Esercizio04

Table of contents

- Consegna
- Risoluzione
  1. Simmetria della funzione
  2. Gradiente della funzione

Mathematica per la rappresentazione dei grafici

Nel caso foste interessati a vedere voi stessi la funzione, potete passare i seguenti comandi a https://mathematica.wolframcloud.com . Alternativamente, consiglio di utilizzare i programmi forniti nella cartella `/src` della repository.

```
f := x^2 - 40*x + 4*y^2 + 400
Plot3D[f, {x, -1, 41}, {y, -1, 1}, BoxRatios → {10, 10, 4},
 ColorFunction → Function[{x, y, z}, Hue[.65 (1 - z)]],
 AxesLabel → Automatic, PlotLabel → f,
 PlotStyle → PointLight[White, {1, 1, 1}]]
```

```
Show[%133, ViewPoint → {0, 0, \[Infinity]}]
```

Consegna

Viene fornita una funzione del tipo $\mathbb{R}^2 : x^2 - 40x + 4y^2 + 400$. Calcolare il gradiente della funzione, indicando quali sono (e se ci sono), punti di simmetria.

Risoluzione

Simmetria della funzione

Dalla consegna possiamo dedurre che l'equazione ha un qualche cosa di speciale. In particolare, notiamo che questa può essere riscritta in una forma semplificata del tipo:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

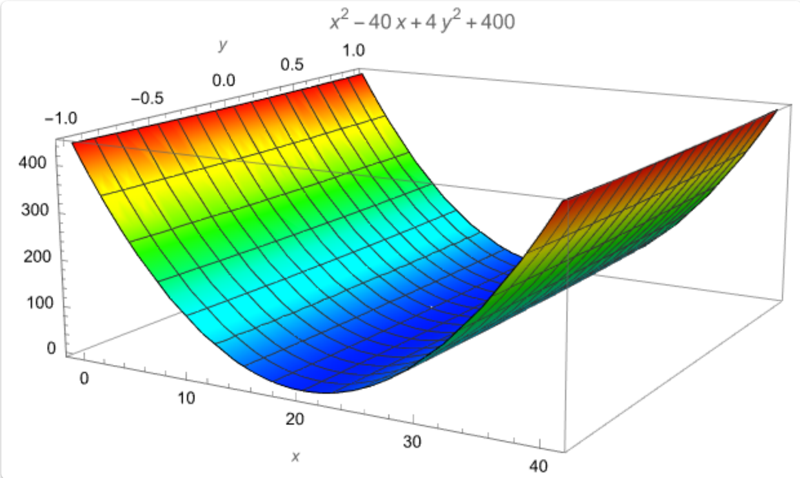
Lo si può sospettare, in quanto $(20)^2 = 400$, e $(20) * 2 = 40$.
Numeri "grandi" non ci devono spaventare, in quanto sappiamo che molto probabilmente possiamo raccoglierli in qualcosa di più semplice. Trasformiamo ora l'equazione basandoci su ciò che è stato detto:

$$x^2 - 40x + 4y^2 + 400 \xrightarrow{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} (x - 20)^2 + (2y - 0)^2$$

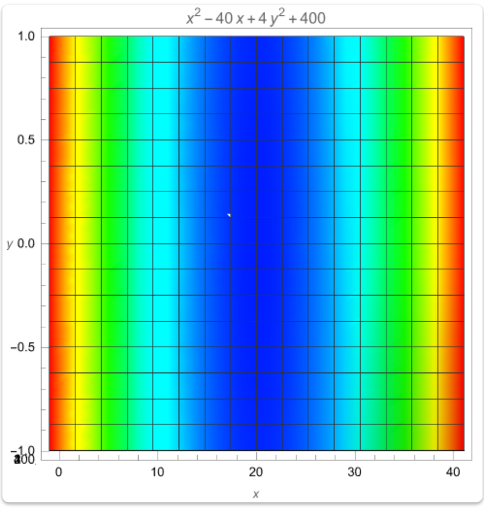
- Abbiamo ridotto l'equazione in una di più facile comprensione, dalla quale possiamo dedurre che le 2 radici per x e y, valgono rispettivamente:

$$(x-20)^2 \rightarrow \underbrace{x^2}_{a} - \underbrace{40x}_{b} + \underbrace{400}_{c} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$\rightarrow x = 20$$
$$(2y-0)^2 \rightarrow \underbrace{4y^2}_{a} - \underbrace{0}_{b} + \underbrace{0}_{c} \rightarrow y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$\rightarrow y = 0$$

- Visualizziamo la geometria dei punti appena trovati.
  Possiamo dire subito che l'aspetto sarà quello di un paraboloide ellittico.



Il grafico interseca in un punto, l'asse delle ascisse $x = 20$, come se stessimo lavorando con una parabola, il nostro grafico ha la simmetria rispetto le ordinate



Vista ortografica dall'alto

Gradiente della funzione

La derivata parziale della funzione, tenendo conto delle costanti:

$$\nabla f(x,y) : x^2 - 40x + 4y^2 + 400 = (2(x-20), 8y)$$
$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x-20) = 0 \\ 8y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 20 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il punto stazionario esiste ed è esattamente la radice dell'equazione, calcolata in alto. Sostituendo il punto stazionario $x = 20$, verificheremmo che questo è parte della funzione.