EUCLIDEAN GEOMETRY

PHƯƠNG TÍCH - TỈ SỐ

HÀNG ĐIỂM ĐIỀU HÒA

ĐẲNG GIÁC - LIÊN HỢP

CỰC - ĐỐI CỰC

101 BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

Author

MARK NGUYEN

LaTeX

MARK NGUYEN

"Let no one ignorant of geometry enter here."

– Plato, probably –

"There is no royal road to geometry."

– Euclid of Alexandria –

Ngày 2 tháng 2 năm 2025

Dedicated to a friend of mine.

Mục lục

Phần I

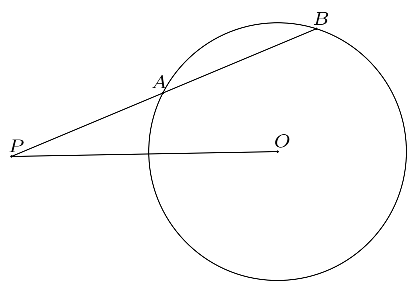
Lí thuyết cơ sở

§1 Phương tích - Trục đẳng phương

§1.1 Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

Định lí 1.1

Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm P bất kì. Một đường thẳng ℓ thay đổi đi qua P cắt (O) tại hai điểm A và B. Khi đó tích $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ không đổi và bằng $OP^2 - R^2$.



Định nghĩa 1.1

Đại lượng $OP^2 - R^2$ được gọi là phương tích của điểm P đối với đường tròn $(O;R)$. Kí hiệu: $\mathcal{P}_{P/(O)} = OP^2 - R^2$.

Như vậy $\mathcal{P}_{P/(O)} > 0$ khi và chỉ khi P nằm ngoài (O), $\mathcal{P}_{P/(O)} < 0$ khi và chỉ khi P nằm trong (O), và $\mathcal{P}_{P/(O)} = 0$ khi và chỉ khi P thuộc (O).

Tính chất 1.1

Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm ngoài (O). Qua P, kẻ cát tuyến PAB và tiếp tuyến PT tới (O). Khi đó $\mathcal{P}_{P/(O)} = \overline{PA}\cdot\overline{PB} = PT^2$.

Tính chất 1.2

Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại P. Khi đó, bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PC}\cdot\overline{PD}$.

Tính chất 1.3

Cho hai đường thẳng AB và PT cắt nhau tại P. Khi đó (ABT) tiếp xúc PT tại T khi và chỉ khi $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = PT^2$.

Tính chất 1.4

Cho AB là một đường kính bất kì của (O). Khi đó $\mathcal{P}_{P/(O)} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$.

§1.2 Trục đẳng phương và tâm đẳng phương

Bài toán

Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$. Tìm quỹ tích các điểm P có cùng phương tích với hai đường tròn này.

LỜI GIẢI. Ta có $\mathcal{P}_{P/(O_1)} = \mathcal{P}_{P/(O_2)}$ khi và chỉ khi

$$PO_1^2 - R_1^2 = PO_2^2 - R_2^2 \Leftrightarrow PO_1^2 - PO_2^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Nếu $O_1 \equiv O_2$, không có điểm P nào thỏa mãn. Nếu O_1 và O_2 không trùng nhau, thì tồn tại duy nhất điểm H trên đoạn thẳng O_1O_2 sao cho $HO_1^2 - HO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$. Như vậy

$$PO_1^2 - PO_2^2 = HO_1^2 - HO_2^2.$$

Áp dụng định lí Pythagore, tập hợp điểm P là một đường thẳng Δ vuông góc với O_1O_2. Nếu gọi M là trung điểm O_1O_2 thì Δ cắt O_1O_2 tại điểm H thỏa mãn

$$\overline{MH} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2\overline{O_1O_2}}.$$

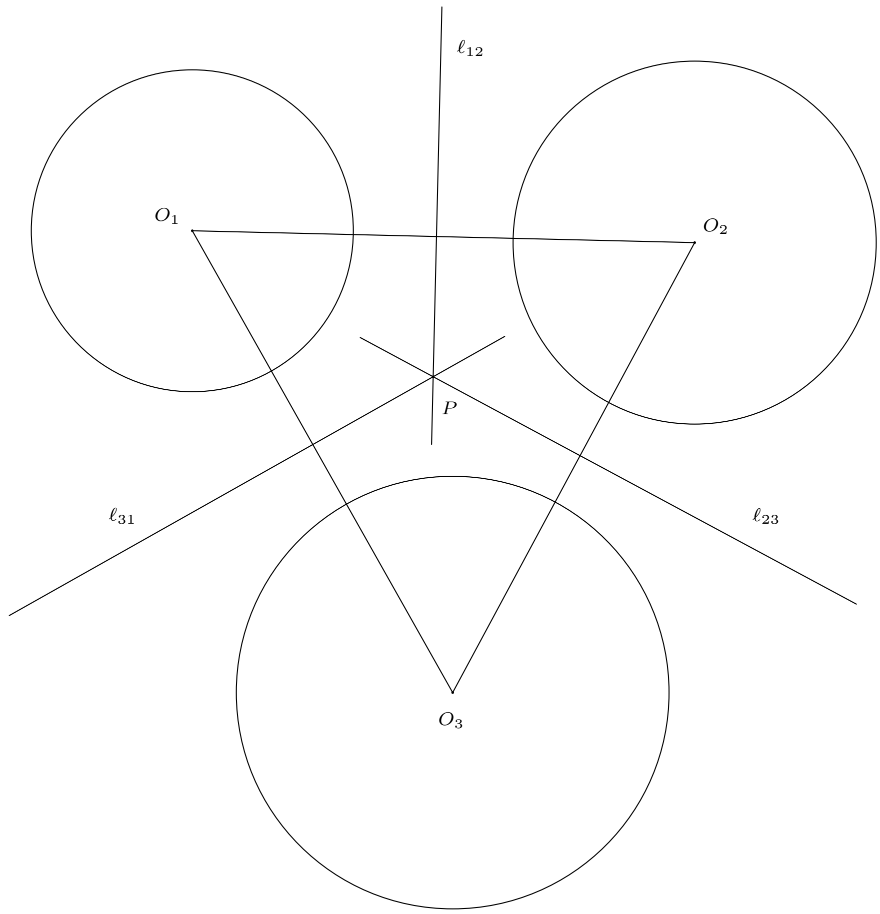
Đây là một độ dài cố định, do đó đường thẳng Δ cố định. ■

Định nghĩa 1.2

Tập hợp các điểm có cùng phương tích với hai đường tròn không đồng tâm là một đường thẳng vuông góc với đường nối tâm của hai đường tròn. Đường thẳng này được gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn đó.

Định lí 1.2

Nếu ba đường tròn có tâm không thẳng hàng thì trục đẳng phương của từng cặp hai trong ba đường tròn đồng quy tại một điểm.



Chứng minh. Xét ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có tâm không thẳng hàng. Gọi ℓ_{ij} (với $i \neq j$ và $i, j \in \{1; 2; 3\}$) là trục đẳng phương của (O_i) và (O_J).

Do O_1, O_2, O_3 không thẳng hàng nên hai đường thẳng ℓ_{12} và ℓ_{23} cắt nhau. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng ấy. Khi đó, ta có $\mathcal{P}_{P/(O_1)} = \mathcal{P}_{P/(O_2)}$ và $\mathcal{P}_{P/(O_2)} = \mathcal{P}_{P/(O_3)}$. Suy ra $\mathcal{P}_{P/(O_3)} = \mathcal{P}_{P/(O_1)}$, hay P thuộc đường thẳng ℓ_{31}. Vì vậy ℓ_{12}, ℓ_{23}, ℓ_{31} đồng quy. $\square$

Định nghĩa 1.3

Điểm giao nhau trên là tâm đẳng phương của ba đường tròn.

Định nghĩa 1.4

Một bộ đường tròn đồng trục là một tập hợp các đường tròn có chung một trục đẳng phương.

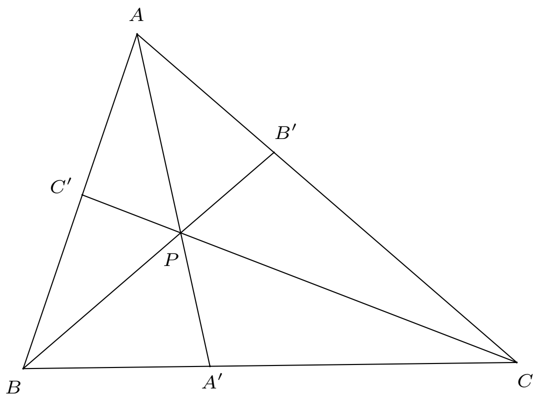
§2 Định lí Ceva - Định lí Menelaus

§2.1 Định lí Ceva

Định lí 2.1

(*Ceva*) Cho tam giác ABC và các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB của tam giác, sao cho không có điểm nào nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó, hoặc có đúng hai điểm nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó. Khi đó các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1.$$



Chứng minh. Ở đây ta chỉ chứng minh trường hợp không có điểm nào nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó. Đối với trường hợp có đúng hai điểm nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó, ta dễ dàng chứng minh tương tự.

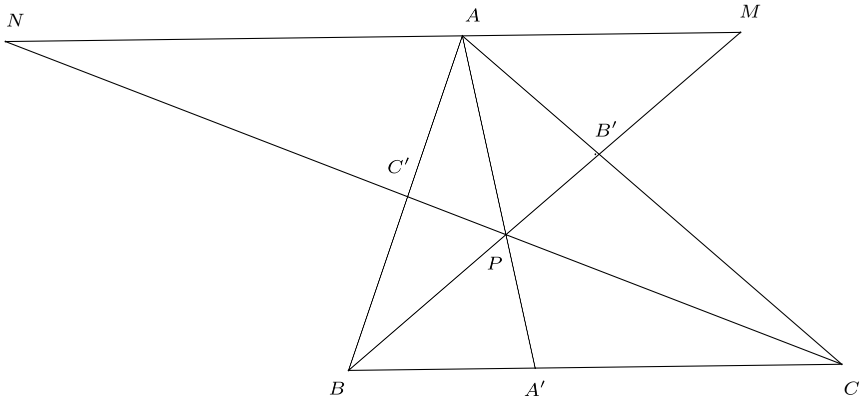
Trước hết, ta sẽ chứng minh mệnh đề thuận: nếu các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy thì

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Thật vậy, xét đường thẳng ℓ đi qua A song song BC, cắt đường thẳng BB' tại M và đường thẳng CC' tại N. Gọi P là điểm đồng quy của các đường thẳng AA', BB', CC'.

Ta có các tỉ lệ thức $\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AM}}$ (do $\triangle B'BC \sim \triangle B'MA$), $\frac{\overline{C'B}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NA}}$ (do $\triangle C'CB \sim \triangle C'NA$), và $\frac{\overline{A'B}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{A'P}}{\overline{AP}}$ (do $\triangle A'PB \sim \triangle APM$ và $\triangle A'PC \sim \triangle APN$). Do đó

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{A'C}} = 1.$$



Bây giờ, ta sẽ chỉ ra mệnh đề đảo vẫn đúng: nếu ta có các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB (sao cho không có điểm nào nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó) thỏa mãn

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1$$

thì các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng các đường thẳng AA', BB', CC' không đồng quy. Gọi P là giao điểm của BB' và CC'; A_0 là giao điểm của AP và BC.

Theo mệnh đề thuận, ta có

$$\frac{\overline{BA_0}}{\overline{A_0C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Kết hợp với tỉ lệ giả thiết, ta thu được $\dfrac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \dfrac{\overline{BA_0}}{\overline{A_0C}}$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi A' trùng A_0, vô lí. Vì thế giả sử sai, hay ta có mệnh đề đảo đúng.

Vì vậy, định lí Ceva được chứng minh. □

Định nghĩa 2.1

Các đoạn thẳng AA', BB', CC' được xác định như trên được gọi là các cevian của $\triangle ABC$.

Hệ quả 2.1

(*Trọng tâm*) Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng BC, CA, AB. Khi đó AM, BN, CP đồng quy tại trọng tâm G của tam giác ABC.

Hệ quả 2.2

(*Trực tâm*) Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên BC, CA, AB. Khi đó AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H của tam giác ABC.

Đối với trực tâm thì sẽ hơi khó thấy, nhưng chú ý rằng $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB\cos B}{AC\cos C}$, v.v.

Hệ quả 2.3

(*Điểm Gergonne*) Cho tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh BC, CA, AB. Khi đó AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm Gergonne G_e của tam giác ABC.

Hệ quả 2.4

(*Điểm Nagel*) Cho tam giác ABC. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp ứng với góc A, B, C của tam giác ABC với các cạnh BC, CA, AB. Khi đó AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại điểm Nagel N_a của tam giác ABC.

Định lí 2.2

(*Ceva lượng giác*) Cho tam giác ABC và các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB của tam giác, sao cho không có điểm nào nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó, hoặc có đúng hai điểm nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó. Khi đó các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{\sin(AA';AB)}{\sin(AA';AC)}\cdot\frac{\sin(BB';BC)}{\sin(BB';BA)}\cdot\frac{\sin(CC';CA)}{\sin(CC';CB)}=1.$$

Chứng minh. Theo định lí sine, ta có

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}}=\frac{\sin(AA';AB)}{\sin(A'A;A'B)}\quad \text{và}\quad \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}=\frac{\sin(AA';AC)}{\sin(A'A;A'C)}.$$

Mà $\sin(A'A;A'B)=\sin(A'A;A'C)$ nên

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}}:\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}=\frac{\sin(AA';AB)}{\sin(AA';AC)}$$

Tương tự ta thu được

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}=\frac{\sin(BB';BC)}{\sin(BB';BA)}\text{ và }\frac{\overline{C'A}}{\overline{CA}}:\frac{\overline{BC'}}{\overline{BC}}=\frac{\sin(CC';CA)}{\sin(CC';CB)}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\frac{\sin(AA';AB)}{\sin(AA';AC)}\cdot\frac{\sin(BB';BC)}{\sin(BB';BA)}\cdot\frac{\sin(CC';CA)}{\sin(CC';CB)}&=\left(\frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}}:\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}\right)\cdot\left(\frac{\overline{B'C}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}\right)\cdot\left(\frac{\overline{C'A}}{\overline{CA}}:\frac{\overline{BC'}}{\overline{BC}}\right)\\&=\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}=1\end{aligned}$$

theo định lí Ceva. □

Hệ quả 2.5

(*Tâm nội tiếp*) Các đường phân giác trong của tam giác ABC đồng quy tại tâm nội tiếp I của tam giác.

Hệ quả 2.6

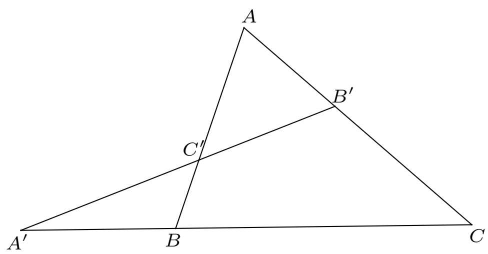
(*Điểm Lemoine*) Cho tam giác ABC. Qua phân giác góc A kẻ đường đối xứng với trung tuyến ứng với điểm A trong tam giác, cắt BC tại A_0. Tương tự xác định các điểm B_0, C_0. Khi đó AA_0, BB_0, CC_0 đồng quy tại điểm Lemoine L_e của tam giác ABC.

§2.2 Định lí Menelaus

Định lí 2.3

(*Menelaus*) Cho tam giác ABC và các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các đường BC, CA, AB của tam giác, sao cho có đúng một điểm nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó, hoặc cả ba điểm đều nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó. Khi đó các điểm A', B', C' thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = -1.$$



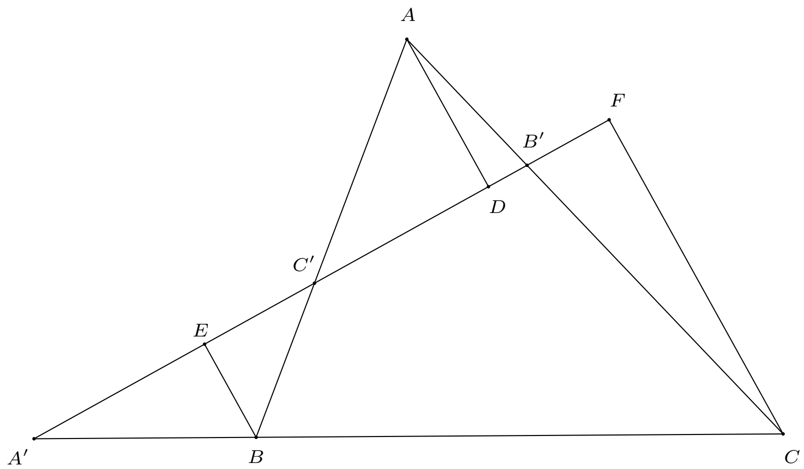
Chứng minh. Ở đây ta chỉ chứng minh trường hợp có đúng một điểm nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó. Đối với trường hợp có cả ba điểm nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó, ta dễ dàng chứng minh tương tự.

Trước hết, ta sẽ chứng minh mệnh đề thuận: nếu các các điểm A', B', C' thẳng hàng thì

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Thật vậy, gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm A, B, C trên đường thẳng $A'B'$. Khi đó, ta có các tỉ lệ thức $\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{FC}}$ (do $\triangle A'BE \sim \triangle A'CF$), $\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{DA}}$ (do $\triangle B'CF \sim \triangle B'AD$), và $\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{EB}}$ (do $\triangle C'AD \sim \triangle C'BE$). Từ đó ta thu được

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{EB}} = -1.$$



Bây giờ, ta sẽ chỉ ra mệnh đề đảo vẫn đúng: nếu ta có các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB (trong đó có đúng một điểm nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó) thỏa mãn

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = -1$$

thì A', B', C' thẳng hàng. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng các điểm A', B', C' không thẳng hàng. Gọi A_0 là giao điểm của $B'C'$ và BC.

Theo mệnh đề thuận, ta có

$$\frac{\overline{BA_0}}{\overline{A_0C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Kết hợp với tỉ lệ giả thiết, ta thu được $\dfrac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \dfrac{\overline{BA_0}}{\overline{A_0C}}$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi A' trùng A_0, vô lí. Vì thế giả sử sai, hay ta có mệnh đề đảo đúng.

Vì vậy, định lí Menelaus được chứng minh. ☐

Định lí 2.4

(*Menelaus lượng giác*) Cho tam giác ABC và các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB của tam giác, sao cho có đúng một điểm nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó, hoặc cả ba điểm đều nằm ngoài đoạn thẳng tương ứng của nó. Khi đó các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{\sin(AA';AB)}{\sin(AA';AC)} \cdot \frac{\sin(BB';BC)}{\sin(BB';BA)} \cdot \frac{\sin(CC';CA)}{\sin(CC';CB)} = -1.$$

Chứng minh. Ta chứng minh tương tự như định lí Ceva lượng giác. ☐

§3 Tỉ số kép - Hàng điểm điều hòa - Tứ giác điều hòa

§3.1 Tỉ số đơn, tỉ số kép

Tỉ số đơn - tỉ số kép của hàng điểm

Định nghĩa 3.1

Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng với B không trùng C. Tỉ số đơn của A, B, C là một số thực, kí hiệu là $(A, B; C)$, được xác định như sau: $(A, B; C) = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

Định nghĩa 3.2

Bộ bốn điểm đôi một khác nhau, có kể thứ tự, cùng thuộc một đường thẳng được gọi là hàng điểm. Đường thẳng chứa bốn điểm đó được gọi là giá của hàng điểm.

Định nghĩa 3.3

Tỉ số kép của hàng điểm A, B, C, D là một số thực (khác 1), kí hiệu là $(A, B; C, D)$, được xác định như sau: $(A, B; C, D) = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \dfrac{(A, B; C)}{(A, B; D)}$.

Tính chất 3.1

Một số tính chất cơ bản của tỉ số kép từ định nghĩa trên:

- $(A, B; C, D) = (C, D; A, B) = (B, A; D, C) = (D, C; A, B)$;
- $(A, B; C, D) = \dfrac{1}{(B, A; C, D)}$;
- $(A, B; C, D) = 1 - (A, C; B, D) = 1 - (D, B; C, A)$;
- $(A, B; C, D) \neq 1$;
- Nếu $(A, B; C, D) = (A', B; C, D)$ thì $A \equiv A'$ và tương tự cho các điểm B, C, D.

Tỉ số kép của chùm đường thẳng

Định nghĩa 3.4

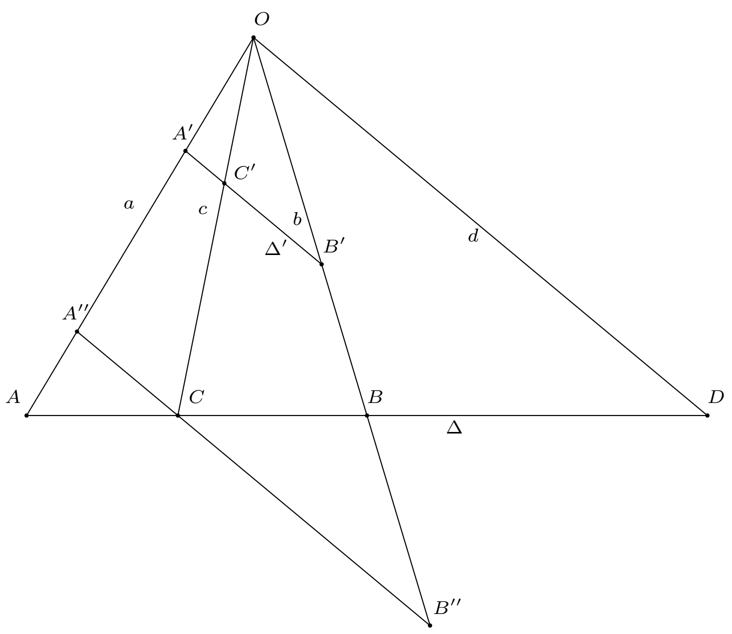
Một tập hợp các đường thẳng đồng quy được gọi là chùm đầy đủ đường thẳng. Điểm đồng quy được gọi là tâm của chùm.

Định nghĩa 3.5

Bộ bốn đường thẳng đôi một khác nhau, có kể đến thứ tự, cùng thuộc một chùm đầy đủ đường thẳng được gọi là chùm đường thẳng.

Định lí 3.1

Cho chùm đường thẳng a, b, c, d tâm O. Một đường thẳng Δ không đi qua O lần lượt cắt a, b, c, d tại A, B, C, D. Đường thẳng Δ' không đi qua O lần lượt cắt a, b, c tại A', B', C'. Khi đó $\Delta' \parallel d$ khi và chỉ khi $(A, B; C, D) = (A', B'; C')$.



Chứng minh. Qua C kẻ đường thẳng song song với d, cắt a và b lần lượt tại A'' và B''. Theo định nghĩa của tỉ số kép và định lí Thalès, ta có

$$(A, B; C, D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{DA}} : \frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA''}}{\overline{DO}} : \frac{\overline{CB''}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{CA''}}{\overline{CB''}} = (A'', B''; C). \quad (1)$$

Nói cách khác, $(A, B; C, D) = (A', B'; C')$ xảy ra khi và chỉ khi $(A'', B''; C) = (A', B'; C')$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\Delta' \parallel A''B'' \parallel d$. □

Từ đó, ta dẫn đến định lí sau:

Định lí 3.2

Cho chùm đường thẳng a, b, c, d tâm O. Một đường thẳng Δ không đi qua O lần lượt cắt a, b, c, d tại A, B, C, D. Khi đó $(A, B; C, D)$ không phụ thuộc vào cách chọn Δ.

Định nghĩa 3.6

Số không đổi được đề cập trong định lí trên được gọi là tỉ số kép của chùm a, b, c, d, kí hiệu: $(a, b; c, d) = (A, B; C, D)$.

Ngoài ra, nếu ta biết bốn điểm A, B, C, D lần lượt nằm trên chùm a, b, c, d (có tâm O) thì ta có thể viết chùm tỉ số kép của chùm a, b, c, d dưới dạng $O(A, B; C, D)$.

`Phép chiếu xuyên tâm`

Định nghĩa 3.7

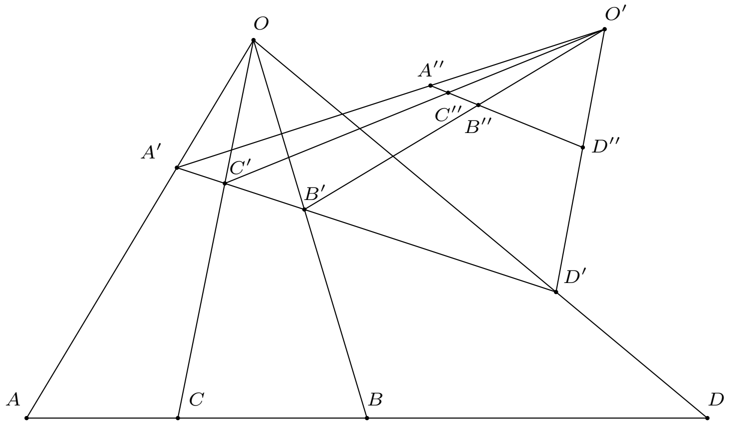
Cho hai đường thẳng d, d' và một điểm S không thuộc d, d'. Xét ánh xạ $f : d \to d'$, được xác định như sau: $f(M) = M'$ sao cho S, M, M' thẳng hàng. Khi đó f được gọi là phép chiếu xuyên tâm. Điểm S được gọi là tâm chiếu của f.

Nhờ phép chiếu xuyên tâm, ta có thể phát biểu lại định lí về tỉ số kép của chùm đường thẳng: *Phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỉ số kép.* Tức là qua phép chiếu xuyên tâm O

$$\begin{aligned} f : \Delta &\to \Delta' \\ A &\mapsto A' \\ B &\mapsto B' \\ C &\mapsto C' \\ D &\mapsto D' \end{aligned}$$

thì $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$. Trong trường hợp $\Delta \parallel d$ thì D được xem là trùng với điểm vô cùng của d, kí hiệu là ∞. Điều này gợi ra một số nhận xét như sau:

- Trong hình học xạ ảnh, mọi phương trên mặt phẳng đều có một điểm vô cùng ứng với phương đó. Vì vậy các đường thẳng song song có thể coi là đồng quy tại điểm vô cùng ứng với phương của các đường thẳng đó.
- Phép chiếu song song có thể được coi là phép chiếu xuyên tâm, với tâm chiếu là điểm vô cùng.
- Bằng phép chiếu xuyên tâm, hệ thức (1) tương đương $(A, B; C, D) = (A', B'; C', \infty) = (A', B'; C')$.
- Nhờ những cách chọn tâm chiếu khác nhau, bắt đầu từ hàng điểm A, B, C, D, ta có thể nhận vô số hàng điểm có cùng tỉ số kép với A, B, C, D.



Tỉ số kép của bốn điểm trên đường tròn

Định lí 3.3

Với mọi chùm $O(A, B; C, D)$, ta có

$$O(A, B; C, D) = \frac{\sin(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})} : \frac{\sin(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})}$$

Chú ý rằng trong cách phát biểu của Định lí 3.3, các điểm A, B, C, D không nhất thiết cùng nằm trên một đường thẳng.

Chứng minh. Theo định lí sine, ta có $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{OA \cdot \sin(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})}{OB \cdot \sin(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})}$ và $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \dfrac{OA \cdot \sin(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})}{OB \cdot \sin(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})}$.

Do đó $O(A, B; C, D) = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \dfrac{\sin(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})} : \dfrac{\sin(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})}$. □

Định lí 3.4

Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D cố định trên đường tròn (O) và điểm M chuyển động trên (O). Khi đó $M(A, B; C, D)$ không đổi. Trong trường hợp M trùng với một trong bốn điểm trên, chẳng hạn A, thì MA được coi là tiếp tuyến của (O) tại A.

Chứng minh. Đây là hệ quả trực tiếp của Định lí 3.3. □

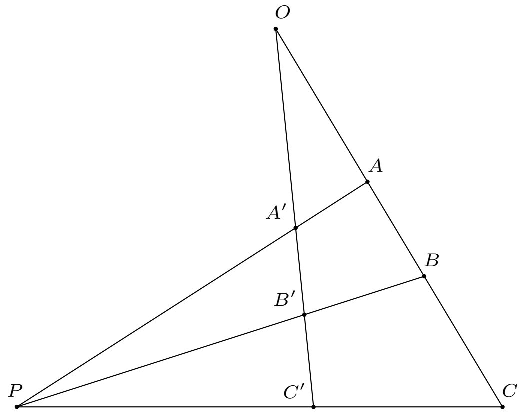
Định nghĩa 3.8

Tỉ số kép $M(A, B; C, D)$ được gọi là tỉ số kép của bốn điểm phân biệt A, B, C, D trên đường tròn (O), kí hiệu: $(A, B; C, D)$.

Tính chất

Tính chất 3.2

Hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại O. Trên d lấy các điểm A, B, C; trên d' lấy các điểm A', B', C'. Khi đó $(O, A; B, C) = (O, A'; B', C')$ khi và chỉ khi AA', BB', CC' đôi một song song hoặc đồng quy.

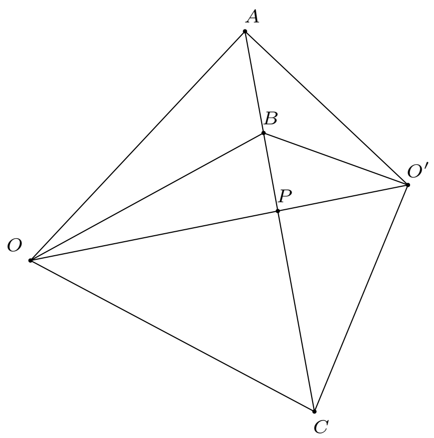


Chứng minh. Trong trường hợp AA', BB', CC' đôi một song song thì ta dễ dàng chứng minh theo định lí Thalès. Ta xét trường hợp AA', BB', CC' đồng quy.

Gọi P là giao của AA' và BB'; C'' là giao của PC' và đường thẳng d. Xét phép chiếu xuyên tâm P đi từ d' vào d: $O \mapsto O$, $A' \mapsto A$, $B' \mapsto B$, $C' \mapsto C''$. Phép chiếu này bảo toàn tỉ số kép, hay ta có $(O, A'; B', C') = (O, A; B, C'')$. Do đó $(O, A; B, C) = (O, A'; B', C')$ khi và chỉ khi $(O, A; B, C) = (O, A; B, C'')$, tương đương $C \equiv C''$ hay AA', BB', CC' đồng quy. □

Tính chất 3.3

Cho hai chùm $O(A, B; C, O')$ và $O'(A, B; C, O)$. Khi đó A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $O(A, B; C, O') = O'(A, B; C, O)$.



Chứng minh. Gọi P là giao điểm của BC và OO'; A_1 là giao của OA và BC, A_2 là giao của $O'A$ và BC. Ta có $O(A, B; C, O') = O(A_1, B; C, P)$ và $O'(A, B; C, O) = O'(A_2, B; C, P)$. Như vậy $O(A, B; C, O') = O'(A, B; C, O)$ khi và chỉ khi $O(A_1, B; C, P) = O'(A_2, B; C, P)$, tương đương $A_1 \equiv A_2 \equiv A$ hay A, B, C thẳng hàng. □

Tính chất 3.4

Nếu hai chùm $(a, b; c, d)$, $(a', b'; c', d')$ có $a \perp a'$, $b \perp b'$, $c \perp c'$, $d \perp d'$ thì $(a, b; c, d) = (a', b'; c', d')$.

Chứng minh. Từ giả thiết, ta có $\sin(\vec{c}; \vec{a}) \equiv \sin(\vec{c'}; \vec{a'}) \pmod{2\pi}$. Theo Định lí 3.3 ta có

$$(a, b; c, d) = \frac{\sin(\vec{c}; \vec{a})}{\sin(\vec{c}; \vec{b})} : \frac{\sin(\vec{d}; \vec{a})}{\sin(\vec{d}; \vec{b})} \quad \text{và} \quad (a', b'; c', d') = \frac{\sin(\vec{c'}; \vec{a'})}{\sin(\vec{c'}; \vec{b'})} : \frac{\sin(\vec{d'}; \vec{a'})}{\sin(\vec{d'}; \vec{b'})}.$$

Kết hợp những điều trên ta thu được điều phải chứng minh. □

Tính chất 3.5

Các phép biến hình thông thường (dời hình, đồng dạng, nghịch đảo) đều bảo toàn tỉ số kép.

§3.2 Hàng điểm điều hòa, chùm điều hòa

Hàng điểm điều hòa

Định nghĩa 3.9

Một hàng điểm A, B, C, D được gọi là một hàng điểm điều hòa nếu tỉ số kép

$$(A, B; C, D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

có giả trị bằng -1. Khi đó, ta nói cặp điểm A, B chia điều hòa cặp điểm C, D; hoặc cặp điểm A, B và cặp điểm C, D là hai cặp điểm liên hợp điều hòa.

Kết hợp tính chất của tỉ số kép, nếu $(A, B; C, D) = -1$ thì ta cũng có $(A, B; D, C) = (B, A; C, D) = (B, A; D, C) = (C, D; A, B) = (C, D; B, A) = (D, C; A, B) = (D, C; B, A) = -1$.

Định lí 3.5

Cho hàng điểm A, B, C, D với I là trung điểm của AB. Các khẳng định sau là tương đương:

i) $(A, B; C, D) = -1$;

ii) $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$;

iii) $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$ (*hệ thức Descartes*);

iv) $IA^2 = IB^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}$ (*hệ thức Newton*);

v) $\overline{CI} \cdot \overline{CD} = \overline{CA} \cdot \overline{CB}$ (*hệ thức Maclaurin*).

Chứng minh. Biểu thức mệnh đề *i* tương đương *ii* là điều hiển nhiên. Ta chứng minh các biểu thức mệnh đề *i* tương đương *iii*, *iv*, *v*; tương ứng với việc chứng minh hệ thức Descartes, Newton và Maclaurin.

Trước hết, coi giá của hàng điểm A, B, C, D như một trục số và đặt tọa độ của A, B, C, D lần lượt là a, b, c, d. Khi đó $-1 = (A, B; C, D) = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}$ và tọa độ của I là $\frac{a+b}{2}$.

- *Chứng minh hệ thức Descartes.* Nghĩa là ta cần chứng minh $\frac{2}{b-a} = \frac{1}{c-a} + \frac{1}{d-a}$.
  Đẳng thức tương đương
  $$\frac{1}{b-a} - \frac{1}{c-a} = \frac{1}{d-a} - \frac{1}{b-a} \Leftrightarrow \frac{c-b}{(b-a)(c-a)} = \frac{b-d}{(d-a)(b-a)} \Leftrightarrow \frac{c-a}{c-b} = -\frac{d-a}{d-b}.$$
  Đây chính là khẳng định *ii*.

- *Chứng minh hệ thức Newton.* Nghĩa là ta cần chứng minh $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(c - \frac{a+b}{2}\right)\left(d - \frac{a+b}{2}\right)$.
  Đẳng thức tương đương
  $$\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = cd - \frac{(a+b)(c+d)}{2} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ab + cd = \frac{(a+b)(c+d)}{2}$$
  $$\Leftrightarrow 2ab + 2cd = ac + ad + bc + bd \Leftrightarrow (c-a)(d-b) = -(d-a)(c-b).$$
  Đây chính là khẳng định *ii*.

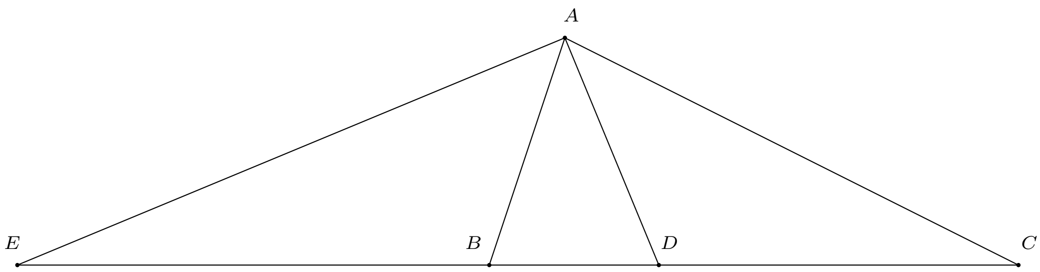
- *Chứng minh hệ thức Maclaurin.* Nghĩa là ta cần chứng minh
  $$\left(\frac{a+b}{2} - c\right)(d-c) = (a-c)(b-c) \Leftrightarrow \frac{(a+b)(c+d)}{2} = ab + cd$$
  nhưng đây lại là đẳng thức tương đương của khẳng định *iv*.

Chứng minh hoàn tất. □

`Các hàng điểm điều hòa đặc biệt`

Tính chất 3.6

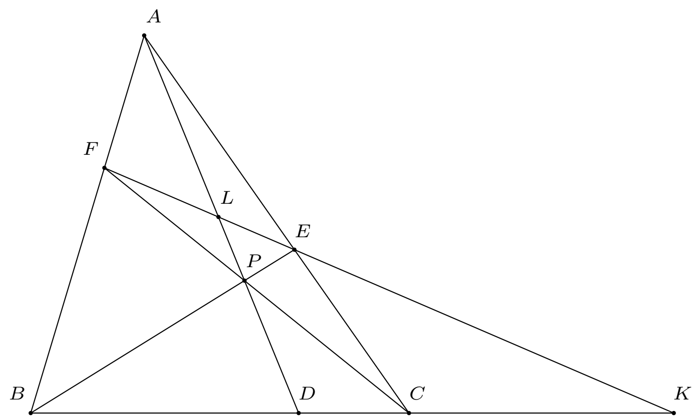
(*Hàng phân giác*) Cho tam giác ABC có AD và AE lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của góc BAC (với $\{D; E\} \in BC$). Khi đó $(B, C; D, E) = -1$.



Chứng minh. Đây là hệ quả trực tiếp của định lí đường phân giác. □

Tính chất 3.7

(*Hàng tứ giác toàn phần*) Cho tam giác ABC và một điểm P bất kì không nằm trên cạnh của tam giác ABC. AP, BP, CP cắt cạnh tam giác đối diện tại D, E, F. Giả sử EF cắt BC tại K. Khi đó $(B, C; D, K) = -1$.



Chứng minh. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABC và cát tuyến KEF: $\dfrac{\overline{BK}}{\overline{KC}} \cdot \dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1$.

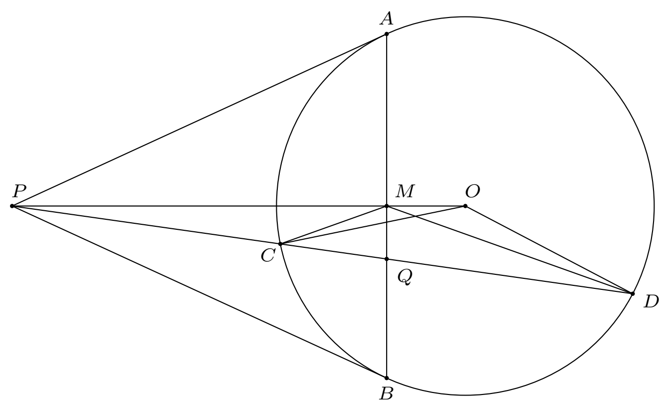
Áp dụng định lí Ceva cho tam giác ABC và bộ ba cevian AD, BE, CF: $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$.

Lấy phép chia vế trái của hai hệ thức trên ta thu được $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} : \dfrac{\overline{KB}}{\overline{KC}} = (B, C; D, K) = -1$. □

Nhận xét. Nếu ta gọi L là giao điểm của AD và EF thì ta có $-1 = (B, C; D, K) = A(B, C; D, K) = (F, E; L, K)$ và $-1 = (B, C; D, K) = F(B, C; D, K) = (A, P; D, L)$.

Tính chất 3.8

(*Hàng tiếp tuyến, cát tuyến*) Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm ngoài đường tròn (O). Từ P kẻ hai tiếp tuyến PA, PB (với $\{A; B\} \in (O)$), và một cát tuyến PCD (với C nằm giữa P và D) tới (O). AB cắt CD tại Q. Khi đó $(P, Q; C, D) = -1$.



Chứng minh. Gọi M là giao điểm của OP và AB. Ta có $\overline{PM} \cdot \overline{PO} = PA^2 = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$, hay tứ giác $OMCD$ nội tiếp. Khi đó $\angle PMC = \angle ODC = \angle OCD = \angle OMD$, mà $AB \perp OP$ nên ta có MQ là phân giác trong của góc CMD, đồng thời MP là phân giác ngoài của góc CMD. Theo tính chất về hàng phân giác, ta thu được $(P, Q; C, D) = -1$. □

Chùm điều hòa

Định nghĩa 3.10

Cho chùm a, b, c, d. Khi đó a, b, c, d được gọi là chùm điều hòa nếu $(a, b; c, d) = -1$.

Định lí 3.6

Chùm a, b, c, d là chùm điều hòa khi và chỉ khi mọi đường thẳng song song với một đường thẳng bất kì của chùm định ra trên ba đường còn lại hai đoạn thẳng bằng nhau.

Định lí 3.7

Cho chùm điều hòa a, b, c, d. Khi đó $c \perp d$ khi và chỉ khi c là hai phân giác của góc tạo bởi a và b và d là hai phân giác của góc tạo bởi a và b.

Chứng minh. Gọi O là tâm của chùm. Kẻ một đường thẳng song song với d không trùng d, cắt a, b, c lần lượt tại A, B, C. Theo Định lí 3.6, ta có $CA = CB$. Như vậy $c \perp d$ khi và chỉ khi $OC \perp AB$, tương đương tam giác OAB cân tại O hay OC là phân giác của góc AOB. □

§3.3 Tứ giác điều hòa

Định nghĩa 3.11

Một tứ giác nội tiếp $ABCD$ được gọi là điều hòa nếu $(A, C; B, D) = -1$.

Định lí 3.8

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Các mệnh đề sau là tương đương:

i) $(A, C; B, D) = -1$;

ii) $AB \cdot CD = AD \cdot BC = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD$;

iii) AC là đường đối trung của các tam giác BAD và BCD;

iv) BD là đường đối trung của các tam giác ABC và ADC;

v) Tiếp tuyến tại A và C của (O) cắt nhau trên BD;

vi) Tiếp tuyến tại B và D của (O) cắt nhau trên AC.

§4 Đẳng giác - Cặp điểm liên hợp đẳng giác - Đường đối trung

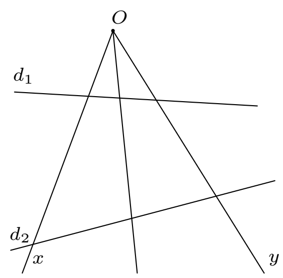
§4.1 Hai đường đẳng giác

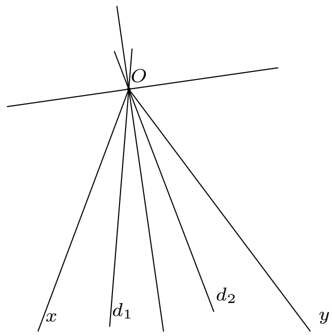
Định nghĩa 4.1

Cho góc xOy. Hai đường thẳng d_1 và d_2 được gọi là hai đường đối song ứng với góc xOy khi và chỉ khi tồn tại đường thẳng d_3 sao cho $d_3 \parallel d_2$ và d_3 đối xứng với d_1 qua phân giác (trong hoặc ngoài) của góc xOy (hoặc ngược lại).

Định nghĩa 4.2

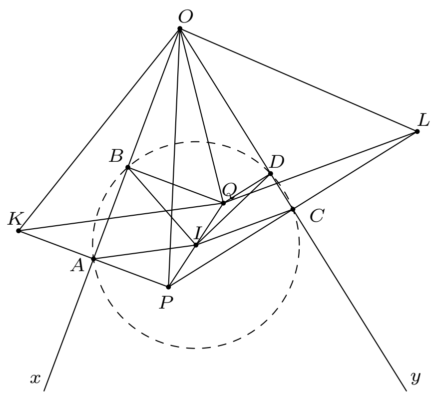
Cho góc xOy. Hai đường thẳng d_1 và d_2 được gọi là hai đường đẳng giác trong góc xOy nếu d_1 và d_2 cùng đi qua O, đồng thời đối xứng nhau qua phân giác (trong hoặc ngoài) của góc xOy.





Định lí 4.1

Cho góc xOy và hai điểm P, Q bất kì nằm trong mặt phẳng. Gọi A và B lần lượt là hình chiếu vuông góc của P và Q lên Ox, C và D lần lượt là hình chiếu vuông góc của P và Q lên Oy. Khi đó, OP và OQ là hai đường đẳng giác trong góc xOy khi và chỉ khi A, B, C, D đồng viên.



Chứng minh. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng PQ; K và L lần lượt là điểm đối xứng của P qua tia Ox và Oy. Dễ dàng chỉ ra được $OP = OK = OL$.

Thuận. Giả sử OP và OQ là hai đường đẳng giác trong góc xOy. Suy ra $\angle KOQ = \angle KOx + \angle xOQ = \angle POx + \angle yOP = \angle QOy + \angle yOL = \angle QOL$. Khi đó hai tam giác OKQ và OLQ đồng dạng, suy ra $QK = QL$. Theo tính chất của đường trung bình trong các tam giác PKQ và PLQ, $IA = \frac{1}{2}QK$ và $IC = \frac{1}{2}QL$. Suy ra $IA = IC$.
Mặt khác, do I là trung điểm PQ và $PA \perp Ox$, $QB \perp Ox$ nên I thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB, kéo theo $IA = IB$. Tương tự, $IC = ID$, do đó $IA = IB = IC = ID$, hay bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn tâm I.

Đảo. Giả sử bốn điểm A, B, C, D đồng viên. Như lập luận trên, ta có $IA = IB$ và $IC = ID$, suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Do đó $IA = IC$, suy ra $QK = QL$. Khi đó hai tam giác OKQ và OLQ đồng dạng, suy ra $\angle KOQ = \angle LOQ$. Từ đó

$$2\angle POx = \angle POK = \angle QOK - \angle POQ = \angle QOL - \angle POQ = \angle POy + \angle QOy - \angle POQ = 2\angle QOy$$

hay OP và OQ là hai đường đẳng giác trong góc xOy.

□

Định lí 4.2

(*Định lí Steiner*) Cho tam giác ABC và hai điểm P, Q nằm trên đường thẳng BC. Đẳng thức

$$\frac{BP}{CP} \cdot \frac{BQ}{CQ} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

đúng khi và chỉ khi AP, AQ là hai đường đẳng giác trong góc BAC.

Chứng minh. Áp dụng công thức tính diện tích, ta có

$$S[ABP] \cdot S[ABQ] = \frac{1}{2}BA \cdot BP \cdot \sin\angle ABC \cdot \frac{1}{2}BA \cdot BQ \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{4}AB^2 (\sin\angle ABC)^2 \cdot BP \cdot BQ;$$

$$S[ACP] \cdot S[ACQ] = \frac{1}{2}CA \cdot CP \cdot \sin\angle ACB \cdot \frac{1}{2}CA \cdot CQ \cdot \sin\angle ACB = \frac{1}{4}AC^2 (\sin\angle ACB)^2 \cdot CP \cdot CQ.$$

Xét tỉ số

$$\frac{S[ABP] \cdot S[ABQ]}{S[ACP] \cdot S[ACQ]} = \frac{AB^2 (\sin\angle ABC)^2 \cdot BP \cdot BQ}{AC^2 (\sin\angle ACB)^2 \cdot CP \cdot CQ}$$

Tương đương

$$\frac{\frac{1}{2}AB \cdot AP \cdot \sin\angle BAP \cdot \frac{1}{2}AB \cdot AQ \cdot \sin\angle BAQ}{\frac{1}{2}AC \cdot AP \cdot \sin\angle CAP \cdot \frac{1}{2}AC \cdot AQ \cdot \sin\angle CAQ} = \frac{AB^2 (\sin\angle ABC)^2 \cdot BP \cdot BQ}{AC^2 (\sin\angle ACB)^2 \cdot CP \cdot CQ}.$$

Hai đường AP, AQ đẳng giác trong góc BAC tương đương $\sin\angle BAP = \sin\angle CAQ$ và $\sin\angle BAQ = \sin\angle CAP$. Phương trình trên tương đương $\dfrac{BP \cdot BQ}{CP \cdot CQ} = \dfrac{(\sin\angle ACB)^2}{(\sin\angle ABC)^2} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$, theo định lí sine. □

Tính chất 4.1

Cho tam giác ABC và hai điểm P, Q nằm trên đường thẳng BC. Khi đó, đường tròn (APQ) tiếp xúc với đường tròn (ABC) khi và chỉ khi AP, AQ là hai đường đẳng giác trong góc BAC.

Chứng minh. Tại A, kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Kéo dài AP và AQ, cắt (ABC) tương ứng tại M và N.

Thuận. Giả sử AP, AQ là hai đường đẳng giác trong góc BAC. Khi đó $\angle BAM = \angle CAN$. Suy ra

$$\angle xAP = \angle xAM = \angle ACM = \angle ACB + \angle BCM = \angle ACB + \angle CAN = \angle AQP$$

hay Ax là tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ. Từ đó, đường tròn (APQ) tiếp xúc với đường tròn ABC.

Đảo. Giả sử đường tròn (APQ) tiếp xúc với đường tròn (ABC). Khi đó $\angle xAM = \angle ACM = \angle AQP$, suy ra $\angle ACB + \angle BAM = \angle ACB + \angle BCM = \angle ACB + \angle CAN$, hay $\angle BAM = \angle CAN$. Từ đó AP, AQ là hai đường đẳng giác trong góc BAC.

□

§4.2 Cặp điểm liên hợp đẳng giác - Đường tròn pedal

Để định nghĩa cặp điểm liên hợp đẳng giác, ta không thể không nhắc đến định lí sau:

Định lí 4.3

Cho tam giác ABC và một điểm P bất kì trong mặt phẳng. Khi đó các đường lần lượt đẳng giác với AP, BP, CP trong các góc A, B, C tương ứng của tam giác ABC đồng quy tại một điểm Q.

Chứng minh. Gọi Q là giao điểm của đường đẳng giác với AP trong $\angle BAC$ và đường đẳng giác với BP trong $\angle ABC$; I là trung điểm của đoạn thẳng PQ; X, Y, Z là hình chiếu của P trên BC, CA, AB; X', Y', Z' là hình chiếu của Q trên BC, CA, AB.
Theo Định lí 4.1, các bộ điểm Y, Y', Z, Z' và X, X', Z, Z' cùng thuộc đường tròn tâm I, tức là X, Y, Z, X', Y', Z' cùng thuộc đường tròn (I). Cũng theo Định lí 4.1, ta thu được CP và CQ là hai đường đẳng giác trong $\angle ACB$. □

Từ Định lí 4.3 ta có một số định nghĩa sau:

Định nghĩa 4.3

Cặp điểm P và Q như trên được gọi là cặp điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC.

Định nghĩa 4.4

Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên BC, CA, AB; X', Y', Z' lần lượt là hình chiếu vuông góc của Q trên BC, CA, AB. Khi đó

- Các tam giác XYZ và $X'Y'Z'$ tương ứng được gọi là tam giác pedal của cặp điểm liên hợp đẳng giác P và Q ứng với tam giác ABC;
- Đường tròn (I) đi qua 6 hình chiếu trên được gọi là đường tròn pedal của cặp điểm liên hợp đẳng giác P và Q ứng với tam giác ABC.

Ta có một số cặp điểm liên hợp đẳng giác quen thuộc trong tam giác:

- Trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp. Đường tròn pedal của cặp điểm này là đường tròn Euler (đường tròn 9 điểm - nine-point circle).
- Tâm đường tròn nội tiếp, các tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác liên hợp đẳng giác với chính nó. Đường tròn pedal của các điểm này chính là đường tròn nội tiếp và các đường tròn bàng tiếp.
- Đường đẳng giác với đường trung tuyến được gọi là đường đối trung. Điểm liên hợp đẳng giác của trọng tâm được gọi là điểm symmedian.

Hệ quả 4.1

(*Điểm Bevan*) Cho tam giác ABC. Gọi I_a, I_b, I_c là tâm các đường tròn bàng tiếp ứng với các góc A, B, C của tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I_a) với BC, đường tròn (I_b) với CA, đường tròn (I_c) với AB. Khi đó I_aD, I_bE, I_cF đồng quy tại điểm Bevan B_e của tam giác ABC.

§4.3 Đường đối trung - Điểm symmedian

Đường đối trung

Định nghĩa 4.5

Đường đẳng giác với đường trung tuyến được gọi là đường đối trung.

Bây giờ, ta hãy xét tam giác ABC. Từ giờ, đường trung tuyến, đường đối trung ứng với đỉnh A trong tam giác ABC được viết tắt là đường A-trung tuyến và đường A-đối trung; tương tự với các đỉnh B và C trong tam giác.

Tính chất 4.2

Quỹ tích các điểm có khoảng cách tới hai cạnh AB, AC tỉ lệ thuận với độ dài của hai cạnh AB, AC là đường A-đối trung.

Chứng minh. Gọi P là một điểm bất kì trong tam giác ABC. Gọi Q là điểm đối xứng với điểm P qua phân giác trong góc BAC. Do tính đối xứng, ta có $d(P, AB) = d(Q, AC)$ và $d(P, AC) = d(Q, AB)$. Các mệnh đề sau là tương đương:

i) AP là đường A-đối trung;

ii) AQ là đường A-trung tuyến;

iii) $S[AQB] = S[AQC]$;

iv) $\frac{1}{2}AB \cdot d(Q, AB) = \frac{1}{2}AC \cdot d(Q, AC)$;

v) $AB \cdot d(P, AC) = AC \cdot d(P, AB)$;

vi) $\dfrac{d(P, AB)}{d(P, AC)} = \dfrac{AB}{AC}$.

□

Tính chất 4.3

Đường A-đối trung cắt BC tại điểm chia đoạn thẳng BC theo tỉ lệ bình phương độ dài hai cạnh AB và AC.

Chứng minh. Đây là hệ quả trực tiếp của định lí Steiner. □

Tính chất 4.4

Đường A-đối trung đi qua đỉnh đối của một tứ giác điều hòa có ba đỉnh là A, B, C. Hơn nữa, đường A-đối trung đi qua giao của hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chứng minh. Gọi P là giao điểm của đường A-đối trung và đường tròn (ABC); E, F là hình chiếu của P trên các đường thẳng AB, AC.
Dễ thấy $\triangle PEB \sim \triangle PFC$. Khi đó $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{PE}{PF} = \dfrac{AB}{AC}$, hay tứ giác $ABPC$ là tứ giác điều hòa.
Gọi S là giao của hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC, D là điểm đối xứng của A qua M.
Ta có $\angle SBC = \angle BAC = \angle BDC = 180^\circ - \angle DBA$. Do đó BS và BD là hai đường đẳng giác trong góc ABC. Tương tự, CS và CD là hai đường đẳng giác trong góc ACB. Suy ra S và D là cặp điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC. Từ đó AS và AM là hai đường đẳng giác trong góc BAC, hay AS là đường A-đối trung. □

Điểm symmedian

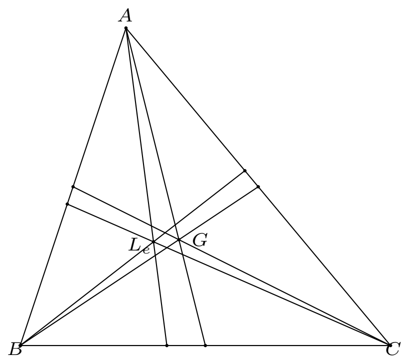
Định lí 4.4

Giao điểm ba đường đối trung ứng với ba góc trong một tam giác đồng quy tại một điểm L_e.

Chứng minh. Đây là hệ quả trực tiếp của định lí Ceva lượng giác. □

Định nghĩa 4.6

Điểm L_e được định nghĩa như trên được gọi là điểm symmedian (hoặc điểm Lemoine). Điểm này liên hợp đẳng giác với trọng tâm của tam giác.



Tính chất 4.5

Điểm symmedian của tam giác ABC là trọng tâm của tam giác pedal nó tạo thành ứng với tam giác ABC.

Chứng minh. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của L_e trên BC, CA, AB.
Áp dụng định lí sine

$$\frac{LZ}{LY} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle ABC} = \frac{XY}{XZ} = \frac{\sin \angle XLY}{\sin \angle XLZ}.$$

Suy ra $S[LXZ] = \frac{1}{2}LX \cdot LZ \cdot \sin \angle XLZ = \frac{1}{2}LX \cdot LY \cdot \sin \angle XLY = S[LXY]$. Tương tự, ta thu được $S[LXY] = S[LYZ] = S[LZX]$. Vì vậy, L là trọng tâm của tam giác XYZ. □

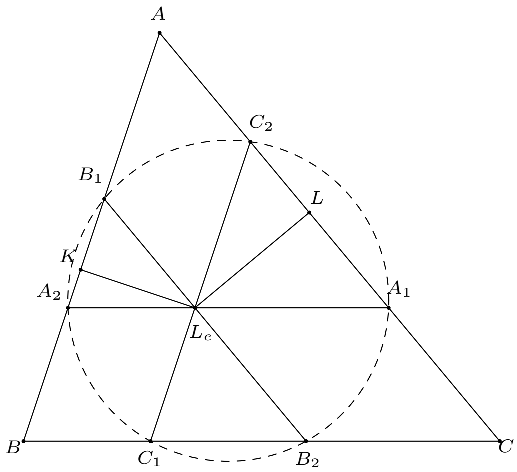
Tính chất 4.6

(*Đường tròn Lemoine thứ nhất*) Đường thẳng song song BC đi qua điểm symmedian L_e cắt CA tại A_1 và cắt AB tại A_2. Các điểm B_1, B_2, C_1, C_2 được định nghĩa tương tự theo hoán vị vòng quanh. Khi đó, sáu điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 đồng viên.

Chứng minh. Gọi K, L là hình chiếu vuông góc của L_e lên AB, AC.

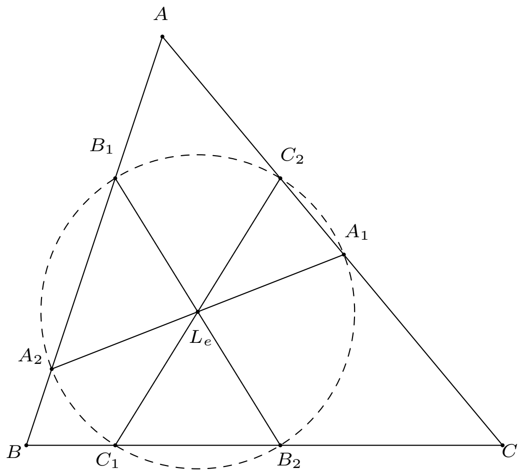
Ta có tứ giác $AB_1L_eC_2$ là hình bình hành, biến đổi góc ta được $\triangle KL_eB_1 \sim \triangle LL_eC_2$. Khi đó kết hợp với Tính chất 4.2 ta được $\dfrac{AC_2}{AB_1} = \dfrac{L_eB_1}{L_eC_2} = \dfrac{L_eK}{L_eL} = \dfrac{AA_2}{AA_1}$. Suy ra A_1, A_2, B_1, C_2 đồng viên.

Tương tự, B_1, B_2, C_1, A_2 đồng viên. Khi đó $\angle AB_1C_2 = \angle AA_1A_2 = \angle ACB = \angle BB_2B_1 = \angle BA_2C_1$, hay tứ giác $C_1A_2B_1C_2$ là hình thang cân. Vì vậy, sáu điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 đồng viên. □



Tính chất 4.7

(*Đường tròn Lemoine thứ hai*) Đường thẳng đối song BC đi qua điểm symmedian L_e cắt CA tại A_1 và cắt AB tại A_2. Các điểm B_1, B_2, C_1, C_2 được định nghĩa tương tự theo hoán vị vòng quanh. Khi đó, sáu điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 đồng viên. Đặc biệt, sáu điểm thuộc đường tròn có tâm là điểm symmedian.



Chứng minh. Theo tính chất của đường đối song, AL là đường A-trung tuyến trong tam giác AA_1A_2, hay $L_eA_1 = L_eA_2$. Tương tự, $L_eB_1 = L_eB_2$ và $L_eC_1 = L_eC_2$.

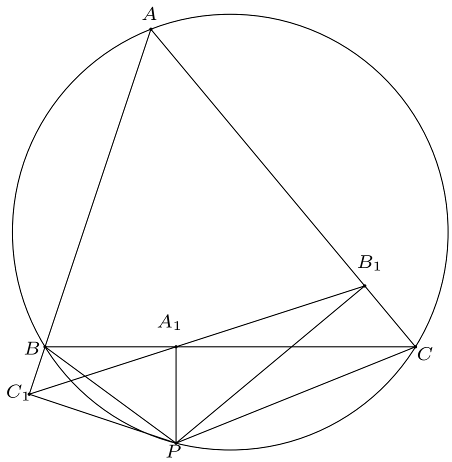
Mặt khác, ta có $\angle L_eC_1B_2 = \angle BAC = \angle L_eB_2C_1$ nên $L_eB_2 = L_eC_1$. Từ đó sáu điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 cách đều điểm L_e. □

§5 Đường thẳng Simson - Đường thẳng Steiner

Về mặt bản chất, phần này bắt nguồn từ định lí nổi tiếng sau đây:

Định lí 5.1

Cho tam giác ABC và một điểm P bất kì trên mặt phẳng. Khi đó, hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh của tam giác ABC thẳng hàng khi và chỉ khi P thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử P nằm trong góc BAC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của P lên BC, CA, AB.

Do $\angle PA_1B = \angle PC_1B = 90^\circ$ nên P, A_1, B, C_1 đồng viên. Tương tự, P, A_1, C, B_1 đồng viên. Khi đó $\angle BA_1C_1 = \angle BPC_1$ và $\angle CA_1B_1 = \angle CPB_1$.

Ta có A_1, B_1, C_1 thẳng hàng khi và chỉ khi $\angle BA_1C_1 = \angle CA_1B_1$, hay $\angle BPC_1 = \angle CPB_1$, tương đương $\angle BPC = \angle B_1PC_1 = 180^\circ - \angle BAC$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi P thuộc đường tròn (ABC). $\square$

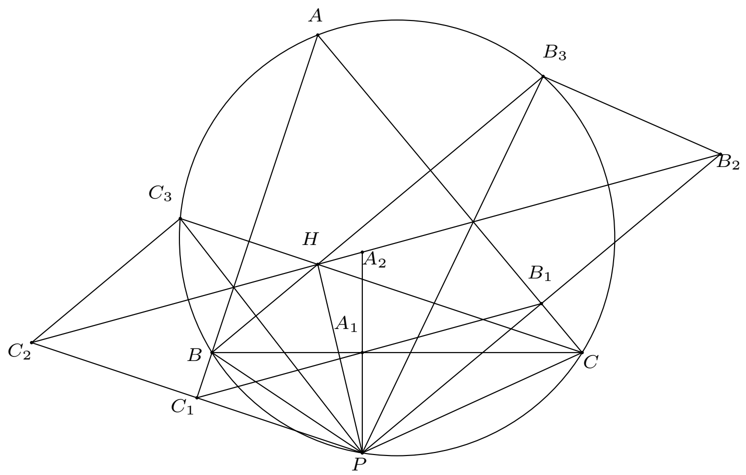
! Nhận xét — Tam giác P-pedal của tam giác ABC suy biến thành một đường thẳng.

Định nghĩa 5.1

Đường thẳng đi qua ba hình chiếu vuông góc của P lên các cạnh tam giác ABC được gọi là đường thẳng Simson của điểm P ứng với tam giác ABC.

Định lí 5.2

Cho tam giác ABC và một điểm P bất kì nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó, các điểm đối xứng với P qua ba cạnh của tam giác ABC cùng nằm trên một đường thẳng, đồng thời đường thẳng ấy đi qua trực tâm của tam giác ABC.



Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử P nằm trên cung nhỏ BC của đường tròn (ABC). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC); A_2, B_2, C_2 lần lượt là điểm đối xứng với P qua BC, CA, AB; B_3, C_3 lần lượt là giao điểm khác B, C của BH, CH với đường tròn (ABC).
Không khó để chỉ ra rằng H và B_3 đối xứng nhau qua CA. Lại có P và B_2 đối xứng nhau qua CA nên tứ giác PB_2B_3H là hình thang cân. Tương tự, tứ giác PC_2C_3H cũng là hình thang cân.
Khi đó, $\angle B_2HC_2 = \angle B_2HB_3 + \angle C_2HC_3 + \angle B_3HC_3 = \angle PB_2H + \angle PC_2H + \angle BHC = \angle PB_2H + \angle PC_2H + \angle B_2PC_2 = 180°$, suy ra B_2, H, C_2 thẳng hàng.
Tương tự, C_2, H, A_2 thẳng hàng. Vì vậy, bốn điểm A_2, B_2, C_2, H thẳng hàng. □

! Nhận xét — Dựa theo định lí về đường thẳng Simson, phần đảo cho định lí trên vẫn đúng: "Cho tam giác ABC và điểm P bất kì nằm trên mặt phẳng. Khi đó, nếu các điểm đối xứng với P qua ba cạnh của tam giác ABC cùng nằm trên một đường thẳng thì điểm P thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC."

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử P nằm trong góc BAC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của P lên BC, CA, AB.
Xét phép vị tự tâm P, tỉ số $\dfrac{1}{2}$

$$\mathcal{H}_P^{\frac{1}{2}} : A_2 \mapsto A_1, B_2 \mapsto B_1, C_2 \mapsto C_1, A_2B_2 \mapsto A_1B_1.$$

Mà A_2, B_2, C_2 thẳng hàng nên A_1, B_1, C_1 thẳng hàng. Theo định lí về đường thẳng Simson, điều này xảy ra khi và chỉ khi P thuộc đường tròn (ABC). □

! Nhận xét — Phép vị tự trên còn cho ta một tính chất quan trọng: đường thẳng Simson của điểm P ứng với tam giác ABC đi qua trung điểm của đoạn thẳng PH.

Tính chất 5.1

Cho tam giác ABC và một điểm P bất kì nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Khi đó, đường thẳng Simson của điểm P đi qua trung điểm của đoạn thẳng PH.

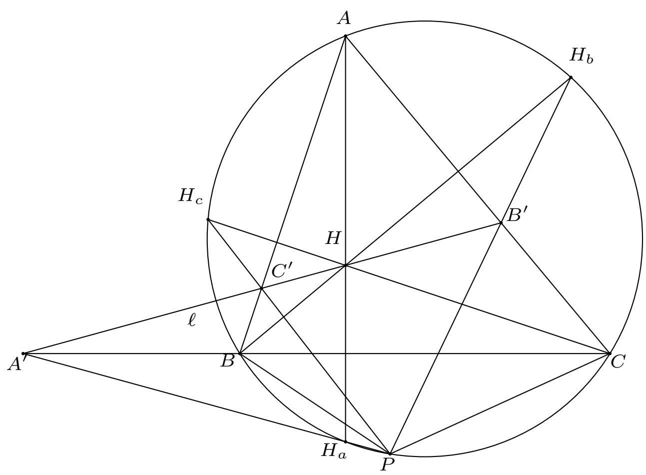
Định nghĩa 5.2

Đường thẳng đi qua trực tâm và ba điểm đối xứng của P qua các cạnh tam giác ABC được gọi là đường thẳng Steiner của điểm P ứng với tam giác ABC.

Liên quan đến định lí Steiner, chúng ta có một định lí quan trọng khác:

Định lí 5.3

(*Định lí Collings*) Cho tam giác ABC và trực tâm H của tam giác. Kẻ đường thẳng ℓ bất kì đi qua điểm H. Khi đó, các đường thẳng đối xứng với H qua BC, CA, AB đồng quy tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Chứng minh. Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm của ℓ với BC, CA, AB; H_a, H_b, H_c lần lượt là giao điểm của AH, BH, CH với đường tròn (ABC); P là giao điểm của H_bB' và H_cC'.

Chú ý rằng H đối xứng với H_b, H_c qua CA, AB. Khi đó, các đường thẳng H_bB' và H_cC' tương ứng đối xứng với ℓ qua CA, AB.

Như vậy, ta chỉ cần chỉ ra rằng P thuộc đường tròn (ABC), mà H_b và H_c thuộc đường tròn (ABC) nên ta chỉ ra bốn điểm C, H_b, H_c, P đồng viên. Thật vậy, ta có $(H_bC, H_bP) \equiv (HB', HC) \pmod{\pi}$ và $(H_cC, H_cP) \equiv (HH_c, HC') \equiv (HB', HC) \pmod{\pi}$. Suy ra $(H_bC, H_bP) \equiv (H_cC, H_cP) \pmod{\pi}$, hay bốn điểm C, H_b, H_c, P đồng viên.

Chứng minh tương tự cho giao điểm của H_cC' và H_aA', H_aA' và H_bB', ta được điều phải chứng minh. □

Định nghĩa 5.3

Điểm đồng quy P của ba đường thẳng đối xứng với đường thẳng ℓ bất kì đi qua trực H qua ba cạnh của tam giác được gọi là điểm Anti-Steiner của đường thẳng ℓ ứng với tam giác ABC.

Hệ quả 5.1

Đối xứng của đường thẳng Euler qua ba cạnh của tam giác ứng với nó đồng quy. Điểm đồng quy được gọi là điểm Euler reflection.

Ngoài ra, ta còn có thể phát biểu lại bài toán đảo của định lí về đường thẳng Steiner như một hệ quả của định lí Collings.

Hệ quả 5.2

Cho tam giác ABC có trực tâm H và điểm P bất kì nằm trên mặt phẳng. Gọi các điểm đối xứng với P qua BC, CA, AB lần lượt là A', B', C'. Khi đó, nếu ba trong bốn điểm H, A', B', C' thẳng hàng thì P thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

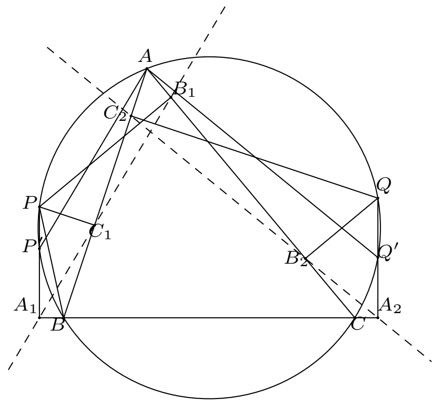
Tính chất 5.2

Đường thẳng qua P vuông góc với BC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là A'. Khi đó AA' song song với đường thẳng Simson của P ứng với tam giác ABC.

Chứng minh. Do tứ giác PA_1B_1C nội tiếp nên $\angle A'A_1B_1 = \angle ACP = \angle AA'P$, suy ra $AA' \parallel A_1B_1$. □

Tính chất 5.3

Gọi P và Q là hai điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó, góc tạo bởi hai đường thẳng Simson của P và Q ứng với tam giác ABC bằng một nửa số đo cung nhỏ PQ của đường tròn (ABC).



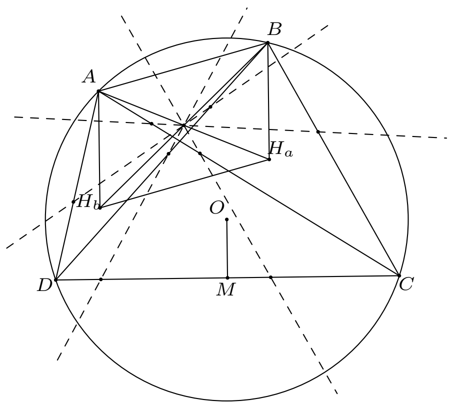
Chứng minh. Các đường thẳng qua P và Q vuông góc BC cắt (ABC) tại P' và Q'. Gọi ℓ_1, ℓ_2 lần lượt là đường thẳng Simson của P,Q ứng với tam giác ABC.

Theo Tính chất 5.2, $AP' \parallel \ell_1$ và $AQ' \parallel \ell_2$. Do đó $\angle(\ell_1, \ell_2) = \angle P'AQ'$.

Do $PP' \parallel QQ'$ mà bốn điểm P, P', Q, Q' đồng viên nên tứ giác $PQQ'P'$ là hình thang cân và số đo cung nhỏ $P'Q'$ bằng số đo cung nhỏ PQ của đường tròn (ABC). Do đó $\angle P'AQ' = \dfrac{1}{2}\angle POQ$, trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. □

Tính chất 5.4

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Khi đó các đường thẳng Simson của A, B, C, D ứng với tam giác BCD, CDA, DAB, ABC đồng quy.



Chứng minh. Gọi H_a, H_b, H_c, H_d là trực tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC; M là trung điểm của đoạn thẳng BC.

Do $\overrightarrow{AH_b} = \overrightarrow{BH_a} = 2\overrightarrow{OM}$ (tính chất quen thuộc) nên tứ giác ABH_aH_b là hình bình hành. Do đó, trung điểm của hai đoạn thẳng AH_a và BH_b trùng nhau.

Tương tự, ta thu được trung điểm của bốn đoạn thẳng AH_a, BH_b, CH_c, DH_d trùng nhau. Theo Tính chất 5.1, đường thẳng Simson của A, B, C, D ứng với tam giác BCD, CDA, DAB, ABC đi qua trung điểm của đoạn thẳng AH_a, BH_b, CH_c, DH_d. Mà trung điểm của bốn đoạn thẳng AH_a, BH_b, CH_c, DH_d trùng nhau nên các đường thẳng Simson đồng quy. □

§6 Tứ giác toàn phần

§7 Cực và đối cực

§8 Thêm một số định lí nổi tiếng