Esercizio01

Table of contents

Consegna

Si consideri una funzione continua f del tipo $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita in x, y dall'equazione $3x^2 + 4y^2 + 5$. Calcolare il massimo della funzione f, contenuta in una palla chiusa $\mathcal{B}$ di raggio 2 e centro $1, 0$.

- Per aiutarci nella risoluzione dell'esercizio, <u>riscriviamo</u> in modo più compatto <u>la consegna</u>, in modo di avere per i successivi esercizi, un criterio standard da seguire per essere più precisi e sicuri

$$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} = 3x^2 + 4y^2 + 5 \qquad \in \qquad \mathcal{B}_2[1,0]$$

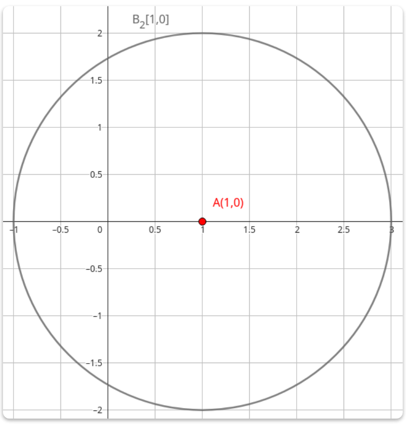
- Notare come la palla definita, sia una chiusa.

> **Insieme "chiuso" (estratto Lezione04)**
> $C \subseteq R^n$ si dice *chiuso* se esiste $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto t.c. $A \cup C = \mathbb{R}^n$
> Come faccio a dire che un intervallo è chiuso? Perché ne esistono due aperti che uniti formano quello chiuso (vedere esempio del segmento).

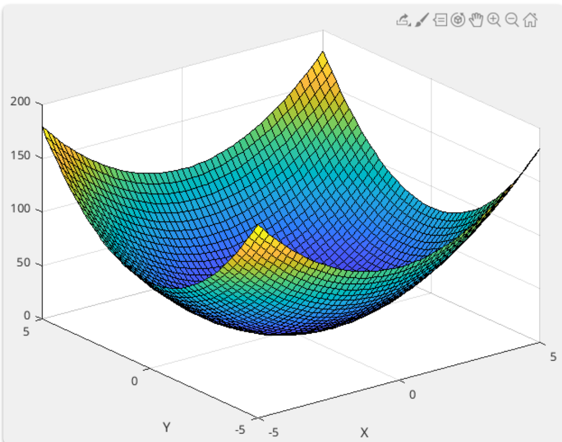
> **Con "palla" ci riferiamo ad una *circonferenza*, siccome stiamo ragionando in uno spazio $\mathbb{R}^2$. Negli esercizi, la dimensione dello spazio sarà sempre minore o uguale a 2.**

Dire questo vuole sottintendere che la nostra palla accetterà almeno un minimo globale e un massimo globale: <u>la nostra palla</u> non potrà altro che avere il <u>massimo</u>, proprio <u>sul bordo</u> che la definisce.

- Visualizziamo la geometria della palla per aiutare la comprensione



La palla in $\mathbb{R}^2$



La funzione $f(x,y)$ è un paraboloide

Risoluzione

1. Calcolo del gradiente.
   Per arrivare a trovare un massimo, ci serve prima conoscere le <u>derivate parziali</u> delle variabili dell'equazione. Questo ci servirà più avanti nella fase di sostituzione dei termini.

$$\nabla f(x, y) : 3x^2 + 4y^2 + 5 = (6x, 8y)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x = 0 \\ 8y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad f(0, 0) = 5$$

- $6x$ è la derivata parziale considerando y una costante (cioè imposta a 0);
- $8y$ è la derivata parziale considerando x una costante (cioè imposta a 0).

Proprio da questi passaggi, capiamo che non abbiamo trovato un punto globale, perché ci basta prendere un punto qualsiasi del dominio, come $f(1, 0) = 8$ per cambiare il risultato e quindi la palla.

2. Equazione della circonferenza.
Geometricamente, l'equazione rappresenta una circonferenza, che va esplicitata, perché è proprio su questa che faremo le nostre sostituzioni.

$$\mathcal{B} = \{(x, y) : (x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 4\}$$

In funzione di x, la nostra palla avrà equazione

$$g(x) : (x - 1)^2 + y^2 = 4 \quad \rightarrow \quad g(x) : x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad g(x) : y^2 = 4 - x^2 + 2x - 1 \quad \rightarrow \quad g(x) : y^2 = -x^2 + 2x + 3$$

Ora sostituiamo il valore $g(x)$ appena calcolato, per la costante y di $f(x, y)$

$$f(x, y) : 3x^2 + 4y^2 + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad f(x) : 3x^2 + 4[-x^2 + 2x + 3] + 5 = 0 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad f(x) : -x^2 + 8x + 17 = 0$$

3. Calcolo del punto.
Il punto $P = (x, y)$ vertice della parabola a concavità rivolta verso il basso (siccome il primo termine noto è negativo), ha coordinate standard

$$P = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Sostituendo con i termini noti di $f(x)$, notiamo che la coordinata x vale

$$\rightarrow \quad P = \left(-\frac{8}{2}, y\right) \quad \rightarrow \quad P = (4, y)$$

ma sappiamo che la sfera è una compresa nell'intervallo di ascisse $[-1, 3]$ e che quindi $P = (4, y) \notin \mathcal{B}_2[1, 0]$: automaticamente, il nostro punto giacerà sul bordo del cerchio ovvero

$$P = (3, y = -[3]^2 + 2[3] + 3) \quad \rightarrow \quad P = (3, 0)$$

28/03/2023