Esercizio09

Table of contents

- Consegna
- Risoluzione

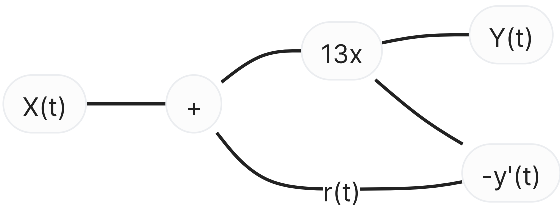
Consegna

Viene fornita una funzione di retroazione con: ingresso una $X(t)$ e uscita una $Y(t)$. La funzione usa l'operatore di somma per calcolare $Y(t)$ e lo fa avendo a disposizione la funzione da controllare $13x$, tramite l'operatore di controllo $-Y'(t)$. Scrivere l'espressione della risposta fornita dal filtro, sapendo che l'ingresso è la funzione delta di Dirac.

- Scriviamo la consegna in modo compatto.

$$B[X(t)+r(t)]=Y(t) \quad \text{con} \quad r(t) \leftarrow -Y'(t) \quad \text{e} \quad X(t)=\delta(x)$$

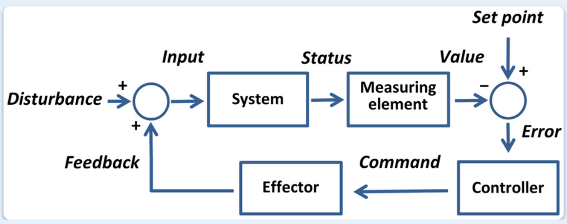
- Visualizziamo la geometria del filtro in questione.



Stiamo cercando quell'espressione di $Y(t)$ che sia risposta alla funzione d'ingresso $\delta(x)$. Il fatto che ci sia risposta lo sappiamo a prescindere, quello che la consegna richiede è che si scriva l'equazione in modo esplicito.

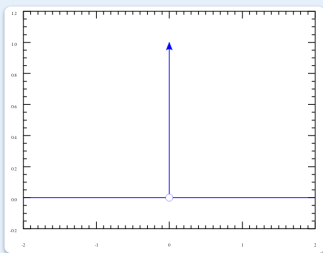
Funzione di retroazione (sistemi complessi)

Un *feedback* avviene quando l'output del sistema viene rediretto come ingresso in una catena di eventi causa-effetto di un circuito ad anello.



Delta di Dirac (estratto Lezione05)

La funzione δ di Dirac in sé, non esiste, ma esiste la sua distribuzione. Questa si comporta come una funzione, che se arriva a un risultato, esisterà.



Il risultato si annulla tranne che in un unico punto, x_0. La funzione δ la prendiamo in un modo tale che:

calcolata per un altra funzione, ci dia il valore della funzione in x_0 mantenendo la δ, richiedendo il comportamento del filtro identità.

(Osserviamo l'immagine) La δ di Dirac la possiamo rappresentare in un grafico cartesiano, siccome esiste in tutti i punti tranne che in uno solo, dove non possiamo dire quanto vale. La base del grafico può stringersi, causando a sua volta la freccia ad alzarsi sempre di più, perché l'area del grafico deve rimanere la stessa (stiamo comunque calcolando un integrale).

Il calcolo delle rerivate viene esteso anche a funzioni che normalmente non sarebbero derivabili. Se h è la funzione di Heaviside, allora

$$h'(x) = \delta(x)$$

Risoluzione

Possiamo riscrivere la consegna prendendo conto del feedback $-Y'(t)$ verso l'ingresso in operatore somme $r(t)$. Facendo così, stiamo dicendo la stessa cosa ma includendo tutte le variabili che prima erano scritte a parte.

$$\begin{aligned} \text{Funzione retroazione} \quad & B[X(t) + r(t)] = Y(t) \\ \xrightarrow{\quad -Y'(t) \to r(t) \quad} \quad & BX(t) - BY'(t) = Y(t) \end{aligned}$$

Notiamo che nell'equazione una derivata è presente. L'operatore di controllo, feedback della funzione, viene derivato: questo non è altro se non la Delta di Dirac $\delta(t)$, funzione infatti d'ingresso. Sulla base di questo ragionamento, capiamo che stiamo ragionando su funzioni gaussiane e più precisamente, la funzione di Heaviside $H(t)$, che ha formalmente un solo valore non determinabile, lo 0, che è esattamente espresso dalla derivata, appunto la Delta di Dirac.

$$\begin{aligned} BY'(t) + \frac{Y(t)}{13} &= B\delta(t) \\ \to \quad Y'(t) + \frac{Y(t)}{13} &= \delta(t) \end{aligned}$$

Una funzione gaussiana è tipicamente della forma e^{-x^2}: usiamo questa per rappresentare l'equazione sopra, siccome abbiamo determinato che le funzioni involte hanno questa rappresentazione.

$$\begin{aligned} \xrightarrow{e^{-x^2}} \quad 0 + \frac{e^{-x/13}}{13} &= \delta e^{-x/13} \\ \longrightarrow \quad Y(t) &= e^{-x/13} H(t) \end{aligned}$$

Abbiamo esplicitato il valore della risposta al feedback.

28/03/2023