

MARKTHEMATICS

TUYỂN TẬP CHUYÊN ĐỀ TOÁN THPT

Author

MARK NGUYEN

TEX

MARK NGUYEN

"The essence of mathematics lies in its freedom."

– Georg Cantor –

Ngày 16 tháng 3 năm 2025

"Mathematics, in essence, is a sea of ideas that when you look at it, it feels like it is something you could've discovered yourself." — I don't think I'm the first person in history to say this

Lời nói đầu

Mục lục

1	Tỉ số kép - Hàng điểm	1
1.1	Lí thuyết cơ sở	1
1.1.1	Tỉ số kép của hàng điểm	2
1.1.2	Tỉ số kép của chùm	4
1.1.3	Tỉ số kép của bốn điểm đồng viên	6
1.1.4	Hàng điểm điều hòa - Tứ giác điều hòa	8

Chương 1

Tỉ số kép - Hàng điểm

Tỉ số kép và hàng điểm là một công cụ mạnh trong việc giải các bài toán hình học, bên cạnh các kĩ thuật biến đổi góc, tỉ lệ và phương tích. Trong chuyên đề này, ta sẽ khám phá công cụ này, và một số bài toán liên quan đến tỉ số kép và hàng điểm.

§1.1 Lí thuyết cơ sở

Khi ta nghiên cứu về tỉ số kép, ta cũng nghiên cứu về các điểm giao nhau của các đoạn thẳng. Tuy nhiên, mặt phẳng Euclid thông thường không cho phép hai đường thẳng song song giao nhau. Vì thế, khi ta giải các bài toán có yếu tố giao nhau, ta cần mở rộng bài toán sang *mặt phẳng xạ ảnh*. So với hình học Euclid, hình học xạ ảnh có không gian mới (không gian xạ ảnh) và một tập hợp các khái niệm hình học. Trong hình học xạ ảnh:

- Mọi phương trên mặt phẳng đều có một điểm vô cùng ứng với phương đó, các đường thẳng song song có thể coi là đồng quy tại điểm vô cùng ứng với phương của các đường thẳng đó, kí hiệu là ∞ ;
- Trên mỗi đường thẳng d , tồn tại duy nhất một điểm vô cực ∞_d ;
- Với hai điểm A và B trên đường thẳng d , $\frac{\infty A}{\infty B} = 1$.

Mặt phẳng xạ ảnh sẽ giúp giải quyết các vấn đề về giao điểm của hai đường thẳng song song, đặt nền móng cho phép chiếu xuyên tâm và giảm thiểu sự phụ thuộc vào hình vẽ trong việc trình bày lời giải. Nhưng trước hết, ta định nghĩa tỉ số kép của một hàng điểm.

§1.1.1 Tỷ số kép của hàng điểm

Tỷ số kép của hàng điểm được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.1

Cho bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D ; đây được gọi là một hàng điểm. Tỷ số kép của hàng điểm A, B, C, D là một số thực (khác 1), kí hiệu là $(A, B; C, D)$, được định nghĩa

$$(A, B; C, D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$

Tính chất 1.1

Cho hàng điểm A, B, C, D có tỷ số kép là $(A, B; C, D) = k$. Khi đó

- (1) $(A, B; C, D) = (C, D; A, B) = k$;
- (2) $(A, C; B, D) = (D, B; C, A) = 1 - k$;
- (3) $(B, A; C, D) = (A, B; D, C) = \frac{1}{k}$;
- (4) $(A, B; C, D) = (A, B; C, D') \iff D \equiv D'$;
- (5) $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D') \iff (X, Y; Z, T) = (X', Y'; Z', T')$, với X, Y, Z, T và X', Y', Z', T' là hoán vị cùng kiểu của A, B, C, D và A', B', C', D' .

Bây giờ, ta nói về phép chiếu xuyên tâm.

Định nghĩa 1.2

Cho hai đường thẳng d, d' , và một điểm O không thuộc d, d' . Lấy $\{A\} \in d$ và $\{A'\} = OA \cap d'$. Ánh xạ

$$f : d \rightarrow d', A \mapsto A'$$

được gọi là phép chiếu xuyên tâm O từ d lên d' .

Từ đây, ta có một tính chất quan trọng (xin phép phát biểu mà không chứng minh).

Tính chất 1.2

Phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỷ số kép.

Nói cách khác, xét hai đường thẳng Δ và Δ' , bốn điểm A, B, C, D thuộc Δ và một điểm O không thuộc Δ ; qua phép chiếu f xuyên tâm O

$$f : \Delta \rightarrow \Delta'$$

$$A \mapsto A'$$

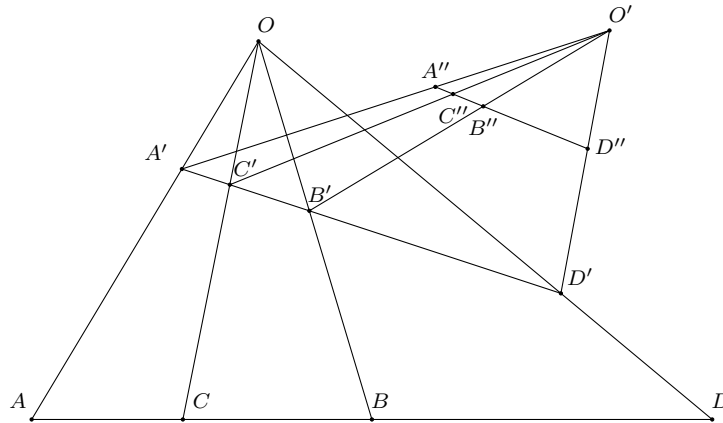
$$B \mapsto B'$$

$$C \mapsto C'$$

$$D \mapsto D'$$

thì $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$. Trong trường hợp $\Delta \parallel d$ thì D được xem là trùng với điểm vô cùng của d . Điều này gợi ra một số nhận xét như sau:

- Phép chiếu xuyên tâm là một song ánh.
- Phép chiếu song song có thể coi là phép chiếu xuyên tâm, tâm chiếu là điểm ∞ .
- Nhờ những cách chọn tâm chiếu khác nhau, bắt đầu từ hàng điểm A, B, C, D , ta có thể thu được vô số hàng điểm có cùng tỉ số kép với A, B, C, D .

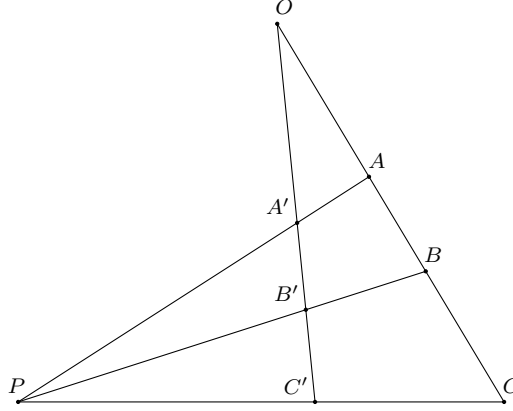


Đến đây, ta thu được một định lí liên quan:



Định lí 1.1

Hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại O . Trên d lấy các điểm A, B, C ; trên d' lấy các điểm A', B', C' . Khi đó $(O, A; B, C) = (O, A'; B', C')$ khi và chỉ khi AA', BB', CC' đôi một song song hoặc đồng quy.



Chứng minh. Xét các điểm trên mặt phẳng xạ ảnh. Gọi P là giao của AA' và BB' ; C'' là giao của PC' và đường thẳng d . Xét phép chiếu xuyên tâm P đi từ d' vào d : $O \mapsto O$, $A' \mapsto A$, $B' \mapsto B$, $C' \mapsto C''$. Phép chiếu này bảo toàn tỉ số kép, hay ta có $(O, A'; B', C') = (O, A; B, C'')$. Do đó $(O, A; B, C) = (O, A'; B', C')$ khi và chỉ khi $(O, A; B, C) = (O, A; B, C'')$, tương đương $C \equiv C''$ hay AA' , BB' , CC' đồng quy hoặc đôi một song song (đồng quy tại điểm vô cùng). \square

§1.1.2 Tỉ số kép của chùm

Phép chiếu xuyên tâm dẫn đến định nghĩa về tỉ số kép của chùm.

Định nghĩa 1.3

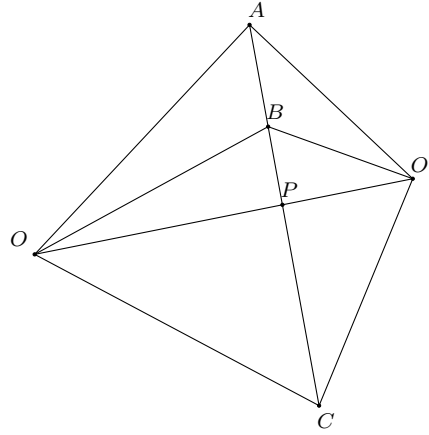
Cho bốn đường thẳng a, b, c, d đồng quy tại O ; đây được gọi là một chùm có tâm là O . Một đường thẳng ℓ trên mặt phẳng thay đổi và cắt a, b, c, d lần lượt tại A, B, C, D . Khi đó $(A, B; C, D)$ là một hằng số khi ℓ thay đổi. Hằng số này được gọi là tỉ số kép của chùm đường thẳng a, b, c, d , kí hiệu là

$$(a, b; c, d) = O(A', B'; C', D'),$$

với A', B', C', D' là các điểm bất kì tương ứng thuộc đường thẳng a, b, c, d .

Định lý 1.2

Cho a, b, c đồng quy tại O và a', b', c' đồng quy tại O' . Gọi $\{A\} = a \cap a'$, $\{B\} = b \cap b'$, $\{C\} = c \cap c'$. Khi đó A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $O(O', a; b, c) = O'(O, a'; b', c')$.



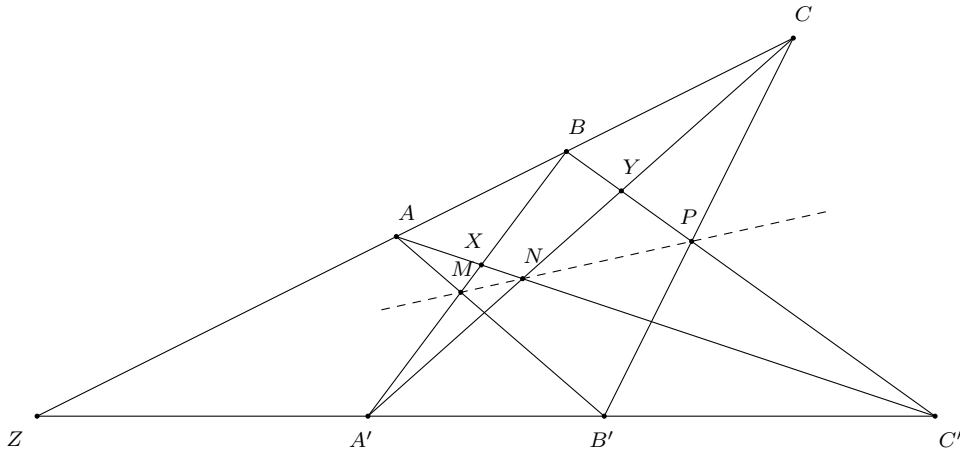
Chứng minh. Xét các điểm trên mặt phẳng xạ ảnh. Gọi P là giao điểm của BC và OO' ; A_1 là giao của OA và BC , A_2 là giao của $O'A$ và BC . Ta có $O(A, B; C, O') = O(A_1, B; C, P)$ và $O'(A, B; C, O) = O'(A_2, B; C, P)$. Như vậy $O(A, B; C, O') = O'(A, B; C, O)$ khi và chỉ khi $O(A_1, B; C, P) = O'(A_2, B; C, P)$, tương đương $A_1 \equiv A_2 \equiv A$ hay A, B, C thẳng hàng. \square

Định lý 1.3

(*Định lý Pappus*) Cho hai đường thẳng Δ và Δ' . Trên Δ lấy các điểm A, B, C ; trên Δ' lấy các điểm A', B', C' . Khi đó giao điểm của các cặp đường thẳng (AB', BA') , (BC', CB') , (CA', AC') thẳng hàng.

! Chú ý — Ta có thể kí hiệu bộ điểm A, B, C, A', B', C' là

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}.$$



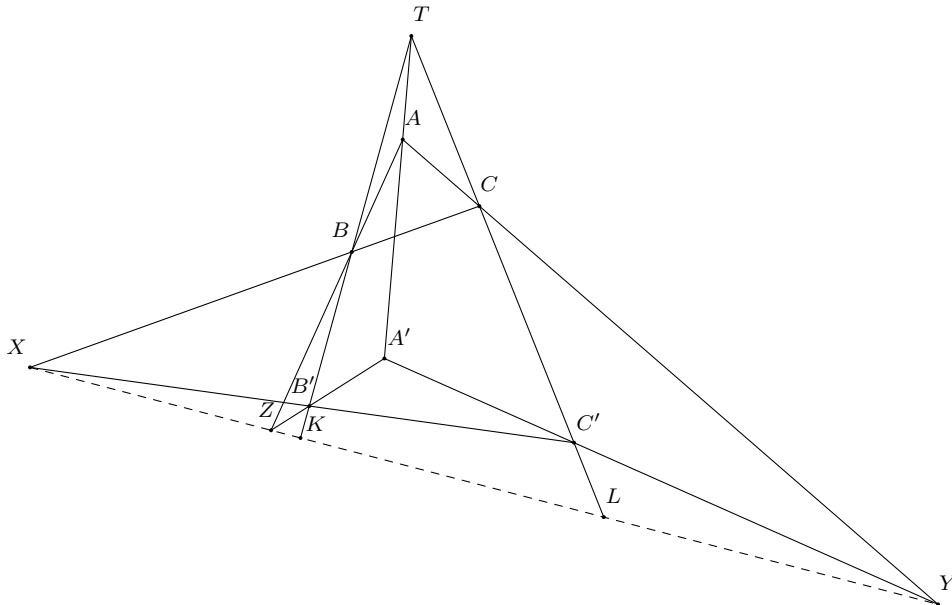
LỜI GIẢI. Xét các điểm trên mặt phẳng xạ ảnh. Gọi M, N, P lần lượt là giao của các cặp đường thẳng $(AB', BA'), (BC', CB'), (CA', AC')$; X là giao điểm của AC' và BA' ; Y là giao điểm của BC' và CA' ; Z là giao điểm của Δ và Δ' . Sử dụng lần lượt phép chiếu xuyên tâm A và tâm C ta được

$$(A', X; M, B) \stackrel{A}{=} (A', C'; B', Z) \stackrel{C}{=} (Y, C'; P, B).$$

Suy ra XC', YA', MP đồng quy hay M, N, P thẳng hàng. ■

Định lí 1.4

(*Định lí Desargues*) Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(BC, B'C'), (CA, C'A'), (AB, A'B')$. Khi đó X, Y, Z thẳng hàng khi và chỉ khi AA', BB', CC' đồng quy hoặc đôi một song song.



LỜI GIẢI. Xét các điểm trên mặt phẳng xạ ảnh. Gọi T là giao điểm của BB' và CC' ; K, L lần lượt là giao điểm của TB, TC với YZ .

Ta có X, Y, Z thẳng hàng khi và chỉ khi $(T, B'; B, K) = (T, C'; C, L)$. Điều này tương đương $Z(T, A'; A, Y) = Y(T, A'; A, Z)$ hay T, A, A' thẳng hàng hay AA', BB', CC' đồng quy hoặc đôi một song song (đồng quy tại điểm vô cùng). ■

§1.1.3 Tỷ số kép của bốn điểm đồng viên

Phép chiếu xuyên tâm cũng dẫn đến định nghĩa về tỷ số kép của bốn điểm đồng viên.

Định nghĩa 1.4

Cho bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn (O) . Với mọi điểm S thuộc (O) , tỉ số kép

$$S(A, B; C, D) = \begin{cases} \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} & \text{khi } A, B \text{ cùng phía } CD \\ -\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} & \text{khi } A, B \text{ khác phía } CD \end{cases}$$

là một hằng số. Hằng số này được gọi là tỉ số kép của bốn điểm đồng viên A, B, C, D , kí hiệu là $(A, B; C, D)$.

Hệ quả 1.1

Cho bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn (O) , một điểm S bất kì thuộc (O) và một đường thẳng d . Khi đó, phép chiếu xuyên tâm S từ (O) lên d bảo toàn tỉ số kép của chùm $S(A, B; C, D)$.

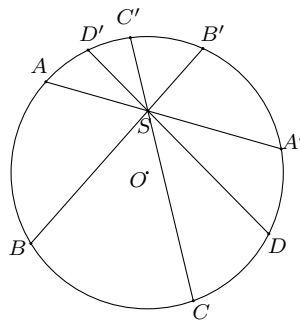
Hệ quả 1.2

Cho hai đường tròn (O) và (O') . Giả sử (O) và (O') giao nhau tại S . Trên (O) lấy bốn điểm A, B, C, D . Các đường thẳng SA, SB, SC, SD lần lượt cắt (O') tại A', B', C', D' . Khi đó $(A, B; C, D) = S(A, B; C, D) = S(A', B'; C', D') = (A', B'; C', D')$.

Hơn nữa, ta cũng có phép chiếu xuyên tâm bất kì trong mặt phẳng, từ đường tròn lên chính nó. Xin phép được phát biểu định lí, nhưng không chứng minh.

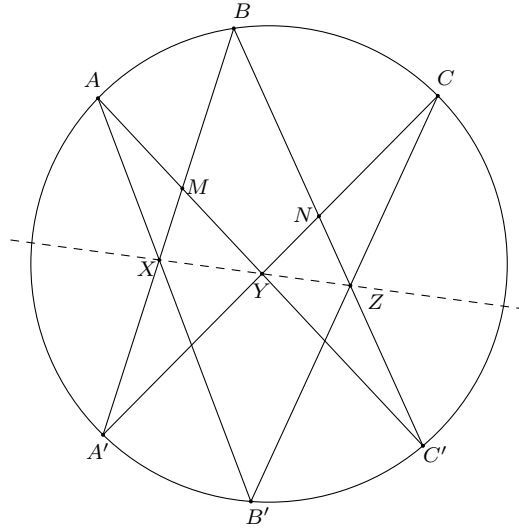
Định lí 1.5

Cho bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn (O) và một điểm S bất kì trong mặt phẳng. Các đường thẳng SA, SB, SC, SD cắt lại (O) tại A', B', C', D' . Khi đó $(A, B; C, D) = S(A, B; C, D) = S(A', B'; C', D') = (A', B'; C', D')$.



Định lý 1.6

(*Định lý Pascal*) Cho sáu điểm bất kỳ A, B, C, A', B', C' cùng thuộc một đường tròn. Khi đó giao điểm của các cặp đường thẳng (AB', BA') , (BC', CB') , (CA', AC') thẳng hàng.



LỜI GIẢI. Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (AB', BA') , (BC', CB') , (CA', AC') ; M là giao điểm của AC' và BA' ; N là giao điểm của BC' và CA' . Sử dụng lần lượt phép chiếu xuyên tâm A và tâm C ta được

$$(A', M; X, B) \stackrel{A}{=} (A', C'; B', B) \stackrel{C}{=} (N, C'; Z, B).$$

Suy ra NA', MC', XZ đồng quy hay X, Y, Z thẳng hàng. ■

Cuối cùng là một trường hợp đặc biệt của tỉ số kép.

§1.1.4 Hàng điểm điều hòa - Tứ giác điều hòa

Định nghĩa 1.5

Một hàng điểm A, B, C, D được gọi là một hàng điểm điều hòa nếu tỉ số kép

$$(A, B; C, D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

có giá trị bằng -1 . Khi đó, ta nói cặp điểm A, B chia điều hòa cặp điểm C, D ; hoặc cặp điểm A, B và cặp điểm C, D là hai cặp điểm liên hợp điều hòa.

Kết hợp tính chất của tỉ số kép, nếu $(A, B; C, D) = -1$ thì ta cũng có

$$\begin{aligned} -1 &= (A, B; C, D) = (A, B; D, C) = (B, A; C, D) = (B, A; D, C) \\ &= (C, D; A, B) = (C, D; B, A) = (D, C; A, B) = (D, C; B, A) \end{aligned}$$

Vốn dĩ nó được gọi là "điều hòa" vì một số tính chất đẹp của nó, chẳng hạn:



Định lý 1.7



Cho hàng điểm A, B, C, D với I là trung điểm của AB . Khi đó

- i) $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$ (hệ thức Descartes);
- ii) $IA^2 = IB^2 = IC \cdot ID$ (hệ thức Newton);
- iii) $CI \cdot CD = CA \cdot CB$ (hệ thức Maclaurin).

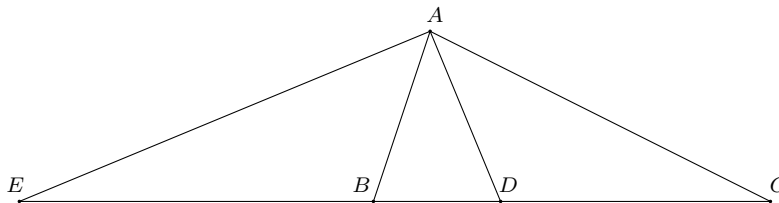
Trong thực tế, ta thường quan sát và vận dụng các mô hình quen thuộc để giải các bài toán hình học, trong đó có các yếu tố liên quan đến tỉ số kép. Trong phần này, ta trình bày ba trường hợp đặc biệt có sự xuất hiện của tỉ số kép.



Tính chất 1.3



(Hàng phân giác) Cho tam giác ABC có AD và AE lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của góc BAC (với $\{D, E\} \in BC$). Khi đó $(B, C; D, E) = -1$.



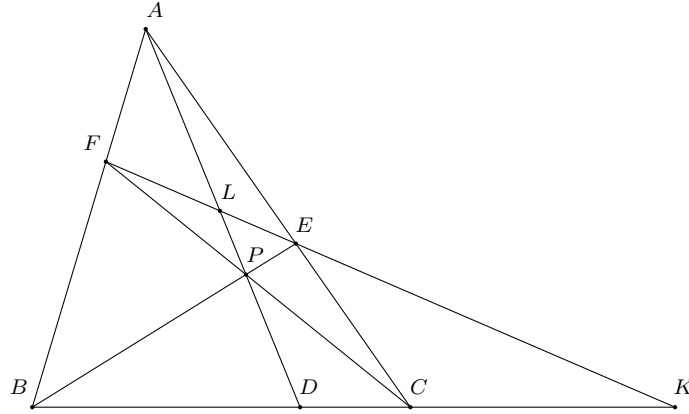
Chứng minh. Đây là hệ quả trực tiếp của định lý đường phân giác. □



Tính chất 1.4



(Hàng tứ giác toàn phần) Cho tam giác ABC và một điểm P bất kì không nằm trên cạnh của tam giác ABC . AP, BP, CP cắt cạnh tam giác đối diện tại D, E, F . Giả sử EF cắt BC tại K . Khi đó $(B, C; D, K) = -1$.



Chứng minh. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC và cát tuyến KEF : $\frac{BK}{KC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$.

Áp dụng định lý Ceva cho tam giác ABC và bộ ba cevian AD, BE, CF : $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$.

Lấy phép chia vế trái của hai hệ thức trên ta thu được $\frac{DB}{DC} : \frac{KB}{KC} = (B, C; D, K) = -1$. \square

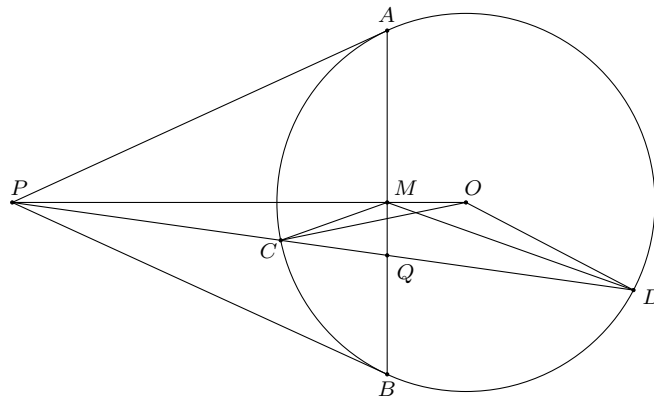
Nhận xét. Nếu ta gọi L là giao điểm của AD và EF thì ta có $-1 = (B, C; D, K) = A(B, C; D, K) = (F, E; L, K)$ và $-1 = (B, C; D, K) = F(B, C; D, K) = (A, P; D, L)$.



Tính chất 1.5



(Hàng tiếp tuyến, cát tuyến) Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm ngoài đường tròn (O) . Từ P kẻ hai tiếp tuyến PA, PB (với $\{A; B\} \in (O)$), và một cát tuyến PCD (với C nằm giữa P và D) tới (O) . AB cắt CD tại Q . Khi đó $(P, Q; C, D) = -1$.



Chứng minh. Gọi M là giao điểm của OP và AB . Ta có $\overline{PM} \cdot \overline{PO} = PA^2 = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$, hay tứ giác $OMCD$ nội tiếp. Khi đó $\angle PMC = \angle ODC = \angle OCD = \angle OMD$, mà $AB \perp OP$ nên ta có MQ là phân giác trong của góc CMD , đồng thời MP là phân giác ngoài của góc CMD . Theo tính chất về hàng phân giác, ta thu được $(P, Q; C, D) = -1$. \square

