Esercizio06

Table of contents

Consegna

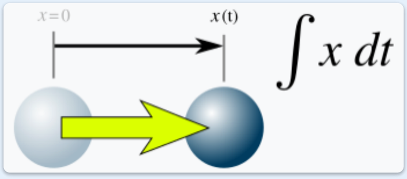
Si consideri una funzione continua in $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita $f(x,y) : \int_D (x^2\alpha^2\beta + y^2\alpha\beta^2) d\mathbf{x} d\beta$ con $D = [0,1][0,1]$. Calcolare il minimo della funzione f, contenuta in una palla chiusa $\mathcal{B}$ di raggio 2 e centro $1,1$.

- Riscriviamo in modo compatto la consegna.

$$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} = \int_D (x^2\alpha^2\beta + y^2\alpha\beta^2) d\mathbf{x} d\beta \qquad \in \qquad \mathcal{B}_2[1,1]$$

- La forma dell'equazione è implicita, su degli intervalli $D = [0,1]$. L'integrale rappresenta l'area sottostante una funzione: siccome le variabili sono 2, sappiamo che la risoluzione dovrà essere fatta in relazione di ciascuna. Il nostro obbiettivo è quindi quello di esplicitare un integrale doppio sullo stesso intervallo D, per ciascuna variabile presa in esame, ovvero α e β.

Absement & absity in cinematica (Fisica)



Absement

Quando un oggetto nello spazio si muove, il suo spostamento può essere descritto dagli integrali di spostamento e dalle derivate. In inglese, si dice

- "*absement*", la misura di uno spostamento sostenuto di un oggetto dalla sua posizione iniziale ovvero, una misura di quanto lontano e per quanto tempo si è spostato $(\mathrm{m} \cdot \mathrm{s})$

$$A = \int x \; \partial t \qquad \begin{array}{l} \text{con } x \text{ un punto nello spazio} \\ \text{con } t \text{ il tempo} \end{array}$$

- "*absity*", la quantità vettoriale di un ordine derivativo inferiore rispetto allo spazio e spostamento, ovvero l'area sottostante il grafico $(\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^2)$

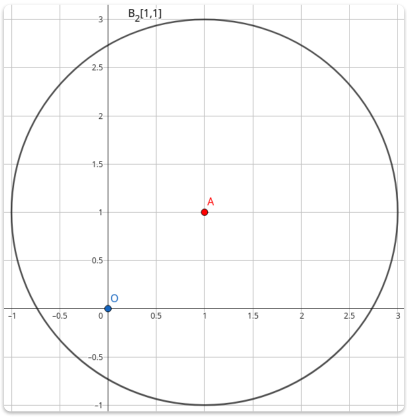
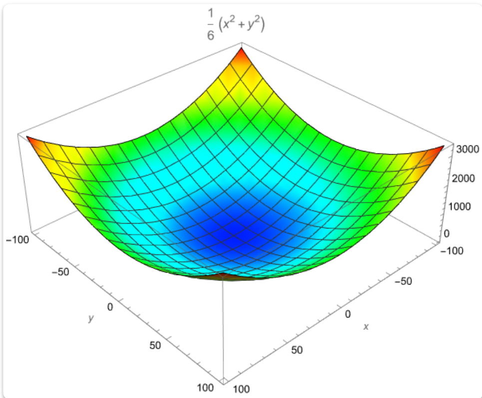
$$B = \iint x \; \partial t \qquad \begin{array}{l} \text{con } x \text{ un punto nello spazio} \\ \text{con } t \text{ il tempo} \end{array}$$

Risoluzione

Esplicitazione dell'integrale

Per trovare il minimo della funzione, per prima cosa risolviamo l'integrale esplicitato. Non facciamoci spaventare dalla lunghezza: risolviamo i termini uno alla volta, prima integrando in relazione a α e poi in relazione a β, sullo stesso termine; inoltre, l'integrale è definito in $\mathbb{R}$, quindi qualsiasi sia l'ordine con cui svolgiamo i calcoli non ha alcuna importanza, siccome l'area sotto il grafico rimarrà la stessa.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &\quad = \quad \int_0^1\int_0^1 x^2\alpha^2\beta\, d\alpha d\beta + \int_0^1\int_0^1 y^2\alpha\beta^2\, d\alpha d\beta \\
\int_0^1 x^2\alpha^2\beta\, d\alpha = \frac{\beta x^2}{3} &\quad \rightarrow \quad \int_0^1 \frac{\beta x^2}{3} d\beta + \int_0^1\int_0^1 y^2\alpha\beta^2\, d\alpha d\beta \\
\int_0^1 \frac{\beta x^2}{3} d\beta = \frac{x^2}{6} &\quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{6} + \int_0^1\int_0^1 y^2\alpha\beta^2\, d\alpha d\beta \\
\int_0^1 y^2\alpha\beta^2\, d\alpha = \frac{\beta^2 y^2}{2} &\quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{6}\int_0^1 \frac{\beta^2 y^2}{2} d\beta \\
\int_0^1 \frac{\beta^2 y^2}{2} d\beta = \frac{y^2}{6} &\quad \rightarrow \quad \underbrace{\frac{x^2}{6}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{y^2}{6}}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

	
La palla in $\mathbb{R}^2$	$1/6(x^2+y^2)$

Calcolo del minimo

La ricerca dei minimi viene fatta come al solito, calcolando la derivata parziale della funzione. Ora che abbiamo la funzione esplicitata, questo ci è facile

$$\nabla f(x,y) : \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{6} = (\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y)$$

Il fatto che il termine noto non ci sia, è dovuto dall'esplicitazione dell'equazione originale. Ci viene detto inoltre che il dominio con cui stiamo ragionando è quello di una palla

$$\mathcal{B}_2[1,1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$$

per la quale conosciamo già i valori sia di x che per y: sono entrambi positivi (dato l'elevamento al quadrato) e lo possono essere arbitrariamente verso un possibile valore minimo che però non potrà mai essere 0. Questo per dire che il punto trovato è un punto stazionario facente parte del dominio, che però non sarà mai punto minimo.

28/03/2023