Esercizio08

Table of contents

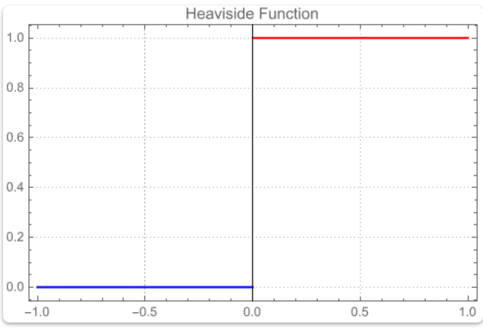
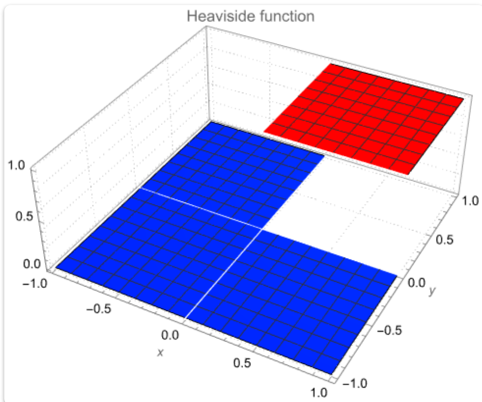
Consegna

Due funzioni h funzione di Heaviside e r sono definite in $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La funzione r valutata in x vale $h(x-2) - h(x-4)$. Cercare una terza funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale per cui l'operazione $(f \star r)(t)$ sia uguale a 3.

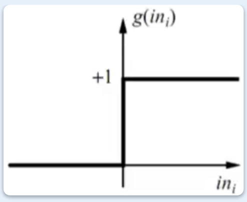
- Riscriviamo la consegna in modo compatto.

$$\begin{array}{lll} (1) & h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \text{funzione di Heaviside} \\ (2) & r : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \text{per cui} \quad r(x) = h(x-2) - h(x-4) \\ (?) & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \text{per cui} \quad (f \star r)(t) = 3 \end{array}$$

- La funzione di Heaviside la conosciamo e sappiamo che la sua caratteristica è quella di assumere valore soltanto per i positivi.

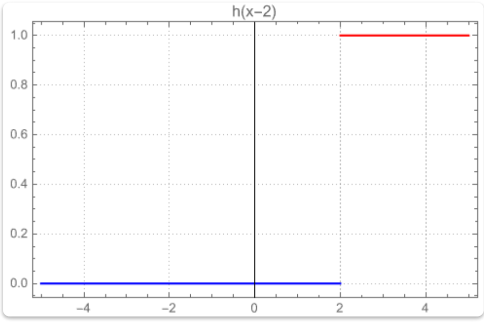
	
La funzione di Heaviside $H(x)$: in blu quando vale 0, in rosso quando vale 1	Il comportamento in 3 dimensioni

Heaviside Step Function $H(x)$ (estratto Lezione07)

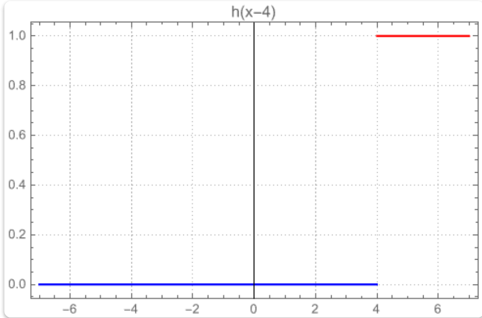


Il fatto che si chiamino funzioni di attivazione deriva dal fatto che il neurone si attiva come se avesse una soglia: a input sufficientemente forti, il neurone si attiverà e produrrà una risposta forte e immediata (si dice che il neurone "spara").
La funzione di Heaviside ha questo comportamento in modo estremo: l'uscita è 0 finché l'input è negativo e appena diventa positiva, spara.

- Dalla consegna ci viene detto che $r(x) = h(x-2) - h(x-4)$ con h funzione di Heaviside. La situazione può essere rappresentata: h subisce un movimento netto orizzontale, quindi in base alle ascisse. La proprietà di avere un valore solo per positivi è stata alterata.



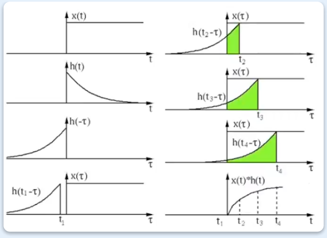
$h(x-2)$



$h(x-4)$

- Ci viene chiesto di trovare un f tale per cui $(f \star r)(t) = 3$. Noi sappiamo ricondurre il concetto al prodotto di convoluzione: in particolare, ci viene chiesto di trovare quella funzione f che abbia 3 come risultato del prodotto di convoluzione.

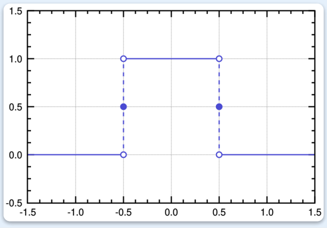
Prodotto di convoluzione (estratto Lezione05)



Prendiamo due funzioni $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da queste possiamo costruire una terza funzione che chiamiamo prodotto di convoluzione o convoluzione tra f e g con l'integrale seguente

$$(f \star g)(\mathbf{x}) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{v}) g(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \, \mathrm{d}^n \mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \, g(\mathbf{v}) \, \mathrm{d}^n \mathbf{v}$$

Funzione a supporto compatto (estratto Lezione05)



Un esempio di funzione a supporto compatto

La convoluzione è interessante, quando almeno una delle due funzioni, assume il ruolo di funzione a supporto compatto, ovvero una funzione la quale assume valore nullo al di fuori di un insieme compatto, detto supporto (della funzione).

Un esempio è la funzione porta unitaria

$$r(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{se} \quad |x| < 1/2 \\ 1/2 \quad \text{se} \quad |x| = 1/2 \\ 0 \quad \text{altrove} \end{cases}$$

Risoluzione

Integrale del supporto compatto

Ora che il nostro obbiettivo è stato identificato, procediamo con la risoluzione. L'operazione di convoluzione sappiamo già cosa risulta, ma non sappiamo bene quali sono le funzioni che vi prendono parte, o meglio, sappiamo il valore r ma non di f: per trovarlo usiamo l'integrale. Il valore parametrico t servirà per rappresentare la x in base allo spostamento rispetto α.

$$
\begin{aligned}
(f \star r)(t) &\xrightarrow{\int_{-\infty}^{+\infty}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\alpha) r(\alpha)\, d\alpha \\
&\xrightarrow{r(\alpha)=1} \int_{2}^{4} f(t-\alpha)\, d\alpha
\end{aligned}
$$

Possiamo convertire la sottrazione, sostituendola con un valore simbolico β, per aiutarci siccome valori dell'integrale disgiunti, per un f, non sono facili da determinare analiticamente. Inoltre, poniamo cura a invertire gli intervalli d'integrazione, in quanto il valore calcolato non vogliamo sia preso dal punto di vista contrario. Riscriveremo poi la funzione $f(x)$ derivata di una F che prenda in ingresso lo spostamento orizzontale, per poi lavorare su quale sia il valore di x effettivo. Questo lo facciamo sempre perché a noi quello che interessa è il valore effettivo della funzione e non il valore dell'integrale: derivando lo produrremo.

$$
\begin{aligned}
&\xrightarrow{\beta=t-\alpha} \int_{t-2}^{t-4} f(\beta)\, d\beta \\
&\xrightarrow{(t-2)\leftrightarrow(t-4)} \int_{t-4}^{t-2} f(\beta)\, d\beta \\
&\xrightarrow{F(t-\alpha)} F(t-2) - F(t-4) \\
&\xrightarrow{(f\star r)(t)=3} t-3
\end{aligned}
$$

Porta unitaria

Per supposizione, esploriamo ora alcune possibilità, che possano rendere la proposizione $t-3$ vera: che valore deve assumere $F(x)$? Nel momento in cui la troviamo, deriviamo per verificare la regola del differenziale.

$$
\begin{array}{lllll}
(1) & F(x) = x & \to & F(t-2) - F(t-4) = t-2-t+4 = -6 & \times \\
(2) & F(x) = \alpha x & \to & F(t-2) - F(t-4) = t-2-t+4 = -6\alpha & \times \\
(3) & F(x) = x^2 & \to & F(t-2)^2 - F(t-4)^2 = 4t-12 & \times \\
(4) & F(x) = \dfrac{x^2}{4} & \to & F(t-2) - F(t-4) = t-3 & \\
 & f(x) = \dfrac{x}{2} & \to & F(t-2) - F(t-4) = t-3 &
\end{array}
$$

La porta unitaria avrà le seguenti proprietà

$$
f(x) \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 1/2 & \text{altrove} \end{cases}
$$

Abbiamo trovato i valori della funzione, espressi come funzione a supporto compatto.

28/03/2023