

# Isogeometrische Analysis

Mark Fischer

Universität Stuttgart

Sommersemester 2021

# Inhalt

Einführung

Non-uniform rational B-Splines

Konstruktion B-Splines

Konstruktion NURBS

NURBS Toolbox

NURBS für lineare RWP

GeoPDEs

Fehleranalyse

Quellen

# Einführung

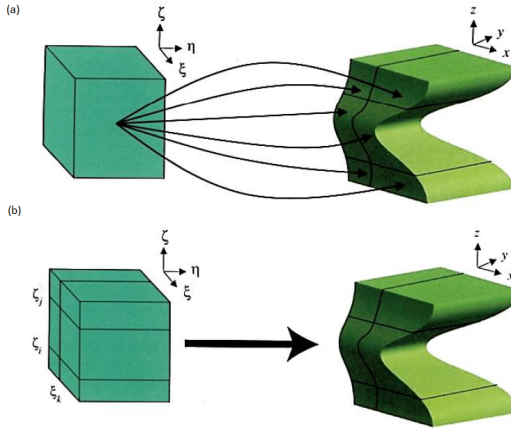
- IGA wurde entwickelt, um die Zusammenarbeit zwischen Design und FEM zu verbessern
- Bisher arbeiten CAD und FEM unabhängig voneinander - Sie nutzen verschiedene geometrische Konstrukte
- Problem 1: CAD-Geometrien sind nicht FEM-kompatibel
- Problem 2: Das FE-Mesh ist nur eine Approximation, d.h. es entstehen Fehler
- Problem 3: Übertragung von CAD-Files in FEM-kompatible Geometrien benötigt ca. 80% der Laufzeit der FEM

Ziel von IGA: Fokus auf **ein** geometrisches Modell

# Hintergrund

- Am häufigsten werden im Ingenieursdesign zur Modellierung NURBS (Non-uniform rational B-Splines) genutzt
- Diese werden definiert durch B-Splines
- In FEA hat jedes Element einen eigenen Parameterraum mit eigener Abbildung
- In IGA wird ein Parameterraum in den gesamten physischen Raum (sog. Patches) abgebildet
- Patches sind Teilgebiete, in welchen Modelle uniform sind.
- Häufig reicht für ein Modell ein einziger Patch

## Konstruktion B-Splines



(a): Je Element ein individueller Parameterraum

(b): ein Parameterraum für den gesamten physischen Raum

# Definition B-Spline-Basisfunktionen

Gegeben ist ein **Knotenvektor** in einer Dimension:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$$

als eine Menge aufsteigender Koordinaten im Parameterraum.

Dabei steht:

- $p$  für die Polynomordnung,
- $n$  für die Nummer von Basisfunktionen,
- $\xi_i \in \mathbb{R}$  für den  $i$ -ten Knoten,
- und  $i$  für den Knotenindex.

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$$

- uniformer Knotenvektor: Knoten sind gleichmäßig verteilt.
- offener Knotenvektor: erster und letzter Knoten wird  $p + 1$  Mal wiederholt.

Basisfunktionen, die durch einen offenen Knotenvektor definiert werden, sind an den Ecken des Patches interpolierend, aber generell nicht.

Die B-Spline-Basisfunktionen werden dann rekursiv definiert durch:

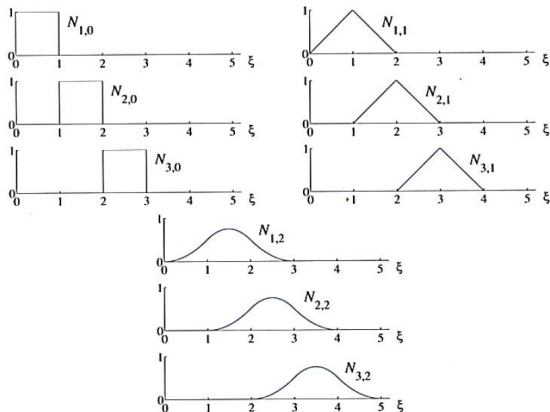
$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

(Cox-de-Boor Rekursionsformel)



## Konstruktion B-Splines



Basisfunktionen 0., 1. und 2. Grades zum Knotenvektor  $\Xi = \{0, 1, 2, \dots\}$

# Eigenschaften von B-Spline-Basisfunktionen

- Partition der Eins:

$$\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1, \quad \forall \xi$$

- Nichtnegativität:

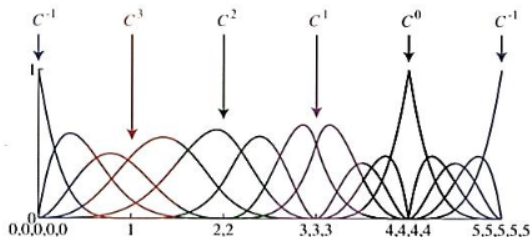
$$N_{i,p}(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi$$

⇒ Steifigkeitsmatrix wird positiv sein

- Jede Basisfunktion  $p$ -ter Ordnung liegt in  $C^{p-1}$
- Der Träger einer Basisfunktion  $p$ -ter Ordnung erstreckt sich über maximal  $p + 1$  Knotenzwischenräume

# Eigenschaften von B-Spline-Basisfunktionen

- Basisfunktionen der Ordnung  $p$  haben am Knoten  $\xi_i$  Regularität der Stufe  $p - m_i$ , wobei  $m_i$  der Vielfachheit von  $\xi_i$  im Knotenvektor  $\Xi$  entspricht.
- Für  $m_i = p$  ist eine Basisfunktion der Ordnung  $p$  interpolatorisch am Knoten  $\xi_i$ .
- Für  $m_i = p + 1$  ist eine Basisfunktion der Ordnung  $p$  unstetig im Knoten  $\xi_i$ .



Basisfunktionen 4. Grades zum offenen Knotenvektor

$$\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5\}$$

# B-Spline Kurven

Für eine B-Spline-Kurve im  $\mathbb{R}^d$  betrachtet man eine Linearkombination von B-Spline-Basisfunktionen:

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i$$

Die Koeffizienten  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^d$  heißen **Kontrollpunkte**. Diese entsprechen den nodalen Koordinaten der FEM, werden jedoch nicht interpoliert. Das **Kontrollpolygon** erhält man durch stückweise lineare Interpolation der Kontrollpunkte.

# B-Spline-Flächen

Gegeben sind die Knotenvektoren

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}, \quad \mathcal{H} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$$

und ein **Kontrollnetz**  $\{\mathbf{B}_{i,j}\}$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $j = 1, \dots, m$ . Dann ist die B-Spline-Fläche definiert durch:

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \mathbf{B}_{i,j}$$

Wobei  $N_{i,j}$  und  $M_{j,q}$  den B-Spline-Basisfunktionen zu den Knotenvektoren  $\Xi$  und  $\mathcal{H}$  entsprechen.

# B-Spline-Volumina

Analog zu B-Spline-Flächen:

$$\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}\}, \mathcal{H} = \{\eta_1, \dots, \eta_{m+q+1}\}, \mathcal{Z} = \{\zeta_1, \dots, \zeta_{l+r+1}\}$$

$$\{\mathbf{B}_{i,j,k}\} \text{ Kontrollgitter, } i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, l$$

$$\mathbf{s}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) \mathbf{B}_{i,j,k}$$

# Einführung zu NURBS

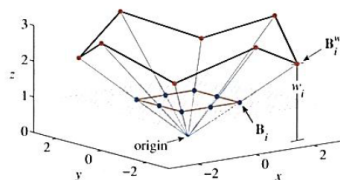
- Mit Hilfe von NURBS können komplexe Geometrien dargestellt werden, die sich mit Polynomen nicht darstellen lassen (Beispiel: Kurven und Ellipsen)
- Dabei entstehen NURBS-Geometrien im  $\mathbb{R}^d$  durch Projektion einer B-Spline-Geometrie im  $\mathbb{R}^{d+1}$ .

Im Folgenden bezeichnet:

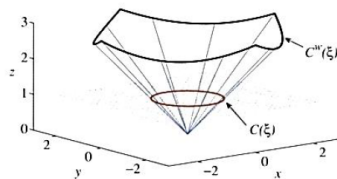
- $C^w(\xi)$  eine B-Spline-Kurve, die **projektive Kurve**
- $B_i^w$  die **projektiven Kontrollpunkte**
- $C(\xi)$  die NURBS-Kurve
- $B_i$  die NURBS-Kontrollpunkte



## Konstruktion NURBS



(a) Control polygons



(b) Curves

Stückweise quadratische B-Spline Kurve im  $\mathbb{R}^3$  wird auf die Ebene  $z = 1$  projiziert und ergibt einen Kreis im  $\mathbb{R}^2$

## Definition NURBS-Kurve

Die Kontrollpunkte einer NURBS-Kurve werden berechnet durch:

$$(\mathbf{B}_i)_j = \frac{(\mathbf{B}_i^w)_j}{w_i}, \quad \forall j = 1, \dots, d, \quad \text{wobei} \quad w_i = (\mathbf{B}_i^w)_{d+1}.$$

$w_i$  heißt  $i$ -tes **Gewicht**. Unter Definition der Gewichtsfunktion

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i$$

wird dann die NURBS-Kurve definiert durch

$$(\mathbf{C}(\xi))_j = \frac{(\mathbf{C}^w(\xi))_j}{W(\xi)}, \quad \forall 1, \dots, d$$

- Die NURBS-Kurve ist dann eine rationale Funktion, die aus zwei polynomiellen Funktionen selben Grades besteht.
- Die **Ordnung** einer NURBS-Kurve entspricht dann der Ordnung der B-Spline-Kurve, aus welcher sie erzeugt wurde.

Um weiterhin eine NURBS-Kurve direkt durch Änderung der Kontrollpunkte zu verändern, werden NURBS-Basisfunktionen wie folgt definiert:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p}w_i}{\sum_{\tilde{i}=1}^n N_{\tilde{i},p}(\xi)w_{\tilde{i}}}$$

Damit ergibt sich die NURBS-Kurve zu:

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi)\mathbf{B}_i$$

Diese Definition ist analog zur vorigen.

# NURBS-Flächen und Volumina

Analog wird wieder für NURBS-Flächen...

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{\tilde{i}=1}^n \sum_{\tilde{j}=1}^m N_{\tilde{i},p}(\xi)M_{\tilde{j},q}(\eta)w_{\tilde{i},\tilde{j}}}$$

... und Volumina vorgegangen:

$$R_{i,j,k}^{p,q,r} = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{\sum_{\tilde{i}=1}^n \sum_{\tilde{j}=1}^m \sum_{\tilde{k}=1}^l N_{\tilde{i},p}(\xi)M_{\tilde{j},q}(\eta)L_{\tilde{k},r}(\zeta)w_{\tilde{i},\tilde{j},\tilde{k}}}$$

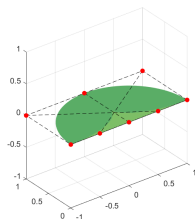
# Eigenschaften der NURBS-Basisfunktionen

Viele Eigenschaften folgen aus den Eigenschaften der B-Spline-Basisfunktionen

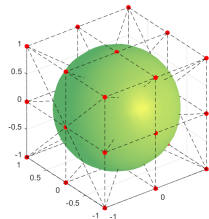
- Die Regularität und der Träger folgt aus den Knotenvektoren
- Partition der Eins
- Punktweise nichtnegativ
- Sind alle Gewichte gleich, so folgt aus der Partition der Eins der  $N_{i,p}$ , dass  $R_i^p(\xi) = N_{i,p}(\xi)$ . Damit sind B-Splines ein Spezialfall von NURBS.

# NURBS-Einheitskugel

```
crv1 = nrbcirc(1, [], 0, pi);  
crv2 = nrblin([-1 0 0], [1, 0 ,0]);  
srf = nrbruled(crv1, crv2);  
vol = nrbrevolve(srf, [0 0 0], [1 0 0]);
```



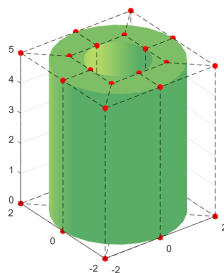
(a) Halbkreis



(b) gesamte Kugel

## NURBS-Rohr

```
curve1 = nrbcirc (1);
curve2 = nrbcirc (2);
ring    = nrbruled (curve1, curve2);
pipe    = nrboxtrude (ring, [0 0 5]);
```



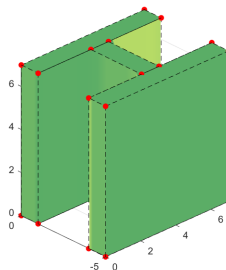


# NURBS-Doppel-T-Träger

```
pnts_r = [7 7 4 4 7 7; 0 -1 -1 -4 -4 -5];
right = nrbmak(pnts_r, [0 0 1/5 2/5 3/5 4/5 1 1]);
```

```
pnts_l = [0 0 3 3 0 0; 0 -1 -1 -4 -4 -5];
left = nrbmak(pnts_l, [0 0 1/5 2/5 3/5 4/5 1 1]);
```

```
srf = nrbruled(left, right);
vol = nrboxtrude(srf, [0 0 7]);
```



# Starke Form des RWP

Als Beispiel wird im Folgenden das Lösungsverfahren zur Laplace-Gleichung betrachtet. Gesucht ist also eine Funktion

$$u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit:

$$\Delta u + f = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u = g \quad \text{auf } \Gamma_D \quad \text{für } g : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{Dirichlet Rb.}),$$

$$\nabla u \cdot n = h \quad \text{auf } \Gamma_N \quad \text{für } h : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{Neumann Rb.}),$$

$$\beta u + \nabla u \cdot n = r \quad \text{auf } \Gamma_R \quad \text{für } r : \Gamma_R \rightarrow \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \quad (\text{Robin Rb.}),$$

wobei  $\overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R} = \Gamma = \partial\Omega$  und  $\Gamma_D \cap \Gamma_N \cap \Gamma_R = \emptyset$ .

# Schwache Form des RWP

Zur Bestimmung der schwachen Form des RWP definiere den Sobolev-Raum

$$H^1(\Omega) = \{u \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 1\},$$

den Ansatzraum

$$\mathcal{S} = \{u \mid u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma_D} = g\}$$

und den Testraum

$$\mathcal{V} = \{w \mid w \in H^1(\Omega), w|_{\Gamma_D} = 0\}$$

## Schwache Form des RWP

Multipliziert man nun die starke Form mit einer Testfunktion  $w \in \mathcal{V}$  und integriert über das Gebiet  $\Omega$ , so erhält man die schwache Form:

Finde  $u \in \mathcal{S}$ , sodass für alle  $w \in \mathcal{V}$  gilt:

$$\underbrace{\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u \, d\Omega + \beta \int_{\Gamma_R} w u \, d\Gamma}_{=a(w,u)} = \underbrace{\int_{\Omega} w f \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} w h \, d\Gamma + \int_{\Gamma_R} w r \, d\Gamma}_{=\ell(w)}.$$

Beziehungsweise äquivalent als Bilinear- und Linearform:

$$a(w, u) = \ell(w)$$

# Galerkin-Methode

Ziel der Galerkin-Methode ist es nun, endlichdimensionale Teilräume

$$\mathcal{S}^h \subset \mathcal{S}, \quad \mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$$

zu konstruieren.

Unter der Annahme, dass ein  $g^h \in \mathcal{S}^h$  existiert mit  $g^h|_{\Gamma_D} = g$ , kann jedes  $u^h \in \mathcal{S}^h$  durch ein eindeutiges  $v^h \in \mathcal{V}^h$  dargestellt werden durch

$$u^h = g^h + v^h$$

# Galerkin-Methode

Damit ergibt sich die Galerkin-Form zu:

Finde  $u^h = g^h + v^h$ ,  $v^h \in \mathcal{V}^h$  zu gegebenem  $g^h$ , sodass für alle  $w^h \in \mathcal{V}^h$  gilt:

$$a(w^h, u^h) = \ell(w^h),$$

und mit  $u^h = g^h + v^h$  zu:

$$a(w^h, v^h) = \ell(w^h) - a(w^h, g^h).$$

# Assemblierung des LGS

Betrachte nun den Lösungsraum der NURBS-Funktionen:

$$\{N_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad A = 1, \dots, n_{np}\}$$

Aufgrund des lokalen Trägers verschwinden die meisten Funktionen auf dem Rand von  $\Omega$ , d.h.

$$N_A|_{\Gamma_D} = 0, \quad \forall A = 1, \dots, n_{eq}$$

Damit lassen sich alle  $w^h \in \mathcal{V}^h$  darstellen durch:

$$w^h = \sum_{A=1}^{n_{eq}} N_A c_A$$

mit Konstanten  $c_A$ .

# Assemblierung des LGS

Analog kann  $g^h$  dargestellt werden als:

$$g^h = \sum_{A=n_{eq}+1}^{n_{np}} N_A g_A,$$

wobei  $g_1 = \dots = g_{n_{eq}} = 0$ .

Damit existieren dann  $d_A, A = 1, \dots, n_{eq}$ , dass für  $u^h$  gilt:

$$u^h = \sum_{A=1}^{n_{eq}} N_A d_A + \sum_{B=n_{eq}+1}^{n_{np}} N_B g_B$$



## Assemblierung des LGS

Setzt man die Darstellungen von  $u^h$  und  $w^h$  in die schwache Form ein, erhält man unter Umstellen für  $A = 1, \dots, n_{eq}$ :

$$\sum_{B=1}^{n_{eq}} a(N_A, N_B) d_B = \ell(N_A) - a(N_A, g^h)$$

Damit ergeben sich für  $A, B = 1, \dots, n_{eq}$ :

$$K_{AB} = a(N_A, N_B), \quad \mathbf{K} = [K_{AB}] \quad \text{Steifigkeitsmatrix}$$

$$F_A = \ell(N_A) - a(N_A, g^h), \quad \mathbf{F} = [F_A] \quad \text{Lastvektor}$$

$$\mathbf{d} = [d_A] \quad \text{Verschiebungsvektor}$$

und das zu lösende LGS:

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f}$$

# GeoPDEs

Alle gezeigten Programme sowie eine Installationsanleitung finden sich unter:

<https://github.com/markpecheur/GeoPDEs.git>

Alternativ via:



# Beispielproblem

Die Funktion

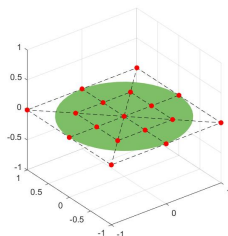
$$u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$$

ist Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta u = - \left( -\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Ziel: Löse die Differentialgleichung mit GeoPDEs auf dem Einheitskreis :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$$



## Einheitskreis in NURBS Toolbox

Nach Konstruktion erfüllt  $u$  automatisch die Dirichlet-Nullrandbedingung:

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

# Fehleranalyse

Das selbe Prinzip wurde im Folgenden im großen Rahmen durchgeführt:

Löse die Poisson-Gleichung zu gegebener Lösung  $u$  auf dem Einheitswürfel

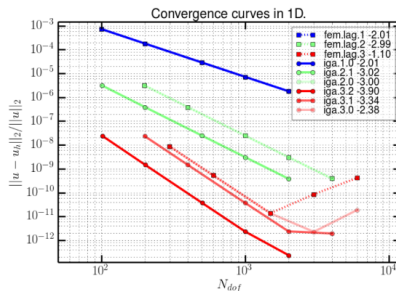
$$\Omega = [-0.5, 0, 5]^d, \quad d = 1, 2, 3$$

Mit rechter Seite  $f$ :

$$f(r) = -\Delta u(r)$$

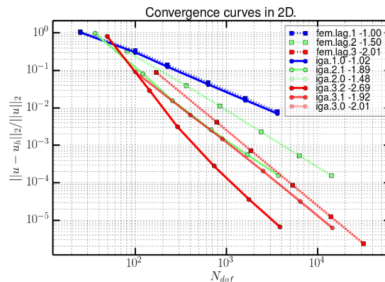
und Dirichlet-Rand  $u(r)$  für  $r \in \partial\Omega$

# Fehleranalyse in 1D



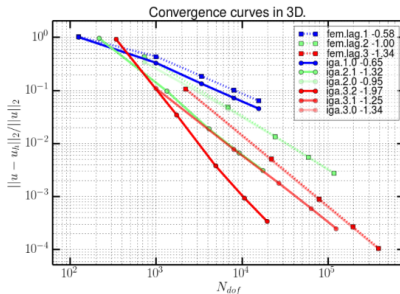
Fehleranalyse für  $u(x) = (x^4 - 0.0625) \sin(x)$ . Bei FEM ist die Polynomordnung und Steigung angegeben, bei IGA der Grad, die globale Glattheit und Steigung

# Fehleranalyse in 2D



Fehleranalyse für  $u(x, y) = \sin(5\pi x) \cos(5\pi y)$ . Bei FEM ist die Polynomordnung und Steigung angegeben, bei IGA der Grad, die globale Glattheit und Steigung

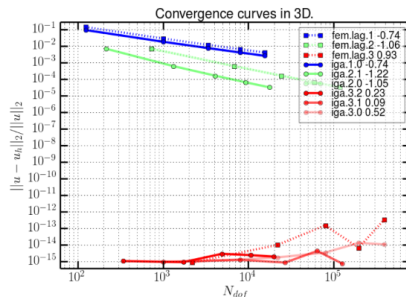
# Fehleranalyse in 3D



Fehleranalyse für  $u(x, y, z) = \sin(5\pi x) \sin(5\pi z) \cos(5\pi y)$ . Bei FEM ist die Polynomordnung und Steigung angegeben, bei IGA der Grad, die globale Glattheit und Steigung



## Fehleranalyse in 3D (2)



Fehleranalyse für  $u(x, y, z) = (x^3 - 0.125)(y^3 - 0.125)(z^3 - 0.125)$ . Bei FEM ist die Polynomordnung und Steigung angegeben, bei IGA der Grad, die globale Glattheit und Steigung

Es existiert eine analoge Aussage zur Fehlerabschätzung elliptischer RWP bzgl. der FEM-Lösung

$$\|u - u^h\|_{H^m} \leq Ch^\beta \|u\|_{H^r}$$

für IGA.

Die IGA-Lösung, die unter Nutzung von NURBS  $p$ -ter Ordnung entsteht, besitzt die selbe Konvergenzordnung wie die klassische FEM-Lösung mit Polynomen  $p$ -ter Ordnung.

Damit erweist sich IGA als wesentlich effizienter als FEM.

# Quellenangaben

## Primärquelle:

- Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA, J. Austin Cottrell, Thomas J.R Hughes, Yuri Bazilevs, Wiley Verlag, 2009, Seite 1-107

## Zu GeoPDEs und der NURBS Toolbox:

- Vorlesungsunterlagen zur Vorlesung Advanced Finite Elements (MA5337), Prof. Dr. B. Wohlmuth, Markus Muhr, Technische Universität München, Wintersemester 2017/18:

https:

[//www-m2.ma.tum.de/bin/view/Allgemeines/AFEMWS17](https://www-m2.ma.tum.de/bin/view/Allgemeines/AFEMWS17)

## Zu GeoPDEs:

- Report Series, R. Vázquez, Consiglio Nazionale delle Ricerche Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche “Enrico Magenes”, April 2016, Seite 1-19:  
<http://irs.imati.cnr.it/files/reports/16-02.pdf>

## Zur Fehleranalyse:

- Finite element method and isogeometric analysis in electronic structure calculations: convergence study, Robert Cimrman, Matyáš Novák, Radek Kolman, Miroslav Tuma, Jiri Vackár, Cornell University, Dezember 2015, Seite 10-16:  
<https://arxiv.org/abs/1512.07156>