Esercizio02

Table of contents

Consegna

Data una funzione lineare f del tipo $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita $3x^2 - 2y^2 + 7$, trovarne il punto massimo, considerandola inclusa in un compatto $\mathcal{D}$ definito da $[1,1][-1,1]$.

- Riscriviamo la consegna per renderla più leggibile.

$$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} = 3x^2 - 2y^2 + 7 \quad \in \quad \mathcal{D}[1,1][-1,1]$$

- L'insieme su cui la funzione è definita, è chiuso e limitato.

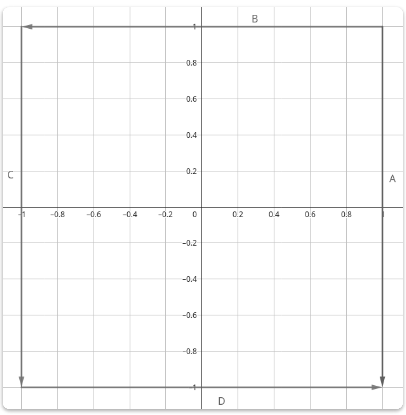
> **Insieme "compatto" (estratto Lezione04)**
> $K \subseteq \mathbb{R}^n$ di dice *compatto* se è chiuso e limitato

Per essere più precisi, la forma dell'insieme con cui stiamo lavorando, è quella di una scatola chiusa; lo notiamo siccome le coordinate forniteci sono vettoriali: i punti che definiscono l'incontro tra questi vettori, sono tutte le possibili combinazioni delle componenti.

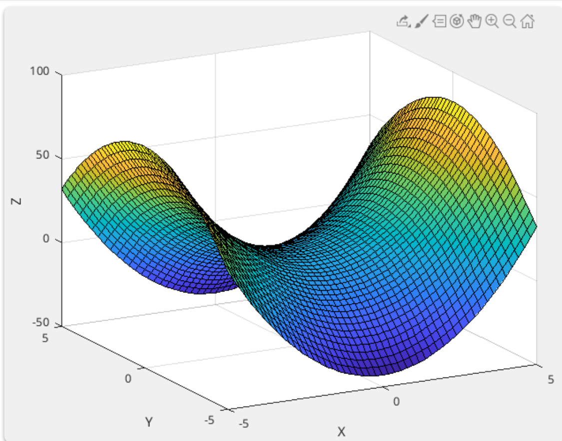
> **"Scatola chiusa" (estratto Lezione04)**
> $$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \underline{v}_1 \leq v_1 \leq \overline{v}_2 \wedge \underline{v}_2 \leq v_2 \leq \overline{v}_2 \wedge \cdots \wedge \underline{v}_n \leq v_n \leq \overline{v}_n\}$$

I punti d'incontro sono: $[(1,1),(-1,1),(-1,-1),(1,-1)]$.

- Visualizziamo le geometrie per aiutare la comprensione.



La scatola ha 4 confini



La funzione $f(x,y)$ è una sella

Risoluzione

1. Calcolo del gradiente.
   Per trovare un massimo all'interno dello spazio definito dalla scatola, ci serve determinare le derivate

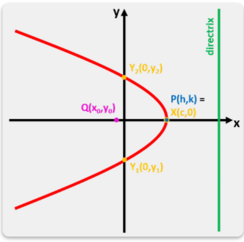
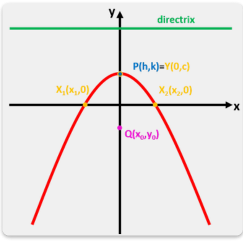
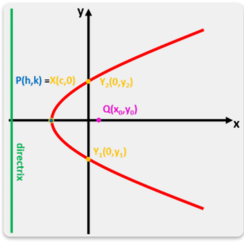
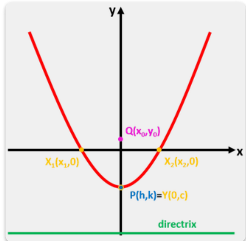
parziali della nostra funzione.

$$\nabla f(x,y) : 3x^2 - 2y^2 + 7 = (6x, -4y)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x = 0 \\ -4y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad f(0,0) = 7$$

Siccome i parametri sono liberi, significa che qualsiasi valore assegniamo a x o y non ha importanza, i punti massimi saranno a prescindere sui bordi della scatola chiusa.

2. Equazione per ciascun confine.
Sapendo che i nostri confini sono 4, ci serve calcolare tutte le possibili dinamiche che possono avvenire su di questi: in modo alternato, fissiamo prima x come costante a $[1, -1]$ e poi facciamo lo stesso per y.

A	B	C	D
$x = 1, -1 \leq y \leq 1$	$y = 1, -1 \leq x \leq 1$	$x = -1, -1 \leq y \leq 1$	$y = -1, -1 \leq x \leq 1$
$f(1,y) : -2y^2 + 10$	$f(x,1) : 3x^2 + 5$	$f(-1,y) : -2y^2 + 10$	$f(x,-1) : 3x^2 + 5$
			

3. Calcolo dei punti.
I massimi non potranno che essere i vertici. Questi li possiamo trovare calcolando la coordinata x, sostituendola poi all'interno delle equazioni.

$$P = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$\begin{cases} A : x = -\frac{0}{2[-2]} = 0 \\ B : x = -\frac{0}{2[3]} = 0 \\ C : x = -\frac{0}{2[-2]} = 0 \\ D : x = -\frac{0}{2[3]} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A : f(1,y) = -2[0]^2 + 10 = 10 \\ B : f(x,1) = 3[0]^2 + 5 = 5 \\ C : f(-1,y) = -2[0]^2 + 10 = 10 \\ D : f(x,-1) = 3[0]^2 + 5 = 5 \end{cases} \rightarrow \quad A, C$$

28/03/2023