作业一: 罗必达法则的叙述与证明

余明壕
统计学 3190103127

2022 年 6 月 27 日

在建立求导法则和求导公式的过程中, 极限的理论和一些具体的极限起决定性的作用. 而有了求导理论和求导公式之后, 又可以利用它解决极限理论中某些不定式的极限问题, 而这些不定式的求值可通过罗必达 (L'Hopital) 法则进行求得.

1 问题描述

定理 1. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 a 点的某一去心临域 $U_0(a,\delta)$ 上可导, 而且满足:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0; \tag{1}$$

$$g^{'}(x) \neq 0, \forall x \in U_0(a,\delta); \tag{2}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = l \quad (l \text{ 为有限数或 } \pm\infty) \tag{3}$$

则有

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = l. \tag{4}$$

定理 2. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $U = \{x : |x| > a > 0\}$ 上可导, 而且满足:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0; \tag{5}$$

$$g^{'}(x) \neq 0, \forall x \in U; \tag{6}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = l \quad (l \text{ 为有限数或 } \pm\infty) \tag{7}$$

则有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}=l. \tag{8}$$

定理 3. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 a 点的某一去心临域 $U_0(a,\delta_0)(\delta_0>0)$ 上可导, 而且满足:

$$\lim_{x\to a}g(x)=\infty; \tag{9}$$

$$g^{'}(x)\neq 0,\forall x\in U_0(a,\delta_0); \tag{10}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}=l \quad (l\text{ 为有限数或 }\pm\infty) \tag{11}$$

则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}=l. \tag{12}$$

定理 4. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $U=\{x:|x|>a>0\}$ 上可导, 而且满足:

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty; \tag{13}$$

$$g^{'}(x)\neq 0,\forall x\in U; \tag{14}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}=l \quad (l\text{ 为有限数或 }\pm\infty) \tag{15}$$

则有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}=l. \tag{16}$$

2 证明

2.1 定理??的证明

此处考虑 l 为有限数的情形, 先证 $\lim\limits_{x\to a-0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

由条件 (**??**) 可知, 若补充定义 $f(a)=g(a)=0$, 则 $f(x),g(x)$ 在 a 点连续. 于是, 对 $\forall x\in(a-\delta,a)$, 在区间 $[x,a]$ 上应用柯西微分中值定理, 有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)},\quad x<\xi<a. \tag{17}$$

又由条件 (**??**), 可得

$$\lim_{x\to a-0}\frac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)}=\lim_{x\to a-0}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}=l. \tag{18}$$

所以
$$\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)}{g(x)}=l. \tag{19}$$

同理可证 $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$. 故由 (??)(??) 可知 (??) 成立.

2.2 定理??的证明

先证 $x\to+\infty$ 的情形. 作自变量变换 $x=\frac{1}{t}$, 则 $x\to+\infty$ 对应 $t\to0+0$. 于是有
$$\lim_{t\to0+0}\frac{f^{'}(\frac{1}{t})}{g^{'}(\frac{1}{t})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}, \tag{20}$$
并且由条件 (??), 有
$$\lim_{t\to0+0}f(\frac{1}{t})=0,\quad \lim_{t\to0+0}g(\frac{1}{t})=0. \tag{21}$$
应用定理 (??) 于开区间 $(0,\frac{1}{a})$ 上新变量 t 的函数 $f(\frac{1}{t})$ 和 $g(\frac{1}{t})$, 并注意到它们关于 t 的导数为
$$f^{'}(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2}),\quad g^{'}(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2}), \tag{22}$$
可得
$$\lim_{t\to0+0}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}=\lim_{t\to0+0}\frac{f^{'}(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g^{'}(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}=\lim_{t\to0+0}\frac{f^{'}(\frac{1}{t})}{g^{'}(\frac{1}{t})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}=l. \tag{23}$$
因此, 我们得到
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l. \tag{24}$$

同理可证 $x\to-\infty$ 的情形. 故可证得 (??) 成立.

2.3 定理??的证明

此处考虑 l 为有限值的情形. 先证 $x\to a-0$ 的情形.

$\forall\epsilon>0$, 由条件 (??) 和 (??) 可知, $\exists\delta_1>0, 0<\delta_1<\delta_0$, 当 $a-\delta_1<\zeta<a$ 时, 有
$$|\frac{f^{'}(\zeta)}{g^{'}(\zeta)}-l|<\frac{\epsilon}{3}. \tag{25}$$

对已经取定的 δ_1 及 $x \in (a-\delta_1, a)$, 在 $[a-\delta_1, x]$ 上应用柯西微分中值定理, $\exists \xi \in [a-\delta_1, x]$, 使得

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} - l = \frac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)} - l, \tag{26}$$

此处 $x_1 = a-\delta_1, \xi \in (a-\delta_1, a)$. 上式可化为

$$f(x)-f(x_1)-l[g(x)-g(x_1)] = [\frac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)} - l][g(x)-g(x_1)], \tag{27}$$

整理可得

$$f(x)-lg(x) = [f(x_1)-lg(x_1)] + [\frac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)} - l][g(x)-g(x_1)]. \tag{28}$$

在上式两边同除以 $g(x)$, 得到

$$\frac{f(x)}{g(x)} - l = [\frac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)} - l][1-\frac{g(x_1)}{g(x)}] + \frac{f(x_1)-lg(x_1)}{g(x)}. \tag{29}$$

再根据条件 (**??**), 对固定的 x_1, 有

$$\lim_{x\to a-0} \frac{f(x_1)-lg(x_1)}{g(x)} = 0, \quad \lim_{x\to a-0} \frac{g(x_1)}{g(x)} = 0. \tag{30}$$

所以 $\exists \delta_2 (0 < \delta_2 < \delta_1)$, 使得当 $a-\delta_2 < x < a$ 时, 有

$$|\frac{f(x_1)-lg(x_1)}{g(x)}| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |\frac{g(x_1)}{g(x)}| < \frac{1}{2}. \tag{31}$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $a-\delta < x < a$ 时, 有

$$|\frac{f(x)}{g(x)} - l| \le |\frac{f^{'}(\xi)}{g^{\xi}} - l||1-\frac{g(x_1)}{g(x)}| + |\frac{f(x_1)-lg(x_1)}{g(x)}| \le \frac{3}{2}\cdot\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \tag{32}$$

因此 $\lim_{x\to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

同理可证得 $x \to a+0$ 情形成立, 故有 (**??**) 成立.

2.4 定理??的证明

先证 $x \to +\infty$ 的情形. 作自变量变换 $x = \frac{1}{t}$, 则 $x \to +\infty$ 对应于 $t \to 0+0$. 于是有

$$\lim_{t\to 0+0} \frac{f^{'}(\frac{1}{t})}{g^{'}(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}, \tag{33}$$

并且由条件 (**??**), 有

$$\lim_{t\to 0+0} g(\frac{1}{t}) = \infty. \tag{34}$$

应用定理 (**??**) 于开区间 $(0, \frac{1}{a})$ 上新变量 t 的函数 $f(\frac{1}{t})$ 和 $g(\frac{1}{t})$, 并注意到它们关于 t 的导数为

$$f^{'}(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2}), \quad g^{'}(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2}), \tag{35}$$

可得

$$\lim_{t\to 0+0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0+0} \frac{f^{'}(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g^{'}(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} = \lim_{t\to 0+0} \frac{f^{'}(\frac{1}{t})}{g^{'}(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = l. \tag{36}$$

因此, 我们得到

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l. \tag{37}$$

同理可证 $x \to -\infty$ 的情形. 故可证得 (**??**) 成立.