

Свободные колебания в электрическом контуре

Марк Гончаров

23 сентября 2020 г.

1 Цель работы

Исследование свободных колебаний в электрическом колебательном контуре

2 В работе используются

Генератор импульсов, электронное реле, магазин сопротивлений, магазин ёмкостей, катушка индуктивности, электронный осциллограф, универсальный измерительный мост

3 Теоретическая справка к лабораторной работе

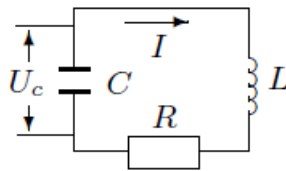


Рис. 1: Последовательный колебательный контур

Т.к. сумма падений напряжений на элементах цепи в отсутствие ЭДС 0, то

$$RI + U_C + L \frac{dI}{dt} = 0.$$

Из определения силы тока: $I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}$, подставим всё в исходное ур-е. Имеем

$$CL \frac{d^2 U_C}{dt^2} + CR \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0.$$

Введя обозначения

$$\gamma = \frac{R}{2L}, w_0^2 = \frac{1}{LC}, T_0 = \frac{2\pi}{w_0}.$$

где γ - коэффициент затухания и w_0 - собственная круговая частота, T_0 - период собственных колебаний. Имеем диф-ное уравнение

$$\ddot{U}_C + 2\gamma \dot{U}_C + w_0^2 U_C = 0.$$

4 Экспериментальная установка

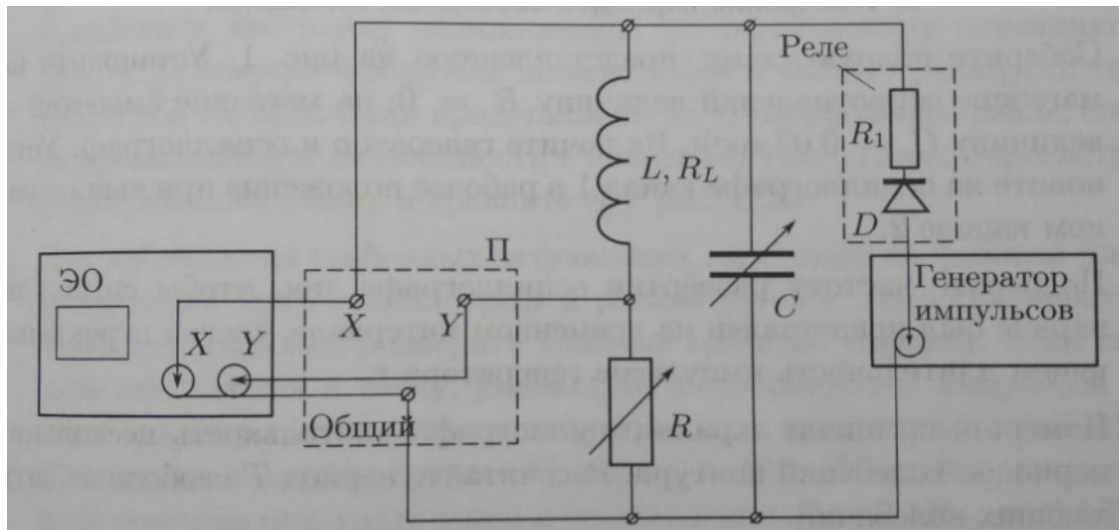


Рис. 2: Экспериментальная установка

Генератор импульсов используется для периодического возбуждения колебаний. Сигнал поступает через электрическое реле, которое содержит диодный тиристор и ограничительный резистор

5 Выполнение эксперимента

Задача наша исследовать зависимость периода свободных колебаний контура от ёмкости, лог.декремента затухания от сопротивления, а также определить критическое сопротивление и добротность контура

1. Соберем установку, установим начальные ее параметры: длительность импульсов $\tau \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ c}$ и частоту повторения импульсов $\nu = 100 \text{ Hz}$ на генераторе. Также поставим $R = 0$, $C = 0.02 \mu\text{F}$.
2. Изменяем ёмкость от 0.02 до 0.82 мкФ и находим для каждого C период колебания контура по формуле

$$T = \frac{T_0 x}{n x_0}$$

, где $T_0 = 0.01 \text{ c}$ - период повторения импульсов, n - кол-во периодов в измеренном промежутке, $\frac{x}{x_0}$ - отношение расстоянием между измеряемыми периодами и расстоянием между импульсами, поступающими от генератора. Имеем результаты на рис.3

3. Вычисляем декремент затухания нашего контура. Примем $L \approx 200 \text{ мГ}$ (как окажется, очень неплохая оценка для моей установки), рассчитаем ёмкость C, при которой собственная частота кол-ного контура 5 кГц. Т.к. $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, то

$$C = \frac{1}{4\pi^2 L \nu^2} = 5 \text{ нФ}.$$

C, мкФ	N	x / x_0	T, с
0,02	23	1	0,00043
0,12	4	0,44	0,0011
0,22	6	0,83	0,00139
0,32	5	0,83	0,00166
0,42	4	0,73	0,00183
0,52	4	0,83	0,00208
0,62	3	0,67	0,00233
0,72	3	0,73	0,00243
0,82	3	0,79	0,00263

Рис. 3: Для расчета зависимости T(C)

Критическое сопротивление контура (то есть режим, при котором $\gamma \approx \omega$) рассчитывается для RLC-контура, как $R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 12.65 k\Omega$

4. Изменяя сопротивление будем считать логарифмический декремент затухания из определения:

$$\Theta = \frac{1}{N} \ln \frac{U_k}{U_{k+N}},$$

где U_k - амплитуда напряжения k-го колебания, k + N - номер следующего рассматриваемого колебания.

R, Ohm	N	x_0 / x_n	Theta
900	4	10	0,576
1200	3	8,33	0,707
1500	2	6,14	0,907
1800	2	9	1,099
2100	2	15	1,354
2400	1	4,17	1,428
2700	1	5,25	1,658

Рис. 4: Для расчета зависимости $\Theta(R)$ на U(t) графике

5. Прделаем аналогичную работу только уже на фазовой плоскости и анализировать будем уже не амплитуды колебаний, а радиусы определённого направления (на разных краях рабочего диапазона)
6. Отдельно теперь исследуем катушку индуктивности. На разных частотах измеряем омическое сопротивление катушки R_L и ее индуктивность L

R, Ohm	N	x ₀ / x _n	Theta
900	3	5	0,536
1200	2	4,57	0,76
1500	2	6,4	0,928
1800	2	8	1,04
2100	1	3,38	1,218
2400	1	3,75	1,322
2700	1	4,75	1,558

Рис. 5: Для расчета зависимости $\Theta(R)$ на фазовой плоскости

R _L , Ом	L, мГн	Частота, кГц
11,16	203,4	0,05
18,79	198,9	1
41,9	199,6	5

Рис. 6: Измерения параметров катушки при изменении частоты

6 Обработка результатов

- Мы для каждого C рассчитали период T экспериментально, теперь сравним его с теоретическим, принимая индуктивность катушки за $L \approx 0.2$ Гн (неплохая оценка для моей катушки - рис. 6), период $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Имеем данные:

T, с - теор	T, с - эксп
0,0004	0,00043
0,00097	0,0011
0,00132	0,00139
0,00159	0,00166
0,00182	0,00183
0,00203	0,00208
0,00221	0,00233
0,00239	0,00243
0,00254	0,00263

Рис. 7: Данные для графика сравнения теоретических и экспериментальных результатов

Построим анализирующий график теоретических и экспериментальных расчётов

- Для расчёта критического сопротивления по графику $\Theta(R)$ необходимо построить этот график в координатах $\frac{1}{\Theta^2} = f(\frac{1}{R^2})$
- Тогда R_{cr} можно вычислить через наклон прямой к оси абсцисс, как

$$R_{cr} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta Y}{\Delta X}}$$

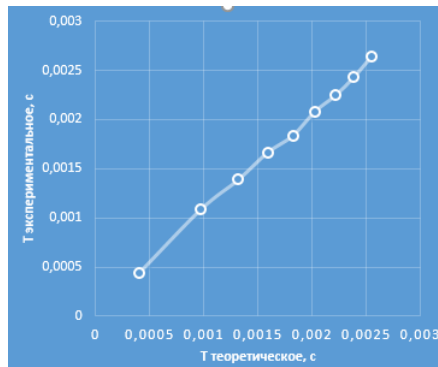


Рис. 8: Зависимость Тэксп от Ттеор

$R^{(-2)} * 10^6$	$\Theta^{(-2)}$
1,235	3,018
0,695	2,003
0,444	1,214
0,309	0,829
0,227	0,545
0,174	0,49
0,137	0,364

Рис. 9: Данные для графика

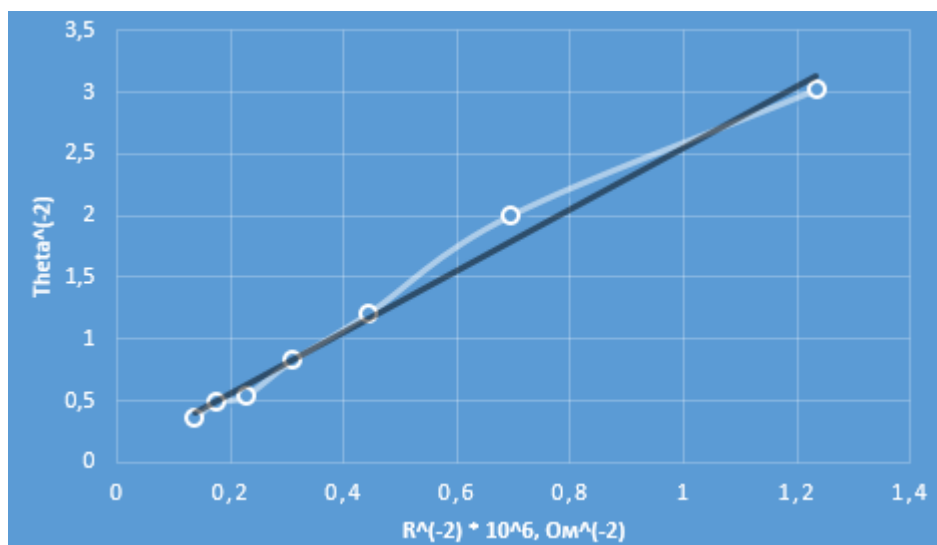


Рис. 10: $\frac{1}{\Theta^2} = f\left(\frac{1}{R^2}\right)$

4. Мы можем применять МНК, т.к.:

- (а) Измерения независимы, погрешности случайны.
- (б) Все погрешности по y (т.е. Θ) приблизительно одинаковы
- (с) $\delta_R \approx 1/1500$, $\delta_\Theta \approx \frac{1}{N} * 2 * \delta_x \approx 0.02$, т.е. выполняется условие $\delta_R \ll \delta_\Theta$

5. Имеем уравнение прямой $y = 2.48x + 0.069$, погрешности этих измерений $\sigma_k \approx 0.12$, $\sigma_b \approx 0.07$, поэтому уравнение прямой $y = 2.5 \pm 0.1x + 0.07 \pm 0.07$. Нас в данном случае интересует лишь значение k
6. Имеем $R_{cr} \approx 9.93 \text{ kOhm}$, рассчитанная теоретически: 12.65 kOhm , но мы даже на практике, изменяя сопротивление, убедились, что критическое сопротивление цепи и есть $9-10 \text{ kOhm}$, что связано с сопротивлением проводов, неидеальными контактами, приборами, поэтому наш расчёт через МНК имеет неплохой результат.
7. Теперь поработаем с добротностью контура Q , вычисляя её теоретически через параметры нашей системы (R , L , C) по формуле

$$Q \approx \frac{w_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{\gamma T_0} = \frac{1}{\gamma} * \frac{w_0}{2} = \frac{2L}{R} * \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

8. С другой стороны, мы практическим путём измерили логарифмический декремент затухания, через который легко выражается добротность $Q = \frac{\pi}{\Theta}$. Теперь мы можем свести все вычисленные данные в одну таблицу для анализа результатов всех экспериментов

L катушки	R_кр, кОм		
Гн	Теор	Подбор	Граф
0,2	12,7	9-10	9,93

R	Q		
кОм	Теор	f(θ)	Спираль
2,7	2,34	1,9	2
0,9	7	5,5	5,8

7 Анализ полученных результатов

Для начала рассмотрим погрешности теоретически вычисленных R и Q . Также оценим погрешность вычисления добротности практическим путём через логарифмический декремент затухания

$$\begin{aligned}
 R_{кр} &= 2\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow G_{R_{кр}} \approx \sqrt{\left(\frac{R_{кр} G_L}{2L}\right)^2 + \left(\frac{R_{кр} G_C}{2C}\right)^2} \\
 \text{т.к. } G_L &= 0 \text{ (берём как опорную)}, C = \frac{1}{4\pi^2 L \nu^2}, \delta_C = 2\delta_D, \\
 \text{а } \delta_D &\approx 0,01 \Rightarrow \delta_{R_{кр}} \approx \frac{1}{2}\delta_C \approx \delta_D \approx 0,01 \Rightarrow G_{R_{кр}} \approx 0,1 \text{ Ом.} \\
 &(\text{хотя конечно можно брать } \delta_D \text{ и меньше)} \\
 Q &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \text{ Здесь } \delta_R \ll \delta_C, \text{ поэтому так как это расчёт} \\
 &\text{имеет чисто качественный характер, считая } \delta_L = 0 \text{ имеем} \\
 \delta_Q &\approx \frac{1}{2}\delta_C \Rightarrow G_Q \approx 0,02 \text{ для первого и } 0,07 \text{ для второго} \\
 &\text{измерений}
 \end{aligned}$$

Рис. 11: Оценка теор. погрешностей

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{N} \ln \frac{X_n}{X_{n+N}}, \text{ при этом } \delta_X \approx \frac{0,01}{2}, \\
 &\text{где } 0,01 - \text{абсол. погрешность - погр. деления} \\
 &\text{осциллографа, а } 2 - \text{среднее значение.} \\
 \langle N \rangle &= 2. \\
 G_Q &\approx \sqrt{\left(\frac{\ln \frac{X_n}{X_{n+N}}}{\frac{X_n}{X_{n+N}}} \cdot \frac{1}{X_{n+N}}\right)^2 \cdot 2}, \quad \text{8} \\
 \delta_Q &\approx \sqrt{2 \left(\frac{\delta_{X_n}}{X_n}\right)^2} = \sqrt{2} \delta_{X_n} \approx 0,007. \\
 \delta_{Q_{факт}} \quad \delta_Q &= \delta_Q, \text{ так } Q = \frac{\pi}{\theta}.
 \end{aligned}$$

Рис. 12: Оценка теор. погрешностей

Как мы видим, чисто теоретический расчёт всегда сильно отличается от практических, как при измерении R_{cr} , так и добротности Q . Однако это не плохо, ведь главное, у нас сходятся приблизительный анализ подбором и графический анализ нахождения R ,

что, конечно, больше соответствует действительности, т.к. теоретический расчёт никак не учитывает сопротивление проводов, качества соединений проводов, также возраст установки, неидеальный расчёт индуктивности L (взяли 0,2Гн вначале наугад), поэтому теоретическому расчёту будем меньше доверять. Более того, при расчёте добротности, мы опять видим аналогичную картину - практические расчёты друг с другом сочетаются, тогда как теоретические сильно преувеличивают добротность установки, показывая ее "более идеальной".

8 Вывод

Мы научились различными способами анализировать свободные и вынужденные колебания, вычислять добротность, критическое сопротивление и теоретическим, и практическим способами, более того, выявили неидеальность установки, однако рассчитали все равно с неплохой погрешностью характеризующие установку параметры.