Esercizio05

Table of contents

Consegna

Viene fornita una funzione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x, y)$ con le seguenti proprietà:

- la funzione calcolata in $f(0,0)$ vale 8, e
- il gradiente della funzione è $\nabla f(x, y) = (6(x-1), 10(y+1))$

Sapendo ciò, calcolare la norma quadro del gradiente $\nabla f(x, y)$.
Esistono punti stazionari? Se sì, dimostrarne l'esistenza.

Risoluzione

Norma quadro del gradiente

La norma quadro del gradiente è semplicemente calcolata elevando il gradiente alla seconda, in quanto la radice della funzione "norma", viene cancellata dall'elevamento alla potenza.

> **Norma euclidea (estratto Lezione03)**
>
> Compreso il fatto che $\mathbb{R}^n$ sia uno *spazio vettoriale*, per definire la sua lunghezza di un vettore $\mathbf{x}$ usiamo la **norma euclidea**:
>
> $$||\mathbf{x}|| \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\begin{aligned} ||\nabla f(x, y)||^2 &\triangleq \left(\sqrt{\sum (\nabla f(x, y))^2}\right)^2 \\ &\to \left(\sum \nabla f(x, y)\right)^2 \\ &\to 36(x-1)^2 + 100(y+1)^2 \end{aligned}$$

Punti stazionari

I punti stazionari esistono e lo possiamo notare subito in quanto fornitoci il gradiente.

$$\nabla f(x,y) = (6(x-1), 10(y+1))$$

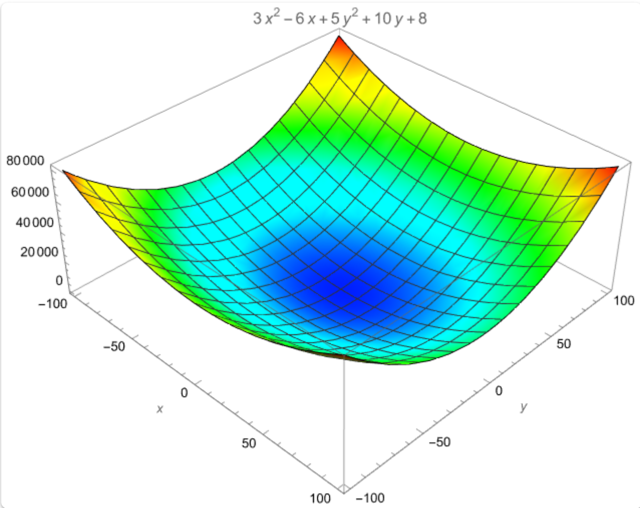
$$f(x,y) = \begin{cases} 6(x-1) = 0 \\ 10(y+1) = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Una descrizione più accurata dei punti stazionari, può essere fatta, se prendiamo le derivate parziali, considerando come costanti prima x e poi y. L'operazione che stiamo per fare, conferma l'esistenza dei punti stazionari integrando sulle derivate, ottenendo così la funzione originale.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial_y x}(x,y)d\mathbf{x} &= \int 6(x-1)d\mathbf{x} \\
&= 6(\frac{1}{2}x^2 - x) + \mathcal{K}_x(\mathbf{y}) \quad \text{con } \mathcal{K}_x(\mathbf{y}) \text{ costante} = 0 \\
&= 3x^2 - 6x + \mathcal{K}_x(\mathbf{y}) \\
\frac{\partial f}{\partial_x y}(x,y)d\mathbf{y} &= \int 10(y+1)d\mathbf{y} \\
&= 10(\frac{1}{2}y^2 + y) + \mathcal{K}_y(\mathbf{x}) \quad \text{con } \mathcal{K}_y(\mathbf{x}) \text{ costante} = 0 \\
&= 5y^2 + 10y + \mathcal{K}_y(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Il fatto che $\mathcal{K}_x(\mathbf{y})$ e $\mathcal{K}_y(\mathbf{x})$ siano costanti, è dovuto dalla definizione di derivata parziale stessa: una delle due variabili è impostata a 0; quindi quello che sarebbe stato il termine risultato dell'integrazione c, è ora costante a nome $\mathcal{K}$. Questo termine sappiamo bene qual è dalla consegna dell'esercizio: è il termine noto calcolato in $f(0,0)$, ovvero 8.

$$\begin{aligned}
\bar{f}(x,y) &= 3x^2 - 6x + 5y^2 + 10y + \mathcal{K} \\
&\overset{f(0,0)=8}{=} 3x^2 - 6x + 5y^2 + 10y + 8
\end{aligned}$$



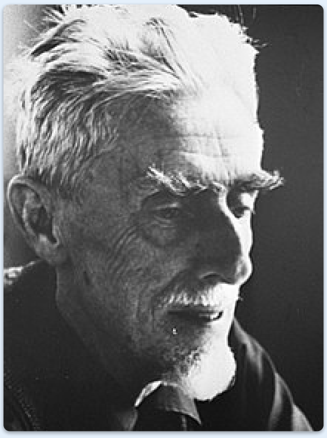
Notare l'esistenza del punto stazionario, in prossimità $(1, -1)$

Dimostrare che l'equazione trovata, sia legata a gradiente e termine noto originali, è facile e per farlo è sufficiente derivare.

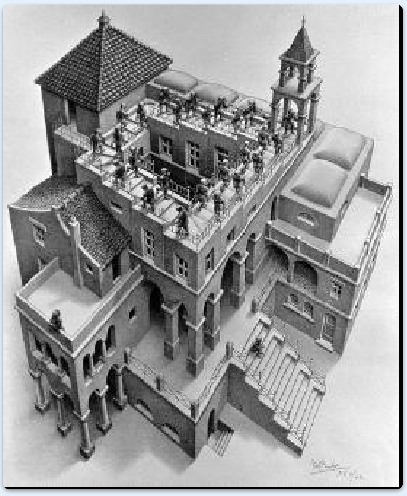
Campo vettoriale non conservativo

Nel calcolo vettoriale, si dice *campo vettoriale conservativo*, un campo vettoriale gradiente di una qualche funzione. Un campo di questo genere, ha la caratteristica di avere lo stesso valore dell'integrale, qualunque sia il percorso intrapreso tra 2 punti.

Un esempio artistico molto famoso che viola questa proprietà, è quello della litografia dell'olandese M.C. Escher, dove le scale circolarmente portano al punto da cui si è partiti, nonostante sembrino scendere e allo stesso tempo salire.



Maurits Cornelis Escher (1898-1972)



Ascending and Descending - 1960

28/03/2023