Esercizio07

Table of contents

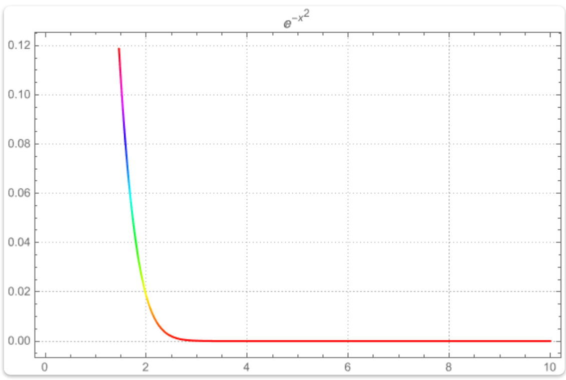
Consegna

Una funzione f in $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ viene definita come $\int_0^x \int_0^y e^{-\alpha^2\beta^2} d\alpha d\beta$. Di questa funzione siamo a corrente del fatto che ha valori ammissibili soltanto per numeri maggiori o uguali a 0. Esistono minimi della funzione?

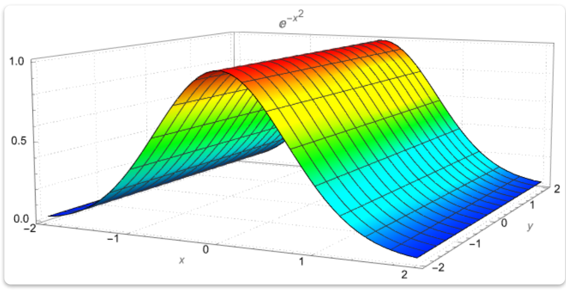
- Riscriviamo la consegna in modo compatto.

$$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} = \int_0^x \int_0^y e^{-\alpha^2\beta^2} d\alpha d\beta \qquad \in \qquad [0, +\infty)$$

- Visualizziamo alcune geometrie di partenza.



e^{-x^2}



La funzione gaussiana in 3 dimensioni

> **Gaussiana**
> Una *funzione gaussiana* è una funzione analitica molto tipica, del tipo
>
> $$f(x) = e^{-x^2}$$
>
> con x una funzione quadratica concava, caratteristica per le sue innumerevoli applicazioni, soprattutto nel campo della statistica. Una gaussiana ha diverse peculiarità, quali la sua forma a campana, ma quello più ci riguarda nel contesto della consegna, è il fatto che questa sia una funzione non elementare.

> **Funzioni elementari**
> Una funzione, si dice *elementare* nel momento in cui questa può essere rappresentata usando polinomiali, funzioni esponenziali e trigonometriche. Anche espressa come
>
> $$a \cdot e^{-\dfrac{(x-b)^2}{2c^2}}$$
>
> con a, b costanti e c non-zero, la funzione gaussiana non è elementare in quanto presenta per natura,

funzioni a loro volta non elementari quali e^x e $\sqrt{x}$. Lo scopo dell'esercizio non è esaminare le caratteristiche della funzione, ma questi concetti sono necessari per comprendere la risoluzione.

Funzione di errore

Se la natura della funzione in mano è gaussiana, che sappiamo essere non elementare, allora l'integrale è calcolato con la *funzione di errore*

$$\texttt{erf}\ z = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

che ha dominio in $\mathbb{C}$. Questo è dovuto dal fatto che la funzione gaussiana non ha radice reale e quindi l'area sotto il grafico non può essere rappresentata in termini di $\mathbb{R}$.

Risoluzione

Integrale della funzione gaussiana

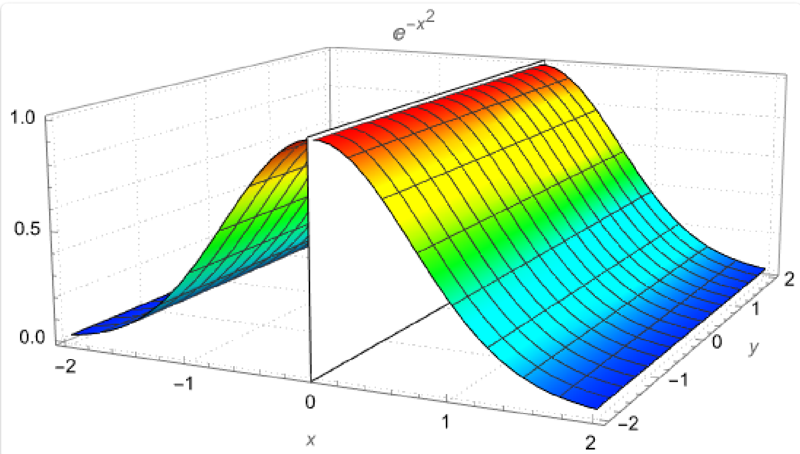
Dalla consegna, possiamo esplicitare qualche passaggio per capire meglio la situazione. L'integrale definito negli intervalli x e y viene preso solo per quei valori che sono ≥ 0

$$\int_0^x \int_0^y e^{-\alpha^2\beta^2} d\alpha d\beta \quad = \quad \int_0^x e^{-\beta^2} \underbrace{\int_0^y e^{-\alpha^2} d\alpha d\beta}_{F(y)-F(0)}$$

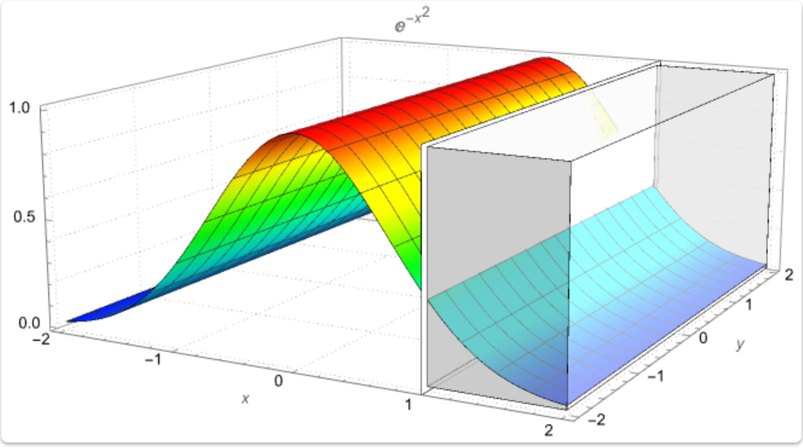
Ora, supponendo un t piano separante il grafico in parti, possiamo descrivere il comportamento della funzione in base a questo, o meglio: nel momento in cui $t = 0$, allora l'integrale sarà nullo, quando invece $t > 0$ l'integrale avrà valore strettamente positivo.

$$(1) \quad \begin{cases} y & = & 0 \\ x & = & 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ f(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{integrazione in } t = 0$$

$$(2) \quad \begin{cases} y & > & 0 \\ x & > & 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x,y) > 0 \\ f(x,y) > 0 \end{cases} \quad \text{integrazione in } t > 0$$



(1) Il piano bianco t rappresenta la linea di partenza per l'integrazione: in questo caso, siccome l'intervallo è pari a 0, il valore dell'intervallo sarà nullo



(2) Il piano è un numero positivo t che descrive l'inizio dell'intervallo d'integrazione: il rettangolo indica la parte di area sotto il grafico che verrà calcolata, così all'infinito

Minimi della funzione

Ragionando in 2 dimensioni: un minimo della funzione esiste ed è il punto descritto dai valori $x = y = 0$, punto in cui l'esponente della gaussiana è nullo. Un massimo della funzione al contrario non esiste, perché come detto, x tende ad approcciare l'asse delle ascisse senza però mai toccarla.

28/03/2023