

Éléments de géodésie

Sébastien GUILLAUME

Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion du Canton de Vaud

Institut d'ingénierie du territoire

Yverdon-les-Bains

2019

Table des matières

I Systèmes de coordonnées	5
1 Introduction	7
2 Systèmes de coordonnées cartésiennes	9
2.1 Coordonnées cartésiennes standards	9
2.2 Coordonnées cartésiennes dans 2 systèmes	11
2.2.1 Exemple	12
2.3 Transformations rigides	13
2.4 Matrices de rotations tridimensionnelles	14
2.4.1 La convention de Cardan (x-y-z)	15
2.4.2 La convention d'Euler (z-x-z)	16
2.4.3 Matrice de rotation à partir de 1 axe fixe et 1 angle de rotation . . .	16
2.4.4 Exemple	17
2.5 Transformations de similitude	17
3 Systèmes de coordonnées sphériques	19
4 Systèmes de coordonnées ellipsoïdales	21
4.1 L'ellipsoïde de révolution	21
4.2 L'ellipse dans le plan vertical ($\mathbf{e}_w, \mathbf{e}_z$)	23
4.2.1 Relations entre les paramètres a, b, e, f	23
4.2.2 Calcul des coordonnées w et z pour un point de l'ellipse	24
4.3 Coordonnées cartésiennes (x, y, z) et ellipsoïdales (λ, φ)	27
4.4 Coordonnées cartésiennes (x, y, z) et ellipsoïdales (λ, φ, h)	28
5 Systèmes de coordonnées projetées	33
5.1 Exemple introductif / la projection plate-carrée	34
5.1.1 Distances dans le plan de projection	35
5.1.2 Distances sur la sphère	36
5.1.3 Comparaison des distances planimétriques et sphériques	38
5.1.4 Comparaison des surfaces	39
5.1.5 Comparaison de l'azimut sphérique et du gisement dans le plan . . .	39
5.1.6 Image dans le plan, d'un cercle sur la sphère	40
5.2 Tenseurs métriques	43
5.2.1 Tenseurs métriques des surfaces de références	43
5.2.2 Tenseurs métriques des coordonnées projetées	48
5.3 Indicatrice de Tissot	52
5.3.1 Conformité d'une projection	53

5.3.2	Equivalence d'une projection	54
5.4	Classes de projections	54
5.4.1	Projections cylindriques	55
5.4.2	Projections coniques	55
5.4.3	Projections azimutales	55
5.5	Projection de Mercator sphérique normale	55
5.5.1	Cordonnées sphériques $(\lambda, \phi) \rightarrow$ Cordonnées projetées (E, N)	56
5.5.2	Cordonnées projetées $(E, N) \rightarrow$ Cordonnées sphériques (λ, ϕ)	57
5.5.3	Loxodrome	57
5.5.4	Orthodrome	57
5.6	Projections obliques	62
5.7	Projection de Mercator sphérique oblique	64
5.8	Projection de Mercator sphérique transverse	66
5.9	Projection de Mercator ellipsoïdale normale	67
5.9.1	Cordonnées ellipsoïdales $(\lambda, \varphi) \rightarrow$ Cordonnées projetées (E, N)	67
5.9.2	Cordonnées projetées $(E, N) \rightarrow$ Cordonnées ellipsoïdales (λ, φ)	68
5.10	Projection de Mercator ellipsoïdale oblique	68
5.11	Projection de Mercator ellipsoïdale transverse	69
5.12	Projection UTM (Universal Transverse Mercator)	69
5.13	Double projection conforme cylindrique à axe oblique Suisse	69

Première partie

Systèmes de coordonnées

Chapitre 1

Introduction

Cette partie traite des systèmes de coordonnées principaux utilisés en géodésie. Ils regroupent les concepts mathématiques indispensables à l'identification et à la paramétrisation univoque d'un point dans l'espace. Ils représentent le socle mathématique des systèmes et cadres de références qui seront traités dans les prochaines parties.

Chapitre 2

Systèmes de coordonnées cartésiennes

Les systèmes de coordonnées cartésiennes sont les systèmes les plus simples et les plus aisés à aborder mathématiquement. Ils sont définis par une origine \mathbf{o} et 3 vecteurs orthonormaux ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$), appelés aussi vecteurs de bases, sur lesquels sont associés les coordonnées cartésiennes (x, y, z) . Un point quelconque de l'espace tridimensionnel peut donc être identifié et localisé de façon univoque par ses coordonnées (x, y, z) et la connaissance des vecteurs de bases $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ associés à ces dernières. Vectoriellement, un point \mathbf{x} quelconque de l'espace est défini par :

$$\mathbf{x} = \mathbf{o} + x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y + z \cdot \mathbf{e}_z \quad (2.1)$$

Cette relation est vraie dans tous les systèmes de coordonnées pourvu que les composantes des vecteurs de base et d'origine soit donnés dans le même système de coordonnées. Elle peut aussi s'écrire sous forme de produit matricielle par :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{o} + (\mathbf{e}_x \quad \mathbf{e}_y \quad \mathbf{e}_z) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{x_x} & e_{y_x} & e_{z_x} \\ e_{x_y} & e_{y_y} & e_{z_y} \\ e_{x_z} & e_{y_z} & e_{z_z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{o} + \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec la matrice orthonormale \mathbf{T} .

2.1 Coordonnées cartésiennes standards

Dans le cas de figure le plus simple, si l'origine \mathbf{o} et les vecteurs de bases $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ ne sont pas définis par rapport à un autre système de coordonnées, leurs composantes sont

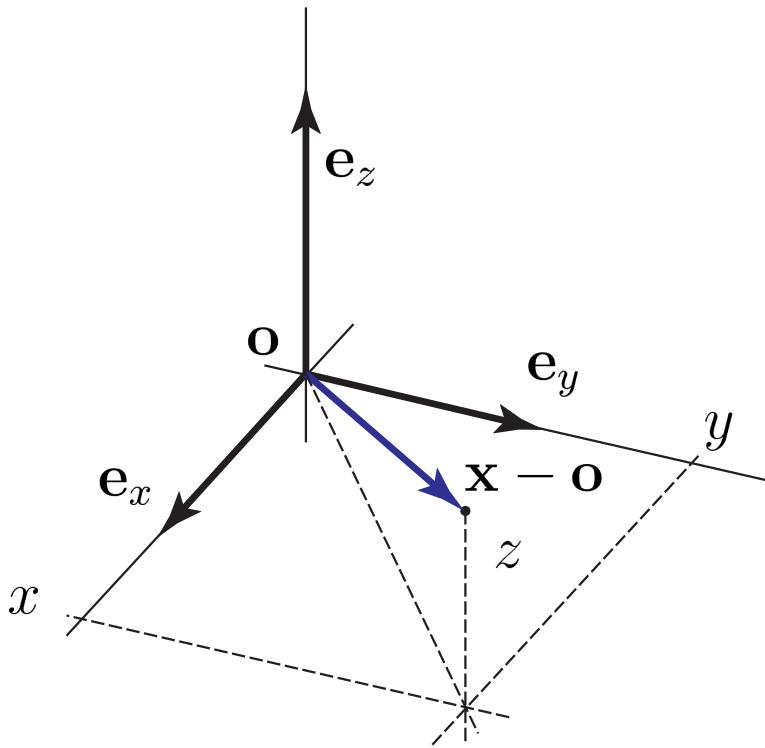


Figure 2.1 – Système de coordonnées cartésiennes.

données simplement par :

$$\mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Et nous pouvons donc directement écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

ce qui permet d'associer directement les coordonnées (x, y, z) au vecteur \mathbf{x} , sans donner explicitement les vecteurs de base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ et l'origine \mathbf{o} :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

2.2 Coordonnées cartésiennes dans 2 systèmes

L'intérêt de définir correctement les vecteurs de bases d'un système de coordonnées devient évident lorsque l'on doit travailler avec plusieurs systèmes de coordonnées. Par exemple, lorsque l'on cherche à transformer les coordonnées entre les systèmes. Prenons un exemple avec 2 systèmes de coordonnées cartésiennes :

1. Le premier est défini par son origine \mathbf{o}^I , et ses vecteurs de bases $(\mathbf{e}_x^I, \mathbf{e}_y^I, \mathbf{e}_z^I)$
2. Le deuxième est défini par son origine \mathbf{o}^{II} , et ses vecteurs de bases $(\mathbf{e}_x^{II}, \mathbf{e}_y^{II}, \mathbf{e}_z^{II})$

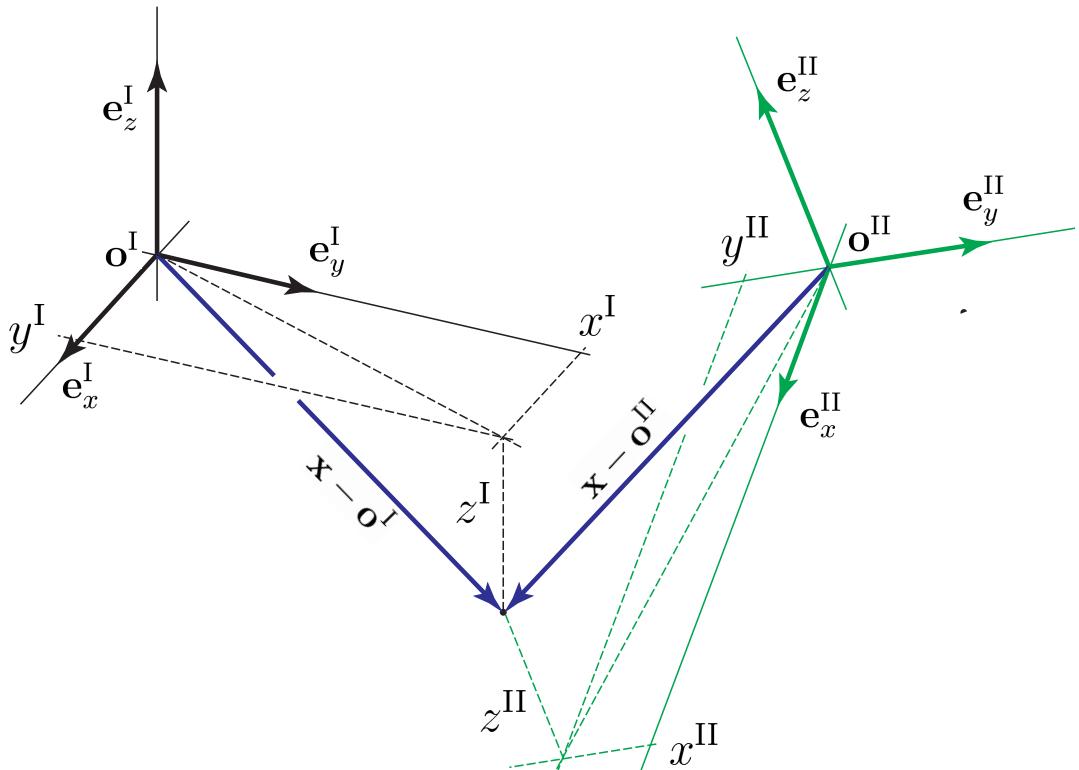


Figure 2.2 – Deux systèmes de coordonnées cartésiennes.

Un point quelconque \mathbf{x} peut être donné soit dans le premier système :

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{o}^I + x^I \cdot \mathbf{e}_x^I + y^I \cdot \mathbf{e}_y^I + z^I \cdot \mathbf{e}_z^I \\ &= \mathbf{o}^I + \mathbf{T}^I \cdot \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \\ z^I \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.6}$$

soit dans le deuxième système :

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{o}^{II} + x^{II} \cdot \mathbf{e}_x^{II} + y^{II} \cdot \mathbf{e}_y^{II} + z^{II} \cdot \mathbf{e}_z^{II} \\ &= \mathbf{o}^{II} + \mathbf{T}^{II} \cdot \begin{pmatrix} x^{II} \\ y^{II} \\ z^{II} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.7}$$

en combinant les équations 2.6 et 2.7 nous avons :

$$\mathbf{x} = \mathbf{o}^I + \mathbf{T}^I \cdot \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \\ z^I \end{pmatrix} = \mathbf{o}^{II} + \mathbf{T}^{II} \cdot \begin{pmatrix} x^{II} \\ y^{II} \\ z^{II} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

et il est possible d'exprimer les coordonnées du deuxième système (x^{II}, y^{II}, z^{II}) en fonction des coordonnées du premier système (x^I, y^I, z^I) ainsi que des composantes des vecteurs d'origines et de bases des deux systèmes $(\mathbf{o}^I, \mathbf{e}_x^I, \mathbf{e}_y^I, \mathbf{e}_z^I)$ et $(\mathbf{o}^{II}, \mathbf{e}_x^{II}, \mathbf{e}_y^{II}, \mathbf{e}_z^{II})$:

$$\begin{pmatrix} x^{II} \\ y^{II} \\ z^{II} \end{pmatrix} = (\mathbf{T}^{II})^{-1} \cdot (\mathbf{o}^I - \mathbf{o}^{II}) + (\mathbf{T}^{II})^{-1} \cdot \mathbf{T}^I \cdot \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \\ z^I \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Dans notre cas de figure, les matrices \mathbf{T}^I et \mathbf{T}^{II} sont orthonormées. Ainsi, leur inverse est simplement égale à leur transposée. Et nous avons finalement :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x^{II} \\ y^{II} \\ z^{II} \end{pmatrix} = (\mathbf{T}^{II})^T \cdot (\mathbf{o}^I - \mathbf{o}^{II}) + (\mathbf{T}^{II})^T \cdot \mathbf{T}^I \cdot \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \\ z^I \end{pmatrix}} \quad (2.10)$$

2.2.1 Exemple

Nous connaissons les coordonnées cartésiennes d'un point dans le système I :

$$\begin{pmatrix} x^I \\ y^I \\ z^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.0 \\ 6.0 \\ 4.0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

et nous voulons déterminer les coordonnées de ce point dans le système II. Le premier système est défini comme étant un système cartésien standard avec :

$$\mathbf{o}^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_x^I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_y^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Le deuxième système est défini comme étant un autre système cartésien orthonormé :

$$\mathbf{o}^{II} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_x^{II} = \begin{pmatrix} +0.8660 \\ +0.1710 \\ +0.4698 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_y^{II} = \begin{pmatrix} +0.000 \\ +0.9397 \\ -0.3420 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z^{II} = \begin{pmatrix} -0.5000 \\ +0.2962 \\ +0.8138 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Tout d'abord, vérifions que les deux systèmes sont bien orthonormés. Les modules sont bien unitaires :

$$|\mathbf{e}_x^I| = 1.000 \quad |\mathbf{e}_y^I| = 1.000 \quad |\mathbf{e}_z^I| = 1.000 \quad (2.14)$$

$$|\mathbf{e}_x^{II}| = 1.000 \quad |\mathbf{e}_y^{II}| = 1.000 \quad |\mathbf{e}_z^{II}| = 1.000 \quad (2.15)$$

reste à vérifier qu'ils sont bien orthogonaux entre eux, c'est à dire que les produits suivants sont nuls :

$$\mathbf{e}_x^I \cdot \mathbf{e}_y^I = 0.000 \quad \mathbf{e}_x^I \cdot \mathbf{e}_z^I = 0.000 \quad \mathbf{e}_y^I \cdot \mathbf{e}_z^I = 0.000 \quad (2.16)$$

$$\mathbf{e}_x^{\text{II}} \cdot \mathbf{e}_y^{\text{II}} = 0.000 \quad \mathbf{e}_x^{\text{II}} \cdot \mathbf{e}_z^{\text{II}} = 0.000 \quad \mathbf{e}_y^{\text{II}} \cdot \mathbf{e}_z^{\text{II}} = 0.000 \quad (2.17)$$

Ensuite, pour le premier système, nous pouvons former la matrice suivante :

$$\mathbf{T}^{\text{I}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x^{\text{I}} & \mathbf{e}_y^{\text{I}} & \mathbf{e}_z^{\text{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

et pour le deuxième système :

$$\mathbf{T}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x^{\text{II}} & \mathbf{e}_y^{\text{II}} & \mathbf{e}_z^{\text{II}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.8660 & +0.000 & -0.5000 \\ +0.1710 & +0.9397 & +0.2962 \\ +0.4698 & -0.3420 & +0.8138 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Nous avons donc tous les éléments qui nous permettent de calculer les coordonnées dans le système II avec l'équation 2.10 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^{\text{II}} \\ y^{\text{II}} \\ z^{\text{II}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} +0.8660 & +0.1710 & +0.4698 \\ +0.000 & +0.9397 & -0.3420 \\ -0.5000 & +0.2962 & +0.8138 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2.0 \\ -1.0 \\ -3.0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +0.8660 & +0.1710 & +0.4698 \\ +0.000 & +0.9397 & -0.3420 \\ -0.5000 & +0.2962 & +0.8138 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5.0 \\ 6.0 \\ 4.0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3.9230 \\ 4.3564 \\ 0.7948 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.3 Transformations rigides

Dans la section précédente, avec l'équation 2.10, nous avons vu comment calculer les coordonnées $(x^{\text{II}}, y^{\text{II}}, z^{\text{II}})$, associées au système de coordonnées II, lorsque nous connaissons les coordonnées $(x^{\text{I}}, y^{\text{I}}, z^{\text{I}})$ de ce même point dans le système de coordonnées I, ainsi que les vecteurs d'origines et de bases des 2 systèmes orthonormés $(\mathbf{o}^{\text{I}}, \mathbf{e}_x^{\text{I}}, \mathbf{e}_y^{\text{I}}, \mathbf{e}_z^{\text{I}})$ et $(\mathbf{o}^{\text{II}}, \mathbf{e}_x^{\text{II}}, \mathbf{e}_y^{\text{II}}, \mathbf{e}_z^{\text{II}})$.

Dans cette section, nous allons voir une autre méthode qui nous permet de faire cette transformation de façon équivalente, mais sans connaître de façon explicite les vecteurs d'origines et de bases. En effet, les coordonnées des systèmes I et II sont reliées par une translation et une rotation tridimensionnelle. En reprenant l'équation 2.10 :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{II}} \\ y^{\text{II}} \\ z^{\text{II}} \end{pmatrix} = \underbrace{(\mathbf{T}^{\text{II}})^T \cdot (\mathbf{o}^{\text{I}} - \mathbf{o}^{\text{II}})}_{\mathbf{t}_I^{\text{II}}} + \underbrace{(\mathbf{T}^{\text{II}})^T \cdot \mathbf{T}^{\text{I}}}_{\mathbf{R}_I^{\text{II}}} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{I}} \\ y^{\text{I}} \\ z^{\text{I}} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

nous pouvons voir 2 termes apparaître. Un vecteur constant qui s'additionne, qui est en fait un vecteur de translation tridimensionnelle :

$$\mathbf{t}_I^{\text{II}} = (\mathbf{T}^{\text{II}})^T \cdot (\mathbf{o}^{\text{I}} - \mathbf{o}^{\text{II}}) = \begin{pmatrix} t_I^{\text{II},x} \\ t_I^{\text{II},y} \\ t_I^{\text{II},z} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

et une matrice orthonormée qui multiplie le vecteur des coordonnées dans le système I, qui est en fait une matrice rotation tridimensionnelle :

$$\mathbf{R}_I^{II} = (\mathbf{T}^{II})^T \cdot \mathbf{T}^I = \begin{pmatrix} r_{I 11}^{II} & r_{I 12}^{II} & r_{I 13}^{II} \\ r_{I 21}^{II} & r_{I 22}^{II} & r_{I 23}^{II} \\ r_{I 31}^{II} & r_{I 32}^{II} & r_{I 33}^{II} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

et donc :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x^{II} \\ y^{II} \\ z^{II} \end{pmatrix} = \mathbf{t}_I^{II} + \mathbf{R}_I^{II} \cdot \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \\ z^I \end{pmatrix}} \quad (2.24)$$

les indices I^{II} signifient que ce sont une translation et une rotation qui permettent de passer du système I au système II. Ces indices sont parfois nécessaires pour lever toute ambiguïté sur la direction de la transformation. Néanmoins, ils sont souvent négligés lorsque le contexte le permet.

Si l'on regarde le vecteur de translation \mathbf{t}_I^{II} de plus près, nous voyons qu'il a 3 composantes indépendantes, en x, y, z , et que pour le construire, nous avons besoin de connaître ses 3 valeurs. En ce qui concerne la matrice de rotation \mathbf{R}_I^{II} , nous voyons qu'elle a 9 composantes, mais pas indépendantes les unes des autres. En effet, nous savons que c'est une matrice orthonormée qui peut être paramétrisée avec seulement 3 paramètres indépendants soit :

- 3 rotations dans l'espace.
- 1 axe de rotation (vecteur normé) et un angle par rapport à cet axe.

2.4 Matrices de rotations tridimensionnelles

Pour une matrice de rotation \mathbf{R}_I^{II} donnée, les 3 rotations qui la paramétrisent ne sont hélas pas uniques. Elles dépendent de la convention utilisée. En d'autres termes, si la convention n'est pas précisée, nous pouvons aussi dire que pour 3 angles donnés, nous pouvons construire plusieurs matrices de rotations. Voyons les 2 conventions les plus utilisées en géodésie :

1. La convention de Cardan ($x-y-z$), avec les angles (α, β, γ) .
2. La convention d'Euler ($z-x-z$), avec les angles (φ, θ, ψ) .

Elles sont toutes les deux basées sur les matrices de rotations de base qui correspondent à des rotations autour des axes qui correspondent aux composantes x, y et z . Nous pouvons

donc définir :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_x(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_y(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_z(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.25}$$

2.4.1 La convention de Cardan (x-y-z)

La convention de Cardan est très répandue. Notamment en navigation, où les angles de rotations sont nommés de la façon suivante :

- α = le roulis "roll"
- β = le tangage "pitch"
- γ = le lacet "yaw"

Elle consiste à faire 3 rotations selon les axes x, y et finalement z . Il est important de noter que les axes x, y, z sont dits "tournants" car les rotations sont appliquées sur des coordonnées de systèmes intermédiaires qui ont été "tournés" par les rotations précédentes :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_I^{II}(\alpha, \beta, \gamma) &= \mathbf{R}_z(\gamma) \cdot \mathbf{R}_y(\beta) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta & \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha & -\cos \gamma \sin \beta \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \\ -\sin \gamma \cos \beta & -\sin \gamma \sin \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha & \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha \\ \sin \beta & -\cos \beta \sin \alpha & \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.26}$$

Il est également possible de retrouver les angles de Cardan si l'on connaît la matrice de rotation \mathbf{R}_I^{II} :

$$\alpha = \begin{cases} -\text{atan2}\left(\frac{r_{32}}{\cos \beta}, \frac{r_{33}}{\cos \beta}\right) & \text{si : } r_{31} \neq -1, \text{ ou : } r_{31} \neq +1 \\ +\text{atan2}(r_{12}, r_{13}) & \text{si : } r_{31} = -1 \\ +\text{atan2}(-r_{12}, -r_{13}) & \text{si : } r_{31} = +1 \end{cases}\tag{2.27}$$

$$\beta = \begin{cases} +\arcsin(r_{31}) & \text{si : } r_{31} \neq -1, \text{ ou : } r_{31} \neq +1 \\ -90^\circ & \text{si : } r_{31} = -1 \\ +90^\circ & \text{si : } r_{31} = +1 \end{cases}\tag{2.28}$$

$$\gamma = \begin{cases} -\text{atan2}\left(\frac{r_{21}}{\cos \beta}, \frac{r_{11}}{\cos \beta}\right) & \text{si : } r_{31} \neq -1, \text{ou : } r_{31} \neq +1 \\ +0^\circ & \text{si : } r_{31} = -1 \\ +0^\circ & \text{si : } r_{31} = +1 \end{cases} \quad (2.29)$$

2.4.2 La convention d'Euler (z-x-z)

La convention d'Euler est également bien répandue, notamment en astronomie, car elle modélise naturellement la précession ainsi que la nutation. Elle consiste à faire 3 rotations selon les axes z , puis x et finalement z . Il est important de noter que comme pour dans la convention de Cardan, les axes sont également dits "tournants" :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_I^{II}(\varphi, \theta, \psi) &= \mathbf{R}_z(\psi) \cdot \mathbf{R}_x(\theta) \cdot \mathbf{R}_z(\varphi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \\ -\cos \psi \cos \varphi - \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Il est également possible de retrouver les angles d'Euler si l'on connaît la matrice de rotation \mathbf{R}_I^{II} :

$$\varphi = \begin{cases} 180^\circ - \text{atan2}(r_{31}, r_{32}) & \text{si : } r_{33} \neq -1, \text{ou : } r_{33} \neq +1 \\ +\frac{\text{atan2}(r_{12}, r_{11})}{r_{33}} & \text{si : } r_{33} = -1, \text{ou : } r_{33} = +1 \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\theta = \begin{cases} \arccos(r_{33}) & \text{si : } r_{33} \neq -1, \text{ou : } r_{33} \neq +1 \\ 90^\circ \cdot (1 - r_{33}) & \text{si : } r_{33} = -1, \text{ou : } r_{33} = +1 \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\psi = \begin{cases} +\text{atan2}(r_{13}, r_{23}) & \text{si : } r_{33} \neq -1, \text{ou : } r_{33} \neq +1 \\ +0^\circ & \text{si : } r_{33} = -1, \text{ou : } r_{33} = +1 \end{cases} \quad (2.33)$$

2.4.3 Matrice de rotation à partir de 1 axe fixe et 1 angle de rotation

Une matrice de rotation tridimensionnelle peut aussi se paramétriser selon un axe de rotation \mathbf{n} et un angle de rotation ω autour de cet axe. Sans démonstration, nous avons :

$$\mathbf{R}_I^{II}(\mathbf{n}, \omega) = \cos \omega \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \sin \omega \cdot \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} + (1 - \cos \omega) \cdot \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & n_y^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

qui est aussi appelée la formule de rotation de Rodrigues. Il est également possible de retrouver l'axe et l'angle de rotation si l'on connaît la matrice de rotation \mathbf{R}_I^{II} :

$$\omega = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \quad (2.35)$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2 \cdot \sin \omega} \cdot \begin{pmatrix} r_{23} - r_{32} \\ r_{31} - r_{13} \\ r_{12} - r_{21} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

(2.37)

2.4.4 Exemple

Les paramétrisations suivantes génèrent la même matrice de rotation \mathbf{R}_I^{II} :

1. En convention de Cardan :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_I^{II}(\alpha, \beta, \gamma) &= \mathbf{R}_I^{II}(10^\circ, 20^\circ, 30^\circ) \\ &= \begin{pmatrix} +0.813798 & +0.543838 & -0.204874 \\ -0.469846 & +0.823173 & +0.318796 \\ +0.34202 & -0.163176 & +0.925417 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.38)$$

2. En convention d'Euler :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_I^{II}(\varphi, \theta, \psi) &= \mathbf{R}_I^{II}(+64.4944^\circ, +22.2687^\circ, -32.7268^\circ) \\ &= \begin{pmatrix} +0.813798 & +0.543838 & -0.204874 \\ -0.469846 & +0.823173 & +0.318796 \\ +0.34202 & -0.163176 & +0.925417 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.39)$$

3. Avec 1 axe et 1 angle :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_I^{II}(\mathbf{n}, \omega) &= \mathbf{R}_I^{II}\left(\begin{pmatrix} +0.38601 \\ +0.43801 \\ +0.81187 \end{pmatrix}, +38.6300^\circ\right) \\ &= \begin{pmatrix} +0.813798 & +0.543838 & -0.204874 \\ -0.469846 & +0.823173 & +0.318796 \\ +0.34202 & -0.163176 & +0.925417 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.5 Transformations de similitude

Comme nous allons le voir dans un prochain chapitre, les transformations de similitude permettent de relier différents systèmes de références géodésiques. Elles se basent sur les transformations solides. Elles ne diffèrent que par un facteur d'échelle m qui est appliqué à la matrice de rotation \mathbf{R}_I^{II} . En partant de l'équation 2.24, nous avons simplement :

$$\begin{pmatrix} x^{II} \\ y^{II} \\ z^{II} \end{pmatrix} = \mathbf{t}_I^{II} + m \cdot \mathbf{R}_I^{II} \cdot \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \\ z^I \end{pmatrix}$$

(2.41)

Chapitre 3

Systèmes de coordonnées sphériques

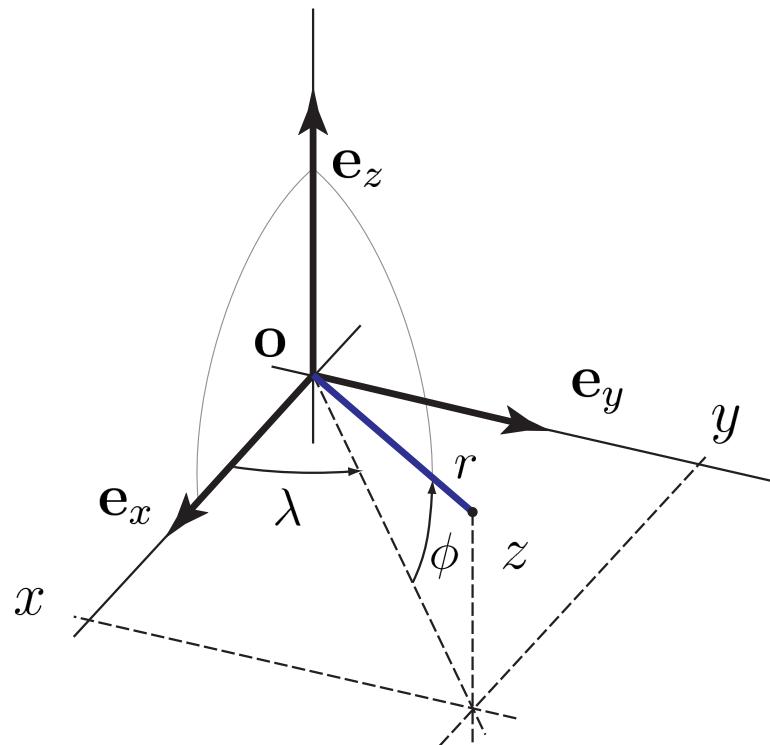


Figure 3.1 – Système de coordonnées sphériques.

Un système de coordonnées sphériques identifie un point quelconque de l'espace à l'aide de 3 coordonnées dites sphériques :

1. Le rayon r .
2. la longitude sphérique λ .
3. la latitude sphérique ϕ .

Ces 3 coordonnées sphériques sont toujours associées à un système de coordonnées cartésiennes ($\mathbf{o}, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$). Ainsi, les coordonnées cartésiennes de ce système peuvent être déterminées

grâce aux coordonnées sphériques par la relation suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} x(r, \lambda, \phi) &= r \cdot \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ y(r, \lambda, \phi) &= r \cdot \cos \phi \cdot \sin \lambda \\ z(r, \lambda, \phi) &= r \cdot \sin \phi \end{aligned}} \quad (3.1)$$

A l'inverse, si l'on veut déterminer les coordonnées sphériques à partir des coordonnées cartésiennes, nous avons :

$$\boxed{\begin{aligned} r(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \lambda(x, y, z) &= \arctan \frac{y}{x} \\ \phi(x, y, z) &= \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}} \quad (3.2)$$

Remarque

Les formules qui font appel à l'opérateur arctan sont à utiliser avec prudence. En effet, l'ambiguïté du cadran doit être considérée. De plus, les dénominateurs ne doivent pas valoir 0. En pratique, lorsque les calculs numériques sont nécessaires, nous utilisons plutôt l'opérateur atan2 qui permet de s'affranchir de ces 2 problèmes :

$$\boxed{\begin{aligned} r(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \lambda(x, y, z) &= \text{atan2}(y, x) \\ \phi(x, y, z) &= \text{atan2}(z, \sqrt{x^2 + y^2}) \end{aligned}} \quad (3.3)$$

Chapitre 4

Systèmes de coordonnées ellipsoïdales

Nous traiterons ici uniquement des système de coordonnées ellipsoïdales de révolution¹. Ils jouent un rôle fondamental en géodésie. Ils sont préférables aux systèmes sphériques pour l'identification d'un point sur Terre. En effet, comme nous allons le voir, ils permettent de relier les systèmes de références globaux aux systèmes de références locaux (définis par rapport à la verticale physique) avec une précision acceptable pour la plupart des applications en géodésie. De plus, ils permettent d'approximer la surface de référence des altitudes physiques à +/- 100 mètres sur l'entier du globe. Un point est identifié de façon univoque par 3 coordonnées dites ellipsoïdales :

1. La longitude ellipsoïdale λ (parfois nommée L).
2. La latitude ellipsoïdale φ (parfois nommée B).
3. L'altitude ellipsoïdale h .

Ces 3 coordonnées ellipsoïdales sont toujours associées à un système de coordonnées cartésiennes ($\mathbf{o}, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$) ainsi qu'à deux paramètres qui définissent la forme de l'ellipsoïde de révolution de référence. Ces 2 paramètres peuvent être choisis de façon équivalente entre :

- Le demi-grand axe a et le demi-petit axe b de l'ellipsoïde de révolution .
- Le demi-grand axe a et l'aplatissement f de l'ellipsoïde de révolution .
- Le demi-grand axe a et l'excentricité e de l'ellipsoïde de révolution .

4.1 L'ellipsoïde de révolution

Un ellipsoïde de révolution est un cas particulier de l'ellipsoïde. Géométriquement, il est construit par la rotation d'une ellipse autour d'un de ses axe principal (a ou b). Il suffit donc de définir l'ellipse et d'identifier l'axe de rotation pour connaître sa forme. En géodésie, l'axe de rotation est le petit-axe de l'ellipse b et il est confondu avec le vecteur de base \mathbf{e}_z . Les vecteurs de bases \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y définissent alors le plan de l'équateur. Mathématiquement, l'ensemble des points de la surface de cet ellipsoïde de révolution satisfont l'équation suivante :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (4.1)$$

1. Il en existe d'autres qui se réfèrent à un ellipsoïde quelconque

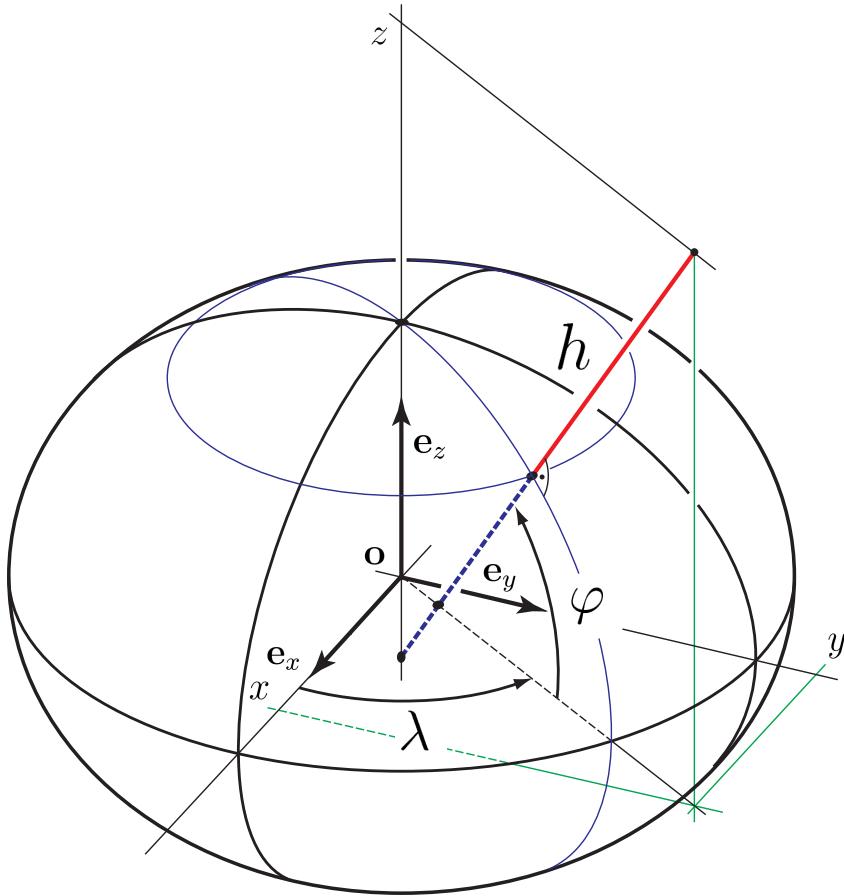


Figure 4.1 – Système de coordonnées ellipsoïdales.

En regardant de plus près cette équation, nous pouvons facilement confirmer notre intuition géométrique.

1. Dans le plan $z = 0$, l'équation 4.1 se simplifie :

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (4.2)$$

qui est l'équation d'un cercle centré à l'origine et de rayon a .

2. Dans n'importe quel plan horizontal $z = \text{cst}$, l'équation 4.1 se simplifie :

$$x^2 + y^2 = a^2 \cdot \left(1 - \frac{\text{cst}}{b^2}\right) \quad (4.3)$$

qui est l'équation de cercles centrés à l'origine et de rayon $a^2 \cdot \left(1 - \frac{\text{cst}}{b^2}\right)$.

3. en faisant le changement de variable suivant $w^2 = x^2 + y^2$, l'équation 4.1 se simplifie :

$$\frac{w^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (4.4)$$

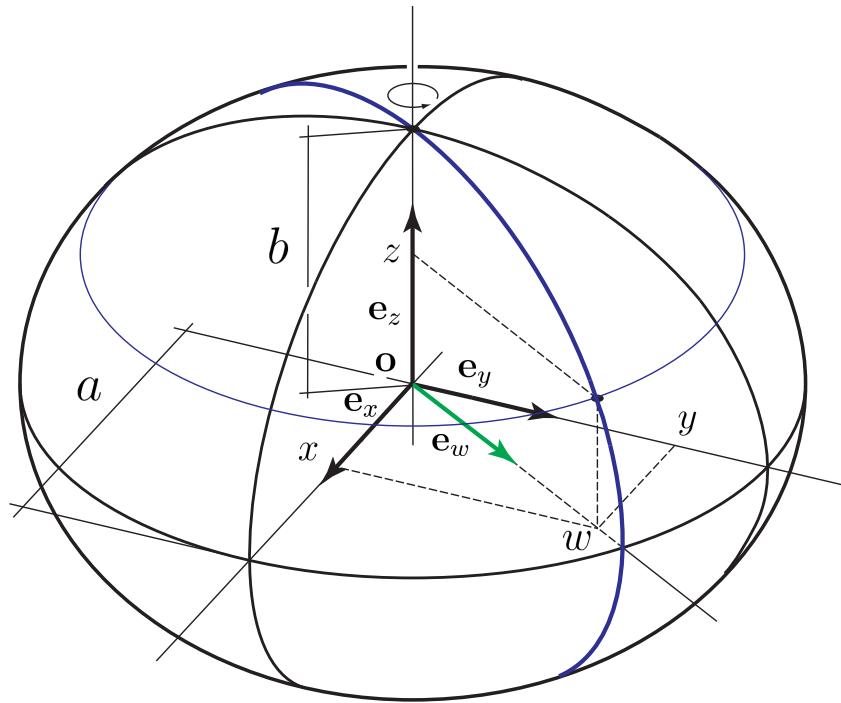


Figure 4.2 – Ellipsoïde de révolution.

qui représente l'équation d'une ellipse dans le plan vertical ($\mathbf{e}_w, \mathbf{e}_z$). Avec la direction :

$$\mathbf{e}_w = \frac{x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y}{|x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y|} \quad (4.5)$$

4.2 L'ellipse dans le plan vertical ($\mathbf{e}_w, \mathbf{e}_z$)

Nous allons tout d'abord établir les relations entre les paramètres qui permettent de définir la forme d'une ellipse de façon univoque.

4.2.1 Relations entre les paramètres a, b, e, f

Une ellipse est définie comme étant le lieu géométrique des points dont la somme des distances (d_1 et d_2) à deux points fixes (nommés foyers) est constante. Il existe une relation simple qui lie les deux demi-axes a et b avec la distance du centre au foyer c . En considérant le point de l'ellipse sur l'axe \mathbf{e}_z , il est facile de voir que :

$$\left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2 = b^2 + c^2 \quad (4.6)$$

De plus, lorsque nous considérons le point de l'ellipse sur l'axe \mathbf{e}_w , nous voyons que :

$$d_1 + d_2 = 2a \quad (4.7)$$

En combinant ces deux dernières équations, nous obtenons la relation suivante :

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (4.8)$$

et en isolant c (que l'on nomme aussi l'excentricité linéaire) :

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (4.9)$$

Nous pouvons dès lors calculer la première excentricité numérique e qui par définition vaut :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (4.10)$$

Finalement, en géodésie, nous définissons également l'aplatissement f par :

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (4.11)$$

De ces relations, nous pouvons facilement démontrer les équations suivantes :

$$b^2 = a^2 \cdot (1 - e^2) \quad (4.12)$$

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \quad (4.13)$$

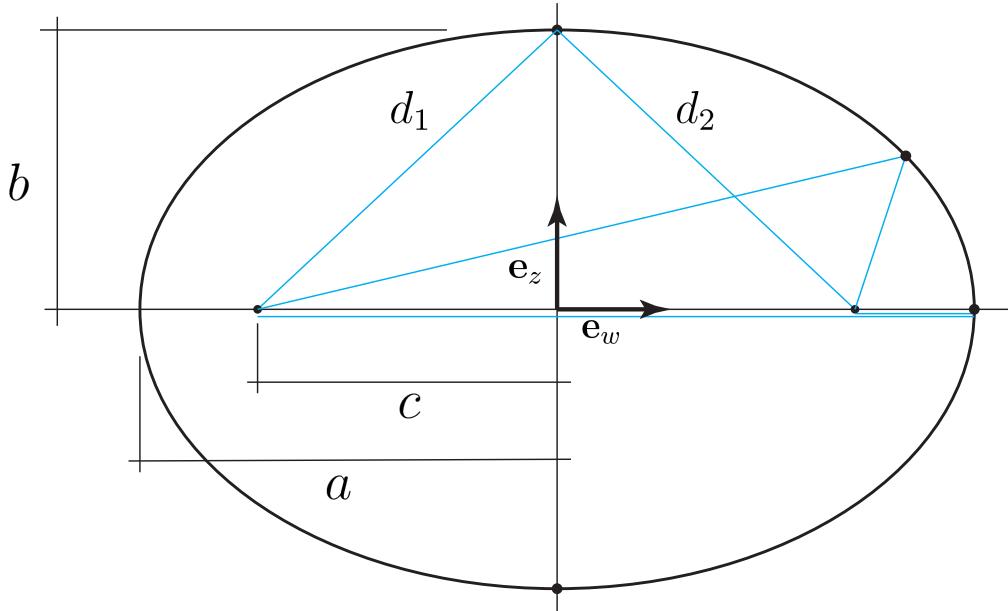


Figure 4.3 – Ellipse dans le plan (e_w, e_z) .

4.2.2 Calcul des coordonnées w et z pour un point de l'ellipse

Nous allons regarder de plus près les différentes relations entre les coordonnées (w, z) d'un point de l'ellipse et la coordonnées ellipsoïdales φ qui lui est associée. Tout d'abord

il est important de définir la latitude ellipsoïdale φ précisément. Elle représente l'angle entre le vecteur de base \mathbf{e}_w (qui représente l'équateur) et la normale à l'ellipse. Cette paramétrisation est la plus adéquate pour les applications géodésiques car elle contient implicitement la direction de la pesanteur ainsi que du plan horizontal local, ceci à l'approximation ellipsoïdale près.

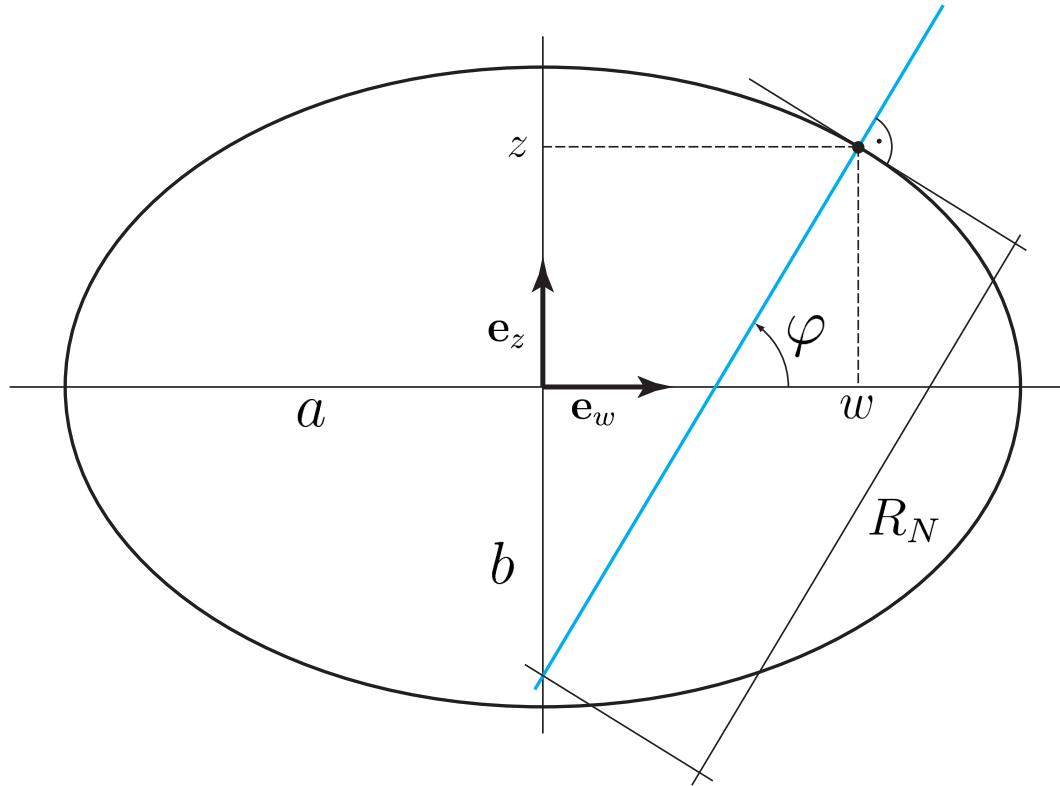


Figure 4.4 – Ellipse dans le plan ($\mathbf{e}_w, \mathbf{e}_z$).

Tout d'abord, exprimons la coordonnée z en fonction de w . Ceci peut être fait en isolant z dans l'équation 4.4 :

$$z = b \cdot \sqrt{1 - \frac{w^2}{a^2}} \quad (4.14)$$

Nous savons aussi que la dérivée de z par rapport à w est liée à φ par :

$$\frac{dz}{dw} = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \quad (4.15)$$

Calculons donc la fonction dérivée de 4.14 :

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{dw} &= b \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{w^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2w}{a^2}\right) \\
 &= -w \cdot \frac{b}{a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{a^2}}} \\
 &= -w \cdot \frac{b}{a^2} \cdot \frac{b}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{a^2}}} \\
 &= -w \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{b \cdot \sqrt{1 - \frac{w^2}{a^2}}} \\
 &= -w \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{z} \\
 &= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{w}{z} \\
 &= -(1 - e^2) \cdot \frac{w}{z}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

En combinant les équations 4.15 et 4.14 nous trouvons que :

$$-\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = -(1 - e^2) \cdot \frac{w}{z} \tag{4.17}$$

et en isolant z :

$$z = (1 - e^2) \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot w \tag{4.18}$$

Nous avons donc une équation qui relie les coordonnées z et w avec la latitude φ ainsi que la première excentricité numérique e . En introduisant cette relation 4.18 dans l'équation canonique de l'ellipse 4.4 nous pourrons exprimer w en fonction de φ de a et de e uniquement :

$$\frac{w^2}{a^2} + \frac{\left[(1 - e^2) \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot w\right]^2}{b^2} = 1 \tag{4.19}$$

ou encore :

$$\frac{w^2}{a^2} + \frac{(1 - e^2)^2 \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \cdot w^2}{a^2 \cdot (1 - e^2)} = 1 \tag{4.20}$$

qui se simplifie :

$$\frac{w^2}{a^2} + \frac{(1 - e^2) \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \cdot w^2}{a^2} = 1 \tag{4.21}$$

puis :

$$w^2 + (1 - e^2) \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \cdot w^2 = a^2 \tag{4.22}$$

qui permet d'isoler w^2 :

$$w^2 = \frac{a^2}{1 + (1 - e^2) \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}} \quad (4.23)$$

et qui peut encore se simplifier :

$$\begin{aligned} w^2 &= \frac{a^2}{\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} + (1 - e^2) \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}} \\ &= \frac{a^2}{\frac{\cos^2 \varphi + (1 - e^2) \cdot \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}} \\ &= \frac{a^2 \cdot \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + (1 - e^2) \cdot \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{a^2 \cdot \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - e^2 \cdot \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{a^2 \cdot \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi} \end{aligned} \quad (4.24)$$

et finalement :

$$w = \frac{a \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \quad (4.25)$$

De façon analogue, il est possible de trouver :

$$z = \frac{a \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \quad (4.26)$$

La relation obtenue en 4.25 permet aussi de déterminer le paramètre R_N qui représente le rayon de courbure de la section normale à l'ellipsoïde (et non pas le rayon de courbure de l'ellipse). Nous voyons que :

$$w = R_N \cdot \cos \varphi \quad (4.27)$$

et donc :

$$R_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \quad (4.28)$$

ce qui permet aussi de simplifier l'équation 4.26 par :

$$z = R_N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi \quad (4.29)$$

4.3 Coordonnées cartésiennes (x, y, z) et ellipsoïdales (λ, φ)

Nous allons tout d'abord à exprimer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) d'un point de la surface de l'ellipsoïde en fonction des coordonnées ellipsoïdales (λ, φ) . Pour cela, nous pouvons décomposer la coordonnée w en coordonnées (x, y) grâce à la longitude λ :

$$\begin{aligned} x &= w \cdot \cos \lambda \\ y &= w \cdot \sin \lambda \end{aligned} \quad (4.30)$$

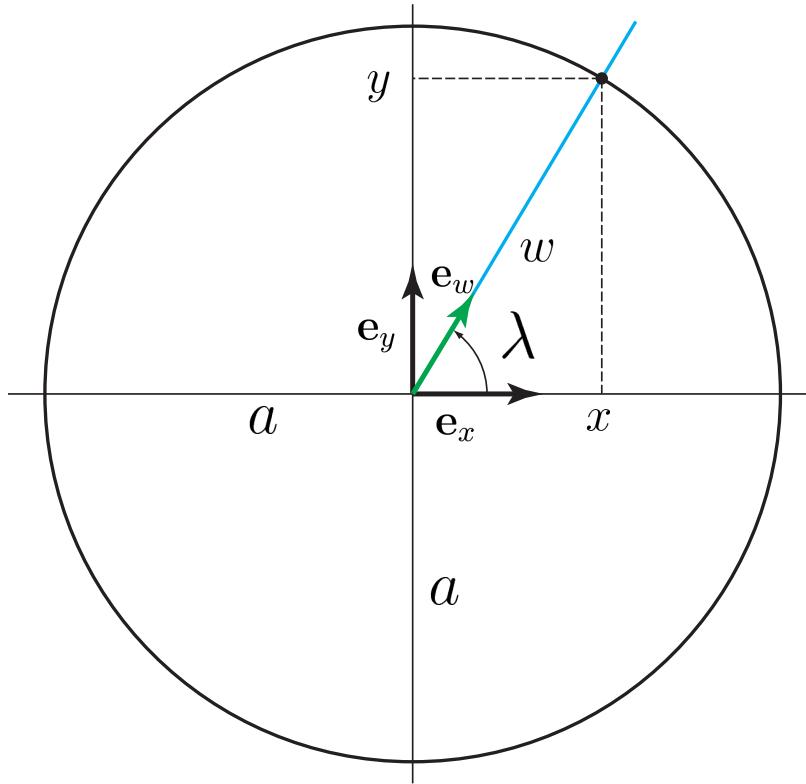


Figure 4.5 – Cercle dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$.

et en combinant avec 4.27 et 4.29

$$\boxed{\begin{aligned} x(\lambda, \varphi) &= R_N \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ y(\lambda, \varphi) &= R_N \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ z(\lambda, \varphi) &= R_N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi \end{aligned}} \quad (4.31)$$

4.4 Coordonnées cartésiennes (x, y, z) et ellipsoïdales (λ, φ, h)

Afin de pouvoir calculer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) d'un point quelconque connaissant les coordonnées ellipsoïdales (λ, φ, h) , il est nécessaire de définir 2 vecteurs \mathbf{q} et $h \cdot \mathbf{n}$, qui, additionnés donneront le vecteur position recherché \mathbf{p} . Le vecteur \mathbf{q} est le vecteur position de \mathbf{p} projeté orthogonalement sur la surface de l'ellipsoïde. Ses composantes sont données par l'équation 4.31 :

$$\mathbf{q} = R_N \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ (1 - e^2) \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

En ce qui concerne le vecteur normal à l'ellipsoïde \mathbf{n} , ses composantes sont données par :

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

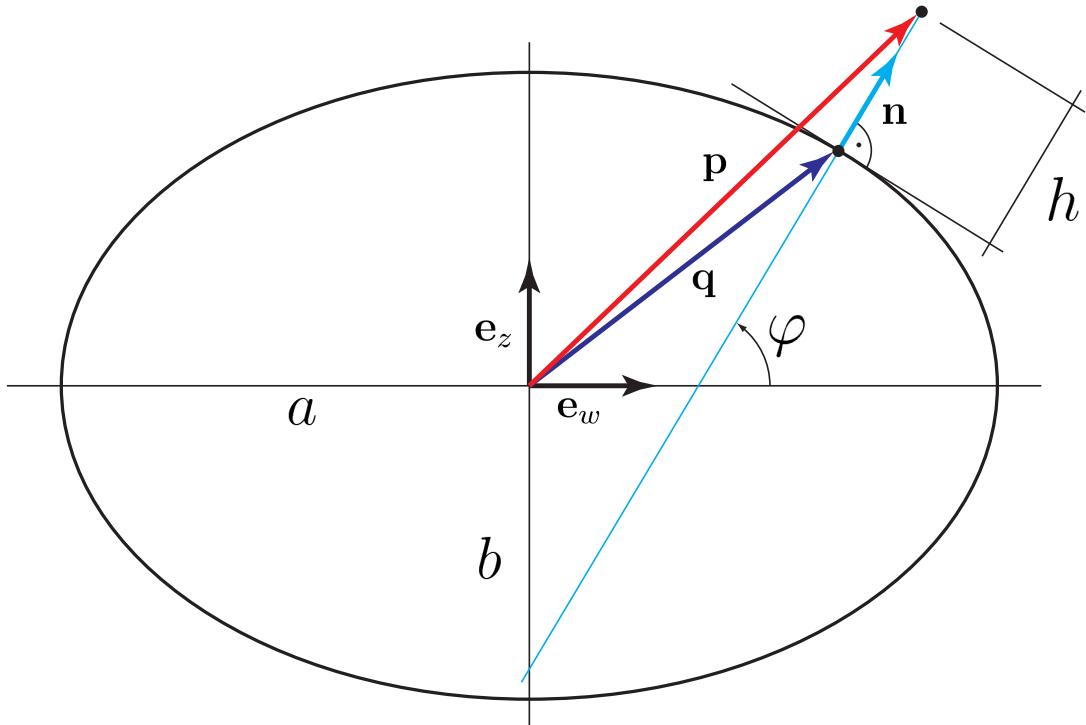


Figure 4.6 – Point hors de la surface de l'ellipsoïde.

Et donc le vecteur \mathbf{p} est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{q} + h \cdot \mathbf{n} \\ &= R_N \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ (1 - e^2) \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.34)$$

ce qui finalement nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} x(\lambda, \varphi, h) &= (R_N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ y(\lambda, \varphi, h) &= (R_N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ z(\lambda, \varphi, h) &= [R_N \cdot (1 - e^2) + h] \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$R_N(a, e, \varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}}$$

A l'inverse, nous pouvons trouver les coordonnées ellipsoïdales (λ, φ, h) à partir des coordonnées cartésiennes (x, y, z) . A partir des équations 4.35, nous pouvons trouver facilement la longitude λ :

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{(R_N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda}{(R_N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda} \\ &= \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} = \tan \lambda \end{aligned} \quad (4.36)$$

d'où :

$$\lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (4.37)$$

Pour trouver φ et h nous pouvons écrire :

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{[R_N \cdot (1 - e^2) + h] \cdot \sin \varphi}{(R_N \cdot +h) \cdot \cos \varphi} \quad (4.38)$$

en isolant φ nous trouvons :

$$\begin{aligned} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{R_N \cdot +h}{[R_N \cdot (1 - e^2) + h]} \\ &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R_N}{R_N+h} \cdot e^2} \end{aligned} \quad (4.39)$$

et donc :

$$\varphi = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R_N}{R_N+h} \cdot e^2}\right) \quad (4.40)$$

Pour trouver h nous pouvons écrire :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = (R_N + h) \cdot \cos \varphi \quad (4.41)$$

ce qui nous permet d'isoler h :

$$h = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \varphi} - R_N \quad (4.42)$$

et finalement, nous avons

$$\begin{aligned} \lambda(x, y, z) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \varphi(x, y, z) &= \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R_N}{R_N+h} \cdot e^2}\right) \\ h(x, y, z) &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \varphi} - R_N \\ R_N(a, e, \varphi) &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Remarque

Comme pour le cas des coordonnées sphériques, il est important de remplacer la fonction arctan par la fonction atan2. De plus, il est important de noter que seule la longitude peut être calculée directement en connaissant les coordonnées (x, y) . Les 3 grandeurs restantes (R_N, φ, h) sont toutes inter-dépendantes. Il est donc nécessaires de les calculer itérativement selon le schéma suivant :

$$\textcircled{1} \quad \lambda = \text{atan2}(y, x)$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} h_i = 0 \\ h_{i-1} = 1 \\ R_{N_i} = 1 \end{cases}$$

$\textcircled{3}$ boucle d'itération tant que $|h_i - h_{i-1}| > 0.000001$:

$$\textcircled{1} \quad h_{i-1} = h_i$$

$$\textcircled{2} \quad \varphi_i = \text{atan2} \left[z, \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(1 - \frac{R_{N_i}}{R_{N_i} + h_i} \cdot e^2 \right) \right]$$

$$\textcircled{3} \quad R_{N_i} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_i}}$$

$$\textcircled{4} \quad h_i = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \varphi_i} - R_{N_i}$$

Chapitre 5

Systèmes de coordonnées projetées

Les systèmes de coordonnées projetées jouent un rôle fondamental en topométrie, en cartographie et en géographie en général. Ils sont indispensables lorsque l'on veut représenter sur un plan des points connus sur la surface de la sphère terrestre ou sur la surface d'un ellipsoïde de révolution. L'opération consiste donc à faire correspondre n'importe quel point d'une surface de référence (la sphère ou l'ellipsoïde de révolution) à un point d'une surface de projection (en général un plan, parfois aussi une sphère¹). Mathématiquement, cela consiste à définir les fonctions suivantes :

Surface de référence	Surface de projection	Formules de projection
Sphère	Plan	$E(\lambda_{\text{sph}}, \phi_{\text{sph}})$ $N(\lambda_{\text{sph}}, \phi_{\text{sph}})$
Ellipsoïde de révolution	Plan	$E(\lambda_{\text{ell}}, \varphi_{\text{ell}})$ $N(\lambda_{\text{ell}}, \varphi_{\text{ell}})$
Ellipsoïde de révolution	Sphère	$\lambda_{\text{sph}}(\lambda_{\text{ell}}, \varphi_{\text{ell}})$ $\phi_{\text{sph}}(\lambda_{\text{ell}}, \varphi_{\text{ell}})$

avec :

$\lambda_{\text{sph}}, \phi_{\text{sph}}$ [rad] = la longitude et la latitude sphérique.

$\lambda_{\text{ell}}, \varphi_{\text{ell}}$ [rad] = la longitude et la latitude ellipsoïdale.

E, N [m] = les coordonnées Est et Nord (orthonormées) dans le plan de projection.

Fondamentalement, lorsque les surfaces de référence et de projection n'ont pas la même courbure intrinsèque, cette opération ne peut pas se faire en conservant toutes les propriétés géométriques de la surface de référence. Il n'existe donc pas une méthode de projection qui soit optimale pour toutes les applications. En effet, si nous devons créer une carte qui permet de représenter fidèlement les surfaces [m^2] des différents pays, nous n'utiliserons pas la même projection que pour une créer une carte qui facilite la navigation maritime.

1. si la surface de référence est un ellipsoïde de révolution

5.1 Exemple introductif / la projection plate-carrée

En guise d'introduction, prenons un cas de figure très simple. Nous choisissons la surface de référence comme étant une sphère de rayon $R = 6'380'000$ [m], et notre surface de projection un plan. Définissons les formules de projections qui permettent de calculer les coordonnées E et N à partir de la longitude λ et de la latitude ϕ sphérique :

$$\begin{aligned} E(\lambda, \phi) &= R \cdot \lambda \\ N(\lambda, \phi) &= R \cdot \phi \end{aligned} \tag{5.1}$$

Cette projection simple est appelée *plate-carrée*. Elle est appelée ainsi car l'image, dans



Figure 5.1 – Sphère terrestre avec les méridiens et les parallèles dessinés avec des intervalles réguliers de $\Delta\lambda = \Delta\phi = 10^\circ$.

le plan de projection, des méridiens et des parallèles forme un pavage carré (Figure 5.2). Maintenant que nous avons une carte sur laquelle nous pouvons projeter n'importe quel point connu en coordonnées sphériques, nous aimeraisons savoir si il est possible de mesurer directement des distances, des angles, des surfaces sur la carte. Correspondent-elles aux distances, angles et surfaces réelles qui sont obtenues en les mesurant directement sur la sphère ? Pour contrôler ceci, nous avons besoin d'outils qui nous permettent de calculer ces différentes grandeurs géométriques sur la sphère et dans le plan de projection. Concentrons nous d'abord sur les distances.

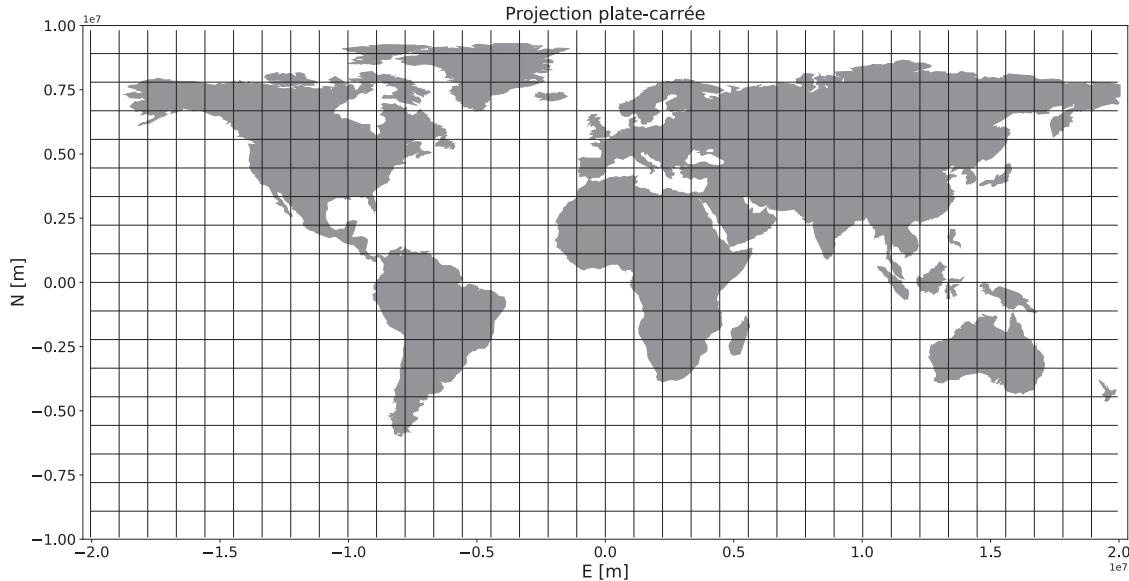


Figure 5.2 – Projection plate-carrée.

5.1.1 Distances dans le plan de projection

Si nous connaissons les coordonnées de deux points $\mathbf{A} = (E_{\mathbf{A}}, N_{\mathbf{A}})$ et $\mathbf{B} = (E_{\mathbf{B}}, N_{\mathbf{B}})$, et puisque nous sommes dans un système cartésien orthonormé, la distance $s_{\mathbf{AB}}$ dans le plan de projection se calcule simplement par :

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{AB}} &= \sqrt{(E_{\mathbf{B}} - E_{\mathbf{A}})^2 + (N_{\mathbf{B}} - N_{\mathbf{A}})^2} \\ &= \sqrt{\Delta E_{\mathbf{AB}}^2 + \Delta N_{\mathbf{AB}}^2} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Si les points entre lesquels nous voulons calculer une distance ne sont pas donnés explicitement mais que connaissons les accroissements de coordonnées (dE , dN) qui les séparent, alors nous pouvons aussi écrire l'accroissement en distance dS correspondant :

$$dS = \sqrt{dE^2 + dN^2} \quad (5.3)$$

Dans notre problématique, nous ne connaissons pas directement les accroissements dE et dN mais plutôt les accroissements en longitude et latitude $d\lambda$ et $d\phi$. Il est donc nécessaire de calculer dE et dN en fonction de $d\lambda$ et $d\phi$. De façon générale, si nous avons :

$$\begin{aligned} E(\lambda, \phi) \\ N(\lambda, \phi) \end{aligned} \quad (5.4)$$

alors :

$$\begin{aligned} dE(\lambda, \phi) &= \frac{\partial E}{\partial \lambda} \cdot d\lambda + \frac{\partial E}{\partial \phi} \cdot d\phi \\ dN(\lambda, \phi) &= \frac{\partial N}{\partial \lambda} \cdot d\lambda + \frac{\partial N}{\partial \phi} \cdot d\phi \end{aligned} \quad (5.5)$$

qui dans notre cas valent :

$$\begin{aligned} dE(\lambda, \phi) &= R \cdot d\lambda \\ dN(\lambda, \phi) &= R \cdot d\phi \end{aligned} \quad (5.6)$$

et donc nous pouvons trouver la valeur de l'accroissement de distance dans le plan de projection dS engendré par des accroissement de longitude $d\lambda$ et latitude $d\phi$ en injectant 5.6 dans l'équation 5.3 :

$$dS = R \cdot \sqrt{d\lambda^2 + d\phi^2} \quad (5.7)$$

5.1.2 Distances sur la sphère

Pour calculer une distance sur la sphère entre deux points très proches, nous pouvons nous faciliter la tâche en approximant localement la sphère par un plan tangent défini par :

- un vecteur tangent au parallèle local dt_ϕ ,
- un vecteur tangent au méridien local dt_λ ,

puis ensuite calculer la distance dans ce plan.

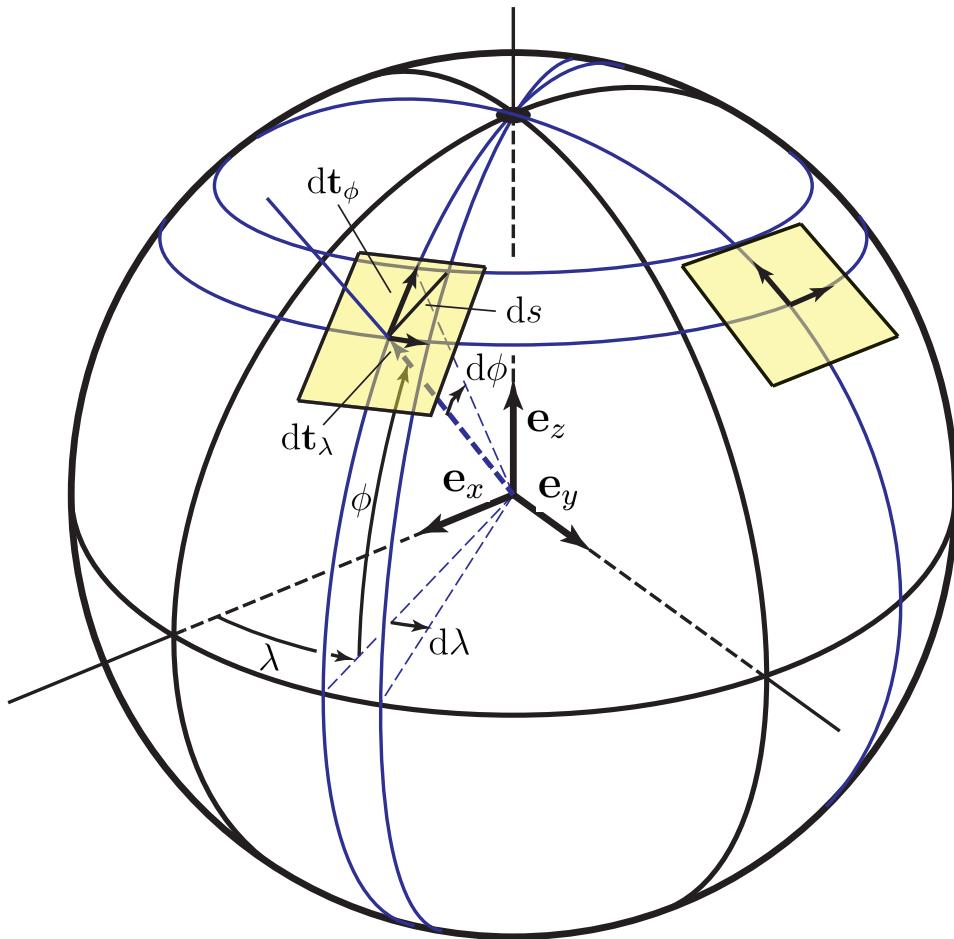


Figure 5.3 – Vecteurs tangents dt_λ et dt_ϕ et accroissements de la distance sur la sphère ds .

Avant de pouvoir calculer les vecteurs tangents dt_λ et dt_ϕ , définissons les coordonnées tridimensionnelles d'un point sur la sphère dans un système de coordonnées cartésiennes

(vecteurs de bases orthonormés) :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x(\lambda, \phi) \\ y(\lambda, \phi) \\ z(\lambda, \phi) \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ \cos \phi \cdot \sin \lambda \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

ensuite, les vecteurs tangents sont donnés par :

$$d\mathbf{t}_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial z(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \cdot d\lambda = R \cdot \begin{pmatrix} -\cos \phi \cdot \sin \lambda \\ \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d\lambda \quad (5.9)$$

$$d\mathbf{t}_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \end{pmatrix} \cdot d\phi = R \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \cdot \cos \lambda \\ -\sin \phi \cdot \sin \lambda \\ \cos \phi \end{pmatrix} \cdot d\phi \quad (5.10)$$

Vérifions maintenant que $d\mathbf{t}_\lambda$ et $d\mathbf{t}_\phi$ forment une base orthogonale. Ceci peut se faire en calculant leur produit scalaire :

$$\begin{aligned} d\mathbf{t}_\lambda \cdot d\mathbf{t}_\phi &= -\cos \phi \sin \lambda \cdot d\lambda \cdot (-\sin \phi \cos \lambda) \cdot d\phi + \cos \phi \cos \lambda \cdot d\lambda \cdot (-\sin \phi \sin \lambda) \cdot d\phi + 0 \cdot \cos \phi \cdot d\phi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

ceci nous permet nous permet d'appliquer le théorème de pythagore pour trouver l'acc-

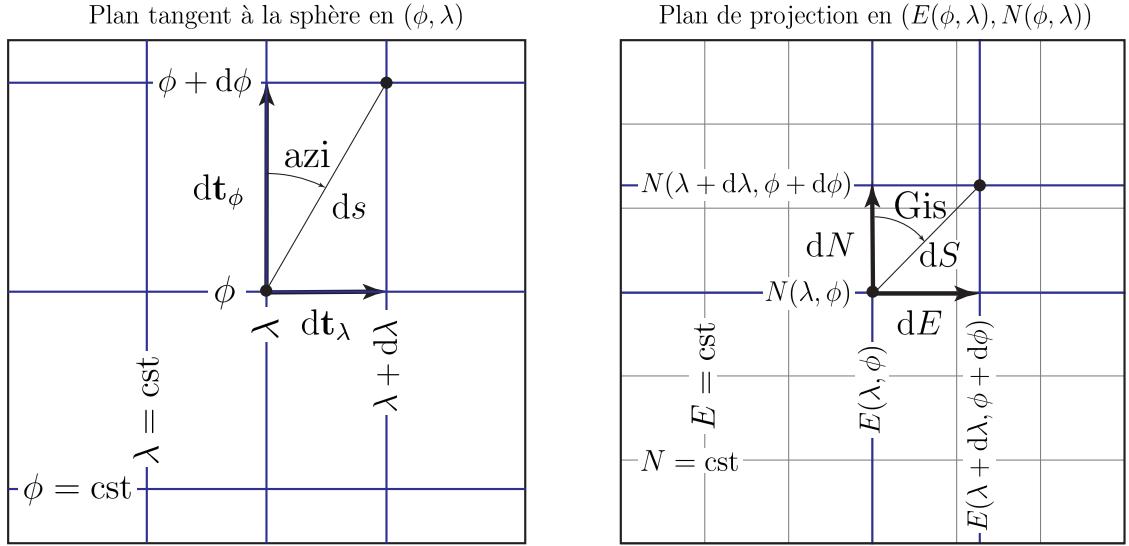


Figure 5.4 – (Gauche) plan tangent à la sphère en un point (λ, ϕ) , vecteurs tangents $d\mathbf{t}_\lambda$, $d\mathbf{t}_\phi$ et accroissement de la distance sur la sphère ds . (Droite) plan de projection en un point (E, N) avec les méridiens et parallèles projetés en bleu, et la grille des coordonnées (E, N) en gris.

croissement de distance sur la sphère ds à partir des normes des vecteur tangents :

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{|d\mathbf{t}_\lambda|^2 + |d\mathbf{t}_\phi|^2} \\ &= R \cdot \sqrt{\cos^2 \phi \cdot d\lambda^2 + d\phi^2} \end{aligned} \quad (5.12)$$

avec :

$$\begin{aligned} |\mathrm{d}\mathbf{t}_\lambda|^2 &= R^2 \cdot (\cos^2 \phi \cdot \sin^2 \lambda + \cos^2 \phi \cdot \cos^2 \lambda) \cdot \mathrm{d}\lambda^2 \\ &= R^2 \cdot \cos^2 \phi \cdot (\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda) \cdot \mathrm{d}\lambda^2 \\ &= R^2 \cdot \cos^2 \phi \cdot \mathrm{d}\lambda^2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

et :

$$\begin{aligned} |\mathrm{d}\mathbf{t}_\phi|^2 &= R^2 \cdot (\sin^2 \phi \cdot \cos^2 \lambda + \sin^2 \phi \cdot \sin^2 \lambda + \cos^2 \phi) \cdot \mathrm{d}\phi^2 \\ &= R^2 \cdot (\sin^2 \phi \cdot (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) + \cos^2 \phi) \cdot \mathrm{d}\phi^2 \\ &= R^2 \cdot (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \cdot \mathrm{d}\phi^2 \\ &= R^2 \cdot \mathrm{d}\phi^2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Remarque

Une méthode générale de calcul de la distance $\mathrm{d}s$ est possible même si les vecteurs tangents $\mathrm{d}\mathbf{t}_\lambda$ et $\mathrm{d}\mathbf{t}_\phi$ ne sont pas orthogonaux. Il suffit de les additionner au préalable et d'en prendre la norme :

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\mathbf{t}_\lambda + \mathrm{d}\mathbf{t}_\phi| \quad (5.15)$$

5.1.3 Comparaison des distances planimétriques et sphériques

A partir des équations 5.7 et 5.12, nous pouvons calculer le rapport des distances planimétriques et sphériques :

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s} = \frac{R \cdot \sqrt{\mathrm{d}\lambda^2 + \mathrm{d}\phi^2}}{R \cdot \sqrt{\cos^2 \phi \cdot \mathrm{d}\lambda^2 + \mathrm{d}\phi^2}} \quad (5.16)$$

Nous pouvons constater plusieurs propriétés intéressantes :

1. De façon générale, nous voyons que le facteur d'échelle varie selon la latitude ϕ ainsi que selon la direction ($\mathrm{d}\lambda, \mathrm{d}\phi$) dans laquelle la distance $\mathrm{d}s$ est considérée.
2. Lorsque qu'on l'on considère des points sur l'équateur ($\phi = 0$), nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s} = \frac{R \cdot \sqrt{\mathrm{d}\lambda^2 + \mathrm{d}\phi^2}}{R \cdot \sqrt{\mathrm{d}\lambda^2 + \mathrm{d}\phi^2}} = 1 \quad (5.17)$$

Dans ce cas, toutes les distances sont conservées, peut importe la direction de $\mathrm{d}s$.

3. Si l'on considère uniquement des distances $\mathrm{d}s$ dans la direction du méridien local ($\mathrm{d}\lambda = 0$), nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s} = \frac{R \cdot \sqrt{\mathrm{d}\phi^2}}{R \cdot \sqrt{\mathrm{d}\phi^2}} = 1 \quad (5.18)$$

Dans ce cas, les distances, dans la direction du méridien local, sont partout conservées.

4. Si l'on considère uniquement des distances ds dans la direction du parallèle local ($d\phi = 0$), nous avons :

$$\frac{dS}{ds} = \frac{R \cdot \sqrt{d\lambda^2}}{R \cdot \sqrt{\cos^2 \phi \cdot d\lambda^2}} = \frac{1}{\cos \phi} \quad (5.19)$$

Dans ce cas, les distances, dans la direction du méridien local, ne sont pas conservées. Pour une petite distance sur la sphère ds donnée, la distance planimétrique dS correspondante croît comme l'inverse du cosinus de la latitude.

5.1.4 Comparaison des surfaces

Nous pouvons aussi comparer de petites surfaces sur la sphère da et dans leurs surfaces correspondantes dans le plan de projection dA . Elles se calculent également à l'aide des accroissements différentiels $|dt_\lambda|$ et $|dt_\phi|$ pour la sphère, et dE et dN dans le plan. Sur la sphère, puisque les vecteurs tangents dt_λ et dt_ϕ sont orthogonaux, nous avons simplement :

$$\begin{aligned} da &= |dt_\lambda| \cdot |dt_\phi| \\ &= R \cdot \cos \phi \cdot d\lambda \cdot R \cdot d\phi \\ &= R^2 \cdot \cos \phi \cdot d\lambda \cdot d\phi \end{aligned} \quad (5.20)$$

Dans le plan de projection, nous avons simplement :

$$\begin{aligned} dA &= dE \cdot dN \\ &= R \cdot d\lambda \cdot R \cdot d\phi \\ &= R^2 \cdot d\lambda \cdot d\phi \end{aligned} \quad (5.21)$$

et donc le rapport des surfaces se trouve par :

$$\begin{aligned} \frac{dA}{da} &= \frac{R^2 \cdot d\lambda \cdot d\phi}{R^2 \cdot \cos \phi \cdot d\lambda \cdot d\phi} \\ &= \frac{1}{\cos \phi} \end{aligned} \quad (5.22)$$

5.1.5 Comparaison de l'azimut sphérique et du gisement dans le plan

A l'aide des éléments différentiels sur la sphère dt_λ et dt_ϕ nous pouvons calculer l'azimut (azi) entre deux points séparés de $d\lambda$ et $d\phi$:

$$\begin{aligned} \text{azi} &= \arctan \left(\frac{|dt_\lambda|}{|dt_\phi|} \right) \\ &= \arctan \left(\frac{R \cdot \cos \phi \cdot d\lambda}{R \cdot d\phi} \right) \\ &= \arctan \left(\frac{\cos \phi \cdot d\lambda}{d\phi} \right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

et à l'aide des éléments différentiels dans le plan de projection dE et dN , nous pouvons calculer le gisement (Gis) entre deux points séparés de $d\lambda$ et $d\phi$:

$$\begin{aligned} \text{Gis} &= \arctan \left(\frac{dE}{dN} \right) \\ &= \arctan \left(\frac{R \cdot d\lambda}{R \cdot d\phi} \right) \\ &= \arctan \left(\frac{d\lambda}{d\phi} \right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Et donc la différence vaut :

$$\text{Gis} - \text{azi} = \arctan \left(\frac{d\lambda}{d\phi} \right) - \arctan \left(\frac{\cos \phi \cdot d\lambda}{d\phi} \right) \quad (5.25)$$

Nous pouvons constater plusieurs propriétés intéressantes :

1. De façon générale, nous voyons que la différence (Gis-azi) varie selon la latitude ϕ ainsi que selon la direction ($d\lambda, d\phi$).
2. Lorsque qu'on l'on considère des points sur l'équateur ($\phi = 0$), nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Gis} - \text{azi} &= \arctan \left(\frac{d\lambda}{d\phi} \right) - \arctan \left(\frac{d\lambda}{d\phi} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

ce qui veut dire que le nord géographique et le nord de la carte sont confondus. Attention, seules cette direction est conservée.

3. Lorsque qu'on l'on considère des directions le long du méridien ($d\lambda = 0$), nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Gis} - \text{azi} &= \arctan \left(\frac{0}{d\phi} \right) - \arctan \left(\frac{0}{d\phi} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

ce qui veut dire que sur l'équateur, l'azimut et le gisement dans n'importe quelle direction sont les mêmes. A l'équateur, et à l'équateur seulement, la projection plate-carrée est conforme.

5.1.6 Image dans le plan, d'un cercle sur la sphère

Afin de représenter graphiquement les déformations locales générées par une projection, il est très utile de d'appliquer la projection à un cercle calculé sur la surface de référence, et ainsi visuliser l'image de ce cercle dans le plan de projection. Voici comment réaliser cette opération pour notre projection plate-carrée.

La première étape consiste à être capable de calculer les coordonnées sphériques (λ_i, ϕ_i) de points sur un cercle de rayon ds centré en (λ_c, ϕ_c) . Nous allons considérer un cercle petit par rapport au rayon de la sphère R . Cela nous permet de travailler dans le plan

tangent défini par les vecteurs $(\mathbf{t}_\lambda, \mathbf{t}_\phi)$. De la figure 5.4 nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\sin(\text{azi}) &= \frac{|\mathbf{t}_\lambda|}{ds} \\ &= \frac{R \cdot \cos \phi \cdot d\lambda}{ds}\end{aligned}\quad (5.28)$$

et

$$\begin{aligned}\cos(\text{azi}) &= \frac{|\mathbf{t}_\phi|}{ds} \\ &= \frac{R \cdot d\phi}{ds}\end{aligned}\quad (5.29)$$

ce qui nous permet de trouver l'accroissement en $d\lambda$ et $d\phi$ en fonction de l'azimut azi et de la distance ds :

$$\begin{aligned}d\lambda &= \frac{1}{R \cdot \cos \phi} \cdot \sin(\text{azi}) \cdot ds \\ d\phi &= \frac{1}{R} \cdot \cos(\text{azi}) \cdot ds\end{aligned}\quad (5.30)$$

Finalement, les coordonnées sphériques d'un point i sur le cercle de rayon ds centré en (λ_c, ϕ_c) se calcule par :

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \lambda_c + d\lambda_i = \lambda_c + \frac{1}{R \cdot \cos \phi} \cdot \sin(\text{azi}_i) \cdot ds \\ \phi_i &= \phi_c + d\phi_i = \phi_c + \frac{1}{R} \cdot \cos(\text{azi}_i) \cdot ds\end{aligned}\quad (5.31)$$

La figure 5.5 représente la sphère avec des cercles de rayon $ds = 200$ km, calculés sur une grille régulière de 10° . Les cercles sont approximés par 20 points ($\Delta\text{azi} = 18^\circ$).

La deuxième étape est triviale et consiste à appliquer les formules de la projection aux cercles préalablement calculés. La figure 5.6 résulte de l'application de la projection plate-carrée sur les cercles représentés sur la figure 5.5. Nous voyons que les cercles de la surface de référence deviennent des ellipses dans le plan de projection. Nous avons la confirmation graphique des variations d'échelles de distances selon la position sur la sphère et selon la direction considérée. Ces ellipses sont communément appelées : *les indicatrices de Tissot*. En effet, il est possible de démontrer qu'un cercle infiniment petit sur une surface de référence données, se projetera toujours en une ellipse infiniment petite, peu importe la surface de référence et la projection considérée. Voyons maintenant comment il est possible de calculer les paramètres de ces indicateurs de Tissot efficacement.

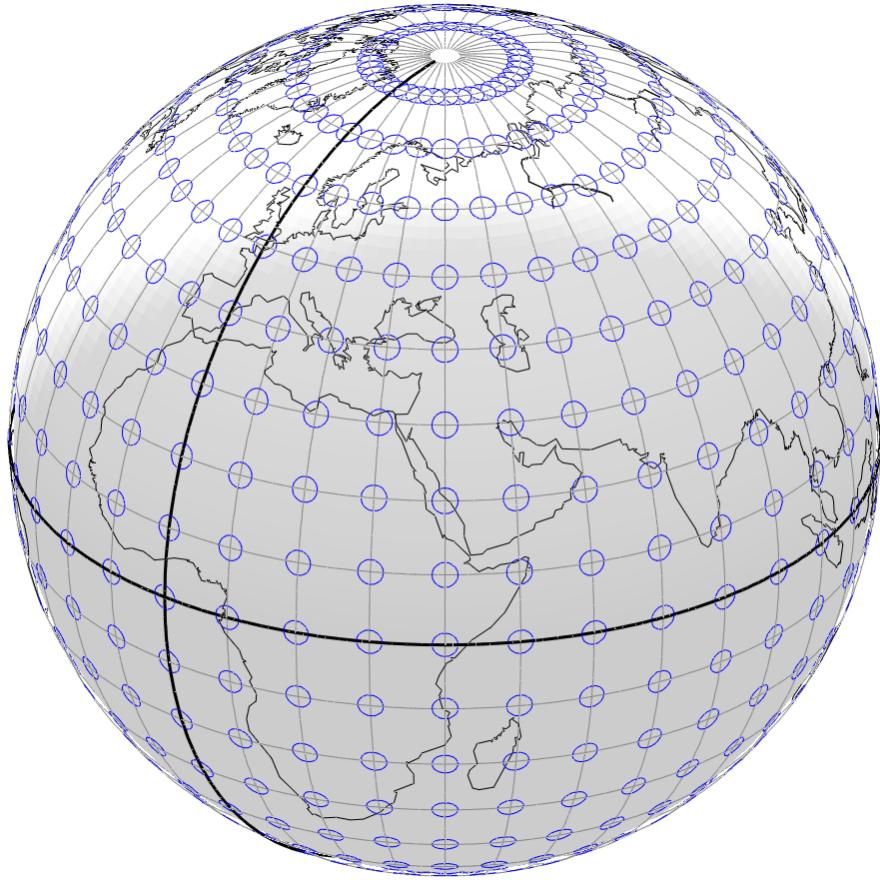


Figure 5.5 – Sphère terrestre avec une grille de cercles sphériques de rayons $ds = 200$ [km].

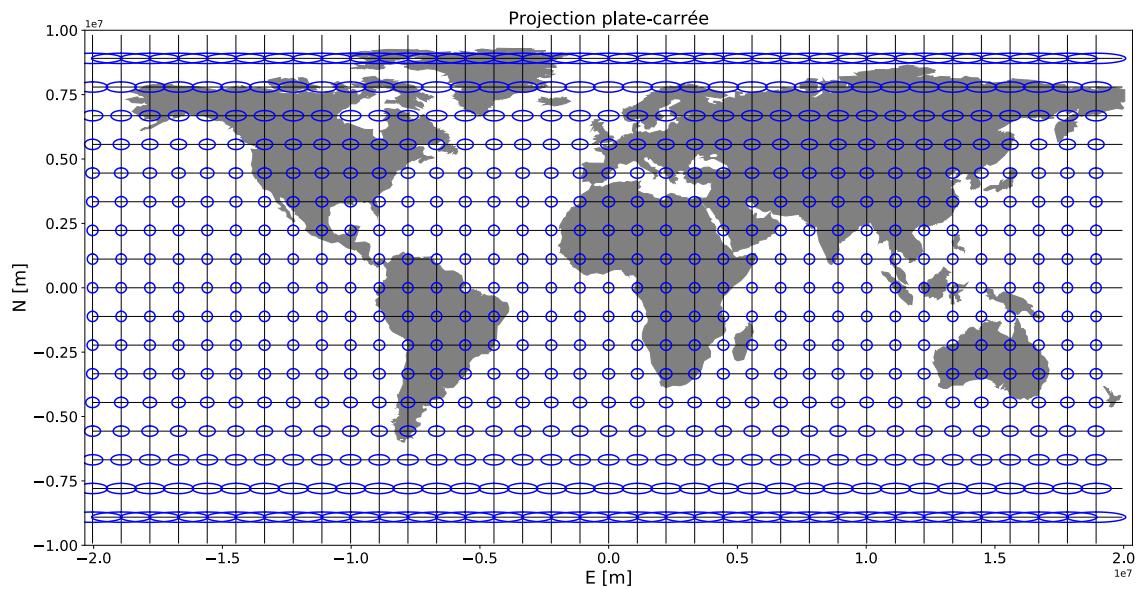


Figure 5.6 – Projection plate carrée avec indicatrices de Tissot.

5.2 Tenseurs métriques

Dans l'exemple introductif de la projection plate-carrée, nous avons vu que les mesures des distances sur la surface de référence ds , et sur la surface de projection dS sont les grandeurs principales utilisées pour l'analyse des déformations générées par la projection. Sur cette base, nous allons introduire un objet mathématique très utile, le tenseur métrique, qui permet de généraliser les mesures de distances, d'angles et de surfaces dans n'importe quelle système de coordonnées et pour n'importe quelle système de projection. Il nous permettra également de calculer les indicatrices de Tissot de façon élégante. Comme nous allons le voir, chaque surface de référence sera associée à un tenseur métrique différent. Cela sera également valable pour chaque projection.

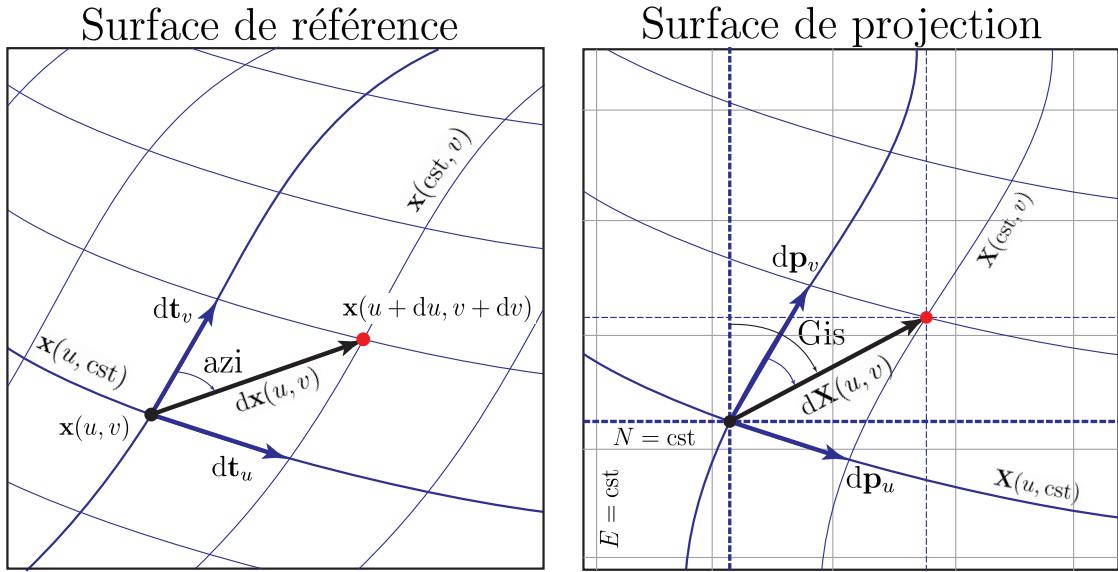


Figure 5.7 – Surface de référence et surface de projection.

5.2.1 Tenseurs métriques des surfaces de références

De façon générale, une surface de référence est définie par son vecteur position $\mathbf{x}(u, v)$ qui dépend de 2 paramètres (u, v) :

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

Comme nous l'avons vu dans l'exemple introductif, nous pouvons calculer deux vecteurs, dt_u et dt_v , tangents à la surface le long des lignes à paramètres constants. Le vecteur dt_u représente le vecteur de variation de position lorsque que nous faisons varier le vecteur position d'une quantité du :

$$dt_u(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} \end{pmatrix} \cdot du \quad (5.33)$$

Le vecteur $d\mathbf{t}_v$ représente le vecteur de variation de position lorsque que nous faisons varier le vecteur position d'une quantité dv :

$$d\mathbf{t}_v(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot dv \quad (5.34)$$

et en définissant :

$$\mathbf{t}_u(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{t}_v(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

nous pouvons aussi écrire :

$$\begin{aligned} d\mathbf{t}_u(u, v) &= \mathbf{t}_u(u, v) \cdot du \\ d\mathbf{t}_v(u, v) &= \mathbf{t}_v(u, v) \cdot dv \end{aligned} \quad (5.36)$$

et de façon plus générale, la vecteur de variation de position $d\mathbf{x}(u, v)$, peut s'écrire :

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}(u, v) &= d\mathbf{t}_u(u, v) + d\mathbf{t}_v(u, v) \\ &= \mathbf{t}_u(u, v) \cdot du + \mathbf{t}_v(u, v) \cdot dv \end{aligned} \quad (5.37)$$

Calcul de distances sur la surface de référence

Pour obtenir la distance ds , entre les points $\mathbf{x}(u, v)$ et $\mathbf{x}(u, v) + d\mathbf{x}(u, v)$, de façon générale, même si les vecteur tangents ne sont pas perpendiculaires, nous prenons le module du vecteur de variation de position :

$$\begin{aligned} ds &= |d\mathbf{x}| \\ &= |\mathbf{t}_u + \mathbf{t}_v| \end{aligned} \quad (5.38)$$

mais afin d'alléger les formules de la racine carrée, voyons plutôt comment se calcule ds^2 :

$$\begin{aligned} ds^2 &= |\mathbf{t}_u + \mathbf{t}_v|^2 \\ &= \left| \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} \end{pmatrix} \cdot du + \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot dv \right) \right|^2 \\ &= \left| \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv \\ \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \\ \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv \end{pmatrix} \right) \right|^2 \end{aligned} \quad (5.39)$$

et en développant :

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv \right)^2 \\
 &\quad + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \right)^2 \\
 &\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv \right)^2 \\
 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right] \cdot du^2 \\
 &\quad + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right] \cdot dv^2 \\
 &\quad + 2 \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot du \cdot dv
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

qui peut aussi s'écrire, en utilisant le produit scalaire des vecteurs tangents :

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dt_u \cdot dt_u + dt_v \cdot dt_v + 2 \cdot dt_u \cdot dt_v \\
 &= \mathbf{t}_u \cdot \mathbf{t}_u \cdot du^2 + \mathbf{t}_v \cdot \mathbf{t}_v \cdot dv^2 + 2 \cdot \mathbf{t}_u \cdot \mathbf{t}_v \cdot du \cdot dv
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

ou encore sous forme matricielle :

$$ds^2 = d\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u} \tag{5.42}$$

avec :

$$d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_u \cdot \mathbf{t}_u & \mathbf{t}_u \cdot \mathbf{t}_v \\ \mathbf{t}_v \cdot \mathbf{t}_u & \mathbf{t}_v \cdot \mathbf{t}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{uu} & t_{uv} \\ t_{uv} & t_{vv} \end{pmatrix} \tag{5.43}$$

et dont la matrice \mathbf{T} est en fait le *tenseur métrique* associé au système de coordonnées cartésien $\mathbf{x}(u, v)$.

Calcul d'angles sur la surface de référence

Pour obtenir l'angle α , entre deux directions, $d\mathbf{x}_1$ et $d\mathbf{x}_2$ sur la surface de référence, générées par les accroissements des paramètres $d\mathbf{u}_1$ et $d\mathbf{u}_2$, de façon générale, avec :

$$d\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} du_1 \\ dv_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} du_2 \\ dv_2 \end{pmatrix} \tag{5.44}$$

nous pouvons tout d'abord calculer les vecteurs sur la surface de référence :

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{x}_1 &= \mathbf{t}_u \cdot du_1 + \mathbf{t}_v \cdot dv_1 \\
 d\mathbf{x}_2 &= \mathbf{t}_u \cdot du_2 + \mathbf{t}_v \cdot dv_2
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

pour lesquels nous savons que leur produit scalaire est lié à l'angle spatial α par :

$$\cos \alpha = \frac{d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2}{|d\mathbf{x}_1| \cdot |d\mathbf{x}_2|} \tag{5.46}$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{t}_u \cdot d\mathbf{u}_1 + \mathbf{t}_v \cdot d\mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{t}_u \cdot d\mathbf{u}_2 + \mathbf{t}_v \cdot d\mathbf{v}_2)}{\sqrt{d\mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u}_1} \cdot \sqrt{d\mathbf{u}_2^T \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u}_2}} \quad (5.47)$$

et par une démonstration analogue au calcul de la distance, nous trouvons finalement :

$$\alpha = \arccos \left(\frac{d\mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u}_2}{\sqrt{d\mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u}_1} \cdot \sqrt{d\mathbf{u}_2^T \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u}_2}} \right) \quad (5.48)$$

Calcul d'azimuts sur la surface de référence

Pour obtenir l'azimut azi, d'une direction $d\mathbf{x}$ générée par l'accroissement des paramètres $d\mathbf{u}$, de façon générale, il suffit de considérer le cas particulier de l'équation 5.48 dans laquelle nous définissons $d\mathbf{x}_1 = dt_v$, ce qui nous permet de définir :

$$d\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ dv \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d\mathbf{u}_2 = d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

et après quelque simplification, voici la formule générale de l'azimut :

$$\alpha = \arccos \left(\frac{t_{12} \cdot du + t_{22} \cdot dv}{\sqrt{t_{22}} \cdot \sqrt{d\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u}}} \right) \quad \forall \quad \mathbf{T} \quad (5.50)$$

Attention, en utilisant l'équation 5.50, la problématique des quadrants n'est pas résolue. Néanmoins, lorsque la métrique de la surface de référence \mathbf{T} est diagonale, c'est à dire que les vecteurs tangents \mathbf{t}_u et \mathbf{t}_v sont orthogonaux ($t_{12} = 0$), nous pouvons utiliser la formule de la tangente :

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\sqrt{t_{11}} \cdot du}{\sqrt{t_{22}} \cdot dv} \right) \quad \forall \quad \mathbf{T} \text{ symétrique} \quad (5.51)$$

et lorsque l'on veut réaliser des calculs numériques avec un traitement rigoureux des quadrants :

$$\alpha = \text{atan2}(\sqrt{t_{11}} \cdot du, \sqrt{t_{22}} \cdot dv) \quad \forall \quad \mathbf{T} \text{ symétrique} \quad (5.52)$$

Calcul de surfaces sur la surface de référence

Pour obtenir la surface da du parallélogramme généré par les 2 vecteurs tangents à la surface dt_u et dt_v , de façon générale, nous savons que leur produit vectoriel est lié à da par :

$$da = |dt_u \times dt_v| \quad (5.53)$$

avec :

$$\begin{aligned} dt_u &= \mathbf{t}_u \cdot du \\ dt_v &= \mathbf{t}_v \cdot dv \end{aligned} \quad (5.54)$$

ce qui nous permet de développer l'équation 5.53 :

$$da = |\mathbf{t}_u \cdot du \times \mathbf{t}_v \cdot dv| \quad (5.55)$$

et par une démonstration analogue au calcul de la distance, nous trouvons finalement :

$$da = \sqrt{\det(\mathbf{T})} \cdot du \cdot dv \quad (5.56)$$

Tenseur métrique des coordonnées sphériques

Lorsque la surface de référence est une sphère paramétrée avec les coordonnées sphériques (λ, ϕ) nous avons :

$$\begin{aligned} u &= \lambda \\ v &= \phi \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} d\lambda \\ d\phi \end{pmatrix}$$

le vecteur position :

$$\mathbf{x}(\lambda, \phi) = \begin{pmatrix} x(\lambda, \phi) \\ y(\lambda, \phi) \\ z(\lambda, \phi) \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ \cos \phi \cdot \sin \lambda \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

les vecteurs tangents sont donnés par :

$$\mathbf{t}_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial z(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} -\cos \phi \cdot \sin \lambda \\ \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

et :

$$\mathbf{t}_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \cdot \cos \lambda \\ -\sin \phi \cdot \sin \lambda \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

et le tenseur métrique est donné par :

$$\mathbf{T}_{\text{sph}} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_\lambda \cdot \mathbf{t}_\lambda & \mathbf{t}_\lambda \cdot \mathbf{t}_\phi \\ \mathbf{t}_\phi \cdot \mathbf{t}_\lambda & \mathbf{t}_\phi \cdot \mathbf{t}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 \cdot \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

Tenseur métrique des coordonnées ellipsoïdales

Lorsque la surface de référence est un ellipsoïde de révolution paramétré avec les coordonnées ellipsoïdales (λ, φ) nous avons :

$$\begin{aligned} u &= \lambda \\ v &= \varphi \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} d\lambda \\ d\varphi \end{pmatrix}$$

le vecteur position :

$$\mathbf{x}(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} x(\lambda, \varphi) \\ y(\lambda, \varphi) \\ z(\lambda, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_N \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ R_N \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ R_N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

les vecteurs tangents sont donnés par :

$$\mathbf{t}_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial z(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_N \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ R_N \cdot \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.64)$$

et :

$$\mathbf{t}_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\lambda, \varphi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y(\lambda, \varphi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z(\lambda, \varphi)}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_N \cdot \sin \varphi \cdot \cos \lambda \\ -R_N \cdot \sin \varphi \cdot \sin \lambda \\ R_N \cdot (1 - e^2) \cdot \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

et le tenseur métrique est donné par :

$$\boxed{\mathbf{T}_{\text{ell}} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_\lambda \cdot \mathbf{t}_\lambda & \mathbf{t}_\lambda \cdot \mathbf{t}_\varphi \\ \mathbf{t}_\varphi \cdot \mathbf{t}_\lambda & \mathbf{t}_\varphi \cdot \mathbf{t}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_N^2 \cdot \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & R_M^2 \end{pmatrix}} \quad (5.66)$$

avec :

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \\ R_M &= \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (5.67)$$

5.2.2 Tenseurs métriques des coordonnées projetées

De façon générale, un système de coordonnées projetées est défini par son vecteur position 2D $\mathbf{X}(u, v)$, qui encode les formules de projection, qui dépend des 2 paramètres (u, v) de la surface de référence² :

$$\mathbf{X}(u, v) = \begin{pmatrix} X(u, v) \\ Y(u, v) \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

A partir de ce vecteur, nous pouvons également déterminer 2 vecteurs $(d\mathbf{p}_u, d\mathbf{p}_v)$, images des vecteurs $(d\mathbf{t}_u, d\mathbf{t}_v)$ sur la surface de projection, générés lorsque nous faisons varier $\mathbf{X}(u, v)$ de respectivement du et dv :

$$d\mathbf{p}_u(u, v) = \left(\frac{\partial X(u, v)}{\partial u} \right) \cdot du \quad \text{et} \quad d\mathbf{p}_v(u, v) = \left(\frac{\partial X(u, v)}{\partial v} \right) \cdot dv \quad (5.69)$$

et en définissant :

$$\mathbf{p}_u(u, v) = \left(\frac{\partial X(u, v)}{\partial u} \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_v(u, v) = \left(\frac{\partial X(u, v)}{\partial v} \right) \quad (5.70)$$

2. Il faut absolument que ces paramètres soient identiques à ceux de la surface de référence.

nous pouvons aussi écrire :

$$\begin{aligned} d\mathbf{p}_u(u, v) &= \mathbf{p}_u(u, v) \cdot du \\ d\mathbf{p}_v(u, v) &= \mathbf{p}_v(u, v) \cdot dv \end{aligned} \quad (5.71)$$

et de façon plus générale, l'image du vecteur $d\mathbf{x}(u, v)$ sur la surface de projection s'écrit :

$$\begin{aligned} d\mathbf{X}(u, v) &= d\mathbf{p}_u(u, v) + d\mathbf{p}_v(u, v) \\ &= \mathbf{p}_u(u, v) \cdot du + \mathbf{p}_v(u, v) \cdot dv \end{aligned} \quad (5.72)$$

Calcul de distance sur la surface de projection

De façon analogue au calcul des distances sur la surface de référence, nous pouvons écrire une relation générale pour la distance dS entre deux points, $\mathbf{X}(u, v)$ et $\mathbf{X}(u, v) + d\mathbf{X}(u, v)$, sur la surface de projection, avec :

$$dS = |d\mathbf{X}| \quad (5.73)$$

nous trouvons :

$$dS^2 = d\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{P} \cdot d\mathbf{u} \quad (5.74)$$

avec :

$$d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu} & p_{uv} \\ p_{uv} & p_{vv} \end{pmatrix} \quad (5.75)$$

Calcul d'angles sur la surface de projection

De façon analogue au calcul des angles sur la surface de référence, nous pouvons écrire une relation générale pour obtenir l'angle ω , entre deux directions, $d\mathbf{X}_1$ et $d\mathbf{X}_2$ sur la surface de projection, générées par les accroissements des paramètres $d\mathbf{u}_1$ et $d\mathbf{u}_2$:

$$\omega = \arccos \left(\frac{d\mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{P} \cdot d\mathbf{u}_2}{\sqrt{d\mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{P} \cdot d\mathbf{u}_1} \cdot \sqrt{d\mathbf{u}_2^T \cdot \mathbf{P} \cdot d\mathbf{u}_2}} \right) \quad (5.76)$$

avec :

$$d\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} du_1 \\ dv_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} du_2 \\ dv_2 \end{pmatrix} \quad (5.77)$$

Calcul de gisements sur la surface de projection

Le gisement Gis, d'une direction $d\mathbf{X}$ n'est pas un cas particulier de l'équation 5.76. En effet, contrairement au calcul de l'azimut sur la surface de référence, le gisement entre le point $\mathbf{X}(u, v)$ et le point $\mathbf{X}(u, v) + d\mathbf{X}(u, v)$ est l'angle, sur la surface de projection, entre la direction de l'axe de coordonnée Y et la direction $d\mathbf{X}(u, v)$. Il se calcule donc directement à partir des composantes de $d\mathbf{X}(u, v)$ par :

$$\text{Gis} = \arctan \left(\frac{dX(u, v)}{dY(u, v)} \right) \quad (5.78)$$

ce qui donné explicitement en fonction des accroissements donne :

$$\text{Gis} = \arctan \left(\frac{\frac{\partial X}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial X}{\partial v} \cdot dv}{\frac{\partial Y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial Y}{\partial v} \cdot dv} \right) \quad (5.79)$$

et lorsque l'on veut réaliser des calculs numériques avec un traitement rigoureux des quadrants :

$$\text{Gis} = \text{atan2} \left(\frac{\partial X}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial X}{\partial v} \cdot dv, \frac{\partial Y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial Y}{\partial v} \cdot dv \right) \quad (5.80)$$

Calcul de la convergence du méridien

En un point donné (u, v) , la convergence du méridien $\mu(u, v)$ est définie comme étant l'opposé du gisement de la direction du méridien, défini par l'accroissement ($du = 0, dv$) :

$$\mu(u, v) = -\text{Gis}(u, v, du = 0, dv) \quad (5.81)$$

ceci afin de pouvoir convertir des gisements en azimuts³ facilement par :

$$\text{azi} = \text{Gis} + \mu \quad (5.82)$$

De l'équation 5.79, en considérant $du = 0$, nous avons :

$$\mu = -\arctan \left(\frac{\frac{\partial X}{\partial v}}{\frac{\partial Y}{\partial v}} \right) \quad (5.83)$$

Calcul de surfaces sur la surface de projection

Pour obtenir la surface dA du parallélogramme généré par les 2 vecteurs $d\mathbf{p}_u$ et $d\mathbf{p}_v$, de façon générale, nous savons leur produit vectoriel est lié à dA par :

$$dA = |d\mathbf{p}_u \times d\mathbf{p}_v| \quad (5.84)$$

et de façon analogue au calcul de la surface sur la surface de référence, nous avons :

$$dA = \sqrt{\det(\mathbf{P})} \cdot du \cdot dv \quad (5.85)$$

Tenseur métrique de la projection plate-carrée sphérique

La projection plate-carrée sphérique a comme surface de référence une sphère paramétrée avec les coordonnées sphériques (λ, ϕ) . Ceci défini :

$$\begin{aligned} u &= \lambda \\ v &= \phi \end{aligned} \quad (5.86)$$

$$d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} d\lambda \\ d\phi \end{pmatrix}$$

3. Ceci ne fait sens que pour des projections conformes.

et :

$$\mathbf{X}(\lambda, \phi) = \begin{pmatrix} X(\lambda, \phi) \\ Y(\lambda, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(\lambda, \phi) \\ N(\lambda, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \lambda \\ R \cdot \phi \end{pmatrix} \quad (5.87)$$

les vecteurs tangents sont donnés par :

$$\mathbf{p}_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial E(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial N(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.88)$$

et :

$$\mathbf{p}_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial E(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial N(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \quad (5.89)$$

et le tenseur métrique est donné par :

$$\boxed{\mathbf{P}_{\text{plate-carrée/sph}} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_\lambda \cdot \mathbf{p}_\lambda & \mathbf{p}_\lambda \cdot \mathbf{p}_\phi \\ \mathbf{p}_\phi \cdot \mathbf{p}_\lambda & \mathbf{p}_\phi \cdot \mathbf{p}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}} \quad (5.90)$$

Tenseur métrique de la projection de Mercator sphérique

La projection de Mercator a comme surface de référence une sphère paramétrée avec les coordonnées sphériques (λ, ϕ) . Ceci défini :

$$\begin{aligned} u &= \lambda \\ v &= \phi \end{aligned} \quad (5.91)$$

$$d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} d\lambda \\ d\phi \end{pmatrix}$$

et les formules de projections sont :

$$\mathbf{X}(\lambda, \phi) = \begin{pmatrix} X(\lambda, \phi) \\ Y(\lambda, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(\lambda, \phi) \\ N(\lambda, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \lambda \\ R \cdot \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (5.92)$$

les vecteurs tangents sont donnés par :

$$\mathbf{p}_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial E(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial N(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.93)$$

et :

$$\mathbf{p}_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial E(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial N(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{R}{\cos \phi} \end{pmatrix} \quad (5.94)$$

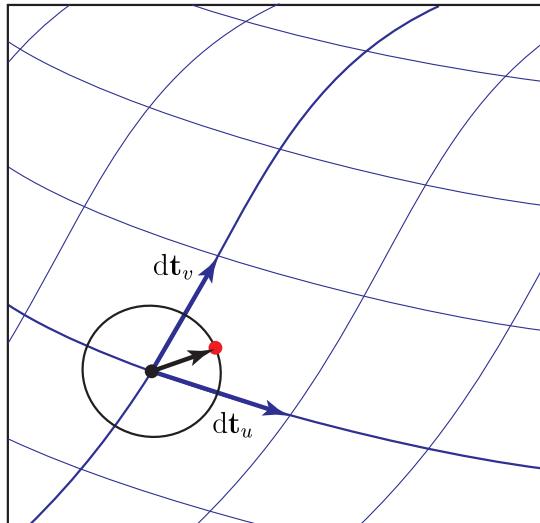
et le tenseur métrique est donné par :

$$\boxed{\mathbf{P}_{\text{Mercator/sph}} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_\lambda \cdot \mathbf{p}_\lambda & \mathbf{p}_\lambda \cdot \mathbf{p}_\phi \\ \mathbf{p}_\phi \cdot \mathbf{p}_\lambda & \mathbf{p}_\phi \cdot \mathbf{p}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{\cos^2 \phi} \end{pmatrix}} \quad (5.95)$$

5.3 Indicatrice de Tissot

A partir du tenseur métrique de la surface de référence \mathbf{T} et du tenseur métrique de la projection \mathbf{P} , il est possible de calculer les distortions de distances que subit un vecteur différentiel $d\mathbf{u}$ donné sur la surface de référence lors de son passage à travers les formules de projection.

Cercle sur la surface de référence



Ellipse sur la surface de projection

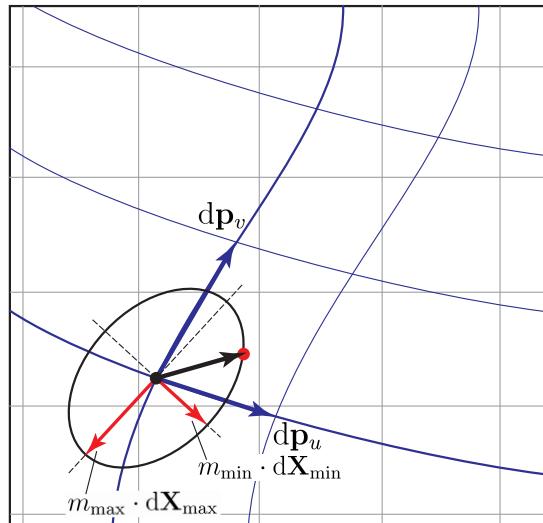


Figure 5.8 – Indicatrice de Tissot.

En reprenant les relations générales par le calcul des distances sur la surface de référence ds (équation 5.74) et sur la surface de projection dS (équation 5.74) nous pouvons écrire que la variation d'échelle du vecteur $d\mathbf{u}$ peut s'écrire de façon générale par :

$$m(d\mathbf{u}) = \frac{dS}{ds} = \frac{\sqrt{d\mathbf{u} \cdot \mathbf{P} \cdot d\mathbf{u}^T}}{\sqrt{d\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u}^T}} \quad (5.96)$$

A partir de cette relation, nous pouvons déterminer la variation d'échelle que subit deux points séparés de $d\mathbf{u}$ dans n'importe quelle direction. Bien que cela soit très utile, il serait encore plus pertinent de trouver les directions pour lesquels ces variations d'échelles sont minimales et maximales, et bien entendu, la valeur de ces variations minimale et maximale. La recherche des directions $d\mathbf{X}_{\min}$ et $d\mathbf{X}_{\max}$ qui sont associées aux facteurs d'échelles minimal m_{\min} et maximal m_{\max} , peut être faite en cherchant les directions pour lesquels la dérivée de la fonction $m(d\mathbf{u})$ s'annule :

$$\frac{dm(d\mathbf{u})}{d\mathbf{u}} = 0 \quad (5.97)$$

Il est possible de démontrer que la solution peut se trouver par les valeurs et vecteurs propres de la matrice de distortion suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{P} \\ &= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.98)$$

En effet, la matrice \mathbf{D} étant symétrique, elle peut être décomposée de la façon suivante :

$$\mathbf{D} = \mathbf{V} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{V}^T \quad (5.99)$$

avec la matrice diagonale des valeurs propres λ_1 et λ_2 :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (5.100)$$

et avec la matrice orthonormée des vecteurs propres \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 :

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} v_{1u} & v_{2u} \\ v_{1v} & v_{2v} \end{pmatrix} \quad (5.101)$$

avec la solution des valeurs et vecteurs propres d'une matrice 2×2 réelle et symétrique :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \cdot \left(d_{11} + d_{22} + \sqrt{(d_{11} - d_{22})^2 + 4 \cdot d_{12}^2} \right) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \cdot \left(d_{11} + d_{22} - \sqrt{(d_{11} - d_{22})^2 + 4 \cdot d_{12}^2} \right) \\ \mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 - d_{22}}{\sqrt{d_{12}^2 - (\lambda_1 - d_{22})^2}} \\ \frac{\lambda_1 - d_{11}}{\sqrt{d_{12}^2 - (\lambda_1 - d_{11})^2}} \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2 - d_{22}}{\sqrt{d_{12}^2 - (\lambda_2 - d_{22})^2}} \\ \frac{\lambda_2 - d_{11}}{\sqrt{d_{12}^2 - (\lambda_2 - d_{11})^2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.102)$$

et finalement, les quantités recherchées (m_{\min} , $d\mathbf{X}_{\min}$) et (m_{\max} $d\mathbf{X}_{\max}$). Si $\lambda_1 < \lambda_2$:

$$\begin{aligned} m_{\min} &= \sqrt{\lambda_1} & d\mathbf{X}_{\min} &= \begin{pmatrix} v_{1u} \\ v_{1v} \end{pmatrix} \\ m_{\max} &= \sqrt{\lambda_2} & d\mathbf{X}_{\max} &= \begin{pmatrix} v_{2u} \\ v_{2v} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.103)$$

5.3.1 Conformité d'une projection

Une projection est dite conforme si la différence entre α , l'angle mesuré entre deux directions $d\mathbf{x}_1$ et $d\mathbf{x}_2$ sur la surface de référence, et l'angle ω entre ces mêmes vecteurs sur la surface de projection $d\mathbf{X}_1$ et $d\mathbf{X}_2$, est nulle. Et ceci doit être valable pour tous les vecteurs $d\mathbf{x}_1$ et $d\mathbf{x}_2$ et pour tous les points $\mathbf{x}(u, v)$ de la surface de référence :

$$\alpha = \omega \quad \forall u, v, d\mathbf{u}_1, d\mathbf{u}_2 \iff \text{projection conforme} \quad (5.104)$$

De façon équivalente, il est possible de démontrer que la condition de conformité peut se formuler à partir du demi-grand axe m_{\max} et du demi-petit axe m_{\min} de l'indicatrice de Tissot. Un projection est dite conforme si les indicatrices de Tissot sont des cercles pour tous les points. Mathématiquement cela se formule par :

$$m_{\max} = m_{\min} \quad \forall u, v \iff \text{projection conforme} \quad (5.105)$$

Il est absolument indispensable de comprendre que les angles sont conservés pour des directions engendrées par des vecteurs infinitésimaux. C'est à dire de très petits vecteurs devant le rayon de courbure. En d'autres termes, nous pouvons aussi dire que seuls de petits triangles sur la surface de référence ont la « même forme » sur la surface de projection. En effet, dans le cas contraire nous serions confrontés à des incohérences farouches.

Prenons le cas d'une surface de référence sphérique et une surface de projection plane. Nous savons que la somme des angles d'un triangle sphérique (lorsque que les côtés sont des arcs de grands cercles) est plus grande que 180° . Il est donc par définition impossible que ce même triangle, sur la surface de projection, soit conforme. En effet, nous savons que la somme des angles d'un triangle dans un plan vaut exactement 180° . Comment résoudre ce paradoxe ? Et bien ce paradoxe se résout de différentes façons :

1. Voyons ce qu'il se passe pour un triangle infiniment petit. Nous savons que la valeur de son excès sphérique (la somme des angles d'un triangle moins 180°) est proportionnel à surface du triangle sphérique $F_{\text{sphère}}$:

$$\alpha \text{ [rad]} + \beta \text{ [rad]} + \gamma \text{ [rad]} - \pi \text{ [rad]} = \frac{F_{\text{sphère}} \text{ [m}^2\text{]}}{R^2 \text{ [m}^2\text{]}} \quad (5.106)$$

Dès lors, lorsque nous faisons tendre la surface d'un triangle sphérique vers 0, c'est à dire lorsque que le triangle devient infinitésimalement petit, la somme des angles du triangle se rapproche de 180° . Nous voyons donc que les angles ne se conservent que pour des éléments infinitésimaux.

2. Une autre façon de résoudre le paradoxe pour des triangles arbitrairement grands est de regarder comment les arcs de grands cercles sur la sphère sont projetés sur la surface de projection. En faisant ceci, il est facile de remarquer que les arcs de grands cercles ne sont pas des droites sur la surface de projection et donc ne définissent pas un triangle. Autrement dit, seul les sommets du triangle sphérique correspondent aux sommets du triangle dans le plan, mais ceci n'est pas valable pour les arrêtes.

5.3.2 Équivalence d'une projection

Une projection est dite équivalente si la différence entre la surface da sur la surface de référence, engendrée par deux vecteurs $d\mathbf{x}_1$ et $d\mathbf{x}_2$, et cette même surface sur la surface de projection dA , engendrée par les vecteurs $d\mathbf{X}_1$ et $d\mathbf{X}_2$, est nulle.

$$da = dA \quad \forall u, v, d\mathbf{u}_1, d\mathbf{u}_2 \iff \text{projection équivalente} \quad (5.107)$$

De façon équivalente, il est possible de démontrer que la condition d'équivalence peut se formuler à partir du demi-grand axe m_{\max} et du demi-petit axe m_{\min} de l'indicatrice de Tissot. Un projection est dite équivalente si la surface des indicatrices de Tissot est égale à 1.0 pour tous les points. Mathématiquement cela se formule par :

$$m_{\max} \cdot m_{\min} = 1 \quad \forall u, v \iff \text{projection équivalente} \quad (5.108)$$

5.4 Classes de projections

Parmi toutes les projections cartographiques envisageables, plusieurs classes de projections sont souvent identifiées. Les projections cylindriques, coniques et azimutales. Ces

classes de projections correspondent à des surfaces de courbure intrinsèque nulle, donc géométriquement développable sans déformation selon un plan. Néanmoins, contrairement à une idée reçue, les différentes projections ne sont pas réalisées selon des constructions issues de la géométrie Euclidienne depuis la surface de référence (comme la sphère) sur la surface développable (comme le cylindre ou le cône). Les projections sont des applications mathématiquement plus complexes dont leurs classes respectives n'ont qu'un lien indirect avec leur surface. En fait, les classes sont associées à la forme que prend les formules des projections.

5.4.1 Projections cylindriques

Les projections cylindriques sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} E(\lambda, \phi) &= R \cdot \lambda \\ N(\lambda, \phi) &= R \cdot f(\phi) \end{aligned} \quad (5.109)$$

5.4.2 Projections coniques

Les projections cylindriques sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} E(\lambda, \phi) &= \rho(\lambda, \phi) \cdot \cos [\alpha(\lambda, \phi)] \\ N(\lambda, \phi) &= \rho(\lambda, \phi) \cdot \sin [\alpha(\lambda, \phi)] \end{aligned} \quad (5.110)$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho(\lambda, \phi) &= R \cdot f(\phi) \\ \alpha(\lambda, \phi) &= \sin \phi_0 \cdot \lambda \end{aligned} \quad (5.111)$$

5.4.3 Projections azimutales

Les projections azimutales sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} E(\lambda, \phi) &= \rho(\lambda, \phi) \cdot \cos [\alpha(\lambda, \phi)] \\ N(\lambda, \phi) &= \rho(\lambda, \phi) \cdot \sin [\alpha(\lambda, \phi)] \end{aligned} \quad (5.112)$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho(\lambda, \phi) &= R \cdot f(\phi) \\ \alpha(\lambda, \phi) &= \lambda \end{aligned} \quad (5.113)$$

5.5 Projection de Mercator sphérique normale

La projection de Mercator normale⁴, due à Gerardus Mercator en 1569, est une projection cylindrique conforme. La surface de référence est la sphère paramétrée par la longitude et la longitude sphérique :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \phi \end{pmatrix} \quad (5.114)$$

dont le tenseur métrique vaut :

$$\mathbf{T}_{\text{sph}} = \begin{pmatrix} R^2 \cdot \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \quad (5.115)$$

4. par opposition aux projections oblique et transverse.

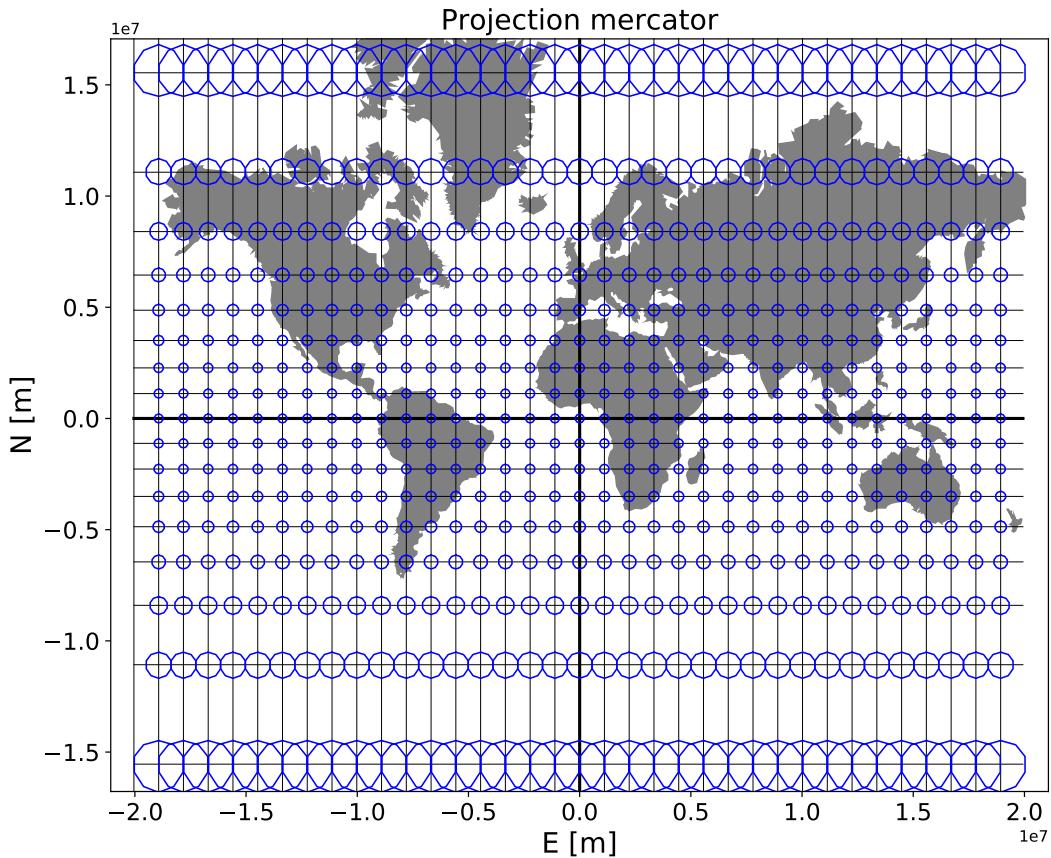


Figure 5.9 – Projection de Mercator normale avec les indicatrices de Tissot.

5.5.1 Coordonnées sphériques $(\lambda, \phi) \rightarrow$ Coordonnées projetées (E, N)

Les formules de projection sont données par :

$$\mathbf{X}(\lambda, \phi) = \begin{pmatrix} E(\lambda, \phi) \\ N(\lambda, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \lambda \\ R \cdot \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (5.116)$$

et le tenseur métrique est donné par :

$$\mathbf{P}_{\text{Mercator/sph}} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{\cos^2 \phi} \end{pmatrix} \quad (5.117)$$

la matrice de déformation est donnée par :

$$\mathbf{D}_{\text{Mercator/sph}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 \phi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos^2 \phi} \end{pmatrix} \quad (5.118)$$

l'indicatrice de Tissot est donnée par :

$$m_{\max} = m_{\min} = \frac{1}{\cos \phi} \quad \text{avec} \quad d\mathbf{X}_{\max} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d\mathbf{X}_{\min} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.119)$$

la convergence du méridien est nulle en tous points :

$$\mu(\lambda, \phi) = 0 \quad (5.120)$$

5.5.2 Coordonnées projetées $(E, N) \rightarrow$ Coordonnées sphériques (λ, ϕ)

Les formules de projection inverse sont données par :

$$\mathbf{u}(E, N) = \begin{pmatrix} \lambda(E, N) \\ \phi(E, N) \end{pmatrix} = \left(2 \cdot \arctan \left(e^{\frac{N}{R}} \right) - \frac{\pi}{2}, \frac{E}{R} \right) \quad (5.121)$$

5.5.3 Loxodrome

La projection de Mercator sphérique normale a une propriété très intéressante. De part le fait que la convergence du méridien est nulle en tous points, les droites sur la surface de projection sont des trajectoires à azimut (cap) constant, appelées *loxodromes*⁵. Cela fait de cette projection un outil très utile pour la navigation. En effet, il est facile d'atteindre n'importe quel point du globe en suivant la loxodrome reliant le point de départ et le point de destination. Suivre la loxodrome consiste simplement à garder le cap donné par le gisement mesuré sur la carte de Mercator.

Le calcul d'une loxodrome entre deux points donnés en coordonnées de Mercator est trivial, se sont simplement les points du segment droit entre les deux points. Le calcul des coordonnées sphériques (λ, ϕ) de n'importe quel point de la loxodrome connu en coordonnées de Mercator se fait facilement en utilisant la formule de projection inverse donnée par l'équation 5.171.

5.5.4 Orthodrome

L'orthodrome⁶ est la courbe de distance minimale entre deux points donnés sur un sphère. Elle n'a fondamentalement rien à voir avec la projection de Mercator mais sa comparaison avec la loxodrome est néanmoins très riche d'enseignement. Il est possible de prouver que l'orthodrome entre deux points sur la sphère est l'arc de grand cercle passant par ces deux points. Le calcul de points sur l'orthodrome peut se faire à l'aide des outils issus de la trigonométrie sphérique. Sans démonstration, entre deux points de la sphère (λ_A, ϕ_A) et (λ_B, ϕ_B) , nous pouvons calculer l'azimut au point de départ Azi_{AB} ainsi que la distance totale de l'orthodrome s_{AB} par :

$$\begin{aligned} s_{AB} &= r \cdot \arccos [\sin \phi_A \cdot \sin \phi_B + \cos \phi_A \cdot \cos \phi_B \cdot \cos (\lambda_A - \lambda_B)] \\ Azi_{AB} &= \arcsin \left[\frac{\cos \phi_B \cdot \sin (\lambda_B - \lambda_A)}{\sin \left(\frac{s_{AB}}{r} \right)} \right] \end{aligned} \quad (5.122)$$

et donc un point P sur l'orthodrome entre A et B à une distance s_{AP} peut être calculée par point lancé sur la sphère à l'aide des formules suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_P &= \arcsin \left[\sin \phi_A \cdot \cos \left(\frac{s_{AP}}{r} \right) + \cos \phi_A \cdot \sin \left(\frac{s_{AP}}{r} \right) \cdot \cos Azi_{AB} \right] \\ \lambda_P &= \lambda_A + \arcsin \left[\frac{\sin Azi_{AB}}{\cos \phi_B} \cdot \sin \left(\frac{s_{AP}}{r} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.123)$$

5. du grec *lox(o)-* et *-drome* course, oblique.

6. du grec *ortho-* et *-drome* course, droite.

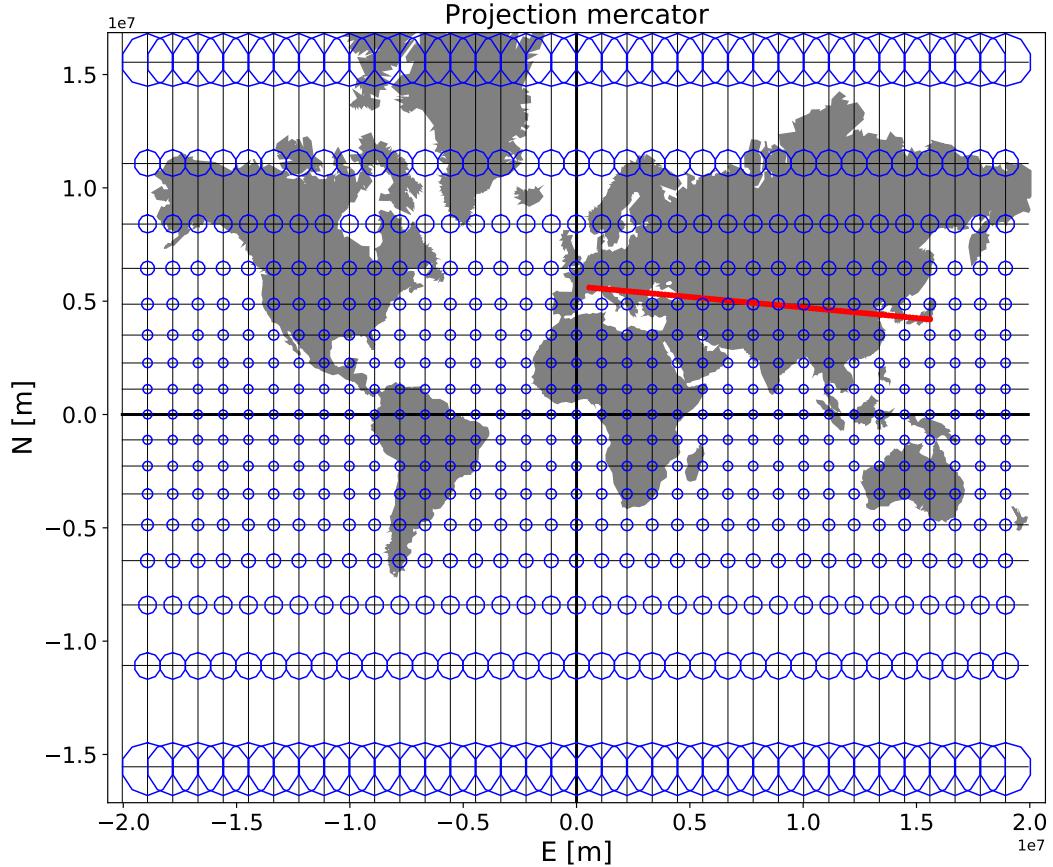


Figure 5.10 – Projection de Mercator normale avec les indicatrices de Tissot ainsi qu'une loxodromie entre Genève et Tokyo.

Une autre façon de calculer n'importe quel point P sur l'orthodromie entre A et B consiste à calculer P dans le plan du grand cercle passant par A et B et le centre de la sphère, puis de calculer la matrice de rotation qui permet de transformer les composantes de n'importe quel point du plan dans le système initial. Pour faire cela, définissons deux systèmes cartésiens. Le premier système, $(\mathbf{o}^I, \mathbf{e}_x^I, \mathbf{e}_y^I, \mathbf{e}_z^I)$ est rattaché à la sphère de référence dans lequel nous définissons les composantes des vecteurs de base avec :

$$\mathbf{o}^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_x^I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_y^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.124)$$

Nous avons les vecteurs \mathbf{x}_A et \mathbf{x}_B qui ont comme composantes dans le système I :

$$\mathbf{x}_A = \begin{pmatrix} x_A^I \\ y_A^I \\ z_A^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \phi_A \cdot \cos \lambda_A \\ r \cdot \cos \phi_A \cdot \sin \lambda_A \\ r \cdot \sin \phi_A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_B^I \\ y_B^I \\ z_B^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \phi_B \cdot \cos \lambda_B \\ r \cdot \cos \phi_B \cdot \sin \lambda_B \\ r \cdot \sin \phi_B \end{pmatrix} \quad (5.125)$$

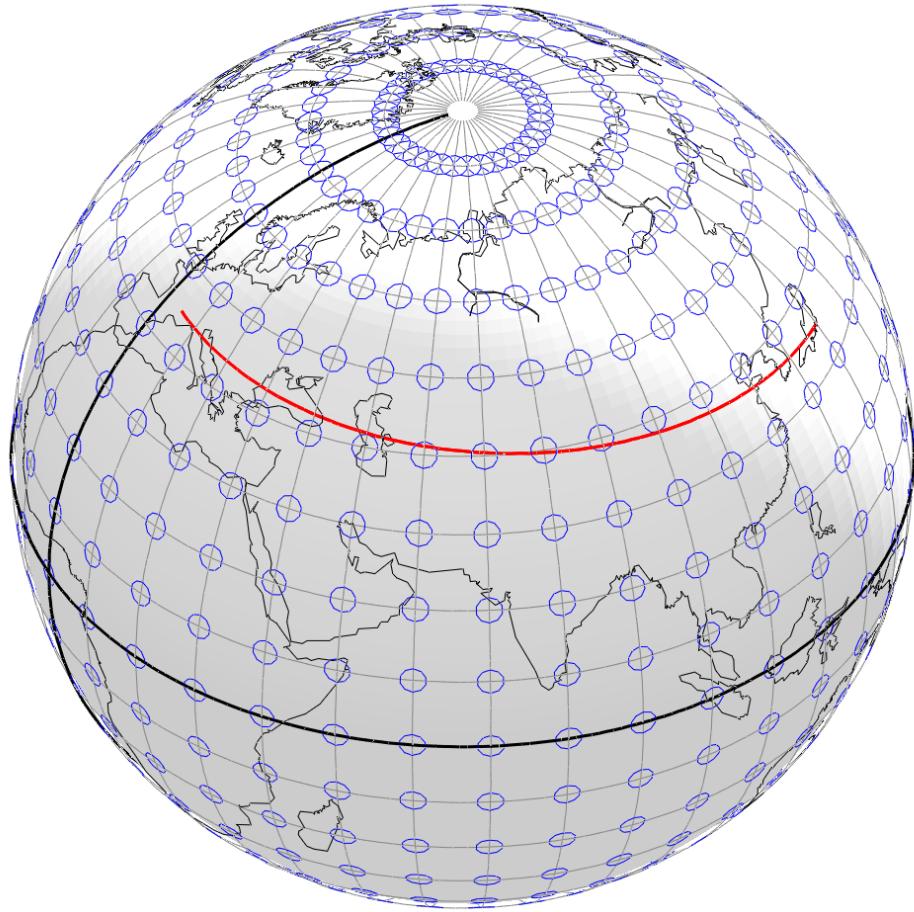


Figure 5.11 – Projection de Mercator normale avec les indicatrices de Tissot ainsi qu'une loxodromie entre Genève et Tokyo.

Le deuxième système, $(\mathbf{o}^{\text{II}}, \mathbf{e}_x^{\text{II}}, \mathbf{e}_y^{\text{II}}, \mathbf{e}_z^{\text{II}})$ et rattaché au plan du grand cercle passant par \mathbf{x}_A , \mathbf{x}_B et \mathbf{o}^I . Sur cette base, nous définissons :

$$\begin{aligned}\mathbf{o}^{\text{II}} &= \mathbf{o}^I \\ \mathbf{e}_x^{\text{II}} &= \frac{\mathbf{x}_A}{|\mathbf{x}_A|} \\ \mathbf{e}_z^{\text{II}} &= \frac{\mathbf{e}_x^{\text{II}} \times \mathbf{x}_B}{|\mathbf{e}_x^{\text{II}} \times \mathbf{x}_B|} \\ \mathbf{e}_y^{\text{II}} &= \frac{\mathbf{e}_z^{\text{II}} \times \mathbf{e}_x^{\text{II}}}{|\mathbf{e}_z^{\text{II}} \times \mathbf{e}_x^{\text{II}}|}\end{aligned}\tag{5.126}$$

Dans le système II, les vecteurs \mathbf{x}_A et \mathbf{x}_B ont pour composantes :

$$\mathbf{x}_A = \begin{pmatrix} x_A^{\text{II}} \\ y_A^{\text{II}} \\ z_A^{\text{II}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_B^{\text{II}} \\ y_B^{\text{II}} \\ z_B^{\text{II}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \alpha \\ r \cdot \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}\tag{5.127}$$

avec :

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\mathbf{x}_A \cdot \mathbf{x}_B}{|\mathbf{x}_A| \cdot |\mathbf{x}_B|} \right)\tag{5.128}$$

et un point \mathbf{x}_P à une distance s_{AP} à pour composantes dans le système II :

$$\mathbf{x}_P = \begin{pmatrix} x_P^{\text{II}} \\ y_P^{\text{II}} \\ z_P^{\text{II}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\left(\frac{s_{AP}}{r}\right) \\ r \cdot \sin\left(\frac{s_{AP}}{r}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.129)$$

Finalement, nous pouvons trouver les composantes de \mathbf{x}_P par une transformation entre le système I et II selon l'équation 2.10 :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{I}} \\ y^{\text{I}} \\ z^{\text{I}} \end{pmatrix} = (\mathbf{T}^{\text{I}})^T \cdot (\mathbf{o}^{\text{II}} - \mathbf{o}^{\text{I}}) + (\mathbf{T}^{\text{I}})^T \cdot \mathbf{T}^{\text{II}} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{II}} \\ y^{\text{II}} \\ z^{\text{II}} \end{pmatrix} \quad (5.130)$$

qui dans notre cas de figure précis se simplifie, et finalement devient :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^{\text{I}} \\ y^{\text{I}} \\ z^{\text{I}} \end{pmatrix} &= \mathbf{T}^{\text{II}} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{II}} \\ y^{\text{II}} \\ z^{\text{II}} \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{e}_x^{\text{II}} \quad \mathbf{e}_y^{\text{II}} \quad \mathbf{e}_z^{\text{II}}) \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{II}} \\ y^{\text{II}} \\ z^{\text{II}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.131)$$

Exemple

Nous voulons calculer les coordonnées sphériques du point P, à une distance $s_{AP} = 1000$ km de A, situé sur l'orthodrome entre à A et B. Avec :

$$\begin{pmatrix} \lambda_A \\ \phi_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.1^\circ \\ 46.2^\circ \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \lambda_B \\ \phi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 139.8^\circ \\ 35.7^\circ \end{pmatrix} \quad (5.132)$$

En fixant le rayon de la sphère à $R = 6'380'000$ m, nous pouvons calculer les coordonnées cartésiennes dans le système I des vecteurs \mathbf{x}_A et \mathbf{x}_B :

$$\begin{pmatrix} x_A^{\text{I}} \\ y_A^{\text{I}} \\ z_A^{\text{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +4'390'870.527 \\ +469'248.691 \\ +4'604'830.255 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_B^{\text{I}} \\ y_B^{\text{I}} \\ z_B^{\text{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3'957'298.182 \\ +3'344'176.244 \\ +3'722'992.928 \end{pmatrix} \quad (5.133)$$

De ces vecteurs nous pouvons calculer les vecteurs de base du système II avec les composantes dans le système I :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x^{\text{II}} &= \frac{\mathbf{x}_A}{|\mathbf{x}_A|} = \begin{pmatrix} +0.68822422 \\ +0.07354995 \\ +0.72176023 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_z^{\text{II}} &= \frac{\mathbf{e}_x^{\text{II}} \times \mathbf{x}_B}{|\mathbf{e}_x^{\text{II}} \times \mathbf{x}_B|} = \begin{pmatrix} -0.33558351 \\ -0.84974918 \\ +0.40658337 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_y^{\text{II}} &= \frac{\mathbf{e}_z^{\text{II}} \times \mathbf{e}_x^{\text{II}}}{|\mathbf{e}_z^{\text{II}} \times \mathbf{e}_x^{\text{II}}|} = \begin{pmatrix} -0.64321935 \\ +0.52203135 \\ +0.56013582 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.134)$$

et donc former la matrice de transformation \mathbf{T}^{II} :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{\text{II}} &= \left(\mathbf{e}_x^{\text{II}} \quad \mathbf{e}_y^{\text{II}} \quad \mathbf{e}_z^{\text{II}} \right) \\ &= \begin{pmatrix} +0.68822422 & -0.64321935 & -0.33558351 \\ +0.07354995 & +0.52203135 & -0.84974918 \\ +0.72176023 & +0.56013582 & +0.40658337 \end{pmatrix} \quad (5.135)\end{aligned}$$

Nous pouvons calculer les coordonnées de \mathbf{x}_P dans le système II avec :

$$\mathbf{x}_P = \begin{pmatrix} x_P^{\text{II}} \\ y_P^{\text{II}} \\ z_P^{\text{II}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\left(\frac{s_{AP}}{r}\right) \\ r \cdot \sin\left(\frac{s_{AP}}{r}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 995'317.117 \\ 96'663.521 \\ 0.000 \end{pmatrix} \quad (5.136)$$

Les coordonnées de \mathbf{x}_P dans le système I se calculent avec la matrice de transformation \mathbf{T}^{II} :

$$\begin{pmatrix} x_P^{\text{I}} \\ y_P^{\text{I}} \\ z_P^{\text{I}} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{\text{II}} \cdot \begin{pmatrix} x_P^{\text{II}} \\ y_P^{\text{II}} \\ z_P^{\text{II}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +622'825.499 \\ +123'666.914 \\ +772'525.010 \end{pmatrix} \quad (5.137)$$

qui correspondent aux coordonnées sphériques :

$$\begin{pmatrix} \lambda_P \\ \phi_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.23^\circ \\ 50.58^\circ \end{pmatrix} \quad (5.138)$$

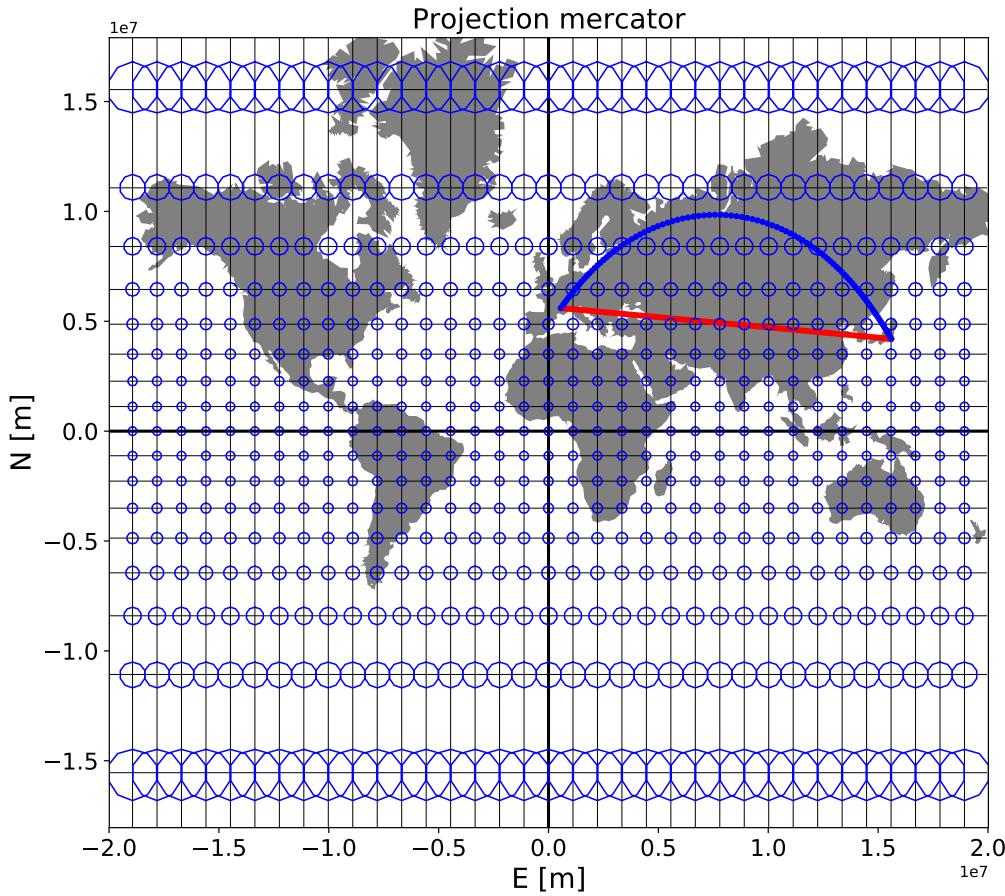


Figure 5.12 – Projection de Mercator normale avec les indicatrices de Tissot ainsi qu’une loxo-dromie (rouge) et une orthodromie (bleu) entre Genève et Tokyo.

5.6 Projections obliques

Les projections normales sont très souvent très intéressantes proche de l’équateur. En effet, comme nous pouvons le voir pour la projection de Mercator normale, la déformation des distances est nulle à l’équateur puis augmente selon la latitude. Dans ce cas, nous disons que le centre de projection est situé à l’intersection du méridien de Greenwich et de l’équateur ($\lambda_0 = 0, \phi_0 = 0$). De façon équivalente, et de façon un peu abusive, nous disons aussi que l’axe principal du cylindre est perpendiculaire et tangent à l’équateur. En pratique, lorsque l’on veut utiliser une projection avec des propriétés particulières (comme la conformité) mais qui limite les déformations au voisinage d’un point différent de ($\lambda_0 = 0, \phi_0 = 0$), au centre d’un pays par exemple, il est nécessaire de pouvoir déplacer le centre de projection (λ_0, ϕ_0) en conservant ses propriétés initiales.

Le déplacement du centre de projection (λ_0, ϕ_0) peut se faire de façon élégante en appliquant des rotations tridimensionnelles aux coordonnées cartésiennes des points sur la surface de référence. De façon générale, nous définissons toujours une surface de référence

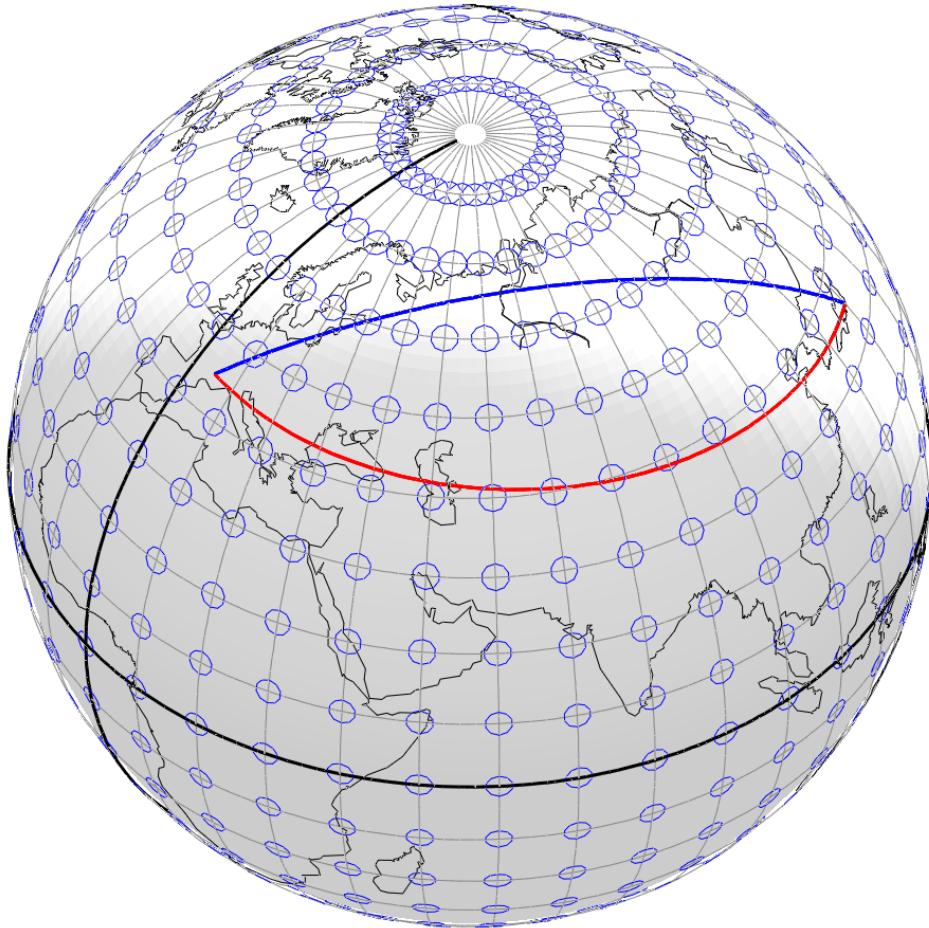


Figure 5.13 – Projection de Mercator normale avec les indicatrices de Tissot ainsi qu'une loxodromie (rouge) et une orthodromie (bleu) entre Genève et Tokyo.

paramétrisée par :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (5.139)$$

et dont les coordonnées cartésiennes tridimensionnelles sont données par :

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad (5.140)$$

en appliquant les formules de projections standards (Mercator normale,...), le centre de projection est implicitement fixé sur le point :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ v_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5.141)$$

Afin de déplacer le centre de projection, nous pouvons tout d'abord calculer les coordonnées cartésiennes tridimensionnelles sur la surface de référence avec l'équation 5.140, puis appliquer les rotations suivantes :

1. une rotation autour de \mathbf{e}_z d'un angle u_0 .
2. puis une rotation autour de \mathbf{e}_y d'un angle $-v_0$.

Mathématiquement cela revient à calculer de nouvelles coordonnées cartésiennes transformées :

$$\begin{pmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{pmatrix} = \mathbf{R}_y(-v_0) \cdot \mathbf{R}_z(u_0) \cdot \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad (5.142)$$

Ces dernières peuvent être ensuite reconvertie en paramètres (u^t, v^t) avec les formules de convesion $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Par exemple avec les formules 3.2 pour la sphère, et les formules 4.43 pour l'ellipsoïde de révolution. Autrement dit nous pouvons calculer :

$$\begin{pmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u^t \\ v^t \end{pmatrix} \quad (5.143)$$

Finalement, les formules de projections standards peuvent être appliquées sur les nouveaux paramètres :

$$\mathbf{X}(u^t, v^t) \quad (5.144)$$

5.7 Projection de Mercator sphérique oblique

La projection de Mercator sphérique oblique s'appuie sur les formules délivrées en section 5.5. Nous avons donc :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \phi \end{pmatrix} \quad (5.145)$$

les coordonnées cartésiennes tridimensionnelles se calculent par :

$$\mathbf{x}(\lambda, \phi) = \begin{pmatrix} x(\lambda, \phi) \\ y(\lambda, \phi) \\ z(\lambda, \phi) \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ \cos \phi \cdot \sin \lambda \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (5.146)$$

En fixant les coordonnées sphériques du centre de projection (λ_0, ϕ_0) nous pouvons trouver les coordonnées cartésiennes transformées :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{pmatrix} &= \mathbf{R}_y(-\phi_0) \cdot \mathbf{R}_z(\lambda_0) \cdot \begin{pmatrix} x(\lambda, \phi) \\ y(\lambda, \phi) \\ z(\lambda, \phi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi_0 & 0 & \sin \phi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_0 & 0 & \cos \phi_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \lambda_0 & \sin \lambda_0 & 0 \\ -\sin \lambda_0 & \cos \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(\lambda, \phi) \\ y(\lambda, \phi) \\ z(\lambda, \phi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.147)$$

qui nous permettent de calculer les nouveaux paramètres transformés :

$$\begin{aligned} \lambda^t &= \text{atan2}(y^t, x^t) \\ \phi^t &= \text{atan2}(z^t, \sqrt{x^{t2} + y^{t2}}) \end{aligned} \quad (5.148)$$

qui peuvent être introduits dans les formules de la projection de Mercator sphérique normale :

$$\mathbf{X}(\lambda^t, \phi^t) = \begin{pmatrix} E(\lambda^t, \phi^t) \\ N(\lambda^t, \phi^t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \lambda^t \\ R \cdot \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi^t}{2} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (5.149)$$

Des exemples de projection de Mercator sphérique oblique avec différents centres de projection sont représentés en Figure 5.14. Nous pouvons constater que, par rapport à la projection de Mercator sphérique normale, la conformité est conservée mais que la convergence du méridien n'est plus nulle pour tous les points de la surface de la Terre.

Indicatrice de Tissot

L'indicatrice de Tissot est identique à celle de la projection de Mercator normale si l'on remplace simplement les paramètres (λ, ϕ) par (λ^t, ϕ^t) . Nous pouvons donc écrire :

$$m_{\max} = m_{\min} = \frac{1}{\cos \phi^t} \quad \text{avec} \quad d\mathbf{X}_{\max} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d\mathbf{X}_{\min} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.150)$$

Il est également possible d'exprimer la déformation d'échelle des distances en fonction des coordonnées (E, N) en remplaçant les paramètres :

$$\lambda^t, \phi^t \quad \text{par les fonctions} \quad \lambda^t(E, N), \phi^t(E, N) \quad (5.151)$$

données dans l'équation 5.171. Nous pouvons également calculer cette échelle au voisinage du centre de projection en faisant un développement limité du 2ème ordre autour de $\phi^t = 0$:

$$\begin{aligned} m_{\max} = m_{\min} &= \frac{1}{\cos \phi^t} \\ &\approx 1 + \frac{\phi^{t2}}{2} + \mathcal{O}_3 \end{aligned} \quad (5.152)$$

De plus, lorsque ϕ^t est petit, nous avons aussi :

$$\phi^t \approx \frac{N}{R} \quad (5.153)$$

ce qui finalement donne :

$$\begin{aligned} m_{\max} = m_{\min} &= \frac{1}{\cos \phi^t} \\ &\approx 1 + \frac{N^2}{2R^2} + \mathcal{O}_3 \end{aligned} \quad (5.154)$$

Convergence du méridien

La convergence du méridien se calcule selon l'équation 5.83 :

$$\mu(\lambda, \phi) = -\arctan \left(\frac{\frac{\partial E}{\partial \phi}}{\frac{\partial N}{\partial \phi}} \right) \quad (5.155)$$

qui, sans démonstration, est égale à :

$$\mu(\lambda, \phi) = \arctan \left[\frac{\sin \phi_0 \cdot \sin(\lambda - \lambda_0)}{\cos \phi_0 \cdot \cos \phi + \sin \phi_0 \cdot \sin \phi \cdot \cos(\lambda - \lambda_0)} \right] \quad (5.156)$$

Nous voyons que la convergence du méridien provient de la latitude ϕ_0 du centre de projection, donc de «l'obliquité du cylindre». En effet, si $\phi_0 = 0$, alors $\mu = 0$.

5.8 Projection de Mercator sphérique transverse

La projection de Mercator sphérique transverse se base sur les même principe que la projection oblique. Néanmoins, la latitude du centre de projection est fixée au pôle nord $\phi_0 = 90^\circ$. Les matrices de rotation qui permettent de déplacer le centre de projection (λ_0) sont légèrement différentes soit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{pmatrix} &= \mathbf{R}_z(-90^\circ) \cdot \mathbf{R}_y(-90^\circ) \cdot \mathbf{R}_z(90^\circ + \lambda_0) \cdot \begin{pmatrix} x(\lambda, \phi) \\ y(\lambda, \phi) \\ z(\lambda, \phi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \lambda_0 & \sin \lambda_0 & 0 \\ -\sin \lambda_0 & \cos \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(\lambda, \phi) \\ y(\lambda, \phi) \\ z(\lambda, \phi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.157)$$

qui nous permettent de calculer les nouveaux paramètres transformés :

$$\begin{aligned} \lambda^t &= \text{atan2}(y^t, x^t) \\ \phi^t &= \text{atan2}(z^t, \sqrt{x^{t2} + y^{t2}}) \end{aligned} \quad (5.158)$$

qui peuvent être introduit dans les formules de la projection de Mercator sphérique normale en interchangeant les coordonnées E et N tout en prenant l'opposé de N :

$$\mathbf{X}(\lambda^t, \phi^t) = \begin{pmatrix} E(\lambda^t, \phi^t) \\ N(\lambda^t, \phi^t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \cdot \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi^t}{2} \right) \right] \\ R \cdot \lambda^t \end{pmatrix} \quad (5.159)$$

Des exemple de projection de Mercator sphérique transverse avec différents centres de projection sont représentés en Figure 5.15. Nous pouvons constater que, par rapport à la projection de Mercator sphérique normale, la conformité est conservée mais que la convergence du méridien n'est plus nulle pour tous les points de la surface de la Terre.

Indicatrice de Tissot

Dans ce cas, les indicatrices de Tissot sont aussi analogue à celles des la projection de Mercator normale et oblique. Par contre, le facteur d'échelle des distances ne varie pas en fonction de la coordonnée N mais de la coordonnée E , qui représente la distance au méridien du centre de projection :

$$m_{\max} = m_{\min} \approx 1 + \frac{E^2}{2R^2} + \mathcal{O}_3 \quad (5.160)$$

Convergence du méridien

La convergence du méridien se calcule selon l'équation 5.83 :

$$\mu(\lambda, \phi) = -\arctan\left(\frac{\frac{\partial E}{\partial \phi}}{\frac{\partial N}{\partial \phi}}\right) \quad (5.161)$$

qui, sans démonstration, est égale à :

$$\mu(\lambda, \phi) = \arctan [\tan(\lambda - \lambda_0) \cdot \sin \phi] \quad (5.162)$$

Dans ce cas, nous voyons que la convergence du méridien est seulement nulle sur l'équateur $\phi = 0$ ou sur la longitude qui correspond au centre de projection $\lambda = \lambda_0$.

5.9 Projection de Mercator ellipsoïdale normale

La projection de Mercator normale⁷, est une projection cylindrique conforme. La surface de référence est l'ellipsoïde de révolution paramétré par la longitude et la latitude ellipsoïdale :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (5.163)$$

dont le tenseur métrique vaut :

$$\mathbf{T}_{\text{ell}} = \begin{pmatrix} R_N^2 \cdot \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & R_M^2 \end{pmatrix} \quad (5.164)$$

avec :

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \\ R_M &= \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (5.165)$$

5.9.1 Coordonnées ellipsoïdales $(\lambda, \varphi) \rightarrow$ Coordonnées projetées (E, N)

Les formules de projection sont données par :

$$\mathbf{X}(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} E(\lambda, \varphi) \\ N(\lambda, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \lambda \\ a \cdot \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \left(\frac{1-e \cdot \sin \varphi}{1+e \cdot \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right] \end{pmatrix} \quad (5.166)$$

et le tenseur métrique est donné par :

$$\mathbf{P}_{\text{Mercator/ell}} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & \frac{a^2 \cdot R_M^2}{R_N^2 \cdot \cos^2 \varphi} \end{pmatrix} \quad (5.167)$$

7. par opposition aux projections oblique et transverse.

la matrice de déformation est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{\text{Mercator/ell}} &= \mathbf{T}_{\text{ell}}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{\text{Mercator/ell}} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1-e^2 \cdot \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} & 0 \\ 0 & \frac{1-e^2 \cdot \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (5.168)$$

l'indicatrice de Tissot est donnée par :

$$m_{\max} = m_{\min} = \frac{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} \quad \text{avec} \quad d\mathbf{X}_{\max} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d\mathbf{X}_{\min} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\quad (5.169)$$

la convergence du méridien est nulle en tous points :

$$\mu(\lambda, \phi) = 0 \quad (5.170)$$

5.9.2 Coordonnées projetées $(E, N) \rightarrow$ Coordonnées ellipsoïdales (λ, φ)

Sans démonstration, les formules de projection inverse sont données par un développement limité :

$$\mathbf{u}(E, N) = \begin{pmatrix} \lambda(E, N) \\ \varphi(E, N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{a} \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_4 + \gamma_6 + \gamma_8 \end{pmatrix} \quad (5.171)$$

avec :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 2 \cdot \arctan\left(e^{\frac{N}{R}}\right) - \frac{\pi}{2} \\ \gamma_2 &= \left(\frac{e^2}{2} + \frac{5e^4}{24} + \frac{e^6}{12} + \frac{13e^8}{360}\right) \cdot \sin(2\gamma_1) \\ \gamma_4 &= \left(\frac{7e^4}{48} + \frac{29e^6}{240} + \frac{811e^8}{11520}\right) \cdot \sin(4\gamma_1) \\ \gamma_6 &= \left(\frac{7e^6}{120} + \frac{81e^8}{1120}\right) \cdot \sin(6\gamma_1) \\ \gamma_8 &= \left(\frac{4279e^8}{161280}\right) \cdot \sin(8\gamma_1)\end{aligned}\quad (5.172)$$

5.10 Projection de Mercator ellipsoïdale oblique

La projection de Mercator oblique, est une projection cylindrique conforme. La surface de référence est l'ellipsoïde de révolution paramétré par la longitude et la longitude ellipsoïdale (λ, φ) . Comme pour la projection de Mercator oblique sphérique, l'objectif est de déplacer le centre de projection (λ_0, φ_0) à une position ellipsoïdale donnée. Pour faire ceci, il n'est plus possible d'utiliser la méthode avec les rotations utilisée dans la projection de Mercator oblique sphérique. En effet, en faisant cela, les coordonnées 3D des points «tournés» \mathbf{x}^t ne seraient plus sur la surface de l'ellipsoïde, et la projection orthogonale, implicitement réalisée lorsque que nous recalculerions les coordonnées ellipsoïdales «tournées» (λ^t, φ^t) , détruirait la conformité de la projection. Dès lors, plusieurs solutions ont été envisagées. Elles sont toutes basées sur une projection conforme intermédiaire de l'ellipsoïde de révolution sur une sphère. Puis une fois sur la sphère, il est possible de

réaliser une projection de Mercator sphérique oblique. Le premier à avoir réalisé cette opération est le suisse M. Rosenmund en 1903 lors de la définition de la double projection conforme cylindrique à axe oblique, encore utilisée aujourd’hui. Ensuite, nous trouvons des formulations provenant de Laborde (1928) et de Hotine (1946) qui génèrent des résultats similaires au voisinage du centre de projection.

5.11 Projection de Mercator ellipsoïdale transverse

La projection de Mercator transverse, est une projection cylindrique conforme. La surface de référence est l’ellipsoïde de révolution paramétré par la longitude et la latitude ellipsoïdale (λ, φ).

5.12 Projection UTM (Universal Transverse Mercator)

5.13 Double projection conforme cylindrique à axe oblique Suisse

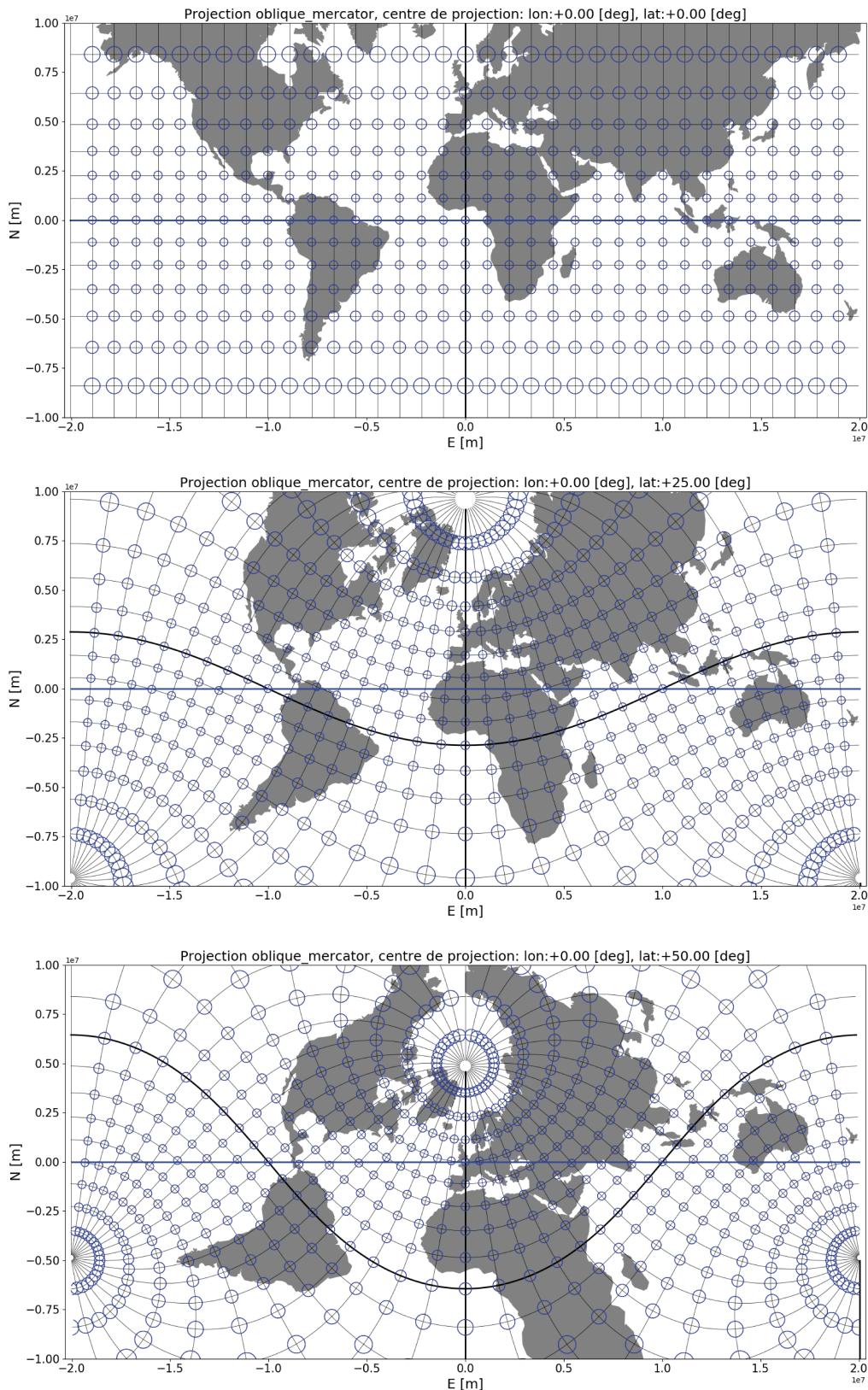


Figure 5.14 – Projections de Mercator obliques avec les indicatrices de Tissot pour différents centres de projection.

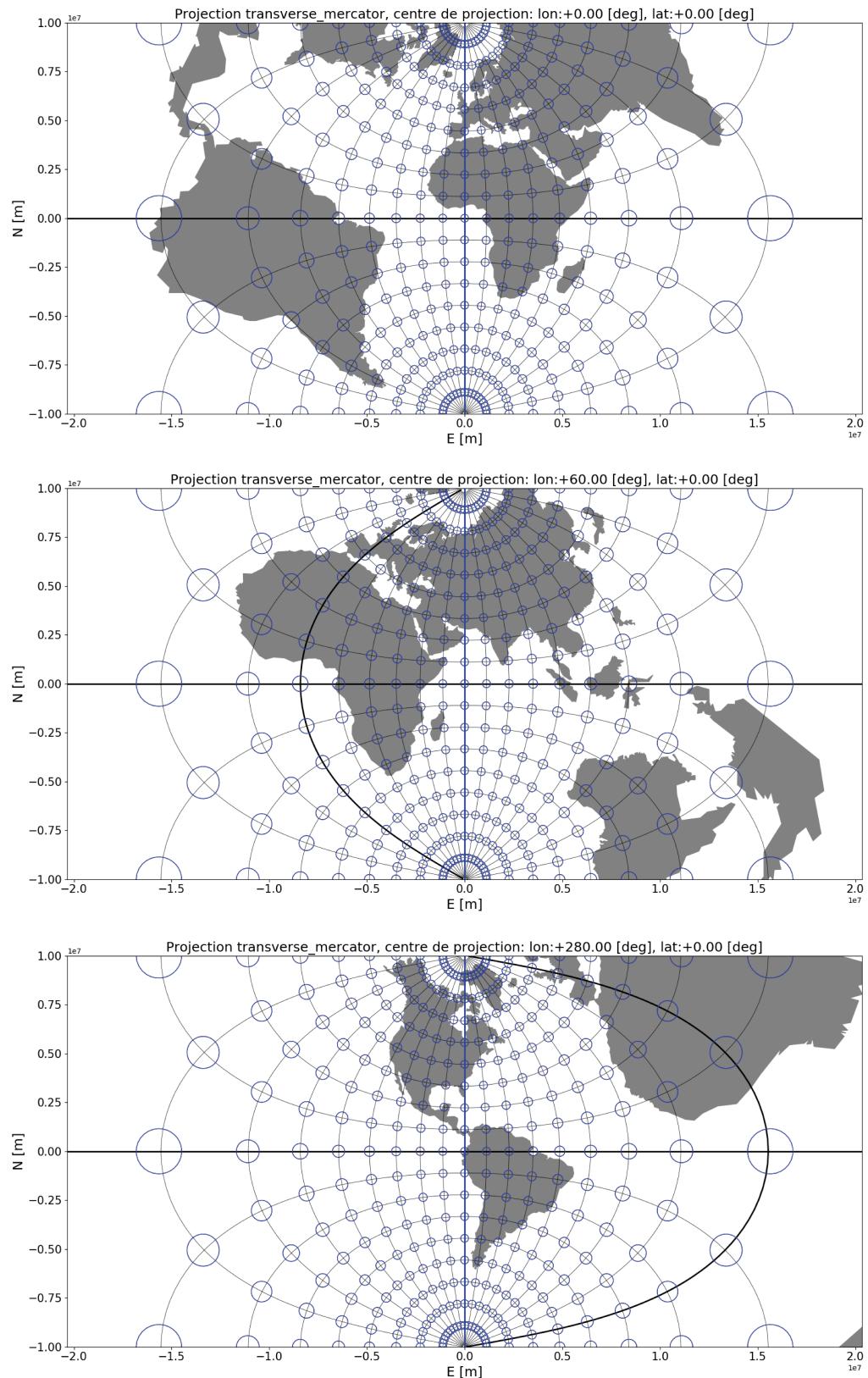


Figure 5.15 – Projections de Mercator transverses avec les indicatrices de Tissot pour différents centres de projection.