

Isogeometrische Analysis

Mark Fischer

Universität Stuttgart

Sommersemester 2021

Inhalt

Einführung

Non-uniform rational B-Splines

Konstruktion B-Splines

Konstruktion NURBS

NURBS Toolbox

NURBS für lineare RWP

GeoPDEs

Fehleranalyse

Quellen

Einführung

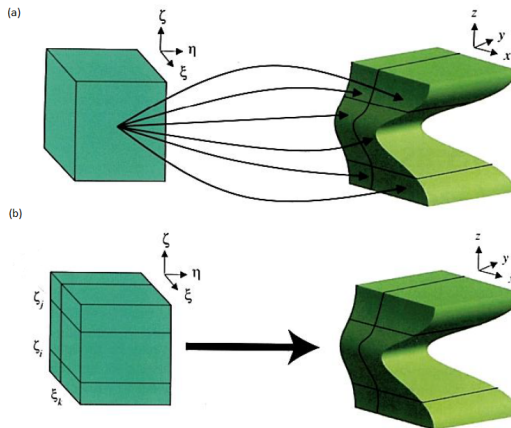
- IGA wurde entwickelt, um die Zusammenarbeit zwischen Design und FEM zu verbessern
- Bisher arbeiten CAD und FEM unabhängig voneinander - Sie nutzen verschiedene geometrische Konstrukte
- Problem 1: CAD-Geometrien sind nicht FEM-kompatibel
- Problem 2: Das FE-Mesh ist nur eine Approximation, d.h. es entstehen Fehler
- Problem 3: Übertragung von CAD-Files in FEM-kompatible Geometrien benötigt ca. 80% der Laufzeit der FEM

Ziel von IGA: Fokus auf **ein** geometrisches Modell

Hintergrund

- Am häufigsten werden im Ingenieursdesign zur Modellierung NURBS (Non-uniform rational B-Splines) genutzt
- Diese werden definiert durch B-Splines
- In FEA hat jedes Element einen eigenen Parameterraum mit eigener Abbildung
- In IGA wird ein Parameterraum in den gesamten physischen Raum (sog. Patches) abgebildet
- Patches sind Teilgebiete, in welchen Modelle uniform sind.
- Häufig reicht für ein Modell ein einziger Patch

Konstruktion B-Splines



(a): Je Element ein individueller Parameterraum

(b): ein Parameterraum für den gesamten physischen Raum

Definition B-Spline-Basisfunktionen

Gegeben ist ein **Knotenvektor** in einer Dimension:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$$

als eine Menge aufsteigender Koordinaten im Parameterraum.
Dabei steht:

- p für die Polynomordnung,
- n für die Nummer von Basisfunktionen,
- $\xi_i \in \mathbb{R}$ für den i -ten Knoten,
- und i für den Knotenindex.

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$$

- uniformer Knotenvektor: Knoten sind gleichmäßig verteilt.
- offener Knotenvektor: erster und letzter Knoten wird $p + 1$ Mal wiederholt.

Basisfunktionen, die durch einen offenen Knotenvektor definiert werden, sind an den Ecken des Patches interpolierend, aber generell nicht.

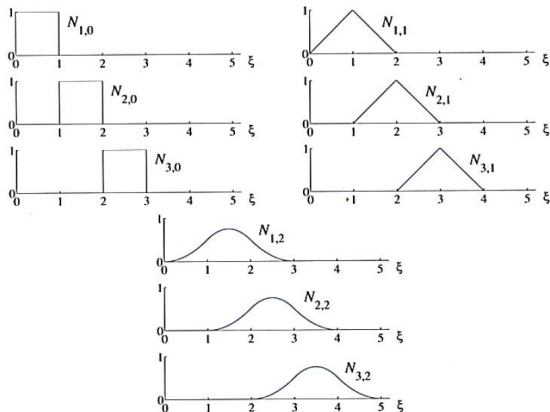
Die B-Spline-Basisfunktionen werden dann rekursiv definiert durch:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

(Cox-de-Boor Rekursionsformel)

Konstruktion B-Splines



Basisfunktionen 0., 1. und 2. Grades zum Knotenvektor $\Xi = \{0, 1, 2, \dots\}$

Eigenschaften von B-Spline-Basisfunktionen

- Partition der Eins:

$$\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1, \quad \forall \xi$$

- Nichtnegativität:

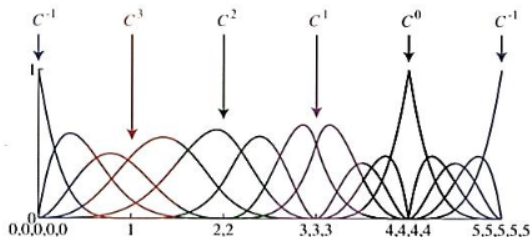
$$N_{i,p}(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi$$

⇒ Steifigkeitsmatrix wird positiv sein

- Jede Basisfunktion p -ter Ordnung liegt in C^{p-1}
- Der Träger einer Basisfunktion p -ter Ordnung erstreckt sich über maximal $p + 1$ Knotenzwischenräume

Eigenschaften von B-Spline-Basisfunktionen

- Basisfunktionen der Ordnung p haben am Knoten ξ_i Regularität der Stufe $p - m_i$, wobei m_i der Vielfachheit von ξ_i im Knotenvektor Ξ entspricht.
- Für $m_i = p$ ist eine Basisfunktion der Ordnung p interpolatorisch am Knoten ξ_i .
- Für $m_i = p + 1$ ist eine Basisfunktion der Ordnung p unstetig im Knoten ξ_i .



Basisfunktionen 4. Grades zum offenen Knotenvektor

$$\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5\}$$

B-Spline Kurven

Für eine B-Spline-Kurve im \mathbb{R}^d betrachtet man eine Linearkombination von B-Spline-Basisfunktionen:

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i$$

Die Koeffizienten $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^d$ heißen **Kontrollpunkte**. Diese entsprechen den nodalen Koordinaten der FEM, werden jedoch nicht interpoliert. Das **Kontrollpolygon** erhält man durch stückweise lineare Interpolation der Kontrollpunkte.

B-Spline-Flächen

Gegeben sind die Knotenvektoren

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}, \quad \mathcal{H} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$$

und ein **Kontrollnetz** $\{\mathbf{B}_{i,j}\}$ für $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$. Dann ist die B-Spline-Fläche definiert durch:

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \mathbf{B}_{i,j}$$

Wobei $N_{i,j}$ und $M_{j,q}$ den B-Spline-Basisfunktionen zu den Knotenvektoren Ξ und \mathcal{H} entsprechen.

B-Spline-Volumina

Analog zu B-Spline-Flächen:

$$\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}\}, \mathcal{H} = \{\eta_1, \dots, \eta_{m+q+1}\}, \mathcal{Z} = \{\zeta_1, \dots, \zeta_{l+r+1}\}$$

$$\{\mathbf{B}_{i,j,k}\} \text{ Kontrollgitter, } i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, l$$

$$\mathbf{s}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) \mathbf{B}_{i,j,k}$$

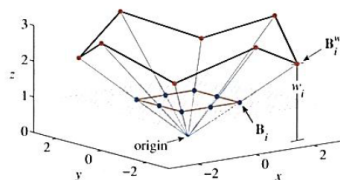
Einführung zu NURBS

- Mit Hilfe von NURBS können komplexe Geometrien dargestellt werden, die sich mit Polynomen nicht darstellen lassen (Beispiel: Kurven und Ellipsen)
- Dabei entstehen NURBS-Geometrien im \mathbb{R}^d durch Projektion einer B-Spline-Geometrie im \mathbb{R}^{d+1} .

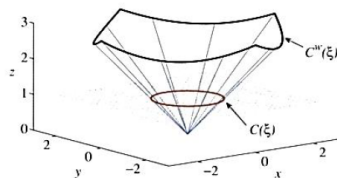
Im Folgenden bezeichnet:

- $C^w(\xi)$ eine B-Spline-Kurve, die **projektive Kurve**
- B_i^w die **projektiven Kontrollpunkte**
- $C(\xi)$ die NURBS-Kurve
- B_i die NURBS-Kontrollpunkte

Konstruktion NURBS



(a) Control polygons



(b) Curves

Stückweise quadratische B-Spline Kurve im \mathbb{R}^3 wird auf die Ebene $z = 1$ projiziert und ergibt einen Kreis im \mathbb{R}^2

Definition NURBS-Kurve

Die Kontrollpunkte einer NURBS-Kurve werden berechnet durch:

$$(\mathbf{B}_i)_j = \frac{(\mathbf{B}_i^w)_j}{w_i}, \quad \forall j = 1, \dots, d, \quad \text{wobei} \quad w_i = (\mathbf{B}_i^w)_{d+1}.$$

w_i heißt **i -tes Gewicht**. Unter Definition der Gewichtsfunktion

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i$$

wird dann die NURBS-Kurve definiert durch

$$(\mathbf{C}(\xi))_j = \frac{(\mathbf{C}^w(\xi))_j}{W(\xi)}, \quad \forall 1, \dots, d$$

- Die NURBS-Kurve ist dann eine rationale Funktion, die aus zwei polynomiellen Funktionen selben Grades besteht.
- Die **Ordnung** einer NURBS-Kurve entspricht dann der Ordnung der B-Spline-Kurve, aus welcher sie erzeugt wurde.

Um weiterhin eine NURBS-Kurve direkt durch Änderung der Kontrollpunkte zu verändern, werden NURBS-Basisfunktionen wie folgt definiert:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p}w_i}{\sum_{\tilde{i}=1}^n N_{\tilde{i},p}(\xi)w_{\tilde{i}}}$$

Damit ergibt sich die NURBS-Kurve zu:

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi)\mathbf{B}_i$$

Diese Definition ist analog zur vorigen.

NURBS-Flächen und Volumina

Analog wird wieder für NURBS-Flächen...

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{\tilde{i}=1}^n \sum_{\tilde{j}=1}^m N_{\tilde{i},p}(\xi)M_{\tilde{j},q}(\eta)w_{\tilde{i},\tilde{j}}}$$

... und Volumina vorgegangen:

$$R_{i,j,k}^{p,q,r} = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{\sum_{\tilde{i}=1}^n \sum_{\tilde{j}=1}^m \sum_{\tilde{k}=1}^l N_{\tilde{i},p}(\xi)M_{\tilde{j},q}(\eta)L_{\tilde{k},r}(\zeta)w_{\tilde{i},\tilde{j},\tilde{k}}}$$

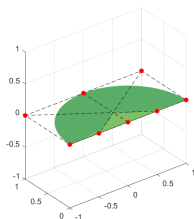
Eigenschaften der NURBS-Basisfunktionen

Viele Eigenschaften folgen aus den Eigenschaften der B-Spline-Basisfunktionen

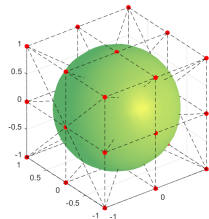
- Die Regularität und der Träger folgt aus den Knotenvektoren
- Partition der Eins
- Punktweise nichtnegativ
- Sind alle Gewichte gleich, so folgt aus der Partition der Eins der $N_{i,p}$, dass $R_i^p(\xi) = N_{i,p}(\xi)$. Damit sind B-Splines ein Spezialfall von NURBS.

NURBS-Einheitskugel

```
crv1 = nrbcirc(1, [], 0, pi);  
crv2 = nrblines([-1 0 0], [1, 0 ,0]);  
srf = nrbruled(crv1, crv2);  
vol = nrbrevolve(srf, [0 0 0], [1 0 0]);
```



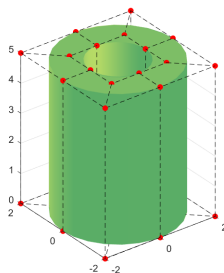
(a) Halbkreis



(b) gesamte Kugel

NURBS-Rohr

```
curve1 = nrbcirc (1);  
curve2 = nrbcirc (2);  
ring   = nrbruled (curve1, curve2);  
pipe   = nrbextrude (ring, [0 0 5]);
```

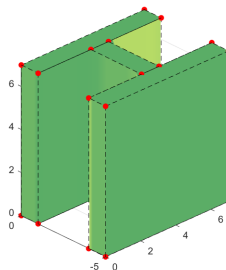


NURBS-Doppel-T-Träger

```
pnts_r = [7 7 4 4 7 7; 0 -1 -1 -4 -4 -5];
right = nrbmak(pnts_r, [0 0 1/5 2/5 3/5 4/5 1 1]);
```

```
pnts_l = [0 0 3 3 0 0; 0 -1 -1 -4 -4 -5];
left = nrbmak(pnts_l, [0 0 1/5 2/5 3/5 4/5 1 1]);
```

```
srf = nrbruled(left, right);
vol = nrboxtrude(srf, [0 0 7]);
```



Starke Form des RWP

Als Beispiel wird im Folgenden das Lösungsverfahren zur Laplace-Gleichung betrachtet. Gesucht ist also eine Funktion

$$u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit:

$$\Delta u + f = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u = g \quad \text{auf } \Gamma_D \quad \text{für } g : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{Dirichlet Rb.}),$$

$$\nabla u \cdot n = h \quad \text{auf } \Gamma_N \quad \text{für } h : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{Neumann Rb.}),$$

$$\beta u + \nabla u \cdot n = r \quad \text{auf } \Gamma_R \quad \text{für } r : \Gamma_R \rightarrow \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \quad (\text{Robin Rb.}),$$

wobei $\overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R} = \Gamma = \partial\Omega$ und $\Gamma_D \cap \Gamma_N \cap \Gamma_R = \emptyset$.

Schwache Form des RWP

Zur Bestimmung der schwachen Form des RWP definiere den Sobolev-Raum

$$H^1(\Omega) = \{u \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 1\},$$

den Ansatzraum

$$\mathcal{S} = \{u \mid u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma_D} = g\}$$

und den Testraum

$$\mathcal{V} = \{w \mid w \in H^1(\Omega), w|_{\Gamma_D} = 0\}$$

Schwache Form des RWP

Multipliziert man nun die starke Form mit einer Testfunktion $w \in \mathcal{V}$ und integriert über das Gebiet Ω , so erhält man die schwache Form:

Finde $u \in \mathcal{S}$, sodass für alle $w \in \mathcal{V}$ gilt:

$$\underbrace{\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u \, d\Omega + \beta \int_{\Gamma_R} w u \, d\Gamma}_{=a(w,u)} = \underbrace{\int_{\Omega} w f \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} w h \, d\Gamma + \int_{\Gamma_R} w r \, d\Gamma}_{=\ell(w)}.$$

Beziehungsweise äquivalent als Bilinear- und Linearform:

$$a(w, u) = \ell(w)$$

Galerkin-Methode

Ziel der Galerkin-Methode ist es nun, endlichdimensionale Teilräume

$$\mathcal{S}^h \subset \mathcal{S}, \quad \mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$$

zu konstruieren.

Unter der Annahme, dass ein $g^h \in \mathcal{S}^h$ existiert mit $g^h|_{\Gamma_D} = g$, kann jedes $u^h \in \mathcal{S}^h$ durch ein eindeutiges $v^h \in \mathcal{V}^h$ dargestellt werden durch

$$u^h = g^h + v^h$$

Galerkin-Methode

Damit ergibt sich die Galerkin-Form zu:

Finde $u^h = g^h + v^h$, $v^h \in \mathcal{V}^h$ zu gegebenem g^h , sodass für alle $w^h \in \mathcal{V}^h$ gilt:

$$a(w^h, u^h) = \ell(w^h),$$

und mit $u^h = g^h + v^h$ zu:

$$a(w^h, v^h) = \ell(w^h) - a(w^h, g^h).$$

Assemblierung des LGS

Betrachte nun den Lösungsraum der NURBS-Funktionen:

$$\{N_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad A = 1, \dots, n_{np}\}$$

Aufgrund des lokalen Trägers verschwinden die meisten Funktionen auf dem Rand von Ω , d.h.

$$N_A|_{\Gamma_D} = 0, \quad \forall A = 1, \dots, n_{eq}$$

Damit lassen sich alle $w^h \in \mathcal{V}^h$ darstellen durch:

$$w^h = \sum_{A=1}^{n_{eq}} N_A c_A$$

mit Konstanten c_A .

Assemblierung des LGS

Analog kann g^h dargestellt werden als:

$$g^h = \sum_{A=n_{eq}+1}^{n_{np}} N_A g_A,$$

wobei $g_1 = \dots = g_{n_{eq}} = 0$.

Damit existieren dann $d_A, A = 1, \dots, n_{eq}$, dass für u^h gilt:

$$u^h = \sum_{A=1}^{n_{eq}} N_A d_A + \sum_{B=n_{eq}+1}^{n_{np}} N_B g_B$$

Assemblierung des LGS

Setzt man die Darstellungen von u^h und w^h in die schwache Form ein, erhält man unter Umstellen für $A = 1, \dots, n_{eq}$:

$$\sum_{B=1}^{n_{eq}} a(N_A, N_B) d_B = \ell(N_A) - a(N_A, g^h)$$

Damit ergeben sich für $A, B = 1, \dots, n_{eq}$:

$$K_{AB} = a(N_A, N_B), \quad \mathbf{K} = [K_{AB}] \quad \text{Steifigkeitsmatrix}$$

$$F_A = \ell(N_A) - a(N_A, g^h), \quad \mathbf{F} = [F_A] \quad \text{Lastvektor}$$

$$\mathbf{d} = [d_A] \quad \text{Verschiebungsvektor}$$

und das zu lösende LGS:

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f}$$

GeoPDEs

Alle gezeigten Programme sowie eine Installationsanleitung finden sich unter:

<https://github.com/markpecheur/GeoPDEs.git>

Alternativ via:



Beispielproblem

Die Funktion

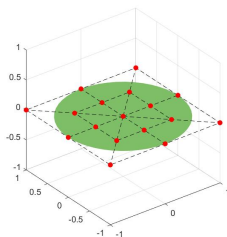
$$u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$$

ist Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta u = - \left(-\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Ziel: Löse die Differentialgleichung mit GeoPDEs auf dem Einheitskreis :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$$



Einheitskreis in NURBS Toolbox

Nach Konstruktion erfüllt u automatisch die Dirichlet-Nullrandbedingung:

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

Das Ergebnis ist im Programm *poisson_kreis.m* in GitHub zu finden.

Fehleranalyse

Das selbe Prinzip wurde im Folgenden im großen Rahmen durchgeführt:

Löse die Poisson-Gleichung zu gegebener Lösung u auf dem Einheitswürfel

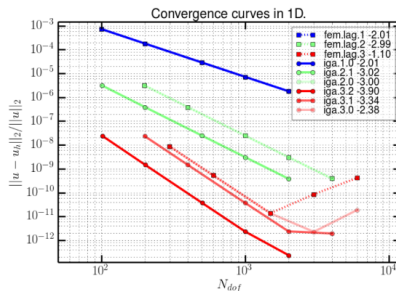
$$\Omega = [-0.5, 0, 5]^d, \quad d = 1, 2, 3$$

Mit rechter Seite f :

$$f(r) = -\Delta u(r)$$

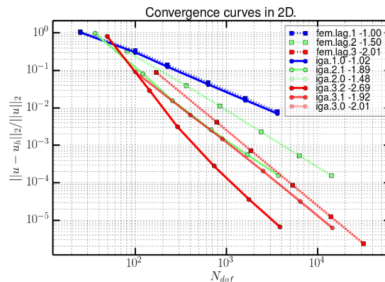
und Dirichlet-Rand $u(r)$ für $r \in \partial\Omega$

Fehleranalyse in 1D



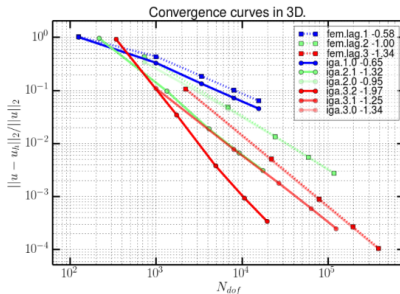
Fehleranalyse für $u(x) = (x^4 - 0.0625) \sin(x)$. Bei FEM ist die Polynomordnung und Steigung angegeben, bei IGA der Grad, die globale Glattheit und Steigung

Fehleranalyse in 2D



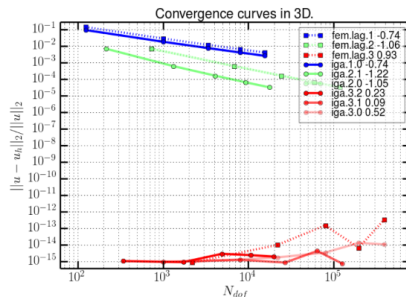
Fehleranalyse für $u(x, y) = \sin(5\pi x) \cos(5\pi y)$. Bei FEM ist die Polynomordnung und Steigung angegeben, bei IGA der Grad, die globale Glattheit und Steigung

Fehleranalyse in 3D



Fehleranalyse für $u(x, y, z) = \sin(5\pi x) \sin(5\pi z) \cos(5\pi y)$. Bei FEM ist die Polynomordnung und Steigung angegeben, bei IGA der Grad, die globale Glattheit und Steigung

Fehleranalyse in 3D (2)



Fehleranalyse für $u(x, y, z) = (x^3 - 0.125)(y^3 - 0.125)(z^3 - 0.125)$. Bei FEM ist die Polynomordnung und Steigung angegeben, bei IGA der Grad, die globale Glattheit und Steigung

Es existiert eine analoge Aussage zur Fehlerabschätzung elliptischer RWP bzgl. der FEM-Lösung

$$\|u - u^h\|_{H^m} \leq Ch^\beta \|u\|_{H^r}$$

für IGA.

Die IGA-Lösung, die unter Nutzung von NURBS p -ter Ordnung entsteht, besitzt die selbe Konvergenzordnung wie die klassische FEM-Lösung mit Polynomen p -ter Ordnung.

Damit erweist sich IGA als wesentlich effizienter als FEM.

Quellenangaben

Primärquelle:

- Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA, J. Austin Cottrell, Thomas J.R Hughes, Yuri Bazilevs, Wiley Verlag, 2009, Seite 1-107

Zu GeoPDEs und der NURBS Toolbox:

- Vorlesungsunterlagen zur Vorlesung Advanced Finite Elements (MA5337), Prof. Dr. B. Wohlmuth, Markus Muhr, Technische Universität München, Wintersemester 2017/18:

https:

[//www-m2.ma.tum.de/bin/view/Allgemeines/AFEMWS17](https://www-m2.ma.tum.de/bin/view/Allgemeines/AFEMWS17)

Zu GeoPDEs:

- Report Series, R. Vázquez, Consiglio Nazionale delle Ricerche Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche “Enrico Magenes”, April 2016, Seite 1-19:
<http://irs.imati.cnr.it/files/reports/16-02.pdf>

Zur Fehleranalyse:

- Finite element method and isogeometric analysis in electronic structure calculations: convergence study, Robert Cimrman, Matyáš Novák, Radek Kolman, Miroslav Tuma, Jiri Vackár, Cornell University, Dezember 2015, Seite 10-16:
<https://arxiv.org/abs/1512.07156>