сается образа непрерывного линейного оператора, то он не обязательно будет подпространством в E_1, даже если $D_A = E$.

Понятие линейного функционала, введенное в начале этой главы, есть частный случай линейного оператора. Именно, линейный функционал — это линейный оператор, переводящий данное пространство E в числовую прямую R^1. Определение линейности и непрерывности оператора переходят при $E_1 = R^1$ в соответствующие определения, введенные ранее для функционалов.

Точно так же и ряд дальнейших понятий и фактов, излагаемых ниже для линейных операторов, представляет собой довольно автоматическое обобщение результатов, уже изложенных в § 1 этой главы применительно к линейный функционалам.

П р и м е р ы л и н е й н ы х о п е р а т о р о в. 1. Пусть E — линейное топологическое пространство. Положим

$$lx = x \quad \text{для всех } x \in E$$

Такой оператор, переводящий каждый элемент пространства в себя, называется *единичным оператором.*

2. Пусть E и E_1 — произвольные линейные топологические пространства и пусть

$$Ox = 0 \quad \text{для всех } x \in E$$

(Здесь 0 — нулевой элемент пространства E_1). Тогда O называется *нулевым оператором.*

3. *Общий вид линейного оператора, переводящего конечномерное пространство в конечномерное.* Пусть A — линейный оператор, отображающий n-мерное пространство R^n с базисом $e_1, \ldots, e_n$ в m-мерное пространство R^m с базисом $f_1, \ldots, f_m$. Если x — произвольный вектор из R^n, то

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

и в силу линейности оператора A

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i A e_i$$

Таким образом, оператор A задан, если известно, во что он переводит базисные векторы $e_1, \ldots, e_n$. Рассмотрим разложения векторов Ae_i по базису $f_1, \ldots, f_m$. Имеем

$$Ae_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} f_k.$$

Отсюда ясно, что оператор A определяется матрицей коэффициентов $\|a_{ki}\|$. Образ пространства R^n в R^m представляет собой линейное подпространство, размерность которого равна, очевидно, рангу матрицы $\|a_{ki}\|$, т. е. во всяком случае, непревосходит n. Отметим, что всякий линейный оператор, заданный в конечномерном пространстве, автоматически непрерывен.

4. Рассмотрим шильбертово пространство H и в нем некоторое подпространство H_1. Разложив H в прямую сумму подпространства H_1 и его ортогонального дополнения, т. е. представив каждый элемент $h \in H$ в виде

$$h = h_1 + h_2 \quad (h_1 \in H_1, h_2 \perp H_1),$$

положим $Ph = h_1$. Этот оператор P естественно назвать *оператором ортогонального проектирования*, или*ортопроектором* H на H_1. Линейность и непрерывность проверяются без труда.

5. Рассмотрим в пространстве непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ оператор, определяемый формулой

$$\psi(s) = \int\limits_a^b K(s,t)\phi(t)dt, \tag{1}$$

где $K(s,t)$ — некоторая фиксированння непрерывная функция двух переменных. Функция $\psi(s)$ непрерывна для любой непрерывной функции $\psi(t)$, так что оператор (1) действительно переводит пространство непрерывных функций в себя. Его линейность очевидна. Для того чтобы говорить о его непрерывности, необходимо предварительно указать, какая топология рассматривается в нашем пространстве непрерывных функций. Читателю предлагается доказать непрерывность оператора в случаях, когда: а) рассматривается пространство $C[a, b]$, т. е. пространство непрерывных функций с нормой $\|\phi\| = \max|\phi(t)|$; б) когда рассматривается $C_2[a, b]$, т. е. $\|\phi\| = \left(\int\limits_a^b \phi^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

6. В том же пространстве непрерывных функций рассмотрим оператор

$$\psi(t) = \phi_0(t)\phi(t),$$

где $\phi_0(t)$ — фиксированная непрерывная функция. Линейность этого оператора очевидна. (Докажите его непрерывность при нормировках, указанных в предыдущем примере.)

7. Один из важнейших для анализа примеров линейных операторов — это оператор дифференцирования. Его можно рассматривать в различных пространствах.

а) Рассмотрим пространство непрерывных функций $C[a, b]$ и оператор

$$Df(t) = f'(t),$$