Data Science 2 (Wintersemester 23/24)
Prof. Dr. Mark Trede
Fabian Apostel B. Sc.
Daniel Stroth B. Sc.

Lösung Hausaufgabe 2

Aufgabe 1

Ein Kunde einer Bank will einen Kredit haben. Der Kredit soll 1 Mio. Euro betragen, über ein Jahr laufen und am Ende des Jahres getilgt werden. Die Bank stellt Nachforschungen über die Bonität des Kunden an und erfährt,

- dass der Kunde mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% Zinsen und Tilgung zahlt,
- dass der Kunde mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% weder Zinsen noch Tilgung zahlt,
- dass der Kunde mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% zwar keine Zinsen zahlt, aber einen Betrag von X tilgt, wobei X eine stetige Zufallsvariable ist (in Mio. Euro) mit Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 2x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Welchen Zinssatz müsste die Bank fordern, damit sie eine erwartete Rendite von 6% erzielt?

Lösung zu Aufgabe 1

Wir definieren folgende Ereignisse:

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{Der Kunde zahlt Zinsen und Tilgung}\} \\ B &:= \{\text{Der Kunde zahlt weder Zinsen noch Tilgung}\} \\ C &:= \{\text{Der Kunde zahlt die Zinsen nicht, tilgt aber den Betrag } X\} \end{aligned}$$

Wobei X eine Zufallsvariable mit der Dichtefunktion $f_X(x)$ ist.
Aus dem Aufgabentext wird dann klar, dass $P(A) = 0.7, P(B) = 0.1$ und $P(C) = 0.2$. Sei i der Zins, den der Kunde zahlen soll. Wenn U die Zufallsvariable ist, die den Umsatz der Bank beschreiben soll, so ergibt sich für die Zufallsvariable R, die die Rendite

beschreiben soll $R = \frac{U}{1\text{Mio.}}$. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass der Kredit die Höhe 1 hat, womit dann gilt $R = \frac{U}{1} = U$. Es ergibt sich folgende Rechnung

$$\begin{aligned}
1 + 0.06 = 1.06 &= E(R) \\
&= E(U) \\
&= P(A) \cdot 1 \cdot (1+i) + P(B) \cdot 0 + P(C) \cdot E(X) \\
&= 0.7 \cdot 1 \cdot (1+i) + 0.1 \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \,\mathrm{d}\, x \\
&= 0.7 \cdot 1 \cdot (1+i) + 0.1 \int_0^1 x \cdot 2x \,\mathrm{d}\, x \\
&= 0.7 \cdot 1 \cdot (1+i) + 0.1 \int_0^1 2x^2 \,\mathrm{d}\, x \\
&= 0.7 \cdot 1 \cdot (1+i) + 0.1 \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 \\
&= 0.7 \cdot 1 \cdot (1+i) + 0.1 \frac{2}{3} \\
&= 0.7 + 0.7i + \frac{2}{30}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man nun nach i auflösen und erhält das Ergebnis $i = \frac{1.06 - 0.7 - \frac{2}{30}}{0.7} \approx 0.4190$.

Aufgabe 2

Das Intervall $[0, 2]$ werde in zwei Teile zerlegt, indem in $[0, 1]$ zufällig (gemäß der Rechtecksverteilung) ein Punkt markiert wird. Sei X das Längenverhältnis $\frac{l_1}{l_2}$ der kürzeren Teilstrecke l_1 zur längeren Teilstrecke l_2. Es gilt also $l_1 \in [0, 1]$ und $l_2 \geq 1$ und $l_2 \in [0, 2]$. Berechnen Sie die Dichte $f_X(x)$ von X.
(Hinweis: Berechnen Sie zuerst die Verteilungsfunktion. Beachten Sie dabei, dass Sie innerhalb der Wahrscheinlichkeit P Operationen gemäß der linearen Transformation im Skript durchführen können. Sie dürfen bei abschnittsweise definierten Funktionen die Ableitung auch abschnittweise durchführen.)

Lösung zu Aufgabe 2

Wir wissen das gilt $l_1 \sim \mathrm{U}\,[0, 1]$ und $l_2 = 2 - l_1$. Wir berechnen zunächst die Verteilungsfunktion $F_X(x)$: Da $X \leq 1$ gilt $F_X(x) = 1$ für $x \geq 1$. Außerdem gilt auch $X \geq 0$. Analog gilt für die Verteilungsfunktion dann auch $F_X(x) = 0$ für $x \leq 0$. Für $x \in (0, 1)$

gilt dann:

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X \leq x) \\
&= P(\frac{l_1}{l_2} \leq x) \\
&= P(l_1 \leq x \cdot l_2) \\
&= P(l_1 \leq x \cdot (2 - l_1)) \\
&= P(l_1 + x l_1 \leq 2x) \\
&= P((1+x) l_1 \leq 2x) \\
&= P(l_1 \leq \frac{2x}{1+x}) \\
&= \int_0^{\frac{2x}{1+x}} 1 \,\mathrm{d}\, t \\
&= \frac{2x}{1+x}
\end{aligned}
$$

Die Verteilungsfunktion ist stetig, da $\lim_{x \downarrow 0} F_X(x) = 0$ und $\lim_{x \uparrow 1} F_X(x) = 1$. Nach er Vorlesung können wir also ausnutzen, dass $F_X^{'}(x) = f_X(x)$. Nach der Quotientenregel für Ableitungen gilt dann $f_X(x) = \frac{2}{(1+x)^2}$.

Aufgabe 3

Die Zahl der Bücher, die während eines Jahres aus einer großen Bibliothek verschwinden, kann als $Po(\lambda)$-verteilt angenommen werden. Sie sollen davon ausgehen, dass diese Bibliothek so groß ist, dass diese unendlich viele Bücher enthält. Bei der Jahresendrevision wird das Fehlen eines Buches mit Wahrscheinlichkeit p entdeckt und in diesem Fall unmittelbar ersetzt. Bestimmen Sie die Verteilung der Anzahl fehlender Bücher nach der ersten Revision und zu Beginn der zweiten Revision. Nehmen Sie für diese Aufgabe an, dass X_1 bzw. X_2 die Anzahlen der Bücher, die während des ersten bzw. zweiten Jahres aus der Bibliothek verschwinden, beschreiben. Nehmen Sie außerdem an, dass Y die Anzahl fehlender Bücher nach der ersten Revision und Z die Anzahl fehlender Bücher zu Beginn der zweiten Revision beschreiben. Sie können annehmen, dass X_2 und Y paarweise unabhängig voneinander sind.

a) Stellen Sie Z als Kombination der Zufallsvariablen Y und X_2 dar.

b) Zeigen Sie, dass $Y \sim Po(\lambda(1-p))$ gilt.
(Hinweis: In diesem Aufgabenteil müssen Sie ausnutzen, dass $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Nutzen Sie darüber hinaus den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit für $P(Y = k)$ mit $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.)

c) Nutzen Sie Ihre Ergebnisse aus a) und b), die Verteilung von Z herauszufinden.
(Hinweis: In diesem Aufgabenteil müssen Sie ausnutzen, dass für zwei unabhängige Zufallsvariablen $W_1 \sim Po(\lambda_1), W_2 \sim Po(\lambda_2)$ gilt, dass $W_1 + W_2 \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$.)

Lösung zu Aufgabe 3

a) Es gilt $Z = Y + X_2$.

b) Wir ermitteln die Verteilung von Y. Wenn $X_1 = n$ bekannt ist, so hat Y eine $B(n, 1-p)$-Verteilung. Also gilt nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit für alle $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$:

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=k|X_1=n) \cdot P(X_1=n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} P(Y=k|X_1=n) \cdot P(X_1=n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\cancel{n}!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(1-p)^k}{p^k} \cdot p^n \cdot \frac{\lambda^n}{\cancel{n}!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{(1-p)^k}{p^k} \cdot p^{n-k} \cdot p^k \cdot \lambda^n \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \cdot p^{n-k} \cdot p^k \cdot \lambda^{n-k} \lambda^k \\
&= e^{-\lambda} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \cdot (p \cdot \lambda)^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(p\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&\overset{\text{Indexshift}}{=} e^{-\lambda} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \cdot (p \cdot \lambda)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p\lambda)^{n}}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \cdot (p \cdot \lambda)^k \cdot e^{p\lambda} \\
&= e^{-\lambda(1-p)} \frac{[\lambda(1-p)]^k}{k!}
\end{aligned}$$

Womit $Y \sim Po(\lambda(1-p))$.

c) Nach der Additionseigenschaft für Poissonverteilungen gilt dann für $Z = Y + X_2$, dass $Z \sim Po(\lambda(1-p) + \lambda) = Po(\lambda(2-p))$, wobei wir annehmen, dass Y und X_2 unabhängig verteilt sind.

Aufgabe 4

Sei $X \sim Exp(\lambda)$.

a) In welcher Aufgabe auf Hausaufgabenblatt 21 haben Sie gezeigt, dass $E(X) = \frac{1}{\lambda}$?

b) Berechnen Sie $V(X)$. Sie dürfen hierbei annehmen, dass $\lim_{x\to\infty} -x^2 e^{-\lambda x} = 0$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Auf Blatt 1 Aufgabe 1b) haben wir genau diese Aussage gezeigt.

b) Wir benutzen die Abkürzungsformel $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Da wir $E(X)$ kennen, müssen wir noch $E(X^2)$ berechnen.

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_{0}^{\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_{0}^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x \\
&\overset{\text{partielle Integration}}{=} \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2x\left(-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \underbrace{\lim_{x\to\infty} -x^2 e^{-\lambda x}}_{=0} - \underbrace{(-0^2 e^{-\lambda 0})}_{=0} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x \\
&\overset{\text{Blatt 1 Aufgabe 1b)}}{=} \frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda} \\
&= \frac{2}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Es gilt dann $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

Aufgabe 5

Zeigen Sie für die Zufallsvariable X mit Werten in $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ folgendes:

a) $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$.

b) $E(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)P(X \geq n)$. Benutzen Sie hier die Identität $\sum_{n=1}^{k}(2n-1) = k^2$.

Lösung zu Aufgabe 5

a)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=n}^{\infty} P(X = i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{i} P(X = i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P(X = i) \\
&= E(X)
\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)P(X \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\sum_{i=n}^{\infty}P(X=i) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=n}^{\infty}(2n-1)P(X=i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{i}(2n-1)P(X=i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}P(X=i)\sum_{n=1}^{i}(2n-1) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}P(X=i)i^2 \\
&= E(X^2)
\end{aligned}
$$