EUCLIDEAN GEOMETRY

PHƯƠNG TÍCH - TỈ SỐ

HÀNG ĐIỂM ĐIỀU HÒA

ĐẲNG GIÁC - LIÊN HỢP

CỰC - ĐỐI CỰC

101 BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

Author
MARK NGUYEN

LaTeX
MARK NGUYEN

"Let no one ignorant of geometry enter here."

– Plato, probably –

"There is no royal road to geometry."

– Euclid of Alexandria –

Ngày 3 tháng 2 năm 2025

Dedicated to a friend of mine.

Mục lục

I Lí thuyết cơ sở 1

1 Phương tích - Trục đẳng phương 1

1.1 Phương tích của một điểm đối với một đường tròn 1

1.2 Trục đẳng phương và tâm đẳng phương 2

2 Định lí Ceva - Định lí Menelaus 4

2.1 Định lí Ceva 4

2.2 Định lí Menelaus 7

3 Tỉ số kép - Hàng điểm điều hòa - Tứ giác điều hòa 9

3.1 Tỉ số đơn, tỉ số kép 9

3.2 Hàng điểm điều hòa, chùm điều hòa 14

3.3 Tứ giác điều hòa 17

4 Đẳng giác - Cặp điểm liên hợp đẳng giác - Đường đối trung 18

4.1 Hai đường đẳng giác 18

4.2 Cặp điểm liên hợp đẳng giác - Đường tròn pedal 20

4.3 Đường đối trung - Điểm symmedian 21

5 Đường thẳng Simson - Đường thẳng Steiner 25

6 Tứ giác toàn phần 30

7 Cực và đối cực 30

8 Thêm một số định lí nổi tiếng 30

II Một số bài toán ứng dụng 31

Phần I

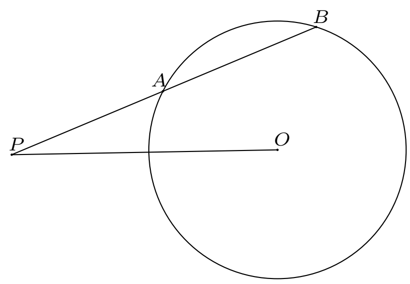
Lí thuyết cơ sở

§1 Phương tích - Trục đẳng phương

§1.1 Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

Định lí 1.1

Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm P bất kì. Một đường thẳng ℓ thay đổi đi qua P cắt (O) tại hai điểm A và B. Khi đó tích $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ không đổi và bằng $OP^2 - R^2$.



Định nghĩa 1.1

Đại lượng $OP^2 - R^2$ được gọi là phương tích của điểm P đối với đường tròn $(O; R)$. Kí hiệu: $\mathcal{P}_{P/(O)} = OP^2 - R^2$.

Như vậy $\mathcal{P}_{P/(O)} > 0$ khi và chỉ khi P nằm ngoài (O), $\mathcal{P}_{P/(O)} < 0$ khi và chỉ khi P nằm trong (O), và $\mathcal{P}_{P/(O)} = 0$ khi và chỉ khi P thuộc (O).

Tính chất 1.1

Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm ngoài (O). Qua P, kẻ cát tuyến PAB và tiếp tuyến PT tới (O). Khi đó $\mathcal{P}_{P/(O)} = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = PT^2$.

Tính chất 1.2

Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại P. Khi đó, bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.

Tính chất 1.3

Cho hai đường thẳng AB và PT cắt nhau tại P. Khi đó (ABT) tiếp xúc PT tại T khi và chỉ khi $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = PT^2$.

Tính chất 1.4

Cho AB là một đường kính bất kì của (O). Khi đó $\mathcal{P}_{P/(O)} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$.

§1.2 Trục đẳng phương và tâm đẳng phương

Bài toán

Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$. Tìm quỹ tích các điểm P có cùng phương tích với hai đường tròn này.

LỜI GIẢI. Ta có $\mathcal{P}_{P/(O_1)} = \mathcal{P}_{P/(O_2)}$ khi và chỉ khi

$$PO_1^2 - R_1^2 = PO_2^2 - R_2^2 \Leftrightarrow PO_1^2 - PO_2^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Nếu $O_1 \equiv O_2$, không có điểm P nào thỏa mãn. Nếu O_1 và O_2 không trùng nhau, thì tồn tại duy nhất điểm H trên đoạn thẳng O_1O_2 sao cho $HO_1^2 - HO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$. Như vậy

$$PO_1^2 - PO_2^2 = HO_1^2 - HO_2^2.$$

Áp dụng định lí Pythagore, tập hợp điểm P là một đường thẳng Δ vuông góc với O_1O_2. Nếu gọi M là trung điểm O_1O_2 thì Δ cắt O_1O_2 tại điểm H thỏa mãn

$$\overline{MH} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2\overline{O_1O_2}}.$$

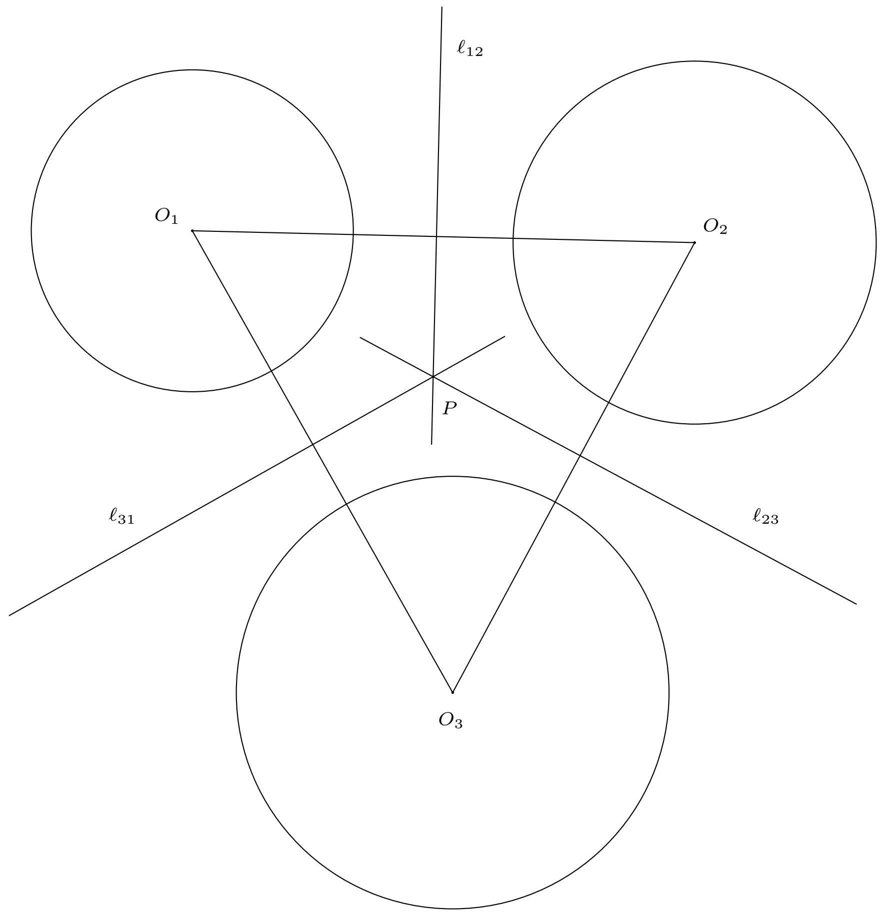
Đây là một độ dài cố định, do đó đường thẳng Δ cố định. ∎

Định nghĩa 1.2

Tập hợp các điểm có cùng phương tích với hai đường tròn không đồng tâm là một đường thẳng vuông góc với đường nối tâm của hai đường tròn. Đường thẳng này được gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn đó.

Định lí 1.2

Nếu ba đường tròn có tâm không thẳng hàng thì trục đẳng phương của từng cặp hai trong ba đường tròn đồng quy tại một điểm.



Chứng minh. Xét ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có tâm không thẳng hàng. Gọi ℓ_{ij} (với $i \neq j$ và $i, j \in \{1; 2; 3\}$) là trục đẳng phương của (O_i) và (O_J).

Do O_1, O_2, O_3 không thẳng hàng nên hai đường thẳng ℓ_{12} và ℓ_{23} cắt nhau. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng ấy. Khi đó, ta có $\mathcal{P}_{P/(O_1)} = \mathcal{P}_{P/(O_2)}$ và $\mathcal{P}_{P/(O_2)} = \mathcal{P}_{P/(O_3)}$. Suy ra $\mathcal{P}_{P/(O_3)} = \mathcal{P}_{P/(O_1)}$, hay P thuộc đường thẳng ℓ_{31}. Vì vậy ℓ_{12}, ℓ_{23}, ℓ_{31} đồng quy. $\square$

Định nghĩa 1.3

Điểm giao nhau trên là tâm đẳng phương của ba đường tròn.

Định nghĩa 1.4

Một bộ đường tròn đồng trục là một tập hợp các đường tròn có chung một trục đẳng phương.

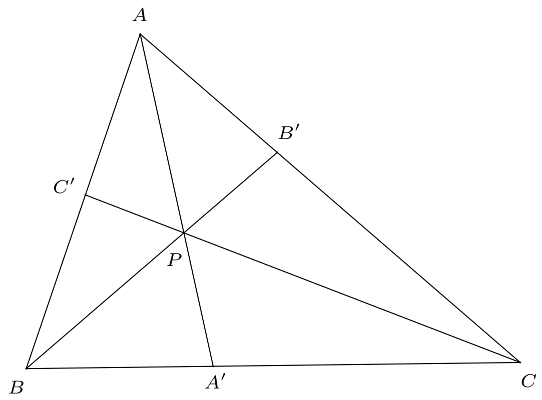
§2 Định lí Ceva - Định lí Menelaus

§2.1 Định lí Ceva

Định lí 2.1

(*Ceva*) Cho tam giác ABC và các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB của tam giác, sao cho không có điểm nào nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó, hoặc có đúng hai điểm nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó. Khi đó các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1.$$



Chứng minh. Ở đây ta chỉ chứng minh trường hợp không có điểm nào nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó. Đối với trường hợp có đúng hai điểm nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó, ta dễ dàng chứng minh tương tự.

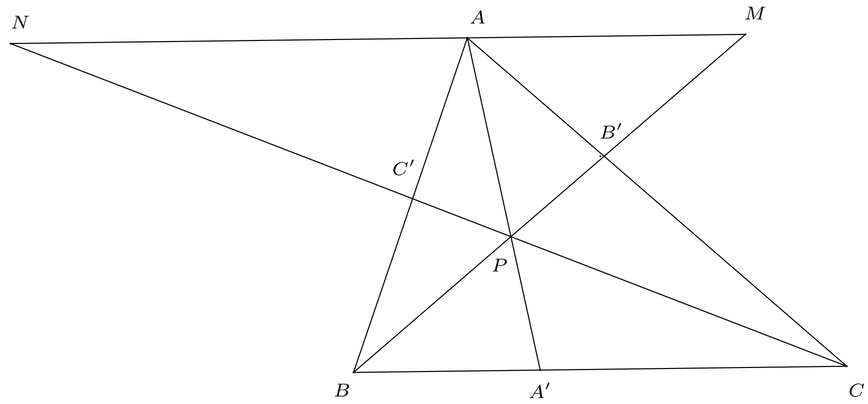
Trước hết, ta sẽ chứng minh mệnh đề thuận: nếu các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy thì

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Thật vậy, xét đường thẳng ℓ đi qua A song song BC, cắt đường thẳng BB' tại M và đường thẳng CC' tại N. Gọi P là điểm đồng quy của các đường thẳng AA', BB', CC'.

Ta có các tỉ lệ thức $\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AM}}$ (do $\triangle B'BC \sim \triangle B'MA$), $\frac{\overline{C'B}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NA}}$ (do $\triangle C'CB \sim \triangle C'NA$), và $\frac{\overline{A'B}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{A'P}}{\overline{AP}}$ (do $\triangle A'PB \sim \triangle APM$ và $\triangle A'PC \sim \triangle APN$). Do đó

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{A'C}} = 1.$$



Bây giờ, ta sẽ chỉ ra mệnh đề đảo vẫn đúng: nếu ta có các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB (sao cho không có điểm nào nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó) thỏa mãn

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1$$

thì các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng các đường thẳng AA', BB', CC' không đồng quy. Gọi P là giao điểm của BB' và CC'; A_0 là giao điểm của AP và BC.

Theo mệnh đề thuận, ta có

$$\frac{\overline{BA_0}}{\overline{A_0C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Kết hợp với tỉ lệ giả thiết, ta thu được $\dfrac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \dfrac{\overline{BA_0}}{\overline{A_0C}}$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi A' trùng A_0, vô lí. Vì thế giả sử sai, hay ta có mệnh đề đảo đúng.

Vì vậy, định lí Ceva được chứng minh. □

Định nghĩa 2.1

Các đoạn thẳng AA', BB', CC' được xác định như trên được gọi là các cevian của $\triangle ABC$.

Hệ quả 2.1

(*Trọng tâm*) Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng BC, CA, AB. Khi đó AM, BN, CP đồng quy tại trọng tâm G của tam giác ABC.

Hệ quả 2.2

(*Trực tâm*) Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên BC, CA, AB. Khi đó AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H của tam giác ABC.

Đối với trực tâm thì sẽ hơi khó thấy, nhưng chú ý rằng $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB\cos B}{AC\cos C}$, v.v.

Hệ quả 2.3

(*Điểm Gergonne*) Cho tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh BC, CA, AB. Khi đó AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm Gergonne G_e của tam giác ABC.

Hệ quả 2.4

(*Điểm Nagel*) Cho tam giác ABC. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp ứng với góc A, B, C của tam giác ABC với các cạnh BC, CA, AB. Khi đó AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại điểm Nagel N_a của tam giác ABC.

Định lí 2.2

(*Ceva lượng giác*) Cho tam giác ABC và các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB của tam giác, sao cho không có điểm nào nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó, hoặc có đúng hai điểm nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó. Khi đó các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{\sin(AA';AB)}{\sin(AA';AC)}\cdot\frac{\sin(BB';BC)}{\sin(BB';BA)}\cdot\frac{\sin(CC';CA)}{\sin(CC';CB)}=1.$$

Chứng minh. Theo định lí sine, ta có

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}}=\frac{\sin(AA';AB)}{\sin(A'A;A'B)}\quad\text{và}\quad\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}=\frac{\sin(AA';AC)}{\sin(A'A;A'C)}.$$

Mà $\sin(A'A;A'B)=\sin(A'A;A'C)$ nên

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}}:\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}=\frac{\sin(AA';AB)}{\sin(AA';AC)}$$

Tương tự ta thu được

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}=\frac{\sin(BB';BC)}{\sin(BB';BA)}\ \text{và}\ \frac{\overline{C'A}}{\overline{CA}}:\frac{\overline{BC'}}{\overline{BC}}=\frac{\sin(CC';CA)}{\sin(CC';CB)}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\frac{\sin(AA';AB)}{\sin(AA';AC)}\cdot\frac{\sin(BB';BC)}{\sin(BB';BA)}\cdot\frac{\sin(CC';CA)}{\sin(CC';CB)}&=\left(\frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}}:\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}\right)\cdot\left(\frac{\overline{B'C}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}\right)\cdot\left(\frac{\overline{C'A}}{\overline{CA}}:\frac{\overline{BC'}}{\overline{BC}}\right)\\&=\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}=1\end{aligned}$$

theo định lí Ceva. □

Hệ quả 2.5

(*Tâm nội tiếp*) Các đường phân giác trong của tam giác ABC đồng quy tại tâm nội tiếp I của tam giác.

Hệ quả 2.6

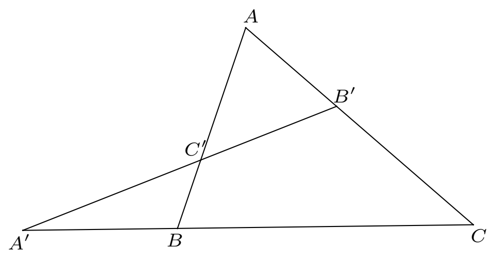
(*Điểm Lemoine*) Cho tam giác ABC. Qua phân giác góc A kẻ đường đối xứng với trung tuyến ứng với điểm A trong tam giác, cắt BC tại A_0. Tương tự xác định các điểm B_0, C_0. Khi đó AA_0, BB_0, CC_0 đồng quy tại điểm Lemoine L_e của tam giác ABC.

§2.2 Định lí Menelaus

Định lí 2.3

(*Menelaus*) Cho tam giác ABC và các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các đường BC, CA, AB của tam giác, sao cho có đúng một điểm nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó, hoặc cả ba điểm đều nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó. Khi đó các điểm A', B', C' thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = -1.$$



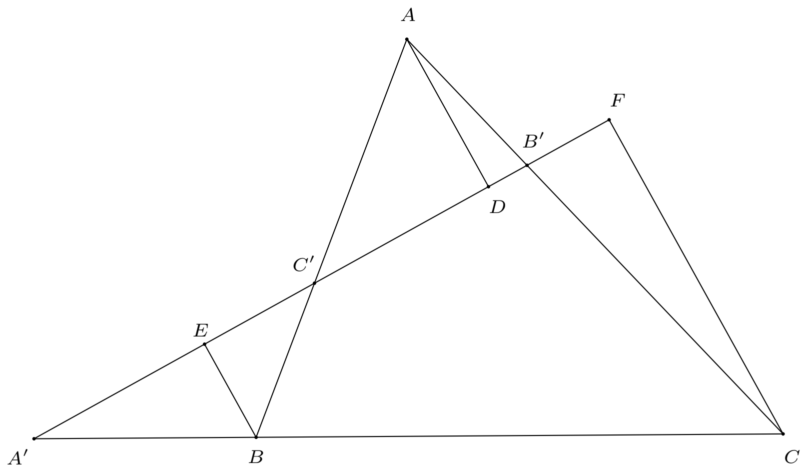
Chứng minh. Ở đây ta chỉ chứng minh trường hợp có đúng một điểm nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó. Đối với trường hợp có cả ba điểm nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó, ta dễ dàng chứng minh tương tự.

Trước hết, ta sẽ chứng minh mệnh đề thuận: nếu các các điểm A', B', C' thẳng hàng thì

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Thật vậy, gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm A, B, C trên đường thẳng $A'B'$. Khi đó, ta có các tỉ lệ thức $\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{FC}}$ (do $\triangle A'BE \sim \triangle A'CF$), $\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{DA}}$ (do $\triangle B'CF \sim \triangle B'AD$), và $\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{EB}}$ (do $\triangle C'AD \sim \triangle C'BE$). Từ đó ta thu được

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{EB}} = -1.$$



Bây giờ, ta sẽ chỉ ra mệnh đề đảo vẫn đúng: nếu ta có các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB (trong đó có đúng một điểm nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó) thỏa mãn

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = -1$$

thì A', B', C' thẳng hàng. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng các điểm A', B', C' không thẳng hàng. Gọi A_0 là giao điểm của $B'C'$ và BC.

Theo mệnh đề thuận, ta có

$$\frac{\overline{BA_0}}{\overline{A_0C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Kết hợp với tỉ lệ giả thiết, ta thu được $\dfrac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \dfrac{\overline{BA_0}}{\overline{A_0C}}$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi A' trùng A_0, vô lí. Vì thế giả sử sai, hay ta có mệnh đề đảo đúng.

Vì vậy, định lí Menelaus được chứng minh. □

Định lí 2.4

(*Menelaus lượng giác*) Cho tam giác ABC và các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB của tam giác, sao cho có đúng một điểm nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó, hoặc cả ba điểm đều nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó. Khi đó các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{\sin(AA';AB)}{\sin(AA';AC)} \cdot \frac{\sin(BB';BC)}{\sin(BB';BA)} \cdot \frac{\sin(CC';CA)}{\sin(CC';CB)} = -1.$$

Chứng minh. Ta chứng minh tương tự như định lí Ceva lượng giác. □

§3 Tỉ số kép - Hàng điểm điều hòa - Tứ giác điều hòa

§3.1 Tỉ số đơn, tỉ số kép

Tỉ số đơn - tỉ số kép của hàng điểm

Định nghĩa 3.1

Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng với B không trùng C. Tỉ số đơn của A, B, C là một số thực, kí hiệu là $(A, B; C)$, được xác định như sau: $(A, B; C) = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

Định nghĩa 3.2

Bộ bốn điểm đôi một khác nhau, có kể thứ tự, cùng thuộc một đường thẳng được gọi là hàng điểm. Đường thẳng chứa bốn điểm đó được gọi là giá của hàng điểm.

Định nghĩa 3.3

Tỉ số kép của hàng điểm A, B, C, D là một số thực (khác 1), kí hiệu là $(A, B; C, D)$, được xác định như sau: $(A, B; C, D) = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \dfrac{(A, B; C)}{(A, B; D)}$.

Tính chất 3.1

Một số tính chất cơ bản của tỉ số kép từ định nghĩa trên:

- $(A, B; C, D) = (C, D; A, B) = (B, A; D, C) = (D, C; A, B)$;
- $(A, B; C, D) = \dfrac{1}{(B, A; C, D)}$;
- $(A, B; C, D) = 1 - (A, C; B, D) = 1 - (D, B; C, A)$;
- $(A, B; C, D) \neq 1$;
- Nếu $(A, B; C, D) = (A', B; C, D)$ thì $A \equiv A'$ và tương tự cho các điểm B, C, D.

Tỉ số kép của chùm đường thẳng

Định nghĩa 3.4

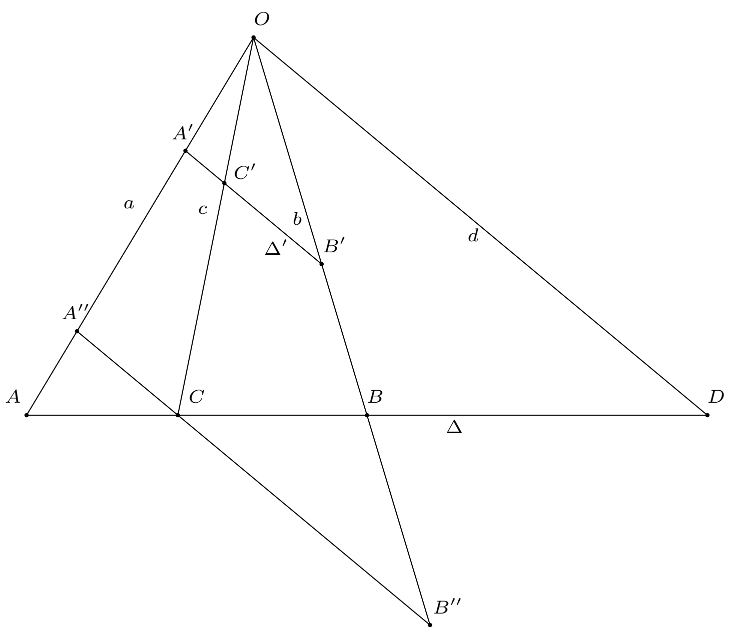
Một tập hợp các đường thẳng đồng quy được gọi là chùm đầy đủ đường thẳng. Điểm đồng quy được gọi là tâm của chùm.

Định nghĩa 3.5

Bộ bốn đường thẳng đôi một khác nhau, có kể đến thứ tự, cùng thuộc một chùm đầy đủ đường thẳng được gọi là chùm đường thẳng.

Định lí 3.1

Cho chùm đường thẳng a, b, c, d tâm O. Một đường thẳng Δ không đi qua O lần lượt cắt a, b, c, d tại A, B, C, D. Đường thẳng Δ' không đi qua O lần lượt cắt a, b, c tại A', B', C'. Khi đó $\Delta' \parallel d$ khi và chỉ khi $(A, B; C, D) = (A', B'; C')$.



Chứng minh. Qua C kẻ đường thẳng song song với d, cắt a và b lần lượt tại A'' và B''. Theo định nghĩa của tỉ số kép và định lí Thalès, ta có

$$(A, B; C, D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{DA}} : \frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA''}}{\overline{DO}} : \frac{\overline{CB''}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{CA''}}{\overline{CB''}} = (A'', B''; C). \tag{1}$$

Nói cách khác, $(A, B; C, D) = (A', B'; C')$ xảy ra khi và chỉ khi $(A'', B''; C) = (A', B'; C')$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\Delta' \parallel A''B'' \parallel d$. $\square$

Từ đó, ta dẫn đến định lí sau:

Định lí 3.2

Cho chùm đường thẳng a, b, c, d tâm O. Một đường thẳng Δ không đi qua O lần lượt cắt a, b, c, d tại A, B, C, D. Khi đó $(A, B; C, D)$ không phụ thuộc vào cách chọn Δ.

Định nghĩa 3.6

Số không đổi được đề cập trong định lí trên được gọi là tỉ số kép của chùm a, b, c, d, kí hiệu: $(a, b; c, d) = (A, B; C, D)$.

Ngoài ra, nếu ta biết bốn điểm A, B, C, D lần lượt nằm trên chùm a, b, c, d (có tâm O) thì ta có thể viết chùm tỉ số kép của chùm a, b, c, d dưới dạng $O(A, B; C, D)$.

`Phép chiếu xuyên tâm`

Định nghĩa 3.7

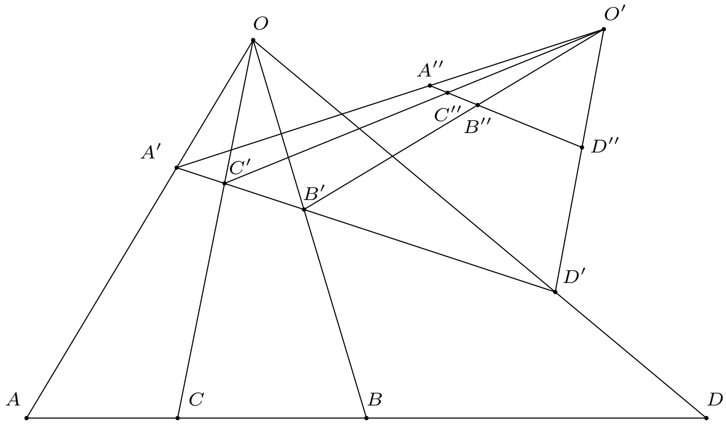
Cho hai đường thẳng d, d' và một điểm S không thuộc d, d'. Xét ánh xạ $f : d \to d'$, được xác định như sau: $f(M) = M'$ sao cho S, M, M' thẳng hàng. Khi đó f được gọi là phép chiếu xuyên tâm. Điểm S được gọi là tâm chiếu của f.

Nhờ phép chiếu xuyên tâm, ta có thể phát biểu lại định lí về tỉ số kép của chùm đường thẳng: *Phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỉ số kép.* Tức là qua phép chiếu xuyên tâm O

$$\begin{aligned} f : \Delta &\to \Delta' \\ A &\mapsto A' \\ B &\mapsto B' \\ C &\mapsto C' \\ D &\mapsto D' \end{aligned}$$

thì $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$. Trong trường hợp $\Delta \parallel d$ thì D được xem là trùng với điểm vô cùng của d, kí hiệu là ∞. Điều này gợi ra một số nhận xét như sau:

- Trong hình học xạ ảnh, mọi phương trên mặt phẳng đều có một điểm vô cùng ứng với phương đó. Vì vậy các đường thẳng song song có thể coi là đồng quy tại điểm vô cùng ứng với phương của các đường thẳng đó.
- Phép chiếu song song có thể được coi là phép chiếu xuyên tâm, với tâm chiếu là điểm vô cùng.
- Bằng phép chiếu xuyên tâm, hệ thức (1) tương đương $(A, B; C, D) = (A', B'; C', \infty) = (A', B'; C')$.
- Nhờ những cách chọn tâm chiếu khác nhau, bắt đầu từ hàng điểm A, B, C, D, ta có thể nhận vô số hàng điểm có cùng tỉ số kép với A, B, C, D.



Tỉ số kép của bốn điểm trên đường tròn

Định lí 3.3

Với mọi chùm $O(A, B; C, D)$, ta có

$$O(A, B; C, D) = \frac{\sin(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})} : \frac{\sin(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})}$$

Chú ý rằng trong cách phát biểu của Định lí 3.3, các điểm A, B, C, D không nhất thiết cùng nằm trên một đường thẳng.

Chứng minh. Theo định lí sine, ta có $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{OA \cdot \sin(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})}{OB \cdot \sin(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})}$ và $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \dfrac{OA \cdot \sin(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})}{OB \cdot \sin(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})}$.

Do đó $O(A, B; C, D) = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \dfrac{\sin(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})} : \dfrac{\sin(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})}$. □

Định lí 3.4

Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D cố định trên đường tròn (O) và điểm M chuyển động trên (O). Khi đó $M(A, B; C, D)$ không đổi. Trong trường hợp M trùng với một trong bốn điểm trên, chẳng hạn A, thì MA được coi là tiếp tuyến của (O) tại A.

Chứng minh. Đây là hệ quả trực tiếp của Định lí 3.3. □

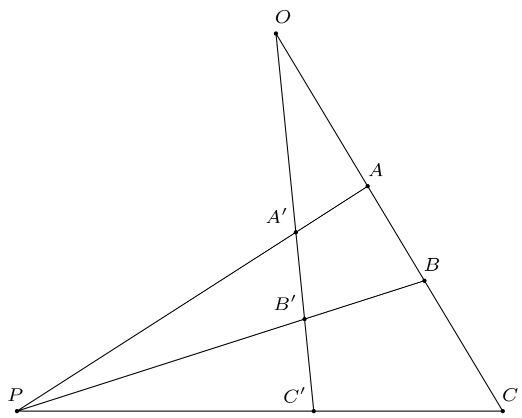
Định nghĩa 3.8

Tỉ số kép $M(A, B; C, D)$ được gọi là tỉ số kép của bốn điểm phân biệt A, B, C, D trên đường tròn (O), kí hiệu: $(A, B; C, D)$.

Tính chất

Tính chất 3.2

Hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại O. Trên d lấy các điểm A, B, C; trên d' lấy các điểm A', B', C'. Khi đó $(O, A; B, C) = (O, A'; B', C')$ khi và chỉ khi AA', BB', CC' đôi một song song hoặc đồng quy.

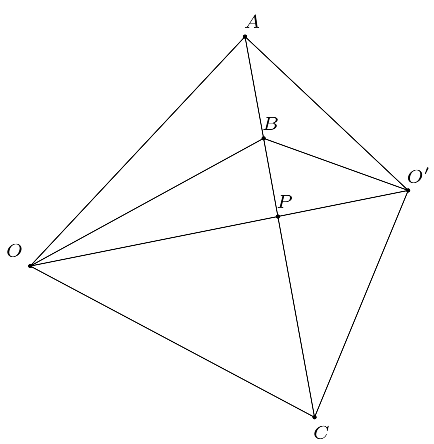


Chứng minh. Trong trường hợp AA', BB', CC' đôi một song song thì ta dễ dàng chứng minh theo định lí Thalès. Ta xét trường hợp AA', BB', CC' đồng quy.

Gọi P là giao của AA' và BB'; C'' là giao của PC' và đường thẳng d. Xét phép chiếu xuyên tâm P đi từ d' vào d: $O \mapsto O$, $A' \mapsto A$, $B' \mapsto B$, $C' \mapsto C''$. Phép chiếu này bảo toàn tỉ số kép, hay ta có $(O, A'; B', C') = (O, A; B, C'')$. Do đó $(O, A; B, C) = (O, A'; B', C')$ khi và chỉ khi $(O, A; B, C) = (O, A; B, C'')$, tương đương $C \equiv C''$ hay AA', BB', CC' đồng quy. $\square$

Tính chất 3.3

Cho hai chùm $O(A, B; C, O')$ và $O'(A, B; C, O)$. Khi đó A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $O(A, B; C, O') = O'(A, B; C, O)$.



Chứng minh. Gọi P là giao điểm của BC và OO'; A_1 là giao của OA và BC, A_2 là giao của $O'A$ và BC. Ta có $O(A,B;C,O') = O(A_1,B;C,P)$ và $O'(A,B;C,O) = O'(A_2,B;C,P)$. Như vậy $O(A,B;C,O') = O'(A,B;C,O)$ khi và chỉ khi $O(A_1,B;C,P) = O'(A_2,B;C,P)$, tương đương $A_1 \equiv A_2 \equiv A$ hay A, B, C thẳng hàng. □

Tính chất 3.4

Nếu hai chùm $(a,b;c,d)$, $(a',b';c',d')$ có $a \perp a'$, $b \perp b'$, $c \perp c'$, $d \perp d'$ thì $(a,b;c,d) = (a',b';c',d')$.

Chứng minh. Từ giả thiết, ta có $\sin(\vec{c};\vec{a}) \equiv \sin(\vec{c'};\vec{a'}) \pmod{2\pi}$. Theo Định lí 3.3 ta có

$$(a,b;c,d) = \frac{\sin(\vec{c};\vec{a})}{\sin(\vec{c};\vec{b})} : \frac{\sin(\vec{d};\vec{a})}{\sin(\vec{d};\vec{b})} \quad \text{và} \quad (a',b';c',d') = \frac{\sin(\vec{c'};\vec{a'})}{\sin(\vec{c'};\vec{b'})} : \frac{\sin(\vec{d'};\vec{a'})}{\sin(\vec{d'};\vec{b'})}.$$

Kết hợp những điều trên ta thu được điều phải chứng minh. □

Tính chất 3.5

Các phép biến hình thông thường (dời hình, đồng dạng, nghịch đảo) đều bảo toàn tỉ số kép.

§3.2 Hàng điểm điều hòa, chùm điều hòa

Hàng điểm điều hòa

Định nghĩa 3.9

Một hàng điểm A, B, C, D được gọi là một hàng điểm điều hòa nếu tỉ số kép

$$(A,B;C,D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

có giá trị bằng -1. Khi đó, ta nói cặp điểm A, B chia điều hòa cặp điểm C, D; hoặc cặp điểm A, B và cặp điểm C, D là hai cặp điểm liên hợp điều hòa.

Kết hợp tính chất của tỉ số kép, nếu $(A,B;C,D) = -1$ thì ta cũng có $(A,B;D,C) = (B,A;C,D) = (B,A;D,C) = (C,D;A,B) = (C,D;B,A) = (D,C;A,B) = (D,C;B,A) = -1$.

Định lí 3.5

Cho hàng điểm A, B, C, D với I là trung điểm của AB. Các khẳng định sau là tương đương:

i) $(A,B;C,D) = -1$;

ii) $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$;

iii) $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$ (*hệ thức Descartes*);

iv) $IA^2 = IB^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}$ (*hệ thức Newton*);

v) $\overline{CI} \cdot \overline{CD} = \overline{CA} \cdot \overline{CB}$ (*hệ thức Maclaurin*).

Chứng minh. Biểu thức mệnh đề i tương đương ii là điều hiển nhiên. Ta chứng minh các biểu thức mệnh đề i tương đương iii, iv, v; tương ứng với việc chứng minh hệ thức Descartes, Newton và Maclaurin.

Trước hết, coi giá của hàng điểm A, B, C, D như một trục số và đặt tọa độ của A, B, C, D lần lượt là a, b, c, d. Khi đó $-1 = (A, B; C, D) = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}$ và tọa độ của I là $\frac{a+b}{2}$.

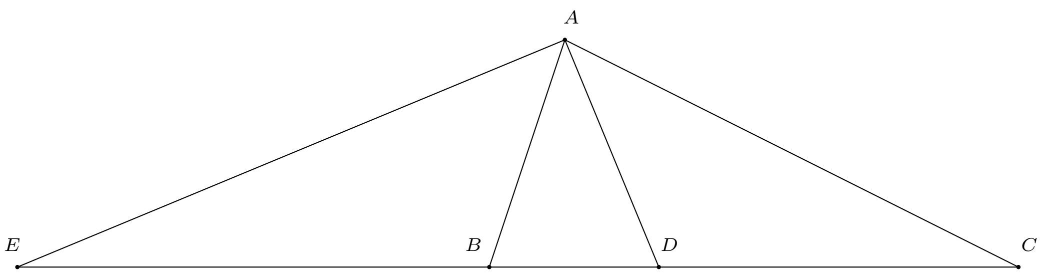
- *Chứng minh hệ thức Descartes.* Nghĩa là ta cần chứng minh $\frac{2}{b-a} = \frac{1}{c-a} + \frac{1}{d-a}$.
  Đẳng thức tương đương
  $$\frac{1}{b-a} - \frac{1}{c-a} = \frac{1}{d-a} - \frac{1}{b-a} \Leftrightarrow \frac{c-b}{(b-a)(c-a)} = \frac{b-d}{(d-a)(b-a)} \Leftrightarrow \frac{c-a}{c-b} = -\frac{d-a}{d-b}.$$
  Đây chính là khẳng định ii.
- *Chứng minh hệ thức Newton.* Nghĩa là ta cần chứng minh $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(c - \frac{a+b}{2}\right)\left(d - \frac{a+b}{2}\right)$.
  Đẳng thức tương đương
  $$\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = cd - \frac{(a+b)(c+d)}{2} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ab + cd = \frac{(a+b)(c+d)}{2}$$
  $$\Leftrightarrow 2ab + 2cd = ac + ad + bc + bd \Leftrightarrow (c-a)(d-b) = -(d-a)(c-b).$$
  Đây chính là khẳng định ii.
- *Chứng minh hệ thức Maclaurin.* Nghĩa là ta cần chứng minh
  $$\left(\frac{a+b}{2} - c\right)(d-c) = (a-c)(b-c) \Leftrightarrow \frac{(a+b)(c+d)}{2} = ab + cd$$
  nhưng đây lại là đẳng thức tương đương của khẳng định iv.

Chứng minh hoàn tất. □

Các hàng điểm điều hòa đặc biệt

Tính chất 3.6

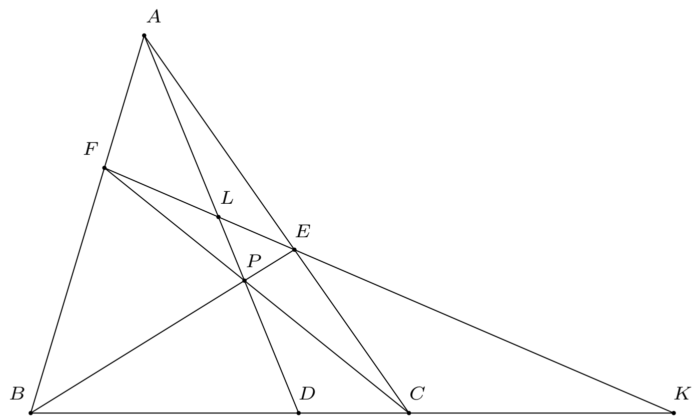
(*Hàng phân giác*) Cho tam giác ABC có AD và AE lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của góc BAC (với $\{D; E\} \in BC$). Khi đó $(B, C; D, E) = -1$.



Chứng minh. Đây là hệ quả trực tiếp của định lí đường phân giác. □

Tính chất 3.7

(*Hàng tứ giác toàn phần*) Cho tam giác ABC và một điểm P bất kì không nằm trên cạnh của tam giác ABC. AP, BP, CP cắt cạnh tam giác đối diện tại D, E, F. Giả sử EF cắt BC tại K. Khi đó $(B, C; D, K) = -1$.



Chứng minh. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABC và cát tuyến KEF: $\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1$.

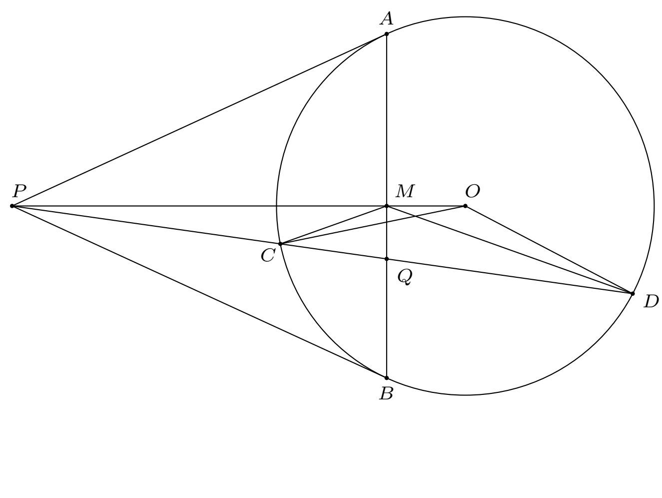
Áp dụng định lí Ceva cho tam giác ABC và bộ ba cevian AD, BE, CF: $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$.

Lấy phép chia vế trái của hai hệ thức trên ta thu được $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} : \frac{\overline{KB}}{\overline{KC}} = (B, C; D, K) = -1$. □

Nhận xét. Nếu ta gọi L là giao điểm của AD và EF thì ta có $-1 = (B, C; D, K) = A(B, C; D, K) = (F, E; L, K)$ và $-1 = (B, C; D, K) = F(B, C; D, K) = (A, P; D, L)$.

Tính chất 3.8

(*Hàng tiếp tuyến, cát tuyến*) Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm ngoài đường tròn (O). Từ P kẻ hai tiếp tuyến PA, PB (với $\{A; B\} \in (O)$), và một cát tuyến PCD (với C nằm giữa P và D) tới (O). AB cắt CD tại Q. Khi đó $(P, Q; C, D) = -1$.



Chứng minh. Gọi M là giao điểm của OP và AB. Ta có $\overline{PM} \cdot \overline{PO} = PA^2 = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$, hay tứ giác $OMCD$ nội tiếp. Khi đó $\angle PMC = \angle ODC = \angle OCD = \angle OMD$, mà $AB \perp OP$ nên ta có MQ là phân giác trong của góc CMD, đồng thời MP là phân giác ngoài của góc CMD. Theo tính chất về hàng phân giác, ta thu được $(P, Q; C, D) = -1$. □

Chùm điều hòa

Định nghĩa 3.10

Cho chùm a, b, c, d. Khi đó a, b, c, d được gọi là chùm điều hòa nếu $(a, b; c, d) = -1$.

Định lí 3.6

Chùm a, b, c, d là chùm điều hòa khi và chỉ khi mọi đường thẳng song song với một đường thẳng bất kì của chùm định ra trên ba đường còn lại hai đoạn thẳng bằng nhau.

Định lí 3.7

Cho chùm điều hòa a, b, c, d. Khi đó $c \perp d$ khi và chỉ khi c là hai phân giác của góc tạo bởi a và b và d là hai phân giác của góc tạo bởi a và b.

Chứng minh. Gọi O là tâm của chùm. Kẻ một đường thẳng song song với d không trùng d, cắt a, b, c lần lượt tại A, B, C. Theo Định lí 3.6, ta có $CA = CB$. Như vậy $c \perp d$ khi và chỉ khi $OC \perp AB$, tương đương tam giác OAB cân tại O hay OC là phân giác của góc AOB. □

§3.3 Tứ giác điều hòa

Định nghĩa 3.11

Một tứ giác nội tiếp $ABCD$ được gọi là điều hòa nếu $(A, C; B, D) = -1$.

Định lí 3.8

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Các mệnh đề sau là tương đương:

i) $(A, C; B, D) = -1$;

ii) $AB \cdot CD = AD \cdot BC = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD$;

iii) AC là đường đối trung của các tam giác BAD và BCD;

iv) BD là đường đối trung của các tam giác ABC và ADC;

v) Tiếp tuyến tại A và C của (O) cắt nhau trên BD;

vi) Tiếp tuyến tại B và D của (O) cắt nhau trên AC.

§4 Đẳng giác - Cặp điểm liên hợp đẳng giác - Đường đối trung

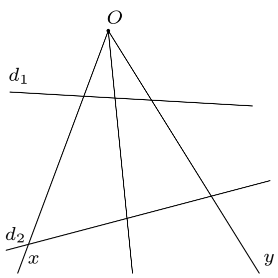
§4.1 Hai đường đẳng giác

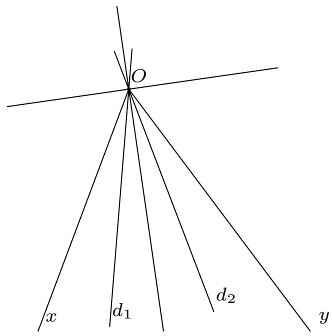
Định nghĩa 4.1

Cho góc xOy. Hai đường thẳng d_1 và d_2 được gọi là hai đường đối song ứng với góc xOy khi và chỉ khi tồn tại đường thẳng d_3 sao cho $d_3 \parallel d_2$ và d_3 đối xứng với d_1 qua phân giác (trong hoặc ngoài) của góc xOy (hoặc ngược lại).

Định nghĩa 4.2

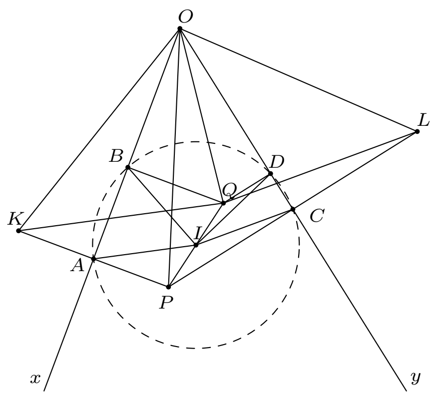
Cho góc xOy. Hai đường thẳng d_1 và d_2 được gọi là hai đường đẳng giác trong góc xOy nếu d_1 và d_2 cùng đi qua O, đồng thời đối xứng nhau qua phân giác (trong hoặc ngoài) của góc xOy.





Định lí 4.1

Cho góc xOy và hai điểm P, Q bất kì nằm trong mặt phẳng. Gọi A và B lần lượt là hình chiếu vuông góc của P và Q lên Ox, C và D lần lượt là hình chiếu vuông góc của P và Q lên Oy. Khi đó, OP và OQ là hai đường đẳng giác trong góc xOy khi và chỉ khi A, B, C, D đồng viên.



Chứng minh. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng PQ; K và L lần lượt là điểm đối xứng của P qua tia Ox và Oy. Dễ dàng chỉ ra được $OP = OK = OL$.

Thuận. Giả sử OP và OQ là hai đường đẳng giác trong góc xOy. Suy ra $\angle KOQ = \angle KOx + \angle xOQ = \angle POx + \angle yOP = \angle QOy + \angle yOL = \angle QOL$. Khi đó hai tam giác OKQ và OLQ đồng dạng, suy ra $QK = QL$. Theo tính chất của đường trung bình trong các tam giác PKQ và PLQ, $IA = \frac{1}{2}QK$ và $IC = \frac{1}{2}QL$. Suy ra $IA = IC$.
Mặt khác, do I là trung điểm PQ và $PA \perp Ox$, $QB \perp Ox$ nên I thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB, kéo theo $IA = IB$. Tương tự, $IC = ID$, do đó $IA = IB = IC = ID$, hay bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn tâm I.

Đảo. Giả sử bốn điểm A, B, C, D đồng viên. Như lập luận trên, ta có $IA = IB$ và $IC = ID$, suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Do đó $IA = IC$, suy ra $QK = QL$. Khi đó hai tam giác OKQ và OLQ đồng dạng, suy ra $\angle KOQ = \angle LOQ$. Từ đó

$$2\angle POx = \angle POK = \angle QOK - \angle POQ = \angle QOL - \angle POQ = \angle POy + \angle QOy - \angle POQ = 2\angle QOy$$

hay OP và OQ là hai đường đẳng giác trong góc xOy.

□

Định lí 4.2

(*Định lí Steiner*) Cho tam giác ABC và hai điểm P, Q nằm trên đường thẳng BC. Đẳng thức

$$\frac{BP}{CP} \cdot \frac{BQ}{CQ} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

đúng khi và chỉ khi AP, AQ là hai đường đẳng giác trong góc BAC.

Chứng minh. Áp dụng công thức tính diện tích, ta có

$$S[ABP] \cdot S[ABQ] = \frac{1}{2}BA \cdot BP \cdot \sin\angle ABC \cdot \frac{1}{2}BA \cdot BQ \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{4}AB^2 (\sin\angle ABC)^2 \cdot BP \cdot BQ;$$

$$S[ACP] \cdot S[ACQ] = \frac{1}{2}CA \cdot CP \cdot \sin\angle ACB \cdot \frac{1}{2}CA \cdot CQ \cdot \sin\angle ACB = \frac{1}{4}AC^2 (\sin\angle ACB)^2 \cdot CP \cdot CQ.$$

Xét tỉ số

$$\frac{S[ABP] \cdot S[ABQ]}{S[ACP] \cdot S[ACQ]} = \frac{AB^2 (\sin\angle ABC)^2 \cdot BP \cdot BQ}{AC^2 (\sin\angle ACB)^2 \cdot CP \cdot CQ}$$

Tương đương

$$\frac{\frac{1}{2}AB \cdot AP \cdot \sin\angle BAP \cdot \frac{1}{2}AB \cdot AQ \cdot \sin\angle BAQ}{\frac{1}{2}AC \cdot AP \cdot \sin\angle CAP \cdot \frac{1}{2}AC \cdot AQ \cdot \sin\angle CAQ} = \frac{AB^2 (\sin\angle ABC)^2 \cdot BP \cdot BQ}{AC^2 (\sin\angle ACB)^2 \cdot CP \cdot CQ}.$$

Hai đường AP, AQ đẳng giác trong góc BAC tương đương $\sin\angle BAP = \sin\angle CAQ$ và $\sin\angle BAQ = \sin\angle CAP$. Phương trình trên tương đương $\dfrac{BP \cdot BQ}{CP \cdot CQ} = \dfrac{(\sin\angle ACB)^2}{(\sin\angle ABC)^2} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$, theo định lí sine. □

Tính chất 4.1

Cho tam giác ABC và hai điểm P, Q nằm trên đường thẳng BC. Khi đó, đường tròn (APQ) tiếp xúc với đường tròn (ABC) khi và chỉ khi AP, AQ là hai đường đẳng giác trong góc BAC.

Chứng minh. Tại A, kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Kéo dài AP và AQ, cắt (ABC) tương ứng tại M và N.

Thuận. Giả sử AP, AQ là hai đường đẳng giác trong góc BAC. Khi đó $\angle BAM = \angle CAN$. Suy ra

$$\angle xAP = \angle xAM = \angle ACM = \angle ACB + \angle BCM = \angle ACB + \angle CAN = \angle AQP$$

hay Ax là tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ. Từ đó, đường tròn (APQ) tiếp xúc với đường tròn ABC.

Đảo. Giả sử đường tròn (APQ) tiếp xúc với đường tròn (ABC). Khi đó $\angle xAM = \angle ACM = \angle AQP$, suy ra $\angle ACB + \angle BAM = \angle ACB + \angle BCM = \angle ACB + \angle CAN$, hay $\angle BAM = \angle CAN$. Từ đó AP, AQ là hai đường đẳng giác trong góc BAC.

□

§4.2 Cặp điểm liên hợp đẳng giác - Đường tròn pedal

Để định nghĩa cặp điểm liên hợp đẳng giác, ta không thể không nhắc đến định lí sau:

Định lí 4.3

Cho tam giác ABC và một điểm P bất kì trong mặt phẳng. Khi đó các đường lần lượt đẳng giác với AP, BP, CP trong các góc A, B, C tương ứng của tam giác ABC đồng quy tại một điểm Q.

Chứng minh. Gọi Q là giao điểm của đường đẳng giác với AP trong $\angle BAC$ và đường đẳng giác với BP trong $\angle ABC$; I là trung điểm của đoạn thẳng PQ; X, Y, Z là hình chiếu của P trên BC, CA, AB; X', Y', Z' là hình chiếu của Q trên BC, CA, AB.
Theo Định lí 4.1, các bộ điểm Y, Y', Z, Z' và X, X', Z, Z' cùng thuộc đường tròn tâm I, tức là X, Y, Z, X', Y', Z' cùng thuộc đường tròn (I). Cũng theo Định lí 4.1, ta thu được CP và CQ là hai đường đẳng giác trong $\angle ACB$. □

Từ Định lí 4.3 ta có một số định nghĩa sau:

Định nghĩa 4.3

Cặp điểm P và Q như trên được gọi là cặp điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC.

Định nghĩa 4.4

Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên BC, CA, AB; X', Y', Z' lần lượt là hình chiếu vuông góc của Q trên BC, CA, AB. Khi đó

- Các tam giác XYZ và $X'Y'Z'$ tương ứng được gọi là tam giác pedal của cặp điểm liên hợp đẳng giác P và Q ứng với tam giác ABC;
- Đường tròn (I) đi qua 6 hình chiếu trên được gọi là đường tròn pedal của cặp điểm liên hợp đẳng giác P và Q ứng với tam giác ABC.

Ta có một số cặp điểm liên hợp đẳng giác quen thuộc trong tam giác:

- Trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp. Đường tròn pedal của cặp điểm này là đường tròn Euler (đường tròn 9 điểm - nine-point circle).
- Tâm đường tròn nội tiếp, các tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác liên hợp đẳng giác với chính nó. Đường tròn pedal của các điểm này chính là đường tròn nội tiếp và các đường tròn bàng tiếp.
- Đường đẳng giác với đường trung tuyến được gọi là đường đối trung. Điểm liên hợp đẳng giác của trọng tâm được gọi là điểm symmedian.

Hệ quả 4.1

(*Điểm Bevan*) Cho tam giác ABC. Gọi I_a, I_b, I_c là tâm các đường tròn bàng tiếp ứng với các góc A, B, C của tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I_a) với BC, đường tròn (I_b) với CA, đường tròn (I_c) với AB. Khi đó I_aD, I_bE, I_cF đồng quy tại điểm Bevan B_e của tam giác ABC.

§4.3 Đường đối trung - Điểm symmedian

Đường đối trung

Định nghĩa 4.5

Đường đẳng giác với đường trung tuyến được gọi là đường đối trung.

Bây giờ, ta hãy xét tam giác ABC. Từ giờ, đường trung tuyến, đường đối trung ứng với đỉnh A trong tam giác ABC được viết tắt là đường A-trung tuyến và đường A-đối trung; tương tự với các đỉnh B và C trong tam giác.

Tính chất 4.2

Quỹ tích các điểm có khoảng cách tới hai cạnh AB, AC tỉ lệ thuận với độ dài của hai cạnh AB, AC là đường A-đối trung.

Chứng minh. Gọi P là một điểm bất kì trong tam giác ABC. Gọi Q là điểm đối xứng với điểm P qua phân giác trong góc BAC. Do tính đối xứng, ta có $d(P, AB) = d(Q, AC)$ và $d(P, AC) = d(Q, AB)$. Các mệnh đề sau là tương đương:

i) AP là đường A-đối trung;

ii) AQ là đường A-trung tuyến;

iii) $S[AQB] = S[AQC]$;

iv) $\frac{1}{2}AB \cdot d(Q, AB) = \frac{1}{2}AC \cdot d(Q, AC)$;

v) $AB \cdot d(P, AC) = AC \cdot d(P, AB)$;

vi) $\dfrac{d(P, AB)}{d(P, AC)} = \dfrac{AB}{AC}$.

□

Tính chất 4.3

Đường A-đối trung cắt BC tại điểm chia đoạn thẳng BC theo tỉ lệ bình phương độ dài hai cạnh AB và AC.

Chứng minh. Đây là hệ quả trực tiếp của định lí Steiner. □

Tính chất 4.4

Đường A-đối trung đi qua đỉnh đối của một tứ giác điều hòa có ba đỉnh là A, B, C. Hơn nữa, đường A-đối trung đi qua giao của hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chứng minh. Gọi P là giao điểm của đường A-đối trung và đường tròn (ABC); E, F là hình chiếu của P trên các đường thẳng AB, AC.

Dễ thấy $\triangle PEB \sim \triangle PFC$. Khi đó $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{PE}{PF} = \dfrac{AB}{AC}$, hay tứ giác $ABPC$ là tứ giác điều hòa.

Gọi S là giao của hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC, D là điểm đối xứng của A qua M.

Ta có $\angle SBC = \angle BAC = \angle BDC = 180^\circ - \angle DBA$. Do đó BS và BD là hai đường đẳng giác trong góc ABC. Tương tự, CS và CD là hai đường đẳng giác trong góc ACB. Suy ra S và D là cặp điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC. Từ đó AS và AM là hai đường đẳng giác trong góc BAC, hay AS là đường A-đối trung. □

Điểm symmedian

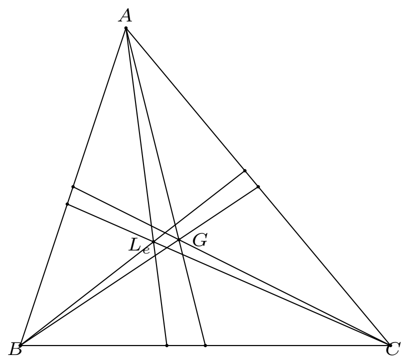
Định lí 4.4

Giao điểm ba đường đối trung ứng với ba góc trong một tam giác đồng quy tại một điểm L_e.

Chứng minh. Đây là hệ quả trực tiếp của định lí Ceva lượng giác. □

Định nghĩa 4.6

Điểm L_e được định nghĩa như trên được gọi là điểm symmedian (hoặc điểm Lemoine). Điểm này liên hợp đẳng giác với trọng tâm của tam giác.



Tính chất 4.5

Điểm symmedian của tam giác ABC là trọng tâm của tam giác pedal nó tạo thành ứng với tam giác ABC.

Chứng minh. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của L_e trên BC, CA, AB.
Áp dụng định lí sine

$$\frac{LZ}{LY}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}=\frac{XY}{XZ}=\frac{\sin\angle XLY}{\sin\angle XLZ}.$$

Suy ra $S[LXZ]=\frac{1}{2}LX\cdot LZ\cdot\sin\angle XLZ=\frac{1}{2}LX\cdot LY\cdot\sin\angle XLY=S[LXY]$. Tương tự, ta thu được $S[LXY]=S[LYZ]=S[LZX]$. Vì vậy, L là trọng tâm của tam giác XYZ. □

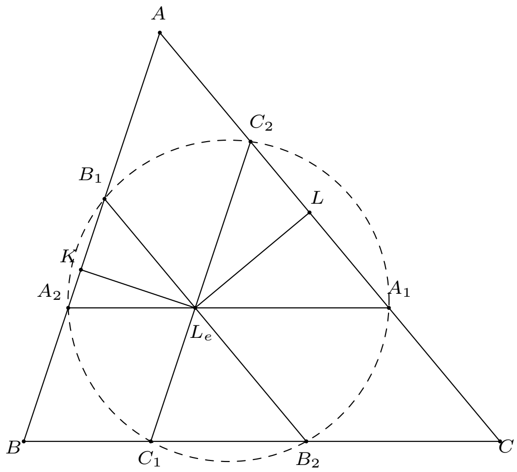
Tính chất 4.6

(*Đường tròn Lemoine thứ nhất*) Đường thẳng song song BC đi qua điểm symmedian L_e cắt CA tại A_1 và cắt AB tại A_2. Các điểm B_1, B_2, C_1, C_2 được định nghĩa tương tự theo hoán vị vòng quanh. Khi đó, sáu điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 đồng viên.

Chứng minh. Gọi K, L là hình chiếu vuông góc của L_e lên AB, AC.

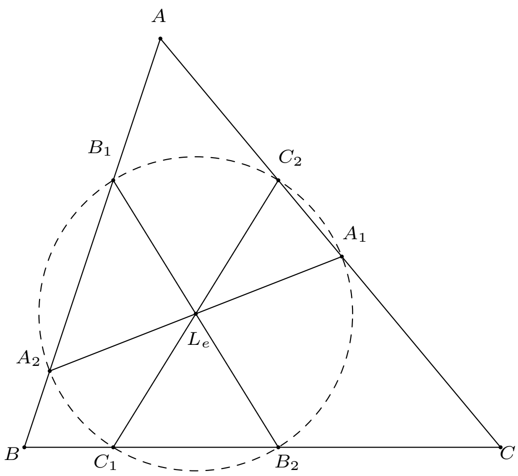
Ta có tứ giác $AB_1L_eC_2$ là hình bình hành, biến đổi góc ta được $\triangle KL_eB_1 \sim \triangle LL_eC_2$. Khi đó kết hợp với Tính chất 4.2 ta được $\dfrac{AC_2}{AB_1} = \dfrac{L_eB_1}{L_eC_2} = \dfrac{L_eK}{L_eL} = \dfrac{AA_2}{AA_1}$. Suy ra A_1, A_2, B_1, C_2 đồng viên.

Tương tự, B_1, B_2, C_1, A_2 đồng viên. Khi đó $\angle AB_1C_2 = \angle AA_1A_2 = \angle ACB = \angle BB_2B_1 = \angle BA_2C_1$, hay tứ giác $C_1A_2B_1C_2$ là hình thang cân. Vì vậy, sáu điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 đồng viên. □



Tính chất 4.7

(*Đường tròn Lemoine thứ hai*) Đường thẳng đối song BC đi qua điểm symmedian L_e cắt CA tại A_1 và cắt AB tại A_2. Các điểm B_1, B_2, C_1, C_2 được định nghĩa tương tự theo hoán vị vòng quanh. Khi đó, sáu điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 đồng viên. Đặc biệt, sáu điểm thuộc đường tròn có tâm là điểm symmedian.



Chứng minh. Theo tính chất của đường đối song, AL là đường A-trung tuyến trong tam giác AA_1A_2, hay $L_eA_1 = L_eA_2$. Tương tự, $L_eB_1 = L_eB_2$ và $L_eC_1 = L_eC_2$.

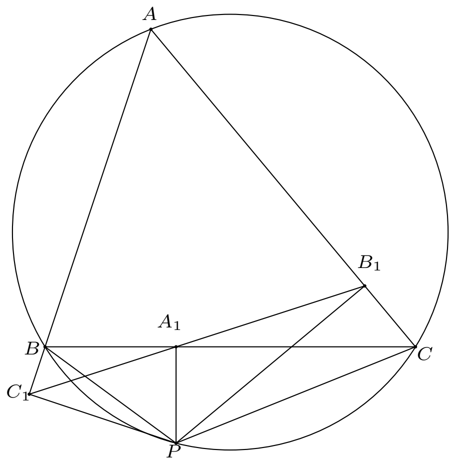
Mặt khác, ta có $\angle L_eC_1B_2 = \angle BAC = \angle L_eB_2C_1$ nên $L_eB_2 = L_eC_1$. Từ đó sáu điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 cách đều điểm L_e. □

§5 Đường thẳng Simson - Đường thẳng Steiner

Về mặt bản chất, phần này bắt nguồn từ định lí nổi tiếng sau đây:

Định lí 5.1

Cho tam giác ABC và một điểm P bất kì trên mặt phẳng. Khi đó, hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh của tam giác ABC thẳng hàng khi và chỉ khi P thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử P nằm trong góc BAC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của P lên BC, CA, AB.

Do $\angle PA_1B = \angle PC_1B = 90^\circ$ nên P, A_1, B, C_1 đồng viên. Tương tự, P, A_1, C, B_1 đồng viên. Khi đó $\angle BA_1C_1 = \angle BPC_1$ và $\angle CA_1B_1 = \angle CPB_1$.

Ta có A_1, B_1, C_1 thẳng hàng khi và chỉ khi $\angle BA_1C_1 = \angle CA_1B_1$, hay $\angle BPC_1 = \angle CPB_1$, tương đương $\angle BPC = \angle B_1PC_1 = 180^\circ - \angle BAC$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi P thuộc đường tròn (ABC). □

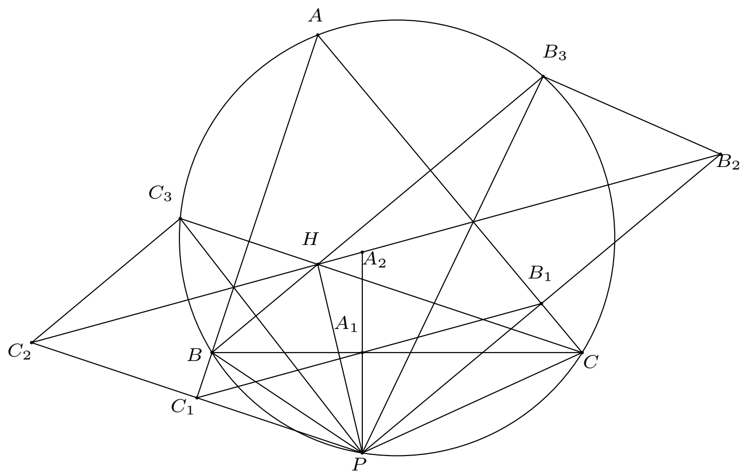
! Nhận xét — Tam giác P-pedal của tam giác ABC suy biến thành một đường thẳng.

Định nghĩa 5.1

Đường thẳng đi qua ba hình chiếu vuông góc của P lên các cạnh tam giác ABC được gọi là đường thẳng Simson của điểm P ứng với tam giác ABC.

Định lí 5.2

Cho tam giác ABC và một điểm P bất kì nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó, các điểm đối xứng với P qua ba cạnh của tam giác ABC cùng nằm trên một đường thẳng, đồng thời đường thẳng ấy đi qua trực tâm của tam giác ABC.



Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử P nằm trên cung nhỏ BC của đường tròn (ABC). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC); A_2, B_2, C_2 lần lượt là điểm đối xứng với P qua BC, CA, AB; B_3, C_3 lần lượt là giao điểm khác B, C của BH, CH với đường tròn (ABC).

Không khó để chỉ ra rằng H và B_3 đối xứng nhau qua CA. Lại có P và B_2 đối xứng nhau qua CA nên tứ giác PB_2B_3H là hình thang cân. Tương tự, tứ giác PC_2C_3H cũng là hình thang cân.

Khi đó, $\angle B_2HC_2 = \angle B_2HB_3 + \angle C_2HC_3 + \angle B_3HC_3 = \angle PB_2H + \angle PC_2H + \angle BHC = \angle PB_2H + \angle PC_2H + \angle B_2PC_2 = 180^\circ$, suy ra B_2, H, C_2 thẳng hàng.

Tương tự, C_2, H, A_2 thẳng hàng. Vì vậy, bốn điểm A_2, B_2, C_2, H thẳng hàng. □

! Nhận xét — Dựa theo định lí về đường thẳng Simson, phần đảo cho định lí trên vẫn đúng: "Cho tam giác ABC và điểm P bất kì nằm trên mặt phẳng. Khi đó, nếu các điểm đối xứng với P qua ba cạnh của tam giác ABC cùng nằm trên một đường thẳng thì điểm P thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC."

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử P nằm trong góc BAC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của P lên BC, CA, AB.

Xét phép vị tự tâm P, tỉ số $\dfrac{1}{2}$

$$\mathcal{H}_P^{\frac{1}{2}} : A_2 \mapsto A_1, B_2 \mapsto B_1, C_2 \mapsto C_1, A_2B_2 \mapsto A_1B_1.$$

Mà A_2, B_2, C_2 thẳng hàng nên A_1, B_1, C_1 thẳng hàng. Theo định lí về đường thẳng Simson, điều này xảy ra khi và chỉ khi P thuộc đường tròn (ABC). □

! Nhận xét — Phép vị tự trên còn cho ta một tính chất quan trọng: đường thẳng Simson của điểm P ứng với tam giác ABC đi qua trung điểm của đoạn thẳng PH.

Tính chất 5.1

Cho tam giác ABC và một điểm P bất kì nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Khi đó, đường thẳng Simson của điểm P đi qua trung điểm của đoạn thẳng PH.

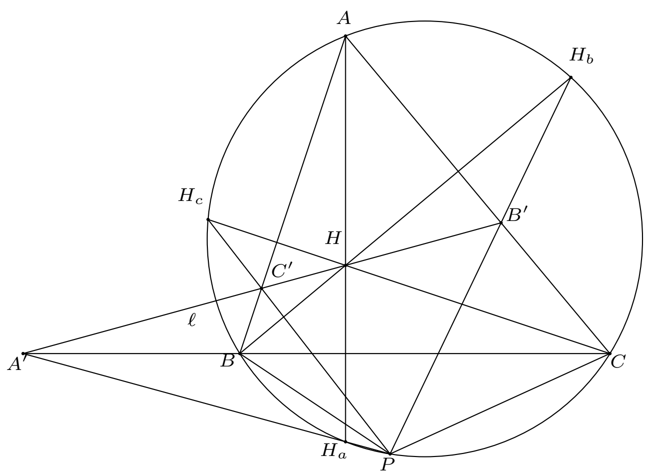
Định nghĩa 5.2

Đường thẳng đi qua trực tâm và ba điểm đối xứng của P qua các cạnh tam giác ABC được gọi là đường thẳng Steiner của điểm P ứng với tam giác ABC.

Liên quan đến định lí Steiner, chúng ta có một định lí quan trọng khác:

Định lí 5.3

(*Định lí Collings*) Cho tam giác ABC và trực tâm H của tam giác. Kẻ đường thẳng ℓ bất kì đi qua điểm H. Khi đó, các đường thẳng đối xứng với H qua BC, CA, AB đồng quy tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Chứng minh. Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm của ℓ với BC, CA, AB; H_a, H_b, H_c lần lượt là giao điểm của AH, BH, CH với đường tròn (ABC); P là giao điểm của H_bB' và H_cC'.

Chú ý rằng H đối xứng với H_b, H_c qua CA, AB. Khi đó, các đường thẳng H_bB' và H_cC' tương ứng đối xứng với ℓ qua CA, AB.

Như vậy, ta chỉ cần chỉ ra rằng P thuộc đường tròn (ABC), mà H_b và H_c thuộc đường tròn (ABC) nên ta chỉ ra bốn điểm C, H_b, H_c, P đồng viên. Thật vậy, ta có $(H_bC, H_bP) \equiv (HB', HC) \pmod{\pi}$ và $(H_cC, H_cP) \equiv (HH_c, HC') \equiv (HB', HC) \pmod{\pi}$. Suy ra $(H_bC, H_bP) \equiv (H_cC, H_cP) \pmod{\pi}$, hay bốn điểm C, H_b, H_c, P đồng viên.

Chứng minh tương tự cho giao điểm của H_cC' và H_aA', H_aA' và H_bB', ta được điều phải chứng minh. □

Định nghĩa 5.3

Điểm đồng quy P của ba đường thẳng đối xứng với đường thẳng ℓ bất kì đi qua trực H qua ba cạnh của tam giác được gọi là điểm Anti-Steiner của đường thẳng ℓ ứng với tam giác ABC.

Hệ quả 5.1

Đối xứng của đường thẳng Euler qua ba cạnh của tam giác ứng với nó đồng quy. Điểm đồng quy được gọi là điểm Euler reflection.

Ngoài ra, ta còn có thể phát biểu lại bài toán đảo của định lí về đường thẳng Steiner như một hệ quả của định lí Collings.

Hệ quả 5.2

Cho tam giác ABC có trực tâm H và điểm P bất kì nằm trên mặt phẳng. Gọi các điểm đối xứng với P qua BC, CA, AB lần lượt là A', B', C'. Khi đó, nếu ba trong bốn điểm H, A', B', C' thẳng hàng thì P thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

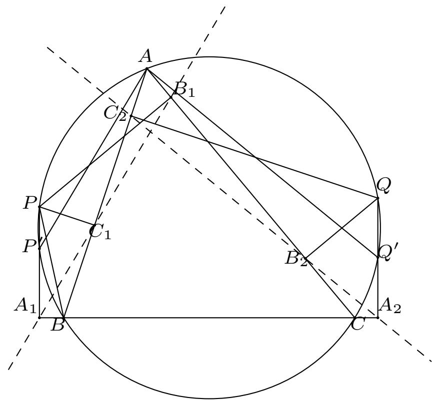
Tính chất 5.2

Đường thẳng qua P vuông góc với BC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là A'. Khi đó AA' song song với đường thẳng Simson của P ứng với tam giác ABC.

Chứng minh. Do tứ giác PA_1B_1C nội tiếp nên $\angle A'A_1B_1 = \angle ACP = \angle AA'P$, suy ra $AA' \parallel A_1B_1$. □

Tính chất 5.3

Gọi P và Q là hai điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó, góc tạo bởi hai đường thẳng Simson của P và Q ứng với tam giác ABC bằng một nửa số đo cung nhỏ PQ của đường tròn (ABC).



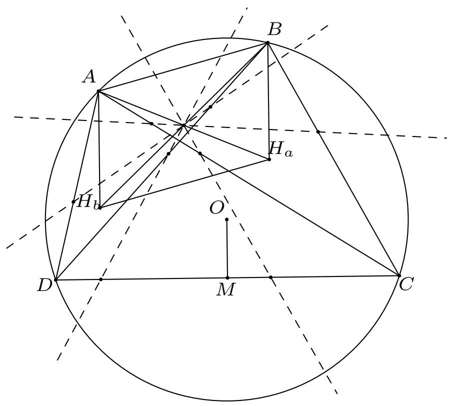
Chứng minh. Các đường thẳng qua P và Q vuông góc BC cắt (ABC) tại P' và Q'. Gọi ℓ_1, ℓ_2 lần lượt là đường thẳng Simson của P,Q ứng với tam giác ABC.

Theo Tính chất 5.2, $AP' \parallel \ell_1$ và $AQ' \parallel \ell_2$. Do đó $\angle(\ell_1, \ell_2) = \angle P'AQ'$.

Do $PP' \parallel QQ'$ mà bốn điểm P, P', Q, Q' đồng viên nên tứ giác $PQQ'P'$ là hình thang cân và số đo cung nhỏ $P'Q'$ bằng số đo cung nhỏ PQ của đường tròn (ABC). Do đó $\angle P'AQ' = \frac{1}{2}\angle POQ$, trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. □

Tính chất 5.4

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Khi đó các đường thẳng Simson của A, B, C, D ứng với tam giác BCD, CDA, DAB, ABC đồng quy.



Chứng minh. Gọi H_a, H_b, H_c, H_d là trực tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC; M là trung điểm của đoạn thẳng BC.

Do $\overrightarrow{AH_b} = \overrightarrow{BH_a} = 2\overrightarrow{OM}$ (tính chất quen thuộc) nên tứ giác ABH_aH_b là hình bình hành. Do đó, trung điểm của hai đoạn thẳng AH_a và BH_b trùng nhau.

Tương tự, ta thu được trung điểm của bốn đoạn thẳng AH_a, BH_b, CH_c, DH_d trùng nhau. Theo Tính chất 5.1, đường thẳng Simson của A, B, C, D ứng với tam giác BCD, CDA, DAB, ABC đi qua trung điểm của đoạn thẳng AH_a, BH_b, CH_c, DH_d. Mà trung điểm của bốn đoạn thẳng AH_a, BH_b, CH_c, DH_d trùng nhau nên các đường thẳng Simson đồng quy. □

§6 Tứ giác toàn phần

§7 Cực và đối cực

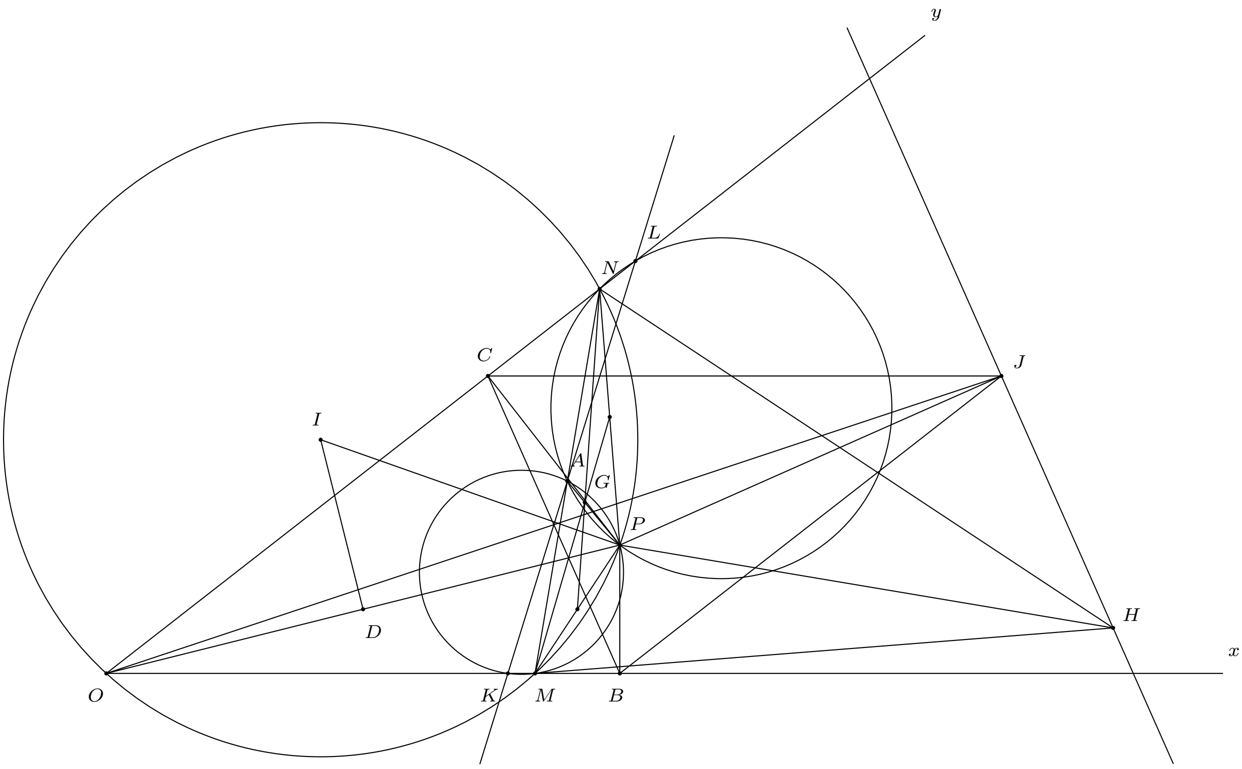
§8 Thêm một số định lí nổi tiếng

Phần II

Một số bài toán ứng dụng

Bài toán 1

Cho góc Oxy và điểm P nằm trong góc cố định. Đường tròn thay đổi luôn đi qua hai điểm O, P cắt Ox, Oy tại M, N. Tìm quỹ tích trọng tâm G và trực tâm H của tam giác PMN.



LỜI GIẢI. Ta chia bài toán ra thành hai phần.

(a) *Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác PMN.*

Gọi A là trung điểm của đoạn thẳng MN. Do G là trọng tâm của tam giác PMN nên $\overrightarrow{PA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PG}$. Ta sẽ đi tìm quỹ tích của điểm A khi đường tròn đi qua hai điểm O và P thay đổi.

Thuận. Gọi K là giao điểm của (APM) và Ox, L là giao điểm của (APN) và Oy.
Ta có $\angle PAL = \angle PNL = \angle PMK = 180^\circ - \angle PAK$. Do đó K, A, L thẳng hàng. Mặt khác, $\angle PKL = \angle PKA = \angle PMA = \angle PMN = \angle POy$ và $\angle PLK = \angle PLA = \angle PNA = \angle PNM = \angle POx$. Mà $\{K\} \in Ox$ và $\{L\} \in Oy$ nên K và L xác định duy nhất, hay K và L là hai điểm cố định. Do đó A thuộc đường thẳng cố định; đường thẳng đi qua K và L.

Đảo. Chọn K, L sao cho $\{K\} \in Ox$, $\{L\} \in Oy$, $\angle PKL = \angle POy$, $\angle PLK = \angle POx$. Lấy điểm A bất kì trên KL. Gọi M là giao điểm của (APK) và Ox, N là giao điểm của (APL) và Oy.

Ta có $\angle PAM = \angle PKM = \angle PLO = 180^\circ - \angle PAN$. Do đó M, A, N thẳng hàng. Mặt khác, $\angle PMN = \angle PMA = \angle PKA = \angle PKL = \angle POy$ và $\angle PNM = \angle PNA = \angle PLa = \angle PLK = \angle POx$. Suy ra M, N, O, P đồng viên. Do đó, tồn tại hai điểm M và N sao cho $\{M\} \in Ox$, $\{N\} \in Oy$, $\{A\} \in MN$ và M, N thuộc đường tròn đi qua hai điểm O và P.

Vì vậy, quỹ tích của điểm A là một đường thẳng cố định, đi qua hai điểm K và L được xác định như trên. Do điểm G là ảnh của A qua phép vị tự tâm P, quỹ tích của điểm G là một đường thẳng song song với đường thẳng cố định nói trên.

(b) *Tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác PMN.*

Gọi B, C lần lượt là hình chiết của P lên Ox, Oy; D là trung điểm của đoạn thẳng OP; J là trực tâm tam giác PBC.
Ta có $CJ \perp PB$ và $PB \perp OB$, do đó $CJ \parallel OB$. Tương tự, $BJ \parallel OC$. Suy ra tứ giác $OBJC$ là hình bình hành, hay J là điểm cố định.

Thuận. Gọi H và I lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN.
Biến đổi góc, ta được $\triangle PBC \sim \triangle PMN$. Ta cũng có D, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBC, PMN, và J, H lần lượt là trực tâm các tam giác PBC, PMN. Do đó, xét phép vị tự quay

$$\mathcal{F}_P : B \mapsto M, C \mapsto N, D \mapsto I, J \mapsto H$$

Hay $\triangle PDI \sim \triangle PJH$. Mà $\angle IDP = 90^\circ$ nên $\angle PJH = 90^\circ$. Nói cách khác, H thuộc đường thẳng vuông góc PJ tại J; đây là một đường thẳng cố định.

Đảo. Gọi H là điểm bất kì thuộc đường thẳng vuông góc PJ tại J. Chọn I thuộc đường trung trực của đoạn thẳng OP sao cho $\angle IPD = \angle JPH$. Đường tròn $I; IO$ cắt Ox, Oy lần lượt tại M, N.
Biến đổi góc, ta được $\triangle PBC \sim \triangle PMN$. Hơn nữa, các tam giác PDI và JPH vuông và đồng dạng. Do đó, xét phép vị tự quay

$$\mathcal{F}_P : B \mapsto M, C \mapsto N, D \mapsto I, J \mapsto H$$

Mà J là trực tâm tam giác PBC nên H là trực tâm tam giác PMN. Do đó, tồn tại hai điểm M và N sao cho $\{M\} \in Ox$, $\{N\} \in Oy$, H là trực tâm tam giác PMN và M, N thuộc đường tròn đi qua hai điểm O và P.

Vì vậy, quỹ tích của điểm H là một đường thẳng cố định vuông góc với đường thẳng PJ tại J, với điểm J được xác định như trên.

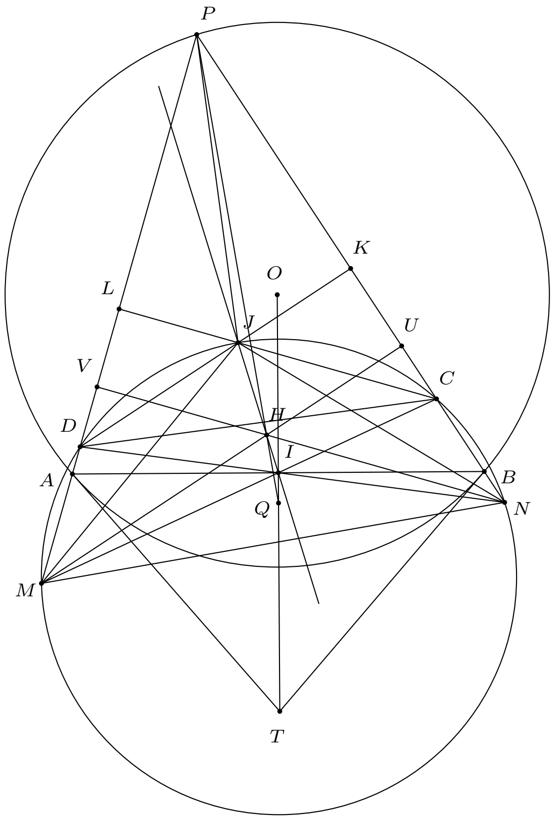
Bài toán quỹ tích được giải quyết. ■

Bài toán 2

Cho đường tròn (O) và một dây cung AB cố định không là đường kính. Một điểm P thay đổi trên cung lớn AB. Gọi I là trung điểm của AB. Lấy các điểm M, N trên các tia PA, PB tương ứng sao cho $\angle PMI = \angle PNI = \angle APB$.

(a) Chứng minh rằng đường cao kẻ từ P của tam giác PMN luôn đi qua một điểm cố định.

(b) Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác PMN luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải.

(a) Gọi T là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A, B với đường tròn (O); C là giao của MI và PB, D là giao của NI và PA; Q là trung điểm của đoạn thẳng OT.

Ta có $\angle CMD = \angle IMP = \angle INP = \angle CND$. Suy ra C, D, M, N đồng viên hay CD đối song MN ứng với góc MPN.

Ta cũng có $\angle IQB = 180° - 2\angle TAB = 180° - 2\angle APB = \angle ICB$. Suy ra B, C, I, Q đồng viên. Tương tự, A, D, I, Q đồng viên. Suy ra $QC \perp PB$ và $QD \perp PA$. Suy ra C, D, P, Q cùng thuộc đường tròn đường kính PQ.

Tức là PQ đi qua tâm của (PCD). Mà CD đối song MN ứng với góc MPN nên $PQ \perp MN$. Vì vậy, đường cao kẻ từ P của tam giác PMN luôn đi qua một điểm cố định.

(b) Gọi K, L lần lượt là hình chiếu của D lên PB và của C lên PA; U, V lần lượt là hình chiếu của M lên PB và của N lên PA; J là giao của DK và CL; H là giao của MU và NV.

Ta có $\{L; U\} \in (MC)$ và $\{K; V\} \in (ND)$. Theo tính chất các đường cao trong tam giác,

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{J/(MC)} = \overline{JC} \cdot \overline{JL} = \overline{JD} \cdot \overline{JK} = \mathcal{P}_{J/(ND)} \\ \mathcal{P}_{H/(MC)} = \overline{HM} \cdot \overline{HU} = \overline{HN} \cdot \overline{HV} = \mathcal{P}_{H/(ND)} \\ \mathcal{P}_{I/(MC)} = \overline{IM} \cdot \overline{IC} = \overline{IN} \cdot \overline{ID} = \mathcal{P}_{I/(ND)} \end{cases}$$

Do đó J, H, I thẳng hàng, cùng nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (MC) và (ND). Ta cũng có $\angle LJD = \angle DPC = \angle CMD$, suy ra J thuộc $(CDMN)$. Khi đó $\angle JPM = \angle JCD = \angle JMP$ và $\angle JPN = \angle JDC = \angle JNP$. Suy ra $JM = JN = JP$ hay J là tâm đường tròn (PMN). Như vậy JH là đường thẳng Euler của tam giác PMN. Mà J, H, I thẳng hàng và I cố định (do I là trung điểm AB) nên đường thẳng Euler của tam giác PMN luôn đi qua một điểm cố định.

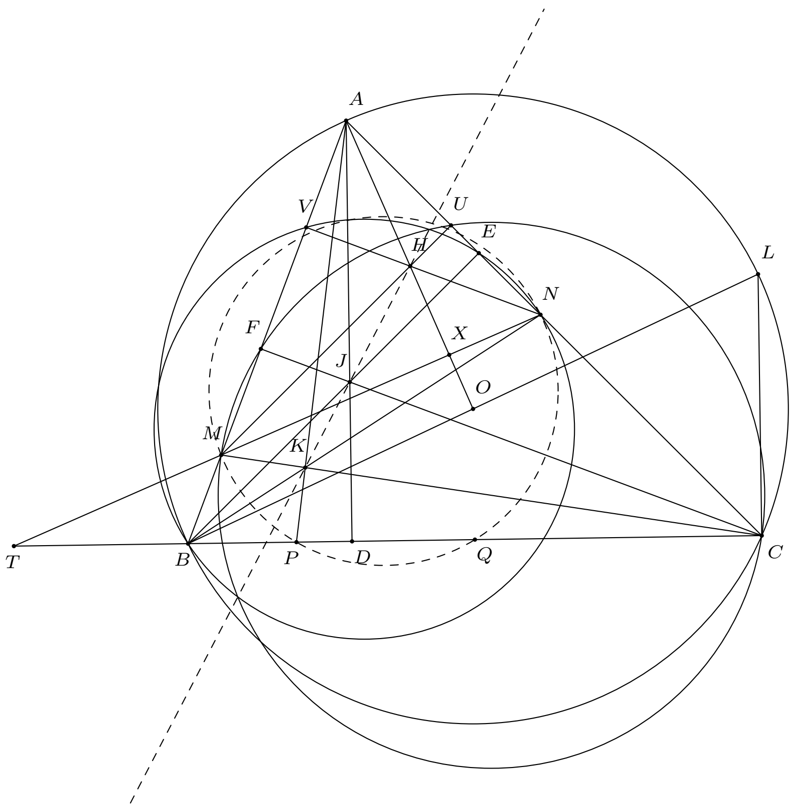
■

Bài toán 3

Cho tam giác ABC là tam giác nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O) bán kính R. Một đường thẳng Δ thay đổi sao cho Δ vuông góc với OA và luôn cắt tia AB, AC. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của Δ và AB, AC. Giả sử BN và CM cắt nhau tại K, AK cắt BC tại P.

(a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định.

(b) Gọi H là trực tâm của tam giác AMN. Đặt $BC = a$ và ℓ là khoảng cách từ A đến KH. Chứng minh rằng KH đi qua trực tâm tam giác ABC. Từ đó, hãy chứng minh $\ell \leq \sqrt{4R^2 - a^2}$.



Lời giải.

(a) Gọi T là giao điểm của hai đường thẳng Δ và BC; Q là trung điểm của đoạn thẳng BC; J là trực tâm của tam giác ABC.

Không khó để thấy rằng J và O chính là hai điểm liên hợp đẳng giác ứng với tam giác ABC; nghĩa là hai đường thẳng nối từ A đến J và đến O sẽ đối xứng qua đường phân giác của góc A, và tương tự cho các đỉnh B, C. Ngoài ra, do AJ là đường cao của tam giác ABC và đường thẳng Δ vuông góc với AO nên BC và Δ là hai đường đối song. Nói cách khác, nếu Δ cắt AB, AC lần lượt tại M, N thì B, C, M, N đồng viên. Tức là khi này ta sẽ có $\overline{TM} \cdot \overline{TN} = \overline{TB} \cdot \overline{TC}$.

Mặt khác, theo tính chất của tứ giác toàn phần $BMNC.AT$ ta thu được $(B, C; T, P) = -1$. Áp dụng hệ thức Maclaurin, ta thu được $\overline{TB} \cdot \overline{TC} = \overline{TP} \cdot \overline{TQ}$. Từ đó $\overline{TM} \cdot \overline{TN} = \overline{TP} \cdot \overline{TQ}$, hay M, N, P, Q đồng viên. Nói cách khác, đường tròn (MNP) đi qua một điểm cố định; đó chính là trung điểm Q của BC.

(b) Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên cạnh đối diện tương ứng trogn tam giác ABC; U, V lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên AN, AM; L là điểm đối xứng của B qua tâm (O).

Ta có $\angle BEN = \angle BVN = 90^\circ$ nên B, V, E, N cùng thuộc đường tròn đường kính BN; và $\angle CFM = \angle CUM = 90^\circ$ nên C, U, E, N cùng thuộc đường tròn đường kính CM.

Theo tính chất quen thuộc của trực tâm trong tam giác, ta có $\mathcal{P}_{H/(BN)} = \overline{HV} \cdot \overline{HN} = \overline{HU} \cdot \overline{HM} = \mathcal{P}_{H/(CM)}$ và $\mathcal{P}_{J/(BN)} = \overline{JB} \cdot \overline{JE} = \overline{JC} \cdot \overline{JF} = \mathcal{P}_{J/(CM)}$. Ngoài ra, do B, C, M, N đồng viên nên $\mathcal{P}_{K/(BN)} = \mathcal{P}_{K/(CM)}$. Như vậy H, J, K cùng thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (BN) và (CM); hay H, J, K thẳng hàng.

Từ đó $\ell \leq AJ = CL$ theo bất đẳng thức tam giác mở rộng và một tính chất quen thuộc (tứ giác $AJLC$ là hình bình hành). Nhưng theo định lí Pythagore, $CL = \sqrt{BL^2 - BC^2} = \sqrt{4R^2 - a^2}$ nên vì vậy ta có điều cần phải chứng minh.

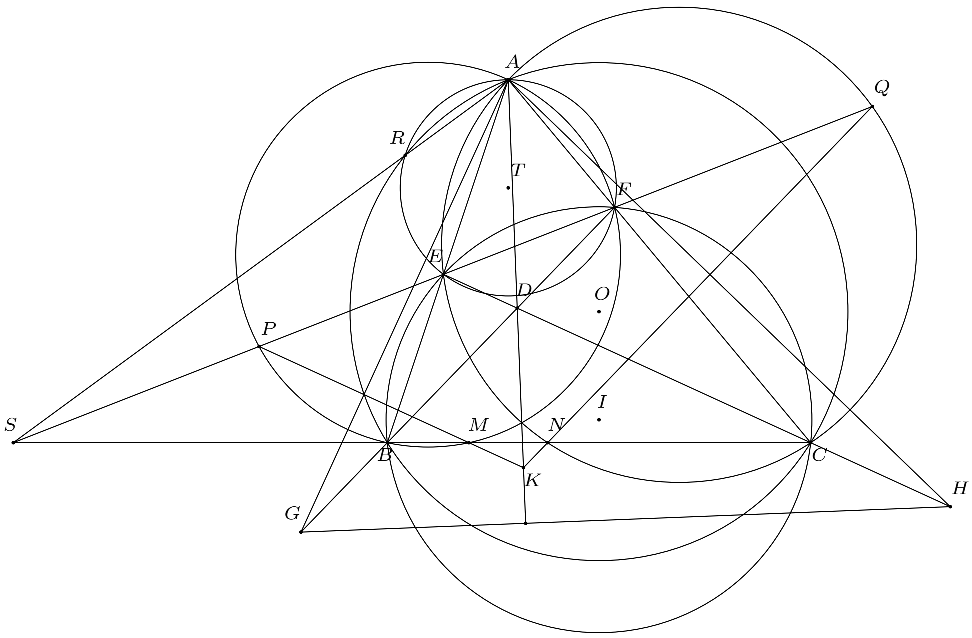
Chứng minh hoàn tất. ■

Bài toán 4

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn tâm I đi qua hai điểm B và C lần lượt cắt các tia BA, CA tại E và F.

(a) Giả sử các tia BF, CE cắt nhau tại D và T là tâm đường tròn (AEF). Chứng minh rằng $OT \parallel ID$.

(b) Trên BF, CE lần lượt lấy các điểm G, H sao cho $AG \perp CE$ và $AH \perp BF$. Các đường tròn (ABF) và (ACE) cắt BC tại các điểm M và N (khác B và C) và cắt EF tại các điểm P và Q (khác E và F). Gọi K là giao điểm của MP và NQ. Chứng minh rằng $DK \perp GH$.



Lời giải.

(a) Gọi R là giao điểm khác A của hai đường tròn (O) và (AEF).
Theo tính chất tâm đẳng phương, trục đẳng phương của các cặp đường tròn (O) và (AEF), (O) và (I), (AEF) và (I) đồng quy. Nói cách khác, AR, EF, BC đồng quy. Gọi S là điểm đồng quy. Áp dụng định lí Brocard cho tứ giác toàn phần $BEFC.AS$ có D là giao của BF và EC, I là tâm ngoại tiếp tứ giác $BEFC$, ta được $ID \perp AS$ hay $ID \perp AR$. Mặt khác, do AR là trục đẳng phương của (O) và (AEF) nên $OT \perp AR$. Từ đó $ID \parallel OT$.

(b) Ta có $\angle BMP = \angle BFP = \angle BFE = \angle BCE = \angle NCE = \angle NQE$, do đó M, N, P, Q đồng viên. Khi đó $\mathcal{P}_{K/(ABF)} = \overline{KM} \cdot \overline{KP} = \overline{KN} \cdot \overline{KQ} = \mathcal{P}_{K/(ACE)}$. Lại có $\mathcal{P}_{D/(ABF)} = \overline{DB} \cdot \overline{DF} = \overline{DC} \cdot \overline{DE} = \mathcal{P}_{D/(ACE)}$ nên D và K nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (ABF) và (ACE). Suy ra A, D, K thẳng hàng. Mà theo giả thiết, D là trực tâm của tam giác AGH nên $DK \perp GH$.

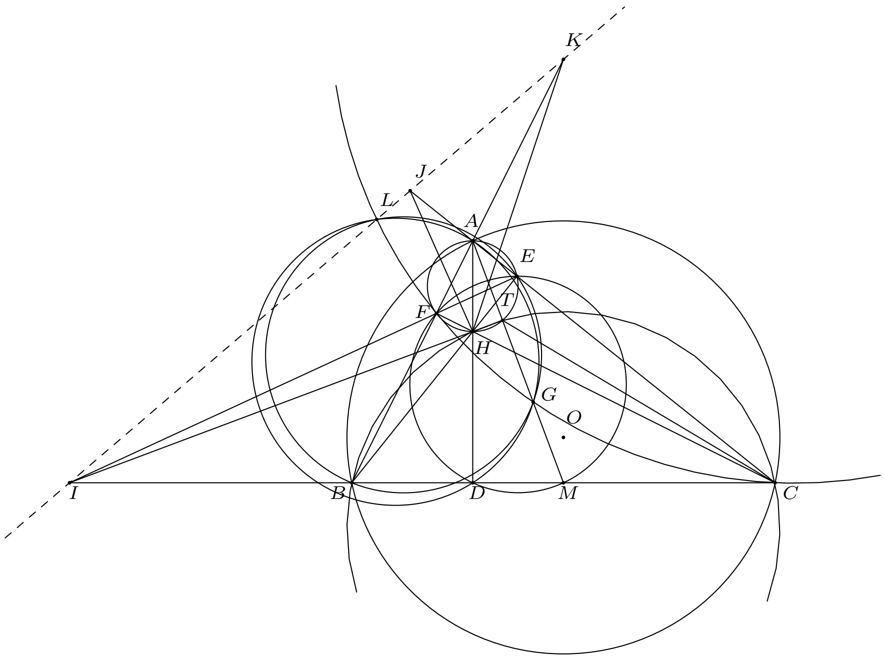
■

Bài toán 5

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF, trọng tâm G và trực tâm H.

(a) Đường tròn (BHC) cắt đường tròn đường kính AH tại T khác H. Chứng minh rằng A, T, G thẳng hàng.

(b) Các điểm I, J, K lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB sao cho HI, HJ, HK tương ứng vuông góc với AG, BG, CG. Chứng minh rằng các đường tròn (AGD), (BGE), (CGF) cùng đi qua một điểm L khác G và I, J, K, L thẳng hàng.



Lời giải.

(a) Gọi M là trung điểm đoạn thẳng BC và T' là hình chiếu vuông góc của H lên AM.
Do $\angle AT'H = 90^\circ$ nên T' thuộc đường tròn đường kính AH. Không khó để chỉ ra rằng M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$ và ME, MF là tiếp tuyến tại E, F của đường tròn đường kính AH. Khi đó $MC^2 = ME^2 = \overline{MT'} \cdot \overline{MA}$, suy ra $\angle T'CB = \angle T'AC = \angle T'AE = \angle THE$. Do đó T' thuộc (M), $T' \equiv T$. Mà trọng tâm G nằm trên trung tuyến AM nên A, T, G thẳng hàng.

(b) Ta có $\overline{HA} \cdot \overline{HD} = \overline{HB} \cdot \overline{HE} = \overline{HC} \cdot \overline{HF} < 0$, hay $\mathcal{P}_{H/(AGD)} = \mathcal{P}_{H/(BGE)} = \mathcal{P}_{H/(CGF)} < 0$. Mà G lại thuộc ba đường tròn (AGD), (BGE), (CGF) nên ba đường tròn (AGD), (BGE), (CGF) đồng trục, giao nhau tại hai điểm, đó là điểm G và một điểm L khác G.
Gọi (O) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta chứng minh các điểm I, J, K, L cùng thuộc trục đẳng phương của (O) và đường tròn Euler của tam giác ABC, đi qua chân ba đường cao và có tâm là trung điểm đoạn thẳng OH.
Do vai trò của I, J, K trong mô hình là như nhau, ta chỉ cần chỉ ra I thuộc trục đẳng phương của (O) và đường tròn Euler. Theo tính chất tâm đẳng phương, trục đẳng phương của các cặp đường tròn (AH) và (BHC), (AH) và đường tròn Euler, (BHC) và đường tròn Euler đồng quy. Nói cách khác, EF, HT, BC đồng quy. Mà $IH \perp AM$ nên I, H, T thẳng hàng, suy ra E, F, I thẳng hàng. Khi đó, $\mathcal{P}_{I/Euler} = \overline{IE} \cdot \overline{IF} = \overline{IB} \cdot \overline{IC} = \mathcal{P}_{I/(O)}$, hay I thuộc trục đẳng phương của (O) và đường tròn Euler của tam giác ABC.
Đối với điểm L, nhận thấy rằng GH, ngoài là trục đẳng phương của ba đường tròn (AGD), (BGE), (CGF), còn là đường thẳng Euler của tam giác ABC. Mà H thuộc trục đẳng phương của ba đường tròn (AGD), (BGE), (CGF) nên ta có L, H, G, O thẳng hàng. Khi đó, biến đổi góc ta được $\angle HID = \angle HAM = \angle DAG = \angle DLH$, suy ra I, L, H, D đồng viên. Mà $\angle HDI = 90^\circ$ nên $IL \perp OH$, hay IL chính là trục đẳng phương của (O) và đường tròn Euler. Tương tự với các đường thẳng JL, KL, ta thu được I, J, K, L thẳng hàng.

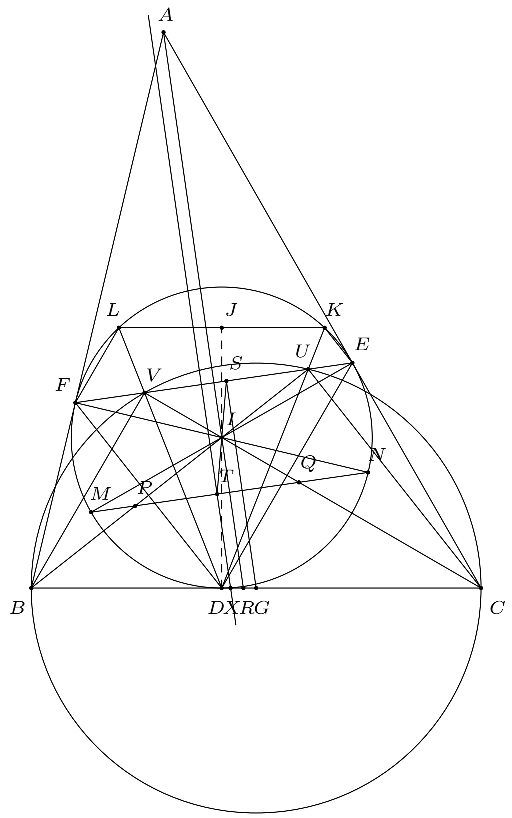
■

Bài toán 6

Cho tam giác không cân ABC và đường tròn (I) nội tiếp tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Đường thẳng qua E vuông góc BI cắt (I) tại K khác E, đường thẳng qua F vuông góc CI cắt (I) tại L khác F. Gọi J là trung điểm của đoạn thẳng KL.

(a) Chứng minh rằng D, I, J thẳng hàng.

(b) Giả sử các điểm B và C cố định, A thay đổi sao cho tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$ không đổi. Gọi M, N tương ứng là các giao điểm IE, IF với (I) (M khác E, N khác F). MN cắt IB, IC tại P và Q. Chứng minh rằng đường trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải.

(a) Do J là trung điểm của đoạn thẳng KL và $K, L \in (I)$ nên $IJ \perp KL$.

Mặt khác, ta có các cặp điểm $(K; E)$ và $(F; D)$ đối xứng nhau qua BI. Nói cách khác, KD và EF đối xứng nhau qua BI. Khi đó $KD = EF$ và $\angle IDK = \angle IFE$.

Tương tự, ta có $LD = EF$ và $\angle IDL = \angle IEF$. Mà $\angle IFE = \angle IEF$ nên $\angle IDK = \angle IDL$. Suy ra tam giác DKL cân tại D. Từ đó $DJ \perp KL$ và D, I, J thẳng hàng.

(b) Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng BC; U, V lần lượt là giao điểm của BI, CI với EF; T là trung điểm của đoạn thẳng PQ; S là giao điểm của TI và EF; R là giao điểm của BC và đường phân giác trong của góc A; X là giao điểm của BC và trung trực đoạn thẳng PQ.

Nhận thấy rằng tứ giác $EFMN$ là hình chữ nhật. Khi đó $\triangle IEU \sim \triangle IMP$, $\triangle IFV \sim \triangle INQ$ và $\triangle IEF \cup \{S\} \sim \triangle IMN \cup \{T\}$. Suy ra $IU = IP$ và $IV = IQ$; kết hợp với $UV \parallel PQ$, ta thu được tứ giác $UVPQ$ là hình bình hành. Mà T là trung điểm của đoạn thẳng PQ nên S là trung điểm của đoạn thẳng UV. Hơn nữa, ta có $CU \perp BI$ và $BV \perp CI$ theo bổ đề Iran. Khi đó tứ giác $BVUC$ nội tiếp đường tròn có tâm là điểm G. Suy ra $GS \perp UV$.

Với I là trung điểm đoạn thẳng ST và $TX \parallel IR \parallel SG$ (do cùng vuông góc với MN), ta thu được R chính là trung điểm của đoạn thẳng XG. Với các điểm B, C cố định và tỉ lệ $\dfrac{AB}{AC}$ không thay đổi, áp dụng tính chất đường phân giác ta có $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{RB}{RC}$, hay R là điểm cố định. Mà G cũng là điểm cố định nên X là điểm cố định.

Tóm lại, trung trực của đoạn thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

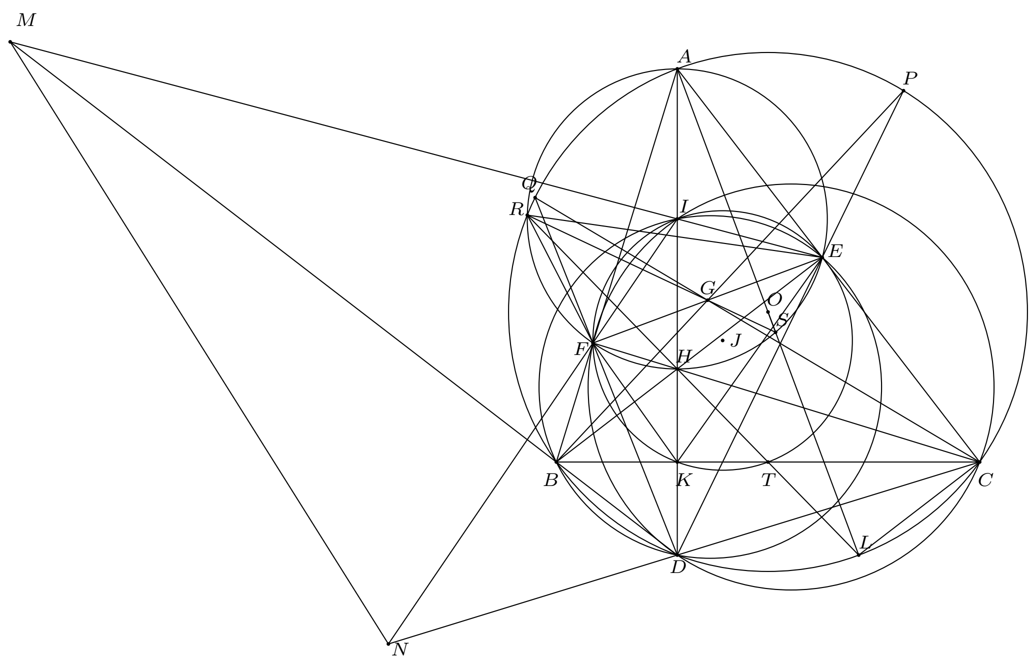
■

Bài toán 7

Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và E, F lần lượt là chân các đường cao hạ từ đỉnh B, C. AH cắt (O) tại D (D khác A).

(a) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AH, EI cắt BD tại M và FI cắt CD tại N. Chứng minh rằng $MN \perp OH$.

(b) Các đường thẳng DE, DF cắt (O) lần lượt tại P, Q (P và Q khác D). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) và AO lần lượt tại R và S (R và S khác A). Chứng minh rằng BP, CQ và RS đồng quy.



LỜI GIẢI.

(a) Gọi (J) là đường tròn Euler của tam giác ABC. Khi đó J là trung điểm của đoạn thẳng OH.

Do H và D đối xứng nhau qua BC nên $\angle BDH = \angle BHD = \angle IHE = \angle IEH$. Suy ra tứ giác $IBDE$ nội tiếp. Khi đó $\overline{MB} \cdot \overline{MD} = \overline{MI} \cdot \overline{ME}$, hay $\mathcal{P}_{M/(O)} = \mathcal{P}_{M/(J)}$.

Tương tự, $\mathcal{P}_{N/(O)} = \mathcal{P}_{N/(J)}$. Suy ra MN là trục đẳng phương của (O) và (J). Từ đó $MN \perp OJ$, mà O, J, H thẳng hàng nên $MN \perp OH$.

(b) Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng EF; T là trung điểm của đoạn thẳng BC; K là giao điểm của AD và BC; L là điểm đối xứng với A qua O.

Không khó để chỉ ra rằng tứ giác $BHCL$ là hình bình hành và R, H, T, L thẳng hàng (các đường thẳng cùng vuông góc với AR). Ta chứng minh các đường thẳng BP, CQ và RS đồng quy tại G.

– *Chứng minh BP và CQ cùng đi qua điểm G.*

Do tính đối xứng của bài toán, ta chỉ cần chỉ ra BP đi qua điểm G; đối với việc chỉ ra CQ đi qua điểm G ta chứng minh tương tự.

Gọi G_1 là giao điểm của BP và EF. Xét các cặp tam giác BFG_1 và DHE, BFE và KHE. Ta có $\angle BFG_1 = \angle ABP = \angle HDE$, $\angle BEF = \angle BCF = \angle HEK$ và $\angle BFE = 180° - \angle AFE = 180° - \angle AHE = \angle EHD$. Do đó $\triangle BFG_1 \sim \triangle DHE$ và $\triangle BFE \sim \triangle KHE$. Khi đó

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{KH}}{\overline{HE}} = \frac{\frac{\overline{DH}}{2}}{\overline{HE}} = \frac{\overline{BF}}{2\overline{FG_1}} \Rightarrow \overline{FE} = 2\overline{FG_1}$$

Suy ra G_1 là trung điểm của đoạn thẳng EF, từ đó $G_1 \equiv G$. Vì vậy, BP đi qua điểm G.

– *Chứng minh RS đi qua điểm G.*

Gọi G_2 là giao điểm của RS và EF. Xét các cặp tam giác REF và CHL, RFG_2 và CLT. Ta có $\angle RFE = \angle RHE = \angle BHL = \angle CLH$, $\angle FRE = \angle FAE = \angle HCL$ và $\angle FRG_2 = \angle FRS = \angle FAS = \angle TCL$. Do đó $\triangle REF \sim \triangle CHL$ và $\triangle RFG_2 \sim \triangle CLT$. Mà T là trung điểm của đoạn thẳng HL nên G_2 là trung điểm của đoạn thẳng EF, hay $G_2 \equiv G$. Vì vậy, RS đi qua điểm G.

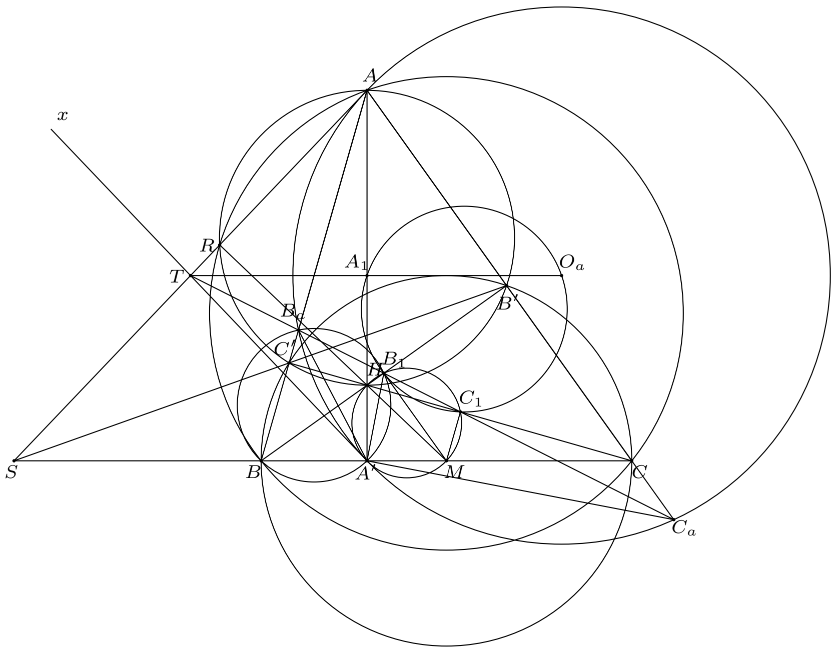
Tóm lại, BP, CQ và RS đồng quy. ■

Bài toán 8

Cho tam giác ABC có các đường cao AA', BB', CC'. Gọi A_1, B_1, C_1 là trung điểm các đoạn AA', BB', CC'. Gọi B_a, C_a là giao điểm của B_1C_1 với AB, AC.

(a) Chứng minh rằng các đường tròn $(A'B_1C_1)$ và (AB_aC_a) tiếp xúc nhau.

(b) Gọi O_a là tâm đường tròn (AB_aC_a). Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1, O_a đồng viên.



Lời giải.

(a) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC; M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Tại A', kẻ $A'x$ là tiếp tuyến của đường tròn $(A'B_aC_a)$.

Sử dụng tính chất của đường trung bình trong các tam giác $BB'C$ và $CC'B$, ta được $\angle HA'M = \angle HB_1M = \angle HC_1M = 90°$. Do đó A', H, B_1, C_1, M cùng thuộc đường tròn đường kính HM. Khi đó, $\angle A'B_1C_1 = \angle CMC_1 = \angle A'BC'$, suy ra A', B, B_a, B_1 đồng viên.

Do đó $\angle A'B_aC = \angle A'B_aB_1 = \angle A'BB_1 = \angle CBB' = \angle A'AC_a$, suy ra A, B_a, A', C_a đồng viên. Từ đó

$$\begin{aligned}\angle HA'x = \angle AA'x = \angle B_aA'x + \angle B_aA'A = \angle A'AB_a + \angle B_aA'A \\ = 180° - \angle AB_aA' = \angle BB_aA' = \angle HB_1A'.\end{aligned}$$

Suy ra $A'x$ cũng là tiếp tuyến của đường tròn $(A'B_1C_1)$. Vì vậy, các đường tròn $(A'B_1C_1)$ và (AB_aC_a) tiếp xúc nhau.

(b) Gọi R là giao điểm của hai đường tròn (ABC) và (AH) (khác A); S là giao điểm của BC và tiếp tuyến tại A của đường tròn (O_a); T là trung điểm của đoạn thẳng AS.

Khi đó $TA_1 \perp AA'$. Lại có AA' là dây cung của (O_a) nên $OA_1 \perp AA'$. Suy ra T, A_1, O_a thẳng hàng và TA' là tiếp tuyến tại A' của O_a.

Ta có M, H, R thẳng hàng (cùng vuông góc AR) và A, R, A', M cùng thuộc đường tròn đường kính AM. Khi đó $\angle RAH = \angle A'MH = \angle AC_aA'$ hay AR là tiếp tuyến của (O_a). Do đó A, R, T, S thẳng hàng.

Ngoài ra, M chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BC'B'C$. Theo tính chất tâm đẳng phương, trục đẳng phương của các cặp đường tròn (ABC) và (AH), (ABC) và (M), (AH) và (M) đồng quy. Nói cách khác, AR, $B'C'$, BC đồng quy tại S, hay B', C', S thẳng hàng.

Khi đó, theo tính chất của tứ giác toàn phần, $(S, A'; B, C) = -1$. Chiếu xuyên tâm A lên đường tròn (O_a), ta được tứ giác $AB_aA'C_a$ là tứ giác điều hòa. Do đó T, B_1, C_1 thẳng hàng. Khi đó $\overline{TB_1} \cdot \overline{TC_1} = TA'^2 = TA^2 = \overline{TA_1} \cdot \overline{TO_a}$. Từ đó, A_1, B_1, C_1, O_a đồng viên.

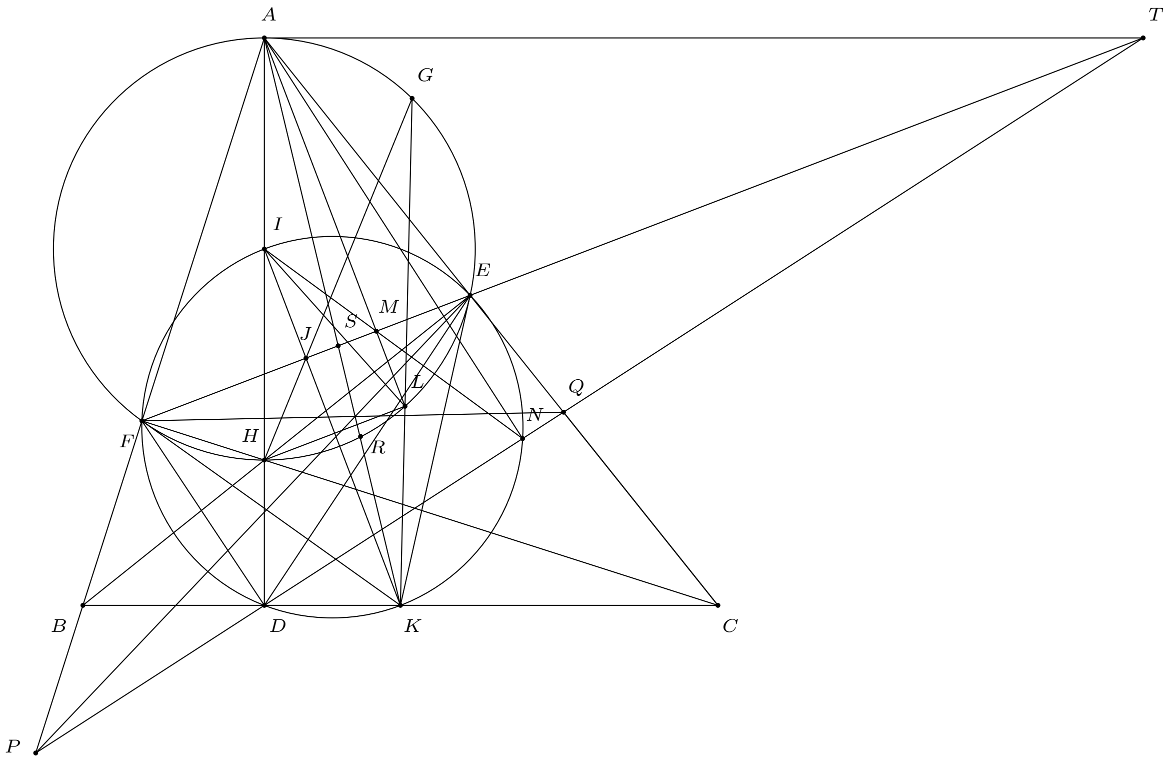
■

Bài toán 9

Cho tam giác nhọn không cân ABC có trực tâm H và D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF, và K, J lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, EF. HJ cắt đường tròn (I) tại G khác H, GK cắt đường tròn I tại L khác G.

(a) Chứng minh rằng AL vuông góc với EF.

(b) Cho AL cắt EF tại M, IM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IEF tại N khác I. DN cắt AB, AC tương ứng tại P, Q. Chứng minh rằng PE, QF, AK đồng quy.



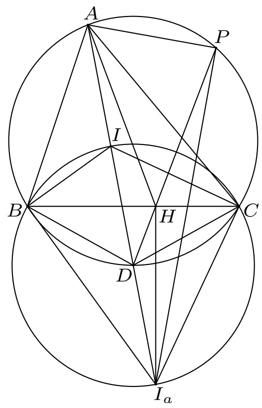
Lời giải.

(a) Không khó để chỉ ra rằng I, J, K thẳng hàng và KE, KF là tiếp tuyến tại E, F của đường tròn (I). Do GL đi qua giao của hai tiếp tuyến tại E và F của (I) nên tứ giác $GELF$ là tứ giác điều hòa, hay GL là đường đối trung của tam giác GEF. Lại có J là trung điểm EF nên GL, GJ là hai đường đẳng giác trong góc EGF (trung tuyến - đường đối trung). Tức là $\angle EGL = \angle FGJ = \angle FGH$, suy ra $HL \parallel EF$. Mà $AL \perp HL$ nên $AL \perp EF$.

(b) Để thuận tiện, ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề

Cho tam giác ABC. Gọi I, I_a lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp ứng với góc A trong tam giác ABC. AI cắt (ABC) tại D khác A. H là tiếp điểm của BC và đường tròn bàng tiếp (I_a). DH cắt (ABC) tại P khác D. Khi đó $\angle API_a = 90^\circ$.



Chứng minh. Không khó để chỉ ra rằng D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC và I_a thuộc đường tròn D. Hơn nữa, theo tính chất của phân giác và xử lí cắc cặp tam giác đồng dạng, ta thu được $DI_a^2 = DB^2 = DC^2 = \overline{DH} \cdot \overline{DP}$. Khi đó $\angle DPI_a = \angle DI_aH$.
Mặt khác, I_aH và I_aD là hai đường đẳng giác trong góc BI_aC (đường cao - đường kính). Như vậy

$$\angle APD = \angle ACD = \angle ICB + \angle ICD = \angle II_aB + \angle I_aIC = \angle HI_aC + \angle DIC.$$

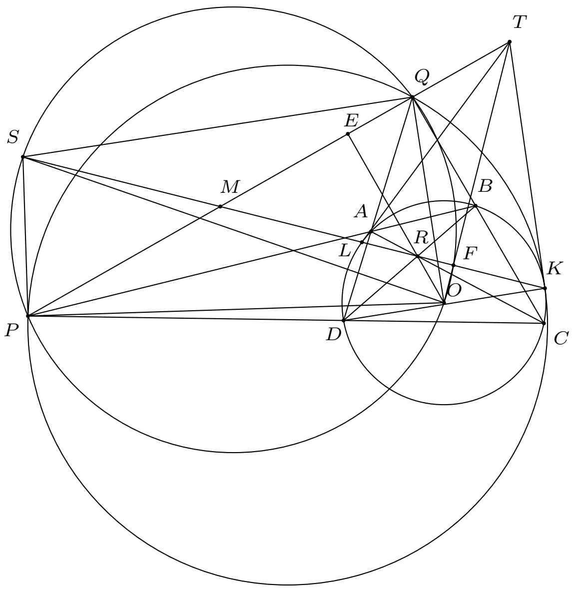
Từ đó $\angle API_a = \angle APD + \angle DPI_a = \angle HI_aC + \angle DIC + \angle DI_aH = 90^\circ$. □

Trở lại bài toán.
Gọi R và S là giao của AK với (I) và EF; T là giao của DN và tiếp tuyến tại A của (I).
Nhận thấy rằng H và A lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp ứng với góc H trong tam giác HEF. Hơn nữa, M là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp (A) trên EF và N là giao của IM và (HEF). Do đó, sử dụng bổ đề trên ta thu được $\angle DNA = 90^\circ$. Lại có $\angle DAT = 90^\circ$ nên $TA^2 = \overline{TN} \cdot \overline{TD}$, hay $\mathcal{P}_{T/(I)} = \mathcal{P}_{T/(IEF)}$. Nói cách khác, T nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (I) và (IEF), hay T, E, F thẳng hàng.
Do AR đi qua giao của hai tiếp tuyến tại E và F của (I) nên tứ giác $AERF$ là tứ giác điều hòa, hay $(E, F; A, R) = -1$. Chiếu xuyên tâm A lên đường thẳng TF, ta thu được $(E, F; T, S) = -1$. Theo tính chất của tứ giác toàn phần, PE, QF, AK đồng quy.

■

Bài toán 10

Cho tứ giác $ABCD$ không là hình thang nội tiếp đường tròn ω. Gọi P, Q, R lần lượt là giao điểm của AB và CD, AD và BC, AC và BD. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng PQ. MR cắt ω tại K. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ và ω tiếp xúc nhau.



LỜI GIẢI. Gọi L là giao điểm của MR và đường tròn ω khác K; T là giao của hai tiếp tuyến tại K và L của đường tròn ω; O là tâm đường tròn ω; E là giao của OR và PQ; F là giao của OT và KL; S là điểm đối xứng của R qua M.

Áp dụng định lí Brocard cho tứ giác toàn phần $ABCD.PQ$ có R là giao của AC và BD và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$, ta thu được R là trực tâm của tam giác OPQ và PQ là đối cực của R. Nói cách khác, $\overline{OR} \cdot \overline{OE} = R^2$, với R là bán kính của đường tròn ω. Lại có $\overline{OF} \cdot \overline{OT} = R^2$ và $\angle RFO = 90^\circ$ nên $OR \perp ET$, hay T thuộc đường thẳng PQ.

Mặt khác, do S là điểm đối xứng của R (trực tâm tam giác OPQ) qua M nên OS là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OPQ. Khi đó, do $\angle OFS = \angle OPS = \angle OQS = 90^\circ$ nên F thuộc đường tròn (OPQ). Từ đó, $\overline{TP} \cdot \overline{TQ} = \overline{TF} \cdot \overline{TO} = TK^2$, hay TK cũng là tiếp tuyến của đường tròn (KPQ). Vì vậy, đường tròn (KPQ) và ω tiếp xúc nhau. ■

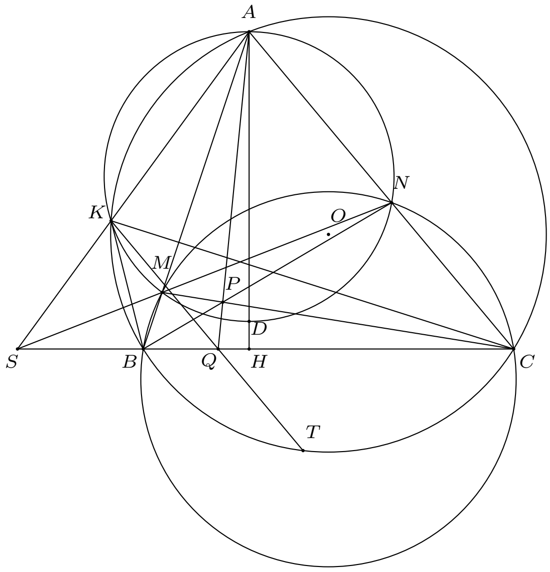
Bài toán 11

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH (H thuộc BC). Lấy điểm D trên AH, đường tròn đường kính AD cắt (O), AB, AC tại K, M, N tương ứng. BN và CM cắt nhau tại P. AP cắt BC tại Q. Chứng minh rằng KQ đi qua một điểm cố định.

LỜI GIẢI. Gọi T là giao điểm của KQ và (O); S là giao điểm của MN và BC.

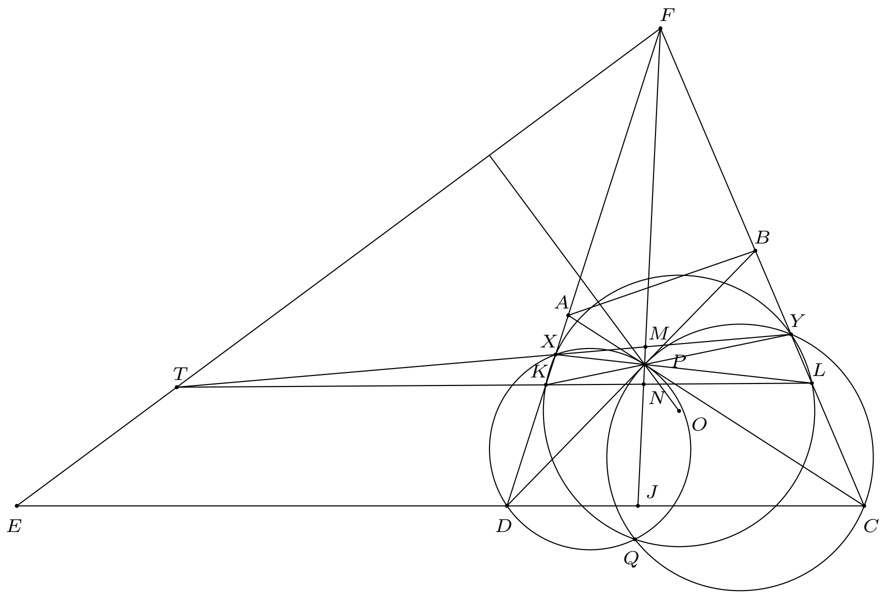
Nhận thấy rằng AD đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN, mà AH, AO là hai đường đẳng giác trong góc A nên $AO \perp MN$, hay MN đối song BC trong góc A. Do đó tứ giác M, N, B, C đồng viên. Theo tính chất tâm đẳng phương, trục đẳng phương của các cặp đường tròn (O) và (AD), (O) và $(BMNC)$, (AD) và $(BMNC)$ đồng quy. Nói cách khác, AK, MN, BC đồng quy tại S

Theo tính chất của tứ giác toàn phần, $(S, Q; B, C) = -1$. Chiếu xuyên tâm K lên đường tròn (O), ta thu được tứ giác $ABTC$ là tứ giác điều hòa. Mà tam giác ABC cố định và điểm T xác định duy nhất nên T cố định. Vì vậy, KQ đi qua một điểm cố định. ■



Bài toán 12

Trong một tứ giác lồi $ABCD$, các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại E và các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại F. Gọi P là giao điểm của các đường chéo AC và BD. Đường tròn ω_1 đi qua D và tiếp xúc với AC tại P. Đường tròn ω_2 đi qua C và tiếp xúc với BD tại P. Gọi Q là giao điểm khác P của hai đường tròn ω_1 và ω_2. Chứng minh rằng đường vuông góc hạ từ P xuống đường thẳng EF đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác XQY.



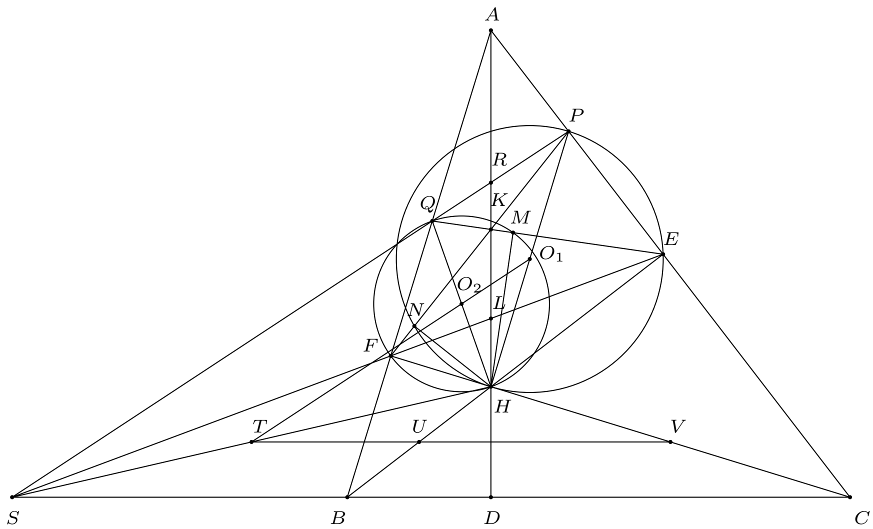
Lời giải. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác QXY; K là giao điểm của AD và YP, L là giao điểm của BC và XP; T là giao điểm của XY và KL; FP cắt XY tại M, cắt KL tại N, cắt CD tại J.

Theo tính chất của tứ giác toàn phần, tứ giác toàn phần $KXYL.FT$ có $(T, M; X, Y) = (T, N; K, L) = -1$, và tứ giác toàn phần $ABCD.EF$ có $(E, J; D, C) = -1$. Mà AD, PJ, BC đồng quy tại F nên E, T, F thẳng hàng.

Mặt khác, do ω_1 tiếp xúc AC tại P và ω_2 tiếp xúc BD tại P nên $\angle LXK = \angle DPC = \angle KYL$. Do đó, X, Y, K, L cùng thuộc đường tròn (O). Áp dụng định lí Brocard cho tứ giác toàn phần $KXYL.FT$ có P là giao của XL và YK và O là tâm ngoại tiếp tứ giác $KXYL$, ta thu được $OP \perp EF$. ■

Bài toán 13

Cho tam giác ABC, các đường cao BE và CF cắt nhau tại trực tâm H. K là điểm thay đổi trên đoạn thẳng AH. Gọi M, N là hình chiếu của H lên KE, KF. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác HEN và HFM luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác HEN và HFM; P là giao điểm của FK và AC, Q là giao điểm của EK và AB. Đường thẳng AH cắt BC tại D, cắt EF tại L, cắt PQ tại R. Hơn nữa, gọi S_1 là giao điểm của EF và BC, S_2 là giao điểm của EF và PQ.

Theo tính chất của tứ giác toàn phần, tứ giác toàn phần $BFEC.AS_1$ có $(S_1, D; B, C) = (S_1, L; F, E) = -1$, và tứ giác toàn phần $FQPE.AS_2$ có $(S_2, R; Q, P) = (S_2, L; F, E) = -1$. Khi đó $(S_1, L; F, E) = (S_2, L; F, E) = -1$, suy ra $S_1 \equiv S_2 \equiv S$, hay BC, EF, PQ đồng quy tại S.

Mặt khác, do $\angle HEP = \angle HNP = 90^\circ$ và $\angle HFQ = \angle HMQ = 90^\circ$ nên HP và HQ lần lượt là đường kính của đường tròn (O_1) và (O_2).

Gọi T, U, V tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng HS, HB, HC. Xét phép vị tự tâm H, tỉ số $\frac{1}{2}$

$$\mathcal{H}_H^{\frac{1}{2}} : B \mapsto U, C \mapsto V, S \mapsto T, P \mapsto O_1, Q \mapsto O_2, TV \mapsto SC.$$

Do đó phép vị tự trên biến PS thành O_1T, hay O_1, O_2, T thẳng hàng. Lại có S là giao điểm của EF và BC nên S là điểm cố định. Mà H cố định và T là trung điểm đoạn thẳng SH nên T là điểm cố định.

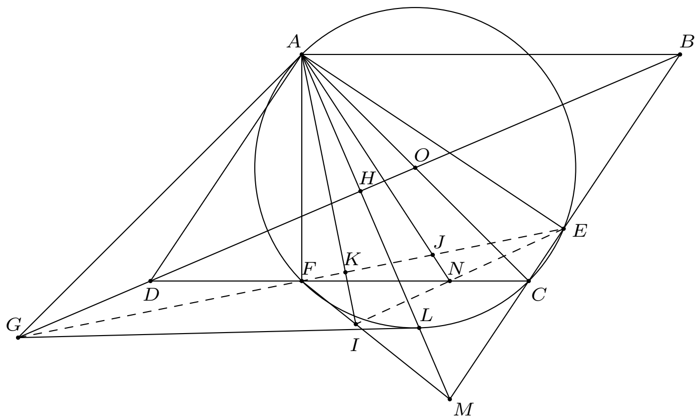
Tóm lại, tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác HEN và HFM luôn đi qua một điểm cố định. ■

Bài toán 14

Cho hình bình hành $ABCD$ có $\angle BAD > 90^\circ$. Gọi G, E, F là các điểm nằm trên các đường thẳng tương ứng là BD, BC, CD sao cho $AG \perp AC$, $AE \perp BC$, $AF \perp CD$.

(a) Chứng minh rằng G, E, F thẳng hàng.

(b) Đường cao ứng với đỉnh A của tam giác ABD cắt BC tại M. Trung tuyến ứng với đỉnh A của tam giác AEF cắt CD tại N. Chứng minh rằng EN, FM, và đường cao ứng với đỉnh A của tam giác AEF đồng quy.



Lời giải.

(a) Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Do $AG \perp AC$, $AE \perp BC \parallel AD$ và $AF \perp CD \parallel AB$ nên ta có $A(E,F;C,G) = A(D,B;G,C)$. Chiếu xuyên tâm A lên đường thẳng BD, rồi chiếu xuyên tâm C, ta được $A(D,B;G,C) = (D,B;G,O) = C(D,B;G,O) = C(F,E;G,A) = C(E,F;A,G)$. Do đó G, E, F thẳng hàng.

(b) Đường cao ứng với đỉnh A của tam giác AEF cắt FM tại I và EF tại K. Đường cao ứng với đỉnh A của tam giác ABD cắt BD tại H và (AEF) tại L. Gọi J là trung điểm đoạn thẳng EF.

Do $\angle AFC = \angle AEC = 90^\circ$ nên A, F, C, E cùng thuộc đường tròn (O). Do $OH \perp AL$ và GA là tiếp tuyến tại A của (O) nên GL là tiếp tuyến tại L của (O). Mà G, E, F thẳng hàng nên tứ giác $AELF$ điều hòa.

Khi đó, AJ và AL là hai đường đẳng giác trong góc EAF (trung tuyến - đường đối trung). Ta cũng có AK, AC là hai đường đẳng giác trong góc EAF (đường cao - đường kính). Xét phép đối xứng qua phân giác góc EAF, biến AE thành AF và ngược lại, biến AJ thành AL và ngược lại, biến AK thành AC và ngược lại. Phép đối xứng này bảo toàn chùm tỉ số kép xuyên tâm A, do đó

$$A(F,C;E,M) = A(E,K;F,J) = A(E,I;F,N) = A(F,N;E,I).$$

Mà $F(A,N;E,I) = F(A,C;E,M) = A(F,C;E,M)$ nên $F(A,N;E,I) = A(F,N;E,I)$. Từ đó E, N, I thẳng hàng, hay EN, FM, và đường cao ứng với đỉnh A của tam giác AEF đồng quy.

Chứng minh hoàn tất. ■