

Esercizio03

Table of contents

- [Consegna](#)
- [Risoluzione](#)

Consegna

Un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è definita dall'equazione $-9x^2 - 16y^2 + 154$.

A questa applicazione è associata una funzione $h(l)$ definita nel modo seguente:

$$h(l) = \begin{cases} 1 & l = 10 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sapendo che f è contenuta in h , calcolare il valore di una terza funzione $g : h \circ f$ e tracciarne il grafico.

- Riscriviamo la consegna per aiutare la comprensione.

$$f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} = -9x^2 - 16y^2 + 154 \quad , \quad g : h \circ f \begin{cases} 1 & l = 10 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ci viene detto che la funzione f è contenuta in h , da cui possiamo dedurre che questa esiste. Il fatto che questa esista, implica che $g : h \circ f$ vale 1 quando il parametro $l = 10$. L'operatore composto "o" ci suggerisce che quello che stiamo calcolando non è altro che la signature della funzione f per le copie di valori (x, y) .

Signature

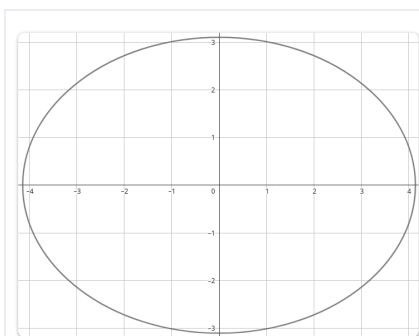
La **signature** (d) di una funzione è la distanza dal centro dell'ellisse.

Le coordinate dei punti in funzione della signature sono così calcolate:

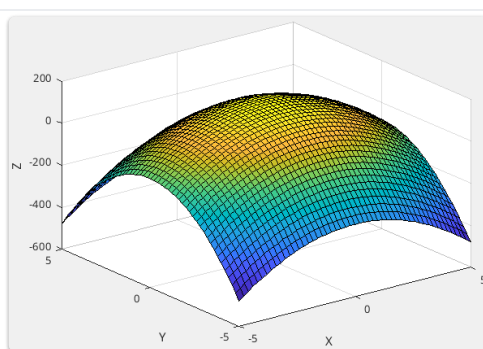
$$x = d(\alpha) \cos \alpha$$

$$y = d(\alpha) \sin \alpha$$

- La geometria suggerita viene illustrata.



f è un'ellisse



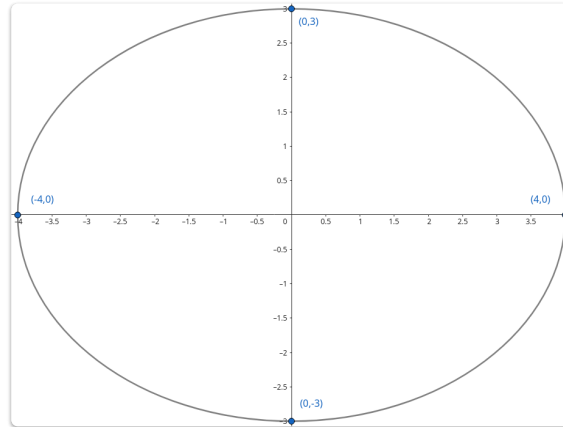
f è un paraboloide con la pancia verso il basso

Risoluzione

- Calcolo della funzione.

La funzione su cui lavoriamo non sarà quella originale, bensì una sua versione che soddisfi la proposizione g per le copie (x, y) .

$$\begin{aligned}
 l = 10 &\rightarrow -9x^2 - 16y^2 + 154 = 10 \rightarrow -9x^2 - 16y^2 + 144 = 0 \\
 &\rightarrow \frac{-9x^2 - 16y^2 + 144}{144} = \frac{0}{144} \rightarrow -\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + 1 \rightarrow \\
 &\quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1
 \end{aligned}$$



- Calcolo della signature.

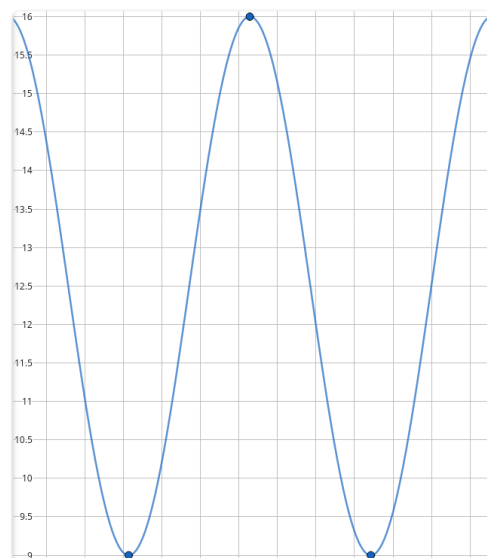
Siccome tutti i termini li conosciamo, non ci resta far altro che sostituire i valori (x, y) della signature, con i valori di $f(x, y)$, ricordando che $(\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha))$. L'angolo α esclude 2π siccome il punto è già incluso all'inizio del calcolo della signature.

$$\begin{aligned}
 f(x = d(\alpha) \cos \alpha, y = d(\alpha) \sin \alpha) \\
 f(x, y) : -9d^2(\alpha) \cos^2 \alpha - 16d^2(\alpha) \sin^2(\alpha) + 144 = 0 &\rightarrow \\
 \rightarrow f(x, y) : -9d^2(\alpha) \cos^2(\alpha) - 16d^2(\alpha) + 16d^2(\alpha) \cos^2(\alpha) + 144 &\rightarrow \\
 \rightarrow d^2(\alpha) = -\frac{144}{7\cos^2(\alpha) - 16}, \quad \alpha = [0, 2\pi)
 \end{aligned}$$

- Grafico della signature.

Sostituendo α all'interno di $d^2(\alpha)$, con gli intervalli in radianti $(0, \pi/2, \pi, 3/2\pi, 2\pi)$, troviamo una curva sinusoidale, con i punti di flessione

$$(0, 16), \left(\frac{\pi}{2}, 9\right), (\pi, 16), \left(\frac{3}{2}\pi, 9\right), (2\pi, 16)$$



28/03/2023