Acwing 3195. 有趣的数

基于数学推导的快速解法,10ms AC

题目详情



输入格式

输入只有一行,包括恰好一个正整数 n。

输出格式

输出只有一行,包括恰好 n 位的整数中有趣的数的个数除以 $10^9 + 7$ 的余数。

数据范围

 $4 \le n \le 1000$

输入样例:

4

输出样例:

3

解题思路

- 状态机
 - Acwing题解区基本是这个思路
 - 我觉得很好,如果不会状态机,一定要学一下
- 枚举 + 数学推导
 - 不过我的第一反应是枚举,而且结果非常不错,代码十分简洁(核心代码就三行),性能很高 O(n)
 - 本文稿主要讲解枚举思路,状态机思路可以访问: 动态规划 + 代码注释 AcWing https://www.acwing.com/solution/content/35638/

3195. 有趣的数

Ⅲ 题目

: 提交记录

■ 讨论

■ 题解

我们把一个数称为有趣的, 当且仅当:

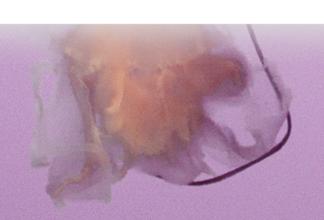
- 1. 它的数字只包含 0, 1, 2, 3,且这四个数字都出现过至少一次。
- 2. 所有的 0 都出现在所有的 1 之前, 而所有的 2 都出现在所有的 3 之前。
- 3. 最高位数字不为 0.

因此,符合我们定义的最小的有趣的数是 2013。

除此以外, 4位的有趣的数还有两个: 2031和 2301。

请计算恰好有n位的有趣的数的个数。

由于答案可能非常大,只需要输出答案除以 $10^9 + 7$ 的余数。

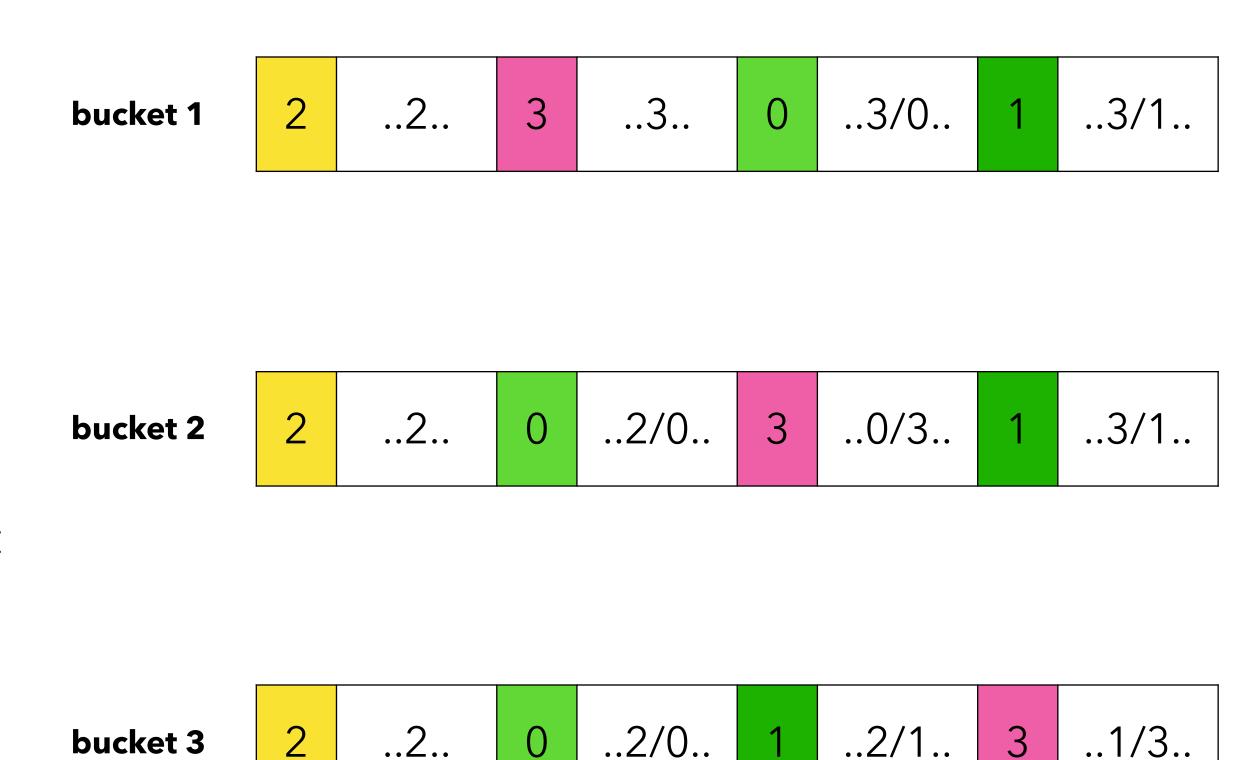


枚举解法

- 枚举的核心就是暴力确定任何一种可能出现的情形,并尽可能地降低时间复杂度。
 幸运的是,这道题,两个性质都满足。
- 枚举不能有遗漏,所以首先要考虑怎么枚举能够涵盖所有的可能,或者更准确地, 先对枚举的情形进行分类,把各种情形放入一个个 bucket 里,然后一个一个 bucket 的汇总。那么,我们的 bucket 怎么选取呢?
- 可以考虑**每个字符第一次出现的位置**,见图右。这样一共就有三种可能,准确地说 3 的位置仅有三种可能:在 0 和 1 之前、在 0 和 1 之间、在 0 和 1 之后。
- 但是,如果我们看每个区间内值的可能,会发现,**除了每种字符第一次出现的单元格外,其他的单元格内,在 0 之前都只有一种可能,在 0 之后都会有两种可能。**
- 这是个非常重要的信息,也就是说,给定了0、1、3首次出现的位置后,该 bucket 对应的所有情形一共就是 2^k ,其中 k 是位于0后面除去首次出现字符的剩余单元格数。
- 于是乎,我们可以合并 bucket 2 和 bucket 3,只考虑 3 在 0 前和 3 在 1 后的两种可能,并很快就能写出数学推导公式。
- 记 0 首次出现的位置为 k (下标从0开始) ,则 $k \in [1, n-2]$,因为至少有一个 1 在 0 之后。接下来,bucket 1 的数量有 $(k-1) \times (n-1-k)$ (组合思想),bucket 2 和 bucket 3 的数量合计有 $(n-1-k) \times (n-2-k)$ (排列思想),所以对于任意 k,所有数字的组合就是

$$f(k) = (k-1) \times (n-1-k) \times 2^{n-k-2} + (n-1-k) \times (n-2-k) \times 2^{n-k-3}$$
$$= (n-1-k) \times 2^{n-k-3} \times (n+k-4), let K = n-k-2, K \in [0, n-3]$$
$$= (K+1) \times 2^{K-1} \times (2n-k-6)$$

• 当 K = 0 时,f(k) = n - 3,这可以作为我们程序中 ans 的初始值,然后 K 从1开始 递增,并使用一个 m 变量记录 2^{K-1} 项,递推以免去使用快速幂。



枚举的程序实现

```
1 #include "cstdio"
   const int M = 1e9 + 7;
   int main()
        int n;
        scanf("%d", & n);
        int ans = n - 3;
        long long m = 1;
10
        for(int k=1; k \le n-3; k++)
            ans += (k + 1) * (2 * n - 6 - k) * m % M,
11
12
           ans ‰ M,
13
            m \ll 1
14
            m %= M;
15
        printf("%lld", ans);
16 }
17
```

