Isogeometrische Analysis

Mark Fischer

Universität Stuttgart

Sommersemester 2021

Inhalt

Einführung

Non-uniform rational B-Splines
- Konstruktion B-Splines
- Konstruktion NURBS

NURBS Toolbox

NURBS für lineare RWP

GeoPDEs

Fehleranalyse

Quellen

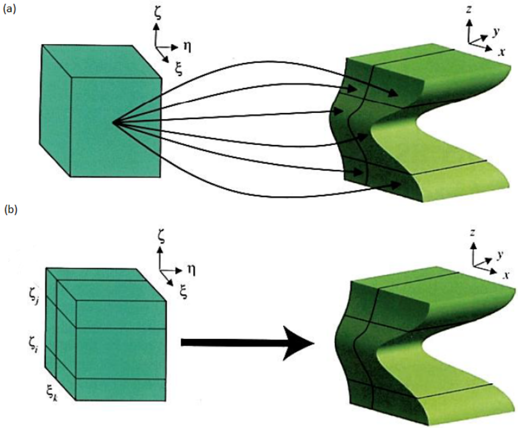
Einführung

- IGA wurde entwickelt, um die Zusammenarbeit zwischen Design und FEM zu verbessern
- Bisher arbeiten CAD und FEM unabhängig voneinander - Sie nutzen verschiedene geometrische Konstrukte
- Problem 1: CAD-Geometrien sind nicht FEM-kompatibel
- Problem 2: Das FE-Mesh ist nur eine Approximation, d.h. es entstehen Fehler
- Problem 3: Übertragung von CAD-Files in FEM-kompatible Geometrien benötigt ca. 80% der Laufzeit der FEM

Ziel von IGA: Fokus auf **ein** geometrisches Modell

Hintergrund

- Am häufigsten werden im Ingenieursdesign zur Modellierung NURBS (Non-uniform rational B-Splines) genutzt
- Diese werden definiert durch B-Splines
- In FEA hat jedes Element einen eigenen Parameterraum mit eigener Abbildung
- In IGA wird ein Parameterraum in den gesamten physischen Raum (sog. Patches) abgebildet
- Patches sind Teilgebiete, in welchen Modelle uniform sind.
- Häufig reicht für ein Modell ein einziger Patch



(a): Je Element ein individueller Parameterraum
(b): ein Parameterraum für den gesamten physischen Raum

Definition B-Spline-Basisfunktionen

Gegeben ist ein **Knotenvektor** in einer Dimension:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n+p+1}\}$$

als eine Menge aufsteigender Koordinaten im Parameterraum.
Dabei steht:

- p für die Polynomordnung,
- n für die Nummer von Basisfunktionen,
- $\xi_i \in \mathbb{R}$ für den i-ten Knoten,
- und i für den Knotenindex.

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n+p+1}\}$$

- uniformer Knotenvektor: Knoten sind gleichmäßig verteilt.
- offener Knotenvektor: erster und letzter Knoten wird $p+1$ Mal wiederholt.

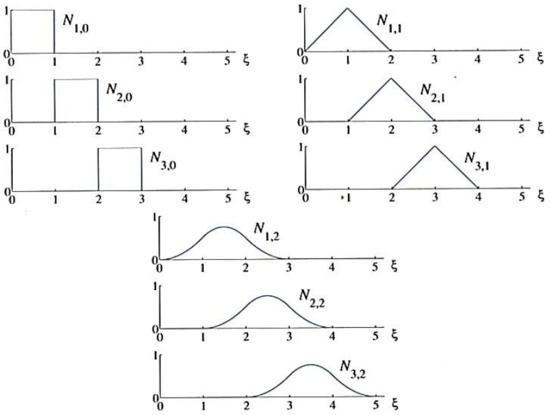
Basisfunktionen, die durch einen offenen Knotenvektor definiert werden, sind an den Ecken des Patches interpolierend, aber generell nicht.

Die B-Spline-Basisfunktionen werden dann rekursiv definiert durch:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

(Cox-de-Boor Rekursionsformel)



Basisfunktionen 0., 1. und 2. Grades zum Knotenvektor $\Xi = \{0, 1, 2, ...\}$

Eigenschaften von B-Spline-Basisfunktionen

- Partition der Eins:

$$\sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi) = 1, \qquad \forall \xi$$

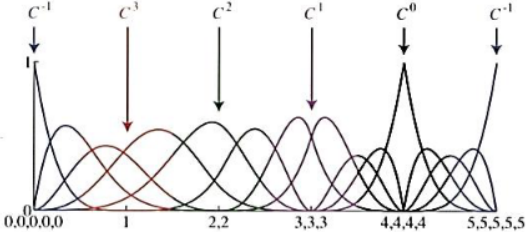
- Nichtnegativität:

$$N_{i,p}(\xi) \geq 0 \qquad \forall \xi$$

  $\Rightarrow$ Steifigkeitsmatrix wird positiv sein
- Jede Basisfunktion p-ter Ordnung liegt in C^{p-1}
- Der Träger einer Basisfunktion p-ter Ordnung erstreckt sich über maximal $p+1$ Knotenzwischenräume

Eigenschaften von B-Spline-Basisfunktionen

- Basisfunktionen der Ordnung p haben am Knoten ξ_i Regularität der Stufe $p - m_i$, wobei m_i der Vielfachheit von ξ_i im Knotenvektor Ξ entspricht.
- Für $m_i = p$ ist eine Basisfunktion der Ordnung p interpolatorisch am Knoten ξ_i.
- Für $m_i = p + 1$ ist eine Basisfunktion der Ordnung p unstetig im Knoten ξ_i.



Basisfunktionen 4. Grades zum offenen Knotenvektor
$\Xi = \{0,0,0,0,0,1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5\}$

B-Spline Kurven

Für eine B-Spline-Kurve im $\mathbb{R}^d$ betrachtet man eine Linearkombination von B-Spline-Basisfunktionen:

$$\boxed{\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi)\mathbf{B}_i}$$

Die Koeffizienten $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^d$ heißen **Kontrollpunkte**. Diese entsprechen den nodalen Koordinaten der FEM, werden jedoch nicht interpoliert. Das **Kontrollpolygon** erhält man durch stückweise lineare Interpolation der Kontrollpunkte.

B-Spline-Flächen

Gegeben sind die Knotenvektoren

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n+p+1}\}, \quad \mathcal{H} = \{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{m+q+1}\}$$

und ein **Kontrollnetz** $\{\mathbf{B}_{i,j}\}$ für $i = 1, ...n$ und $j = 1, ..., m$. Dann ist die B-Spline-Fläche definiert durch:

$$\boxed{\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \mathbf{B}_{i,j}}$$

Wobei $N_{i,j}$ und $M_{j,q}$ den B-Spline-Basisfunktionen zu den Knotenvektoren Ξ und $\mathcal{H}$ entsprechen.

B-Spline-Volumina

Analog zu B-Spline-Flächen:

$$\Xi = \{\xi_1, ..., \xi_{n+p+1}\},\ \mathcal{H} = \{\eta_1, ..., \eta_{m+q+1}\},\ \mathcal{Z} = \{\zeta_1, ..., \zeta_{l+r+1}\}$$

$\{\mathbf{B}_{i,j,k}\}$ **Kontrollgitter**, $\quad i = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., m, \quad k = 1, ..., l$

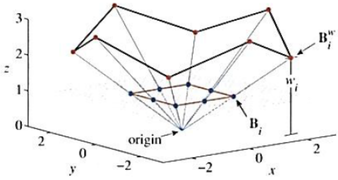
$$\boxed{\mathbf{S}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) \mathbf{B}_{i,j,k}}$$

Einführung zu NURBS

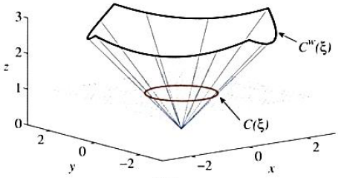
- Mit Hilfe von NURBS können komplexe Geometrien dargestellt werden, die sich mit Polynomen nicht darstellen lassen (Beispiel: Kurven und Ellipsen)
- Dabei entstehen NURBS-Geometrien im $\mathbb{R}^d$ durch Projektion einer B-Spline-Geometrie im $\mathbb{R}^{d+1}$.

Im Folgenden bezeichnet:

- $C^w(\xi)$ eine B-Spline-Kurve, die **projektive Kurve**
- B_i^w die **projektiven Kontrollpunkte**
- $C(\xi)$ die NURBS-Kurve
- B_i die NURBS-Kontrollpunkte



(a) Control polygons



(b) Curves

Stückweise quadratische B-Spline Kurve im $\mathbb{R}^3$ wird auf die Ebene $z = 1$ projiziert und ergibt einen Kreis im $\mathbb{R}^2$

Definition NURBS-Kurve

Die Kontrollpunkte einer NURBS-Kurve werden berechnet durch:

$$(\mathbf{B}_i)_j = \frac{(\mathbf{B}_i^w)_j}{w_i}, \quad \forall\, j = 1, ..., d, \quad \text{wobei} \quad w_i = (\mathbf{B}_i^w)_{d+1}\,.$$

w_i heißt i-**tes Gewicht**. Unter Definition der Gewichtsfunktion

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i$$

wird dann die NURBS-Kurve definiert durch

$$\boxed{(\mathbf{C}(\xi))_j = \frac{(\mathbf{C}^w(\xi))_j}{W(\xi)}, \quad \forall\, 1, ..., d}$$

- Die NURBS-Kurve ist dann eine rationale Funktion, die aus zwei polynomiellen Funktionen selben Grades besteht.
- Die **Ordnung** einer NURBS-Kurve entspricht dann der Ordnung der B-Spline-Kurve, aus welcher sie erzeugt wurde.

Um weiterhin eine NURBS-Kurve direkt durch Änderung der Kontrollpunkte zu verändern, werden NURBS-Basisfunktionen wie folgt definiert:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p} w_i}{\sum_{\tilde{i}=1}^{n} N_{\tilde{i},p}(\xi) w_{\tilde{i}}}$$

Damit ergibt sich die NURBS-Kurve zu:

$$\boxed{\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} R_i^p(\xi) \mathbf{B}_i}$$

Diese Definition ist analog zur vorigen.

NURBS-Flächen und Volumina

Analog wird wieder für NURBS-Flächen...

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{\tilde{i}=1}^{n}\sum_{\tilde{j}=1}^{m} N_{\tilde{i},p}(\xi)M_{\tilde{j},q}(\eta)w_{\tilde{i},\tilde{j}}}$$

... und Volumina vorgegangen:

$$R_{i,j,k}^{p,q,r} = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{\sum_{\tilde{i}=1}^{n}\sum_{\tilde{j}=1}^{m}\sum_{\tilde{k}}^{l} N_{\tilde{i},p}(\xi)M_{\tilde{j},q}(\eta)L_{\tilde{k},r}(\zeta)w_{\tilde{i},\tilde{j},\tilde{k}}}$$

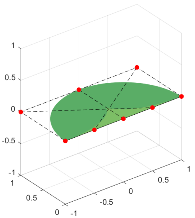
Eigenschaften der NURBS-Basisfunktionen

Viele Eigenschaften folgen aus den Eigenschaften der B-Spline-Basisfunktionen

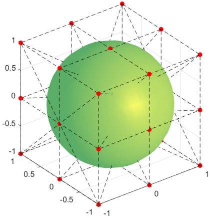
- Die Regularität und der Träger folgt aus den Knotenvektoren
- Partition der Eins
- Punktweise nichtnegativ
- Sind alle Gewichte gleich, so folgt aus der Partition der Eins der $N_{i,p}$, dass $R_i^p(\xi) = N_{i,p}(\xi)$. Damit sind B-Splines ein Spezialfall von NURBS.

NURBS-Einheitskugel

```
crv1 = nrbcirc(1, [], 0, pi);
crv2 = nrbline([-1 0 0], [1, 0 ,0]);
srf = nrbruled(crv1, crv2);
vol = nrbrevolve(srf, [0 0 0], [1 0 0]);
```



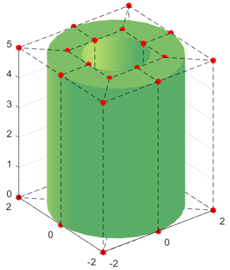
(a) Halbkreis



(b) gesamte Kugel

NURBS-Rohr

```
curve1 = nrbcirc (1);
curve2 = nrbcirc (2);
ring   = nrbruled (curve1, curve2);
pipe   = nrbextrude (ring, [0 0 5]);
```

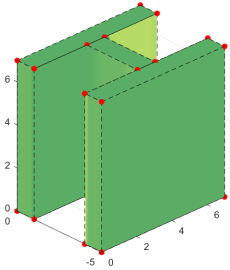


NURBS-Doppel-T-Träger

```
pnts_r =  [7 7 4 4 7 7; 0 -1 -1 -4 -4 -5];
right = nrbmak(pnts_r, [0 0 1/5 2/5 3/5 4/5 1 1]);

pnts_l = [0 0 3 3 0 0; 0 -1 -1 -4 -4 -5];
left = nrbmak(pnts_l, [0 0 1/5 2/5 3/5 4/5 1 1]);

srf = nrbruled(left, right);
vol = nrbextrude(srf, [0 0 7]);
```



Starke Form des RWP

Als Beispiel wird im Folgenden das Lösungsverfahren zur Laplace-Gleichung betrachtet. Gesucht ist also eine Funktion

$$u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$$

mit:

$$\begin{aligned} \Delta u + f = 0 \quad &\text{in} \quad \Omega \\ u = g \quad &\text{auf} \quad \Gamma_D \quad \text{für } g : \Gamma_D \to \mathbb{R} \quad \text{(Dirichlet Rb.)}, \\ \nabla u \cdot n = h \quad &\text{auf} \quad \Gamma_N \quad \text{für } h : \Gamma_N \to \mathbb{R} \quad \text{(Neumann Rb.)}, \\ \beta u + \nabla u \cdot n = r \quad &\text{auf} \quad \Gamma_R \quad \text{für } r : \Gamma_R \to \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{(Robin Rb.)}, \end{aligned}$$

wobei $\overline{\Gamma_D \cup \Gamma_n \cup \Gamma_R} = \Gamma = \partial\Omega$ und $\Gamma_D \cap \Gamma_N \cap \Gamma_R = \emptyset$.

Schwache Form des RWP

Zur Bestimmung der schwachen Form des RWP definiere den Sobolev-Raum

$$H^1(\Omega) = \{u \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 1\},$$

den Ansatzraum

$$\mathcal{S} = \{u \mid u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma_D} = g\}$$

und den Testraum

$$\mathcal{V} = \{w \mid w \in H^1(\Omega), w|_{\Gamma_D} = 0\}$$

Schwache Form des RWP

Multipliziert man nun die starke Form mit einer Testfunktion $w \in \mathcal{V}$ und integriert über das Gebiet Ω, so erhält man die schwache Form:

Finde $u \in \mathcal{S}$, sodass für alle $w \in \mathcal{V}$ gilt:

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla u \, \mathrm{d}\Omega + \beta \int_{\Gamma_R} wu \, \mathrm{d}\Gamma}_{=a(w,u)} = \underbrace{\int_\Omega wf \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_N} wh \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_R} wr \, \mathrm{d}\Gamma}_{=\ell(w)} .$$

Beziehungsweise äquivalent als Bilinear- und Linearform:

$$a(w,u) = \ell(w)$$

Galerkin-Methode

Ziel der Galerkin-Methode ist es nun, endlichdimensionale Teilräume

$$\mathcal{S}^h \subset \mathcal{S}, \qquad \mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$$

zu konstruieren.

Unter der Annahme, dass ein $g^h \in \mathcal{S}^h$ existiert mit $g^h|_{\Gamma_D} = g$, kann jedes $u^h \in \mathcal{S}^h$ durch ein eindeutiges $v^h \in \mathcal{V}^h$ dargestellt werden durch

$$u^h = g^h + v^h$$

Galerkin-Methode

Damit ergibt sich die Galerkin-Form zu:

Finde $u^h = g^h + v^h$, $v^h \in \mathcal{V}^h$ zu gegebenem g^h, sodass für alle $w^h \in \mathcal{V}^h$ gilt:

$$a(w^h, u^h) = \ell(w^h),$$

und mit $u^h = g^h + v^h$ zu:

$$a(w^h, v^h) = \ell(w^h) - a(w^h, g^h).$$

Assemblierung des LGS

Betrachte nun den Lösungsraum der NURBS-Funktionen:

$$\{N_A : \Omega \to \mathbb{R}, \quad A = 1, ..., n_{np}\}$$

Aufgrund des lokalen Trägers verschwinden die meisten Funktionen auf dem Rand von Ω, d.h.

$$N_A|_{\Gamma_D} = 0, \quad \forall A = 1, ..., n_{eq}$$

Damit lassen sich alle $w^h \in \mathcal{V}^h$ darstellen durch:

$$w^h = \sum_{A=1}^{n_{eq}} N_A c_A$$

mit Konstanten c_A.

Assemblierung des LGS

Analog kann g^h dargestellt werden als:

$$g^h = \sum_{A=n_{eq}+1}^{n_{np}} N_A g_A,$$

wobei $g_1 = ... = g_{n_{eq}} = 0$.

Damit existieren dann $d_A, A = 1, ..., n_{eq}$, dass für u^h gilt:

$$u^h = \sum_{A=1}^{n_{eq}} N_A d_A + \sum_{B=n_{eq}+1}^{n_{np}} N_B g_B$$

Assemblierung des LGS

Setzt man die Darstellungen von u^h und w^h in die schwache Form ein, erhält man unter Umstellen für $A = 1, ..., n_{eq}$:

$$\sum_{B=1}^{n_{eq}} a(N_A, N_B) d_B = \ell(N_A) - a(N_A, g^h)$$

Damit ergeben sich für $A, B = 1, ..., n_{eq}$:

$$\begin{aligned} K_{AB} &= a(N_A, N_B), & \mathbf{K} &= [K_{AB}] & &\textbf{Steifigkeitsmatrix} \\ F_A &= \ell(N_A) - a(N_A, g^h), & \mathbf{F} &= [F_A] & &\textbf{Lastvektor} \\ & & \mathbf{d} &= [d_A] & &\textbf{Verschiebungsvektor} \end{aligned}$$

und das zu lösende LGS:

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f}$$

GeoPDEs

Die gezeigten Programme sowie eine Installationsanleitung finden sich unter:

```
https://github.com/MarkJLFischer/GeoPDEs.git
```

Alternativ via:

Beispielproblem

Die Funktion

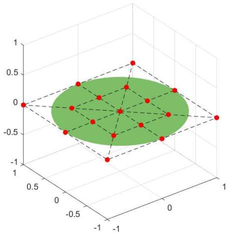
$$u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$$

ist Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta u = -\left(-\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Ziel: Löse die Differentialgleichung mit GeoPDEs auf dem Einheitskreis :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$$



Einheitskreis in NURBS Toolbox

Nach Konstruktion erfüllt u automatisch die Dirichlet-Nullrandbedingung:

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

Das Ergebnis ist im Programm *poisson_kreis.m* in GitHub zu finden.

Fehleranalyse

Das selbe Prinzip wurde im Folgenden im großen Rahmen durchgeführt:

Löse die Poisson-Gleichung zu gegebener Lösung u auf dem Einheitswürfel

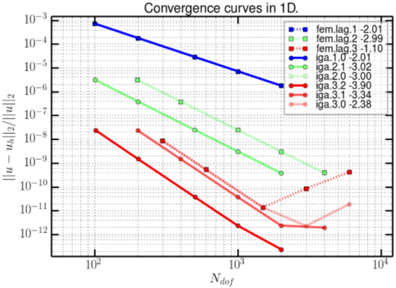
$$\Omega = [-0.5, 0, 5]^d, \qquad d = 1, 2, 3$$

Mit rechter Seite f:

$$f(r) = -\Delta u(r)$$

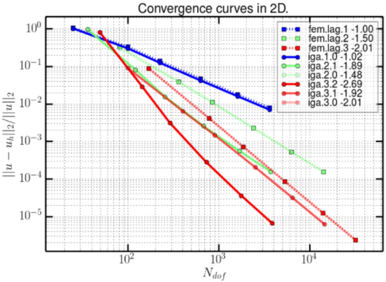
und Dirichlet-Rand $u(r)$ für $r \in \partial\Omega$

Fehleranalyse in 1D



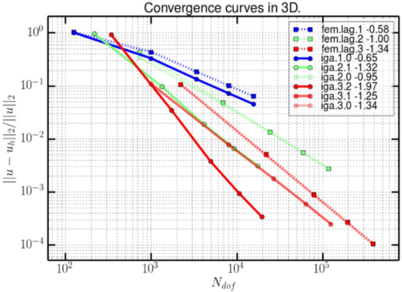
Fehleranalyse für $u(x) = (x^4 - 0.0625)\sin(x)$. Bei FEM ist die Polynomordnung und Steigung angegeben, bei IGA der Grad, die globale Glattheit und Steigung

Fehleranalyse in 2D



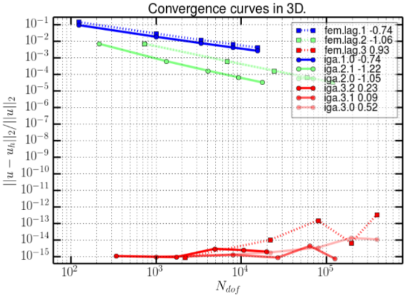
Fehleranalyse für $u(x, y) = \sin(5\pi x)\cos(5\pi y)$. Bei FEM ist die Polynomordnung und Steigung angegeben, bei IGA der Grad, die globale Glattheit und Steigung

Fehleranalyse in 3D



Fehleranalyse für $u(x,y,z) = \sin(5\pi x)\sin(5\pi z)\cos(5\pi y)$. Bei FEM ist die Polynomordnung und Steigung angegeben, bei IGA der Grad, die globale Glattheit und Steigung

Fehleranalyse in 3D (2)



Fehleranalyse für $u(x, y, z) = (x^3 - 0.125)(y^3 - 0.125)(z^3 - 0.125)$. Bei FEM ist die Polynomordnung und Steigung angegeben, bei IGA der Grad, die globale Glattheit und Steigung

Es existiert eine analoge Aussage zur Fehlerabschätzung elliptischer RWP bzgl. der FEM-Lösung

$$||u - u^h||_{H^m} \leq Ch^\beta ||u||_{H^r}$$

für IGA.

> Die IGA-Lösung, die unter Nutzung von NURBS p-ter Ordnung entsteht, besitzt die selbe Konvergenzordnung wie die klassiche FEM-Lösung mit Polynomen p-ter Ordnung.

Damit erweist sich IGA als wesentlich effizienter als FEM.

Quellenangaben

Primärquelle:

- Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA, J. Austin Cottrell, Thomas J.R Hughes, Yuri Bazilevs, Wiley Verlag, 2009, Seite 1-107

Zu GeoPDEs und der NURBS Toolbox:

- Vorlesungsunterlagen zur Vorlesung Advanced Finite Elements (MA5337), Prof. Dr. B. Wohlmuth, Markus Muhr, Technische Universität München, Wintersemester 2017/18: `https://www-m2.ma.tum.de/bin/view/Allgemeines/AFEMWS17`

Zu GeoPDEs:

- Report Series, R. Vázquez, Consiglio Nazionale delle Ricerche Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche "Enrico Magenes", April 2016, Seite 1-19: http://irs.imati.cnr.it/files/reports/16-02.pdf

Zur Fehleranalyse:

- Finite element method and isogeometric analysis in electronic structure calculations: convergence study, Robert Cimrman, Matyás Novák, Radek Kolman, Miroslav Tuma, Jiri Vackár, Cornell University, Dezember 2015, Seite 10-16: https://arxiv.org/abs/1512.07156