Esercizio03

Table of contents

Consegna

Un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è definita dall'equazione $-9x^2 - 16y^2 + 154$.
A questa applicazione è associata una funzione $h(l)$ definita nel modo seguente:

$$h(l) = \begin{cases} 1 & l = 10 \\ 0 & \texttt{altrimenti} \end{cases}$$

Sapendo che f è contenuta in h, calcolare il valore di una terza funzione $g : h \circ f$ e tracciarne il grafico.

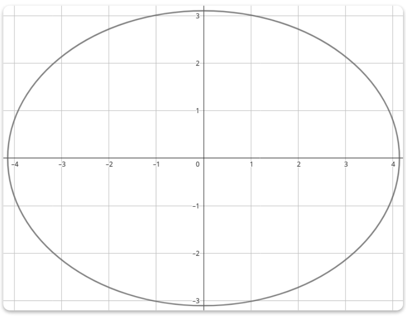
- Riscriviamo la consegna per aiutare la comprensione.

$$f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} = -9x^2 - 16y^2 + 154 \quad , \quad g : h \circ f \begin{cases} 1 & l = 10 \\ 0 & \texttt{altrimenti} \end{cases}$$

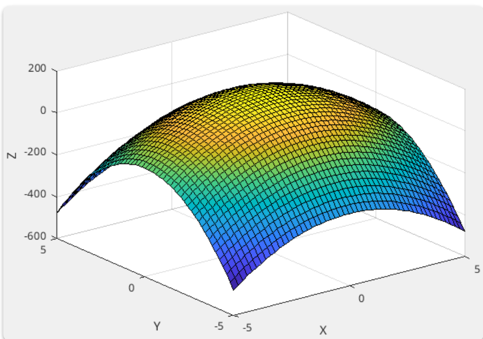
  Ci viene detto che la funzione f è contenuta in h, da cui possiamo dedurre che questa esiste. Il fatto che questa esista, implica che $g : h \circ f$ vale 1 quando il parametro $l = 10$. L'operatore composto "○" ci suggerisce che quello che stiamo calcolando non è altro che la signature della funzione f per le copie di valori (x, y).

  > **Signature**
  > La **signature** (d) di una funzione è la distanza dal centro dell'ellisse.
  > Le coordinate dei punti in funzione della signature sono così calcolate:
  >
  > $$x = d(\alpha) \cos \alpha$$
  >
  > $$y = d(\alpha) \sin \alpha$$

- La geometria suggerita viene illustrata.



f è un'ellisse



f è un paraboloide con la pancia verso il basso

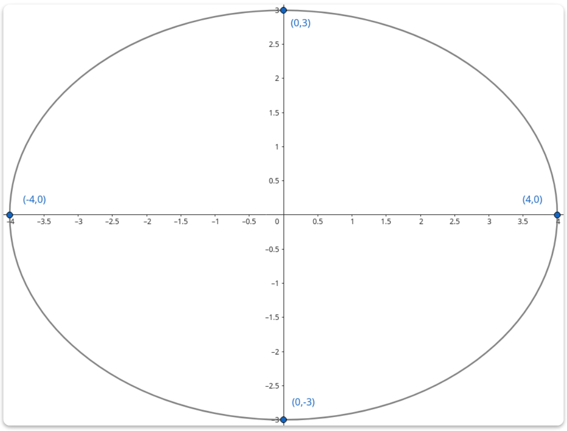
Risoluzione

- Calcolo della funzione.
  La funzione su cui lavoriamo non sarà quella originale, bensì una sua versione che soddisfi la proposizione g per le copie (x, y).

$$l = 10 \quad \rightarrow \quad -9x^2 - 16y^2 + 154 = 10 \quad \rightarrow \quad -9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{-9x^2 - 16y^2 + 144}{144} = \frac{0}{144} \quad \rightarrow \quad -\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + 1 \quad \rightarrow$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$



- Calcolo della signature.
  Siccome tutti i termini li conosciamo, non ci resta far altro che sostituire i valori (x, y) della signature, con i valori di $f(x, y)$, ricordando che ($\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$). L'angolo α esclude 2π siccome il punto è già incluso all'inizio del calcolo della signature.

$$f(x = d(\alpha)\cos\alpha, y = d(\alpha)\sin\alpha)$$

$$f(x, y) : -9d^2(\alpha)\cos\alpha^2 - 16d^2(\alpha)\sin^2(\alpha) + 144 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad f(x, y) : -9d^2(\alpha)\cos^2(\alpha) - 16d^2(\alpha) + 16d^2(\alpha)\cos^2(\alpha) + 144 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad d^2(\alpha) = -\frac{144}{7cos^2(\alpha) - 16} \quad , \quad \alpha = [0, 2\pi)$$

- Grafico della signature.
  Sostituendo α all'interno di $d^2(\alpha)$, con gli intervalli in radianti ($0, \pi/2, \pi, 3/2\pi, 2\pi$), troviamo una curva sinusoidale, con i punti di flessione

$$(0, 16), \left(\frac{\pi}{2}, 9\right), (\pi, 16), \left(\frac{3}{2}\pi, 9\right), (2\pi, 16)$$