Aluno(a):\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ matrícula:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1a) | 2.0 |  |
| 2a) | 2.0 |  |
| 3a) | 3.0 |  |
| 4a) | 3.0 |  |
|  |  |  |

1. A prova é individual e sem consulta.
2. A interpretação faz parte da questão.
3. O tempo de prova é 1:30 h.
4. As respostas devem seguir as questões.
5. Caso precise de rascunho use o verso da folha.
6. Caso parte da resposta esteja no verso, indique claramente este fato.
7. **(2.0 pontos)** 
   1. **(1.0 ponto)** Considere o grafo ponderado não direcionado abaixo. Usando Kruskal, mostre qual é a árvore geradora de custo mínimo. Indique em que ordem as arestas foram consideradas.
   2. **(1.0 ponto)** Descreva uma condição suficiente simples para que a árvore geradora de custo mínimo seja única. Explique sua resposta.



Resp.:

a)

Ordem das arestas

(B,F)

(D,E)

(I,J)

(A,G)

(E,I)

(F,G)

(F,J)

(C,E)

(I,H)

b) Se os pesos das arestas forem todos diferentes, então a árvore geradora será única. De fato, a cada passo, o algoritmo de Kruskal só terá uma aresta a escolher: a aresta de menor peso que une duas árvores na floresta, que é única. Logo, a árvore geradora será única.

**2) (2.0 pontos)**

* 1. **(1.0 ponto)** Descreva a diferença entre as árvores B e B+. Por que a árvore B+ é normalmente preferida como estrutura de acesso a arquivos de dados? Explique sua resposta.
  2. **(1.0 ponto)** Qual o número mínimo de chaves de uma árvore B de ordem *m* (ou seja, todo nó tem no máximo *m* filhos) com altura *h* (ou seja, com *h*+1 níveis)? Explique sua resposta.

Resp.:

a) Nas árvores B+, os nós internos possuem apenas chaves e as folhas possuem chaves e dados. Em uma arvore B, todos os nós possuem chaves e dados. Além disto, as folhas de uma árvore B+ são tipicamente encadeadas. As árvores B+ são estão preferidas por duas razões:

1) Os nós internos são menores do que nas árvores B, acarretando menos dados a transferir ao navegar pela árvore para responder a uma consulta por valor de chave.

2) Dados que as folhas sejam encadeadas, é possível responder a uma consulta por intervalo de chave [K1,K2] de forma eficiente, passando da folha que contém K1 para as folhas seguintes até encontrar a chave K2.

b) A raiz tem no mínimo 1 chave e 2 filhos. Todos os nós internos tem no mínimo ⎡m/2⎤ filhos e (⎡m/2⎤ -1) chaves. Todas as folhas tem no mínimo (⎡m/2⎤ -1) chaves. Logo, o número mínimo de chaves será:

k = 2 \* ⎡m/2⎤h -1

De fato, o número de chaves é dados por:

k = 1 + (⎡m/2⎤ -1)\*(2 + 2\*⎡m/2⎤ + 2\*⎡m/2⎤2 +...+ 2\*⎡m/2⎤(h-1))

= 1 + (⎡m/2⎤ -1)\*2\*(1 + ⎡m/2⎤ + ⎡m/2⎤2 +...+ ⎡m/2⎤(h-1))

= 1 + (⎡m/2⎤ -1)\*2\*()

= 1 + (⎡m/2⎤ -1)\*2\*

= 1 + 2\*(⎡m/2⎤h-1)

= 2\*(⎡m/2⎤h) - 1

**3)** **(3.0 pontos)**

a) **(1.0 ponto)** Insira a chave 132 na árvore B de ordem 4 (ou seja, todo nó tem nó máximo 4 filhos e 3 chaves) abaixo:

100

50 75 120 200

10 40 60 70 80 90 110 115 130 135 140 220 230 240

Descreva, passo a passo, todas as modificações sofridas, redesenhando apenas a parte da árvore modificada a cada passo.

b) **(2.0 ponto)** Remova a chave 132 da árvore B de ordem 3 (ou seja, todo nó tem nó máximo 3 filhos e 2 chaves) abaixo:.

110

50 132

10 60 115 135

Descreva, passo a passo, todas as modificações sofridas, redesenhando apenas a parte da árvore modificada a cada passo.

Resp.:

(a)

100

50 75 120 200

10 40 60 70 80 90 110 115 130 132 135 140 220 230 240

100

50 75 120 200

10 40 60 70 80 90 110 115 132 220 230 240

130 135 140

100

50 75 120 132 200

10 40 60 70 80 90 110 115 130 135 140 220 230 240

b) Substitua 132 pela sua sucessora 135.

110

50 135

10 60 115 132

Remova 132.

110

50 135

10 60 115

Concatene o nó contendo 115 com o nó vazio e transfira a chave do pai.

110

50

10 60 115 135

Concatene o nó contendo 50 com o nó vazio e transfira a chave do pai.

50 110

10 60 115 135

Remova a raiz.

50 110

10 60 115 135

**4) (3.0 pontos)** Considere o grafo ponderado não direcionado abaixo.

a) **(1.0 ponto)** Liste os nós na ordem que serão visitados se for realizada uma busca em amplitude (breadth-first search) começando pelo nó B. Assuma que os vizinhos de um nó são visitados em ordem alfabética. Mostre todos os estados da estrutura de dados durante o processamento do algoritmo e escolha uma estratégia otimizada para atualizar esta estrutura.



1

2

3

9

b) **(2.0 pontos)** Usando o algoritmo de Dijkstra, compute o caminho mínimo de C a G. Mostre todos os estados da estrutura de dados durante o processamento do algoritmo.

Resp.:

(a)

Nó visitado / Fila

B ACF

A CFG - B já foi visitado

C FGE - F não precisa ser incluído novamente

- B já foi visitado

F GE - E e G não precisam ser incluídos novamente

- B já foi visitado

G E - A e F já foram visitados

E D - C e F já foram visitados

D

Ordem: B A C F G E D

(b)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Passos  / Nós | 0 | Corrente  / não vis | 1 | Corrente  / não vis | 2 | Corrente  / não vis | 3 | Corrente  / não vis | 4 | Corrente  / não vis | 5 | Corrente  / não vis | 6 | Corrente  / não vis | 7 |
| A | ∞ | x | ∞ | x | ∞ | x | ∞ | x | ∞ | x | 9 | x | 8 | A | 8 |
| B | ∞ | x | 5 | x | 5 | x | 5 | x | 4 | B | 4 |  | 4 |  | 4 |
| C | 0 | C | 0 |  | 0 |  | 0 |  | 0 |  | 0 |  | 0 |  | 0 |
| D | ∞ | x | ∞ | x | 2 | D | 2 |  | 2 |  | 2 |  | 2 |  | 2 |
| E | ∞ | x | 1 | E | 1 |  | 1 |  | 1 |  | 1 |  | 1 |  | 1 |
| F | ∞ | x | 3 | x | 3 | x | 3 | F | 3 |  | 3 |  | 3 |  | 3 |
| G | ∞ | x | ∞ | x | ∞ | x | ∞ | x | 6 | x | 6 | G | 6 |  | 6 |

O caminho mínimo de C a G é (C, E, F, G) de custo 6.