1 Grundlagen

1. Eine Münze wird zweimal geworfen. Erscheint mindestens einmal „Zahl“, so wird sie ein drittes Mal geworfen.
   (a) Geben Sie die Ergebnismenge an.
   (b) Wie viele Elemente hat das Ereignis „Die Münze wird dreimal geworfen“?
2. Ein Würfel wird einmal geworfen. Falls die Augenzahl „Sechs“ ist, wird der Würfel noch einmal geworfen. Wird wieder eine „Sechs“ gewürfelt, wird nochmals gewürfelt usw.
   (a) Geben Sie die Ergebnismenge an.
   (b) Wie sieht das Ereignis „Die ersten beiden Augenzahlen sind beide Sechs“ aus?
3. Ein Würfel wird solange geworfen, bis die Summe aller Augenzahlen mindestens vier ist.
   (a) Geben Sie die Ergebnismenge an.
   (b) Wie viele Elemente hat das Ereignis „Die erste Augenzahl ist eine Eins“?
4. Fassen Sie in eigenen Worten kurz zusammen, was mit dem Begriff „Wahrscheinlichkeit“
   (a) in der Umgangssprache und
   (b) in der Wahrscheinlichkeitstheorie gemeint ist.

2 Laplace-Wahrscheinlichkeit

1. x

3 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

1. In einer Bank sind zwei unabhängig voneinander arbeitende Geldautomaten aufgestellt. Es ist bekannt, dass während einer Woche die Ausfallwahrscheinlichkeiten für die beiden Automaten 30% bzw. 20% betragen. Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Laufe einer Woche
   (a) mindestens ein Geldautomat ausfällt?
   (b) beide Geldautomaten ausfallen?
   (c) kein Geldautomat ausfällt?
   (d) genau ein Geldautomat ausfällt?
2. In einer Fabrik für Computer-Chips produzieren drei Maschinen A, B, C. Maschine A produziert 25%, B produziert 35%, und C produziert 40% der Chips. Die Ausschussanteile sind 5%, 4% und 2%. Ein Chip der Gesamtproduktion wird zufällig ausgewählt. Er ist kaputt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er an Maschine A (B,C) produziert wurde?

3. Ein Dienstleistungsunternehmen möchte die Zufriedenheit seiner Kunden untersuchen. Dazu werden an zufällig ausgewählte Kunden Fragebögen verschickt, auf denen die Kunden ankreuzen können, ob sie zufrieden oder unzufrieden sind (mehr Antwortmöglichkeiten soll es zur Vereinfachung nicht geben). Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Kunde zufrieden ist, beträgt 70%. Leider antworten nicht alle Kunden auf den Fragebogen. Die Antwortwahrscheinlichkeit eines angeschriebenen Kunden beträgt 60%, wenn der Kunde zufrieden ist, aber nur 15%, wenn der Kunde unzufrieden ist.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde zufrieden ist, wenn er auf die Fragebogenaktion antwortet? Was bedeutet diese Wahrscheinlichkeit?

   (b) Obwohl nicht alle Kunden auf die Fragebogenaktion antworten, kann man Grenzen angeben, in denen die Wahrscheinlichkeit liegen muss, dass ein Kunde zufrieden ist. Bestimmen Sie diese Grenzen.

4. Die Subprime-Mortgages-Krise oder: Die Grenzen der Diversifikation.

   Im Jahr 2008 wurden die internationalen Finanzmärkte durch eine Krise auf dem Kreditmarkt erschüttert. Die deutsche IKB Bank hat in Folge der Krise einen großen Verlust erlitten. Offenbar war ein Problem die falsche Beurteilung der Risiken eines Kreditportfolios, also eines Bündels von Krediten. Durch Bündelung von Einzelrisiken wird im Allgemeinen eine Diversifikation erreicht, die das Gesamtrisiko senkt. Im Folgenden wird ein stark vereinfachtes Modell eines Kreditportfolios behandelt, an dem die Folgen möglicher Fehleinschätzungen deutlich gemacht werden können. Nutzen Sie R, um die Berechnungen durchzuführen.

   Eine Bank hat 100 Kreditkunden $i = 1, \ldots, 100$. Sei A_i das Ereignis „Der Kredit des Kunden i fällt innerhalb eines Jahres aus“. Wir nehmen vereinfachend an, dass Kredite nur ganz oder gar nicht ausfallen können. Die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls ist $P(A_i) = 0.05$ (das ist ziemlich hoch, es handelt sich also um subprime mortgages).

   Ein wichtiges Instrument für das Management von Kreditportfolios sind CDS (credit default swaps). Mit einer speziellen Version, den „k-th to default swaps“, lassen sich Kreditportfolios absichern. Derartige Swaps sind Versicherungen gegen den Ausfall von k oder mehr Kreditnehmern in einem Kreditportfolio.

   Gehen Sie davon aus, dass die Kreditausfälle der Kunden $i = 1, \ldots, 100$ stochastisch unabhängig voneinander sind. (Wie wir in der nächsten Aufgabe sehen werden, ist das eine kritische Annahme.)

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein einziger Ausfall eintritt?

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau drei Ausfälle eintreten?

   (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zehn Ausfälle eintreten? Mit dieser Wahrscheinlichkeit lässt sich der Wert eines „k-th to default swaps“ (für $k = 11$) ermitteln. Es ist daher wichtig, dass diese Wahrscheinlichkeit korrekt bestimmt wird.

   (d) Wie groß wäre die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zehn Ausfälle eintreten, wenn $P(A_i) = 0.07$ ist (wenn also das Rating falsch gewesen wäre)?

5. Die Krise der Subprime Mortgages oder: Die Grenzen der Diversifikation (Fortsetzung).

   Tatsächlich sind Kreditausfälle nicht unabhängig voneinander. Fällt ein Kredit aus – insbesondere im Bereich der subprime mortgages –, dann liegt das meist ein einem ungünstigen gesamtwirtschaftlichen Umfeld. Damit sind auch die übrigen Kredite anfälliger für einen Ausfall. Um diese Abhängigkeit zu modellieren, erweitern wir unser Modell:

Sei B das Ereignis „Die Konjunktur ist gut (Boom)“ und $\bar{B}$ das Ereignis „Die Konjunktur ist schlecht (Flaute)“. Sei $P(B) = 0.5$. Im Fall eines Booms ist die Wahrscheinlichkeit eines Kreditausfalls gering, $P(A_i|B) = 0.01$ für $i = 1, \ldots, 100$. Im Fall einer Flaute gilt jedoch $P(A_i|\bar{B}) = 0.09$. Die Kreditausfälle seien bedingt unabhängig, d.h. für $i \neq j$ ist

$$P(A_i \cap A_j|B) = P(A_i|B) \cdot P(A_j|B)$$

und analog für $\bar{B}$.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Kredit des Kunden i innerhalb eines Jahres ausfällt?

(b) Zeigen Sie, dass A_i und A_j (für $i \neq j$) nun stochastisch abhängig sind.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zehn Ausfälle eintreten, wenn die Wirtschaft boomt?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zehn Ausfälle eintreten, wenn eine Konjunkturflaute eintritt?

(e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zehn Ausfälle eintreten? Vergleichen Sie das Ergebnis mit der unter 5.c) ermittelten Wahrscheinlichkeit.

Man sieht: Für die Beurteilung des Risikos eines Kreditportfolios ist nicht nur ein exaktes Rating aller Einzelkredite wichtig, sondern auch eine exakte Erfassung der Abhängigkeit der Kreditausfälle. Das Rating eines Kreditportfolios ist daher ungleich schwieriger als das Rating eines Einzelkredits.

6. Informationskaskaden oder: Wie sich eine Mode durchsetzt.

In dieser Aufgabe wird eine stark vereinfachte Version des Artikels „A Theory of Fads, Fashion, Custom, and Cultural Change as Informational Cascades“ von Sushil Bikhchandani, David Hirshleifer und Ivo Welch im Journal of Political Economy, vol. 100, S. 992-1026, 1992, vorgestellt. In dieser Aufgabe liegt die Schwierigkeit darin, dass die Wahrscheinlichkeiten die subjektiven – und möglicherweise unterschiedlichen – Einschätzungen einzelner Personen repräsentieren.

Zwanzig Personen sollen sich nacheinander entscheiden, ob sie ein bestimmtes Verhalten annehmen (eine bestimmte Handlung durchführen, eine bestimmte Mütze aufsetzen, einen bestimmten Studiengang belegen, eine bestimmte medizinische Behandlung anwenden, ...). Sei A_i das Ereignis „Person i nimmt das Verhalten an“, $i = 1, \ldots, 20$.

Leider weiß keine der 20 Personen, ob es nützlich ist, das Verhalten anzunehmen. Sei B das Ereignis „Das Verhalten ist nützlich“. Alle Personen haben anfangs die gleiche „a-priori“ Einschätzung, dass $P(B) = 0.5$ ist.

Jede Person empfängt nun ein „privates Signal“[1] über die Nützlichkeit des Verhaltens. Sei S_i das Ereignis „Person i empfängt das Signal, dass das Verhalten nützlich ist“ und $\bar{S}_i$ das Ereignis „Person i empfängt das Signal, dass das Verhalten schädlich ist“. Es gelte $P(S_i|B) = 0.6$ und $P(S_i|\bar{B}) = 0.4$. Die Signale $S_1, \ldots, S_{20}$ seien bedingt unabhängig voneinander, d.h. $P(S_i \cap S_j|B) = P(S_i|B) \cdot P(S_j|B)$ für $i \neq j$ und analog für $\bar{B}$.

Bis auf die erste Person kann jede Person i beobachten, was die vorhergehenden Personen $1, \ldots, i-1$ getan haben.

[1] Privat bedeutet, dass jede Person nur ihr eigenes Signal kennt. Die empfangenen Signale werden nicht kommuniziert.

Person i nimmt das Verhalten an, wenn sie unter Berücksichtigung aller verfügbaren Informationen (also dem privaten Signal und dem beobachteten Verhalten ihrer Vorgänger) meint, dass die Wahrscheinlichkeit von B mehr als 50% beträgt. Wenn Person i meint, dass die Wahrscheinlichkeit von B kleiner ist als 50%, nimmt sie das Verhalten nicht an. Bei genau 50% wirft sie eine Münze.

(a) Skizzieren Sie den Modellaufbau in Form eines Wahrscheinlichkeitsbaums.

(b) Welche bedingte Wahrscheinlichkeit über das Eintreten von B hat Person 1, wenn S_1 eintritt – also nach dem Empfang eines positiven Signals?

(c) Wie wahrscheinlich ist es, dass Person 1 das Verhalten annimmt (A_1), obwohl es schädlich ist?

(d) Welche bedingte Wahrscheinlichkeit über das Eintreten von B hat Person 2, wenn S_2 und A_1 eintreten?

(e) Wie wahrscheinlich ist es, dass Person 2 das Verhalten annimmt (A_2), obwohl es schädlich ist, wenn zuvor schon Person 1 das Verhalten angenommen hat?

(f) Analysieren Sie nun die Personen 3 und 4.

7. Penalty kicks and mixed strategies

This exercise is based on the article "Professionals Play Minimax" by Ignacio Palacios-Huerta, *Review of Economic Studies* 70 (2003) 395–415; this article is also nicely discussed in the book "Why England Lose" by Simon Kuper and Stefan Szymanski, 2009. The article can be downloaded (password protected pdf) from the internet site of this course.

A soccer penalty kick is a simple game theoretic situation for the kicker (K) and the goalkeeper (G). We assume that the kicker has to decide whether to kick to the right (R) or to the left (L), and that there are no other possibilities than R and L. Similarly, the goalkeeper has to decide whether to delve to the right or left. Players have a natural tendency to kick to one side (usually right-footed players kick to the right and vice versa). We call the kicker's stronger, preferred side the natural side and the other one the unnatural side. To keep the notation more intuitive, and without loss of generality, we assume that the natural side is right. The scoring probabilities (calculated from a large database, but here we assume these probabilities are known constants) depend on the decisions, e.g. if the kicker kicks to his strong side (R) and the goalkeeper delves to the other side (L), then the scoring probability is about 93%.[2]

		Goalkeeper	
		L	R
Kicker	L	0.5830	0.9497
	R	0.9291	0.6992

The best strategy for the kicker is to randomize his kick, i.e. to kick to the left with a certain probability k_L and to the right with $k_R = 1 - k_L$. In the same way, the best strategy for the goalkeeper is to randomize as well (with probabilities g_L and g_R). In game theory, these randomized strategies are called mixed strategies.

[2] The probabilities in the off-diagonal seem counter-intuitive, and have been transposed in the book by Kuper and Szymanski. But the results (even in the book) are in line with the table given here.

(a) Determine the optimal mixed strategies for the kicker and the goalkeeper.

Hints: In equilibrium, the goalkeeper chooses g_L and g_R such that – given the probabilities shown in the table above – the scoring probability for the kicker is the same, no matter if he chooses L or R. Similarly, the kicker chooses k_L and k_R such that the goalkeeper is indifferent between L and R (but remember that success is defined the other way round for the goalkeeper).

(b) Looking at the decisions actually taken by professional soccer players, one finds that goalkeepers delve to the right with probability 57.69% while kickers kick to the right with probability 60.02%. Test if their behavior is compatible with the theoretically optimal mixed strategy. The number of penalty kicks analyzed for the paper (the sample size) was 754 for goalkeepers and 808 for kickers. You may impose restricting assumptions (e.g. as to the sampling mechanism).

4 Zufallsvariablen, Erwartungswert, Varianz

1. Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Träger $T_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.1 & \text{für } x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0.5 & \text{für } x = 6. \end{cases}$$

   (a) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X.

   (b) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von $Y = X^2$.

   (c) Berechnen Sie den Erwartungswert von Y.

   (d) Berechnen Sie die Varianz von Y.

2. Die Dichte einer stetigen Zufallsvariablen X ist

$$f(x) = \begin{cases} x + 0.5 & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Errechnen Sie den Erwartungswert, den Median und die Varianz von X.

3. Bestimmen Sie c so, dass

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{für } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   eine Dichtefunktion wird. Die stetige Zufallsvariable X habe die oben angegebene Dichte.

   (a) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

   (b) Berechnen Sie das 10%-Quantil von X.

4. Von der Verteilungsfunktion F einer Zufallsvariablen X ist bekannt, dass $F(x) = x^2$ für $0 < x < 1$ gilt.

   (a) Welche Werte muss F für $x < 0$, $x = 0$, $x = 1$, $x > 1$ annehmen? Skizzieren Sie die gesamte Verteilungsfunktion F.

   (b) Berechnen Sie die Dichtefunktion von X.

   (c) Errechnen Sie $E(X)$.

(d) Errechnen Sie $Var(X)$.

(e) Errechnen Sie den Median von X.

(f) Bestimmen Sie $P(X = 0.5)$.

5. Bei einer Tombola enthält eine Lostrommel 2000 Lose, von denen 80% Nieten und 20% Gewinnlose sind. 10% der Gewinnlose bringen eine Auszahlung von jeweils 100 Euro, die Auszahlung der übrigen 90% der Gewinnlose beträgt jeweils 10 Euro.

   Wie hoch sind Erwartungswert und die Varianz des Gewinns beim Kauf eines Loses, wenn ein Los 5 Euro kostet?

6. Ein Kunde einer Bank will einen Kredit haben. Der Kredit soll 100 000 Euro betragen, über ein Jahr laufen und am Ende des Jahres getilgt werden. Die Bank stellt Nachforschungen über die Bonität des Kunden an und erfährt, dass das Kreditausfallrisiko bei 10% liegt (d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass der Kunde weder Zinsen noch Tilgung zahlt, ist 10%; mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% wird korrekt zurückgezahlt).

   Welchen Zinssatz muss die Bank fordern, damit sie eine erwartete Rendite von 6% erzielt? Wie hoch ist bei diesem Zinssatz die Varianz der Rendite?

7. Ein Kunde einer Bank will einen Kredit haben. Der Kredit soll 1 Mio. Euro betragen, über ein Jahr laufen und am Ende des Jahres getilgt werden. Die Bank stellt Nachforschungen über die Bonität des Kunden an und erfährt,

   - dass der Kunde mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% Zinsen und Tilgung zahlt,
   - dass der Kunde mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% weder Zinsen noch Tilgung zahlt,
   - dass der Kunde mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% zwar keine Zinsen zahlt, aber einen Betrag von X tilgt, wobei X eine stetige Zufallsvariable ist (in Mio. Euro) mit Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 2x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

   Welchen Zinssatz müsste die Bank fordern, damit sie eine erwartete Rendite von 6% erzielt?

8. Petersburger Paradoxon:[3]

   Ein Spiel heißt fair, wenn der erwartete Gewinn 0 ist. Betrachten Sie folgendes Spiel: Eine Münze wird so oft geworfen, bis zum ersten Mal Zahl erscheint. Wenn schon beim ersten Wurf Zahl erscheint, werden 2 Euro ausgezahlt. Wenn beim zweiten Wurf Zahl erscheint, werden 4 Euro ausgezahlt. Wenn beim dritten Wurf Zahl erscheint, werden 8 Euro ausgezahlt. Allgemein werden 2^i Euro ausgezahlt, wenn beim i-ten Wurf zum ersten Mal Zahl erscheint.

   (a) Wie hoch müsste der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist?

[3] Dieses Paradox wurde von Daniel Bernoulli in dem Aufsatz „Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis", Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Tomus V [Papers of the Imperial Academy of Sciences in Petersburg, Vol. V], 1738, pp. 175-192, behandelt. Eine englische Übersetzung der Arbeit erschien 1954 in: Econometrica, vol. 22, pp. 23-36.

(b) Bernoulli hat argumentiert, dass nicht die Auszahlung eines Spiels, sondern der Nutzen der Auszahlung entscheidend ist. Als Nutzen u einer Auszahlung von x Euro nahm Bernoulli $u(x) = \ln(x)$ an (der Grenznutzen ist also fallend). Wieviel ist jemand mit dieser Nutzenfunktion bereit, für das Spiel zu zahlen?

Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Erwartungswert des Nutzens des Gewinns; dabei können Sie die Gleichheit $\sum_{i=1}^{\infty} i/2^i = 2$ ausnutzen. Ein Wirtschaftssubjekt zahlt für das Spiel maximal einen Einsatz, dessen Nutzen dem Erwartungswert des Nutzens des Gewinns entspricht.

9. Customer Lifetime Value oder Kundenwertrechnung:

Als Lebensdeckungsbeitrag bezeichnet man die Summe aller diskontierten jährlichen Deckungsbeiträge über die gesamte Dauer einer Kundenbeziehung. Die folgende Tabelle zeigt die Kündigungswahrscheinlichkeiten und die jährlichen Deckungsbeiträge eines Kunden. Die Kündigungswahrscheinlichkeiten geben an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass der Kunde nach genau x Jahren kündigt. Vernachlässigen Sie im Folgenden die Abdiskontierung (der Zinssatz sei 0%).

Dauer	Kündigungs-wahrscheinlichk.	jährlicher Deckungsbeitr.
1 Jahr	0.5	-5
2 Jahre	0.0	$+8$
3 Jahre	0.5	-5

(a) Berechnen Sie die erwartete Dauer der Kundenbeziehung.

(b) Berechnen Sie den Lebensdeckungsbeitrag des Kunden, wenn die Dauer der Kundenbeziehung gerade der erwarteten Dauer der Kundenbeziehung entspricht.

(c) Berechnen Sie den erwarteten Lebensdeckungsbeitrag.

10. Sinnloses Jugend-Marketing:

Eine Bank will Jugend-Marketing betreiben. Der Datensatz `jugend.csv` zeigt die einjährigen Deckungsbeiträge von Bankkunden sowie ihre einjährigen Kündigungswahrscheinlichkeiten[4] in Abhängigkeit vom Alter.

(a) Die groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein 15-jähriger Neukunde im Alter von 35 Jahren immer noch Kunde der Bank ist?

(b) Der Diskontierungssatz sei 4%. Wie groß ist der erwartete Lebensdeckungsbeitrag eines 15-jährigen Neukunden? Lohnt sich unter diesen Umständen das Jugendmarketing?

(c) Wie groß ist der erwartete Lebensdeckungsbeitrag eines 40-jährigen Neukunden?

11. Insiderhandel oder: Warum es schlau sein kann zu gucken, was die anderen tun.

Stellen Sie sich vor, Sie seien Market Maker an einer Wertpapierbörse und daher verpflichtet, Liquidität bereitzustellen, d.h. einem Händler Aktien zu verkaufen, wenn er Aktien kaufen möchte, und einem Händler Aktien abzukaufen, wenn er Aktien verkaufen möchte.

[4] Unter der einjährigen Kündigungswahrscheinlichkeit versteht man die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass jemand innerhalb eines Jahres kündigt, der bislang noch nicht gekündigt hat.

Ihnen ist bekannt, dass 10% aller Marktteilnehmer Insider sind. Insider kennen den zukünftigen Aktienkurs K_1, sie werden daher nur handeln, wenn sie ihren Informationsvorteil kapitalisieren können. Die uninformierten Händler (die oft auch Noise-Trader genannt werden) hingegen kaufen und verkaufen unabhängig vom Aktienkurs mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils 50%. Die Händler dürfen nur begrenzte Mengen handeln. Leider können Sie die Insider nicht von den uninformierten Händlern unterscheiden.

Den zukünftigen Aktienkurs kennen Sie als Market Maker nicht. Für Sie ist K_1 eine Zufallsvariable, deren Verteilung zur Vereinfachung

$$P(K_1 = 95) = P(K_1 = 105) = 0.5$$

sei. Der aktuelle Aktienkurs, zu dem Sie als Market Maker kaufen und verkaufen, sei $K_0 = 100$. Die nächste Order, die Sie erhalten, ist eine Kauf-Order.

(a) Revidieren Sie Ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung von K_1 unter Berücksichtigung der Tatsache, dass Sie eine Kauf-Order (und keine Verkauf-Order) erhalten haben. Hinweise: Definieren Sie geeignete Ereignisse und nutzen Sie den Satz von Bayes sowie den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit. Strukturieren Sie Ihre Lösung mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitsbaums.

(b) Welchen Erwartungswert hat (aus Ihrer Sicht als Market Maker) die Zufallsvariable K_1 nach Eingang der Kauf-Order?

12. Unterschiedliche Meinungen oder: Wenn zwei sich nicht einig sind, sollten sie wetten.

Wahrscheinlichkeiten können subjektive Einschätzungen repräsentieren. Betrachten Sie im folgenden zwei Personen, die die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses A unterschiedlich einschätzen. (Um es konkret zu machen: sei A das Ereignis „In einem Monat steht der Dollar höher als heute".) Person 1 glaubt, dass $P_1(A) = 0.9$ beträgt. Person 2 glaubt, dass $P_2(A) = 0.3$.

Beide Personen haben identische Nutzenfunktionen $u(y) = -1/y$, die den Nutzen eines Einkommens in Höhe von y angeben.[5] Beide Personen haben ein sicheres Einkommen von $y_0 = 5$. Da die Personen unterschiedlicher Meinung sind, macht es Sinn, eine Wette zu vereinbaren. Sei X der Betrag $b > 0$, den Person 2 an Person 1 zahlt, wenn A eintritt. Falls $\bar{A}$ eintritt, empfängt Person 2 eine Zahlung von Person 1 (d.h. X ist negativ);

$$X = \begin{cases} +b & \text{wenn } A \\ -b & \text{wenn } \bar{A}. \end{cases}$$

Die Einkommen der beiden Personen sind nun nicht mehr sicher, sondern zufällig. Ebenso sind auch die beiden Nutzen Zufallsvariablen: der Nutzen von Person 1 ist $u(y_0 + X)$, und der Nutzen von Person 2 ist $u(y_0 - X)$.

(a) Berechnen Sie den erwarteten Nutzen der beiden Personen als Funktion von b. Achten Sie auf die richtigen Wahrscheinlichkeiten bei der Berechnung der Erwartungswerte.

(b) Skizzieren Sie die beiden erwarteten Nutzen in Abhängigkeit vom Wetteinsatz b.

(c) Auf welchen Wetteinsatz werden sich die beiden Personen einigen?

[5] Falls Sie in Mikroökonomik die Erwartungsnutzentheorie noch nicht behandelt haben, nehmen Sie die Existenz einer solchen Nutzenfunktion einfach als gegeben hin. Dass negative Nutzenwerte vorkommen, ist unproblematisch. Wichtig ist nur, dass höhere Nutzenwerte besser sind als niedrigere.

13. Dynamische Optimierung oder: Vom Wert des Wartens.

    Diese Aufgabe basiert auf einem einführenden Beispiel des Buches „Investment under Uncertainty" von Dixit und Pindyck, 1994, S. 27f. Sie sollen entscheiden, ob eine Fabrik zur Herstellung eines bestimmten Produkts gebaut werden soll. Die Investition, also der Bau der Fabrik, kostet 1600 Euro. Das Produkt hat heute (in $t = 0$) einen Preis von 200 Euro. In der nächsten Periode ($t = 1$) ändert sich jedoch der Preis des Produkts. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5 steigt er auf 300 Euro und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5 sinkt er auf 100 Euro. Danach bleibt der Preis für alle Zeiten konstant (also für $t = 2, 3, \ldots$). Der Zinssatz sei 10%. Die Fabrik kann jede Periode eine Einheit des Produkts herstellen; die Herstellung verursacht keine Kosten. Die Investition kann nicht wieder rückgängig gemacht werden, wenn sie einmal durchgeführt wurde. (Die teilweise sehr unrealistischen Annahmen dienen allein dazu, den Blick auf den wesentlichen Kern dieses Beispiels zu lenken.)

    (a) Unter dem Nettobarwert (net present value) versteht man die Summe aller abgezinsten erwarteten Kosten und Erlöse. Berechnen Sie den Nettobarwert der Investition. Sollte die Investition durchgeführt werden?

    (b) Eine mögliche Handlungsoption wurde unter (a) ignoriert: Man kann die Entscheidung für oder gegen die Investition aufschieben. Berechnen Sie den Nettobarwert (für $t = 0$), wenn in $t = 0$ abgewartet wird, wie sich der Preis entwickelt, und wenn in $t = 1$ nur dann investiert wird, falls der Preis auf 300 Euro steigt. Fällt der Preis, wird nicht investiert.

14. Jensens Ungleichung:

    Sei X eine Zufallsvariable und g eine konvexe Funktion. Jensens Ungleichung besagt, dass $E(g(X)) \geq g(E(X))$ ist. Illustrieren Sie die Gültigkeit der Ungleichung durch ein einfaches Beispiel mit einer diskreten Zufallsvariable.

5 Spezielle diskrete Verteilungen

1. Ein Würfel wird fünf Mal geworfen. Sei X die Anzahl der Sechsen.

    (a) Wie ist X verteilt?

    (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Sechsen geworfen werden?

    (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als eine Sechs geworfen wird?

2. In einer Computer-Chip-Fabrik soll die Qualitätskontrolle verbessert werden. An einer bestimmten Maschine ist der Ausschussanteil selbst bei optimaler Einstellung 20% (bei nicht optimaler Einstellung ist der Anteil noch höher). Aus der laufenden Produktion werden nun in unregelmässigen Abständen 10 Chips entnommen und geprüft. Bei der letzten Überprüfung ergab sich, dass von den 10 Chips 5 kaputt waren. Würden Sie die Produktion stoppen lassen, um die Maschine neu zu justieren?

3. Das folgende Zitat ist aus R.A. Fisher (1960), *The Design of Experiments*, 7. Aufl., S. 11: "A Lady declares that by tasting a cup of tea made with milk she can discriminate whether the milk or the tea infusion was first added to the cup." Um die Behauptung zu überprüfen, reichen Sie der Lady 10 Tassen, in die teils zuerst die Milch, teils erst der Tee eingegossen wurde. Die Lady gibt in 8 Fällen die richtige Antwort. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses, wenn die Lady in Wirklichkeit nur rät (also mit

jeweils 50% Wahrscheinlichkeit sagt, dass erst der Tee bzw. erst die Milch eingegossen wurde)? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eines schlechteren Ergebnisses?

4. Unter der Hotline-Nummer einer Registrierkassenfirma rufen im Durchschnitt tagsüber 20 Leute pro Stunde an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Viertelstunde genau 2 Personen anrufen?

   In der Zeit zwischen 10 Uhr abends und 6 Uhr morgens rufen durchschnittlich nur 4 Personen an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass während der Nachtschicht niemand anruft?

5. Die Wahrscheinlichkeit, dass im öffentlichen Nahverkehr einer Stadt eine Fahrkartenkontrolle durchgeführt wird, ist bei einer zufällig ausgewählten Fahrt 2%. Nehmen Sie an, dass die Kontrollereignisse verschiedener Fahrten stochastisch unabhängig voneinander sind.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man genau bei der zehnten Fahrt kontrolliert wird?

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens 30 Fahrten lang nicht kontrolliert wird?

6. An einem Drive-In-Restaurant halten im Schnitt 15 Autos pro Stunde. Gehen Sie davon aus, dass die Anzahl der Autos pro Stunde Poisson-verteilt ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Auto nur eine Person sitzt, ist 0.5. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Auto zwei Personen sitzen, ist 0.3. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Auto drei Personen sitzen, ist 0.1. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Auto vier Personen sitzen, ist auch 0.1. (Mehr als vier Personen pro Auto werden in dem Restaurant nicht bedient.) Jede Person im Auto ist ein Kunde.

   (a) Wie viele Kunden kommen durchschnittlich innerhalb einer halben Stunde? Hinweis: Wenn X und Y unabhängig sind, gilt $E(XY) = E(X)E(Y)$.

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von 20 Minuten mehr als 4 Autos kommen?

   (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von 4 Minuten genau 3 Personen bedient werden?

6 Spezielle stetige Verteilungen

1. Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 20 und Standardabweichung 10.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X einen negativen Wert annimmt?

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen 15 und 25 annimmt?

   (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert von mindestens 22 annimmt?

   (d) Berechnen Sie das 0.1-Quantil, das 0.5-Quantil und das 0.975-Quantil von X.

2. Ein Hausratversicherer weiß aus Erfahrung, dass die Schadenhöhe in 30.5% aller Schadenfälle höchstens 1100 DM und in 16.6% mehr als 2000 DM beträgt. Die Schadenhöhe pro Schadenfall sei normalverteilt.

(a) Berechnen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung für die Schadenhöhe pro Schadenfall.

(b) Geben Sie für die Schadenhöhe pro Schadenfall das 0.2-Quantil an.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Schadenhöhe pro Schadenfall genau 1500 DM beträgt?

3. Die Zufallsvariable X beschreibe die Lebensdauer eines Monitors (in Stunden). Gehen Sie davon aus, dass X exponentialverteilt ist mit dem Parameter $\lambda = 0.00025$.

   (a) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

   (b) Bestimmen Sie den Median von X.

   (c) Erstellen Sie eine Grafik der Dichtefunktion von X.

   (d) Der Verkäufer gibt eine Garantie, dass der Monitor in den ersten 1000 Stunden nicht kaputt geht. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein verkauftes Gerät die Garantie nicht erfüllt?

4. Value-at-Risk: @@@ ACHTUNG Diese Aufgabe muss überarbeitet werden @@@

   Sei X die Tagesrendite (in %) der Aktie der Deutschen Bank. Mit $Y = -X$ bezeichnen wir den prozentualen Verlust der Aktie an einem Börsentag. Die obere Flanke von Y lässt sich sehr gut durch eine Paretoverteilung mit den Parametern $\alpha = 3.4$ und $c = 0.8$ modellieren, die Verteilungsfunktion von Y ist

$$F_Y(y) = 1 - \left(\frac{c}{y}\right)^{\alpha}.$$

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Aktie der Deutschen Bank morgen um mehr als 5% an Wert verliert?

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Aktie der Deutschen Bank morgen zwischen 5% und 7% an Wert verliert?

   (c) Bestimmen Sie das 0.99-Quantil von Y. Was sagt es aus? Solche Quantile werden im Finance-Bereich auch als Value-at-Risk bezeichnet.

   (d) Angenommen, die Aktie fällt morgen um mehr als 5%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sogar um mehr als 7% fällt?

5. Anreize oder: Wie eine erfolgsabhängige Manager-Entlohnung schiefgehen kann.

   Der Manager eines Unternehmens kann zwei Strategien einschlagen: eine riskante und eine sichere. Die Zufallsvariable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ist der Gewinn des Unternehmens (in Mio. EUR). Die Verteilung von X hängt von der gewählten Strategie ab, und zwar wie folgt:

$$\begin{array}{ll} \text{sichere Strategie:} & \mu_s = 6, \quad \sigma_s^2 = 9 \\ \text{riskante Strategie:} & \mu_r = 5, \quad \sigma_r^2 = 25 \end{array}$$

   Das Gehalt Y (in 10 000 EUR) des Managers ist erfolgsabhängig (abhängig vom Gewinn). Es beträgt

$$Y = \begin{cases} 3 & \text{wenn } X \leq 0 \\ 10 & \text{wenn } 0 < X \leq 10 \\ 25 & \text{wenn } X > 10. \end{cases}$$

   (a) Ergänzen Sie die folgende Tabelle:

	Strategie	
	sicher	riskant
y	$P(Y=y)$	$P(Y=y)$

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert des Manager-Gehalts Y für beide Strategien. Welche Strategie wird der Manager einschlagen, wenn er den Erwartungswert seines Einkommens maximieren will?

6. Der Preis der Streuung oder: Vom Vorteil sicherer Umwege.

   Die Reisedauer mit dem Auto von A nach B hängt von vielen Zufallseinflüssen ab. Gehen Sie davon aus, dass die Reisedauer X (in Std.) eine normalverteilte Zufallsvariable ist mit Erwartungswert $\mu = 6$ und einer Standardabweichung von $\sigma = 1$.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Reise weniger als 3 Stunden dauert?

   (b) Sie sind in A. Um 16 Uhr haben Sie einen wichtigen Termin in B. Wann müssen Sie losfahren, damit Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.9 pünktlich sind?

   (c) Wenn Sie einen Umweg über eine Autobahn fahren, verlängert sich die erwartete Reisedauer auf $\mu = 6.5$, aber wegen der besser ausgebauten Straße verringert sich die Standardabweichung der Reisedauer auf $\sigma = 0.1$. Sie sind wieder in A und haben wieder um 16 Uhr einen wichtigen Termin in B. Wann müssen Sie losfahren, damit Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.9 pünktlich sind?

7. Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Definieren Sie die Zufallsvariable $Y = e^X$. Man nennt Y lognormalverteilt mit den Parametern μ und σ^2 und schreibt $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$. Dies ist das einfachste Standardmodell für die Verteilung zukünftiger Aktienkurse. Es bildet unter anderem eine wichtige Grundlage für die Optionsbewertung. Zeigen Sie, dass gilt

$$E(Y) = e^{\mu + \sigma^2/2}.$$

   Hinweis: Diese Aufgabe ist schwierig. Wegen $E(Y) = E(e^X)$ können Sie den Erwartungswert über die Formel $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ berechnen. Fassen Sie dann alle Exponentialfunktionsausdrücke geeignet zusammen und nutzen Sie die Tatsache, dass für jede Dichte $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ gilt.

8. Aktienoptionen:

   Die Verteilung von Aktienkursen, die etwas weiter entfernt in der Zukunft liegen (z.B. einen Monat oder länger), lässt sich recht gut durch eine Lognormalverteilung beschreiben. Sei $S_0 = 100$ der heutige Kurs einer Aktie. Der Kurs in einem Jahr, S_1, ist natürlich noch unbekannt und wird daher als Zufallsvariable aufgefasst. Wir nehmen an, dass S_1 lognormalverteilt ist: $S_1 \sim LN(\mu, \sigma^2)$ mit den (vorgegebenen) Parametern $\mu = 4.685$ und $\sigma^2 = 0.2$.

(a) Eine Kauf-Option bietet das Recht, zu einem vereinbarten zukünftigen Zeitpunkt eine Aktie zu einem vereinbarten Kurs (Ausübungspreis) zu kaufen – unabhängig vom dann geltenden Aktienkurs. Nach der berühmten Formel von Black und Scholes kann der heutige Wert C_0 einer Kauf-Option bestimmt werden als

$$\begin{aligned} C_0 &= S_0 \Phi\left(\frac{\ln(S_0/K) + \left(\rho + \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &\quad - e^{-\rho T} K \Phi\left(\frac{\ln(S_0/K) + \left(\rho - \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right), \end{aligned}$$

wobei S_0 der aktuelle Aktienkurs ist, K der Ausübungspreis, ρ der sichere (und als konstant angenommene) Zinssatz, σ^2 die Varianz der Rendite (das entspricht in unserem hier behandelten Fall dem Parameter σ^2 der Lognormalverteilung) und T die Laufzeit der Option.

Berechnen Sie den heutigen Wert der Option C_0 für einen Ausübungspreis von $K = 105$, einen Zinssatz von 5% p.a. und eine Restlaufzeit von $T = 1$ (Jahr).

(b) In einem Jahr ist der Wert der Option, C_1, natürlich abhängig vom dann geltenden Aktienkurs. Daher können wir C_1 ebenso wie S_1 als Zufallsvariable auffassen. Wenn $S_1 \leq K$ ist, dann ist die Option offenbar wertlos (d.h. $C_1 = 0$). Wenn hingegen $S_1 > K$ ist, dann ist der Wert der Option gerade $C_1 = S_1 - K$.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $C_1 = 0$ ist.

(c) Bestimmen Sie den Median von S_1.

(d) Bestimmen Sie den Median von C_1.

9. Weibull-Verteilung oder: Abnutzungserscheinungen.

Betrachten Sie wieder die Zufallsvariable X aus Aufgabe 3: X beschreibt die Lebensdauer eines Fernsehgeräts (in Stunden). Gehen Sie davon aus, dass X exponentialverteilt ist mit dem Parameter $\lambda = 0.00025$.

(a) Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fernseher mehr als 6000 Stunden hält, wenn er bereits 4000 Stunden gehalten hat, ist genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass der Fernseher mehr als 10000 Stunden hält, wenn er bereits 8000 Stunden gehalten hat.

(b) Zeigen Sie allgemein: $P(X > a | X > b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > b$ hängt bei einer Exponentialverteilung nur von der Differenz $a - b$ ab.

(c) Um eine mit dem Alter steigende Ausfallwahrscheinlichkeit zu modellieren, verwendet man häufig die Weibull-Verteilung. Eine Zufallsvariable Y heißt Weibull-verteilt mit den Parametern $\beta > 0$ und $k > 0$, wenn ihre Verteilungsfunktion für $y \geq 0$

$$F_Y(y) = 1 - e^{-(y/\beta)^k}$$

lautet. Für $y < 0$ ist $F_Y(y) = 0$.

(d) Bestimmen Sie die Formel für die Dichtefunktion von Y.

(e) Die Lebensdauer des Fernsehgeräts (in Stunden) beschreiben wir nun durch eine Weibull-verteilte Zufallsvariable Y mit den Parametern $\beta = 4431$ und $k = 1.5$. Zeichnen Sie die Dichtefunktion von Y (z.B. mit dem Statistik-Programm R).

(f) Berechnen und vergleichen Sie nun die beiden folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fernseher mehr als 6000 Stunden hält, wenn er bereits 4000 Stunden gehalten hat. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fernseher mehr als 10000 Stunden hält, wenn er bereits 8000 Stunden gehalten hat.

7 Gemeinsame Verteilungen

1. Risikoverringerung durch Diversifikation I:

   Ein Anleger legt 50% seines Vermögens in Aktien A an und 50% in Aktien B. Die Renditen R_A und R_B der beiden Aktien für das folgende Jahr sind Zufallsvariablen. Ihre Erwartungswerte sind

$$\begin{aligned} E\left(R_A\right) &= 0.15 \\ E\left(R_B\right) &= 0.13. \end{aligned}$$

   Die Volatilität der Rendite wird meist durch die Standardabweichung (oder die Varianz) gemessen; die Standardabweichungen sind

$$\begin{aligned} \sqrt{Var\left(R_A\right)} &= 0.20 \\ \sqrt{Var\left(R_B\right)} &= 0.17. \end{aligned}$$

   Die beiden Aktien bewegen sich nicht unabhängig voneinander; ihre Kovarianz beträgt

$$Cov\left(R_A, R_B\right) = 0.024.$$

   (a) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten für R_A und R_B.

   (b) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung der Rendite des Portfolios. Hinweis: Die Portfoliorendite beträgt $R_P = 0.5 \cdot R_A + 0.5 \cdot R_B$.

   (c) Kann der Anleger durch eine andere Vermögensaufteilung sein Risiko verringern? Welche Aufteilung minimiert die Varianz der Portfoliorendite?

2. Risikoverringerung durch Diversifikation II:

   Betrachten Sie wieder die Jahresrenditen zweier Aktien A und B. Die Zufallsvariable R_A beschreibt die Verteilung der Jahresrendite der Aktie A, analog R_B. Die erwarteten Renditen der beiden Aktien sind

$$\begin{array}{ll} E(R_A) = \mu_A & E(R_B) = \mu_B \\ Var(R_A) = \sigma_A^2 & Var(R_B) = \sigma_B^2. \end{array}$$

   Der Korrelationskoeffizient beträgt ρ. Eine Anlegerin teilt ihr gesamtes Vermögen auf diese beiden Aktien auf. Der Anteil ihres Vermögens, der auf die Aktie A entfällt, ist w. Entsprechend wird ein Anteil von $1 - w$ des Vermögens in die Aktie B investiert. Gehen Sie davon aus, dass $0 \leq w \leq 1$ ist. Die Portfoliorendite R_P ist

$$R_P = wR_A + (1 - w)R_B.$$

   Zeigen Sie, dass die gewichtete durchschnittliche Standardabweichung der Einzelrenditen nie kleiner als die Standardabweichung der Portfoliorendite ist.

3. Nichtlineare Zusammenhänge:

   Die Kovarianz und auch der Korrelationskoeffizient messen nur die Stärke des linearen Zusammenhangs zweier Zufallsvariablen. Es kann durchaus passieren, dass es zwar keinen linearen, aber dennoch einen starken – eventuell sogar perfekten – nichtlinearen Zusammenhang gibt. Sei $X \sim N(0,1)$. Definiere die Zufallsvariable $Y = X^2$. Zeigen Sie, dass

   $$Cov\,(X,Y) = 0$$

   ist. Hinweis: Für $X \sim N(0,1)$ gilt wegen der Symmetrie um den Nullpunkt $E\left(X^3\right) = 0$.

4. Sei $Y = X_1 + \ldots + X_K$. Zeigen Sie, dass $Var\,(Y) = \sum_{i=1}^{K} Cov\,(X_i, Y)$.

5. Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen gelten (die erste Gleichung ist natürlich eine Definitionsgleichung):

   $$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E\left[(X - E(X))\,(Y - E(Y))\right] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= E\left[(X - E(X))\,(Y - a)\right] \\ &= E\left[(X - a)\,(Y - E(Y))\right] \\ &= E\left[(X - E(X))\,Y\right] \\ &= E\left[X\,(Y - E(Y))\right] \end{aligned}$$

   für $a \in \mathbb{R}$.

6. Seien X und Y gemeinsam stetig verteilte Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Verteilungsfunktion

   $$F_{XY}(x,y) = \left(x^{-2} + y^{-2} - 1\right)^{-1/2}$$

   für $0 < x, y \leq 1$. Für Werte von x und y außerhalb dieses Bereichs geht man wie folgt vor: Falls $x > 1$ setzt man $x = 1$ und analog für y. Für $x, y \leq 0$ ist $F_{XY}(x,y) = 0$.

   (a) Bestimmen Sie die Randverteilungsfunktion von X.
   (b) Sind X und Y stochastisch unabhängig?
   (c) Bestimmen Sie die Randdichten von X und Y.
   (d) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichtefunktion von X und Y.
   (e) Bestimmen Sie die bedingte Dichtefunktion von X unter der Bedingung $Y = y$. Zeichnen Sie $f_{X|Y=0.1}(x)$ und $f_{X|Y=0.8}(x)$ im Intervall $[0,1]$.

7. Ein Ein-Faktor-Modell für den Aktienmarkt:

   Ein Portfolio bestehe aus K Wertpapieren. Die Rendite R_i des Wertpapiers i für das kommende Jahr ist eine Zufallsvariable, $i = 1, \ldots, K$. Betrachten Sie das folgende einfache multivariate Renditemodell. Die Rendite R_i setzt sich additiv aus einer Marktkomponente Y (oft auch Faktor oder Marktfaktor genannt) und einer individuellen Komponente X_i zusammen, also

   $$R_i = Y + X_i$$

   mit $Y \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$ und $X_i \sim N\left(0, \sigma_X^2\right)$ für $i = 1, \ldots, K$. Die individuellen Komponenten $X_1, \ldots, X_K$ sind (global) unabhängig und auch unabhängig von Y, sie haben alle die gleiche Varianz σ_X^2.

(a) Berechnen Sie die Varianz von R_i (für ein beliebiges i).

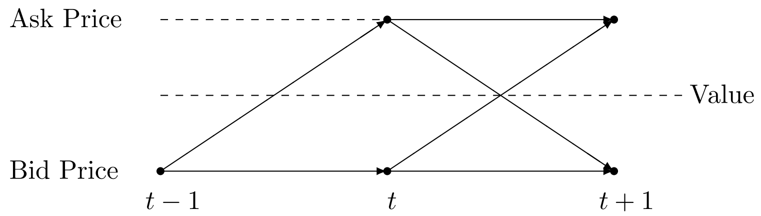
(b) Berechnen Sie Kovarianz von R_i und R_j für $i \neq j$.

(c) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten von R_i und R_j für $i \neq j$.

8. Die Geld-Brief-Spanne oder: Bid-Ask-Spread

Auf manchen Aktienmärkten wird Liquidität durch Market-Maker (manchmal auch: Sponsoren, Betreuer) bereitgestellt. Market-Maker sind verpflichtet, Kauf- und Verkaufsgebote (bid and ask orders) zu erfüllen. Sie kaufen jedoch zu einem niedrigeren Kurs als sie verkaufen. Die Differenz aus dem Geld- und dem Briefkurs nennt man Geld-Brief-Spanne (Bis-Ask-Spread). Der „wahre" Wert der Aktie ist die Mitte zwischen dem Geld- und dem Briefkurs. In einem wichtigen Artikel[6] hat Richard Roll gezeigt, dass durch einen Market-Maker eine negative Korrelation zwischen aufeinanderfolgenden Kursveränderungen induziert wird, selbst wenn keinerlei neue Informationen eintreffen. Zur Vereinfachung geht Roll davon aus, dass Geld- und Brieforders gleich wahrscheinlich sind und dass aufeinanderfolgende Ordertypen unabhängig voneinander sind.

Gegeben, dass die letzte Transaktion im Zeitpunkt $t-1$ eine Geldorder war, sind folgende weiteren Kursverläufe für die Zeitpunkte t und $t+1$ möglich (die Abbildung ist dem Artikel von Roll entnommen):



(a) Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die bedingte gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung für $\Delta p_t = p_t - p_{t-1}$ und $\Delta p_{t+1} = p_{t+1} - p_t$ unter der Bedingung, dass die letzte Transaktion eine Geldorder war.

	Δp_{t+1}		
Δp_t	$-s$	0	$+s$
$-s$			
0			
$+s$			

(b) Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die bedingte gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung für $\Delta p_t = p_t - p_{t-1}$ und $\Delta p_{t+1} = p_{t+1} - p_t$ unter der Bedingung, dass die letzte Transaktion eine Brieforder war.

[6] Richard Roll (1984), A Simple Implicit Measure of the Effective Bid-Ask Spread in an Efficient Market, Journal of Finance 39: 1127-1139. Sie finden einen Link auf den passwortgeschützten Artikel auf der Internet-Seite der Vorlesung.

	Δp_{t+1}		
Δp_t	$-s$	0	$+s$
$-s$			
0			
$+s$			

(c) Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die bedingte gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung für $\Delta p_t = p_t - p_{t-1}$ und $\Delta p_{t+1} = p_{t+1} - p_t$.

	Δp_{t+1}		
Δp_t	$-s$	0	$+s$
$-s$			
0			
$+s$			

(d) Berechnen Sie die Kovarianz von Δp_t und Δp_{t+1} als Funktion der Geld-Brief-Spanne.

9. In einer Urne sind 20 weiße und 30 schwarze Kugeln:

   (a) Jemand zieht mit Zurücklegen 10 Kugeln aus der Urne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 10 gezogenen Kugeln mindestens 3, aber höchstens 5 weiß sind?

   (b) Jemand zieht mit Zurücklegen 1000 Kugeln aus der Urne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 1000 gezogenen Kugeln mindestens 300, aber höchstens 500 weiß sind?

   (c) Jemand zieht mit Zurücklegen 1000 Kugeln aus der Urne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 1000 gezogenen Kugeln mindestens 380, aber höchstens 420 weiß sind?

8 Punktschätzung und Intervallschätzung

1. Laden Sie den Datensatz `mrendite.csv`. Der Datensatz enthält die Monatsrenditen der Aktien Allianz, BASF, Bayer und Volkswagen sowie des DAX100 von Oktober 1997 bis zum September 2002. Betrachten Sie zunächst nur die Allianz-Aktie. Die (unbekannte) Monatsrendite für einen zukünftigen Monat beschreiben wir durch die Zufallsvariable X^{ALV}. Gehen Sie davon aus, dass die Monatsrenditen in dem Datensatz Realisierungen einer einfachen Stichprobe $X_1^{ALV}, \ldots, X_{60}^{ALV}$ sind.

   Hinweis: Die Renditen sind so definiert, dass die durchschnittliche Rendite als arithmetisches Mittel berechnet werden kann.

   (a) Schätzen Sie den Erwartungswert von X^{ALV} mit einem erwartungstreuen Schätzer.

   (b) Schätzen Sie die Varianz von X^{ALV} mit einem erwartungstreuen Schätzer.

   (c) Schätzen Sie die Erwartungswerte und Varianzen der übrigen Aktien und des DAX100.

   (d) Schätzen Sie die Kovarianzen und Korrelationskoeffizienten der vier Aktien untereinander (es gibt jeweils sechs) und stellen Sie sie in matrizieller Form dar.

(e) Schätzen Sie die Kovarianzen und Korrelationskoeffizienten der Renditen der vier Aktien mit der DAX100-Rendite.

2. Die Marketingabteilung einer Bank möchte ermitteln, wie die Informationsbroschüre über ihre Investmentfonds gestaltet werden soll, damit möglichst viele angeschriebene Kunden die Fonds zeichnen. Die Broschüre wird in drei Versionen (V1, V2, V3) an Testgruppen unterschiedlichen Alters (jung, mittel, alt) verschickt. Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl der angeschriebenen Kunden und die Anzahl der Abschlüsse aufgeschlüsselt nach Version der Broschüre und Alter der Kunden.

Alter	Version	Angeschriebene	Abschlüsse
jung	V1	10000	315
	V2	5000	97
	V3	5000	43
mittel	V1	5000	185
	V2	10000	542
	V3	5000	260
alt	V1	5000	141
	V2	5000	209
	V3	10000	438

Erstellen Sie eine Tabelle mit den geschätzten Abschlussquoten. Welche Schlussfolgerung sollte die Marketingabteilung ziehen?

3. Die Dosiermaschine eines Pharma-Produzenten soll in jede hergestellte Tablette 1 mg eines Wirkstoffs füllen. Sei X die tatsächlich abgefüllte Menge. Gehen Sie davon aus, dass X normalverteilt ist mit einer bekannten Standardabweichung von $\sigma = 0.075$ mg. Eine Zufallsstichprobe von $n = 101$ Tabletten wird untersucht. Sie finden die Ergebnisse der Untersuchung in der Datei `pharma.csv`.

   Geben Sie ein konkretes 0.95-Konfidenzintervall für den Erwartungswert von X an.

4. Ein Versandhaus ermittelt aufgrund einer einfachen Zufallsauswahl vom Umfang $n = 60$ aus den innerhalb eines Monats eingegangenen Bestellungen einen Anteil in Höhe von 25 Prozent für Bestellungen mit einem Warenwert von über 200 Euro.

   (a) Bestimmen Sie die Grenzen des konkreten Konfidenzintervalls für die Wahrscheinlichkeit einer Bestellungen mit einem Warenwert von über 200 Euro (das Konfidenzniveau sei $1 - \alpha = 0.9$).

   (b) Geben Sie das entsprechende Konfidenzintervall für die Anzahl der eingegangenen Bestellungen an, wenn insgesamt 10000 Bestellungen eintreffen?

   (c) Wie wirkt sich – unter sonst gleichbleibenden Voraussetzungen – eine Erhöhung des Konfidenzniveaus auf die Breite des Konfidenzintervalls aus?

5. Auf einer Maschine werden Werkstücke hergestellt, deren Länge normalverteilt ist. Eine Zufallsstichprobe von 10 Stück ergab folgende Werte in mm:

42.8	36.9	41.2	39.3	40.4	35.7	37.6	43.5	35.6	36.8

   Berechnen Sie die Grenzen des konkreten Konfidenzintervalls für den unbekannten Erwartungswert der Fertigung ($1 - \alpha = 0.95$).

6. Aus einer Produktionsserie von 5000 Widerständen wird eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 225$ gezogen. Bei der Überprüfung der Funktionsfähigkeit der Widerstände in der Stichprobe wird festgestellt, dass 45 von ihnen defekt sind. Berechnen Sie ein konkretes Konfidenzintervall

   (a) für den Anteil der defekten Widerstände in der Produktionsserie ($1 - \alpha = 0.95$).

   (b) für die Anzahl der defekten Widerstände in der Produktionsserie ($1 - \alpha = 0.95$).

7. Für eine Wahlprognose soll eine einfache Stichprobe vom Umfang n aus den Wählern und Wählerinnen befragt werden, welche Partei sie wählen würden, wenn am nächsten Sonntag Bundestagswahlen wären.

   (a) Wie groß muss n gewählt werden, damit auf einem Konfidenzniveau von $1 - \alpha = 0.95$ der Anteil der SPD-Stimmen mit einem maximalen Fehler von $\pm 2\%$ geschätzt wird? Benutzen Sie als Vorinformation über den Anteil der SPD-Stimmen das letzte Wahlergebnis von XXX%.

   (b) Wie groß muss n gewählt werden, damit auf einem Konfidenzniveau von $1 - \alpha = 0.95$ der Anteil der FDP-Stimmen mit einem maximalen Fehler von $\pm 1\%$ geschätzt wird? Benutzen Sie als Vorinformation über den Anteil der FDP-Stimmen das letzte Wahlergebnis von XXX%.

9 Hypothesentests

1. Erklären Sie die folgenden Begriffe mit Ihren eigenen Worten:

   - Nullhypothese und Alternativhypothese
   - Fehler erster und zweiter Art
   - Teststatistik und Wert der Teststatistik
   - Kritischer Bereich
   - Gütefunktion

2. Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch normalverteilt mit Standardabweichung $\sigma = 5$ und unbekanntem Erwartungswert μ. Eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 81$ ergibt einen Stichprobenmittelwert von $\bar{x} = 37$.

   (a) Überprüfen Sie mittels eines geeigneten Testverfahrens die Nullhypothese, dass der Erwartungswert größer oder gleich 38 ist, gegen die Alternative, dass der Erwartungswert kleiner als 38 ist (Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$).

   (b) Nehmen Sie an, dass der Erwartungswert tatsächlich $\mu = 37$ ist. Wie groß ist die Power des Tests? (Die Power ist die Wahrscheinlichkeit, dass die falsche Nullhypothese als falsch erkannt wird.)

3. Auf einer Maschine werden Werkstücke hergestellt, deren Länge normalverteilt ist. Eine Zufallsstichprobe von 10 Stück ergab folgende Werte in mm:

42.8	36.9	41.2	39.3	40.4	35.7	37.6	43.5	35.6	36.8

Testen Sie auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.01$ die Nullhypothese, dass der Erwartungswert mindestens 41 mm beträgt.

4. Das Sozio-ökonomische Panel enthält für eine Stichprobe von Personen, die in Deutschland leben, Daten aus vielen Bereichen des Lebens. Die Personen werden jährlich befragt, unter anderem zum Arbeitseinkommen und der Arbeitszeit. Wir betrachten im Folgenden nur die Männer, die 2005 vollzeitbeschäftigt waren, einen Hochschulabschluss (oder Fachhochschulabschluss) hatten und zwischen 30 und 35 Jahre alt waren. Die folgende Tabelle zeigt den durchschnittlichen Stundenlohn sowie die korrigierte Standardabweichung des Stundenlohns für alleinstehende und verheiratete Männer:

	Verheiratete	Singles
Anzahl Beobachtungen	89	57
Durchschnittslohn	33.59	30.05
Standardabweichung	13.50	12.34

Überprüfen Sie mit einem statistischen Test, ob der Unterschied der durchschnittlichen Stundenlöhne noch als zufällig aufgefasst werden kann ($\alpha = 0.05$).

5. Laden Sie den Datensatz `mrendite` und betrachten Sie die Monatsrenditen der Volkswagenaktie. Sie wollen untersuchen, ob die erwartete Rendite zeitlich konstant ist. Dazu unterteilen Sie den Zeitraum in zwei Perioden: Oktober 1997 bis März 2000 und April 2000 bis September 2002. Die Renditen von Oktober 1997 bis März 2000 ($n = 30$ Beobachtungen) seien die Realisationen einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_{30}$; die Renditen von April 2000 bis September 2002 ($m = 30$ Beobachtungen) seien die Realisationen einer einfachen Stichprobe $Y_1, \ldots, Y_{31}$.

   Testen Sie die Nullhypothese, dass die erwartete Rendite μ_X der ersten Periode gleich der erwarteten Renditen μ_Y der zweiten Periode war. Setzen Sie dabei voraus, dass die Renditen normalverteilt sind und dass sich die Standardabweichung nicht geändert hat.

6. Eine große Bank überprüft den Erfolg ihrer Direktwerbeaktion für einen Investmentfond: Sie schickt einen Werbebrief an eine Testgruppe von 150000 zufällig ausgewählten Kunden und zählt, wie viele Kunden den Investmentfond kaufen. Außerdem zählt sie, wie viele von 150000 Kunden aus einer Kontrollgruppe, die den Werbebrief nicht erhalten haben, den Investmentfond kaufen.

   Von den 150000 Kunden der Testgruppe haben 2905 den Fond gekauft. Von den 150000 Kunden der Kontrollgruppe haben 2224 den Fond gekauft.

   Testen Sie, ob die Abschlussquote der Testgruppe signifikant höher ist als die Abschlussquote der Kontrollgruppe ($\alpha = 0.05$).

7. Diese Aufgabe basiert auf dem Fachartikel „Gift Exchange in the Field" von Armin Falk, *Econometrica*, vol. 75, pp. 1501-1511, 2007.[7] In der Zusammenfassung heißt es:

   This study reports evidence from a field experiment that was conducted to investigate the relevance of gift exchange in a natural setting. In collaboration with a charitable organization, we sent roughly 10,000 solicitation letters to potential donors. One-third of the letters contained no gift, one-third contained a small gift, and one-third contained a large gift. Treatment assignment was random. The results confirm the economic importance of gift exchange. Compared to the no gift condition, the relative frequency of donations increased

[7] Einen Link auf den Artikel finden Sie auf der Internetseite der Vorlesung.

by 17 percent if a small gift was included and by 75 percent for a large gift. The study extends the current body of research on gift exchange, which is almost exclusively confined to laboratory studies.

Tabelle I des Artikels enthält folgende Angaben:

	No Gift	Small Gift	Large Gift
Number of solicitation letters	3262	3237	3347
Number of donations	397	465	691
Relative frequency of donations	0.12	0.14	0.21

(a) Testen Sie, ob die Wahrscheinlichkeit einer Spende bei einem kleinen Geschenk signifikant höher ist als die Wahrscheinlichkeit einer Spende ohne Geschenk.

(b) Testen Sie, ob die Wahrscheinlichkeit einer Spende bei einem großen Geschenk signifikant höher ist als die Wahrscheinlichkeit einer Spende bei einem kleinen Geschenk.

8. Die Daten des Sozio-ökonomischen Panels enthalten Angaben zur allgemeinen Lebenszufriedenheit. Die Zufriedenheit wird auf einer Skala von 0 (sehr unzufrieden) bis 10 (sehr zufrieden) angegeben. Sie ist im Folgenden umkodiert zu niedrig (Werte 0–3), mittel (Werte 4–6), hoch (Werte 7–8) und sehr hoch (Werte 9–10). Die folgende Tabelle gibt für Männer und Frauen die Zufriedenheit an.

	Zufriedenheit			
Geschlecht	niedrig	mittel	hoch	sehr hoch
Männer	344	1925	3802	1012
Frauen	329	2189	3892	1160

Download: `zufried.csv`

Testen Sie, ob Zufriedenheit und Geschlecht stochastisch unabhängig sind ($\alpha = 0.05$).

9. Laden Sie den Datensatz `mrendite` (im Text- oder Excelformat) und betrachten Sie die Renditen von BASF und Bayer. Füllen Sie die folgende Tabelle aus:

	Bayer	
BASF	positive Rendite	negative Rendite
positive Rendite		
negative Rendite		

Testen Sie mit Hilfe der Tabelleneinträge, ob die Renditen stochastisch unabhängig sind ($\alpha = 0.05$).

10. Der Physiker Frank Benford stellte 1920 fest, dass die vorderen Seiten seines Logarithmen-Buches stärker abgegriffen waren als die hinteren Seiten. Die ersten Seiten gaben die Logarithmen der Zahlen mit niedrigen ersten Ziffern wieder (beispielsweise ist die erste Ziffer der Zahl 246981 die 2). Benford stellte die Hypothese auf, dass er die Zahlen mit niedrigen ersten Ziffern häufiger nachschlug, weil es in der Welt mehr Zahlen mit niedriger Anfangsziffer gibt, als solche mit einer hohen Anfangsziffer.

    Die Zufallsvariable X sei die erste Ziffer einer zufällig ausgewählten Zahl (ohne führende Nullen); es kann sich beispielsweise um die Länge eines Flusses in Meilen, die Anzahl der

Einwohner einer Hauptstadt oder das Sozialprodukt eines Landes in Euro handeln etc. Das Benfordsche Gesetz postuliert

$$P(X = d) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right)$$

für $d = 1, \ldots, 9$. Die folgende Tabelle zeigt in der zweiten Spalte die Wahrscheinlichkeiten $P(X = d)$.

Ziffer d	$P(X = d)$	n_d
1	0.3010	26
2	0.1761	20
3	0.1249	14
4	0.0969	8
5	0.0792	6
6	0.0669	15
7	0.0580	2
8	0.0512	6
9	0.0458	3

Jemand schreibt die ersten 100 Zahlen, die in einer Zeitung vorkommen, auf und untersucht ihre Anfangsziffern. Die dritte Spalte der Tabelle zeigt die absoluten Häufigkeiten.

Testen Sie auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ die Nullhypothese, dass diese 100 Zahlen mit dem Benfordschen Gesetz vereinbar sind.

11. Laden Sie den Datensatz `mrendite` (im Text- oder Excelformat). Testen Sie, ob die DAX100-Rendite durch eine Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu = -0.2$ und Standardabweichung $\sigma = 7.5$ beschrieben werden kann ($\alpha = 0.05$). Benutzen Sie die 0.2-, 0.4-, 0.6- und 0.8-Quantile der $N(-0.2, 7.5^2)$ für die Partitionierung.