PPGR -

1. Veza homogenih i afinih koordinata tačke. Primer. Prevođenje afine jednačine prave u homogenu.

* Afine, odnosno standardne koordinate nam omogućavaju jednostavan račun sa ravanskim objektima (tačkama, pravama, dužima, trouglovima...) One su u obliku (x, y)

* $\mathbb{R}^2$ - afina ravan

* Uvodimo homogene koordinate koje nam omogućavaju da afinoj ravni dodamo beskonačno daleke tačke

Definicija Homogene koordinate tačke $M(x,y)$ afine ravni $\mathbb{R}^2$ su ma koja torka $(x_1 : x_2 : x_3)$ takva da važi

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0 \qquad (1)$$

Primer: Afine koordinate $\rightarrow A(3, 4) = (x, y)$

Homogene koord. $\rightarrow A(3:4:1) = (x_1 : x_2 : x_3)$

$\rightarrow A(6:8:2) = (x_1 : x_2 : x_3)$

} U oba slučaja je relacija (1) zadovoljena

* Ako su $(x_1 : x_2 : x_3)$ homogene koordinate neke tačke, tada su i $(n x_1 : n x_2 : n x_3)$, $n \neq 0$ homogene koordinate iste tačke. Dozvoljeno je množenje (deljenje) homogenih koordinata ma kojim nenula brojem.

* Vektor $\vec{M} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ naziva se vektor predstavnik tačke $M(x_1 : x_2 : x_3)$ (npr $\vec{A} = (6, 8, 2)$ je vektor predstavnik, ali i $5\vec{A} = (30:40:10)$)

* Prava $p: ax+by+c=0$ afine ravni, zamenom relacija (1) u homogenim koordinatama dobija oblik:

$$a\frac{x_1}{x_3}+b\frac{x_2}{x_3}+c=0 \quad / \cdot x_3 \ (\neq 0)$$

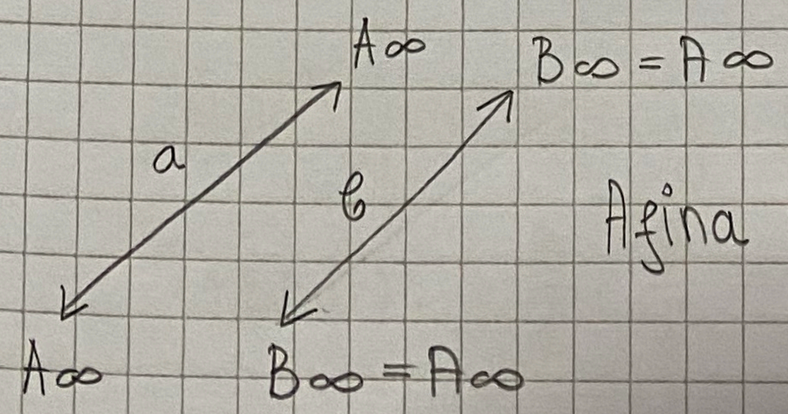
$$\underbrace{ax_1+bx_2+cx_3=0}_{\text{jednačina prave u homogenim koordinatama}} \qquad (2)$$

* Ako pomnožimo (2) sa $\lambda \neq 0$ dobijamo j-nu iste prave. Zato trojku $[a,b,c]$ zovemo homogenim koordinatama prave p, a ma koji od proporcionalnih vektora $\vec{p}=(a,b,c)$ zovemo vektorom predstavnikom prave p

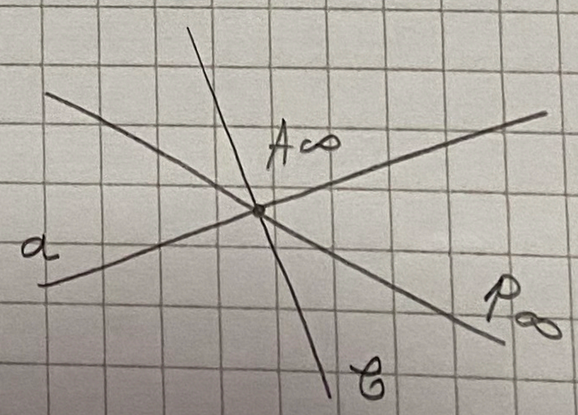
Primer: Homogene koordinate prave $p: 2x-3y+4=0$ su $[2:-3:4]$.
Vektor predstavnik prave p je npr $\vec{p}=(-4,6,-8)$

Definicija Prava $p_\infty: x_3=0$ naziva se beskonačno daleka prava, a svaka tačka $B_\infty(x_1:x_2:0)$, koja joj pripada, beskonačno daleka tačka

* Afina ravan dopunjena tačkama beskonačno daleke prave $x_3=0$ naziva se dopunjena ili proširena afina ravan i označava sa $\overline{\mathbb{R}}^2$
Paralelne prave afine ravni se seku u beskonačno dalekim tačkama dopunjene afine ravni



Afina slika

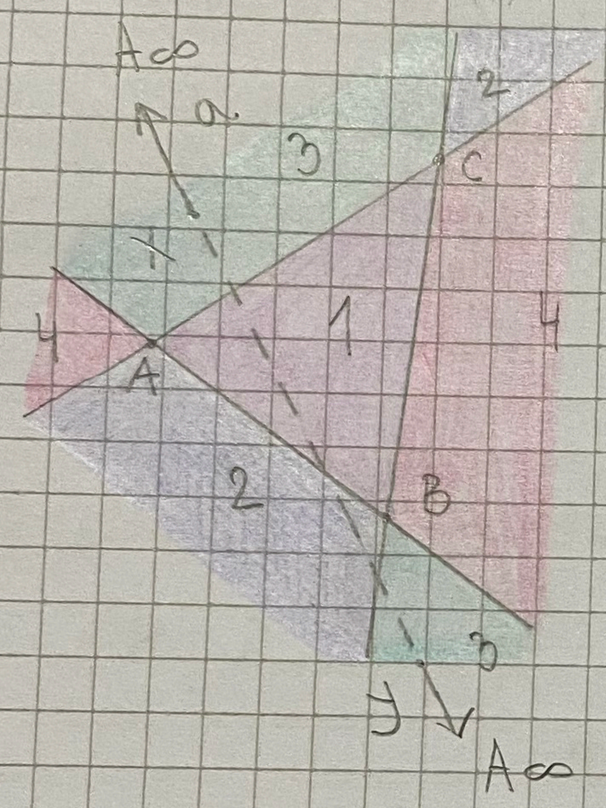


Projektivna slika

2. Definicija trotemenika i „dokaz" tvrđenja da trotemenik razbija projektivnu ravan na 4 oblasti. Crtež

Definicija <u>Trotemenik</u> ABC je figura projektivne ravni koja se sastoji od tri nekolinearne tačke A, B, C (temena) i tri prave AB, BC, CA (ivice) njima određene

Teorema: Trotemenik razbija projektivnu ravan kojoj pripada na 4 oblasti.



* Tačke X i Y pripadaju istoj oblasti
* Naime projektivna duž XY koja sadrži A∞ ne seče trotemenik ABC.

Slika dokaza: Posmatramo tačke X i Y koje pripadaju afino različitim oblastima označenim brojem 3.
Prava a = XY je razbijena tačkama X i Y na dve projektivne duži - jedna od njih seče trotemenik, a druga (ona koja sadrži A∞) ne seče. Zbog te duži koja „spaja" X i Y te tačke pripadaju istoj projektivnoj oblasti.

3. Definicija dvorazmere tačaka i dvorazmere pravih. Dokaz teoreme 4. Definicija centralnog projektovanja. Dokaz da je dvorazmera invarijanta centralnog projektovanja (posledica 1)

* Projektivna geometrija ne čuva ni dužinu, ni razmeru, ali čuva dvorazmeru

Definicija Neka su A, B, C, D kolinearne tačke i važi

$$\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}, \quad \vec{D} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}$$

Dvorazmera tačaka A, B, C, D je broj

$$(A,B,C,D) := \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}$$

* Dvorazmera ne zavisi od izbora vektora predstavnika

Primer: Date su kolinearne tačke $A(1:2:2)$, $B(0:1:-1)$, $C(2:3:5)$, $D(-1:1:-5)$

Izračunati dvorazmeru (A,B,C,D)

Uzimamo vektore predstavnike
$$\vec{A} = (1,2,2)$$
$$\vec{B} = (0,1,-1)$$
$$\vec{C} = (2,3,5)$$
$$\vec{D} = (-1,1,-5)$$

Relacija $\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$ nam daje sistem

$$\left.\begin{aligned} 1\alpha + 0\beta &= 2 \\ 2\alpha + 1\beta &= 3 \\ 2\alpha - 1\beta &= 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = 2, \ \beta = -1$$

Iz relacije $\vec{D} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}$ dobijamo sistem

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= -1 \\ 2\gamma + \delta &= 1 \\ 2\gamma - \delta &= -5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma = -1, \ \delta = 3$$

Korišćenjem definicije dobijamo

$$(A,B,C,D) := \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma} = \frac{-1}{2} : \frac{3}{-1} = \frac{1}{6}$$

Definicija Neka su a, b, c, d kolinearne prave i važi

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \quad , \quad \vec{d} = \gamma\vec{a} + \beta\vec{b}$$

Dvorazmera pravih a, b, c, d je broj

$$(a,b,c,d) := \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}$$

Teorema 3: (Osobine dvorazmere) (važi i za prave i za tačke zbog dualnosti)

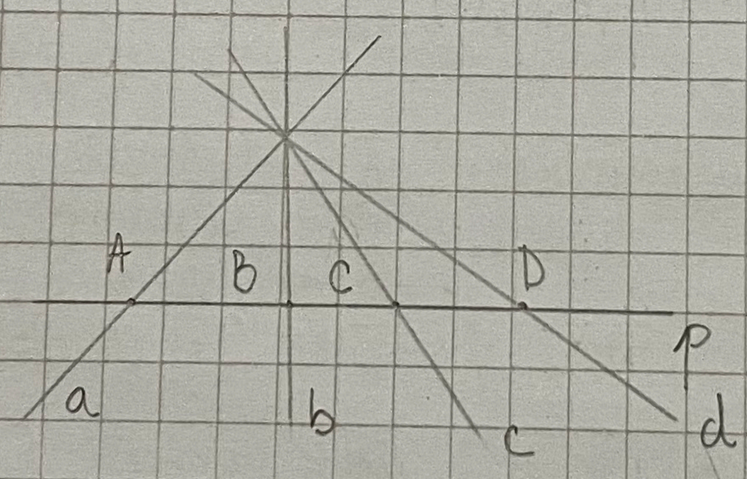
I $(A,B,C,D) = (B,A,C,D)^{-1}$

II $(A,B,C,D) = (C,D,A,B)$

III za različite tačke važi $(A,B,C,D) \neq 0, 1$

IV Ako su A, B i C kolinearne tačke i broj $\mu \neq 0, 1$ tada postoji jedinstvena tačka $D \in AB$ takva da važi $(A,B,C,D) = \mu$

Teorema 4: Ako su a, b, c, d konkurentne prave i $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$ kolinearne tačke. Tada je $(A,B,C,D) = (a,b,c,d)$



Dokaz Po definiciji važi $(a,b,c,d) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}$

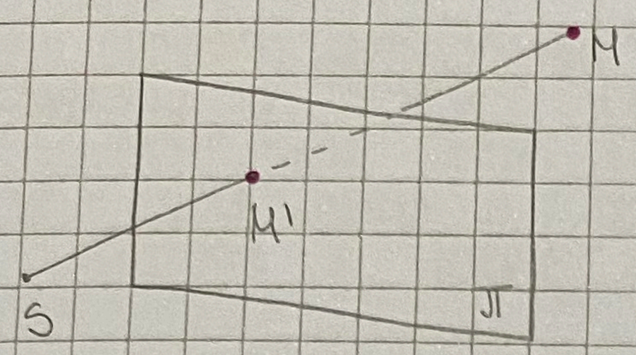
$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \quad , \quad \vec{d} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$$

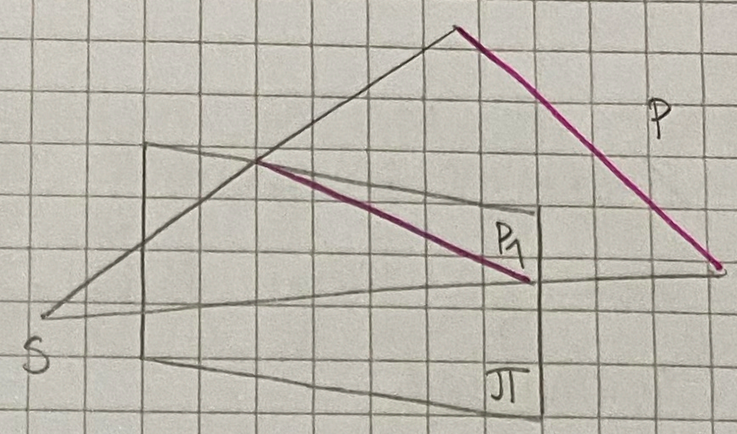
Koristeći vektorski proizvod određujemo preseke A, B, C, D tih pravih sa p

$$\left.\begin{aligned} \vec{c} \times \vec{p} &= \alpha(\vec{a} \times \vec{p}) + \beta(\vec{b} \times \vec{p}) \\ \vec{d} \times \vec{p} &= \gamma(\vec{a} \times \vec{p}) + \delta(\vec{b} \times \vec{p}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{C} &= \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} \\ \vec{D} &= \gamma\vec{A} + \delta\vec{B} \end{aligned}$$

Zato je $(A,B,C,D) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma} = (a,b,c,d)$

* Centralno projektovanje sa centrom S je preslikavanje prostora $\mathbb{R}^3$ na ravan $\pi \subset \mathbb{R}^3$ koje tačku $M \in \mathbb{R}^3$ preslikava u tačku $\{M'\} = SM \cap \pi$





* Centralno projektovanje preslikava pravu p prostora u pravu p_1 u ravni

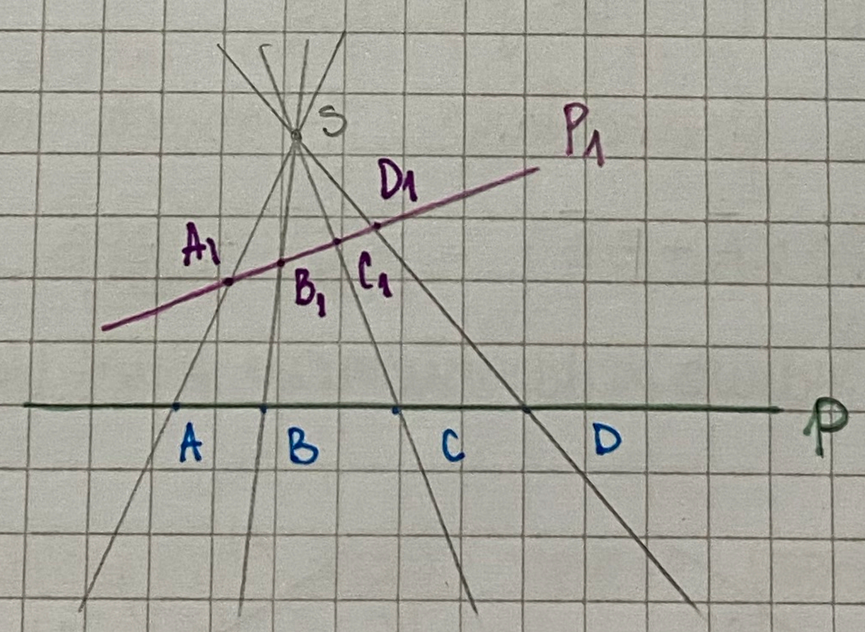
Posledica 1 Dvorazmera je invarijanta centralnog projektovanja

Dokaz: $A, B, C, D \in p$ su kolinearne tačke

$A_1, B_1, C_1, D_1 \in p_1$ njihove slike pri centralnom projektovanju iz tačke S

Dva puta koristeći teoremu 4 dobijamo

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d) = (A_1, B_1, C_1, D_1) \qquad \square$$



Definicija Za kolinearne tačke A, B, C, D kažemo da su <u>harmonijski konjugovane</u> ako je $(A, B, C, D) = -1$

4. Definicija projektivnog preslikavanja. Dokaz da projektivna preslikavanja čuvaju dvorazmeru. Definicija tačaka u opštem položaju. Formulacija teoreme 7.

Definicija Projektivno preslikavanje $f: \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ je preslikavanje koje preslikava tačku $M(x_1 : x_2 : x_3)$ u tačku $M'(x_1' : x_2' : x_3')$ formulama:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \det(p_{ij}) \neq 0 \qquad (10)$$

Kraće
(11) $\lambda x' = Px$
a inverzno
(12) $\lambda x = Cx'$
gde je $C = P^{-1}$

Broj $\lambda \neq 0$ sugeriše da su u pitanju homogene koordinate

Teorema 6: (Osobine projektivnih preslikavanja)

I Projektivno preslikavanje slika čuva kolinearnost i konkurentnost

II Projektivno preslikavanje čuva dvorazmeru pravih i tačaka

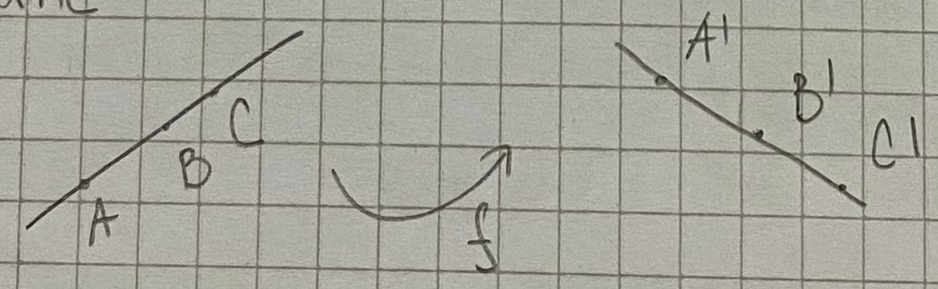
Dokaz II Tačke A, B, C, D su kolinearne tj imamo

$\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$ i $\vec{D} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}$

Primenjujemo preslikavanje f oblika (11) i dobijamo

$\vec{C'} = \vec{PC} = P(\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}) = \alpha\vec{PA} + \beta\vec{PB} = \alpha\vec{A'} + \beta\vec{B'}$

Iz ovoga vidimo da su i $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ kolinearne



(ovo je dokaz I)

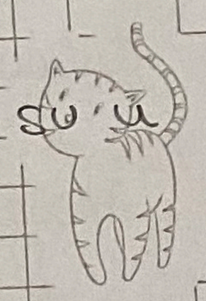
za D dobijamo analogno da je $D' = f(D)$

$D' = \gamma\vec{A'} + \delta\vec{B'}$

Odatle dobijamo $(A', B', C', D') = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma} = (A, B, C, D)$

pa f čuva dvorazmeru tačaka. Invarijantnost dvorazmere pravih sledi iz dualnosti

* Za četiri tačke od kojih nikoje tri nisu kolinearne kažemo da su u <u>opštem položaju</u>



Teorema 7: Postoji jedinstveno projektivno preslikavanje projektivne ravni $\mathbb{R}P^2$ koje četiri tačke A, B, C, D u opštem položaju slika redom u tačke A', B', C', D' u opštem položaju.

5. Afino preslikavanje. Izvođenje relacije (18).

* <u>Afina preslikavanja</u> proširene afine ravni su specijalan slučaj projektivnih - to su ona projektivna preslikavanja koja čuvaju beskonačno daleku pravu.

Definicija Afino preslikavanje je preslikavanje $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ koje tačku $M(x,y)$ preslikava u tačku $M'(x',y')$ formulama:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{kolone su slike baznih vektora}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{O'(b_1, b_2) \text{ slika koordinatnog početka}}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0 \qquad (17)$$

Teorema 9: Afina preslikavanja imaju sledeće osobine:

I bijekcije su

II čuvaju kolinearnost, konkurentnost, paralelnost i razmeru

III postoji jedinstveno afino preslikavanje koje preslikava nekolinearne tačke A, B, C u nekolinearne tačke A', B', C'

Gledamo kako izgledaju afina preslikavanja u homogenim koordinatama

Menjamo jednačine (1) u jednačine preslikavanja (17)

$$\frac{x_1'}{x_3'} = a_{11}\frac{x_1}{x_3} + a_{12}\frac{x_2}{x_3} + b_1$$

$$\frac{x_2'}{x_3'} = a_{21}\frac{x_1}{x_3} + a_{22}\frac{x_2}{x_3} + b_2$$

Pošto treću koordinatu tačaka možemo da biramo proizvoljno, dodaćemo i jednačinu $x_3' = x_3$

Množimo prethodne dve jednačine sa x_3:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1x_3$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2x_3$$

$$x_3' = x_3$$

Što je u matričnom obliku

$$r\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (18)$$

6. Naivni algoritam za određivanje projektivnog preslikavanja.

* Baziran je na tvrđenju i dokazu teoreme 7

Algoritam:

Ulaz: Homogene koordinate tačaka A, B, C, D i koordinate njihovih slika A', B', C', D' pri projektivnom preslikavanju f projektivne ravni (obe četvorke u opštem položaju)

Izlaz: Matrica P, formata 3×3, projektivnog preslikavanja f ravni koje šalje tačke A, B, C, D redom u A', B', C', D'

Algoritam:

1. Odrediti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$ tako da $\vec{D} = \lambda_1 \vec{A} + \lambda_2 \vec{B} + \lambda_3 \vec{C}$
   P_1 je matrica čije su kolone vektori $\lambda_1 \vec{A}$, $\lambda_2 \vec{B}$, $\lambda_3 \vec{C}$

2. Odrediti $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3' \neq 0$ tako da $\vec{D} = \lambda_1' \vec{A'} + \lambda_2' \vec{B'} + \lambda_3' \vec{C'}$
   P_2 je matrica sa kolonama $\lambda_1' \vec{A'}$, $\lambda_2' \vec{B'}$, $\lambda_3' \vec{C'}$

3. Tražena matrica preslikavanja je $P = P_2 P_1^{-1}$

Napomena: Matrica preslikavanja je određena do na λP, $\lambda \neq 0$

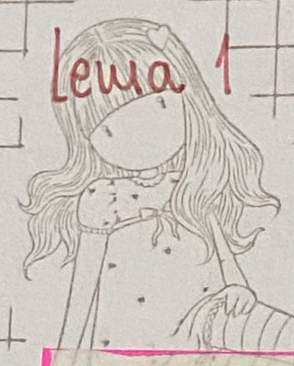
* Prednosti: ↳ geometrijski jasan
  ↳ jednostavan za implementaciju

* Mane: ↳ radi samo za četiri para odgovarajućih tačaka

* Za realizaciju algoritma potrebno je rešiti dva sistema tri jednačine sa tri nepoznate. Ovo je najbolje uraditi Kramerovim pravilom, pošto sistemi imaju jedinstveno rešenje (ukoliko su obe četvorke tačaka u opštem položaju). Ukoliko je ma koja determinanta koja se koristi u Kramerovom pravilu jednaka nuli, to znači da tačke nisu u opštem položaju

7. Dve jednačine koje važe za matricu $P = (p_{ij})$ projektivnog preslikavanja, a koje se dobijaju iz odgovarajućih tačaka M, M' (bez izvođenja).
   Primer. DLT algoritam za određivanje projektivnog preslikavanja.

Par odgovarajućih tačaka daje dve jednačine po nepoznatim parametrima matrice. Jedan od načina da se te dve jednačine zapišu daje sledeća lema



Lema 1 Neka su $M(x_1:x_2:x_3)$ i $M'(x_1':x_2':x_3')$, $x_3' \neq 0$ odgovarajuće tačke projektivnog preslikavanja ravni čija je matrica $P=(p_{ij})$. Tada vektor

$$(p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{31}, p_{32}, p_{33}) \tag{19}$$

$f: X' = PX$ OK!

zadovoljava homogeni sistem ranga 2 čija je matrica formata 2×9

$$(20) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -x_3'x_1 & -x_3'x_2 & -x_3'x_3 & x_2'x_1 & x_2'x_2 & x_2'x_3 \\ x_3'x_1 & x_3'x_2 & x_3'x_3 & 0 & 0 & 0 & -x_1'x_1 & -x_1'x_2 & -x_1'x_3 \end{pmatrix}$$

Primer: Odrediti dve jednačine koje zadovoljavaju koeficijenti matrice $P=(p_{ij})$ ako odgovarajuće preslikavanje slika tačku $X(\underset{x_1}{1}:\underset{x_2}{2}:\underset{x_3}{3})$ u tačku $X'(\underset{x_1'}{4}:\underset{x_2'}{5}:\underset{x_3'}{6})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -6\cdot 1 & -6\cdot 2 & -6\cdot 3 & 5\cdot 1 & 5\cdot 2 & 5\cdot 3 \\ 6\cdot 1 & 6\cdot 2 & 6\cdot 3 & 0 & 0 & 0 & -4\cdot 1 & -4\cdot 2 & -4\cdot 3 \end{pmatrix} \cdot (p_{ij}) = 0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -6 & -12 & -18 & 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 & 0 & 0 & 0 & -4 & -8 & -12 \end{pmatrix} \cdot (p_{ij}) = 0$$

$$0\cdot p_{11} + 0\cdot p_{12} + 0\cdot p_{13} - 6\cdot p_{21} - 12\cdot p_{22} - 18\, p_{23} + 5p_{31} + 10p_{32} + 15p_{33} = 0$$

$$6\, p_{11} + 12\cdot p_{12} + 18\, p_{13} + 0\cdot p_{21} + 0\cdot p_{22} + 0\cdot p_{23} - 4\cdot p_{31} - 8\cdot p_{32} - 12\cdot p_{33} = 0$$

* SVD (Singular Value Decomposition) dekompozicija matrice:

Ako je A matrica formata $m\times n$ postoji jednoznačna dekompozicija

$$A = UDV^T$$

gde je U, $U^{-1} = U^T$ ortogonalna matrica formata $n\times n$, V, $V^{-1} = V^T$ ortogonalna matrica formata $m\times m$, a D kvazidiagonalna matrica formata $n\times m$, sa opadajućim pozitivnim vrednostima na dijagonali.

DLT algoritam za određivanje projektivnog preslikavanja

<u>Ulaz:</u> Homogene koordinate $n \geq 4$, originalnih tačaka M_i i n njihovih slika M_i'

<u>Izlaz:</u> 3×3 matrica projektivnog preslikavanja koje dobro aproksimira uslove $\lambda M_i' = PM_i$, $i = 1 \dots n$

1. Za svaku korespodenciju $M_i \leftrightarrow M_i'$ odrediti 2×9 matricu (20)
2. Spojiti te matrice u jednu matricu A formata $2n \times 9$
3. Odrediti SVD dekompoziciju matrice A, $A = UDV^T$
4. Koeficijenti (19) matrice P su poslednja kolona $V[9]$ matrice V. (Podrazumeva se da D ima opadajuće dijagonalne vrednosti)
5. Matrica P se dobija pregrupisanjem vektora $V[9]$

* DLT algoritam je algebarske, a ne geometrijske prirode (to ima određene negativne posledice - str 36)

* Mana DLT algoritma je što nije invarijantan u odnosu na promenu koordinata

8. Kako se radi normalizacija koordinata tačaka (algoritam)? Zašto se radi normalizacija tačaka pri određivanju projektivnog preslikavanja?

Algoritam normalizacije koordinata tačaka

<u>Ulaz:</u> Homogene koordinate tačaka M_i, $i = 1 \dots n$ (treća koord svih tačaka $\neq 0$)

<u>Izlaz</u> Normalizovane koordinate tačaka $\overline{M_i}$, $i = 1 \dots n$ (i matrica normalizacije T)

1. Izračunati afino težište sistema tačaka M_i, $i=1,\dots,n$ po formuli

$$B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i \qquad (22)$$

2. Translirati tačke translacijom koja težište B translira u koordinatni početak (neka je G matrica translacije za vektor $\overrightarrow{BO}$)

3. Izračunati prosečnu udaljenost transliranih tačaka GM_i od koordinatnog početka.

$$\rho = \frac{1}{n}\sum \|GM_i\|$$

4. Preslikati tačke homotetijom sa koeficijentom $\frac{\sqrt{2}}{\rho}$ tako da prosečna udaljenost transliranih tačaka GM_i od koordinatnog početka bude $\sqrt{2}$ (neka je S matrica homotetije sa centrom $O=(0,0)$ i koef $\frac{\sqrt{2}}{\rho}$)

5. Matrica normalizacije je $T=SG$

6. Tačke $\overline{M_i} = TM_i$, $i=1,\dots,n$ su normalizovane tačke

* Normalizaciju koordinata tačaka radimo zato
- ↳ da matrica preslikavanja P ne bi zavisila od izbora kandidata
- ↳ da bi smanjili numeričku grešku

Normalizovani DLT algoritam za određivanje projektivnog preslikavanja

<u>Ulaz</u>: Homogene koordinate $n \geq 4$, originalnih tačaka M_i i n njihovih slika M_i'

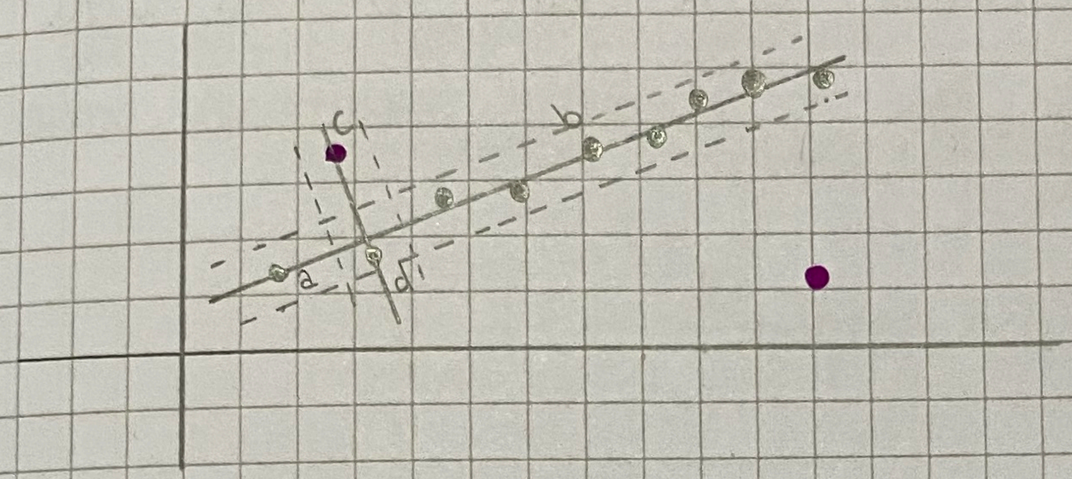
<u>Izlaz</u>: 3×3 matrica P projektivnog preslikavanja, koje dobro aproksimira uslove $\lambda M_i' = PM_i$, $i=1,\dots,n$

1. Normalizovati originalne tačke $\overline{M_i} = TM_i$, transformacijom T
2. Normalizovati slike tačaka $\overline{M_i}' = T'M_i'$, transformacijom T'

3. Odrediti DLT algoritmom matricu transformacije $\bar{P}$ iz korespodencija $\bar{M}_i \leftrightarrow \bar{M}_i'$

1. Tražena matrica transformacije je $P = T'^{-1} \bar{P} T$

9. Objasniti RANSAC algoritam na primeru linearne aproksimacije skupa tačaka ravni



Za dati skup tačaka u ravni određujemo pravu koja ga najbolje aproksimira

* Dve tačke se slučajno biraju. One određuju jedinstvenu pravu
* „Nosač" te prave su tačke koje su na ε- udaljenosti od prave (tačke nosača se smatraju konsenzusom izabranih tačaka)
* Ukoliko se u nosaču nalazi dovoljno ($> T$) tačaka, ide se na poslednji korak
* Prethodni postupak se ponavlja najviše N puta
* Bira se ("konsenzusom") nosač sa najviše tačaka
* Tačke nosača se smatraju „tačnim tačkama" (inliners), a preostale tačke „uljezima" (outliners). Algoritam za određivanje prave se primenjuje na „tačnim tačkama"

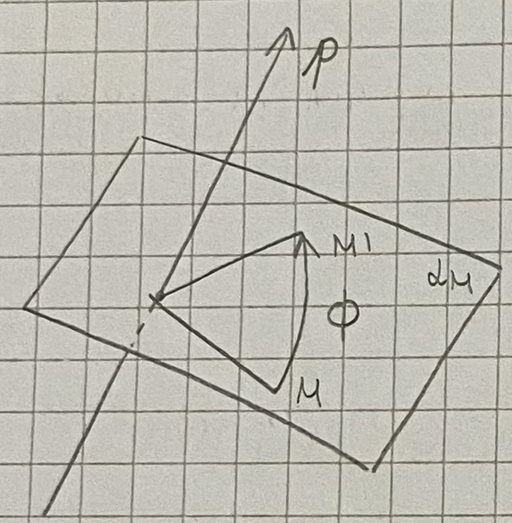
mislim da ne treba, ali RANSAC algorit. 47 str.

10. Definisati rotaciju oko orjentisane prave u prostoru. Crtež. Napisati matrice rotacije oko koordinatnih osa.

Definicija

Neka je M proizvoljna tačka, α_M ravan koja sadrži tačku M i normalna je na pravu p, a $\{O_M\} = p \cap \alpha_M$. Tačka $M' = R_p(\phi)(M)$ se dobija rotacijom tačke M u ravni α_M oko tačke O_M za ugao ϕ. Smer rotacije se određuje tako što vektori $\overrightarrow{O_M M}$, $\overrightarrow{O_M M'}$, p čine bazu pozitivne orjentacije, gde je $\vec{p}$ vektor orjentisane prave p.

* Orjentisanu pravu p zovemo <u>osa rotacije</u>



Rotacija oko orjentisane prave p za ugao ϕ.

* Matrice rotacija oko koordinatnih osa svetskog koord. sistema $Oxyz$ zovemo <u>svetske rotacije</u>. Matrice tih rotacija su:

$$[R_x(\phi)]_e = R_x(\phi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \qquad (27)$$

$$[R_y(\theta)]_e = R_y(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (28)$$

$$[R_z(\psi)]_e = R_z(\psi) := \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (29)$$

11. Napisati detaljnu Rodrigezovu formulu i objasniti šta ona radi.

Teorema 12 (Formula Rodrigeza)

Matrica rotacije $R_p(\phi)$, za ugao ϕ, oko orjentisane prave p koja sadrži koordinatni početak je

$$R_p(\phi) = (1-\cos\phi)pp^T + \cos\phi\, E + \sin\phi\, p_\times \qquad (30)$$

gde je
- E jedinična matrica
- $p_\times$ matrica vektorskog množenja jediničnim vektorom prave $p=(p_1,p_2,p_3)^T$

$$p_\times := \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (31)$$

- pp^T je matrica normalnog projektovanja na jedinični vektor $\vec{p}$

$$pp^T = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} (p_1\ p_2\ p_3) = \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1p_2 & p_1p_3 \\ p_2p_1 & p_2^2 & p_2p_3 \\ p_3p_1 & p_3p_2 & p_3^2 \end{pmatrix} \qquad (32)$$

Oxyz

* Rodrigezovom formulom računamo matricu rotacije, za neki ugao, oko orjentisane prave koja sadrži koordinatni početak.

12. Algoritam A2AngleAxis

Algoritam: $\underbrace{\text{matrica } A \text{ kretanja}}_{\det A = 1}$ u oblik $R_p(\phi)$

Ulaz: Ortogonalna matrica $A=(a_{ij}) \neq E$, $\det A = 1$

Izlaz: Jedinični vektor p i ugao $\phi \in [0,\pi]$ takav da $A = R_p(\phi)$

1. odrediti jedinični sopstveni vektor p za $\lambda = 1$
2. odrediti proizvoljan jedinični vektor $x \perp p$
3. $x' = Ax$ // x' je jedinični
4. $\phi = \arccos(x, x') = \langle x, x' \rangle$ // $\phi \in (0, \pi)$
5. Ako je $[x, x', p] < 0$ // mešoviti proizvod
   $p = -p$ // da bi rotacija bila u pozitivnom smeru

13. Objasnite Ojlerove rotacije na primeru aviona. Veza svetskih i sopstvenih rotacija (tvrđenje teoreme 14)

* Svetske rotacije se izvode u odnosu na ose fiksiranog (svetskog) koordinatnog sistema
* Sopstvene rotacije se izvode u odnosu na pokretni koordinatni sistem vezan za neko telo.

// Slika na strani 60 → sopstvene rotacije aviona

* Sopstveni koordinatni sistem je vezan za avion
  - ↳ O je centar aviona
  - ↳ x-osa ide duž trupa aviona
  - ↳ z-osa je upravna na avion
  - ↳ y-osa je duž krila aviona

  } $Oxyz$ je pozitivno orjentisan

* Izvode se tri sopstvene rotacije za tzv. Ojlerove uglove pri čemu sopstveni koordinatni sistem stalno menja položaj:
  - ↳ $R_z(\psi)$ - rotacija oko z-ose aviona. Ugao $\psi \in [0, 2\pi)$ zove se ugao skretanja i njime avion postiže željeni pravac na pisti. Sopstveni sistem aviona sada postaje $Ox_1y_1z_1$, pri čemu je $z_1 = z$

↳ $R_{y_1}(\theta)$ - rotacija oko y_1 ose aviona (krila). Ugao $\theta \in [-\pi, \pi]$ zove se ugao propinjanja i njime avion zauzima nagib u odnosu na horizontalu. Sopstveni sistem aviona postaje $Ox_2y_2z_2$ gde je $y_2 = y_1$

↳ $R_{x_2}(\phi)$ - rotacija oko x_2 ose aviona (trupa). Ugao $\phi \in [0, 2\pi)$ zove se ugao valjanja. Sopstveni sistem aviona postaje $Ox_3y_3z_3$, $x_3 = x_2$

* Generalno se uglovi ψ, θ, ϕ nazivaju Ojlerovi uglovi, a specijalno, ako je redosled izvođenja rotacija $z-y-x$ oni se zovu i Tejt - Brajanovi uglovi.

Teorema 14: Ako je kretanje f predstavljeno sopstvenim rotacijama

$$f = R_{x_2}(\phi) \circ R_{y_1}(\theta) \circ R_z(\psi)$$

tada, je njegova matrica u polaznom reperu $e = Oxyz$, proizvod matrica tih rotacija u suprotnom redosledu

$$A = [f]_e = R_z(\psi) R_y(\theta) R_x(\phi)$$

// Kompozicija sopstvenih rotacija ima isti efekat kao kompozicija svetskih, za iste uglove, ali u suprotnom redosledu.

14. Kako se množe dva kvaterniona? Primer. Kako odrediti inverzan kvaternion? Primer.

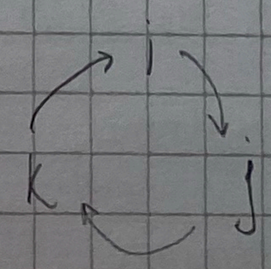
* Kvaternioni su brojevi oblika

$$\mathbb{H} = \{ xi + yj + zk + w \mid x, y, z, w \in \mathbb{R} \}$$

gde su i, j, k imaginarne jedinice

* Množenje kvaterniona $\cdot$ je definisano radnjama

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i$$



Primer Izračunati proizvod kvaterniona $q_1 = 3i - 5k + 1$ $\quad q_2 = i + j + 7$

$$(3i - 5k + 1)(i + j + 7) = 3i^2 + 3ij + 21i - 5ki - 5kj - 35k + i + j + 7$$
$$= -3 + 3k + 21i - 5j + 5i - 35k + i + j + 7$$
$$= 27i - 4j - 32k + 4$$

* Množenje kvaterniona jeste asocijativno, ali nije komutativno

* Konjugovani kvaternion kvaterniona $q = [\vec{v}, w]$ definišemo sa:

$$\bar{q} := [-\vec{v}, w] = -xi - yj - zk + w$$

* Inverzan kvaternion kvaterniona q je:

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$$

konjugovani kvaternion

norma

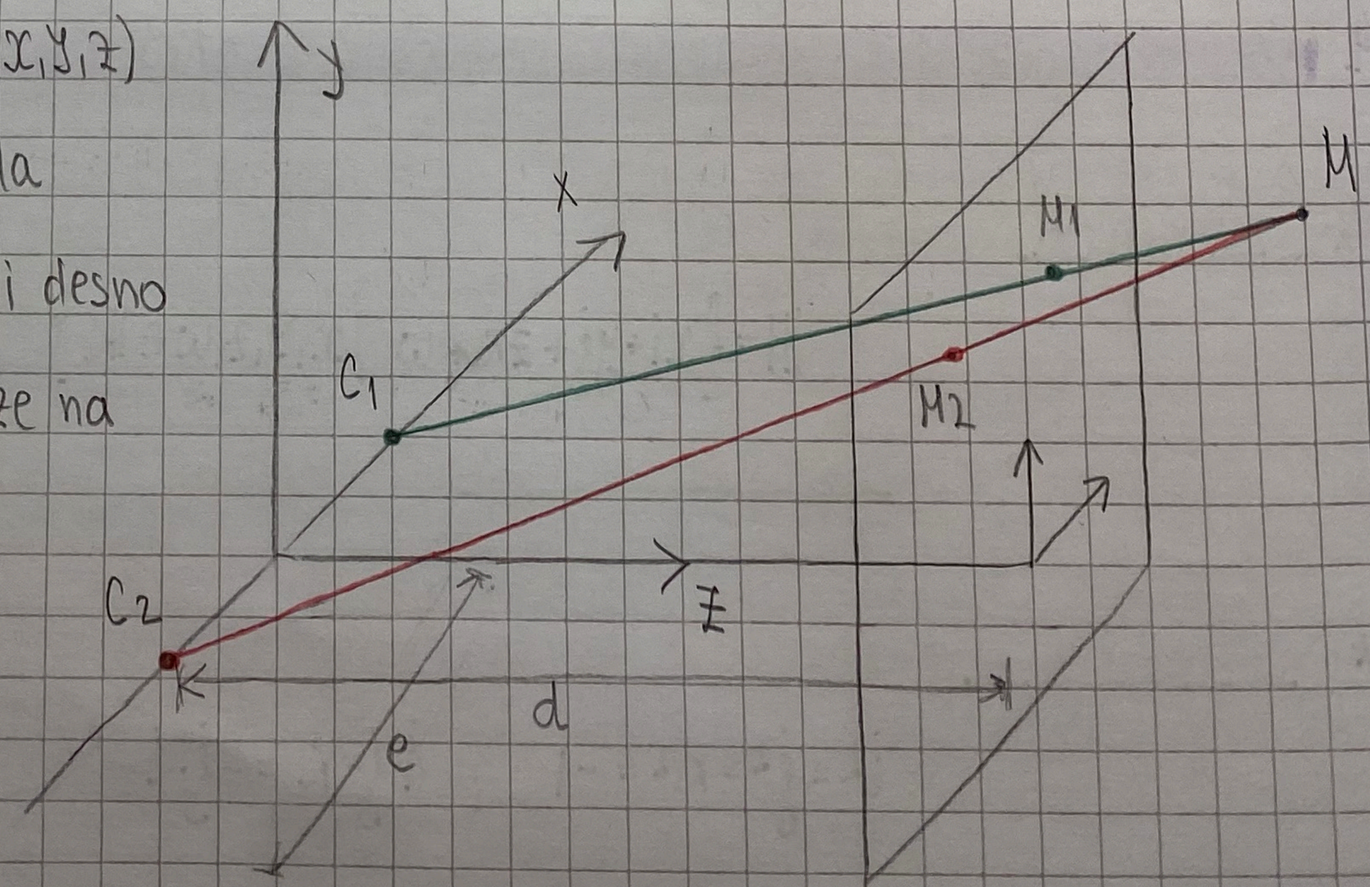
važi $(qq_1)^{-1} = q_1^{-1} q^{-1}$

Primer: Naći inverzni kvaternion kvaterniona $q = 3i - 5k + 1$

$$\left.\begin{aligned} \bar{q} &= -3i + 5k + 1 \\ \|q\|^2 &= \left(\sqrt{3^2 + 5^2 + 1^2}\right)^2 = |9 + 25 + 1| = 35 \end{aligned}\right\} \quad q^{-1} = \frac{-3i + 5k + 1}{35} = -\frac{3}{35}i + \frac{k}{7} + \frac{1}{35}$$

15. Izvesti formulu (50) i nacrtati odgovarajuću sliku. Šta je paralaksa?

* Pretpostavljamo da imamo 3D digitalni model objekta tj (x, y, z) koordinate tačaka. Želimo da vidimo slike koje vide levo i desno oko tj C_1 i C_2 koje se nalaze na nekom rastojanju $e > 0$. Pretpostavljamo da su C_1, C_2 predstavljene centralnom projekcijom na ravan.



* Neka je koordinatni $Oxyz$ sistem (vezan za kamere) takav da su koord. kamera $C_1(\frac{e}{2},0,0)$, $C_2(-\frac{e}{2},0,0)$, a da je ravan π na koju projektujemo data sa $\pi: z=d>0$. Ta projekcijska ravan predstavlja mrežnjaču u slučaju oka, a senzor u slučaju digitalnih kamera

* Rastojanje d se često naziva <u>žižna daljina</u>.
* U ravni π koristimo koordinate (x,y) koje su „nasleđene" od koordinata (x,y,z)

Izvedimo sada koordinate centralnog projektovanja prostora na ravan π iz centara $C_{1/2}$ tj odredimo koordinate tačaka $\{M_i'\} = C_iM \cap \pi$.

Proizvoljna tačka $P(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ prave C_iM se dobija parametarski u obliku

$$P = C_i + t\overrightarrow{C_iM} \quad t \in \mathbb{R}$$

i važi

$$\bar{x} = \pm\frac{e}{2} + t\left(x - \frac{e}{2}\right), \quad \bar{y} = ty, \quad \bar{z} = tz \qquad (49)$$

Pošto $M_i' \in \pi$ tj $\bar{z}=d$, dobijamo $t=\frac{d}{z}$, pa zamenom u jednačine (49) dobijamo

$$M_{1/2}' = \left(\pm\frac{e}{2}\left(1-\frac{d}{z}\right) + \frac{d}{z}x, \ \frac{d}{z}y\right) \qquad (50)$$

$\boxed{\text{Definicija}}$ Rastojanje između tačaka M_1' i M_2' naziva se <u>paralaksa</u>.

* U ovom slučaju (pošto su kamere pomerene po x-osi koja je paralelna ravni projektovanja) i paralaksa je paralelna x-osi i jednaka

$$p = M_1'M_2' = e\left(1-\frac{d}{z}\right) \qquad (51)$$

* $z>d$ paralelan pogled, $z<d$ ukršteni pogled
* Paralaksa je proporcionalna rastojanju e između kamera
* Kada $z\to\infty$ paralaksa raste i teži e

16. Šta je matrica kamere, koje su joj dimenzije i kako se ona može dekomponovati?

* Matrica $T = KA[I_3|-C]$ se zove matrica kamere
* Dimenzije matrica kamere su 3×4 i rang je 3
* Matrica K, dimenzija 3×3 je matrica kalibracije i njen najopšiji oblik je

$$K = \begin{pmatrix} d_x & s & x_0 \\ 0 & d_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* s je parametar smicanja (treba da bude $=0$ osim ako se radi o slici slike)
* $d_x \neq d_y$ samo ako su piksели kamere pravougaoni
* $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \end{pmatrix}$ → matrica centralne projekcije prostora na neku ravan π iz centra C

↳ Centar $C(c_1:c_2:c_3:c_4)$ je nul prostor matrice T tj $TC = (0,0,0)^T$

↳ Afina ravan $t_{31}X + t_{32}Y + t_{33}Z + t_{34} = 0$, određena poslednjom vrstom matrice T, je ravan iščezavanja, tj ravan koja sadrži C i $\parallel$ sa π

QR dekompozicija matrice

$M = QR$ ← gornje trougaona matrica
↑ ortogonalna matrica
} ovo znamo

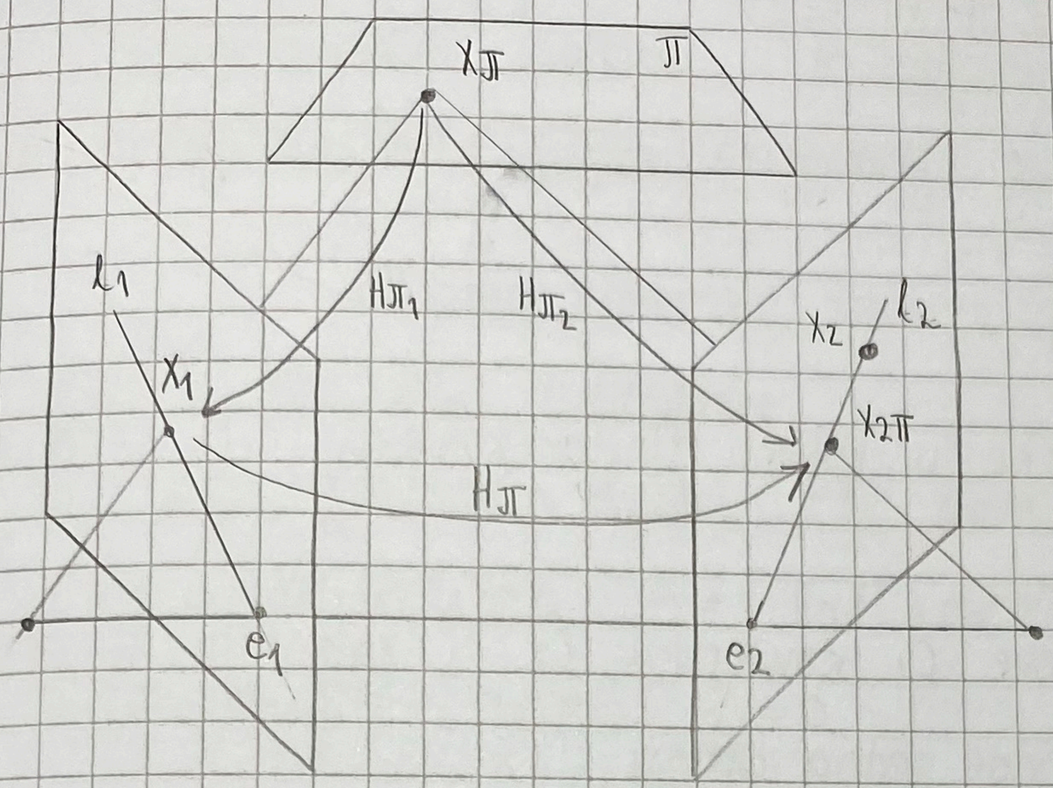
Primetimo da prve tri kolone matrice T čine matricu $T_0 = KA$ (gornje Δ, ortogonalna)

Tako da nam treba RQ dekompozicija, ali mi ćemo je svesti na QR.

$$T_0^{-1} = QR \Rightarrow T_0 = (QR)^{-1} = R^{-1}Q^{-1} = KA$$

$$\Rightarrow K = R^{-1}$$
$$A = Q^{-1}$$

17. Definisati epipolove i epipolarnu liniju. Objasniti relaciju (57)



1. korak : π proizvoljna ravan

$H_{\pi_1} : \pi \to \pi_1$ centralno projektovanje sa centrom C_1

$H_{\pi_2} : \pi \to \pi$ centralno projektovanje sa centrom C_2

Tada za proizvoljnu tačku $x_1 \in \pi_1$ postoji tačka $x_\pi \in \pi$ t.d važi $x_1 = H_{\pi_1} x_\pi$

Neka je $x_{2\pi} \in \pi_2$ tačka takva da važi $x_{2\pi} = H_{\pi_2} x_\pi$ (najverovatnije $x_{2\pi} \neq x_2$ jer smo ravan izabrali proizvoljno) tada važi:

$$x_{2\pi} = H_{\pi_2} x_\pi = H_{\pi_2}(H_{\pi_1}^{-1} x_1) = (H_{\pi_2} \circ H_{\pi_1}^{-1})(x_1) = H_\pi x_1$$

Preslikavanje $H_\pi : \pi_1 \to \pi_2$ je projektivno preslikavanje. Primetimo da: projekcija $x_{2\pi}$ zavisi od ravni π, ali epipolarna ravan l_2 ne zavisi

2. korak

Epipolarna linija tačke x_1 sadrži epipol e_2, pa je određena sa $l_2 = e_2 x_{2\pi}$

Pošto se prava kroz dve tačke u homogenim koordinatama određuje vektorskim proizvodom, važi:

$$l_2 = e_2 \times x_{2\pi} = e_2 \times (H_\pi x_1) = (E_2 H_\pi) x_1 = F x_1 \quad (56)$$

gde je E_2 matrica vektorskog množenja vektorom e_2

Matrica $F = E_2 H_\pi$ formata 3×3 naziva se fundamentalna matrica kamera T_1 i T_2 (tim redom)

Odgovarajuća tačka x_2 tačke x_1, pripada pravoj l_2 što zbog (56) možemo zapisati

$$x_2^T F x_1 = 0 \qquad (57)$$

Fundamentalna matrica F je relacijama (57) određena jedinstveno, do na proporcionalnost.

* Epipolovi e_1 i e_2 su tačke u kojima linija kamera C_1C_2 seče ravan projektovanja
* Epipol e_2 je slika kamere C_1 kamerom C_2 i obrnuto. tj epipolovi su mesta gde kamere vide jedna drugu.
* Fiksiramo jednu projekciju x_1. Tačku X ne možemo jednoznačno odrediti na osnovu x_1 već njoj odgovara ceo zrak C_1x_1. U drugoj ravni tom zraku odgovara cela linija l_2 koju zovemo epipolarna linija tačke x_1, a koju dobijamo u preseku sa epipolarnom ravni.

18. Osobine fundamentalne matrice. Kanonske kamere

Osobine fundamentalne matrice:

↳ F je formata 3×3, ranga 2

Ovo sledi iz relacije $F = E_2 H_\pi$, jer je E_2 ranga 2, a H_π ranga 3

Specijalno $\det F = 0$

↳ Matrica F ima 7 stepeni slobode

↳ Ako je F fundamentalna za T_1 i T_2, tada je F^T fundamentalna za T_2 i T_1

↳ Epipol e_1 je rešenje jednačine $Fe_1 = 0$

Ovo sledi iz $Fe_1 = E_2 H_\pi e_1 = E_2 e_2 = e_2 \times e_2 = 0$

↳ Slično, epipol e_2 je rešenje $F^T e_2 = 0$

* Matrice kamera T_1 i T_2 odgovaraju fundamentalnoj matrici F ako i samo ako $T_2^T F T_1 = 0$

* Ako je F fundamentalna matrica, a e_2 odgovarajući epipol, tada kamere $T_1 = [E|0]$, $T_2 = [E_2F | e_2]$ odgoraraju matrici F

* Matrice T_1 i T_2 nazivamo kanonske kamere fundamentalne matrice F, iako te kamere nisu jedinstvene

Naime, čak i kada fiksiramo matricu T_1 može se pokazati da za matricu T_2 možemo uzeti $T_2 = [E_2F + e_2 v^T | \lambda E_2]$, gde je $\vec{v}$ proizvoljan vektor i $\lambda \neq 0$

19. Koraci projektivne rekonstrukcije. Objasniti triangulaciju.

Koraci projektivne rekonstrukcije

1. Izračunati fundamentalnu matricu F normalizovanim SVD algoritmom (iz najmanje 8 korespodencija (57)). Moramo dobiti da je $\det F = 0$

2. Odredimo epipol e_2 kao rešenje sistema $F^T e_2 = 0$

3. Nekalibrisane matrice kamera su

$$T_1 = [E|0] \quad , \quad T_2 = [E_2F | e_2]$$

gde je E jedinična 3×3 matrica, a E_2 matrica vektorskog množenja vektorom e_2

4. Izračunati prostorne X^i tačke triangulacijom tj presecanjem zrakova

* Triangulacija je rekonstrukcija 3D koordinata tačke na osnovu njene dve (ili više) ravanske projekcije

* Ako su poznate matrice kamera T_1 i T_2, i odgovarajuće projekcije x_1, x_2, treba odrediti tačku X prostora tako da važi

$$x_1 = T_1 X \quad i \quad x_2 = T_2 X$$

Ovde su i x_1 i x_2 tačke ravni, pa možemo uzeti homogene koordinate $x_1(x:y:1)$, $x_2(x':y':1)$ (konačne su). Tačka X je iz prostora, pa su joj koordinate $X(\xi_1:\xi_2:\xi_3:\xi_4)$. Pošto je T_1 matrica formata 3×4, proizvod T_1X možemo zapisati kao 3-vektor kolonu

$$T_1X = (T_1^1X,\ T_1^2X,\ T_1^3X)$$

gde su T_1^1, T_1^2, T_1^3 vrste matrice T_1. Relacija $x_1 = T_1X$ je ekvivalentna sa $x_1 \times T_1X = 0$, odnosno

$$(0,0,0) = (yT_1^3X - T_1^2X,\ -xT_1^3X + T_1^1X,\ xT_1^2X - yT_1^1X)$$

Od te tri jednačine prve dve su nezavisne, pa uzimamo njih.
Slično iz relacije $x_2 = T_2X$ dobijamo dve jednačine.

* Dakle, dobijamo homogen sistem 4 jednačine sa 4 nepoznate $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, koje zadaju traženu tačku X. Naravno, dovoljne su i tri jednačine tog sistema. Matrica, po vrstama tog sistema je

$$\begin{pmatrix} yT_1^3 - T_1^2 \\ -xT_1^3X + T_1^1 \\ y'T_2^3 - T_2^2 \\ -x'T_2^3X + T_2^1 \end{pmatrix}$$

* Elementi poslednje dve jednačine su vrste matrice T_2 druge kamere. Ovaj sistem se može rešavati DLT metodom sa normalizacijom
* Matrice T_1, T_2 kamera su dobijene iz matrice F koja zbog relacije (57) garantuje komplanarnost tih zrakova, te se oni seku, do na numeričke greške