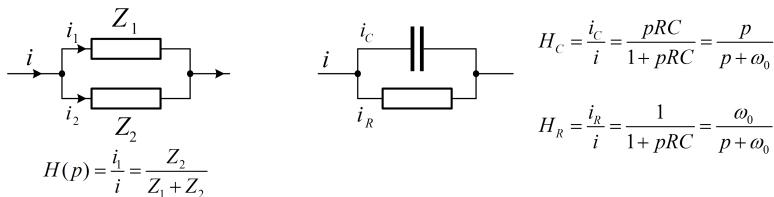


Рис. 21. Делитель тока

Передаточная функция от входного тока i до тока i_C в емкостной ветви дает дифференцирующее звено, а до тока в резисторе i_R интегрирующее, рис. 21. Интегрирующим звеном оказывается также и передаточная функция от тока i до напряжения u на параллельном соединении: $\frac{u}{i} = R \frac{\omega_0}{p + \omega_0}$.

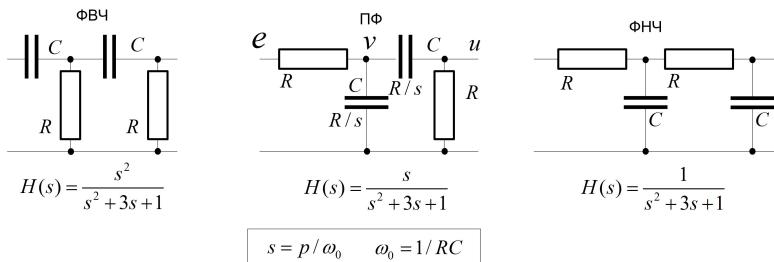


Рис. 22. RC -звенья второго порядка

Звенья второго порядка можно строить соединяя дифференцирующие и интегрирующие цепи каскадно, как показано на рис. 22. Три варианта каскадирования приводят к трем типам звеньев с показанными на рисунке передаточными функциями. Однако такие звенья отличаются низкими добротностями $Q = \frac{1}{2\xi} = 1/3$. Полюсы их передаточных функций вещественны. К сожалению, это общее правило. Известно, что в классах RC - или RL -цепей можно реализовать только апериодические передаточные функции с вещественными полюсами.

Пример 1. Найдем передаточную функцию полосового фильтра на рис. 22. Чтобы упростить формулы, импеданс емкости приведем к виду $Z_C = 1/pC = R/pRC = R/s$, где $s = pRC = p/\omega_0$ – безразмерная частота. За передачу напряжения от промежуточного узла v на схеме до выхода u отвечает дифференцирующая цепь с передаточной функцией $H_{u/v} = s/(s + 1)$. Передачу сигнала от входа e до узла v обеспечивает делитель напряжения на резисторе R и составном импедансе

$$Z = Z_C \parallel (Z_C + R) = \frac{R}{s} \parallel \left(\frac{R}{s} + R \right) = R \frac{s+1}{s(s+2)}.$$

Для передаточной функции от e до v найдем

$$H_{v/e} = \frac{Z}{R+Z} = \frac{s+1}{s^2 + 3s + 1}.$$

Передаточная функция от входа до выхода – это произведение $H_{v/e}H_{u/v}$:

$$H(p) = \frac{s+1}{(s^2 + 3s + 1)} \frac{s}{(s+1)} = \frac{s}{s^2 + 3s + 1}.$$

Давлеющее над RC - или RL -цепями «проклятие апериодичности» снимается переходом к RLC -цепям. Три простые схемные решения для трех типов RLC -звеньев второго порядка показаны на рис. 23. При малом сопротивлении потерь R добротность этих звеньев $Q = \varrho/R$ становится большой, а постоянная затухания $\xi = 1/2Q$ – малой. Это позволяет реализовать комплексно сопряженные пары полюсов $s_{\pm} = -\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2}$, лежащие сколь угодно близко к мнимой оси p -плоскости.

Пример 2. Найдем передаточную функцию полосового фильтра (ПФ) на рис. 23. Переходя к безразмерной частоте $s = p/\omega_0$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, емкостной и индуктивный импедансы приведем к виду:

$$\frac{1}{pC} = \frac{\omega_0 \sqrt{LC}}{pC} = \frac{\varrho}{s}; \quad pL = \frac{pL}{\omega_0 \sqrt{LC}} = \varrho s,$$

где $\varrho = \sqrt{L/C}$ – характеристическое сопротивление.

Искомую передаточную функцию полосового звена задает делитель напряжения на импедансе $\varrho s + \frac{\varrho}{s}$ и резисторе R :

$$H(s) = \frac{R}{R + \varrho s + \frac{\varrho}{s}} = \frac{2\xi s}{s^2 + 2\xi s + 1}; \quad 2\xi = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\varrho}.$$

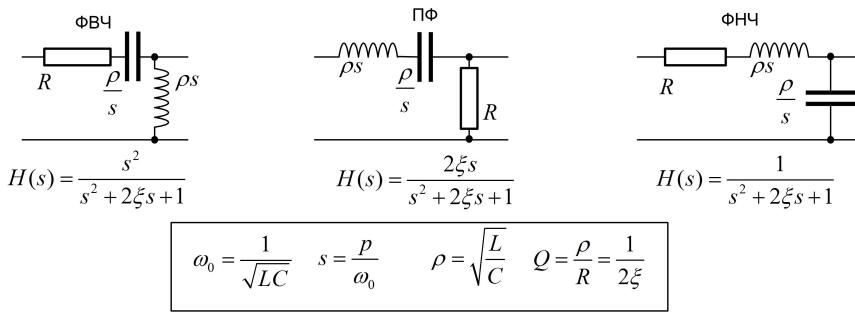


Рис. 23. *RLC-звенья второго порядка*

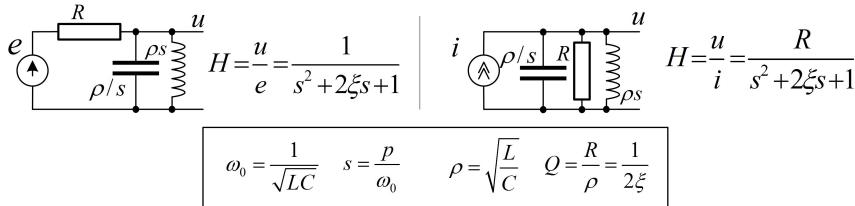


Рис. 24. *Полосовые RLC-фильтры*

Два популярные схемные решения для полосовых звеньев с параллельным колебательным контуром показаны на рис. 24.

12. Графики частотно-фазовых характеристик

Для исследования амплитудно-частотных (АЧХ) и фазо-частотных (ФЧХ) характеристик системы, передаточная функция которой задана в форме отношения многочленов

$$H(p) = K_0 \frac{B(p)}{A(p)}; \quad A(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i, \quad B(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i,$$

существуют специальные приемы.

С точностью до масштабного множителя такая функция определяется набором своих нулей β_i (корней многочлена $B(p)$) и полюсов α_i (корней $A(p)$). Знание положения этих объектов в p -плоскости дает достаточно полное представление о характере АЧХ и ФЧХ системы. Разложение многочленов числителя и знаменателя на линейные множители приводит передаточную функцию к виду

$$H(p) = K_0 \frac{\prod_{i=1}^m (p - \beta_i)}{\prod_{k=1}^n (p - \alpha_k)}.$$

Представив каждый из линейных множителей $(p - \mu)$, $\mu = \beta_i, \alpha_k$ в тригонометрической форме

$$p - \mu = |p - \mu| e^{j \arg(p - \mu)} = l_\mu(\omega) e^{j \varphi_\mu(\omega)}, \quad p = j\omega$$

придем к следующим представлениям для АЧХ и ФЧХ:

$$|H(j\omega)| = \frac{\prod_{i=1}^m l_{\beta_i}(\omega)}{\prod_{k=1}^n l_{\alpha_k}(\omega)}; \quad \arg H(j\omega) = \sum_{i=1}^m \varphi_{\beta_i}(\omega) - \sum_{k=1}^n \varphi_{\alpha_k}(\omega).$$

Значение АЧХ в точке ω равно отношению произведения расстояний l_{β_i} от точки $j\omega$ до всех нулей к произведению расстояний l_{α_k} от этой точки до всех полюсов. Каждый нуль или полюс вносит вклад $\varphi(\omega)$ в фазо-частотную характеристику. Чтобы найти ФЧХ системы, следует из суммы вкладов нулей вычесть сумму вкладов полюсов.

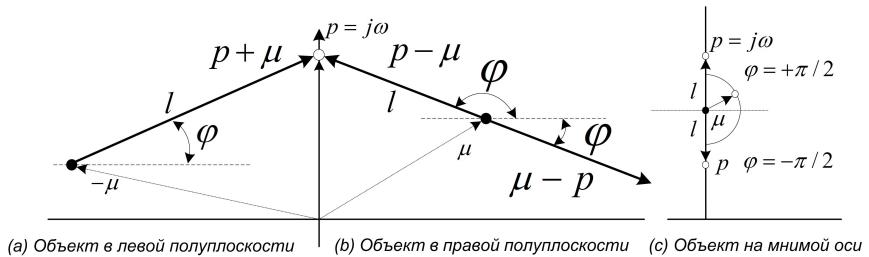


Рис. 25. Вклады нуля/полюса в АЧХ и ФЧХ

Объекту (нулю или полюсу μ) в левой p -полуплоскости, рис. 25, отвечает линейный множитель $(p + \mu)$. Объект в правой полуплоскости может представлять либо множитель $p - \mu$, либо множитель $\mu - p$ противоположного знака. Вклады этих объектов в АЧХ и ФЧХ на рисунке представляют длину l и угол наклона φ выделенного жирным

вектора. При варьировании частоты точка $p = j\omega$ перемещается вверх-вниз вдоль мнимой оси. Значения вкладов l, φ при этом изменяются. Эти изменения определяют поведение АЧХ и ФЧХ. Вклад в ФЧХ объекта в левой полуплоскости нарастает до $\pi/2$ при $\omega \rightarrow \infty$. Вклад в ФЧХ объекта в правой полуплоскости убывает, достигая при $\omega \rightarrow \infty$ либо значения $\pi/2$, либо значения $-\pi/2$ в зависимости от знака.

Полюсы устойчивой системы всегда лежат в левой полуплоскости. Положение же нулей произвольно. Если нуль и полюс оба лежат слева, то их вклады в ФЧХ взаимно компенсируются. Если же нуль перекочевывает в правую полуплоскость, его вклад в изменение фазы начинает добавляться ко вкладу полюса. Для систем с нулями в правой полуплоскости характерны аномально большие набеги фазы при изменении частоты от 0 до ∞ . Такие системы называют **неминимально фазовыми**.

Показанный на рис. 25c. случай объекта μ на мнимой оси несколько специфичен. Специфика в том, что при $\omega = \mu$ расстояние l становится нулевым. АЧХ принимает в этой точке нулевое значение, если μ – нуль, или обращается в бесконечность, если μ – полюс. Когда точка ω пересекает уровень μ аргумент вектора $p - \mu$ скачком меняет значение на π .

Наконец, нуль передачи при $p = 0$ дает вклад $+\pi/2$ в ФЧХ, полюс – вклад $-\pi/2$.

При анализе АЧХ систем с вещественными нулями и полюсами полезна техника графов Боде. Распространенность систем этого рода обусловлена тем, что в классах *RL*- *RC*-цепей все полюсы всегда вещественны. О нулях этого сказать нельзя, но присутствие сопряженных пар нулей и в этих системах – это также скорее исключение, чем правило.

Граф Боде – это просто аппроксимация АЧХ в логарифмических осях координат. Рассмотрим систему с вещественными нулями $-\beta_i$ и полюсами $-\alpha_k$ на отрицательной полуоси частот. Выражение для модуля ее комплексного коэффициента передачи $K(j\omega)$ можно привести к виду

$$|K(j\omega)| = K_0 \frac{\prod_{i=1}^m \left| \frac{j\omega}{\beta_i} + 1 \right|}{\prod_{k=1}^n \left| \frac{j\omega}{\alpha_k} + 1 \right|}$$

Перейдем к логарифмическому масштабу по оси ординат, выразив значение K в децибелах.

$$K(dB) = 20 \lg |K| = 20 \lg K_0 + 20 \sum_{i=1}^m \lg \left| \frac{j\omega}{\beta_i} + 1 \right| - 20 \sum_{k=1}^n \left| \frac{j\omega}{\alpha_k} + 1 \right|.$$

Каждое слагаемое типа $20 \lg \left| \frac{j\omega}{\mu} + 1 \right|$ хорошо аппроксимируется ломаной

$$20 \lg \left| \frac{j\omega}{\mu} + 1 \right| \sim \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \ll \mu, \\ 20 \lg \omega - 20 \lg \mu & \text{при } \omega \gg \mu. \end{cases}$$

График этой ломаной в логарифмическом масштабе по оси частот показан на рис. 26.

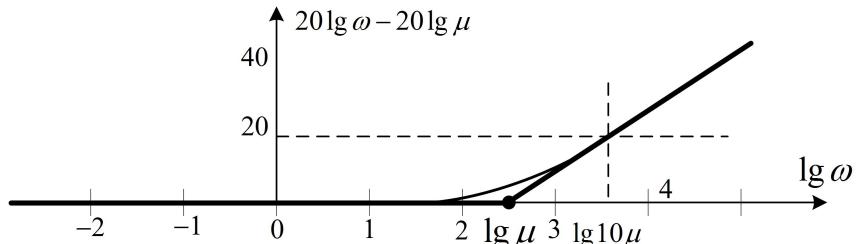


Рис. 26. График Боде одиночного нуля

Точка излома приходится как раз на частоту $\lg \mu$ нуля (полюса). До нее значение постоянно – составляет 0 dB. После излома оно нарастает по линейному закону. Каждая декада (увеличение частоты в 10 раз) дает нарастание на 20 dB. Это составляет примерно 6 dB на октаву (на двукратное увеличение частоты). Ломаная линия неплохо аппроксимирует график $20 \lg \omega - 20 \lg \mu$. Известно, что ошибка аппроксимации не превышает 3 dB ($\sqrt{2}$ раз). Значения 20 dB на декаду или 6 dB на октаву, характеризующие вклад в АЧХ одиночного нуля или полюса, хорошо известны в инженерной практике. Всем известно, например, что семи-полюсной фильтр – это затухание -140 dB на декаду в полосе задержания.

Аппроксимация ломаной линией и составляет суть техники построения графиков Боде. Техника эта состоит в следующем: на логарифмической оси частот $\lg \omega$ расставляем положения нулей $\lg \beta_i$ и полюсов $\lg \alpha_k$ и начинаем вести ломаную из $-\infty$ логарифмической оси, то есть от нулевой частоты. По пересечении каждого нуля добавляем линейный рост с наклоном 20 dB на декаду, по пересечении полюса добавляем линейный спад с той же скоростью. Если нулей или полюсов при $p = 0$ нет, то начать построение ломаной следует с горизонтальной линии. Нуль передачи в нуле добавляет начальный рост со скоростью 20 dB на декаду, полюс в нуле – начальный спад с той же скоростью. Положение ломаной по вертикали уточняют в самом конце. Для этого

достаточно вычислить значение АЧХ на какой-нибудь одной конкретной частоте.

Представление о графике Боде используется для определения нулей и полюсов систем по экспериментальным данным. Изображенную в логарифмическом масштабе экспериментальную кривую АЧХ аппроксимируют ломаной линией. Точки изломов позволяют тогда составить представление о положении нулей и полюсов передаточной функции.

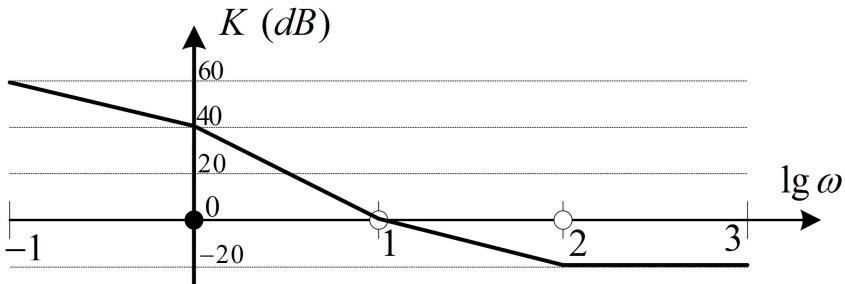


Рис. 27. График Боде

Пример 1. Построим график Боде системы с

$$H(p) = 0.1 \frac{(p + 10)(p + 100)}{p(p + 1)}.$$

Имеется полюс в нуле, полюс в точке $\lg 1 = 0$ и два нуля в точках $\lg 10 = 1$ и $\lg 100 = 2$, рис. 27. Поскольку есть полюс в нуле, начинаем вести ломаную с наклоном -20 dB/декаду . По пересечении полюса в точке $\lg 1 = 0$ добавляем 20 dB/декаду к скорости спада. Получается спад со скоростью -40 dB/декаду . По пересечении каждого из нулей снижаем скорость спада на 20 dB/декаду . Получившуюся ломаную нормируем по вертикали, оценив коэффициент передачи в бесконечности -20 dB .

Графики Боде более или менее пригодны также и в тех ситуациях, когда имеются пары комплексно сопряженных объектов, расположенных близко к вещественной оси — с большого расстояния такая пара выглядит как один полюс или нуль кратности два. Однако они перестают адекватно отражать существование явлений при наличии высокодобротных пар, лежащих вблизи от мнимой оси. Когда точка $p = j\omega$ проходит мимо такого объекта, расстояние l_μ до него почти обращается в нуль.

Это дает резкий выброс на АЧХ, если речь идет о полюсе, или столь же резкий провал, если речь идет о нуле.

При исследовании АЧХ в окрестностях резонансов (выбросов или провалов на АЧХ) полезен прием введения обобщенной расстройки. В разложении передаточной функции паре сопряженных полюсов или нулей отвечает квадратный трехчлен вида $(p^2 + bp + c)$. Коэффициент c имеет в нем смысл квадрата характерной частоты – частоты резонанса $c = \omega_0^2$. Переход к безразмерной частоте $s = p/\omega_0$ приводит этот трехчлен к канонической форме $c(s^2 + 2\xi s + 1)$ с малой постоянной затухания $2\xi = b/\sqrt{c}$. Прием введения обобщенной расстройки – это не более как факторизация этого трехчлена

$$s^2 + 2\xi s + 1 = 2\xi s \left(1 + \frac{1}{2\xi} \left(s + \frac{1}{s}\right)\right) = 2\xi s \left(1 + Q \left(s + \frac{1}{s}\right)\right) = 2\xi s (1 + ja(\omega))$$

в произведение «почти постоянного» в окрестности резонанса множителя $s = \frac{j\omega}{\omega_0}$ и «резонансного фактора» $(1 + ja(\omega))$. Функция

$$a(\omega) = \frac{1}{j} Q \left(s + \frac{1}{s}\right) = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

и носит название обобщенной расстройки. Она обращается в нуль при $\omega = \omega_0$ и быстро растет при уходе от резонанса. Скорость роста пропорциональна добротности $Q = 1/2\xi$. Часто используется линейное приближение расстройки в окрестности резонанса:

$$a(\omega) = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \simeq 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}; \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0.$$

При высоких значениях добротности Q оказывается, что в окрестности резонанса АЧХ и ФЧХ системы зависят почти исключительно от обобщенной расстройки $a(\omega)$ – прочие «плавные» зависимости типа $\frac{j\omega}{\omega_0}$ мало заметны.

Высокодобротная пара полюсов дает на АЧХ системы пик стандартной формы

$$K(\omega) \sim \frac{1}{\sqrt{1 + a^2(\omega)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

и вносит вклад в ФЧХ вида

$$\varphi(\omega) = -\arctg a(\omega) \simeq -2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

Границы пика по уровню $1/\sqrt{2} = -3 \text{ dB}$ достигаются при $a^2(\omega) = 1$. Для двухсторонней ширины пика это дает: $\Delta\omega = \omega_0/Q$. В пределах этой ширины вклад в $\Phi\text{ЧХ}$ изменяется от $+\pi/4$ до $-\pi/4$. Рост добротности вызывает сужение пика на АЧХ, одновременно повышая крутизну фазовой характеристики. Примечательно, что высокая крутизна ФЧХ системы однозначно указывает на наличие выброса на ее АЧХ.

В свою очередь, высокодобротная пара нулей дает провал на АЧХ системы в форме

$$K(\omega) \sim \sqrt{1 + a^2(\omega)} = \sqrt{1 + 4Q^2 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

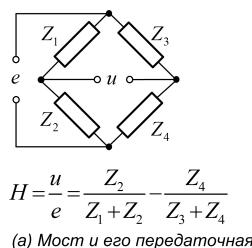
и вносит вклад в ФЧХ

$$\varphi(\omega) = +\arctg a(\omega) \simeq +2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

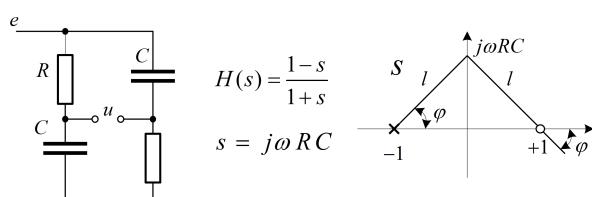
Как и в случае полюсов, ширина провала по уровню 3 dB составляет $\Delta\omega = \omega_0/Q$, а его острота оказывается тесно связанной с крутизной фазовой характеристики.

13. Мостовые схемы

Полезными специфическими свойствами отличаются схемные решения с топологией мостов, рис. 28а. Мостовую конфигурацию образуют четыре соединенные прямоугольником импедансы. Входной сигнал e прикладывается к одной диагонали моста, а выходной u – снимается с другой.



(a) Мост и его передаточная функция



(b) Неминимально-фазовая система

Рис. 28. Мостовые схемы

Выходной сигнал моста является разностным (дифференциальнym). Он получается вычитанием выходов левого (Z_2/Z_1) и правого

(Z_4/Z_3) делителей напряжения. Передаточная функция моста – это разность передаточных функций этих двух делителей. В результате вычитания сигналы, поступающие на выход моста по одному и другому пути, взаимно компенсируются. Эффект компенсации приводит к передаточным функциям с нетипичным расположением нулей – мостовыми схемами реализуются неминимально-фазовые системы с нулями в правой полуплоскости и системы с комплексно сопряженными парами нулей.

Простой пример неминимально-фазовой системы показан на рис. 28б. Это мост, образованный интегрирующей и дифференцирующей цепями. Его передаточная функция имеет полюс в левой полуплоскости при $s = \frac{p}{\omega_0} = -1$, $\omega_0 = 1/RC$, и симметрично расположенный нуль в правой полуплоскости при $s = 1$. Модуль комплексного коэффициента передачи этой системы равен единице – расстояния l до нуля и полюса всегда одинаковы. Фазовая же характеристика отличается аномально большим набегом фазы – вклад φ полюса, изменяющийся от нуля до $-\pi/2$, суммируется с таким же вкладом нуля. Результатом становится фазовая характеристика

$$\arg H(j\omega) = -2 \operatorname{arctg}(\omega RC) = -2 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\omega_0}$$

с вариацией от нуля $-\pi$.

Это явление используется в схемах фазовращателей, показанных ни рис. 29. Схема на рис. 29а – это мост из дифференцирующей RC -цепи и делителя напряжения на двух одинаковых резисторах R_0 с коэффициентом передачи $1/2$. Она имеет дифференциальный выход. Схема на рис. 28б выгодно отличается однополярным выходом, но требует подачи сразу двух противофазных входных сигналов $-e$ и $-e$. Варьируя переменное сопротивление R от нуля до бесконечности, фазовый сдвиг $2 \operatorname{arctg}(\omega RC)$ между входным и выходным сигналами этих схем можно изменять от нуля до π .

Передаточная функция двойного T -моста на рис. 30 замечательна наличием пары комплексно сопряженных нулей на мнимой оси s -плоскости в точках $\pm j$. Расположение пары ее вещественных полюсов особого интереса не представляет. Нули же дают эффект обращения в нуль модуля коэффициента передачи при $s = j$, то есть при $\omega = \omega_0 = 1/RC$. Двойной T -мост – это режекторный фильтр, который полностью подавляет частоту ω_0 .

В реальности поместить нули передачи моста точно на мнимую ось невозможно – погрешности в значениях компонентов обязательно смешают их в левую или правую полуплоскость. В результате АЧХ

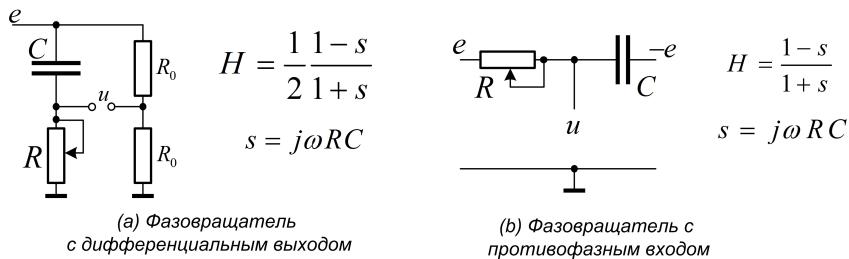


Рис. 29. Схемы фазовращателей

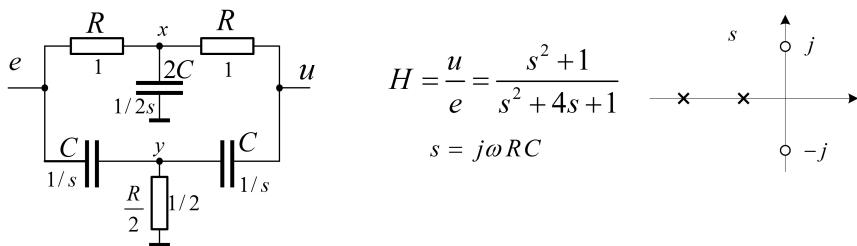


Рис. 30. Двойной Т-мост

моста в точке ω_0 строго нулевого значения не достигает. Если нули попадают в левую полуплоскость, мост оказывается минимально-фазовой системой. Его фазовая характеристика начинается и заканчивается в нуле. Смещение же нулей в правую полуплоскость делает мост неминимально-фазовым. При этом вклады двух нулей добавляются к вкладам полюсов, так что полный набег фазы достигает значения 2π .

Пример 1. Найдем передаточную функцию двойного T -моста. Приведем емкостной импеданс к виду $Z = R/s$, $s = j\omega RC$ и примем резистор R за единицу сопротивления. Условия равенства нулю сумм токов в узлах x и y схемы на рис. 30 дают

$$(e - x) + (u - x) = 2sx; \Rightarrow e + u = 2x(1 + s);$$

$$s(e - y) + s(u - y) = 2y; \Rightarrow e + u = 2y \frac{(1 + s)}{s};$$

Отсюда $y = xs$, то есть потенциал y — это производная от x . Теперь

привлечем условие равенства нулю суммы токов в узле u :

$$u - x = (y - u)s; \Rightarrow u(1 + s) = x + ys = x(1 + s^2); \quad x = u \frac{1 + s}{1 + s^2}.$$

Имеем

$$e + u = 2x(1 + s) = \frac{2u(1 + s)^2}{1 + s^2}.$$

Это и дает результат

$$H(s) = \frac{u}{e} = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 4s + 1}.$$

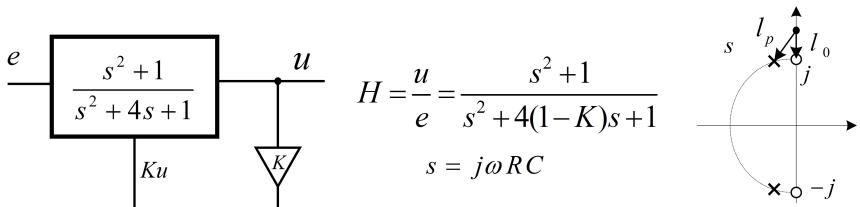


Рис. 31. Режекторный фильтр

Двойной T -мост – это не слишком хороший режекторный фильтр, потому что провал на его АЧХ имеет довольно плавные края. Повысить остроту провала можно введя обратную связь так, как показано на рис. 31. Представленная на рисунке передаточная функция этой петли определяется из соотношения

$$u - Ku = (e - Ku) \frac{s^2 + 1}{s^2 + 4s + 1}.$$

При $K \rightarrow 1$ полюсы передаточной функции петли становятся комплексными и практически сливаются с нулями. При этом провал на АЧХ оказывается крайне острым, так как при уходе от нуля j по мнимой оси расстояние l_0 до нуля расстояние l_p до полюса быстро становятся почти одинаковыми а их отношение – близким к единице.

Широко известна схема моста Вина на рис. 32, реализующая пару высокодобротных сопряженных нулей.

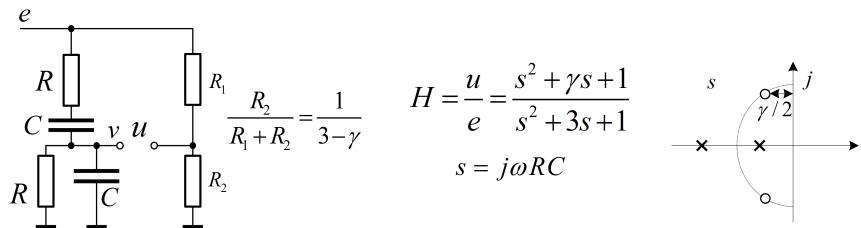


Рис. 32. Мост Вина

14. Синтез фильтров

В широком смысле задача синтеза фильтра состоит в следующем. Пусть сформулированы те или иные требования к амплитудно-частотной (АЧХ) и фазо-частотной (ФЧХ) характеристикам. Требуется предложить реализуемую передаточную функцию $H(p)$ в форме отношения двух многочленов от p с вещественными коэффициентами, АЧХ $|H(j\omega)|$ и ФЧХ $\arg H(j\omega)$ которой этим требованиям удовлетворяют.

Чаще всего речь идет о синтезе по форме АЧХ, то есть по ограничениям на модуль комплексного коэффициента передачи. Почти все задачи этого рода сводятся к центральной проблеме синтеза идеального фильтра нижних частот, рис. 33а, с единичным коэффициентом передачи в полосе пропускания и нулевым – в полосе задерживания. Такой фильтр без изменения пропускает все частоты от нуля до частоты среза ω_0 и полностью отсекает все частоты из полосы задержания.

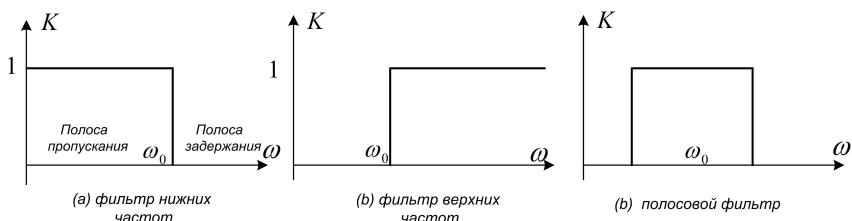


Рис. 33. Идеальные фильтры

Если реализуемая передаточная функция $H(s)$, $s = j\omega/\omega_0$ идеального фильтра нижних частот так или иначе построена, то замена s на $1/s$ даст идеальный фильтр верхних частот с полосой пропускания от

ω_0 до бесконечности, рис. 33b, а замена s на $Q(s + 1/s)$ – полосовой фильтр рис. 33c с центральной частотой ω_0 и границами полосы пропускания в точках ω , определяющихся как положительные корни ω_{\pm} пары квадратных уравнений

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm \frac{1}{Q}.$$

Обе эти замены условие реализуемости не нарушают. Переход к полосовому фильтру удваивает число полюсов.

Сложность проблемы синтеза состоит в том, что идеальный фильтр нижних частот не реализуем. Из дальнейшего станет ясно, что импульсная реакция фильтра с прямоугольной в полосе $[-\omega_0, \omega_0]$ АЧХ имеет вид

$$h(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}$$

и не удовлетворяет принципу причинности. Приходится довольствоваться теми или иными приближениями к идеальной прямоугольной форме.

Задача синтеза вещественного фильтра по квадрату модуля его комплексного коэффициента передачи сводится к синтезу передаточной функции вида $H(s)H(-s)$, поскольку

$$H(j\omega)H(-j\omega) = H(j\omega)H(j^*\omega) = H(j\omega)H^*(j\omega) = |H(j\omega)|^2.$$

Эта передаточная функция отвечает каскадному соединению системы с функцией $H(s)$ и ее отражения во времени – системы с передаточной функцией $H(-s)$.

Широко известны два подхода к аппроксимации идеального фильтра нижних частот полиномиальными передаточными функциями, все нули которых лежат либо в нуле, либо в бесконечности. Это фильтры Баттервортса и Чебышева.

К фильтрам Баттервортса, рис. 34, приводит аппроксимация прямоугольной АЧХ функциями

$$|H_n(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\omega_0}\right)^{2n}}; \quad s = \frac{j\omega}{\omega_0}.$$

АЧХ фильтра Баттервортса начинается в точке 1 при $\omega = 0$, проходит через точку $1/\sqrt{2}$ на частоте среза, при $\omega = \omega_0$, и стремится к нулю как $1/\omega^n$ при $\omega \rightarrow \infty$. С ростом порядка фильтра n его АЧХ неограниченно приближается к прямоугольнику, поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2n} = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < \omega_0, \\ \infty & \text{при } \omega > \omega_0. \end{cases}$$

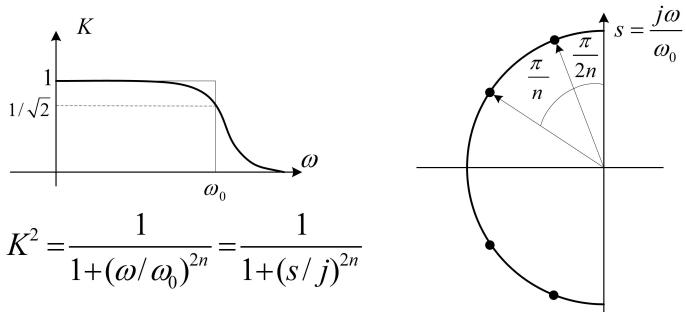


Рис. 34. Фильтр Баттерворт

Для фильтра Баттервorta порядка n полюсы произведения $H(s)H(-s)$ элементарно находятся из уравнения:

$$1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = 0.$$

Это система из $2n$ точек, равномерно распределенных по окружности единичного радиуса с шагом π/n , рис. 34

$$s_k = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi}{2n}} e^{j\frac{\pi}{n}k} = -\sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}k\right) + j \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}k\right); \quad k = [0, 2n-1].$$

Первые n полюсов с $k = [0, n-1]$ лежат в левой полуплоскости и дают набор полюсов передаточной функции $H(s)$ фильтра Баттервorta порядка n . Остальные полюсы относятся к передаточной функции $H(-s)$ обращенной во времени системы. При четных n имеется $n/2$ сопряженных пар полюсов, если же n нечетно, то имеется один полюс на вещественной оси и $(n-1)/2$ сопряженных пар.

Фильтр Баттервorta реализуется каскадным соединением не более одного звена первого порядка, отвечающего полюсу на вещественной оси, и некоторого числа звеньев второго порядка, реализующих сопряженные пары полюсов. Техническая сложность заключается в том, что с ростом порядка фильтра n максимальная добротность звена второго порядка неограниченно растет: $Q = 1/(2 \sin(\pi/2n)) \simeq n/\pi$.

Пример 1. Фильтр Баттервorta порядка $n = 1$, рис. 35, – это интегрирующая цепь с единственным полюсом в точке $s = -1$. Фильтр Баттервorta порядка $n = 2$ – это звено второго порядка с полюсами в точках $s = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm j)$ и добротностью $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Фильтр порядка

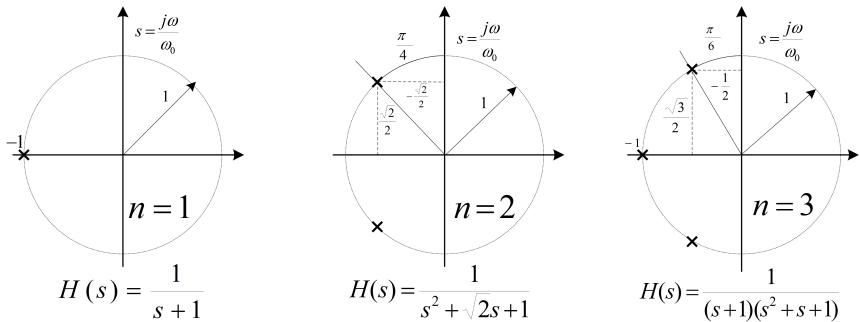


Рис. 35. Фильтры Баттерворта порядков $n = 1, 2, 3$

$n = 3$ – это каскадное соединение интегрирующей цепи и звена второго порядка с полюсами в точках $s = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ и добротностью $Q = 1$.

Чебышевская аппроксимация прямоугольника использует одноименные полиномы. На интервале $x \in [-1, +1]$ полином Чебышева $P_n(x)$ прядка n определяется тригонометрически:

$$P_n(x) = \cos(n \arccos x) = \cos n(\cos^{-1} x).$$

На этом интервале полная вариация аргумента $n \arccos x$ составляет $n\pi$, так что полином $P_n(x)$ совершаает на нем $n/2$ полных осцилляций, принимая значения из диапазона $[-1, +1]$.

Подстановка $\alpha = \arccos x$ в тригонометрическое тождество

$$\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha = 2 \cos n\alpha \cos \alpha$$

дает рекуррентное соотношение

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x),$$

которое позволяет построить ряд чебышевских полиномов явно:

$$P_0(x) = \cos(0 \arccos x) = 1,$$

$$P_1(x) = \cos(1 \arccos x) = x,$$

$$P_2(x) = 2xP_1(x) - P_0(x) = 2x^2 - 1,$$

$$P_3(x) = 2xP_2(x) - P_1(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$P_4(x) = 2xP_3(x) - P_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

...

Нетрудно заметить, что коэффициент при старшей степени x в полиноме $P_n(x)$ составляет 2^{n-1} и растет экспоненциально по n . Поэтому полиномы Чебышева отличает быстрый рост модуля вне интервала $[-1, +1]$.

Чебышевскую аппроксимацию прямоугольника дает последовательность функций

$$|H_n(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 P_n^2(\omega/\omega_0)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 P_n^2(s/j)}, \quad s = \frac{j\omega}{\omega_0}.$$

В полосе пропускания, при $\omega < \omega_0$ значение квадрата от полинома Чебышева осциллирует в интервале $[0, 1]$, что дает осцилляции модуля АЧХ от 1 до $1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$. Параметр ε задает степень неравномерности АЧХ в полосе пропускания. Типовое значение неравномерности 3 dB ($1/\sqrt{2} \simeq 0.7$) достигается при $\varepsilon = 1$. Вне полосы пропускания квадрат полинома Чебышева растет, что дает спад АЧХ по закону $\frac{1}{\varepsilon 2^{n-1}} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^n$.

Это быстрее скорости $\left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^n$ спада АЧХ фильтра Баттерворта в $\varepsilon 2^{n-1}$ раз. Таким образом, чебышевская аппроксимация выигрывает у аппроксимации Баттерворта по скорости спада, и это выигрыш экспоненциально растет по n .

Полюсы s передаточной функции фильтра Чебышева являются решениями уравнения

$$P_n(s/j) = \cos(n \cos^{-1}(s/j)) = \pm \frac{j}{\epsilon}.$$

Положим $\cos^{-1}(s/j) = u - jv$ ($s = j \cos(u - jv)$). Получим:

$$\cos n(u - jv) = \cos nu \operatorname{ch} nv + j \sin nu \operatorname{sh} nv = \pm \frac{j}{\epsilon}.$$

Отсюда следует, что $\cos nu = 0$, то есть $u_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}k$. В этих точках $\sin nu_k = (-1)^k$. Поэтому $\operatorname{sh} nv = \pm 1/\varepsilon$, то есть $v = \pm \frac{1}{n} \operatorname{sh}^{-1}(1/\varepsilon)$. Тогда

$$s_k = j \cos(u_k - jv) = -\operatorname{sh} v \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}k\right) + j \operatorname{ch} v \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}k\right).$$

При $k = [0, n - 1]$ получаем набор из n полюсов передаточной функции $H(s)$ фильтра Чебышева порядка n . От фильтра Баттерворта картина отличается тем, что полюсы распределены не по окружности единичного радиуса, а по эллипсу с малой осью длиной $2 \operatorname{sh} v$ вдоль вещественной оси и большой осью длиной $2 \operatorname{ch} v$ — вдоль мнимой. Эксцентриситет эллипса определяется уровнем неравномерности АЧХ фильтра в полосе пропускания: $v = \frac{1}{n} \operatorname{sh}^{-1}(1/\varepsilon)$.

Пример 2. Фильтр Чебышева порядка $n = 1$ – это интегрирующая цепь с единственным полюсом в точке $s = -\operatorname{sh} v = -\operatorname{sh} \operatorname{sh}^{-1}(1/\varepsilon) = -1/\varepsilon$. При $\varepsilon = 1$ (неравномерность $3 dB$ в полосе пропускания) он оказывается эквивалентным фильтру Баттервортса.

Пара полюсов чебышевского фильтра порядка $n = 2$ лежит в точках $s_{\pm} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sh} v \pm j \operatorname{ch} v)$, где $v = \frac{1}{2} \operatorname{sh}^{-1} \frac{1}{\varepsilon}$. Приняв во внимание, что

$$\operatorname{ch}^2 v + \operatorname{sh}^2 v = \operatorname{ch} 2v = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 2v} = \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}},$$

$$\operatorname{ch}^2 v - \operatorname{sh}^2 v = 1,$$

нетрудно показать, что $s_{\pm} = -\delta \pm j\nu$, где

$$\delta = \frac{\sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}} - 1}}{2}; \quad \nu = \frac{\sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}} + 1}}{2}$$

При $\varepsilon = 1$ полюсы лежат на окружности радиуса $1/2^{1/4} \simeq 0.84 < 1$. На единичной окружности они оказываются при $\frac{1}{\varepsilon^2} = 3$, когда затухание на границе полосы пропускания составляет $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = \sqrt{3}/2 \simeq 0.87 = -1.25 dB$. При этом фильтр Чебышева порядка 2 оказывается эквивалентным звену второго порядка, входящему в состав фильтра Баттервортса порядка 3 (см. пример 1 выше).

15. Обратные связи и активные фильтры

Среди приемов конструирования сложных систем из простых особое место занимают петли обратной связи. Такая петля получается, когда часть выходного сигнала системы возвращается на ее вход и «подмешивается» ко входному сигналу, рис. 36.

Петля обратной связи – это модель системы автоматического регулирования. К примеру, пусть вход системы – это поток пара, а выход – скорость вращения вала паровой машины. Можем замкнуть обратную связь, сделав так, чтобы повышение скорости вращения перекрывало подачу пара. Получится петля автоматического регулирования скорости.

В «правильной» замкнутой петле регулирования обратная связь предполагается **отрицательной** – поступающей по цепи обратной

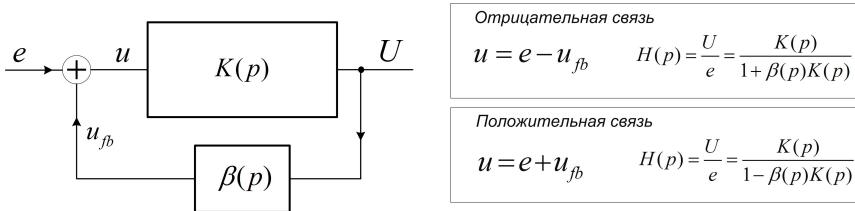


Рис. 36. Петля обратной связи

связи сигнала $u_{fb} = \beta U$ должен компенсировать входное воздействие: $u = e - u_{fb}$. Повышение скорости вращения должно перекрывать поток пара. При неверном выборе направления регулирования получается **положительная** обратная связь: $u = e + u_{fb}$. Повышение скорости вращения наращивает подачу пара. Машина идет вразнос.

Ключевую роль в теории петель играет формула, выражающая передаточную функцию петли $H(p) = U/e$ через передаточные функции ее конструктивных блоков — $K(p) = U/u$ и $\beta(p) = u_{fb}/U$. Начнем со случая отрицательной связи: $u = e - u_{fb}$. Имеем

$$e = u + u_{fb} = u + \beta U = u + \beta Ku = (1 + \beta K)u.$$

Поэтому $u = e/(1 + \beta K)$ и $U = Ku = eK/(1 + \beta K)$. Это и дает основную формулу теории обратных связей:

$$H(p) = \frac{U}{e} = \frac{K}{1 + \beta K}.$$

Для систем с положительно связью основная формула отличается только знаком в знаменателе:

$$H(p) = \frac{U}{e} = \frac{K}{1 - \beta K}.$$

Центральное место в теории регулирования занимает **проблема устойчивости** петель обратной связи. Петля устойчива, если ее передаточная функция $H(p)$ не имеет полюсов в правой p -полуплоскости. Наличие такого полюса эквивалентно обращению в нуль знаменателя $(1 \pm \beta K(p))$. Для отрицательной связи это, в свою очередь, эквивалентно тому, что передаточная функция разомкнутой петли $\beta K(p)$ принимает значение -1 в некоторой точке p из правой полуплоскости. Для положительной связи речь идет о значении +1.

Проверить факт существования такой точки можно, исследовав образ правой p -полуплоскости при отображении $z(p) = \beta K(p)$. Если точка -1 принадлежит этому образу, то система с отрицательной связью неустойчива.

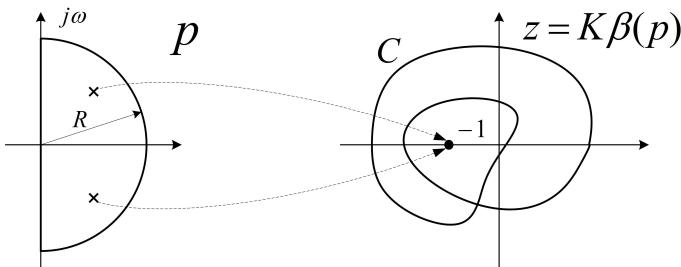


Рис. 37. К проблеме устойчивости петель

Для начала рассмотрим образ показанного на рис. 37 полукруга с $R \rightarrow \infty$. Ясно, что точка -1 принадлежит образу полукруга, если замкнутая кривая C , являющаяся образом замкнутой границы полукруга, охватывает точку -1 . Кривая C может совершать вокруг этой точки несколько оборотов. Так случается, когда функция $z = \beta K(p)$ принимает внутри полукруга значение -1 несколько раз. Тогда обратная функция $p = (\beta K)^{-1}(z)$ оказывается многозначной в окрестности точки -1 . Вообще, число точек внутри полукруга, в которых функция $\beta K(p)$ принимает значение -1 , равно числу оборотов контура C вокруг точки -1 . Можно представить себе, что в точке -1 «вбит» колышек и попытаться «утащить» замкнутый контур C в бесконечность. Если контур зацепится за колышек, то нужно подсчитать число витков зацепления. Это и даст число полюсов передаточной функции $H(p)$ внутри полукруга.

Как правило, передаточная функция разомкнутой петли $\beta K(p)$ строго аналитична в правой полуплоскости, то есть стремится к нулю во всех точках полуокружности при $R \rightarrow \infty$. Тогда в пределе все точки полуокружности оказываются отображенными в нуль и контур C становится образом мнимой оси $p = j\omega$ — **годографом петлевого усиления** $\beta K(j\omega)$, $\omega \in (-\infty, +\infty)$. К изучению этого годографа и сводится анализ устойчивости систем с обратной связью. Если годограф охватывает точку -1 k раз, то система с отрицательной связью неустойчива, а ее передаточная функция имеет k полюсов в правой по-

луплоскости. Для систем с положительной связью речь идет о точке $+1$. Эти факты составляют содержание критерия Найквиста неустойчивости петель обратной связи.

Для вещественных систем выполняется условие

$$\beta K(-j\omega) = \beta K(j^*\omega) = (\beta K)^*(j\omega).$$

Поэтому образ отрицательной полусоси частот можно найти как результат комплексного сопряжения образа положительной полусоси.

Пример 1. Набросок годографа петлевого усиления для двухполюсной петли с $\beta K(p) = \frac{\beta K_0}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)}$ дан на рис. 38а. Кривая выходит из точки βK_0 при $\omega = 0$ и уходит в нуль при $\omega = \infty$ под углом π . Сопряженная часть годографа показана пунктиром. Петля отрицательной связи всегда устойчива. Петля положительной связи неустойчива при $\beta K_0 > 1$. Однако эта неустойчивость обусловлена присутствием в правой полуплоскости полюса кратности один. Такой полюс дает апериодическое собственное решение вида $e^{+\lambda t}$, которое не может быть использовано, к примеру, для реализации генератора незатухающих гармонических колебаний.

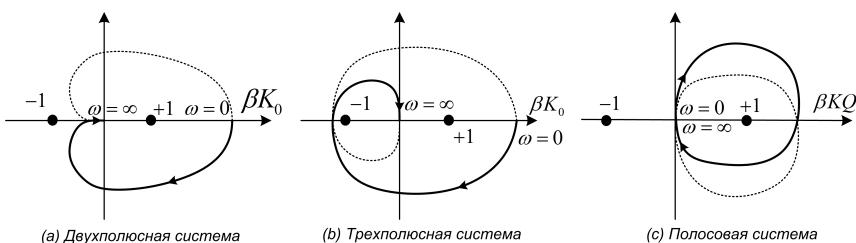


Рис. 38. Годографы петлевого усиления

Набросок годографа петлевого усиления трехполюсной петли с $\beta K(p) = \frac{\beta K_0}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)(1+p\tau_3)}$ дан на рис. 38б. Кривая выходит из точки βK_0 при $\omega = 0$ и уходит в нуль при $\omega = \infty$ под углом $-3\pi/2$. Петля положительной связи неустойчива при $\beta K_0 > 1$. Петля отрицательной связи становится неустойчивой, если модуль петлевого усиления в точке пересечения вещественной оси, то есть на той частоте, на которой фазовый сдвиг достигает значения π , превышает единицу. Тогда образуется пара неустойчивых полюсов.

Набросок годографа петлевого усиления полосовой системы с

$\beta K(p) = \frac{\beta K p}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$ дан на рис. 38с. При $\omega = 0$ кривая выходит из нуля под углом $+\pi/2$ и возвращается в нуль при $\omega = \infty$ под углом $-\pi/2$. Пересечение вещественной оси происходит на резонансной частоте в точке $\beta K/2\xi = \beta K Q$. Петля положительной связи неустойчива, если $\beta K Q > 1$.

В приложениях часто используется упрощенная версия критерия неустойчивости петли положительной обратной связи, известная как критерий Найквиста самовозбуждения автогенератора.

Петля неустойчива, если существует частота ω_0 , на которой аргумент петлевого усиления равен нулю: $\arg \beta K(\omega_0) = 0$ и при этом модуль петлевого усиления превышает единицу: $|\beta K(\omega_0)| > 1$. Первое условие называют условием баланса фаз (оно определяет частоту возбуждения), а второе – условием баланса амплитуд. Из рис. 38с ясно, что совокупность этих условий попросту выражает тот факт, что на некоторой частоте ω_0 годограф петлевого усиления пересекает вещественную ось и пересечение это происходит дальше точки $+1$. Тогда почти наверное точка $+1$ попадает внутрь контура годографа.

Применение обратных связей открывает новое направление в технике фильтрации – **активные фильтры**. Как уже известно, построение «стоящего внимания» фильтра типа фильтра Баттервортса или Чебышева высокого порядка связано с реализацией пар высокодобротных комплексно сопряженных полюсов. Но реализация таких полюсов в классе RC -цепей невозможна ввиду давлеющего над ним «проклятия апериодичности» – все полюсы RC -цепей только вещественны. Проклятие снимается переходом к RLC -цепям, содержащим наряду с емкостями индуктивности. Но с развитием технологий «на кристалле» индуктивности становятся все более и более нежелательными компонентами. Возможность обойтись без них и открывают активные фильтры – RC -цепи с усилителями и обратными связями.

Возможность реализации высокодобротных полюсов в классе RC -цепей с обратной связью проиллюстрируем на простом примере двухполюсного усилителя с передаточной функцией $K(p) = \frac{K_0}{(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)}$, охваченного безынерционной отрицательной обратной связью с коэффициентом β . Для передаточной функции петли найдем

$$H(p) = \frac{K}{1 + \beta K} = \frac{K_0}{\tau_1 \tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2)p + 1 + \beta K_0}.$$

Переход к безразмерной частоте $s = p/\omega_0$, $\omega_0^2 = \frac{1 + \beta K_0}{\tau_1 \tau_2}$ даст:

$$H(s) = \frac{K_0}{1 + \beta K_0} \frac{1}{(s^2 + 2\xi s + 1)}; \quad 2\xi = \frac{1}{Q} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta K_0}}.$$

Видно, что добротность Q полюсов передаточной функции петли может быть сделана произвольно большой ценой увеличения петлевого усиления βK_0 . Это простое наблюдение и лежит в основе теории активных фильтров, ставшей в наши дни самостоятельным и обширным разделом теории электрических цепей.

Центральная проблема теории активных фильтров – это реализация звеньев второго порядка с парами комплексно-сопряженных полюсов. Как правило, ограничиваются полиномиальными звеньями с нулями в нуле или бесконечности. Трем возможным вариантам распределения двух нулей между нулем и бесконечностью отвечают три типа полиномиальных звеньев – фильтр нижних частот (*оба нуля в бесконечности*), фильтр верхних частот (*оба нуля в нуле*) и полосовой фильтр (*один нуль в нуле и один в бесконечности*). Звенья второго порядка с произвольным расположением нулей реализуются параллельным соединением полиномиальных звеньев.

Наибольшую популярность приобрели два варианта реализации полиномиальных звеньев – это звенья Саллена-Ки с положительной обратной связью и звенья с отрицательной связью на операционном усилителе.

Звенья Саллена-Ки, рис. 39, используют неинвертирующий усилитель с коэффициентом усиления $K < 3$. Они наиболее просты как схемотехнически, так и в плане расчета. Резонансная частота звена задается выбором постоянной времени RC : $\omega_0 = 1/RC$, а добротность $Q = 1/(3-K)$ зависит только от усиления. Попытка достижения этими звеньями высоких значений добротности наталкивается на проблему точности задания коэффициента усиления. Скажем, чтобы получить добротность $Q = 100$, нужно иметь $K = 2.99$, и это при том, что при $K > 3$ звено теряет устойчивость.

Пример 2. Найдем передаточную функцию полосового звена Саллена-Ки на рис. 39б. Чтобы упростить формулы, емкостной импеданс приведем к виду

$$Z_C = \frac{1}{pC} = \frac{R}{pRC} = \frac{R}{s}; \quad s = pRC = \frac{p}{\omega_0}.$$

К тому же, не ограничивая общности, сопротивление R примем за единицу – безразмерная передаточная функция не зависит от того, в каких единицах мы измеряем сопротивления. Тогда импедансы резисторов окажутся равными 1 или 2, а импеданс емкости – равным $1/s$.

За передачу сигнала от промежуточного узла v на схеме до выхода

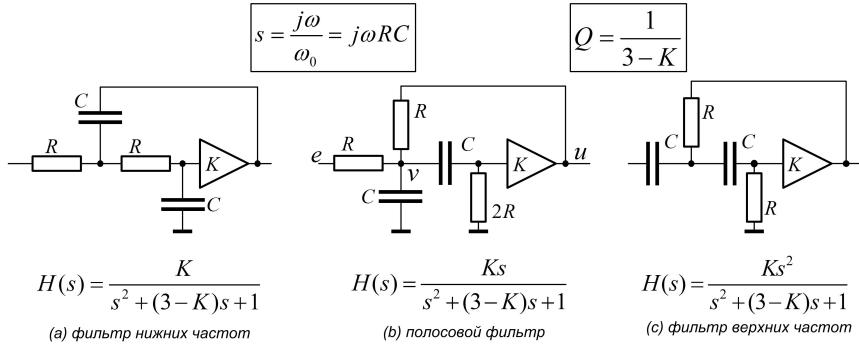


Рис. 39. Звенья Саллена-Ку

u отвечают дифференцирующая цепь $C - 2R$ и усилитель K . Поэтому

$$u = v \frac{2}{2 + 1/s} K = \frac{2Ks}{2s + 1} v.$$

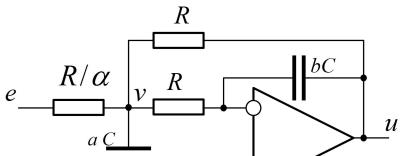
Запишем условие равенства нулю суммы токов в узле v :

$$e - v = vs + \frac{v}{2 + 1/s} + (v - u); \quad \Rightarrow \quad e = v + vs + \frac{vs}{2s + 1} + v - \frac{2Kv}{2s + 1}.$$

Отсюда

$$v = e \frac{2s + 1}{2(s^2 + (3 - K)s + 1)}; \quad u = \frac{2Ks}{2s + 1} v = e \frac{K}{s^2 + (3 - K)s + 1}.$$

Схемы трех типов звеньев второго порядка на операционном усилителе показаны на рис. 40. Все они похожи топологически и различаются только расстановкой резисторов-конденсаторов. Расчет этих звеньев несколько усложняет схемная избыточность: звено второго порядка характеризуется всего тремя параметрами (резонансная частота ω_0 , коэффициент передачи K_0 и добротность Q), а в схеме присутствует целых пять «свободных» RC -компонентов. В показанных на рисунках схемах свобода выбора несколько ограничена тем, что два из пяти компонентов искусственно объявлены одинаковыми. И все равно задание трех параметров звена не позволяет выбрать оставшиеся четыре компонента однозначно. Приведенные на рисунках расчетные формулы отвечают одному из возможных вариантов выбора, выделенному простотой расчета.

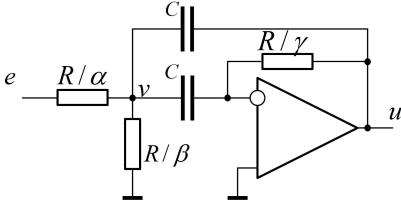


(a) фильтр низких частот

$$H(s) = -\frac{K_0}{s^2 + 2\xi s + 1}$$

$$s = \frac{j\omega}{\omega_0} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad Q = \frac{1}{2\xi}$$

$$\alpha = K_0 \quad a = Q(K_0 + 2) \quad b = \frac{1}{Q(K_0 + 2)}$$

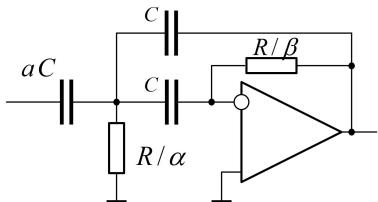


(b) полосовой фильтр

$$H(s) = -\frac{K_0 s}{s^2 + 2\xi s + 1}$$

$$s = \frac{j\omega}{\omega_0} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad Q = \frac{1}{2\xi}$$

$$\alpha = K_0 \quad \gamma = \frac{1}{2Q} \quad \beta = 2Q - K_0$$



(c) фильтр верхних частот

$$H(s) = -\frac{K_0 s^2}{s^2 + 2\xi s + 1}$$

$$s = \frac{j\omega}{\omega_0} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad Q = \frac{1}{2\xi}$$

$$\alpha = K_0 \quad \alpha = Q(K_0 + 2) \quad \beta = \frac{1}{Q(K_0 + 2)}$$

Рис. 40. Звенья с отрицательной обратной связью

Расчет начинается с выбора пары R, C , дающей заданную резонансную частоту $\omega_0 = 1/RC$. Конкретные значения R и C в определенной мере произвольны. При их выборе руководствуются соображениями удобства. Грубо говоря, все зависит от того, какие компоненты есть «под руками». Далее подключаются приведенные на рисунке в рамках расчетные формулы, которые позволяют однозначно определить номиналы всех пяти компонентов во выбранным R и C .

Звенья с отрицательной обратной связью устойчивы при любой добротности. Достижимые значения добротности лимитируются в них отношением номиналов компонентов: в любой реализации присутствует компонент со значением пропорциональным Q и компонент со значением пропорциональным $1/Q$. Отношение номиналов этих компонентов растет как Q^2 , что при больших Q создает определенные слож-

ности.

Пример 2. Проведем расчет фильтра нижних частот на рис. 40а. Импеданс емкости aC приведем к виду

$$Z = \frac{1}{paC} = \frac{R}{paCR} = \frac{R}{as}; \quad s = pRC = \frac{p}{\omega_0}.$$

Соответственно, импеданс емкости bC примет вид R/b . Сопротивление R примем за единицу. Тогда фигурирующие в схеме сопротивления станут равными $1, 1, 1/\alpha$.

Поскольку коэффициент усиления операционного усилителя равен $-\infty$, при произвольном конечном напряжении u на выходе потенциал на входе усилителя можно считать нулевым. Этот факт часто обосновывают ссылкой на принцип виртуального замыкания: если с выхода операционного усилителя заведена обратная связь на инвертирующий вход, то потенциалы входов можно считать равными.

Токи i , протекающие по емкости bC и резистору R при выходе усилителя одинаковы:

$$i = v/1 = -ubs; \quad \Rightarrow \quad u = -v \frac{1}{bs}.$$

Запишем условие равенства нулю суммы токов в узле v :

$$(e - v)\alpha = vas + v + (v - u); \quad \alpha e = v(\alpha + as + 2 + \frac{1}{bs}).$$

Откуда

$$v = e \frac{\alpha}{as + (\alpha + 2) + 1/bs}; \quad u = -v \frac{1}{bs} = -e \frac{\alpha}{abs^2 + (\alpha + 2)bs + 1}$$

Осталось волевым образом принять, что $ab = 1$, то есть $a = 1/b$. Тогда

$$H(s) = -e \frac{\alpha}{s^2 + (\alpha + 2)bs + 1} = -\frac{K_0}{s^2 + 2\xi s + 1}.$$

Отсюда и следуют приведенные на рисунке расчетные формулы:

$$\alpha = K_0; \quad 2\xi = 1/Q = (K_0 + 2)b; \quad a = 1/b.$$

Пример 3. Проведем расчет полосового фильтра на рис. 40б. В соглашениях примера 2 импедансы емкостей составляют $1/s$ и имеется три резистора с сопротивлениями $1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma$. Имеем

$$vs = -u\gamma; \quad \Rightarrow \quad u = -v \frac{s}{\gamma}.$$

$$(e - v)\alpha = v\beta + vs + (v - u)s; \quad \alpha e = v\left(\alpha + \beta + 2s + \frac{s^2}{\gamma}\right).$$

Откуда

$$v = e \frac{\alpha}{\alpha + \beta + 2s + s^2/\gamma}; \quad u = -v \frac{s}{\gamma} = -e \frac{\alpha s}{s^2 + 2\gamma s + (\alpha + \beta)\gamma}.$$

Осталось волевым образом принять, что $(\alpha + \beta)\gamma = 1$. Это дает

$$\alpha = K_0; \quad \frac{1}{Q} = 2\gamma; \quad \beta = \frac{1}{\gamma} - \alpha = 2Q - K_0.$$

Замечательно, что резонансную частоту $\omega_0 = 1/RC$ этого фильтра можно перестраивать в широких пределах при сохранении усиления QK_0 на ней и полосы пропускания $\Delta\omega = \omega_0/Q$, изменяя в схеме всего один резистор R/β .

Будем варьировать сопротивление R по закону $R' = R/k$, одновременно изменения параметры $\alpha' = \alpha/k$, $\gamma' = \gamma/k$ с тем, чтобы значения резисторов R/α и R/γ оставались неизменными. Резонансная частота будет изменяться при этом по закону $\omega'_0 = k\omega_0$, а усиление в резонансе $K_0Q = \alpha/2\gamma$ и полоса $\Delta\omega = \omega_0/Q = 2\gamma\omega_0$ – оставаться неизменными. Чтобы условие $(\alpha + \beta)\gamma = 1$ продолжало выполняться, придется варьировать параметр β : $\beta' = 1/\gamma' - \alpha' = \frac{k}{\gamma} - \frac{\alpha}{k}$. Это достигается изменением резистора R/β :

$$(R/\beta)' = \frac{R'}{\beta'} = \frac{R}{k} \frac{1}{\left(\frac{k}{\gamma} - \frac{\alpha}{k}\right)} = (R/\beta) \frac{(1 - \gamma\alpha)}{(k^2 - \gamma\alpha)} \simeq \frac{(R/\beta)}{k^2}; \quad \gamma\alpha = \frac{K_0}{2Q}.$$

При достаточно больших добротностях линейный закон перестройки частоты $\omega'_0 = k\omega_0$ дает варьирование резистора R/β по квадратичному закону.

16. Факторизация систем

Теперь, когда поведение систем в инвариантных пространствах группы сдвигов исследовано, можно вернуться к идеи факторизации – разложим произвольный вход $x(t)$ в сумму компонент из инвариантных пространств V_p^k . Тогда выход $y(t)$ можно будет найти как сумму откликов на каждую из этих компонент в отдельности.

Как это ни парадоксально, но трудности факторизации оказываются вызванными не недостатком, а избытком «количества» компонент разложения. На самом деле с каждой точкой p -плоскости связано целое счетное семейство вложенных инвариантных пространств

$V_p^k = \{A_k(t)e^{pt}\}$, $k = 0, 1, \dots$, элементы которых – это произведения многочленов $A_p^k(t)$ на экспоненту e^{pt} . Так что множество различных инвариантных пространств имеет мощность континуума.

Приходится искусственно сужать классы используемых для разложения подпространств. Естественно, что это ограничивает и классы представимых разложениями функций. Первое, что приходит в голову – это ограничение конечными наборами. Это совсем просто математически, но не особенно интересно, поскольку классы представимых функций оказываются слишком узкими – классами конечных линейных комбинаций типа

$$x(t) = \sum_{i=1}^N A_i(t)e^{p_i t}.$$

К содержательным результатам приводят лишь разложения по бесконечным наборам инвариантных пространств счетной или континуальной мощности. Но разложение по бесконечным наборам предполагает использование также и бесконечных сумм. Счетные суммы ведут к представлению функций рядами, континуальные – выливаются в те или иные интегральные преобразования. Интеграл появляется в этих преобразованиях как естественный способ придания смысла понятию суммы континуального числа элементов.

Придание корректного смысла счетной сумме функций (функциональному ряду) предполагает наличие метрики – расстояния между функциями $d(x_1(t), x_2(t))$. Ряд

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x_i(t)$$

дает разложение функции $x(t)$, если последовательность частичных сумм

$$x_N(t) = \sum_{i=0}^N c_i x_i(t), \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

сходится к $x(t)$ в метрике d , то есть если $\lim_{N \rightarrow \infty} d(x_N(t), x(t)) = 0$. К примеру, сходимость в метрике

$$d(x_1, x_2) = \sup_t |x_1(t) - x_2(t)|$$

эквивалента поточечной сходимости последовательности $x_N(t)$ к $x(t)$.

Проще всего функциональные ряды рассматривать в метрическом гильбертовом пространстве L_2 интегрируемых с квадратом функций, для которых

$$\int |x^2(t)| dt < \infty.$$

Для любой пары функций из этого пространства оказывается определенным скалярное произведение

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int x(u)y^*(u) du,$$

через которое вводятся понятия нормы (длины) функции $x(t)$

$$\|x(t)\| = \sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle}$$

и расстояния между функциями

$$d_H(x, y) = \|x(t) - y(t)\|.$$

Наличие скалярного произведения позволяет говорить также и об ортогональности функций – функции $x(t)$ и $y(t)$ ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю: $\langle x(t), y(t) \rangle = 0$.

Расстояние d_H определяет сходимость в среднеквадратичном

$$d_H(x_N, x) = \int |x_N(u) - x(u)|^2 du \rightarrow 0.$$

Это тип сходимости, естественный для гильбертовых пространств.

Гильбертовы пространства L_2 выделены уникальным свойством полноты – в них всегда существуют всюду плотные счетные ортонормированные системы $e_i(t)$, $\langle e_i(t), e_k(t) \rangle = \delta_{i,k}$ (счетные базисы), такие что произвольный элемент $x(t) \in L_2$ единственным образом представляется рядом

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i e_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle x(t), e_i(t) \rangle e_i(t),$$

коэффициенты которого, к тому же, легко определяются как скалярные произведения: $c_i = \langle x(t), e_i(t) \rangle$.

Все элементы теории конечномерных линейных пространств до-тошно воспроизводятся в гильбертовых пространствах. Единственное отличие в том, что базис них не конечен, а счетен. К сожалению, естественная для этих пространств сходимость в среднеквадратичном довольно груба – поточечная сходимость, к примеру, из нее не вытекает.

17. Ряды Фурье

Факторизация функций $x(t)$ по счетным наборам гармонических инвариантных пространств с $p = j\omega$ приводит к их представлению рядами Фурье.

Пусть выбран некоторый симметричный временной интервал $t \in (-T/2, T/2)$ длительности T . Построим на нем счетную систему ортогональных гармонических функций. Для этого рассмотрим скалярное произведение гармоник с частотами ω_1, ω_2 :

$$\langle e^{j\omega_1 t}, e^{j\omega_2 t} \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(\omega_1 - \omega_2)u} du = T \frac{\sin \frac{(\omega_1 - \omega_2)T}{2}}{\frac{(\omega_1 - \omega_2)T}{2}}.$$

Оно обращается в нуль, когда $(\omega_1 - \omega_2)T/2 = \pi n$, то есть при условии, что обусловленный различием частот набег разности фаз на интервале T равен целому числу 2π : $(\omega_1 - \omega_2)T = 2\pi n$. В итоге приходим к счетному ортогональному базису из функций

$$e_n(t) = e^{j2\pi n \frac{t}{T}} = e^{jn\omega_T t}, \quad \omega_T = \frac{2\pi}{T};$$

$$\langle e_n(t), e_m(t) \rangle = T\delta_{n,m}; \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Разложение функции $x(t)$ в ряд по этому базису – это и есть ряд Фурье.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_T t}, \quad (5)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \langle x(t), e_n(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_T t} dt.$$

Все базисные $e_n(t)$ функции периодичны с периодом T . Следовательно, в класс функций, представимых рядом Фурье входят только периодические функции.

Ясно, что при сдвиге периодической функции $x(t)$ на τ коэффициенты ее ряда Фурье преобразуются по закону

$$D_\tau c_n = c_n e^{-jn\omega_T \tau}.$$

Такое же преобразование коэффициентов вызывает сдвиг интервала периодичности $(-T/2, T/2)$, так что при построении ряда Фурье этот интервал вовсе не обязательно выбирать симметричным.

Если функция $x(t)$ вещественна ($x(t) = x^*(t)$), то $c_{-n} = c_n^*$. Положив $c_n = a_n + jb_n = |c_n|e^{j\varphi_n}$ найдем

$$x(t) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_T t + b_n \sin n\omega_T t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| \cos(n\omega_T t + \varphi_n).$$

Пример 1. Найдем представление рядом Фурье импульса манчестера

$$m(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [0, T/2], \\ -1 & \text{при } t \in [-T/2, 0]. \end{cases}$$

Периодическое продолжение этого импульса дает меандр частоты $\omega_T = 2\pi/T$. Имеем

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} m(t) e^{-jn\omega_T u} du = j \frac{\sin^2(n\pi/2)}{(n\pi/2)} = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2k \\ \frac{2j}{\pi(2k+1)} & \text{при } n = 2k+1 \end{cases}$$

$$m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)\omega_T t); \quad \omega_T = 2\pi/T.$$

Разложение меандра отличает отсутствие четных гармоники с $n = 2k$. Это характерно для всех сигналов, нечетных на интервале разложения $(-T/2, T/2)$ или таких, которые можно сделать нечетными времененным сдвигом или добавлением постоянной составляющей – сдвигом вверх/вниз. Инженеры знают, что амплитуда первой гармоники меандра составляет $4/\pi$. Несколько неожиданно то, что она превышает единицу.

Ряды Фурье сходятся в среднеквадратичном ко всем функциям из L_2 . С поточечной сходимостью есть специфика в точках разрыва t_0 , там, где левый предел $x(t \rightarrow t_0)$ отличается от правого $x(t_0 \leftarrow t)$. В таких точках ряд сходится к полусумме левого и правого пределов $(x(t \rightarrow t_0) + x(t_0 \leftarrow t))/2$. Более существенно то, что в точках разрыва проявляется явление Гиббса – на графиках частичных сумм $x_N(t)$ слева и справа от точек разрыва наблюдаются короткие колебательные выбросы с частотой высшей из представленных в сумме $x_N(t)$ гармоник. Суть явления состоит в том, что амплитуда этих выбросов не падает с ростом N , составляя примерно 0.18. Неограниченно уменьшается только их длительность. Явление Гиббса проявляется при экспериментальном наблюдении прямоугольных импульсов с резкими фронтами осциллографом с недостаточно широкой полосой, когда высшие гармоники оказывается подавленными.

Разложение в ряд Фурье позволяет найти отклик системы на произвольный периодический сигнал $x(t)$ на входе. Ряд (5) дает представление входа суммой гармонических сигналов $e_n(t) = e^{jn\omega_T t}$ из инвариантных пространств V_p^1 с $p = jn\omega_T$. Отклик на каждый из этих сигналов находится умножением на комплексный коэффициент передачи $K(jn\omega_T)$. Выход $y(t)$ – есть сумма откликов

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K(jn\omega_T) c_n e^{jn\omega_T t}.$$

Для отыскания отклика на периодический сигнал с периодом T достаточно знать передаточную функцию системы в счетном наборе точек $p = jn\omega_T$, $\omega_T = 2\pi/T$ на мнимой оси p -плоскости.

Пример 2. Найдем напряжение на колебательном контуре, вызванное протеканием по нему периодического тока произвольной формы. Представим ток с периодом T рядом Фурье:

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i_n e^{jn\omega_T t}; \quad \omega_T = 2\pi/T.$$

Импеданс контура имеет вид

$$Z(j\omega) = \frac{Q\varrho}{1 + ja(\omega)}; \quad a(\omega) = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

Это приводит к представлению напряжения на контуре рядом

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i_n Z(jn\omega_T) e^{jn\omega_T t} = Q\varrho \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i_n}{1 + ja(n\omega_T)} e^{jn\omega_T t} = \\ &= Q\varrho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2|i_n|}{\sqrt{1 + a^2(n\omega_T)}} \cos(n\omega_T t + \varphi_n); \quad \varphi_n = -\arctg a(n\omega_T). \end{aligned}$$

Если частота ω_T периодического сигнала совпадает с резонансной частотой контура ω_0 , то вклад первой гармоники в эту сумму составляет $Q\varrho(2|i_1|)$, а вклады высших гармоник падают как $1/\sqrt{1 + a^2(n\omega_T)} \simeq 1/Qn$. При высоких добротностях Q вкладом высших гармоник можно пренебречь. Тогда напряжение на контуре оказывается гармоническим при любой форме периодического тока:

$$u(t) = Q\varrho 2|i_1| \cos(\omega_T t).$$

В частности, если ток имеет форму меандра $m(t)$ с амплитудой первой гармоники $2|i_1| = 4/\pi$, то амплитуда напряжения на контуре составляет $4Q\varrho/\pi$.

Распространен следующий прием умножения частоты: гармонический сигнал частоты ω намеренно искажают до периодической серии импульсов той или иной формы. Эта серия пропускается затем через узкополосный фильтр, выделяющий n -ю гармонику. На выходе получается гармонический сигнал кратной частоты $n\omega$, уровень которого пропорционален значению n -го коэффициента ряда Фурье.

Пример 3. Разложение в ряд Фурье «гребенки» δ -импульсов с периодом T – функции

$$\chi(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT).$$

Имеем

$$\chi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_T t}, \quad \omega_T = \frac{2\pi}{T},$$

где

$$c_n = \frac{1}{T} \langle \chi, e_n \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_T t} dt = \frac{1}{T}.$$

Таким образом

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_T t}.$$

Последовательность δ -импульсов идеально подходит для умножения частоты, поскольку все коэффициенты ее ряда Фурье одинаковы.

18. Преобразование Фурье

Интегральное преобразование Фурье получается, когда для факторизации сигналов используется не счетное подмножество, а весь континуальный набор функций $e^{j\omega t}$ из гармонических инвариантных пространств V_p^1 , ассоциированных с точками $p = j\omega$ на мнимой оси p -плоскости.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} x(j2\pi f) e^{j2\pi ft} df. \quad (6)$$

$$x(j\omega) = \langle x(t), e^{j\omega t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (7)$$

По духу – это те же ряды Фурье, только период T стал бесконечным, а «сумма» в (6) – континуальной.

С обоснованием сходимости интегралов Фурье в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ функций с интегрируемым квадратом модуля имеются определенные сложности. Обусловлены они тем, что квадрат модуля «базисной» функции $e^{j\omega t}$ тождественно равен единице и очевидным образом неинтегрируем на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$. Проблемы снимает несколько специфическое определение интеграла в бесконечных пределах. Спектром $x(j\omega)$ сигнала $x(t)$ объявляют среднеквадратичный предел при $T \rightarrow \infty$ спектра $x_T(j\omega)$, найденного на конечном интервале $(-T, T)$. При таком определении интеграла преобразование Фурье становится всюду определенным в L_2 и обратимым. Тот же результат достигается приемом введения под интеграл улучшающего сходимость множителя $e^{-\alpha|t|}$ с последующим переходом к пределу в среднеквадратичном по $\alpha \rightarrow 0$.

Функцию $x(j\omega)$ частоты ω называют амплитудным спектром сигнала $x(t)$. Ее значение в точке ω имеет смысл коэффициента при $e^{j\omega t}$ в разложении $x(t)$ по гармоническим функциям. Мнимую единицу в обозначении спектра как правило опускают, рассматривая его не как функцию $x(j\omega)$ на мнимой оси p -плоскости, а как функцию $x(\omega)$ на вещественной прямой «мнимая ось».

Преобразование Фурье (7) и его обращение (6) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между представлениями сигнала во временной области функцией $x(t)$ и в области частот функцией $x(\omega)$:

$$x(t) \leftrightarrow x(\omega).$$

Это соответствие линейно

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \leftrightarrow \alpha x_1(\omega) + \beta x_2(\omega).$$

Взвешенной сумме сигналов отвечает такая же сумма спектров.

Следующие свойства преобразования Фурье легко усматриваются из определений:

$$\nabla \quad x(t)|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x(2\pi f) df;$$

$$x(\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt.$$

Значение сигнала в точке нуль равно интегралу по частоте f от его спектра и наоборот. Спектр $x(j2\pi f)$ определяет, таким образом, закон распределения амплитуды сигнала $x(t)|_{t=0}$ по частотам.

$$\blacktriangledown \quad x(at) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{a}x\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Растяжение сигнала с коэффициентом a эквивалентно сжатию спектра с сохранением площади под его кривой, равной значению сигнала в нуле.

$$\blacktriangledown \quad x(-t) \quad \leftrightarrow \quad x(-\omega); \quad x^*(t) \quad \leftrightarrow \quad x^*(-\omega).$$

Отражение сигнала вызывает отражение спектра, а комплексное сопряжение сигнала – сопряжение спектра с одновременным отражением. Второе, в частности, означает, что спектр вещественного сигнала не меняется при сопряженном отражении, а следовательно, не может быть односторонним.

$$\begin{aligned} \blacktriangledown \quad x(t - t_0) &\quad \leftrightarrow \quad x(\omega)e^{-j\omega t_0}; \\ x(t)e^{+j\omega_0 t} &\quad \leftrightarrow \quad x(\omega - \omega_0). \end{aligned}$$

Сдвиг сигнала эквивалентен умножению его спектра на комплексную гармонику и наоборот – умножение сигнала на гармонику вызывает сдвиг спектра. Последнее широко используется в технике для переноса спектров сигналов вдоль оси частот.

Пример 1. Спектр прямоугольного импульса единичной длительности $x(t) = \text{rect}_1(t) = 1$, $t \in [-1/2, 1/2]$.

$$x(\omega) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{-e^{-j\omega t}}{j\omega} \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$

Вообще, Фурье-преобразование устанавливает двойственность между прямоугольным импульсом $\text{rect}_1(u)$ и импульсом Найквиста $\sin(\pi u)/(\pi u)$:

$$\begin{aligned} \text{rect}_1(t) &\quad \leftrightarrow \quad \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}, \quad f = 2\pi\omega; \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} &\quad \leftrightarrow \quad \text{rect}_{2\pi}(\omega) = \text{rect}_1(2\pi f). \end{aligned}$$

Зная спектр прямоугольного импульса и пользуясь линейностью наряда с преобразованиями сдвига и масштабирования можно элементарно находить спектры широкого класса сигналов, представимых

суммой прямоугольников. Умножение на комплексную гармоническую функцию добавляет в этот класс фрагменты гармоник, вырезанные прямоугольными окнами.

Пример 2. Спектр δ -функции $x(t) = \delta(t)$.

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1(\omega).$$

Вообще, справедливо следующее:

$$\begin{aligned} \delta(t - t_0) &\leftrightarrow 1(t)e^{-j\omega_0 t}; \\ e^{-j\omega_0 t} &\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) = \delta(f - f_0). \end{aligned}$$

В частности, отсюда получается следующее «обобщенное» свойство ортогональности комплексных гармоник:

$$\langle e^{j\omega_1 t}, e^{j\omega_2 t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1 - \omega_2)t} dt = 2\pi\delta(\omega_1 - \omega_2).$$

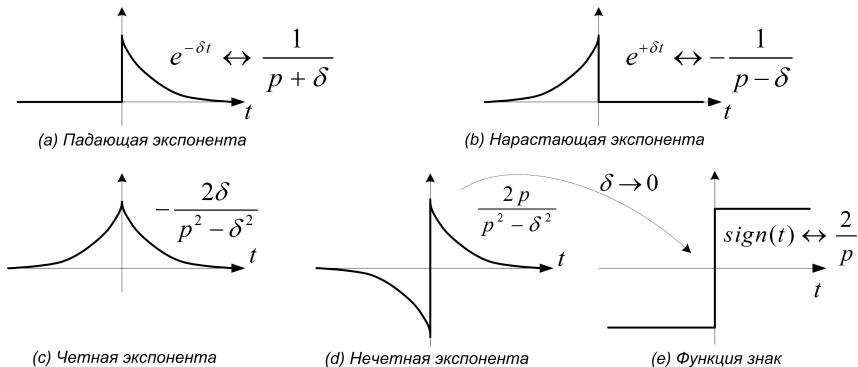


Рис. 41. К примеру 3

Пример 3. Спектры кусочно-экспоненциальных функций. Спектр падающей экспоненты $x(t) = \theta(t)e^{-\delta t}$, рис. 41а находится просто:

$$x(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} e^{-j\omega t} dt = \frac{-e^{-(\delta + j\omega)t}}{(\delta + j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{(\delta + j\omega)}.$$

Продолжение этого спектра с оси $j\omega$ в p -плоскость дает функцию $x(p) = \frac{1}{p + \delta}$ с полюсом в точке $p = -\delta$. Нарастающая экспонента,

рис. 41b – это отражение во времени падающей. Ее спектр можно найти заменой p на $-p$. Комбинации этих результатов приводят к спектрам четной и нечетной экспонент на рис. 41c,d. Предельный переход при $\delta \rightarrow 0$ дает спектр функции знак рис. 41e:

$$\text{sign}(t) \leftrightarrow \frac{2}{p} = \frac{2}{j\omega} = \frac{1}{j\pi f}.$$

Действуя по аналогии, можно показать, что и наоборот

$$\frac{2j}{t} \leftrightarrow \text{sign}(\omega); \quad \frac{j}{\pi t} \leftrightarrow \text{sign}(f);$$

Предельный переход при $\delta \rightarrow 0$ в спектре $\frac{2\delta}{\delta^2 - p^2}$ четной экспоненты на рис. 41c дает $2\pi\delta(\omega)$ в качестве фурье-образа тождественно единичной функции $1(t)$: предел равен нулю везде кроме точки $p = 0$, в которой он бесконечен, а площадь под кривой $\frac{2\delta}{\delta^2 + \omega^2}$ равна 2π при любом δ .

Полусумма единичной функции $1(t)$ и функции знак дает единичную ступень на положительной полуоси $\theta^+(t) = \frac{1(t) + \text{sign}(t)}{2}$ со спектром

$$\theta^+(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.$$

Для спектра единичной ступени на отрицательной полуоси $\theta^-(t) = \frac{1(t) - \text{sign}(t)}{2}$ получается

$$\theta^-(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}.$$

Отсюда вытекает тождество

$$\delta(x) = \frac{\delta^+(x) + \delta^-(x)}{2} = \frac{1}{2} \left(\delta(x) + \frac{1}{j\pi x} \right) + \frac{1}{2} \left(\delta(x) - \frac{1}{j\pi x} \right),$$

известное как разложение δ -функции в сумму аналитической а антианалитической компонент.

Система с передаточной функцией $H(p)$ и комплексным коэффициентом передачи $K(j\omega) = H(p)|_{p=j\omega}$ преобразует вход $x(j\omega)e^{j\omega t}$ в отклик $K(j\omega)x(j\omega)e^{j\omega t}$ с комплексной амплитудой

$$y(j\omega) = K(j\omega)x(j\omega).$$

Это определяет закон преобразования спектра – спектр отклика получается умножением спектра воздействия на комплексный коэффициент передачи системы, рис. 42.

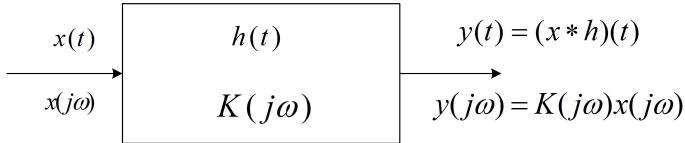


Рис. 42. Описание системы во временной и частотной областях

С другой стороны, во временной области отклик $y(t)$ определяется сверткой входа $x(t)$ с импульсной реакцией системы $h(t)$:

$$y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u) du.$$

Становится ясно, что между комплексным коэффициентом передачи $K(j\omega)$ и импульсной реакцией $h(t)$ имеется скрытая связь. Ее можно выявить «экспериментально», подав на вход системы δ -импульс $\delta(t)$ со спектром $1(\omega)$. Тогда, во временной области, откликом окажется сама импульсная реакция: $y(t) = h(t)$, а в частотной – спектром отклика станет комплексный коэффициент передачи: $y(j\omega) = K(j\omega)1(\omega) = K(j\omega)$. Выясняется, что спектр импульсной реакции – это и есть комплексный коэффициент передачи:

$$\boxed{h(t) \leftrightarrow K(j\omega)}$$

Это наблюдение является проявлением более фундаментального факта, известного как теорема о свертке.

$$(x * y)(t) \leftrightarrow x(\omega)y(\omega); \quad x(t)y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}(x * y)(\omega).$$

Свертке сигналов отвечает поточечное перемножение спектров и наоборот – перемножению сигналов – свертка спектров. В этом контексте связь между импульсной реакцией и комплексным коэффициентом передачи обнаруживается совсем просто:

$$(x * h)(t) \leftrightarrow x(\omega)h(\omega) = x(\omega)K(j\omega).$$

После того, как теорема о свертке сформулирована, доказательство ее становится доступным каждому – в интеграле свертки нужно заменить сигнал $h(t-u)$ его фурье-представлением через спектр $h(\omega)$.

19. Аналитичность и односторонность

Вернемся к форме интеграла Фурье:

$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (8)$$

Пусть сигнал $x(t)$ является аналитическим: $x(t) = x^+(t)$. Это означает, что его продолжение в комплексную плоскость $t + ju$, рис. 43, строго аналитично в верхней полуплоскости, то есть, не имеет в ней особых точек и убывает на бесконечности достаточно быстро, чтобы интеграл по полуокружности C_R обращался в нуль при $R \rightarrow \infty$.

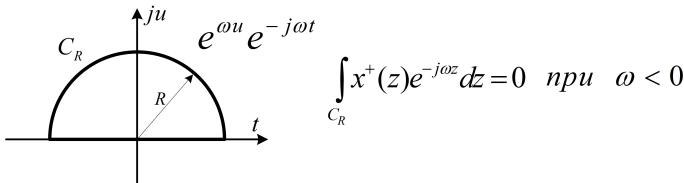


Рис. 43. Односторонность спектра аналитического сигнала

Если частота ω отрицательна, то экспонента $e^{-j\omega(t+ju)} = e^{\omega u} e^{-j\omega t}$ строго аналитична в верхней полуплоскости, при $u > 0$. (При положительных ω она аналитична в нижней полуплоскости). Значит, при $\omega < 0$ оба сомножителя подынтегральной функции в (8) строго аналитичны в верхней полуплоскости. Но тогда в (8) интеграл по вещественной оси можно заменить интегралом по замкнутому контуру, добавив равный нулю интеграл по полуокружности C_R . Из теории функций комплексного переменного известно, что интеграл по замкнутому контуру от функции, аналитической в его внутренности, равен нулю. Это означает, что спектр $x(\omega)$ аналитического сигнала равен нулю на отрицательной полусоси $\omega < 0$.

Итак, аналитический сигнал $x^+(t)$ – это сигнал с правосторонним спектром, сосредоточенным на положительной полуоси частот. Аналогично, антианалитический сигнал $x^-(t)$, который продолжается до строго аналитического в нижнюю полуплоскость $t + ju$, левосторонен.

Спектр $x(\omega)$ произвольного сигнала можно представить суммой односторонних компонент на положительной (+) и отрицательной (-) полуосях

$$x(\omega) = x^+(\omega) + x^-(\omega) = \frac{1 + \text{sign}(\omega)}{2} x(\omega) + \frac{1 - \text{sign}(\omega)}{2} x(\omega).$$

Этому отвечает разложение самого сигнала в сумму аналитической и антианалитической частей: $x(t) = x^+(t) + x^-(t)$. Спектр аналитической части есть сумма спектра исходного сигнала и результата его умножения на функцию $\text{sign}(\omega)$:

$$2x^+(\omega) = (1 + \text{sign}(\omega))x(\omega) = x(\omega) + \text{sign}(\omega)x(\omega).$$

Переведем это равенство во временную область, приняв во внимание, что в ней перемножению отвечает свертка, а $\text{sign}(\omega)$ переходит в $2j/t$. Получим:

$$2x^+(t) = x(t) + \frac{1}{2\pi} \left(x(u) * \frac{2j}{u} \right)(t) = x(t) + j \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(u)}{t-u} du.$$

Таким образом, аналитическая компонента сигнала выделяется добавлением к нему его гильбертова преобразования:

$$x^+(t) = \frac{x(t) + j\tilde{x}(t)}{2}; \quad \tilde{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(u)}{t-u} du = \left(x(u) * \frac{1}{\pi u} \right)(t)$$

Преобразование Гильbertа появилось здесь как следствие умножения спектра на функцию sign . Нетрудно заметить, что и вообще преобразование Гильbertа сигнала эквивалентно умножению его спектра на $\text{sign}(\omega)/j$:

$$\tilde{x}(t) = \left(x(u) * \frac{1}{\pi u} \right)(t) \leftrightarrow \frac{\text{sign}(\omega)}{j} x(\omega).$$

В частности, отсюда следует, что двукратное применение гильбертова преобразования сводится к замене знака: $\tilde{\tilde{x}}(t) = -x(t)$.

Закон выделения антианалитической компоненты отличается только знаком:

$$x^-(t) = \frac{x(t) - j\tilde{x}(t)}{2}.$$

Вообще, построение аналитического/антианалитического эквивалента сигнала $x(t)$ сводится к добавлению гильбертова преобразования $\tilde{x}(t)$ в качестве мнимой добавки. Полезно сравнить это с известными тождествами

$$e^{+j\omega t} = \frac{\cos \omega t + j \sin \omega t}{2}; \quad e^{-j\omega t} = \frac{\cos \omega t - j \sin \omega t}{2}.$$

Вещественный сигнал однозначно восстанавливается по своему аналитическому эквиваленту выделением вещественной части:

$x(t) = 2\operatorname{Re}(x^+(t))$. Для комплексного сигнала $x(t) = x_i(t) + jx_q(t)$ это не так. В самом деле,

$$x^+(t) = \frac{x(t) + j\tilde{x}(t)}{2} = \frac{(x_i - \tilde{x}_q) + j(\tilde{x}_i + x_q)}{2} = \frac{(x_i - \tilde{x}_q) + j(\widetilde{x_i - \tilde{x}_q})}{2}$$

Поэтому $2\operatorname{Re}(x^+(t)) = x_i(t) - \tilde{x}_q(t)$. Тем не менее, мнимая часть аналитического сигнала всегда остается гильбертовым преобразованием вещественной:

$$x^+(t) = \operatorname{Re}(x^+(t)) + j\widetilde{\operatorname{Re}(x^+(t))}.$$

Итак, представлению $x(t) = x^+(t) + x^-(t)$ сигнала суммой аналитической и антианалитической компонент отвечает разложение его спектра в сумму односторонних компонент на положительных и отрицательных частотах. Все спектральные составляющие аналитической составляющей $x^+(t)$ «вращаются» против часовой стрелки как $e^{j\omega t}$, $\omega > 0$, а антианалитической $x^-(t)$ – в противоположную сторону.

Сходство форм прямого и обратного преобразований Фурье указывает на то, что аналогичные свойства должны обнаруживаться и у спектров. И это действительно так. Представим обращение преобразования Фурье интегралом по мнимой оси p -плоскости:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} x(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} x(p) e^{pt} dp$$

При $t < 0$ функция $e^{pt} = e^{\delta t} e^{j\omega t}$ строго аналитична в правой полуплоскости, а при $t > 0$ – в левой. При $t < 0$ интеграл от строго аналитической в правой полуплоскости функции преобразуется в интеграл по контуру на рис. 44, который оказывается нулевым. Таким образом, спектрам, продолжающимся до строго аналитических в правую полуплоскость, отвечают односторонние сигналы $x(t)$ на положительной полуоси времени. Аналогично, спектры сигналов, односторонних на отрицательно полуоси времени, строго аналитичны в левой полуплоскости.

Каждый сигнал может быть представлен суммой компонент, односторонних на положительной (+) и отрицательной (-) полуосиях: $x(t) = x^+(t) + x^-(t)$. Этому отвечает разложение спектра на аналитическую и антианалитическую составляющие $x(j\omega) = x^+(j\omega) + x^-(j\omega)$, которые строго аналитически продолжаются в правую и левую полуплоскости.

Продолжая аналогию, найдем

$$x^+(\omega) = \frac{x(\omega) + j\tilde{x}(\omega)}{2}; \quad x^-(\omega) = \frac{x(\omega) - j\tilde{x}(\omega)}{2},$$

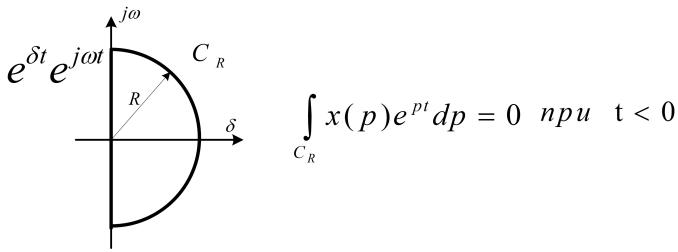


Рис. 44. Аналитичность спектра одностороннего сигнала

где

$$\tilde{x}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(v)}{v - \omega} dv$$

преобразование Гильберта в области частот, эквивалентное умножению сигнала $x(t)$ на $\text{sign}(t)/j$.

Важный класс правосторонних функций – это импульсные реакции $h(t)$ реализуемых систем, не нарушающих принцип причинности. Комплексные коэффициенты передачи таких систем аналитичны. Их мнимая часть однозначно восстанавливается по вещественной преобразованием Гильберта

$$\text{Im}(K(\omega)) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}(K(v))}{v - \omega} dv.$$

Так принцип причинности проявляется себя в частотной области.

20. Преобразование Лапласа

Интегральное преобразование Лапласа появляется как результат продолжения преобразование Фурье

$$x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt.$$

с мнимой оси $p = j\omega$ на всю комплексную p -плоскость. Заменив здесь формально $j\omega$ на $p = \delta + j\omega$, получим:

$$x(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\delta t}e^{-j\omega t} dt.$$

Значения, которые это преобразование принимает на вертикальной прямой $\operatorname{Re}(p) = \delta$, рис. 45 – это просто значения преобразования Фурье от $x(t)e^{-\delta t}$. Рассматривая $x(p)$, мы имеем дело с преобразованиями Фурье сразу всего класса функций $\{x(t)e^{-\delta t}, \delta \in (-\infty, +\infty)\}$. Проблема в том, что при $\delta \neq 0$ со сходимостью интегралов Фурье от этих функций возникают сложности, обусловленные экспоненциальным ростом $e^{-\delta t}$ на положительно полуоси времени, при $\delta < 0$, или на отрицательной полуоси – при $\delta > 0$. Выясняется, что преобразование Фурье без проблем продолжается в p -плоскость только для весьма узкого класса функций $x(t)$, стремящихся к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$ быстрее любой экспоненты $e^{-|\delta|t}$.

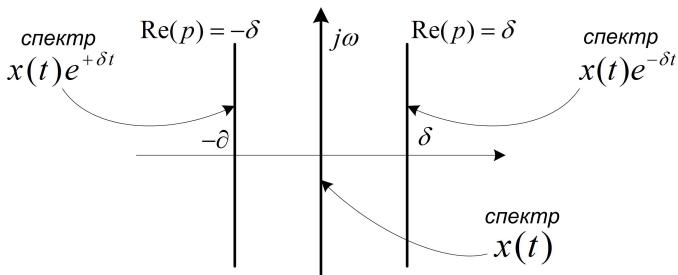


Рис. 45. Преобразования Лапласа и Фурье

Радикальный выход – ограничиться классом правосторонних функций $x(t)$, тождественно равных нулю на отрицательной полуоси. На этих функциях преобразование

$$x(p) = \int_0^\infty x(t)e^{-pt} dt = \int_0^\infty x(t)e^{-\delta t}e^{-j\omega t} dt.$$

хорошо сходится во всей правой полуплоскости, при $\delta > 0$. Это и есть интеграл Лапласа.

Функцию $x(p)$ называют p -образом функции $x(t)$.

$$x(t) \leftrightarrow x(p), \text{ или } x(p) = L[x(t)].$$

Если у правосторонней функции $x(t)$ существует преобразование Фурье, то интеграл Лапласа от нее сходится во всей правой p -полуплоскости – умножение на быстро падающую экспоненту $e^{-\delta t}$ лишь улучшает сходимость в бесконечности.

Интеграл Лапласа выгодно отличается от интеграла Фурье тем, что его удается «свести» и для функций экспоненциального роста $x(t)e^{\lambda t}$.

Если, как и выше, для функции $x(t)$ сходится интеграл Фурье, то для $x(t)e^{+\lambda t}$ интеграл Лапласа сходится при при $\delta \geq \lambda$. Это определяет функцию $x(p)$ в области $\operatorname{Re}(p) = \delta \geq \lambda$.

Как известно, спектр $x(j\omega)$ правосторонней функции аналитичен – продолжается в правую полуплоскость до строго аналитической функции $x(p) = x(\delta + j\omega)$, не имеющей особенностей и стремящейся к нулю в бесконечности. Именно ее и дает интеграл Лапласа. Эта функция может быть аналитически продолжена в левую полуплоскость до всюду определенной функции $x(p)$. Но в левой полуплоскости продолженная функция уже может иметь особые точки.

Преобразование Лапласа и интеграл Лапласа это на самом деле немного разные вещи. Интеграл определяет значения $x(p)$ в той области p -плоскости, где он сходится. Далее эта функция аналитически продолжается на всю плоскость. Результатом продолжения и становится p -образ $x(p)$, определенный всюду за исключением некоторого множества особых точек. Продолженный образ может оказаться вполне «приятной» функцией и в тех точках p , в которых интеграл Лапласа расходится.

Пример 1. p -образ функции $x(t) = \theta(t)e^{-\mu t}$. Интеграл Лапласа

$$\begin{aligned} x(p) &= \int_0^\infty e^{-\mu t} e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-(\mu+\delta)t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{p+\mu} \int_0^\infty e^{-ut} du = \frac{1}{p+\mu}. \end{aligned}$$

сходится при $\operatorname{Re}(p) = \delta > -\operatorname{Re}(\mu)$ и определяет в этой области функцию $x(p) = 1/(p + \mu)$. Слева от вертикальной прямой $\delta = -\operatorname{Re}(\mu)$ интеграл расходится, а функция $x(p)$ ведет себя так же хорошо, как и справа. Причина в том, что на этой прямой, при $p = -\mu$, у $x(p)$ имеется полюс. Он и не дает сдвинуть влево границу сходимости.

Чтобы найти функцию $x(t)$ по ее p -образу $x(p)$ – выполнить обращение преобразования Лапласа – достаточно выбрать в p -плоскости какую-нибудь вертикальную линию $\operatorname{Re}(p) = \delta$, на которой функция $x(\delta + j\omega)$ допускает вычисление обратного преобразования Фурье. Это преобразование дает функцию $x(t)e^{-\delta t}$:

$$x(t)e^{-\delta t} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} x(\delta + j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Умножив это на $e^{\delta t}$, приходим к известной формуле Меллина обраще-

ния преобразования Лапласа:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} x(p)e^{pt} dp.$$

Прямую можно выбрать как угодно, лишь бы на ней было «все хорошо» со сходимостью интеграла. Разумно выбирать ее достаточно далеко в правой полуплоскости, там где p -образ строго аналитичен.

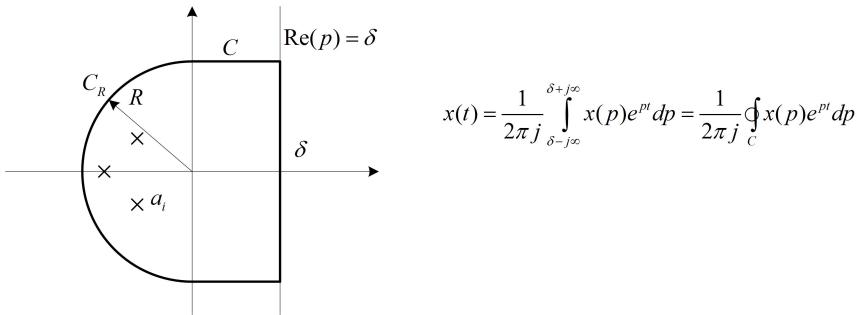


Рис. 46. Контур интегрирования

Пользуясь строгой аналитичностью e^{pt} в левой полуплоскости, интеграл Меллина удается свести к интегралу по контуру C , замкнутому двумя отрезками горизонтальных прямых и полуокружностью бесконечного радиуса R , рис. 46. Такое сведение требует равенства нулю при $R \rightarrow \infty$ интеграла по всему, что не является прямой $\text{Re}(p) = \delta$. Тогда значение интеграла удается найти как сумму вычетов во всех полюсах a_i функции $x(p)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C x(p)e^{pt} dp = \sum_i \text{res}(x(p)e^{pt}, a_i).$$

Вычет в простом полюсе кратности один находится элементарно:

$$\text{res}(x(p), a_i) = \lim_{p \rightarrow a} (p - a)x(p)e^{pt}.$$

С полюсом кратности k все несколько сложнее:

$$\text{res}(x(p), a_i) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{p \rightarrow a} \frac{d^{k-1}[(p-a)^k x(p)e^{pt}]}{dp^{k-1}}.$$

Пример 2. Обратное преобразование Лапласа функции

$$x(p) = \frac{1}{p^2 + 2\xi p + 1} = \frac{1}{(p - a_+)(p - a_-)};$$

$$a_{\pm} = -\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2} = -\xi \pm j\eta.$$

Вычет в полюсе a_+ равен

$$\text{res}(a_+) = \lim_{p \rightarrow a_+} \frac{(p - a_+)e^{pt}}{(p - a_+)(p - a_-)} = \frac{e^{a_+ t}}{(a_+ - a_-)} = \frac{e^{(-\xi + j\eta)t}}{2j\eta}.$$

Прибавив к этому вычет $\text{res}(a_-) = -e^{(-\xi - j\eta)t}/2j\eta$, найдем

$$x(t) = \text{res}(a_+) + \text{res}(a_-) = \frac{1}{\eta} e^{-\xi t} \sin \eta t.$$

Чаще всего приходится иметь дело с обращением по Лапласу рациональных функций. Произвольная функция этого рода может быть представлена в виде

$$x(p) = C(p) + \frac{B(p)}{A(p)}; \quad \deg B(p) < \deg A(p),$$

где $C(p), B(p), A(p)$ – многочлены. В свою очередь, при известных корнях $a_i, i \in I$ знаменателя $A(p)$, дробь $\frac{B(p)}{A(p)}$ раскладывается в сумму элементарных дробей:

$$\frac{B(p)}{A(p)} = \sum_{i \in I} F_i(p); \quad F_i(p) = \sum_{j=1}^k \frac{b_{i,j}}{(p - a_i)^j},$$

где k -кратность корня a_i . Количество неизвестных коэффициентов $b_{i,j}$ равно числу корней $A(p)$ с учетом их кратностей, то есть совпадает со степенью $A(p)$. Линейная система уравнений для них строится приведением суммы дробей к общему знаменателю и приравниванием коэффициентов получившегося в числителя многочлена к коэффициентам $B(p)$. В окончательном итоге все сводится к обращению суммы элементарных функций вида

$$x(p) = 1, \quad p^n, \quad \frac{1}{p^n}, \quad \frac{1}{(p - a)^n}; \quad n \geq 1,$$

для обращения которых можно использовать легко укладываемый в голове набор шаблонов.

Пример 3. Разложения в сумму элементарных дробей звеньев второго порядка. Пусть $-\xi \pm \eta$, где $\eta = \sqrt{1 - \xi^2}$ или $\eta = j\sqrt{\xi^2 - 1}$ – корни многочлена $p^2 + 2\xi p + 1$. Тогда

$$\frac{1}{p^2 + 2\xi p + 1} = \frac{\alpha_+}{p + \xi - \eta} + \frac{\alpha_-}{p + \xi + \eta}; \quad \alpha_{\pm} = \pm \frac{1}{2\eta}.$$

$$\frac{p}{p^2 + 2\xi p + 1} = \frac{\alpha_+}{p + \xi - \eta} + \frac{\alpha_-}{p + \xi + \eta}; \quad \alpha_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\xi}{\eta} \right).$$

$$\frac{p^2}{p^2 + 2\xi p + 1} = 1 + \frac{\alpha_+}{p + \xi - \eta} + \frac{\alpha_-}{p + \xi + \eta}; \quad \alpha_{\pm} = -\xi \left(1 \mp \frac{\xi}{\eta} \right) \mp \frac{1}{2\eta}.$$

Пример 4. Разложим в сумму элементарных дробей функцию $x(p) = \frac{p^2}{(p+a)^2(p+b)}$ с полюсом кратности два в точке $-a$. Имеем

$$\frac{p^2}{(p+a)^2(p+b)} = \frac{\alpha}{p+a} + \frac{\beta}{(p+a)^2} + \frac{\gamma}{p+b}.$$

Приведение правой части к общему знаменателю дает

$$p^2 = \alpha(p+a)(p+b) + \beta(p+b) + \gamma(p+a)^2.$$

Приравнивание коэффициентов при степенях p слева и справа приводит к системе линейных уравнений

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a+b & 1 & 2a \\ ab & b & a^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

решения которой дают коэффициенты разложения α, β, γ :

$$\gamma = \frac{b^2}{(b-a)^2}; \quad \alpha = 1 - \gamma = 1 - \frac{b^2}{(b-a)^2}; \quad \beta = \frac{a^2}{b-a}.$$

Элементарно проверяется, что задержка сигнала $D_\tau x(t) = x(t - \tau)$ вызывает умножение его p -образа на $e^{-p\tau}$.

$$D_\tau x(t) = x(t - \tau) \leftrightarrow x(p)e^{-p\tau}.$$

Правый сдвиг сигнала улучшает строгую аналитичность p -образа в правой полуплоскости, ускоряя его сходимость к нулю при $p \rightarrow \infty$ на фактор $e^{-\tau\delta}$, $\delta = \operatorname{Re}(p)$.

Среди всех мыслимых тестовых сигналов особое место занимает δ -функция $\delta(t)$: отклик на нее – это импульсная реакция системы. При обсуждении этой функции в контексте преобразования Лапласа возникает неясность относительно того, можно ли рассматривать $\delta(t)$ как правостороннюю функцию. Разумный выход из положения – рассмотреть функцию $\delta(t)$ как предел при $\tau \rightarrow 0$ сдвинутой функции $\delta(t - \tau)$, правосторонность которой вопросов не вызывает. p -образ сдвинутой δ -функции находится элементарно:

$$\int_0^\infty \delta(t - \tau) e^{-pt} dt = e^{-p\tau}; \quad L(\delta(t - \tau)) = e^{-p\tau}.$$

Тогда p -образ $\delta(t)$ находится предельным переходом

$$L(\delta(t)) = \lim_{\tau \rightarrow 0} e^{-p\tau} = 1.$$

Подобным же образом вводятся и p -образы производных от δ -функции. Производная $\partial^n \delta(t)$ порядка n определяется тождеством

$$\int_{-\infty}^\infty \partial^n \delta(t) g(t) dt = (-1)^n \partial^n g(t)|_{t=0},$$

верным для произвольной «основной» функции $g(t)$. Преобразование Лапласа от сдвинутой производной $\partial^n \delta(t - \tau)$ находится просто

$$\int_0^\infty \partial^n \delta(t - \tau) e^{-pt} dt = p^n e^{-p\tau}; \quad L(\partial^n \delta(t - \tau)) = p^n e^{-p\tau}.$$

При $\tau \rightarrow 0$ это дает

$$L(\partial^n \delta(t)) = p^n.$$

Вопрос о p -образах первообразных рассмотрим в более общем контексте. Проинтегрировав дифференциал

$$d[(\partial^{-n} x(t)) e^{-pt}] = (\partial^{-(n-1)} x(t)) e^{-pt} dt - p(\partial^{-n} x(t)) e^{-pt} dt$$

с n -кратной первообразной $\partial^{-n} x(t)$ произвольной функции $x(t)$, найдем:

$$\int_0^\infty (\partial^{-(n-1)} x(t)) e^{-pt} dt = p \int_0^\infty (\partial^{-n} x(t)) e^{-pt} dt + (\partial^{-n} x(t)) e^{-pt} \Big|_0^\infty.$$

Второе слагаемое справа равно нулю: нулевой предел в бесконечности обеспечивает экспонента $e^{-pt} = e^{-\delta t} e^{-j\omega t}$, нулевое значение в нуле

обусловлено стремлением к нулю первообразной от правосторонней функции:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \partial^{-1} x(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t x(u) du = 0.$$

Поэтому

$$L(\partial^{-n} x) = \frac{L(\partial^{-(n-1)} x)}{p}.$$

Переход к первообразной от функции эквивалентен делению на p ее p -образа.

Этот результат мгновенно проводит к нахождению p -образов первообразных от δ -функции – функций $\theta_n(t) = \theta(t) \frac{t^n}{n!} = \partial^{-(n+1)} \delta(t)$, используемых как тестовые сигналы при исследовании переходных характеристик.

$$\theta_n(t) = \theta(t) \frac{t^n}{n!} \leftrightarrow \frac{1}{p^{(n+1)}}; \quad n \geq 0.$$

В частности,

$$\partial \delta(t) \leftrightarrow p; \quad \delta(t) \leftrightarrow 1; \quad \theta(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}; \quad t\theta(t) \leftrightarrow \frac{1}{p^2}.$$

И вообще

$$\partial^n \delta(t) \leftrightarrow p^n \quad \text{при любом целом } n.$$

Образы δ -функции и ее производных не стремятся к нулю при $p \rightarrow \infty$ в правой p -полуплоскости. Вообще, если p -образ $x(p)$ ведет себя в бесконечности как p^n , $n \geq 0$, то функция $x(t)$ сингулярна – содержит либо δ -функцию ($n = 0$), либо n -ю производную от нее. Образы не имеющих сингулярностей функций падают в бесконечности не медленнее чем $1/p$. Предельно низкой скоростью спада $1/p$ обладает p -образ θ -функции.

Если правосторонняя функция $x(t)$ имеет скачок в нуле, то в ее составе можно выделить θ -функцию: $x(t) = x(0)\theta(t) + \tilde{x}(t)$, $\tilde{x}(0) = 0$. А значит p -образ $x(p)$ ведет себя в бесконечности как $x(0)/p$. Отсюда вытекает важное предельное равенство, которое позволяют оценивать значения в нуле функций непосредственно по их p -образам, без обращения преобразования Лапласа:

$$\lim_{0 \leftarrow t} x(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} px(p).$$

Верно и двойственное предельное равенство, которое используется для анализа асимптотики функций в бесконечности:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} px(p).$$

В обеих формулах переходить к пределу по p следует внутри сектора $|\arg(p)| < \pi/2$.

Проблемы разрывности функций или их производных в нуле проявляются при нахождении p -образов производных. Как и раньше, интегрирование дифференциала

$$d[x(t))e^{-pt}] = x'(t)e^{-pt}dt - px(t)e^{-pt}dt$$

дает

$$\int_0^\infty x'(t)e^{-pt} dt = p \int_0^\infty x(t)e^{-pt} dt + x(t)e^{-pt} \Big|_0^\infty.$$

Но теперь нет основания считать, что $x(t)$ обращается в нуль при $t = 0$. Это делает формулу для p -образа производной несколько неуклюжей:

$$L[x'(t)] = px(p) - x|_{t=0}.$$

Неуклюжесть в том, что добавка $x|_{t=0}$ не относится к p -области – это значение функции времени $x(t)$ в точке нуль. Последовательное дифференцирование дает довольно сложную картину:

$$L[x''(t)] = pL[x'(t)] - x'|_{t=0} = p^2x(p) - x|_{t=0}p - x'|_{t=0},$$

$$L[x'''(t)] = p^3x(p) - x|_{t=0}p^2 - x'_{t=0}p - x''_{t=0}.$$

В ней принимают участие значения в нуле все большего числа производных.

Положение выправляется, когда $x(t)$ обращается в нуль при $t = 0$ со всеми производными. Тогда

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \leftrightarrow p^n x(p),$$

и дифференцирование становится эквивалентным умножению на p .

Ситуацию можно ввести в регулярное русло, придав несколько иной смысл оператору дифференцирования на положительной полуоси времени. Добавочный член $x|_{t=0}$ в формуле для образа производной

$$L[x'(t)] = px(p) - x|_{t=0}$$

появляется тогда, когда правосторонняя функция $x(t)$ имеет ненулевой правый предел $x(0 \leftarrow t) = x|_{t=0}$, то есть когда она разрывна в точке нуль. Но тогда она не дифференцируема в нуле, так что понятие производной нуждается в уточнении. Его можно уточнить двумя

способами. Можно определить значение производной в нуле как правый предел: $x'(0) = x'(\varepsilon)|_{0 \leftarrow \varepsilon}$. Тогда $x'(t)$ окажется обычной функцией. А можно считать, что производная скачка в нуле есть δ -функция:

$$\partial x(t) = x'(t) + x|_{t=0}\delta(t).$$

Лаплас-образ так определенной производной

$$L[\partial x(t)] = L[x'(t)] + x|_{t=0}L[\delta(t)] = px(p) - x|_{t=0} + x|_{t=0} = px(p)$$

оказывается результатом умножения на p без всяких добавочных членов. При такой интерпретации оператора ∂ закон

$$\partial^n x(t) \leftrightarrow p^n x(p)$$

становится универсальным – верным для всех целых n .

Пример 5. Образ производной правосторонней экспоненты $x(t) = \theta(t)e^{-\mu t}$. Образ $x(p) = 1/(p + \mu)$ самой экспоненты был найден выше, в примере 1. Два закона дифференцирования

$$x'(t) = -\mu\theta(t)e^{-\mu t}; \quad \partial x(t) = \delta(t) - \mu\theta(t)e^{-\mu t}.$$

приводят к двум формам p -образа производной:

$$L[x'(t)] = -\frac{\mu}{p + \mu} = \frac{p}{p + \mu} - 1 = pL[x(t)] + x|_{t=0};$$

$$L[\partial x(t)] = 1 - \frac{\mu}{p + \mu} = \frac{p}{p + \mu} = pL[x(t)].$$

Пример 6. Образы производных единичной ступени $\theta(t)$. Имеем: $\theta'(t) = 0$, в то время как $\partial\theta(t) = \delta(t)$. Поэтому

$$L[\theta'(t)] = 0 = pL[\theta(t)] - \theta|_{t=0} = \frac{p}{p} - 1.$$

$$L[\partial\theta(t)] = 1 = pL[\theta(t)] = \frac{p}{p}.$$

Зная p -образ функции $x(t)$, можно найти образ результата ее умножения на степень t . Нужный для этого прием дает дифференцирование p -образов:

$$\frac{dx(p)}{dp} = \frac{d}{dp} \int_0^\infty x(t)e^{-pt} dt = - \int_0^\infty tx(t)e^{-pt} dt.$$

Таким образом,

$$tx(t) \leftrightarrow -\frac{d}{dp}x(p).$$

Многократное дифференцирование дает:

$$t^n x(t) \leftrightarrow (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} x(p), \quad n \geq 0.$$

Применив это к функции $x(t) = e^{-\mu t}$ с p -образом $x(p) = \frac{1}{p+\mu}$, найдем

$$t^n e^{-\mu t} \leftrightarrow \frac{n!}{(p+\mu)^{(n+1)}}, \quad n \geq 0.$$

К тому же результату приводит интегрирование по частям.

$$d[t^n e^{-\mu t} e^{-pt}] = d[t^n e^{-(\mu+p)t}] = nt^{(n-1)}e^{-(\mu+p)t} dt - (p+\mu)t^n e^{-(\mu+p)t} dt$$

Проинтегрировав это в пределах от нуля до бесконечности, находим:

$$L[t^n e^{-\mu t}] = \frac{n}{p+\mu} L[t^{(n-1)} e^{-\mu t}].$$

Имея перед глазами шпаргалку с всего двумя формулами

$\partial^n \delta(t) \leftrightarrow p^n, n \in \mathbb{Z}$	$t^n e^{-\mu t} \leftrightarrow \frac{n!}{(p+\mu)^{(n+1)}}, n \geq 0$
--	---

можно находить как p -образы функций $A_k(t)e^{-\mu t}$ из инвариантных пространств V_μ^k с многочленом $A_k(t)$ любой степени, так и обратные преобразования от рациональных функций, раскладывая их в сумму элементарных дробей. В шпаргалку можно добавить множество других формул, которые сами накапливаются в памяти с приобретением опыта вычислений. Специально запоминать их не стоит.

Пример 7. Гармонические функции.

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}).$$

Это сумма двух экспонент с $\mu = \pm j\omega$. Но $L[e^{-\mu t}] = 1/(p+\mu)$. Поэтому

$$L[\cos \omega t] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Аналогично,

$$L[\sin \omega t] = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Заметим, что

$$L[(\cos \omega t + j \sin \omega t)] = \frac{p}{p^2 + \omega^2} + j \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{1}{p - j\omega} = L[e^{j\omega t}].$$

Формулы для p -образов затухающих гармоник выводятся аналогично:

$$L[e^{-\xi t} \cos \omega t] = \frac{p + \xi}{(p + \xi)^2 + \omega^2}; \quad L[e^{-\xi t} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(p + \xi)^2 + \omega^2}.$$

А вот так выглядят формулы для линейно нарастающих гармоник:

$$L[t \cos \omega t] = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}; \quad L[t \sin \omega t] = \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

Применения преобразования Лапласа к анализу систем опираются на теорему о свертке: свертке сигналов отвечает перемножение их p -образов:

$$L[(x * y)(t)] = L[x(t)]L[y(t)]; \quad (x * y)(t) \leftrightarrow x(p)y(p).$$

Это эквивалент аналогичной теоремы для преобразования Фурье. Неожиданным может показаться, пожалуй, только тот факт, что свертка двух правосторонних сигналов всегда дает правосторонний сигнал. В самом деле, пусть сигналы $x(t), y(t)$ обращаются в нуль на отрицательной полуоси, при $t < 0$. Тогда

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u) du = \int_0^t x(u)y(t-u) du = 0 \quad \text{при } t \leq 0.$$

Сама же теорема о свертке доказывается «в лоб»:

$$\int (x * y)(t)e^{-pt} dt = \int \int x(u)e^{-pu}y(t-u)e^{-p(t-u)} du dt = x(p)y(p).$$

Ограниченнность пределов интегрирования автоматически обеспечивается односторонностью функций x, y . Следить за ней не нужно.

Пусть на вход удовлетворяющей принципу причинности системы с правосторонней импульсной реакцией $h(t)$ подано правостороннее воздействие $x(t)$. Тогда p -образ $y(p)$ отклика $y(t) = (x * h)(t)$ оказывается произведением

$y(p) = H(p)x(p)$

образа $x(p)$ воздействия на образ импульсной реакции – передаточную функция системы $H(p)$:

$$h(t) \leftrightarrow H(p).$$

Преобразование Лапласа идеально подходит для анализа переходных характеристик систем с известными передаточными функциями. Напомним, что переходная характеристика $h_n(t)$ порядка $n \geq 0$ – это отклик системы на тестовое воздействие $\theta_n(t) = \theta(t) \frac{t^n}{n!}$ с p -образом $\theta_n(p) = \frac{1}{p^{n+1}}$. Поэтому p -образ переходной характеристики имеет вид

$$h_n(p) = \frac{H(p)}{p^{n+1}}.$$

Отыскание временной формы переходной характеристики $h_n(t)$ сводится к обращению преобразования Лапласа. Так найденная характеристика однозначно определена условием ее равенства нулю со всеми производными на отрицательной полуоси. При желании к ней можно добавить произвольную линейную комбинацию функций из собственного пространства системы. Определив значения возникшего при этом набора произвольных постоянных из начальных условий, можно найти реакцию системы на правостороннее воздействие при заданных ненулевых начальных условиях.

В экспериментах чаще всего исследуется реакция системы на единичный перепад – переходная характеристика $h_0(t)$ порядка нуль с p -образом

$$h_0(p) = \frac{H(p)}{p}.$$

Замечательна она тем, что ее поведение при $t = 0$ и $t \rightarrow \infty$ напрямую связано со значениями передаточной функции системы $H(p)$ в бесконечности и нуле:

$$h_0(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} H(p); \quad h_0(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} H(p).$$

О поведении переходной характеристики системы в нуле и бесконечности можно судить по общему виду ее передаточной функции. Если $H(p)$ имеет ненулевой предел в бесконечности, то система хорошо передает на выход сколь угодно высокие частоты. Тогда на ее переходной характеристике присутствует скачок в нуле – фронт единичного перепада передается на выход. Если же $H(p)$ отлична от нуля в нуле, то система передает постоянную составляющую. Тогда ее переходная

характеристика имеет ненулевой предел в бесконечности – на выход передается плоская вершина перепада.

Пример 8. Интегрирующая цепь с $H(s) = \frac{1}{s+1}$, $s = p\tau = pRC$.

Импульсная реакция $h(t) = e^{-t}$ – это обратное преобразование Лапласа от $H(s)$. В реальном времени $t' = t\tau$ она принимает вид

$$h(t') = \frac{1}{\tau} e^{-t'/\tau}$$

Появившийся здесь «ниоткуда» фактор $\frac{1}{\tau}$ – это множитель присущей импульсной реакции размерности $1/[T]$, который равен единице в безразмерной шкале времени $t = t'/\tau$.

Реакция $h_0(t)$ на единичную ступень с $\theta_0(s) = 1/s$:

$$h_0(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad h_0(t) = 1 - e^{-t}, \quad t \geq 0,$$

или в реальном времени

$$h_0(t') = 1 - e^{-t'/\tau}.$$

Отклик на линейно нарастающий сигнал $\theta_1(t) = \theta(t)t$; $\theta_1(s) = 1/s^2$:

$$h_1(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad h_1(t) = t - (1 - e^{-t}),$$

или в реальном времени

$$h_1(t') = \tau \{t'/\tau - (1 - e^{-t'/\tau})\} = t' - \tau(1 - e^{-t'/\tau}).$$

Пример 9. Дифференцирующая цепь с $H(s) = \frac{s}{s+1}$, $s = p\tau = pRC$.

Импульсную реакцию $h(t) = \delta(t) - e^{-t}$ дает обратное преобразование Лапласа от

$$H(s) = \frac{s}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1}.$$

Или в реальном времени $t' = t\tau$

$$h(t') = \frac{1}{\tau} \{\delta(t'/\tau) - e^{-t'/\tau}\} = \boxed{\delta(t') - \frac{1}{\tau} e^{-t'/\tau}}$$

Здесь учтено, что $\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x)$.

Реакция на единичный перепад:

$$h_0(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{1}{s} \frac{s}{(s+1)} = \frac{1}{s+1}; \Rightarrow h_0(t) = e^{-t}$$

$$h_0(t') = e^{-t'/\tau}.$$

Отклик на линейно нарастающий сигнал:

$$h_1(s) = \frac{1}{s^2} \frac{s}{(s+1)} = \frac{s}{s+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \Rightarrow h_1(t) = 1 - e^{-t}.$$

$$h_1(t') = \tau(1 - e^{-t'/\tau}).$$

Пример 10. Полосовое звено с

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 2\xi s + 1}; \quad s = \frac{p}{\omega_0}; \quad \text{полюсы } s_{\pm} = -\xi \pm j\eta, \eta = \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Отклик на единичный перепад:

$$h_0(s) = \frac{1}{s} \frac{s}{s^2 + 2\xi s + 1} = \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1} = \frac{\alpha_+}{s + \xi - j\eta} + \frac{\alpha_-}{s + \xi + j\eta},$$

где $\alpha_{\pm} = \pm \frac{1}{2j\eta}$. Отсюда

$$h_0(t) = \frac{e^{-\xi t}}{2j\eta} (e^{+j\eta t} - e^{-j\eta t}) = \frac{e^{-\xi t}}{\eta} \sin \eta t,$$

или в размерном времени $\omega_0 t' = t$

$$h_0(t') = \frac{e^{-\xi \omega_0 t'}}{\eta} \sin \eta \omega_0 t'; \quad \eta = \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Пример 11. Фильтр нижних частот второго порядка с

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1}; \quad s = \frac{p}{\omega_0}; \quad \text{полюсы } s_{\pm} = -\xi \pm j\eta, \eta = \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Отклик на единичный перепад:

$$h_0(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{\alpha_+}{s + \xi - j\eta} - \frac{\alpha_-}{s + \xi + j\eta},$$

где $\alpha_{\pm} = 1/2 \pm \xi/2j\eta$. Отсюда

$$h_0(t) = 1 - e^{-\xi t} \left\{ \frac{e^{j\eta t} + e^{-j\eta t}}{2} + \frac{\xi}{\eta} \frac{e^{j\eta t} - e^{-j\eta t}}{2j} \right\} = 1 - \frac{e^{-\xi t}}{\eta} \{ \eta \cos \eta t + \xi \sin \eta t \}.$$

или в реальном времени $\omega_0 t' = t$

$$h_0(t') = 1 - \frac{e^{-\xi \omega_0 t'}}{\eta} \{ \eta \cos \eta \omega_0 t' + \xi \sin \eta \omega_0 t' \}.$$

Пример 12. Фильтр верхних частот второго порядка с

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\xi s + 1}; \quad s = \frac{p}{\omega_0}; \quad \text{полюсы } s_{\pm} = -\xi \pm j\eta, \eta = \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Отклик на единичный перепад:

$$h_0(s) = \frac{1}{s} \frac{s^2}{s^2 + 2\xi s + 1} = \frac{s}{s^2 + 2\xi s + 1} = \frac{\alpha_+}{s + \xi - j\eta} - \frac{\alpha_-}{s + \xi + j\eta},$$

где $\alpha_{\pm} = 1/2 \mp \xi/2j\eta$. Отсюда

$$h_0(t) = e^{-\xi t} \left\{ \frac{e^{j\eta t} + e^{-j\eta t}}{2} - \frac{\xi}{\eta} \frac{e^{j\eta t} - e^{-j\eta t}}{2j} \right\} = \frac{e^{-\xi t}}{\eta} \{ \eta \cos \eta t - \xi \sin \eta t \}.$$

или в реальном времени $\omega_0 t' = t$

$$h_0(t') = \frac{e^{-\xi \omega_0 t'}}{\eta} \{ \eta \cos \eta \omega_0 t' - \xi \sin \eta \omega_0 t' \}.$$

21. Реакции на элементарные воздействия

Переходная характеристика системы, ее реакция $h_0(t)$ на единичную ступень $\theta(t)$, – это частный случай более общей реакции $y(t)$ на элементарное воздействие вида $x(t) = \theta(t)e^{-\mu t}$, которое является ограничением на правую полусось функции $e^{-\mu t}$ из инвариантного пространства V_p^1 , отвечающего комплексной частоте $p = -\mu$. При вещественном μ речь идет о реакции на экспоненту $e^{-\mu t}$, применительно к паре комплексно сопряженных собственных значений $\delta \pm j\omega$ – о реакции на сигнал $e^{-\delta t} \cos \omega t$.

Лаплас-образ элементарного воздействия имеет почти столь же простой вид $x(p) = 1/(p+\mu)$, что и образ $\theta(p) = 1/p$ единичной ступени.

При известной передаточной функции системы $H(p)$ реакция на это воздействие находится обратным преобразованием Лапласа функции

$$y(p) = H(p)x(p) = \frac{H(p)}{p + \mu}.$$

Если все полюсы $H(p)$ различны и отличаются от полюса $p = -\mu$ воздействия, то различны и все полюсы $y(p)$. Такая функция представляется взвешенной суммой элементарных дробей вида $1/(p + \mu_i)$, которым во временной области отвечают экспоненты $e^{-\mu_i t}$. Одна из этих экспонент, $e^{-\mu t}$, представляет реакцию системы на внешнее воздействие с частотой $-\mu$, остальные относятся к собственному пространству системы. Их линейная комбинация описывает собственное решение, возбужденное в системе в момент подачи воздействия. Отклик на элементарное воздействие расщепляется, таким образом, на сумму вынужденной и собственной частей. Если отвлечься от затухающей во времени собственной части, то оказывается, что элементарное воздействие тестирует поведение системы на частоте $p = -\mu$, подобно тому как единичная ступень на входе тестирует ее на нулевой частоте.

К найденному обратным преобразованием Лапласа отклику можно добавить произвольную функцию из собственного пространства системы – линейную комбинацию экспонент $e^{-\mu_i t}$ с произвольными коэффициентами. Определив значения этих коэффициентов из начальных условий можно найти отклик на элементарное воздействие из заданного ненулевого начального состояния системы. В частности, это начальное состояние всегда можно выбрать так, чтобы полностью аннулировать собственную часть отклика, оставив только вынужденное решение. Иными словами, систему всегда можно привести в такое «правильное» начальное состояние, что включение воздействия не вызовет переходного процесса. Это ровно то состояние, в котором система оказалась бы в момент $t = 0$, если бы воздействие на ее входе присутствовало всегда.

Некоторые из полюсов $y(p)$ могут оказаться кратными. Так происходит либо при наличии кратных полюсов у $H(p)$ (тогда это свойство системы), либо когда частота воздействия совпадает с одним из полюсов системы. Полюс кратности два проявляет себя во временной области появлением вклада $te^{-\mu t}$ с линейно нарастающим множителем t . Полюс кратности $(k + 1)$ дает вклад $t^k e^{-\mu t}$. В теории возмущений такие члены называют секулярными или вековыми.

Особенность секулярных членов состоит в том, что они принципиально ненаблюдаемы в физическом эксперименте. Передаточные функции физических систем не могут иметь кратных полюсов, по-

скольку это свойство неустойчиво структурно – сколь угодно малая вариация параметров системы вызывает расщепление кратного полюса на несколько близких, но различающихся полюсов. Достичь абсолютного совпадения двух полюсов физически невозможно. Речь может идти лишь о степени их близости, которую, разумеется, можно сделать сколь угодно высокой. Аналогично, частоту внешнего воздействия нельзя сделать абсолютно равной частоте полюса системы. Можно говорить лишь о приближении к этой частоте с той или иной, но конечной погрешностью.

Исследуем в качестве простого примера отклик интегрирующей цепи с передаточной функцией $H(p) = 1/(p + \mu)$ на воздействие $x(t) = e^{-\eta t}$ с p -образом $x(p) = 1/(p + \eta)$. При $\mu \equiv \eta$ p -образ отклика

$$y(p) = H(p)x(p) = \frac{1}{(p + \eta)^2}$$

имеет полюс кратности два при $p = -\eta$. Обратное преобразование Лапласа дает тогда решение $y(t) = te^{-\eta t}$. Это решение ненаблюдаемо, поскольку условие $\mu \equiv \eta$ экспериментально невыполнимо. В реальном эксперименте η будет несколько отличаться от μ . В этой ситуации p -образ отклика

$$y(p) = H(p)x(p) = \frac{1}{(p + \mu)(p + \eta)} = \frac{1}{\eta - \mu} \left\{ \frac{1}{p + \mu} - \frac{1}{p + \eta} \right\}$$

ведет в иному решению

$$y(t) = \frac{1}{\eta - \mu} \left\{ e^{-\mu t} - e^{-\eta t} \right\} = te^{-\eta t} \frac{e^{(\eta - \mu)t} - 1}{(\eta - \mu)t},$$

которое стремится к $te^{-\eta t}$ при $(\eta - \mu)t \rightarrow 0$. Однако эта сходимость неравномерна – при произвольной ненулевой погрешности задания $\eta \simeq \mu$ наступит время t , когда произведение $(\eta - \mu)t$ станет большим. Сходство реального решения с секулярным удается, таким образом, наблюдать только в течение ограниченного времени $t \ll 1/|\eta - \mu|$. Такая специфика присуща всем решениям этого рода – они наблюдаемы на ограниченном временном интервале, длительность которого ограничена точностью задания тех или иных параметров эксперимента.

Пример 1. Переходная характеристика интегратора. Передаточная функция идеального интегратора на рис. 11 с частотой единичного усиления ω_0

$$H(s) = \frac{\omega_0}{j\omega} = \frac{1}{s}; \quad s = \frac{j\omega}{\omega_0} = \frac{p}{\omega_0},$$

ведет к следующей форме s -образа переходной характеристики

$$h_0(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{1}{s^2}.$$

Полюс кратности два при $s = 0$ приводит к линейно растущему решению $h_0(t) = t$, или в размерном времени $h_0(t') = \omega_0 t'$.

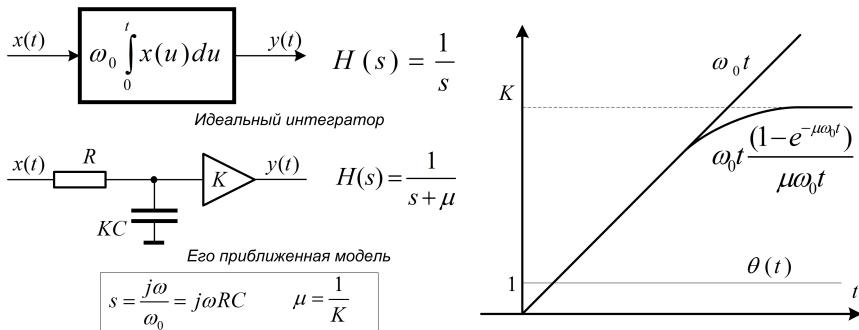


Рис. 47. Переходные характеристики интегратора

Идеальный интегратор нереализуем физически, поскольку его передаточная функция имеет полюс в нуле – усиление на нулевой частоте бесконечно. Показанная на рисунке схема с интегрирующей цепью и усилителем имитирует идеальный интегратор, неограниченно приближаясь к нему при $K \rightarrow \infty$. Ее передаточная функция $H(s) = 1/(s + \mu)$ имеет полюс в точке $s = -\mu = -1/K$, который неограниченно приближается к нулю при больших K . К переходной характеристике этой схемы приводит разложение

$$h_0(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{1}{s(s + \mu)} = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \mu} \right\}.$$

Получается $h_0(t) = (1 - e^{-\mu t})/\mu$, или в размерном времени

$$h_0(t') = \frac{1 - e^{-\mu \omega_0 t'}}{\mu} = \omega_0 t' \frac{1 - e^{-\mu \omega_0 t'}}{\mu \omega_0 t'}.$$

Это аппроксимирует переходную характеристику идеального интегратора до тех пор, пока $\omega_0 t' \ll 1/\mu = K$.

Пример 2. Резонансная система при гармоническом воздействии. Рассмотрим резонансную систему (колебательный контур) с частотой

ω_0 и затуханием ξ , (добротностью $Q = 1/2\xi$).

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 2\xi s + 1}; \quad s = \frac{p}{\omega_0}.$$

Пусть на ее вход при $t = 0$ подается воздействие $x(t') = \sin \omega_s t' = \sin \gamma t$ с частотой $\omega_s = \gamma \omega_0$. s -образ воздействия в безразмерном времени $t = \omega_0 t'$

$$x(s) = \frac{\gamma}{s^2 + \gamma^2}$$

приводит к следующей форме s -образа отклика

$$y(s) = H(s)x(s) = \frac{s}{(s^2 + 2\xi s + 1)} \frac{\gamma}{(s^2 + \gamma^2)}$$

Имеется две пары сопряженных полюсов в точках $s = -\xi \pm j\eta$, $\eta = \sqrt{1 - \xi^2}$ и $s = \pm j\gamma$.

При $\gamma = 1$ и $\xi = 0$, когда система без затухания возбуждается в точности на собственной частоте $s = \pm j$, получается пара сопряженных полюсов кратности два:

$$y(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{4j} \left\{ \frac{1}{(s - j)^2} - \frac{1}{(s + j)^2} \right\}.$$

Это дает отклик

$$y(t) = \frac{t}{2} \sin t$$

в виде гармонического колебания линейно нарастающей амплитуды. На неограниченном временном интервале этот отклик наблюдаться не может. Чтобы изучить физически наблюдаемые отклики, придется проанализировать общий случай с произвольными ξ, γ .

Представив $y(s)$ в форме разложения

$$y(s) = \frac{\gamma}{(s^2 + \gamma^2)} \frac{s}{(s^2 + 2\xi s + 1)} = \frac{A + Bs}{s^2 + \gamma^2} - \frac{\alpha + \beta s}{s^2 + 2\xi s + 1},$$

для коэффициентов A, B, α, β найдем

$$A = \frac{2\xi\gamma}{a^2 + 4\xi^2}; \quad B = \beta = \frac{a}{a^2 + 4\xi^2}; \quad \alpha = \frac{2\xi}{\gamma} \frac{1}{a^2 + 4\xi^2},$$

где $a = (\frac{1}{\gamma} - \gamma)$.

Обратное преобразование Лапласа первого члена этого разложения дает вынужденное решение

$$y_\gamma(t) = \frac{1}{a^2 + 4\xi^2} (2\xi \sin \gamma t + a \cos \gamma t).$$

Как и следовало ожидать, это гармоническое колебание на частоте воздействия $\gamma\omega_0 = \omega_s$ с амплитудой

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\xi^2}} = \frac{Q}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega_0}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega_0})^2}}$$

и начальной фазой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{2\xi} = Q \left(\frac{\omega_0}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega_0} \right).$$

Именно к этому решению приводит метод комплексных амплитуд.

Второй член разложения дает переходный процесс

$$y_0(t) = -\frac{e^{-\xi t}}{a^2 + 4\xi^2} \left(a \cos \eta t + \frac{\xi(\gamma + 1/\gamma)}{\eta} \sin \eta t \right).$$

Это экспоненциально затухающие гармонические колебания на частоте $\eta\omega_0 = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$. Обратим внимание, что частота собственных колебаний осциллятора с затуханием ξ отличается от резонансной частоты ω_0 в меньшую сторону.

Рассмотрим случай $\gamma = 1$ ($a = 0$) осциллятора с ненулевым затуханием ξ , возбуждаемого на собственной частоте:

$$y(t) = y_\gamma(t) + y_0(t) = \frac{1}{2\xi} \left(\sin t - \frac{e^{-\xi t}}{\eta} \sin \eta t \right).$$

Этот отклик является разностью вынужденного решения $\sin t$, амплитуда которого $Q = 1/2\xi$ растет с увеличением добротности, и экспоненциально затухающего собственного решения.

При $\xi \rightarrow 0$ ($\eta \rightarrow 1$), когда полюсы системы $-\xi \pm j\eta$ приближаются к полюсам $\pm j$ воздействия, получается

$$y(t) = \frac{t \sin t}{2} \frac{(1 - e^{-\xi t})}{\xi t} \rightarrow \frac{t}{2} \sin t.$$

Линейно нарастание отклика наблюдается при $t \ll 1/\xi$, то есть при $\omega_0 t' \ll 2Q$.

Пусть теперь система без затухания ($\xi = 0$) с полюсами $\pm j$ возбуждается на близкой к резонансу частоте $j\gamma$, $\gamma \rightarrow 1$. В этом случае решение принимает вид

$$y(t) = \frac{\cos \gamma t - \cos t}{a} = -\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} (\cos \gamma t - \cos t).$$

Предел этого выражения при $\gamma \rightarrow 1$ можно найти, положив $\gamma = 1 + \varepsilon$. Тогда

$$y(t) = -t \frac{(1+\varepsilon)}{(2+\varepsilon)} \frac{\{\cos(t+\varepsilon t) - \cos t\}}{\varepsilon t} \rightarrow \frac{t}{2} \sin t.$$

Вычисление этого предела сводится к нахождению производной от $\cos t$ в точке t . В результате при $\varepsilon t \rightarrow 0$ получается все тот же линейно нарастающий отклик.

22. Системы с дискретной задержкой

Интеграл свертки, определяющий отклик $y(t)$ реализуемой системы с правосторонней импульсной реакцией $h(t)$ на входное воздействие $x(t)$, приводится к форме

$$y(t) = \int_0^\infty h(u)x(t-u) du.$$

Это представление открывает глаза на то обстоятельство, что произвольная стационарная линейная система может быть реализована на линии задержки с континуальным числом отводов – отклик $y(t)$ конструируется как сумма по всем u задержанных копий $x(t-u)$ входа $x(t)$ с весовыми коэффициентами $h(u)$. Возникает идея упростить структуру системы, ограничившись счетным числом отводов.

Для этого дискретизуем импульсную реакцию, заменив ее счетным рядом выборочных значений $h_n = h(nT)$, $n \geq 0$, взятых с шагом T по времени. Введем функцию выборочных значений – «гребенку» δ -импульсов

$$\chi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT).$$

Тогда дискретизацию – переход от функции непрерывного времени $h(t)$ к ее дискретизованной версии $h_d(t)$ удается формализовать как умножение $h(t)$ на $\chi(t)$:

$$h_d(t) = h(t)\chi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t)\delta(t-nT) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n\delta(t-nT).$$

Подстановка $h_d(t)$ в интеграл свертки сводит его к счетной сумме:

$$y(t) = \int h_d(u)x(t-u) du = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \int \delta(u-nT)x(t-u) du = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x(t-nT).$$

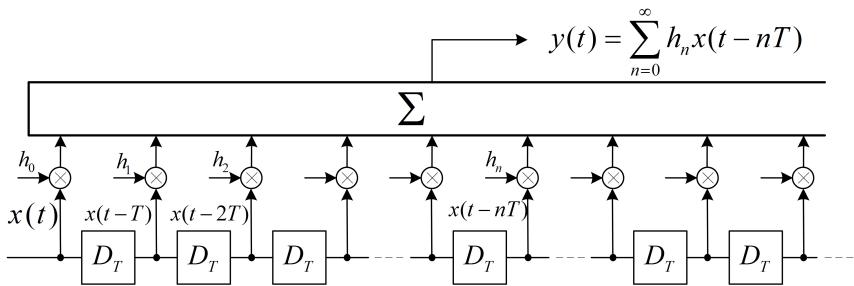


Рис. 48. Система с дискретной задержкой

Это редуцирует реальную систему непрерывного времени до системы с дискретной задержкой, рис. 48. Линейка блоков D_T задержки на T формирует счетный набор $x(t - nT)$ сдвинутых копий воздействия, которые суммируются затем с весами $h_n = h(nT)$.

Сведение систем реального времени к системам с дискретной задержкой – это ключевой момент перехода к цифровой фильтрации сигналов. В цифровой реализации линейка блоков задержки D_T заменяется сдвиговым регистром из ячеек памяти, которые хранят взятые с шагом T выборочные значения $x(nT)$ входного сигнала. На каждом такте все выборки сдвигаются на ячейку вправо, а в освободившуюся левую ячейку заносится новое выборочное значение. Так получается классическая структура нерекурсивного цифрового фильтра.

Возникает законный вопрос – насколько хорошо редуцированная система с дискретной задержкой моделирует свойства исходной системы непрерывного времени.

При обсуждении дискретных систем шаг дискретизации T становится естественным эталоном времени, а отвечающая ему частота дискретизации $\Omega = 2\pi/T = 2\pi F$, известная также как частота Найквиста, – эталоном частоты. Естественно выбрать эти эталоны T и $F = 1/T$ в качестве единиц измерения времени и частоты. В этих единицах $T = F = 1$ и $\Omega = 2\pi$, а дискретизованная импульсная реакция принимает вид

$$h_d(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \delta(t - n).$$

Начнем с изучения передаточной функции дискретизованной си-

стемы. Преобразование Лапласа от $h_d(t)$ дает

$$H_d(s) = \int_0^\infty h_d(t)e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \int_0^\infty \delta(t-n)e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} h_n e^{-ns}.$$

Здесь $s = p/F = 2\pi p/\Omega$ – комплексная частота, измеряемая в единицах частоты дискретизации $F = \Omega/2\pi$.

Ясно, что функция

$$H_d(s) = H_d(\delta + j\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n e^{-n\delta} e^{-j n \nu}$$

периодична вдоль мнимой оси s -плоскости с периодом 2π :

$$H_d(\delta + j(\nu + 2\pi n)) = H_d(\delta + j\nu).$$

Это разительно отличает ее от передаточной функции $H(p)$ исходной системы.

Естественная область определения функции $H_d(s)$ – это полоса Найквиста, заключенная между горизонтальными линиями $s = \pm j\pi$. В физических единицах ей отвечает полоса $(-\Omega/2, +\Omega/2)$ от одной до другой половины частоты дискретизации. На всю остальную s -плоскость $H_d(s)$ продолжается с этой полосы по периодичности.

Природа периодичности передаточной функции дискретизованной системы проста – на самом деле функция $H_d(s)$ является результатом репликации (наложения периодически сдвинутых копий) передаточной функции $H(s)$ исходной системы с шагом 2π вдоль мнимой оси:

$$H_d(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H(s - j2\pi m).$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно перейти во временную область. Обратное преобразование Лапласа от сдвинутой реплики $H(s - j2\pi m)$ дает

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} H(s - j2\pi m) e^{st} ds = \frac{e^{j2\pi mt}}{2\pi j} \int H(s') e^{s't} ds' = h(t) e^{j2\pi mt}.$$

Приняв это во внимание, найдем

$$h(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) = h_d(t) = h(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi mt}.$$

Справедливость этого равенства вытекает из почти очевидного тождества

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi mt},$$

правая часть которого является рядом Фурье для периодической функции в левой части.

Сложение сдвинутых вверх/вниз при репликации копий $H(s)$ вызывает искажение передаточной функции. Это явление известно как элайзинг.

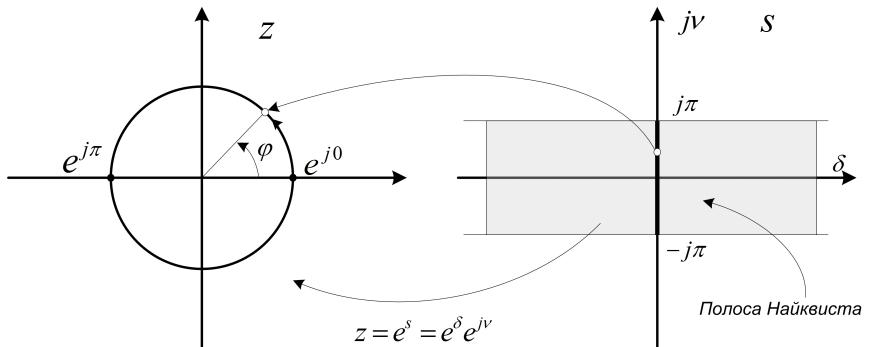


Рис. 49. z -преобразование

Анализировать амплитудные характеристики дискретизованных систем с периодичными вдоль мнимой оси передаточными функциями в s -плоскости непросто. Анализ упрощает переход в z -плоскость. Плоскость эта возникает как образ полосы Найквиста при отображении $z(s) = e^s$, рис. 49. Функция

$$z(s) = e^s = e^{\delta} e^{j\nu}$$

периодична вдоль мнимой оси с периодом 2π и отображает полосу Найквиста на всю z -плоскость. Интервал $s = j\nu$, $\nu \in (-\pi, \pi)$, – область определения комплексных коэффициентов передачи – переходит в единичный круг $z = e^{j\nu}$, так что естественной мерой частоты в z -плоскости становится угол $\varphi = \nu$. В физических единицах этому углу отвечает частота $\omega = \frac{\Omega}{2\pi}\varphi$. Верхний полукруг $\varphi \in [0, \pi]$ представляется положительные частоты от 0 до половины частоты дискретизации $\Omega/2$, нижний $\varphi \in [0, -\pi]$ – отрицательные от 0 до $-\Omega/2$.

Вертикальный отрезок $s = \delta + j\nu$, $\nu \in (-\pi, \pi)$ переходит в окружность радиуса e^δ , так что левая полуплоскость отзыается отображеной на внутренность единичного круга, а правая – на его внешность. Дискретизованная система устойчива, если все полюсы $H_d(s)$ лежат в левой полуплоскости, то есть внутри единичного круга z -плоскости.

В z -плоскости передаточная функция $H_d(s)$ становится рядом

$$H_d(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n e^{-ns} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n (e^s)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n}$$

по степеням z^{-1} . Этот ряд известен как z -преобразование последовательности выборочных значений. Спектр последовательности – это значения этого ряда на единичном круге.

Бытуют следующие представления. Последовательность выборок $h_n = h(nT)$ импульсной реакции $h(t)$ или иной дискретизованной функции представляют рядом

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$$

по степеням формальной переменной x . Это просто способ упаковать весь бесконечный набор h_n в один контейнер $h(x)$. Тогда z -преобразование – это сумма этого ряда при $x = z^{-1}$. Получается, что у системы с дискретной задержкой импульсная реакция – это формальный ряд $h(x)$, а передаточная функция $H_d(z)$ – это тот же ряд, но рассматриваемый как функция от комплексного переменного z^{-1} :

$$h(x) \leftrightarrow h(z^{-1}) = H_d(z).$$

Пример 1. Исследуем передаточную функцию дискретизованного аналога однополюсной системы – интегрирующего звена с передаточной функцией $H(p) = \omega_0/(p + \omega_0)$.

Выберем шаг дискретизации T и перейдем к безразмерному времени $t = t'/T$ и безразмерной же частоте $s = pT = p/F = 2\pi p/\Omega$. В новых единицах $H(s) = \mu/(s + \mu)$, где $\mu = 2\pi\omega_0/\Omega$.

Обратное преобразование Лапласа от $H(s)$ дает импульсную реакцию $h(t) = \mu e^{-\mu t}$. Дискретизация $h(t)$ с единичным шагом дает

$$h_d(t) = \mu \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu n} \delta(t - n).$$

Передаточную функцию $H(z)$ найдем, подставив $x = z^{-1}$ в степенной ряд

$$h(x) = \mu \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu n} x^n = \frac{1}{1 - xe^{-\mu}}.$$

Получим

$$H_d(z) = h(z^{-1}) = \frac{\mu z}{z - e^{-\mu}} = \frac{\mu z}{z - \gamma}; \quad \gamma = e^{-\mu}.$$

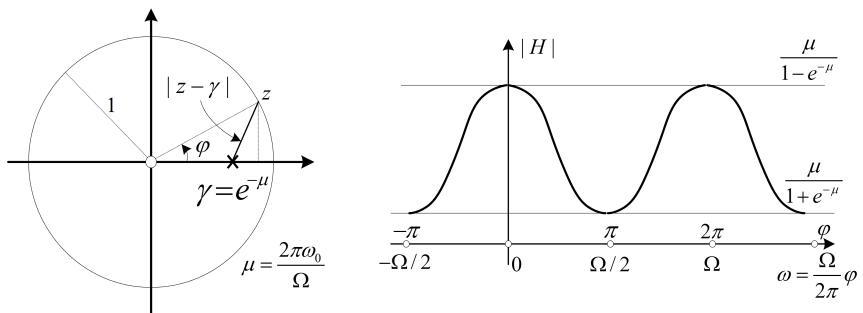


Рис. 50. Частотная характеристика дискретизованной системы

Передаточная функция дискретизованной системы $H_d(z)$ имеет полюс при $z = \gamma = e^{-\mu}$ и нуль в нуле. Модуль $H_d(z)$ в точке z на единичной окружности под углом φ дает элементарная геометрия, рис. 50.

$$|H(\varphi)| = \frac{\mu}{|z - \gamma|} = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \gamma^2 - 2\gamma \cos \varphi}} = \frac{\mu}{(1 - \gamma)} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\gamma}{(1-\gamma)^2} \sin^2 \varphi/2}}.$$

На этом же рисунке показана частотная характеристика дискретизованной системы $|H(\varphi)|$. Это периодическая кривая, которая осциллирует между уровнями $\frac{\mu}{(1-e^{-\mu})}$ и $\frac{\mu}{(1+e^{-\mu})}$, $\mu = \frac{2\pi\omega_0}{\Omega}$, принимая максимальное значение в точках, кратных частоте дискретизации Ω , и минимальное — на границах полос Найквиста.

Если частота дискретизации Ω близка к граничной частоте ω_0 , значение $\mu = \frac{2\pi\omega_0}{\Omega}$ велико. Тогда верхний и нижний уровни осцилляций практически сливаются. Это ситуация, когда эффект репликации (элайзинг) «смазывает» частотную характеристику звена почти полностью.

С ростом частоты дискретизации Ω влияние элайзинга снижается. Параметр μ становится малым, верхний уровень осцилляций стремится при этом к единице, а нижний – к нулю. При малых μ , когда $1 - \gamma = 1 - e^{-\mu} \sim \mu$ и $\gamma = e^{-\mu} \sim 1$, формула для частотной характеристики принимает вид

$$|H(\varphi)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4 \sin^2 \varphi/2}{\mu^2}}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varphi^2}{\mu^2}}}.$$

Границная частота по уровню $1/\sqrt{2}$ достигается при $\varphi = \mu$, то есть при $\omega = \omega_0$. Дискретизованное интегрирующее звено начинает вести себя подобно обычному.

При дискретизации системы с частотой Ω каждый полюс $p = -\delta + j\omega$ передаточной функции $H(p)$ переходит в полюс $H_d(z)$ в точке $z = e^\mu$, $\mu = (-\delta + j\omega) \frac{2\pi}{\Omega}$. При высокой частоте дискретизации образы всех полюсов сгущаются в окрестности точки $z = 1$ внутри единичного круга. Окрестность этой точки – это почти линейный образ фрагмента p -плоскости вокруг $p = 0$ при отображении $z = e^{2\pi p/\Omega} \simeq 1 + \frac{2\pi p}{\Omega}$, а лежащий в этой окрестности малый сектор единичной окружности – образ интервала вокруг нуля на оси $p = j\omega$. Поэтому, когда в z -плоскости «все интересное» сосредоточено в малой окрестности точки $z = 1$, поведение дискретизированной системы практически копирует поведение исходной. При недостаточной же частоте дискретизации образы полюсов «разбредаются» внутри единичного круга. Тогда частотная характеристика редуцированной системы оказывается сильно смазанной элайзингом.

При дискретизации систем непрерывного времени в первую очередь страдает из-за элайзинга уровень подавления сигналов в дальней зоне. Минимая ось s -плоскости неограничена. Это позволяет достигать сколь угодно высоких уровней подавления за счет удаления от полюсов в бесконечность. Единичный же круг в z -плоскости компактен. Остаявшись на нем, расстояния до полюсов невозможно наращивать неограниченно.

Пример 2. Дискретизованный интегратор. Импульсная реакция идеального интегратора с частотой единичного усиления $\omega_1 = 1/\tau$ – это единичная ступень: $h(t') = \omega_1 \theta(t')$. В безразмерном времени $t = t'/T$ она принимает вид $h(t) = \nu_1 \theta(t)$, $\nu_1 = \frac{2\pi\omega_1}{\Omega}$. Дискретизация этой функции дает ряд

$$h_d(x) = \nu_1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \nu_1 \frac{1}{(1-x)}.$$

Это приводит к передаточной функции

$$H_d(z) = h_d(z^{-1}) = \nu_1 \frac{z}{z - 1}$$

с нулем в нуле и полюсом в точке $z = 1$ на единичной окружности.

Частотная характеристика

$$|H_d(\varphi)| = \frac{\nu_1}{|e^{j\varphi} - 1|} = \frac{\nu_1}{\sqrt{2 - 2 \cos \varphi}} = \frac{\nu_1}{2 \sin(\varphi/2)}$$

уходит в бесконечность в нуле, принимая конечное значение $\frac{\nu_1}{2} = \frac{\pi \omega_1}{\Omega}$ на границе полосы Найквиста, при $\varphi = \pi$, $\omega = \Omega/2$. Это и есть предельный уровень подавления высокочастотных сигналов дискретизованным интегратором. Он оказывается приемлемым в той мере, в которой частота дискретизации превышает частоту единичного усиления.

Пример 3. Дискретизованный дифференциатор. К дискретизованному с шагом T варианту импульсной реакции дифференциатора логичнее всего прийти, заменив производную конечной разностью

$$\tau \frac{dx}{dt'} = \tau \frac{x(t') - x(t' - T)}{T}; \quad \omega_1 = \frac{1}{\tau},$$

или в безразмерном времени $t = t'/T$

$$\frac{1}{\nu_1} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\nu_1} (x(t) - x(t - 1)); \quad \frac{1}{\nu_1} = \frac{\tau}{T} = \frac{\Omega}{2\pi\omega_1}.$$

Видно, что

$$h_d(t) = \frac{1}{\nu_1} (\delta(t) - \delta(t - 1)); \quad \Rightarrow \quad h_d(x) = \frac{1}{\nu_1} (1 - x).$$

Передаточная функция дифференциатора

$$H_d(z) = h_d(z^{-1}) = \frac{1}{\nu_1} \frac{z - 1}{z}.$$

имеет полюс в нуле и нуль при $z = 1$. Его частотная характеристика

$$|H_d(\varphi)| = \frac{1}{\nu_1} |e^{j\varphi} - 1| = \frac{2}{\nu_1} \sin(\varphi/2)$$

обращается в нуль в нуле, растет почти линейно при малых $\varphi = \frac{2\pi\omega}{\Omega}$, но выходит на плато $\frac{\Omega}{\pi\omega_1}$ на границе полосы Найквиста.
