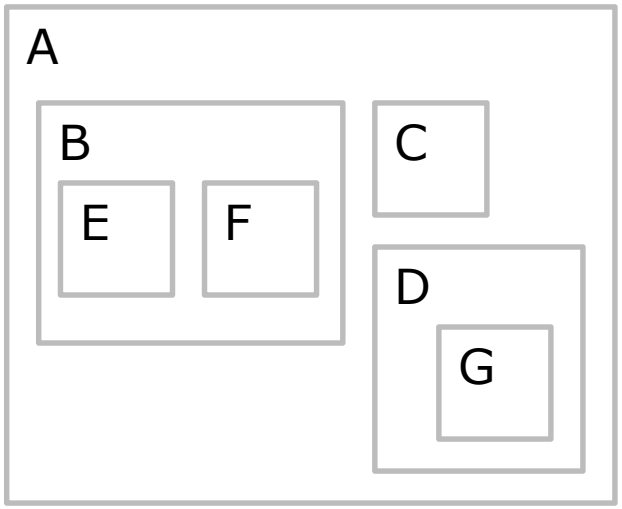
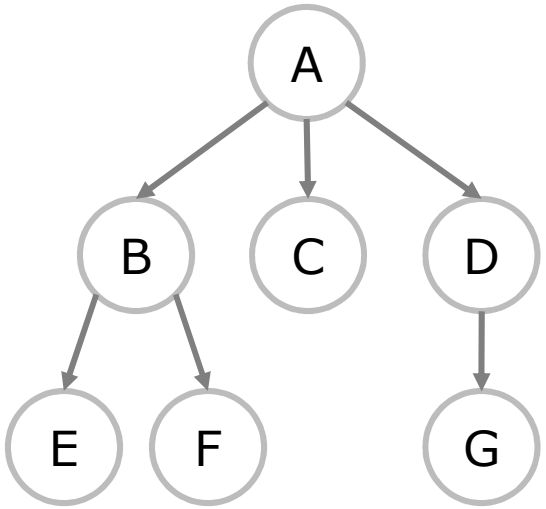
INF 1010
Estruturas de Dados Avançadas

Árvores e Árvores binárias

Árvore

- estrutura hierárquica:
  - A
  - …B
  - ……E
  - ……F
  - …C
  - …D
  - ……G





  - (A (B (E, F)), C, (D (G)))

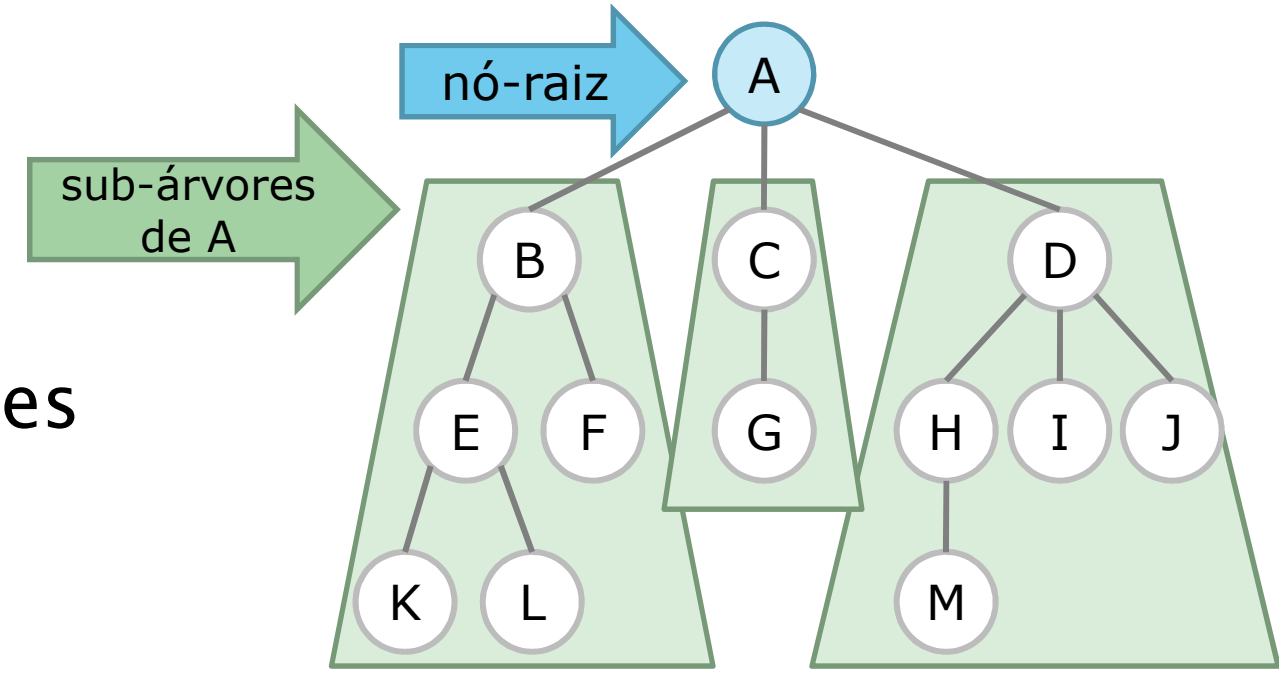
Árvore - definições

árvore:

- nó raiz
- sub-árvores

nó:

- informação
- ramos



Árvore - definições

grau de um nó:

- número de sub-árvores do nó

  grau de A = 3
  grau de B = 2
  grau de F = 0

se grau = 0

- nó é chamado de **folha** ou **terminal**
- { F, G, I, J, K, L, M }

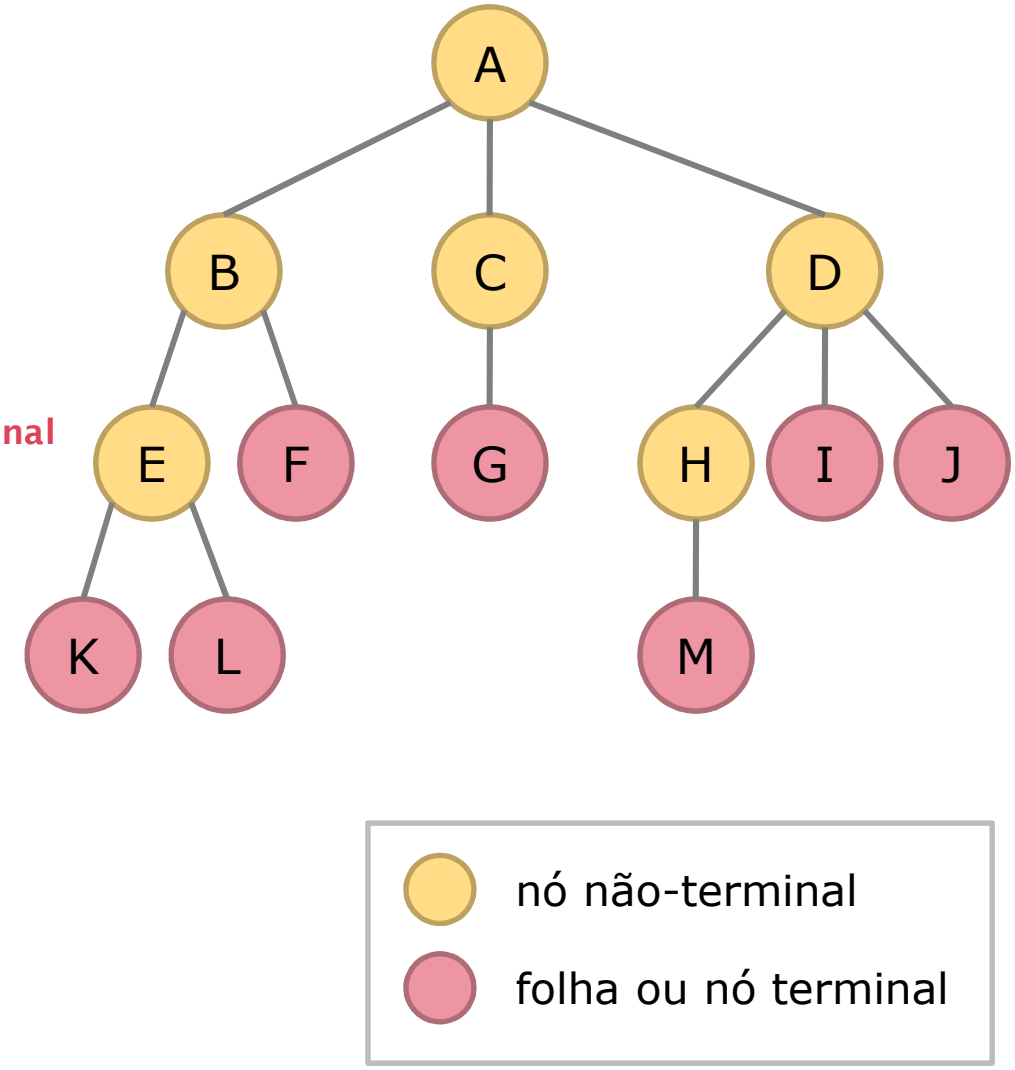
se grau > 0

- nó é chamado de **não-folha** ou **não-terminal**
- { A, B, C, D, E, H }

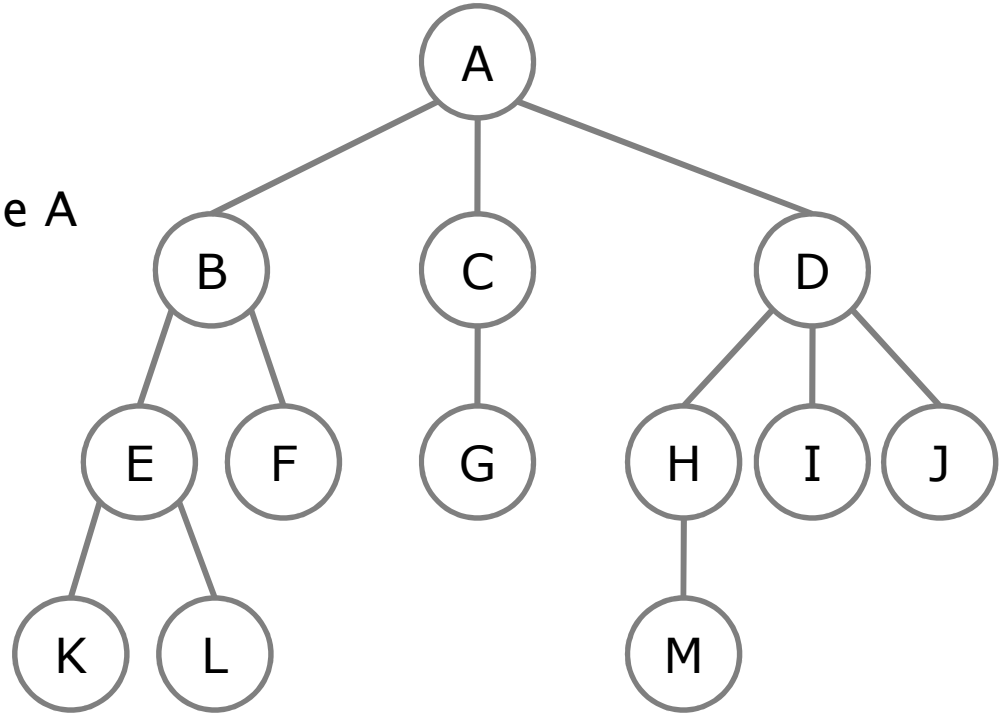
grau da árvore

- maior dentre os graus dos nós

  grau da árvore de exemplo = 3



Árvore - definições



filhos de A

- raízes das sub-árvores de A
- {B, C, D}

pai/progenitor de B: A

- X é pai dos seus filhos

irmãos

- nós que têm um mesmo pai
- {B, C, D}; {E, F}; {H, I, J}; {K, L}

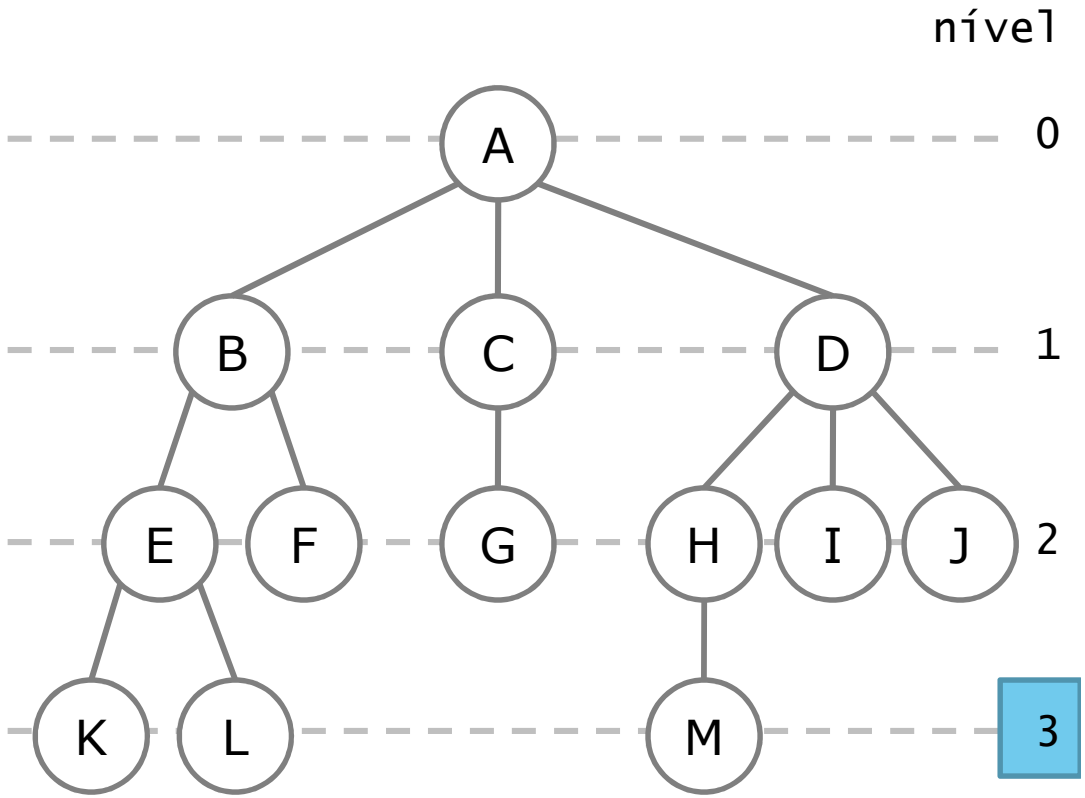
ancestrais de K

- nós no caminho da raiz até K
- {A, B, E}

Árvore - definições

nível (de um nó)

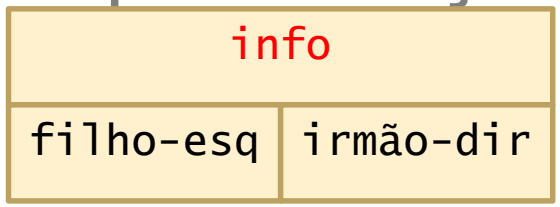
- raiz tem nível 0
- se nó X tem nível n, seus filhos têm nível n+1

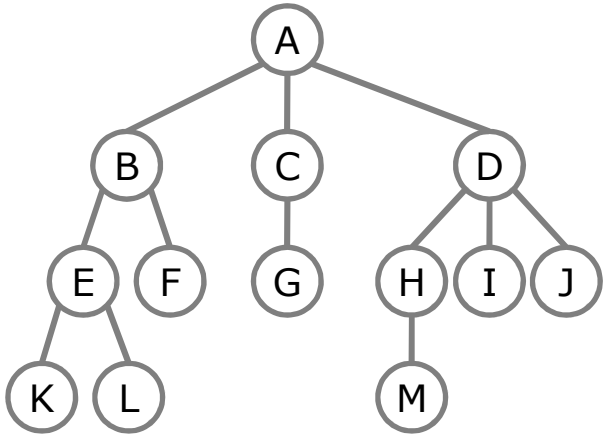


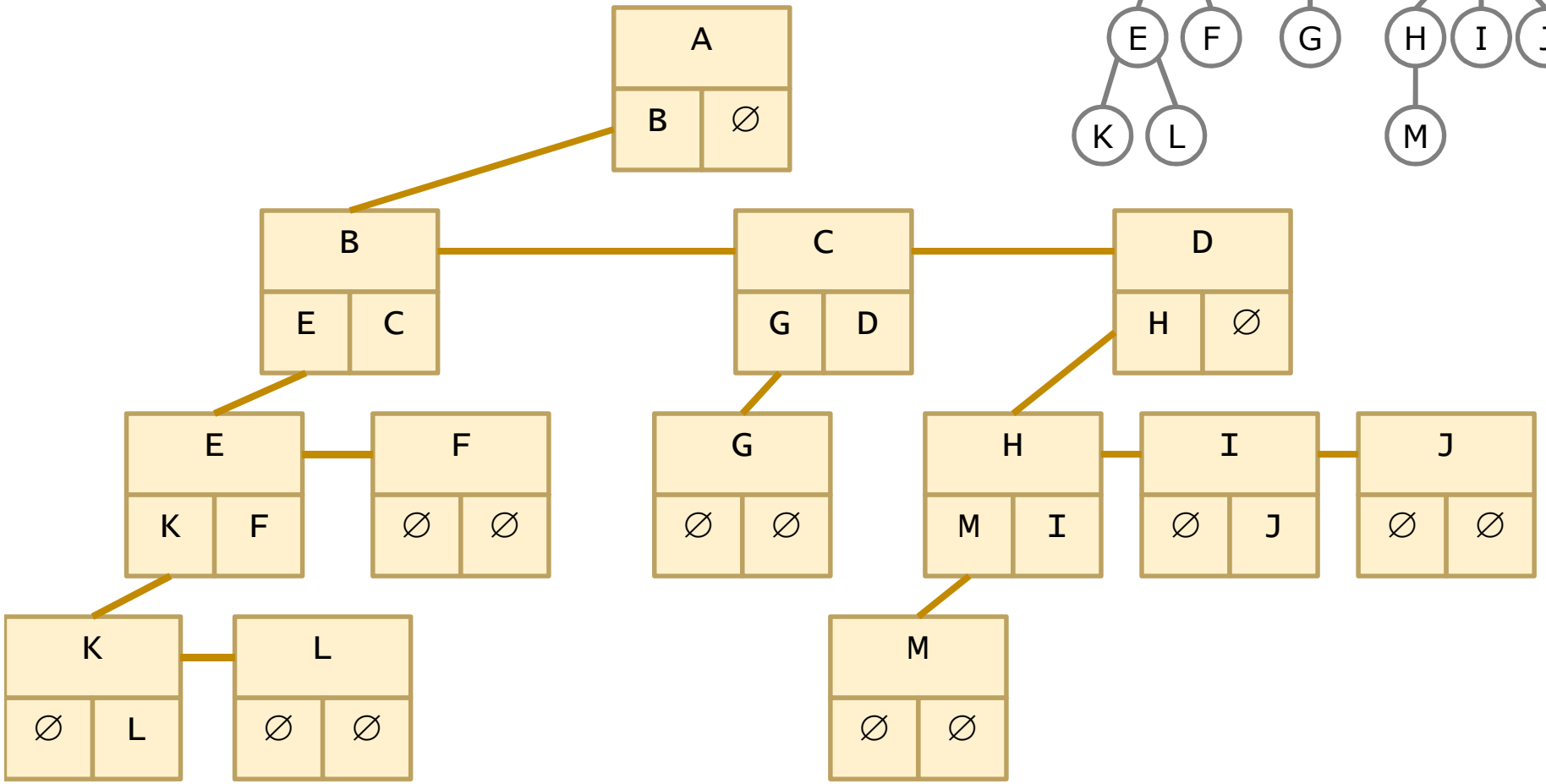
altura ou **profundidade** (da árvore)

- maior nível dentre todos os nós
- No exemplo: **h = 3**

Representação de uma árvore



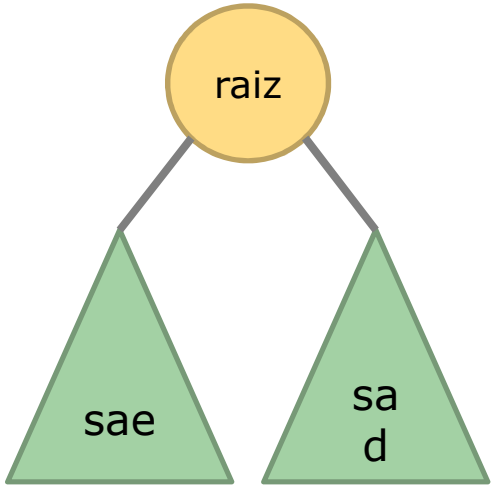




Árvore binária - definições

- ∅ (árvore vazia)
- {raiz, sub-árvore esquerda , sub-árvore direita},
  onde sae e sad são conjuntos disjuntos

∅ ou

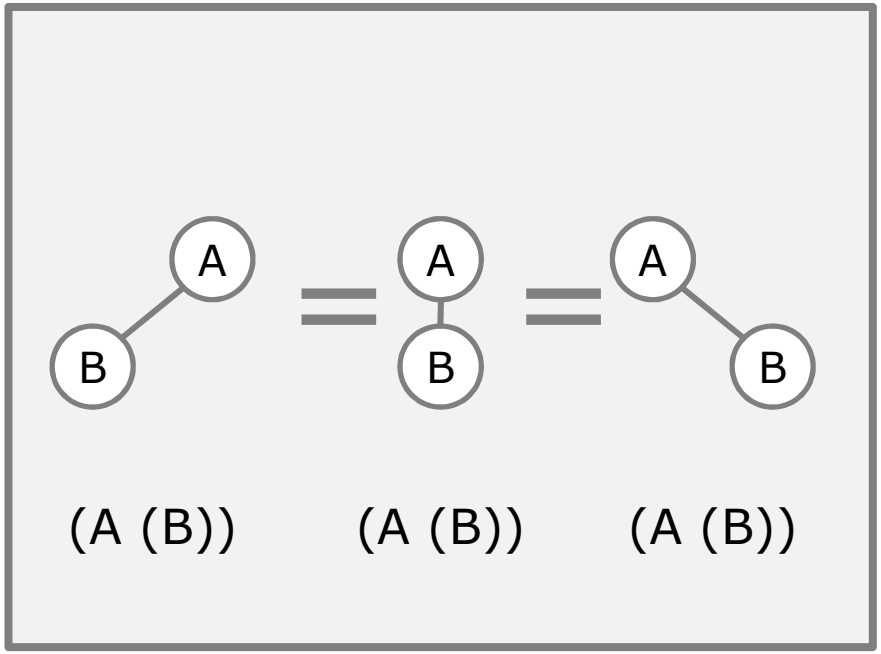



```
/* nó da árvore binária */
struct arvbin {
    char info;
    struct arvbin *esq;
    struct arvbin *dir;
};
```

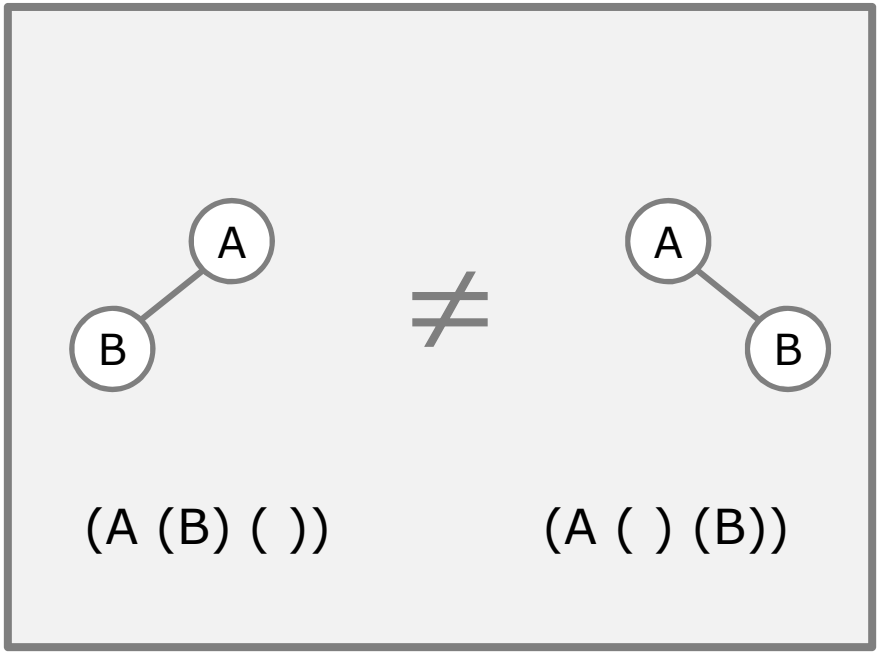
Árvore binária - definições

Nota: *árvore binária não é árvore comum*

- árvore



- árvore binária



Árvore binária - conceitos

número máximo de nós no nível *i*: $n_i = 2^i$

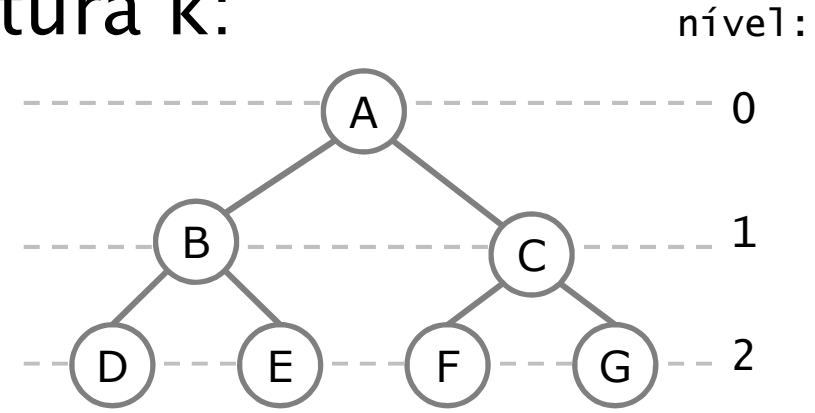
número máximo de nós na árvore de altura *k*:

- $n_{max} = 2^k + \ldots + 2^2 + 2 + 1 = 2^{k+1} - 1$

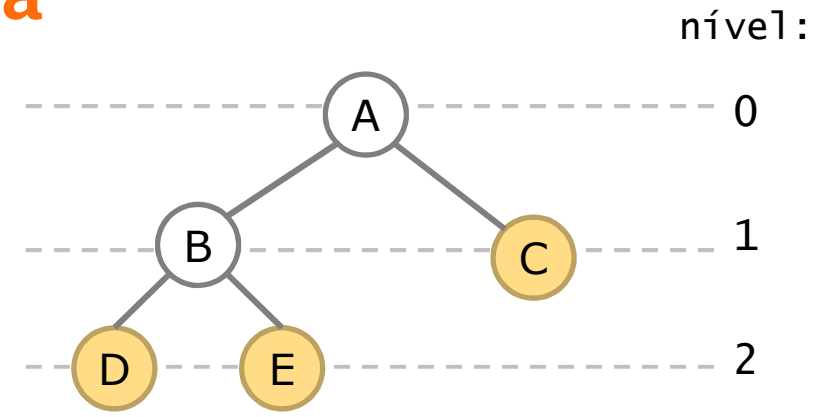
Árvore binária - conceitos

Árvore binária **cheia** de altura k:

- árvore com $2^{k+1} - 1$ nós
- Exemplo: para k = 2, árvore binária cheia possui $2^3-1 = 7$ nós

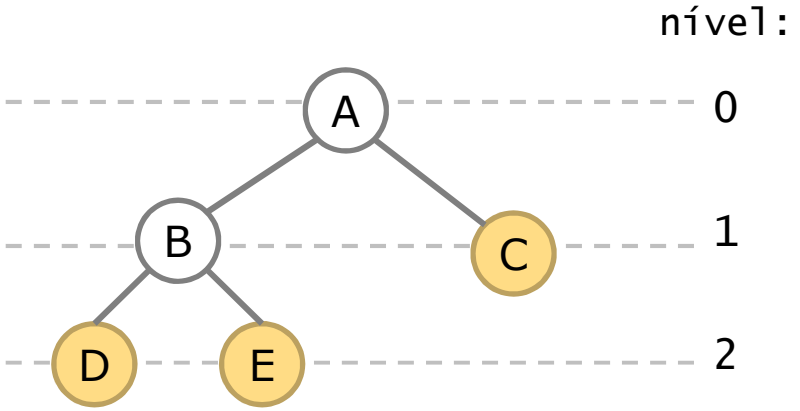


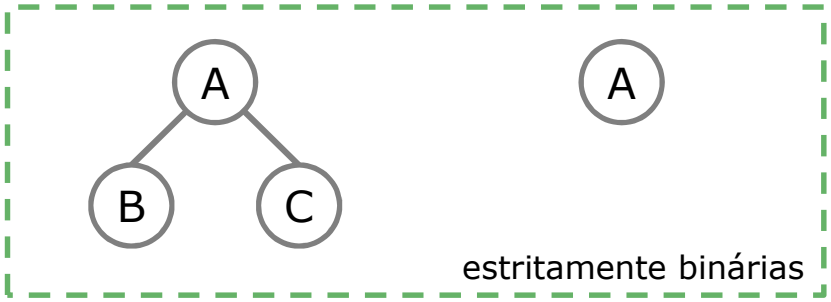
- Árvore binária **completa**
  - toda folha está no último ou penúltimo nível

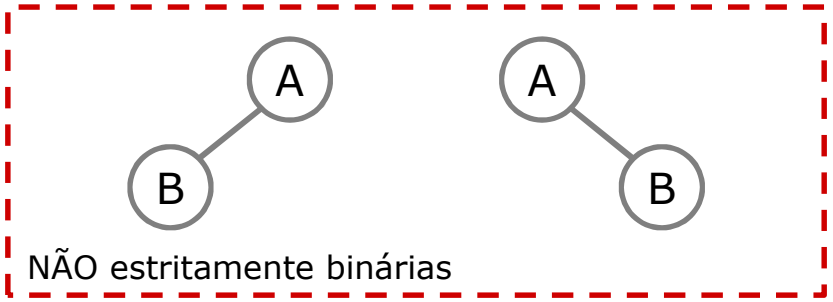


Árvore binária – conceitos (cont.)

- Árvore **estritamente binária**
  - cada nó tem 0 ou dois filhos

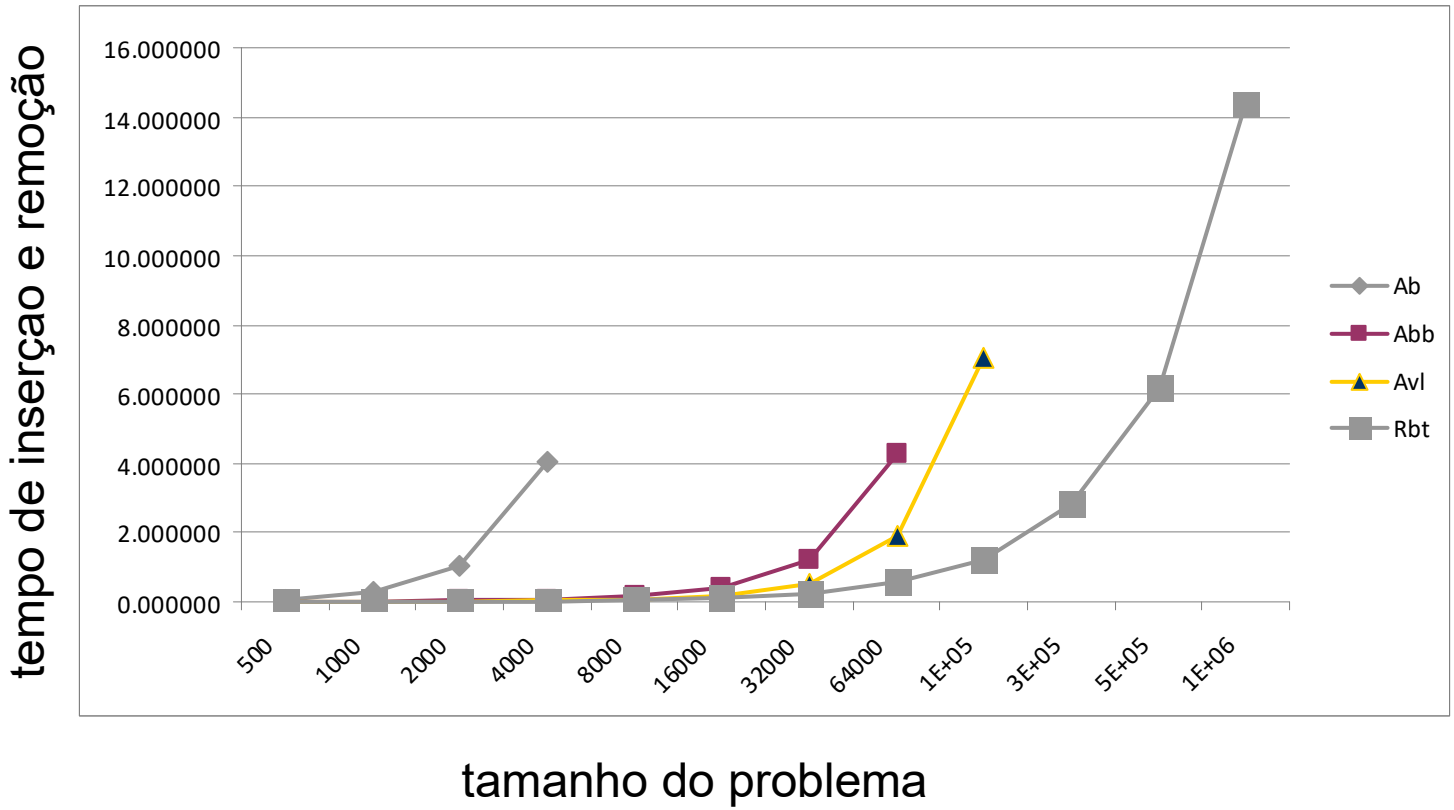




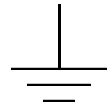


O que vamos estudar de árvores binárias?

Ab = árvore binária
Abb = árvore binária de busca
Avl = árvore binária de busca, balanceada
Rbt = árvores rubro-negras ou vermelho e preto (red-black tree)

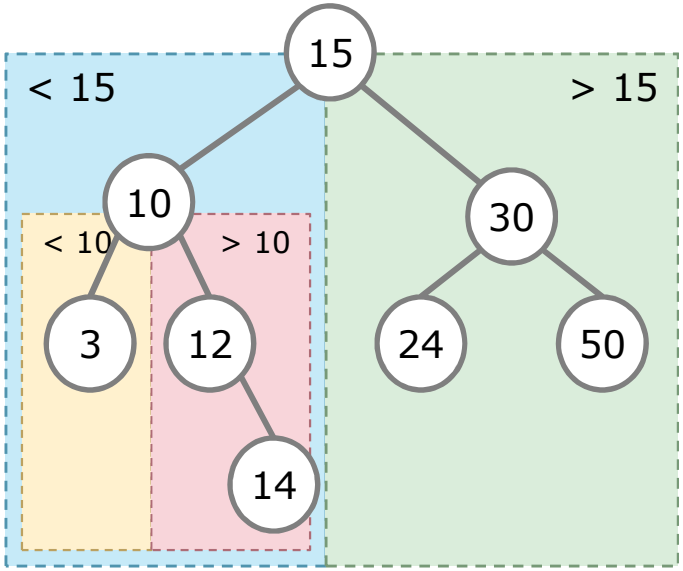


Definição de ABBs

- Uma ABB é uma árvore binária vazia, ∅ 

ou uma árvore tal que

1. cada nó possui uma chave
2. as chaves na sub-árvore esquerda (se houver) são menores do que a chave da raiz
3. as chaves na sub-árvore direita (se houver) são maiores do que a chave da raiz
4. as sub-árvores esquerda e direita são árvores binárias de busca



Implementação de ABBs em C (sem ponteiro para o pai)

abb.h

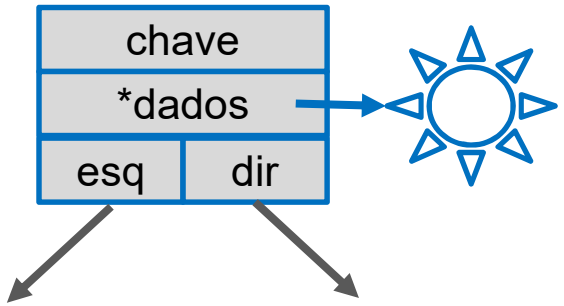
```
typedef struct smapa Mapa;

Mapa* cria (void);
Mapa* insere (Mapa* raiz, int chave,
tdados *novosdados);
tdados *busca (Mapa *raiz, int chave);
```

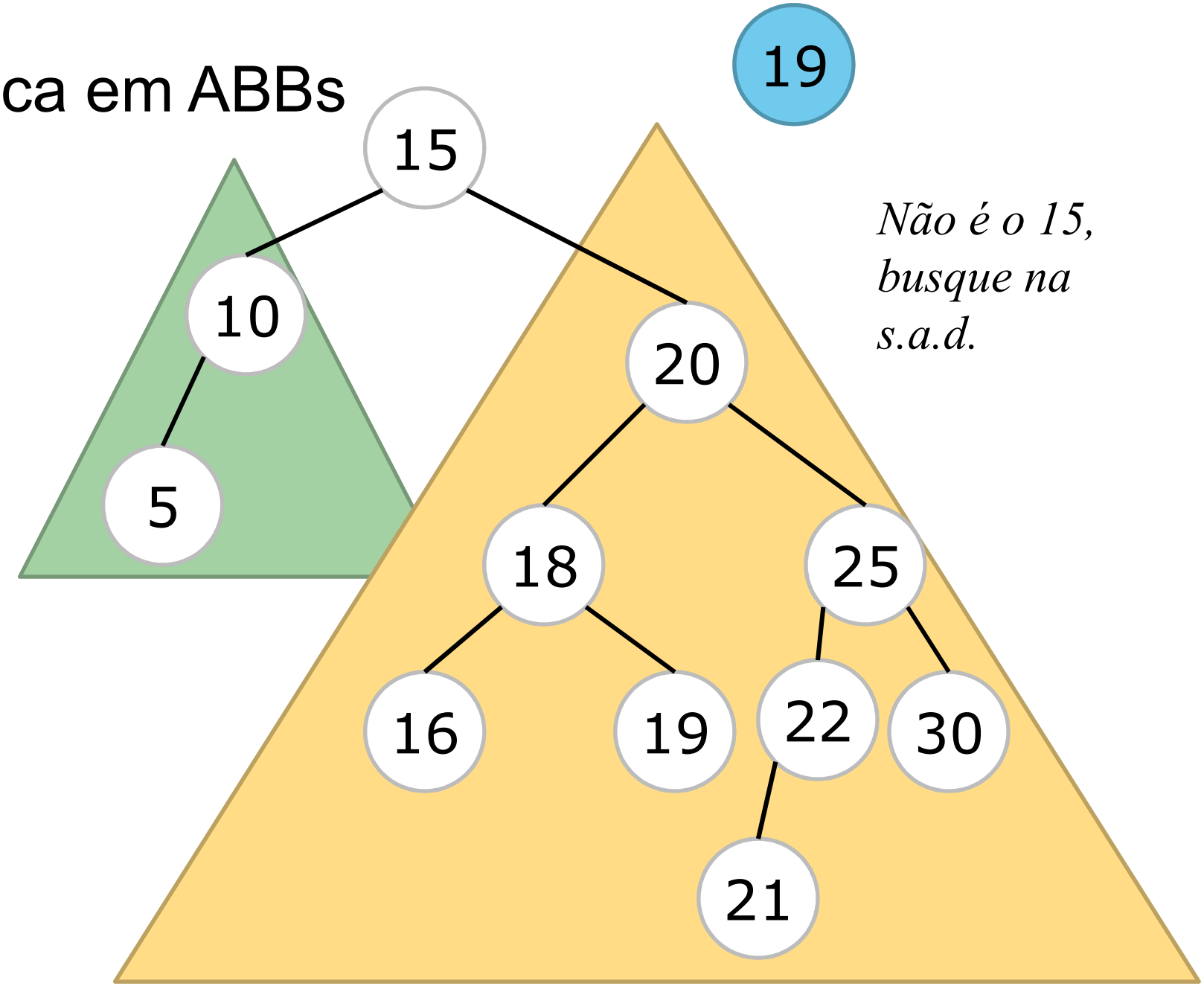
```
Mapa* cria(void)
{
   return NULL;
}
```

abb.c

```
struct smapa {
   int chave;
   tdados *dados;
   Mapa* esq;
   Mapa* dir;
};
```



Busca em ABBs



Não é o 15, busque na s.a.d.

Busca em ABBs

```
tdados* busca (Mapa* raiz, int chave);
```

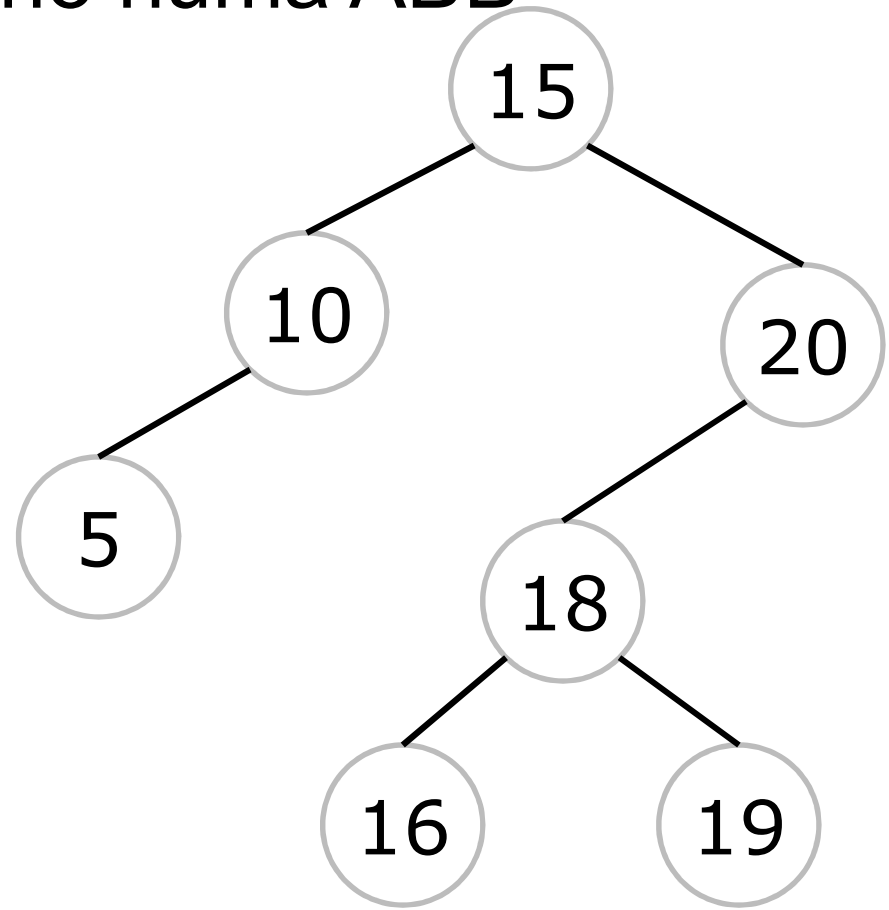
1. Começe a busca pelo nó raiz
2. Se a árvore for **vazia** então retorne **NULL**
3. Se a chave procurada for **menor** que a chave do nó,
   procure na sub-árvore à esquerda e
   responda com a resposta que você receber
4. Se a chave procurada for **maior** que a chave do nó,
   procure na sub-árvore à direita e
   responda com a resposta que você receber
5. Se for **igual** responda com o **endereço do nó**

Busca em ABBs - Algoritmo Recursivo

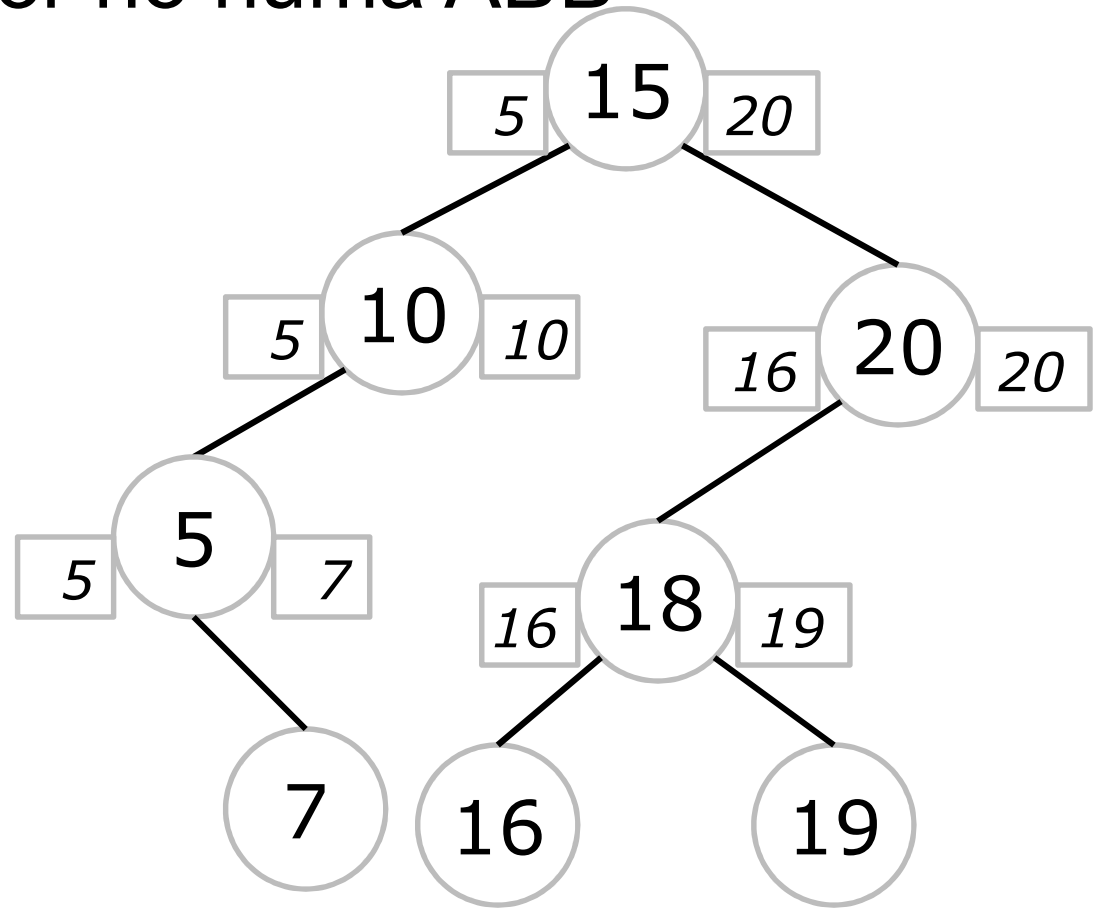
```
tdados* busca (Mapa* r, int c)
{
  if (r == NULL)
        return NULL;
  else if (c < r->chave)
        return busca (r->esq, c);
  else if (c > r->chave)
        return busca (r->dir, c);
  else return r->dados;
}
```

1. Começe a busca pelo nó raiz
2. Se a árvore for **vazia** retorne **NULL**
3. CC se a chave procurada for **menor** que a chave do nó, **procure na sub-árvore à esquerda** e responda com a resposta que você receber
4. CC se a chave procurada for **maior** que a chave do nó, **procure na sub-árvore à direita** e responda com a resposta que você receber
5. CC se for **igual** responda com o **endereço do nó**

Menor nó numa ABB



Menor nó numa ABB



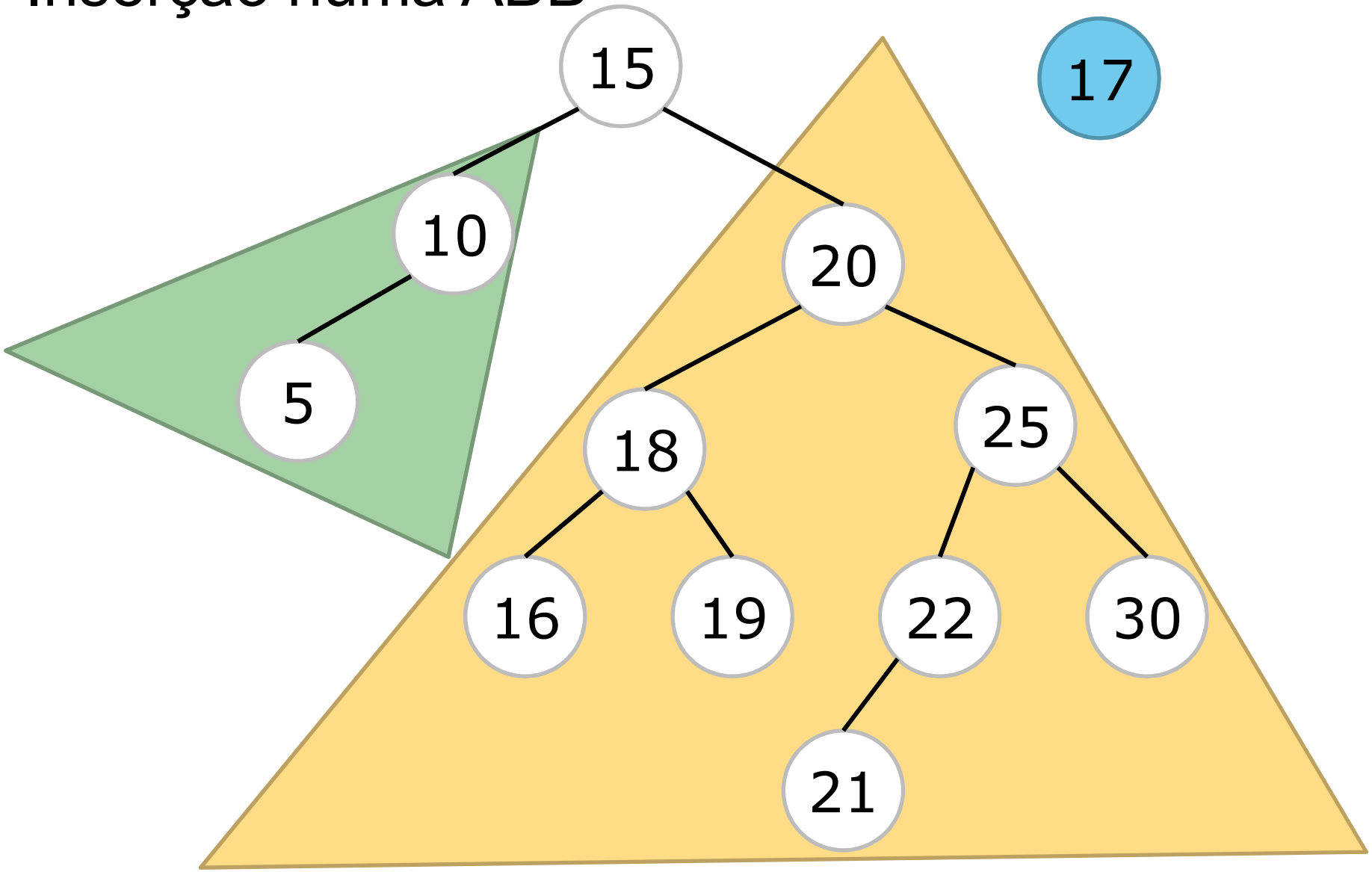
Menor nó numa ABB

```
Mapa* min (Mapa* r)
```

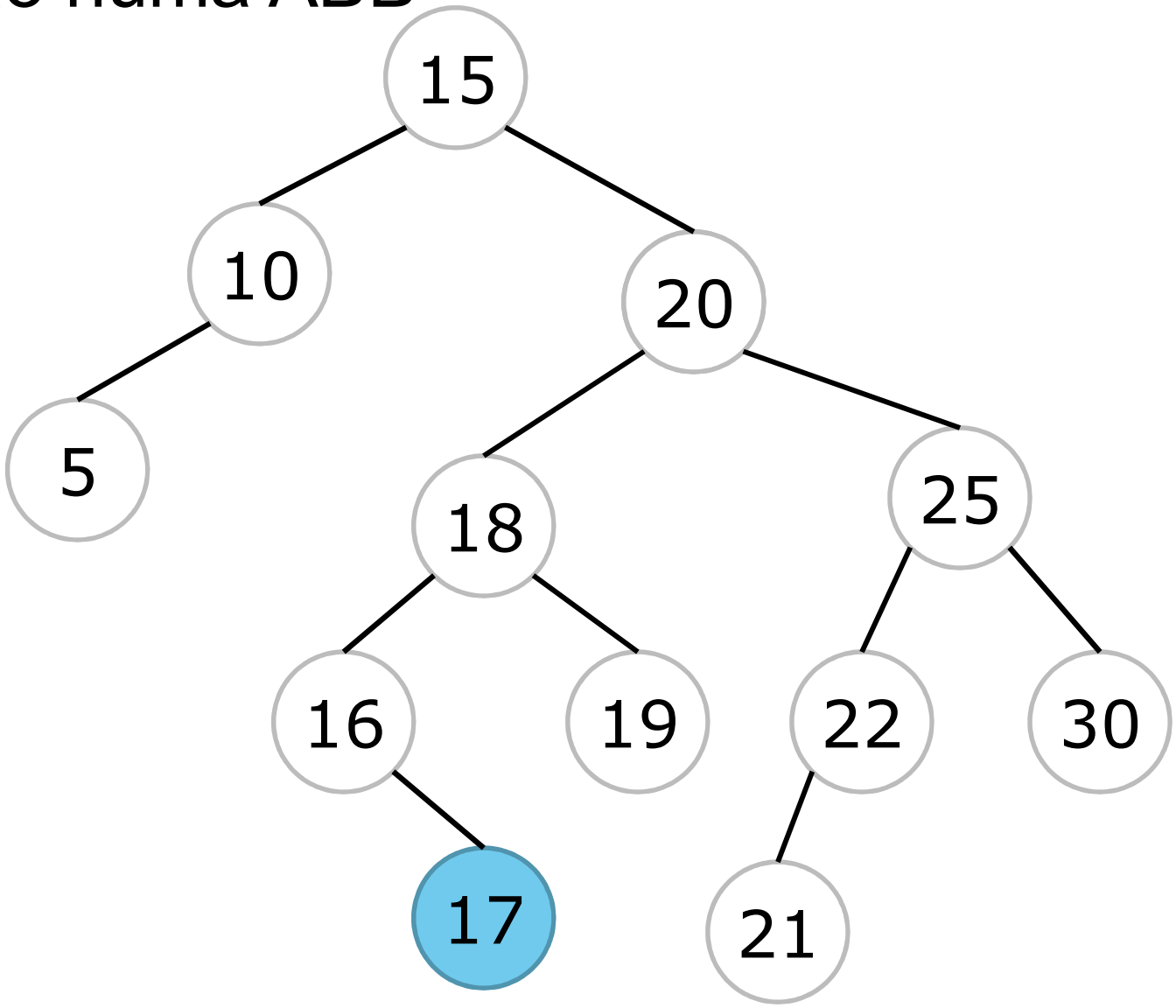
- É o nó mais à esquerda da árvore

1. Começando pelo nó raiz
2. Se a árvore for vazia retorne NULL
3. Caso contrário, caminhe sempre à esquerda enquanto o filho esquerdo não for NULL

Inserção numa ABB



Inserção numa ABB



Inserção numa ABB

```
Mapa* insere (Mapa* r, int chave, tdados *dados);
```

Inserção recursiva numa ABB

- Faça uma função auxiliar para criar um nó

```
static Mapa* cria_no (int c, tdados* d) {
       Mapa* no = (Mapa*) malloc(sizeof(Mapa));
       no->chave = c;
       no->dados = d;
       no->esq =  no->dir = NULL;
       return no;
}
```

Inserção recursiva numa ABB

```
Mapa* insere (Mapa* r, int c, tdados *dados){
   if (r==NULL)
       return cria_no(c, dados);
   else if (val < r->chave)
       r->esq = insere(r->esq,c,dados);
   else  /* if (val > r->chave) */ {
       r->dir = insere(r->dir,c,dados);
   }
   return r;
}
```

Inserção iterativa numa ABB

```
Mapa* insere_iterativa (Mapa* r, int val,
tdados *dados);
```

1. Se a árvore for vazia, então crie um nó e retorne
2. Senão, começe a busca pelo nó raiz,
   desça na árvore mantendo o nó anterior (pai)
3. Enquanto o nó não for **NULL** ou não contiver a chave dada:
   1. Se a chave do nó for **maior** que a chave dada, vá para o filho à **direita**
   2. Se a chave do nó for **menor** que a chave dada, vá para o filho à **esquerda**

Inserção iterativa numa ABB

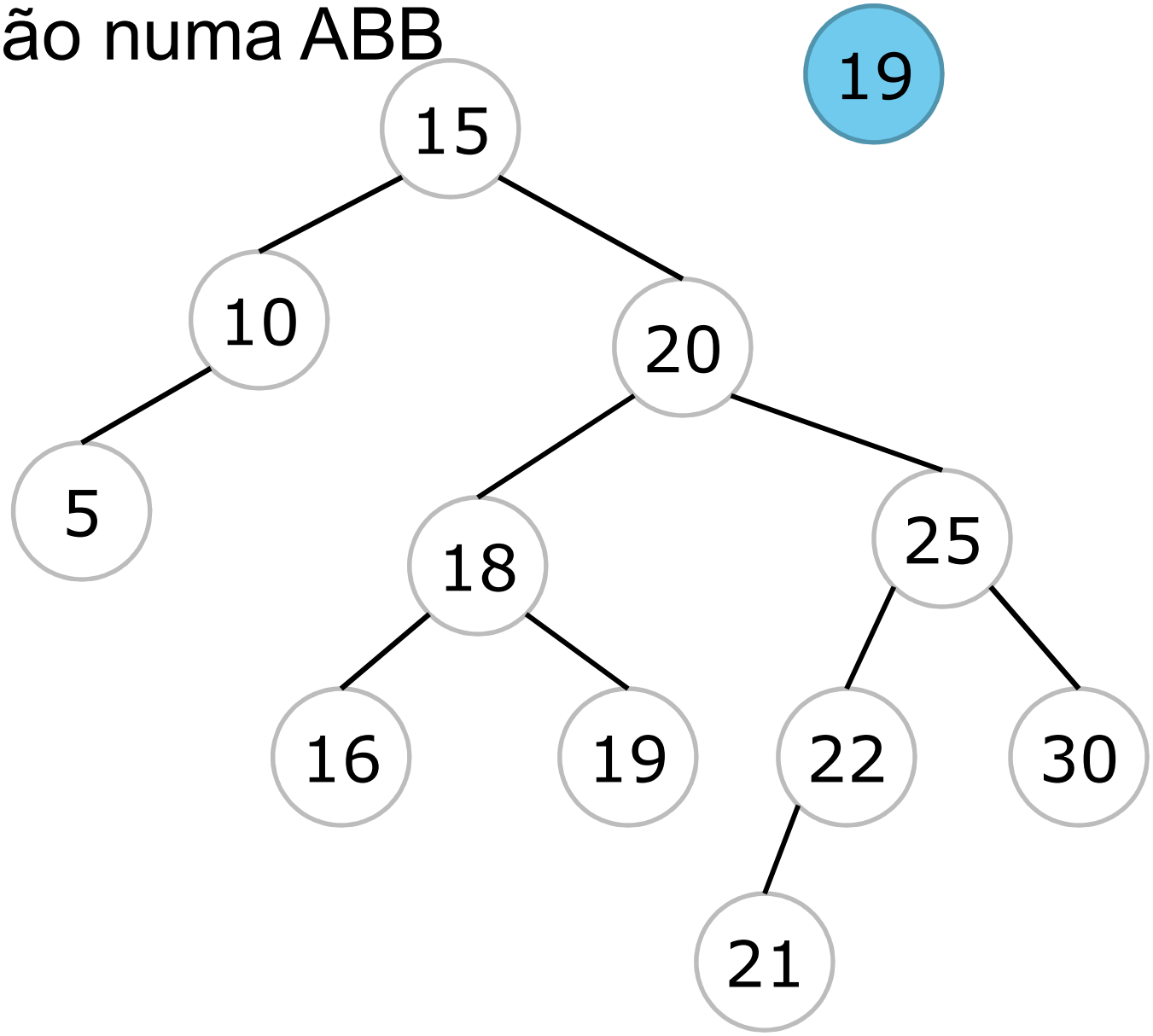
- A fazer...

Remoção de um nó de uma ABB

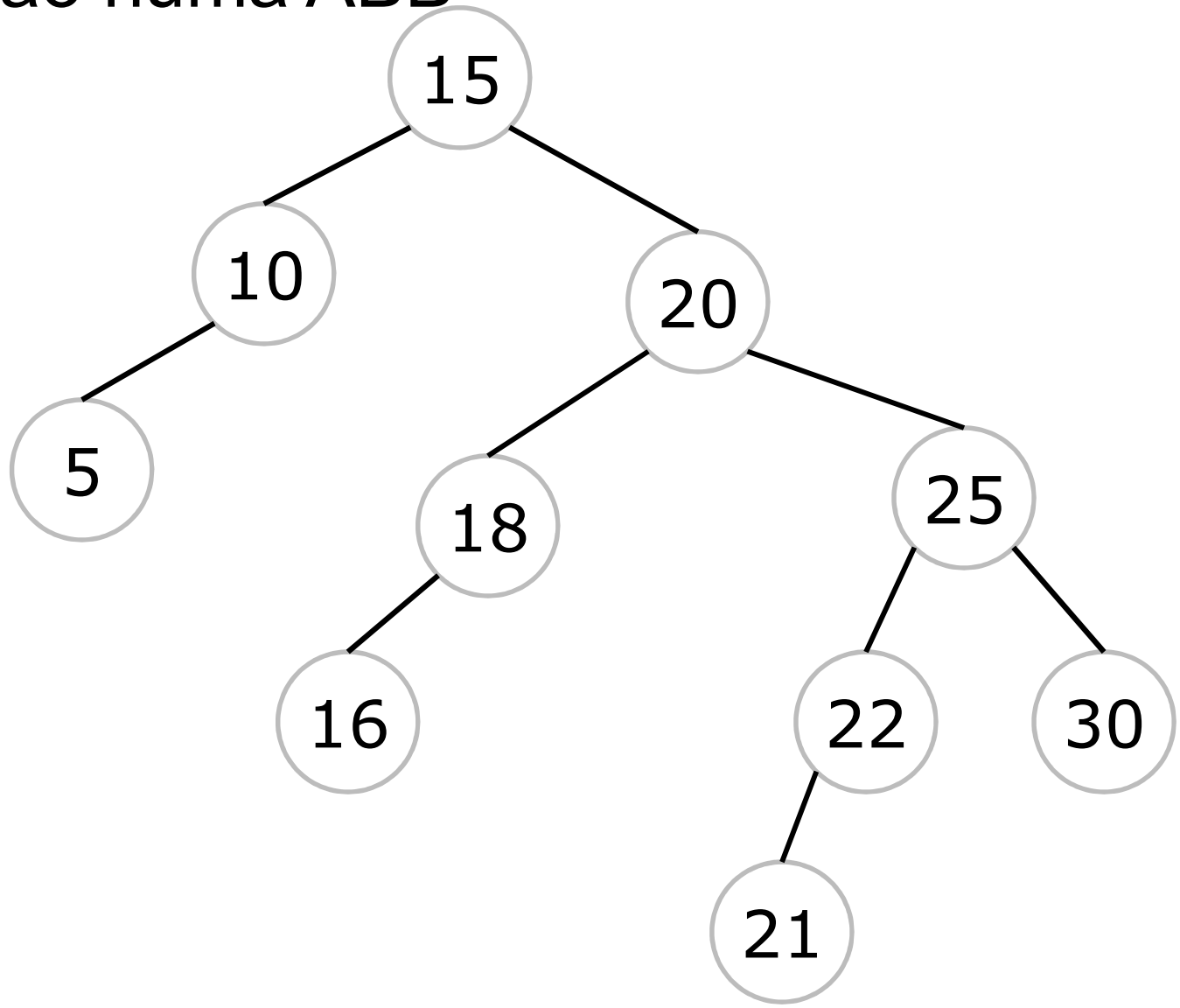
- Três casos:

1. Nó folha
2. Nó possui uma sub-árvore
3. Nó possui duas sub-árvores

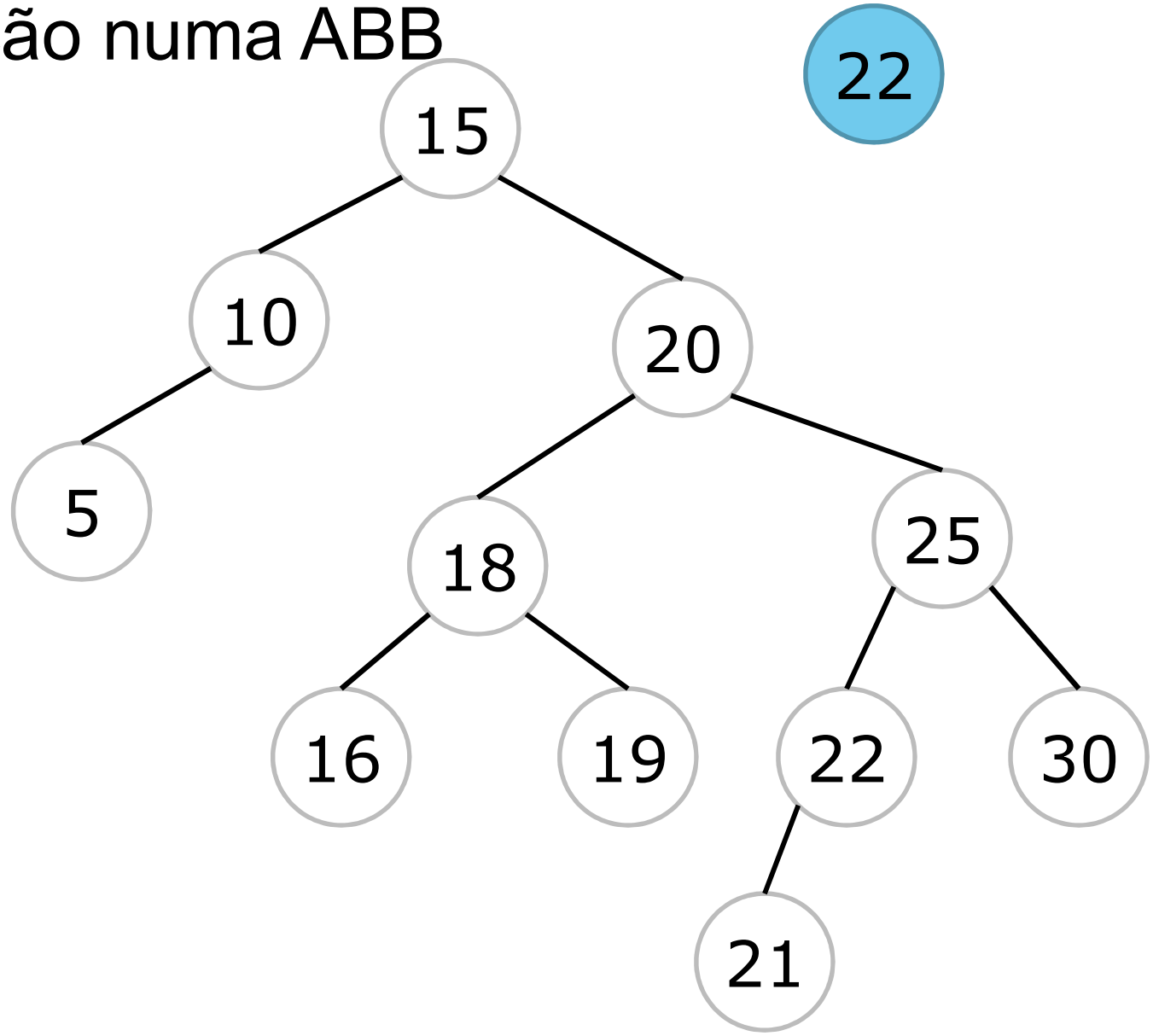
Remoção numa ABB



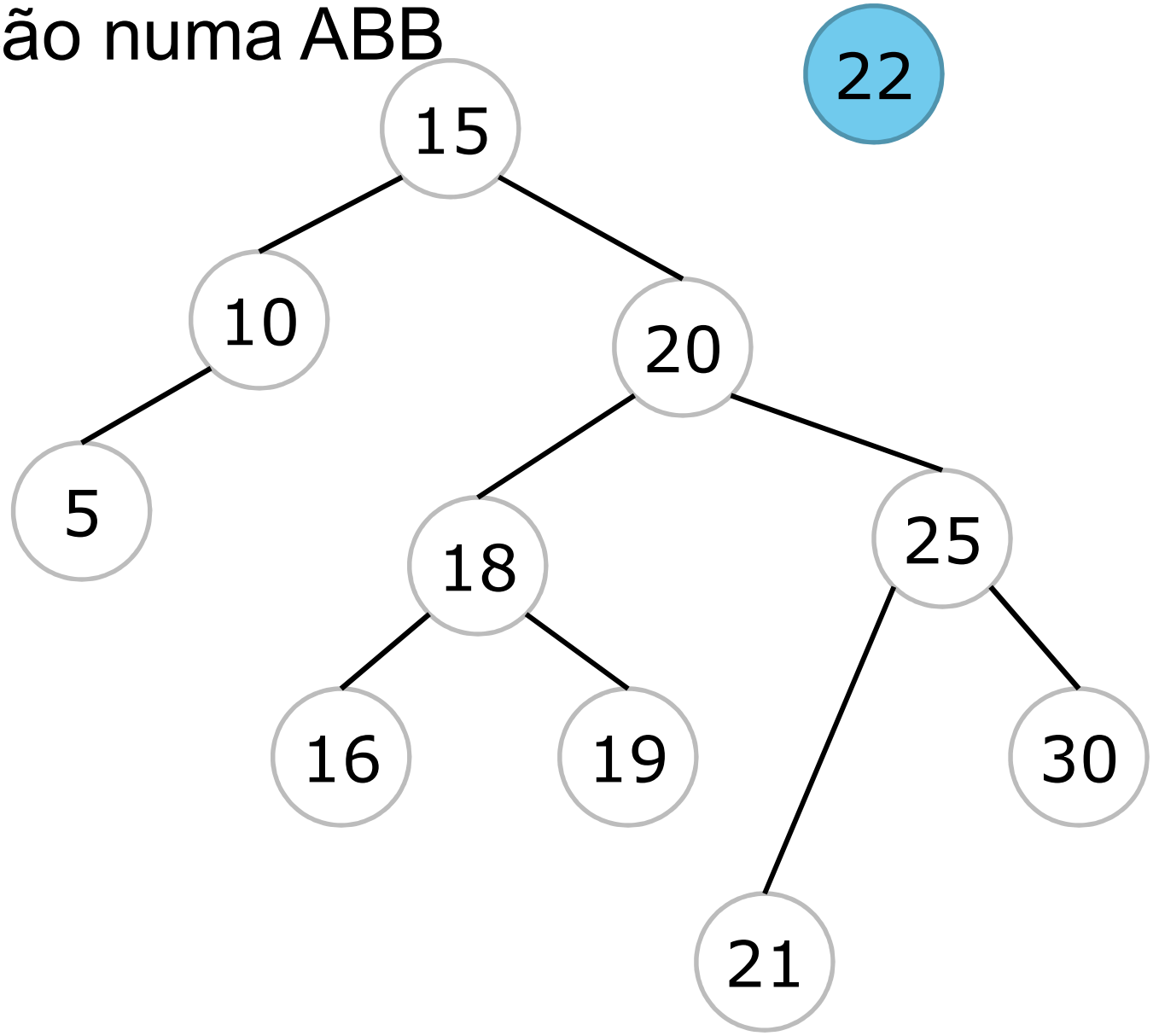
Remoção numa ABB



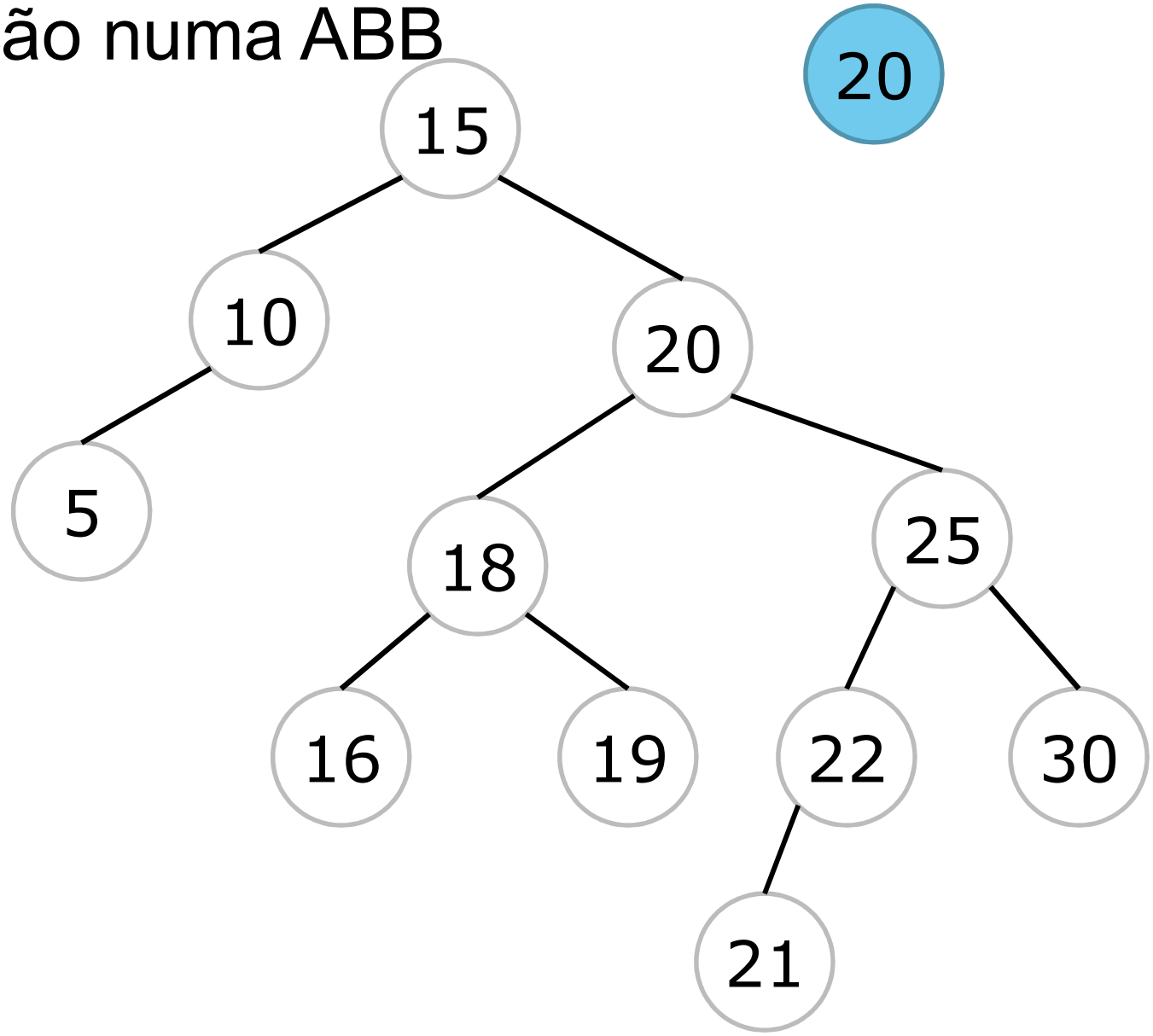
Remoção numa ABB



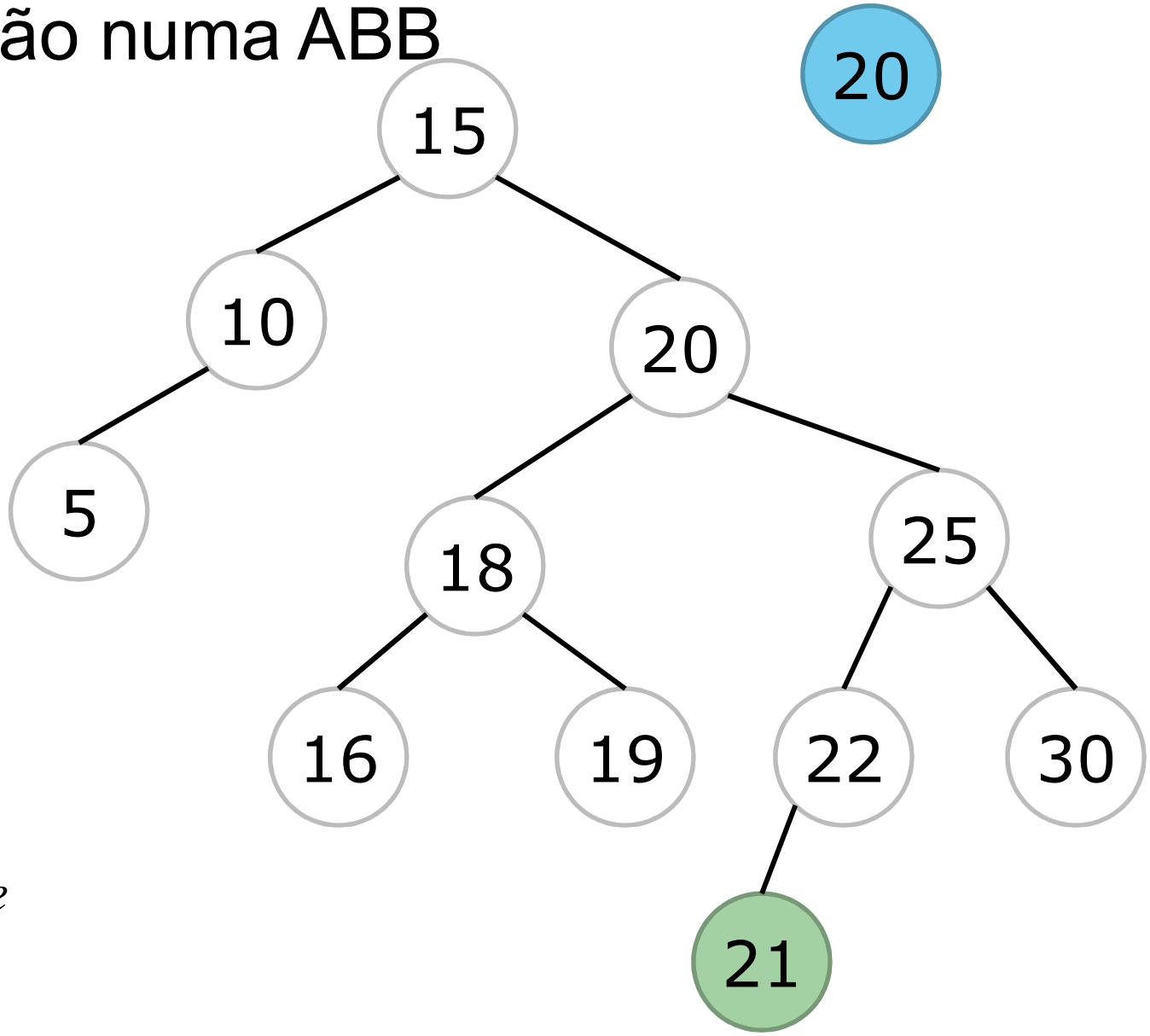
Remoção numa ABB



Remoção numa ABB

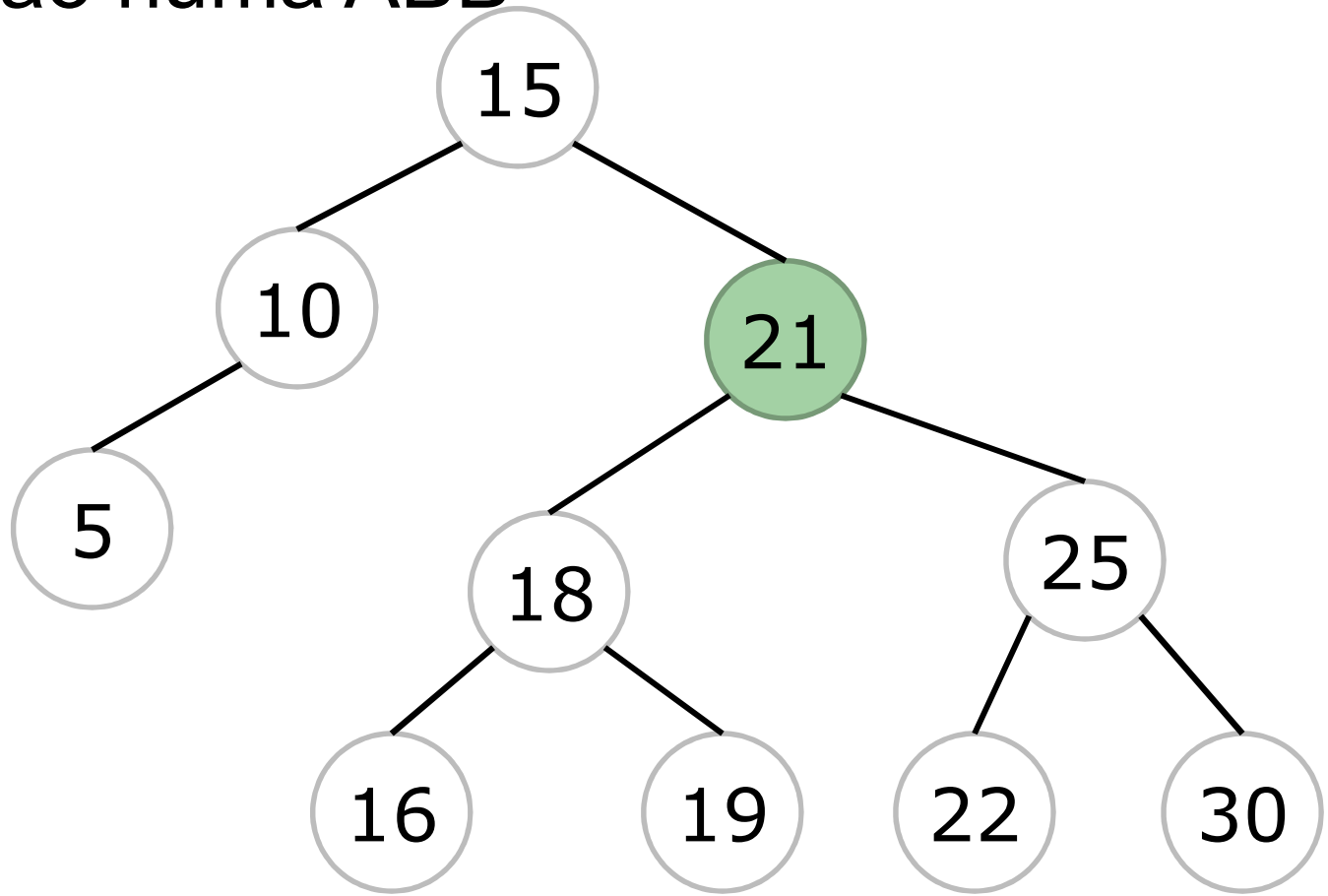


Remoção numa ABB



Quem é o sucessor de 20?

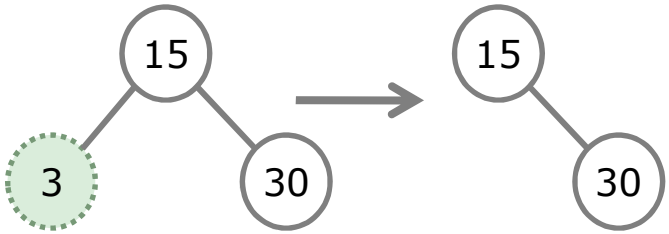
Remoção numa ABB



Remoção de um nó de uma ABB

- Três casos:

1. nó folha
   - simplesmente elimina o nó
2. nó possui uma sub-árvore
3. nó possui duas sub-árvores



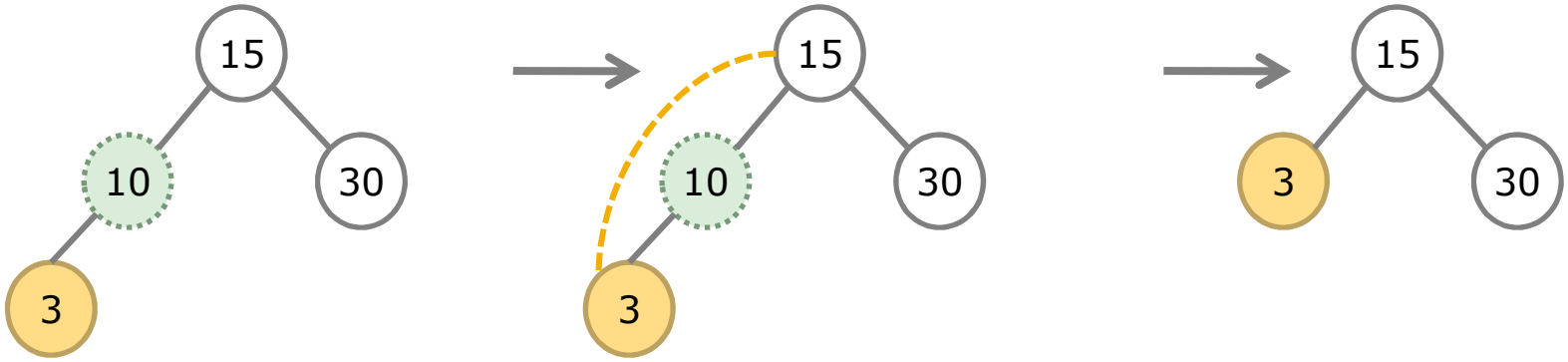
Remoção de um nó de uma ABB

- Três casos:

1. nó folha

2. nó possui uma sub-árvore [dois subcasos: sae, sad]
   - promove a sub-árvore

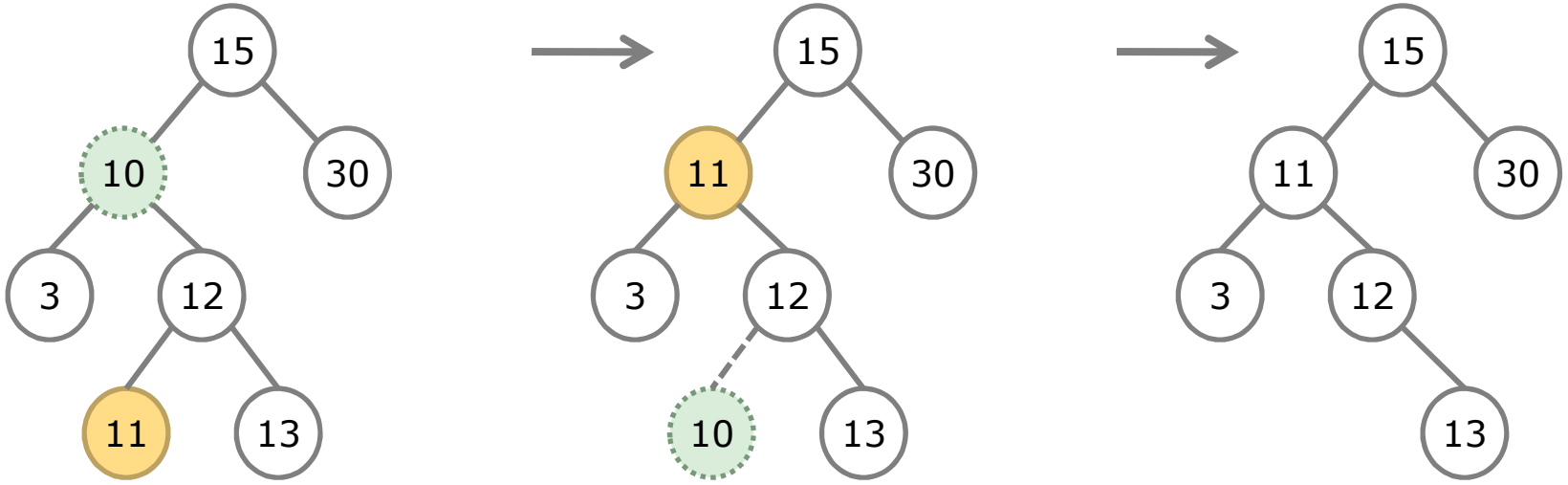
3. nó possui duas sub-árvores



Remoção de um nó de uma ABB

- Três casos:

1. nó folha
2. nó possui uma sub-árvore
3. nó possui duas sub-árvores
    1. coloque a informação do sucessor no nó
    2. remova o sucessor

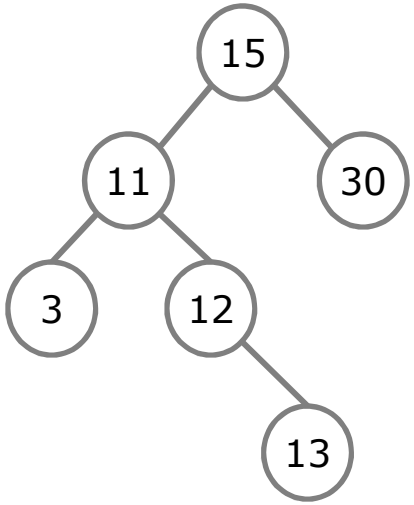


Remoção de um nó numa ABB

1. Ache o nó a ser removido
2. Se ele tiver um ou menos filhos,
   faça a ligação avô-neto
3. Se ele tiver dois filhos,
   procure o sucessor,
   troque a info do nó pela do seu sucessor.
   Apague o sucessor.

Remoção de um nó numa ABB

O sucessor é sempre o nó de menor chave da sub-arvore à direita

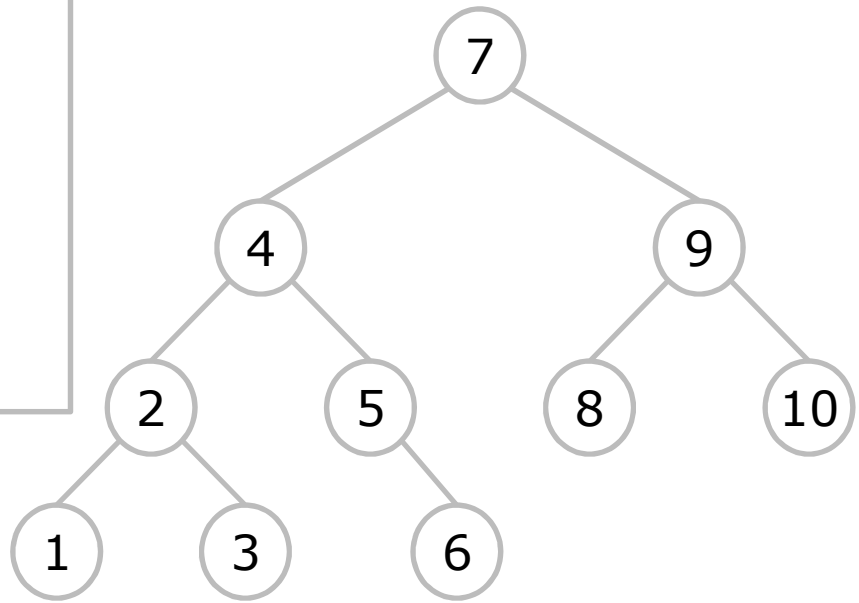


```
Mapa* retira (Mapa* r, int chave){  ESBOÇO
   Mapa *sucessor, *temp;

   if (r == NULL) return NULL;
   else if (chave < r->chave)
      r->esq = retira(r->esq, chave);
   else if (chave > r->chave)
      r->dir = retira(r->dir, chave);
   else {           /* achou o nó a remover */
      if (r->esq == NULL && r->dir == NULL) { /* nó sem filhos */
          free (r); r = NULL;
      }
      else if (r->esq == NULL) {/* nó só tem filho à direita */
         Mapa* t = r; r = r->dir; free (t);
      }
      else if (r->dir == NULL) {/* só tem filho à esquerda */
         Mapa* t = r; r = r->esq; free (t);
      }
      else {/* nó tem os dois filhos: busca o sucessor */
         sucessor = r->dir;
          …
      }
   }
   return r;
}
```

balanceamento

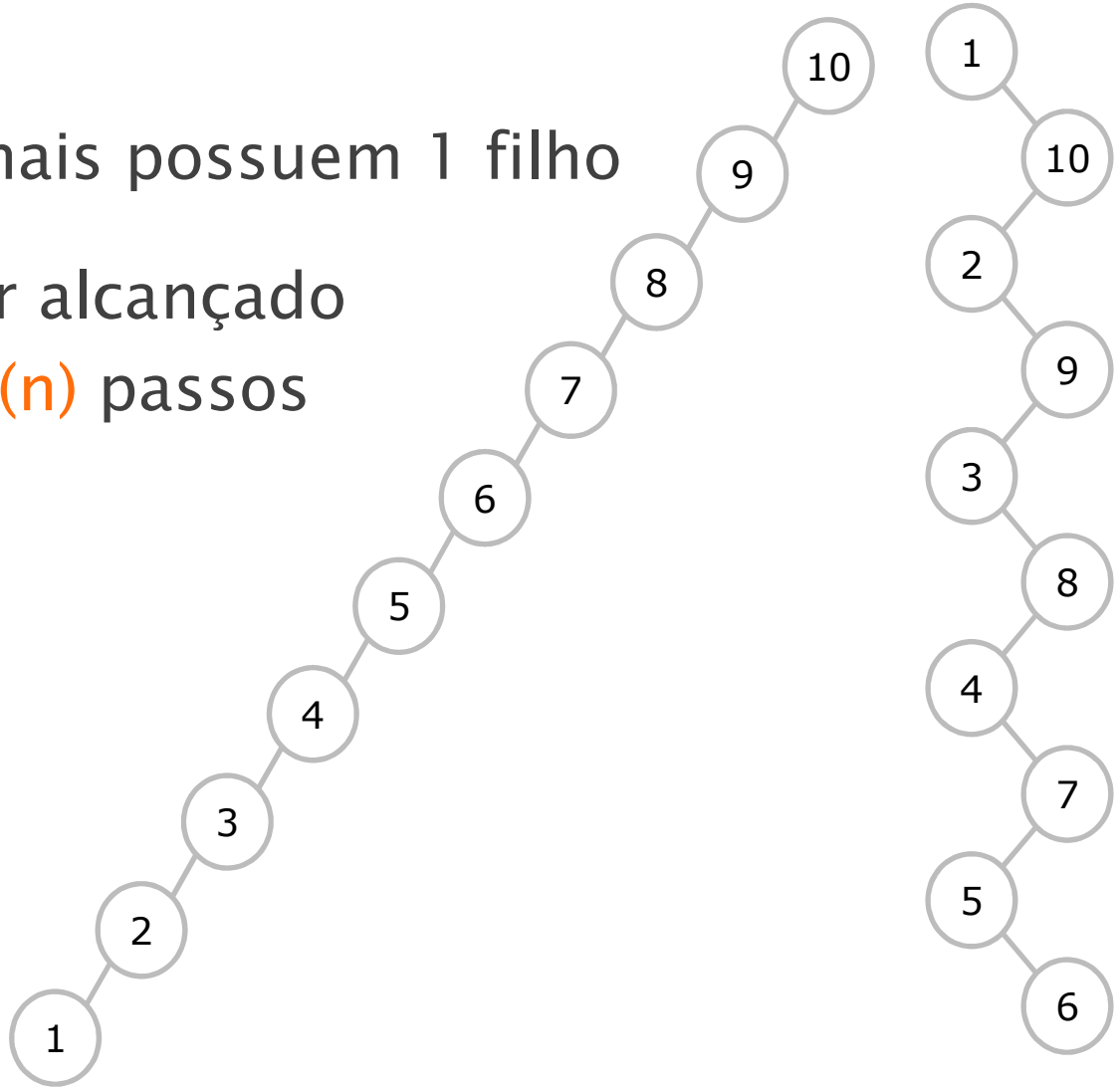
```
Mapa*a;
a = cria_vazia();
a = insere (a,7,_);
a = insere (a,4._);
a = insere (a,9._);
a = insere (a,2._);
a = insere (a,5,_);
a = insere (a,6,_);
a = insere (a,1,_);
a = insere (a,8,_);
a = insere (a,3,_);
a = insere (a,10,_);
```



Árvore binária de busca degenerada

todos nós não terminais possuem 1 filho

qualquer nó pode ser alcançado
a partir da raiz em O(n) passos



Árvore binária de busca balanceada

$|he-hd| \leq 1$

- he = altura da sub-árvore esquerda
- hd = altura da sub-árvore direita

qualquer nó pode ser alcançado a partir da raiz em O(log(n)) passos

(quase) todos os nós não terminais têm dois filhos