泛函分析

Lin Wenjie

Nanjing Normal University

版本：1.0

更新：2024 年 10 月 11 日

目录

1 距离空间

1.1 距离空间的基本概念

1.1.1 定义与例子

定义 1.1 设 X 是任一非空集合，若对于 X 中的任何两点 x, y，均有一个实数 $d(x, y)$ 与它对应，且满足：

(1) $d(x, y) \geq 0$（非负性）；
(2) $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$（正定性）；
(3) $d(y, x) = d(x, y)$（对称性）；
(4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$（三角不等式）；

则称 $d(x, y)$ 为 X 中的一个距离，定义了距离 d 的集合称为距离空间，记为 (X, d)，有时简记为 X。

例 1.1 在 $\mathbb{R}^n$ 中，可以分别定义

$$d_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|,$$

$$d_\infty(x, y) = \max\left\{|\xi_1 - \eta_1|, \cdots, |\xi_n - \eta_n|\right\},$$

其中 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$，$y = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$。由实数的三角不等式，容易验证 $(\mathbb{R}^n, d_1)$、$(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ 都是距离空间。

例 1.2 连续函数空间 $C[a, b]$：考虑闭区间 $[a, b]$ 上全体连续函数，定义

$$d(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|,$$

其中 $x(t)$、$y(t)$ 是 $[a, b]$ 上的任意两个连续函数，则其是一个距离空间。

证明：距离定义的 (1)、(2)、(3) 显然成立，验证 (4)（三角不等式）如下：设 $x(t)$、$y(t)$、$z(t)$ 是 $[a, b]$ 上任意三个连续函数，使用绝对值三角不等式，对于任意的 $t \in [a, b]$，

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |z(t) - y(t)| \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

因此

$$d(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \leq d(x, z) + d(z, y).$$

$[a, b]$ 上的全体连续函数赋以上述距离成为一个距离空间，这个空间记为 $C[a, b]$。

1.1.2 收敛性

定义 1.2 设 (X,d) 是一个距离空间，$\{x_n\}\subset X$，$x_0\in X$，如果当 $n\to\infty$ 时，$d(x_n,x_0)\to 0$，则称 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限，或者说 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0，记为

$$x_n\to x_0\ (n\to\infty),\qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

注 1.1 x_0 必须要属于 X.

定理 1.1 设 $\{x_n\}$ 在 X 中收敛，则以下结论成立：

- $\{x_n\}$ 的极限是唯一的；
- 如果 x_0 是 $\{x_n\}$ 的极限，那么 $\{x_n\}$ 的任何子列也收敛到 x_0；

定理 1.2 $d(x,y)$ 是关于 x 和 y 的二元连续函数，即当 $x_n\to x$，$y_n\to y$ $(n\to\infty)$ 时，$d(x_n,y_n)\to d(x,y)$ $(n\to\infty)$。

证明. 因为

$$d(x_n,y_n)\le d(x_n,x)+d(x,y)+d(y,y_n),$$

所以

$$d(x_n,y_n)-d(x,y)\le d(x_n,x)+d(y_n,y).$$

同理可得

$$d(x,y)-d(x_n,y_n)\le d(x_n,x)+d(y_n,y).$$

于是有

$$|d(x_n,y_n)-d(x,y)|\le d(x_n,x)+d(y_n,y)\to 0\ (n\to\infty).$$

例 1.3 $C[a,b]$ 空间中的收敛性：设 $x_n=x_n(t)\ (n=1,2,\cdots)$，$x=x(t)\in C[a,b]$，$d(x_n,x)\to 0$，即

$$\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|\to 0\ (n\to\infty).$$

此时有如下结论：

- $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n\ge N$ 时，$\forall t\in[a,b]$，有 $|x_n(t)-x(t)|\le\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon$，即 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛到 $x(t)$；
- 反之，由 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛到 $x(t)$ 可以推出 $d(x_n,x)\to 0$；

也就是说，$C[a,b]$ 中的收敛性是函数列在 $[a,b]$ 上的一致收敛。

例 1.4 设 X 表示由 $[0,1]$ 区间上全体连续函数组成的集合，定义

$$d_2(x,y)=\left(\int_0^1|x(t)-y(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

可证明 $d_2(x,y)$ 是 X 上的距离，考虑 (X,d_2) 中的点列 $\{x_n\}$：

$$x_n(t)=\begin{cases}1-nt, & 0\le t\le \frac{1}{n}\\ 0, & \frac{1}{n}<t\le 1\end{cases}$$

则 $\{x_n\}$ 按距离 $d_2(x,y)$ 收敛到 $x_0\equiv 0$，具体验证如下：

$$\begin{aligned}d_2\left(x_n,x_0\right)&=\left[\int_0^1\left|x_n(t)-x_0(t)\right|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}\\&=\left[\int_0^{\frac{1}{n}}(1-nt)^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}\\&=(3n)^{-\frac{1}{2}}\to 0\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

注 1.2

- 由于 $x_n(0)\equiv 1$，故 $\{x_n\}$ 并不一致收敛到 x_0，即 $\{x_n\}$ 在 $C[0,1]$ 中并不收敛到 x_0；也就是说这个空间中点列（函数列）的收敛与 $C[0,1]$ 中点列的收敛的“具体意义”有很大的不同；
- 上述例子可见，同一个点列在不同的距离空间收敛性会很不相同；事实上这个点列 $\{x_n\}$ 在空间 $C[0,1]$ 中，$\forall N$，$\exists n,m>N$，有 $d(x_n,x_m)\ge\frac{1}{2}$，即在空间 $C[0,1]$ 中，这个点列不是 Cauchy 列，它不收敛 ($C[0,1]$ 是一个完备空间, 这一点后面会提到).

例 1.5 设 s 是全体实数列组成的集合，定义

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|},$$

其中 $x=\{\xi_k\}$，$y=\{\eta_k\}$，则有如下结论：

- s 为距离空间；
- s 中的收敛是按坐标收敛,即 $x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_k^{(n)},\cdots)\in s$,$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)\in s$，“$d(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$” 等价于 “$\forall k$，$\xi_k^{(n)}\to\xi_k\ (n\to\infty)$”；

证明. (1) 证明 s 为距离空间：距离定义的 (1)、(2)、(3) 显然成立，仅验证 (4)（三角不等式）：考虑函数 $\varphi(t)=\frac{t}{1+t}=1-\frac{1}{1+t}$，$t\in(0,\infty)$，$\varphi(t)$ 是单增的。设 $x=\{\xi_k\}$，$y=\{\eta_k\}$，$z=\{\zeta_k\}$，由于

$$|\xi_k-\eta_k|\le|\xi_k-\zeta_k|+|\zeta_k-\eta_k|,$$

则

$$\begin{aligned}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}&\le\frac{|\xi_k-\zeta_k|+|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|+|\zeta_k-\eta_k|}\\&\le\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}+\frac{|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\zeta_k-\eta_k|}.\end{aligned}$$

在上面不等式两边乘以 $\frac{1}{2^k}$ 并求和有

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}\\
&\le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\zeta_k-\eta_k|}\\
&= d(x,z)+d(z,y).
\end{aligned}
$$

故 s 为距离空间。

(2) 证明 s 中的收敛是按坐标收敛：

- 必要性：设 $\{x_n\}$ 在 s 中收敛，$d(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$，则 $\forall k\in\mathbb{N}^+$，$\forall\varepsilon>0$，令 $\varepsilon_0=\frac{1}{2^k}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}>0$，于是 $\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $d(x_n,x)<\varepsilon_0$，即：

$$
d(x_n,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|}{1+\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|}<\varepsilon_0=\frac{1}{2^k}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},
$$

  结合 $\varphi(t)=\frac{t}{1+t}$ 是单增的，可得 $|\xi_k^{(n)}-\xi_k|<\varepsilon$，即 $\xi_k^{(n)}\to\xi_k\ (n\to\infty)$；
- 充分性：$\forall\varepsilon>0$，$\exists K$，$\sum_{k=K+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\frac{1}{2}\varepsilon$。由于 $\xi_k^{(n)}\to\xi_k\ (n\to\infty)\ (k=1,2,\cdots,K)$，所以存在 N，当 $n>N$ 时，$|\xi_k^{(n)}-\xi_k|<\frac{1}{2}\varepsilon\ (k=1,2,\cdots,K)$。于是当 $n>N$ 时，

$$
\begin{aligned}
d(x_n,x) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|}{1+\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|}\\
&= \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{2^k}\frac{\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|}{1+\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|}+\sum_{k=K+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|}{1+\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|}\\
&< \frac{1}{2}\varepsilon\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=K+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

  即 $\{x_n\}$ 在 s 中收敛到 x；

综上，s 中的收敛是按坐标收敛。

注 1.3 在上述证明的最后一个公式处，由级数的收敛性，先让后面项的和“很小”，再对前面的有限项进行估计，这是很常用的办法。

例 1.6 空间 S：S 中的元素为 E 上全体几乎处处有限的可测函数，其中 $E\subset\mathbb{R}$ 是一个 Lebesgue 可测集，且 $mE<\infty$。$x=x(t)$，$y=y(t)\in S$，定义

$$
d(x,y)=\int_E\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\,dt.
$$

则有如下结论：

- S 为距离空间；
- S 中的收敛是按测度收敛，即 $d(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$，等价于 $x_n \overset{m}{\to} x\ (n\to\infty)$（依测度收敛）；

证明. 1. 证明 S 为距离空间：与例 1.1.14（空间 s）的证明类似，可验证距离定义的 (1)、(2)、(3)（非负性、严格正、对称性）成立，且三角不等式满足，故 S 为距离空间，记为 S。

2. 证明 S 中的收敛是按测度收敛：

- 必要性：由 $d(x_n,x)\to 0$ 推出 $x_n \overset{m}{\to} x\ (n\to\infty)$。事实上，$\forall\sigma>0$，令 $E_1=\{t\in E||x_n(t)-x(t)|<\sigma\}$，$E_2=\{t\in E||x_n(t)-x(t)|\geq\sigma\}$，$E=E_1\cup E_2$。注意到
$$\begin{aligned}d\left(x_n,x\right)&=\int_E\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt\\&\geq\int_{\{t\in E||x_n(t)-x(t)|\geq\sigma\}}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt.\end{aligned}$$
因为 $\frac{t}{1+t}$ 单增，而 $|x_n(t)-x(t)|\geq\sigma$，于是
$$\begin{aligned}d\left(x_n,x\right)&\geq\int_{\{t\in E||x_n(t)-x(t)|\geq\sigma\}}\frac{\sigma}{1+\sigma}dt\\&=\frac{\sigma}{1+\sigma}m\left\{t\in E||x_n(t)-x(t)|\geq\sigma\right\}.\end{aligned}$$
由于 $d(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$，$\sigma$ 给定，故 $m\{t\in E||x_n(t)-x(t)|\geq\sigma\}\to 0\ (n\to\infty)$，即 $x_n \overset{m}{\to} x\ (n\to\infty)$；
- 充分性：由 $x_n(t) \overset{m}{\to} x(t)\ (n\to\infty)$ 推出 $d(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$。事实上
$$\begin{aligned}d\left(x_n,x\right)&=\int_E\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt\\&=\int_{E_1}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt+\int_{E_2}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt\\&\leq\int_{E_1}\frac{\sigma}{1+\sigma}dt+\int_{E_2}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}dt\leq\frac{\sigma}{1+\sigma}mE+mE_2.\end{aligned}$$
$\forall\varepsilon>0$，取 $\sigma_0 mE<\frac{\varepsilon}{2}$，对这个 $\sigma_0>0$，由 $mE_2=m\{t\in E||x_n(t)-x(t)|\geq\sigma_0\}\to 0$，存在 N，当 $n\geq N$ 时，$mE_2<\frac{\varepsilon}{2}$。于是
$$d(x_n,x)\leq\frac{\sigma_0}{1+\sigma_0}mE+mE_2<\sigma_0 mE+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$
即 $d(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty)$；

综上，S 中的收敛是按测度收敛。

1.2 开集和连续映射

1.2.1 开集、邻域

定义 1.3 (开球、闭球、球面) 设 (X, d) 是一个距离空间，$r > 0$，集合

$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$

称为以 x_0 为中心、r 为半径的开球（Open ball）；集合

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$$

称为以 x_0 为中心、r 为半径的闭球（Closed ball）；集合

$$S(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$$

称为以 x_0 为中心、r 为半径的球面（Sphere）。

定义 1.4 (有界集) 设 X 是一个距离空间,$A \subset X$,若存在开球 $B(x_0, r)$,使得 $A \subset B(x_0, r)$,则称 A 是有界集。

定义 1.5 (内点) 设 X 是一个距离空间，$G \subset X$，对于 $x_0 \in G$，若存在开球 $B(x_0, r)$，使得 $B(x_0, r) \subset G$，则称 x_0 为 G 的内点。

定义 1.6 (开集、邻域) 设 X 是一个距离空间，$G \subset X$，若 G 的每一个点都是内点，则称 G 是一个开集。

对于 $x \in X$，包含 x 的任何一个开集称为 x 的一个邻域。

定理 1.3 (开集的性质) 设 X 是距离空间，X 中的开集具有以下性质：

- (1) 全空间与空集是开集；
- (2) 任意多个开集的并集是开集；
- (3) 任意有限多个开集的交集是开集。

证明. (1) 是显然的。

(2) 设 G_α 是开集（其中 $\alpha \in I$），要证明 $G = \cup_{\alpha \in I} G_\alpha$ 是开集。$\forall x \in G$，$\exists \alpha_0 \in I$，使得 $x \in G_{\alpha_0}$。因为 G_{α_0} 是开集，存在开球 $B(x, r)$，使得 $B(x, r) \subset G_{\alpha_0} \subset G$，所以 G 是开集。

(3) 设 $G = \cap_{k=1}^n G_k$（其中 G_k 是开集，$k = 1, 2, \cdots, n$）。$\forall x \in G$，则 $x \in G_k$（$k = 1, 2, \cdots, n$）。因为 G_k 是开集，所以存在 $B(x, r_k) \subset G_k$。取 $r = \min_{1 \leq k \leq n} r_k$，则 $B(x, r) \subset B(x, r_k) \subset G_k$（$k = 1, 2, \cdots, n$），即 $B(x, r) \subset \cap_{k=1}^n G_k$。由定义，$G$ 是开集。

1.2.2 连续映射

定义 1.7 (连续映射、等距映射) 令 (X,d)、(X_1,d_1) 是距离空间，$T:X\to X_1$ 是一个映射，$x_0\in X$。如果对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $d(x,x_0)<\delta$ 时有

$$d_1\left(T(x),T\left(x_0\right)\right)<\varepsilon$$

则称 T 在 x_0 连续。若 T 在 X 中的每一点都连续，则称 T 在 X 上连续。

特别地，如果

$$d(x,y)=d_1(T(x),T(y)),\forall x,y\in X$$

则称 T 是等距映射。

定理 1.4 (连续映射的开集语言定义) 设 T 是从距离空间 (X,d) 到距离空间 (X_1,d_1) 的映射，则 T 是连续的当且仅当 (X_1,d_1) 中任何开集的原像仍然是 (X,d) 中的开集。

证明. **必要性**：设 T 是连续的，$S_1\subset X_1$ 是开的，$S\subset X$ 是 S_1 的原像。

- 若 $S=\emptyset$，则命题成立；
- 若 $S\neq\emptyset$，$\forall x_0\in S$，令 $y_0=Tx_0$，则 $y_0\in S_1$。因为 S_1 是开的，存在 $B_1(y_0,\varepsilon)\subset S_1$。
- 因为 T 是连续的，对上述 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $TB(x_0,\delta)\subset B_1(y_0,\varepsilon)\subset S_1$，这意味着 $B(x_0,\delta)\subset S$，即 x_0 是一个内点。
- 由于 x_0 是任意的，故 S 是开集。

充分性：设 (X_1,d_1) 中任何开集的原像仍然是 (X,d) 中的开集。

- $\forall x_0\in X$ 和 $\forall\varepsilon>0$，$B_1(Tx_0,\varepsilon)$ 在 X_1 中是开的，故其原像 $T^{-1}B_1(Tx_0,\varepsilon)$ 是开的，且 $x_0\in T^{-1}B_1(Tx_0,\varepsilon)$。
- 因此 $T^{-1}B_1(Tx_0,\varepsilon)$ 包含一个 x_0 的 δ 邻域 $B(x_0,\delta)$，即 $TB(x_0,\delta)\subset B_1(Tx_0,\varepsilon)$，故 T 在 x_0 点连续。
- 由于 x_0 是任意的，故 T 在 X 上连续。

定理 1.5 (海涅定理) 设 T 是从距离空间 (X,d) 到距离空间 (X_1,d_1) 的映射，则 T 在 x_0 点连续的充分必要条件是：对于每个满足 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$ 的点列，都有

$$\lim_{n\to\infty}T\left(x_n\right)=T\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)$$

证明. **必要性**：设 T 是连续的，点列 $\{x_n\}$ 收敛且 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$。

- $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $d(x,x_0)<\delta$ 时，有 $d_1(T(x),T(x_0))<\varepsilon$；
- 因为 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$，存在 N，当 $n>N$ 时，$d(x_n,x_0)<\delta$；

- 因此 $d_1(T(x_n), T(x_0)) < \varepsilon$，即 $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0) = T(\lim_{n\to\infty} x_n)$。

充分性：设 “$x_n \to x_0\ (n\to\infty)$ 可推出 $T(x_n)\to T(x_0)$”，假设 T 在 x_0 点不连续。

- 则存在 $\varepsilon_0 > 0$，对任意 $\delta > 0$，存在 x_δ 使得 $d(x_\delta, x_0) < \delta$ 但 $d_1(T(x_\delta), T(x_0)) \geq \varepsilon_0$；
- 对应于 $\delta = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$，有 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 满足 $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ 但 $d_1(T(x_n), T(x_0)) \geq \varepsilon_0\ (n = 1, 2, \cdots)$；
- 即 $x_n \to x_0\ (n\to\infty)$，但 $T(x_n)$ 不趋于 $T(x_0)$，与条件矛盾，故假设不成立，T 在 x_0 点连续。

注 1.4 上述定理说明，如果 T 连续，则极限运算可以和 T 交换顺序。

例 1.7 设 $X = C[a,b]$，令 $T(x) = \int_a^b x(t)dt$，则 T 是从 $C[a,b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射。

由于

$$\left|\int_a^b x(t)dt - \int_a^b y(t)dt\right| \leq \int_a^b |x(t)-y(t)|dt \leq |b-a| d(x,y)$$

所以 T 是连续的。

当 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$ 中的收敛序列时，由定理 1.5有

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \int_a^b \lim_{n\to\infty} x_n(t)dt$$

注意到 $\{x_n(t)\}$ 在 $C[a,b]$ 中的收敛是一致收敛，上式式意味着当 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛时，积分和极限可以交换顺序，这是数学分析中熟知的结论。

1.3 闭集可分性列紧性

1.3.1 闭集

定义 1.8 设 X 是一个距离空间，集合 $A \subset X$ 称为是闭的，若它的补集 $A^c = X \setminus A$ 是开的。

定理 1.6 设 X 是一个距离空间，则 $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$ 和 $S(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$ 是闭集。

证明：(1) 设 $y \in \bar{B}(x_0, r)^c$，则 $d(y, x_0) = \alpha > r$。令 $\beta = \alpha - r > 0$，对任意 $z \in B(y, \beta)$，有

$$d(x_0, z) \geq d(y, x_0) - d(y, z) = \alpha - d(y, z) > \alpha - \beta = r.$$

故 $B(y,\beta) \subset \bar{B}(x_0, r)^c$，即 $\bar{B}(x_0, r)^c$ 是开的，于是 $\bar{B}(x_0, r)$ 是闭集。

(2) 由 $S(x_0,r)^c = B(x_0,r)\cup \bar{B}(x_0,r)^c$ 是开的，因此 $S(x_0,r)$ 是闭集。

定理 1.7 设 (X,d) 是一个距离空间，则：

- (1) 全空间与空集是闭集；
- (2) 任意多个闭集的交是闭集；
- (3) 有限多个闭集的并是闭集。

证明. 利用开集的性质以及地摩根定律可以证明。

定义 1.9 设 X 是一个距离空间，$A\subset X$，$x\in X$。如果对任意 $\varepsilon>0$，球 $B(x,\varepsilon)$ 中都包含 A 中的点，即

$$B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset \quad (\forall\varepsilon>0)$$

则称 x 为 A 的接触点。

注 1.5 A 中的点一定是 A 的接触点，A 的接触点可能属于 A 也可能不属于 A。很多地方都称之为极限点，A 中的点一定是接触点。

定义 1.10 设 X 是一个距离空间，$A\subset X$，$x\in X$。如果对任意 $\varepsilon>0$，球 $B(x,\varepsilon)$ 中都包含 A 中不同于 x 的点，即

$$B(x,\varepsilon)\cap (A\setminus\{x\})\neq\emptyset \quad (\forall\varepsilon>0)$$

则称 x 为 A 的聚点。

注 1.6 聚点一定是接触点，反过来不一定。

定义 1.11 设 X 是一个距离空间，$A\subset X$，则 A 的接触点的全体称为 A 的闭包，记为 $\bar{A}$。

注 1.7 因为 A 中的点一定是 A 的接触点，所以 $A\subset\bar{A}$。

定理 1.8 设 X 是一个距离空间，$A\subset X$，则 A 是闭集当且仅当 $A=\bar{A}$。

证明：“$\Leftarrow$”分析：“$A=\bar{A}\Rightarrow A$ 是闭集”。只要证明 A^c 是开的。

令 $x\in A^c$，由于 $A=\bar{A}$，故 x 不是 A 的接触点，于是存在 $\varepsilon_0>0$，使得 $B(x,\varepsilon_0)\cap A=\emptyset$，即 $B(x,\varepsilon_0)\subset A^c$。因此 A^c 是开的，即 A 是闭集。

“$\Rightarrow$”分析：“A 是闭集 $\Rightarrow A=\bar{A}$”。由于 $A\subset\bar{A}$，只需证明 $\bar{A}\subset A$。

令 $x\in\bar{A}$，假若 $x\notin A$，即 x 属于开集 A^c，于是存在 $\varepsilon_0>0$，$B(x,\varepsilon_0)\subset A^c$，即 $B(x,\varepsilon_0)\cap A=\emptyset$，这和 $x\in\bar{A}$ 矛盾。

定理 1.9 设 X 是一个距离空间，$A\subset X$，则 A 是闭集当且仅当 A 中收敛点列 $\{x_n\}\subset A$ 的极限属于 A。

注 1.8 这意味着在闭集里极限运算是封闭的。

证明："⇒" 设 A 是闭的，且 $\{x_n\} \subset A$ 收敛，$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$，要证明 $x_0 \in A$。

由 $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ 可知，对任意 $\varepsilon > 0$，都有 x_n（n 充分大）满足 $d(x_n, x_0) < \varepsilon$，即 $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$。这表明 x_0 是 A 的接触点，所以 $x_0 \in \bar{A}$。由 A 是闭集，即 $A = \bar{A}$，所以 $x_0 \in A$。

"⇐" 假定每个收敛点列的极限都属于 A，要证 A 是闭集。根据定理 1.3.10，只要证明 $A = \bar{A}$，即由 $x_0 \in \bar{A}$ 推出 $x_0 \in A$。

令 $x_0 \in \bar{A}$，根据闭包的定义，对任意 $n \in \mathbb{N}$，在 $B(x_0, \frac{1}{n}) \cap A$ 中至少存在一点 x_n。显然 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$，由已知得 $x_0 \in A$。因此 A 是闭的。

定义 1.12 （点到集合的距离）设 X 是一个距离空间，$A \subset X$，$x \in X$，称

$$d(x, A) = \inf\{d(x, \omega) \mid \omega \in A\}$$

为点 x 到集合 A 的距离。

注 1.9 由定理 1.3.10、1.3.11 可以证明

$$\bar{A} = \{x \mid d(x, A) = 0\}$$

且 $\bar{A}$ 是包含 A 的最小闭集。

1.3.2 可分的距离空间

定义 1.13 （稠密集）设 A, B 是距离空间 X 中的点集，如果 $\bar{B} \supset A$，则称 B 在 A 中稠密。

用 $\varepsilon - \delta$ 语言描述：对任意 $x \in A$，因为 $A \subset \bar{B}$，所以 $x \in \bar{B}$，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $B(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$，即存在 $y \in B$，使得 $d(x, y) < \varepsilon$。也就是说 A 中的每一点都可以用 B 中的点来逼近。

定义 1.14 （可分距离空间）设 X 是距离空间，如果 X 中存在一个可数稠密子集，则称 X 是可分的。对于子集 $A \subset X$，如果 X 中存在可数子集 B，使得 B 在 A 中稠密，则称 A 是可分的。

由定义有：

定理 1.10 距离空间 (X, d) 是可分的当且仅当存在 X 中的一个具有下列性质的可数集 $\{x_n\}$：对任意 $x \in X$ 和任意 $\varepsilon > 0$，至少存在一个 $x_k \in \{x_n\}$，使得 $d(x_k, x) < \varepsilon$。

注 1.10 该命题说明可分距离空间中有一个可数集，使得任意一点都可用这个可数集的点来逼近。

例 1.8 $C[a,b]$(见例 1.2) 是可分的。

分析：只要找到 $C[a,b]$ 中的可数稠密子集 $\{x_n(t)\}$ 即可。证明思路：连续函数用多项式来逼近，多项式用有理多项式来逼近，而全体有理系数多项式是 $C[a,b]$ 中的可数子集，所以 $C[a,b]$ 可分。

证明：(1) 由 Weierstrass 定理，对任意 $x(t)\in C[a,b]$，存在多项式 $P_n(t)$ 一致收敛到 $x(t)$。即对任意 $x(t)\in C[a,b]$，任意 $\varepsilon>0$，存在 $P_n(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n$（其中 $a_i\in\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n)$），使得

$$|P_n(t)-x(t)|<\varepsilon \quad (\forall t\in[a,b])$$

(2) 而 $P_n(t)$ 又可以用 $P_n^r(t)$ 一致逼近，这里 $P_n^r(t)=r_0+r_1t+\cdots+r_nt^n$（其中 $r_0,\cdots,r_n$ 是有理数）。$\{P_n^r(t)\}$ 是可数的，所以 $C[a,b]$ 是可分的。

例 1.9 序列空间 l^∞：令 $l^\infty=\{x=(\xi_j)\mid|\xi_j|\le c_x\}$（其中 c_x 与 j 无关），即 l^∞ 是全体有界的数列。在 l^∞ 中定义

$$d(x,y)=\sup_{j\in\mathbb{N}_+}\{|\xi_j-\eta_j|\}$$

其中 $x=(\xi_j)$，$y=(\eta_j)\in l^\infty$，并且 $\mathbb{N}_+=\{1,2,\cdots\}$。容易验证 l^∞ 是一个距离空间。下面证明 l^∞ 是不可分的。

证明：(1) 设 $x=\{\xi_k\}$（其中 $\xi_k=0$ 或者 1），这样的 x 的全体记为 A。显然 A 的势是连续统（二进位制小数对应 $(0,1]$ 上的全体实数）。对任意 $x,y\in A$，$x\neq y$，则 $d(x,y)=\sup_k|\xi_k-\eta_k|=1$。

(2) 假若 l^∞ 可分，则存在可数的稠密子集 E。对任意 $x\in E$ 作开球 $B(x,\frac{1}{3})$，则 $l^\infty\subset\bigcup_{x\in E}B(x,\frac{1}{3})$，于是 $A\subset\bigcup_{x\in E}B(x,\frac{1}{3})$。由于 A 是不可数集，所以至少存在一个 $x_0\in E$ 以及两个不同的元素 $x,y\in A$，使得 $x,y\in B(x_0,\frac{1}{3})$，这与 $d(x,y)=1$ 矛盾，故 l^∞ 不可分。

例 1.10 空间 s (见例 1.5) 可分。

我们知道：s 是全体实数列组成的集合，其上距离为

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}$$

证明：(1) 令 $s_0=\{(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,0,\cdots)\}$（其中 $r_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是有理数），所以 s_0 是可数集。

(2) 下面证明 s_0 是 s 的稠子集。

对任意的 $x \in s$，$x = (\xi_1, \cdots, \xi_j, \cdots)$，由于 s 中的收敛是按坐标收敛，对于每一个 $\xi_j (j = 1, 2, \cdots)$，存在 $r_j^{(n)} \to \xi_j (n \to \infty)$（其中 $r_j^{(n)}$ 是有理数）。令

$$x_n = (r_1^{(n)}, r_2^{(n)}, \cdots, r_j^{(n)}, \cdots, r_n^{(n)}, 0, \cdots)$$

则 $x_n \to x$，且 $x_n \in s_0$。所以 s 可分。

注 1.11 l^∞ 是全体有界的实数列，从集合的角度来看，l^∞ 是 s 的一个子集合。但作为距离空间，l^∞ 不可分，而 s 可分，其原因在于两个距离空间中距离定义的方式不同。

1.3.3 列紧的距离空间

定义 1.15 设 A 是距离空间 X 中的一个子集，如果 A 中的每一个无穷点列都有一个收敛的子列，则称 A 是列紧的集合。

如果 X 中每一个无穷点列都有一个收敛的子列, 则称距离空间 X 是列紧空间。

闭的列紧集称为是自列紧集。

注 1.12

- 列紧集的子集是列紧的。
- 根据定义，一个集合 A 是自列紧的，要求收敛子列的极限必须在 A 中。
- 自列紧集也可以定义为集合内部的点列都有收敛子列，且极限带点在该集合.
- 易证列紧空间一定是完备空间。

定理 1.11 设 X 是一个距离空间，$A \subset X$ 是列紧集，则 A 是有界集。

证明. 假设 A 是无界的，于是可从 A 中选取一个点列 $\{y_n\}$，使得 $d(y_n, a) > n$（其中 a 是 X 中的一个点）。由于这个点列的任何子列都是无界的，所以这个点列没有收敛的子列（因为收敛的点列是有界的），这与 A 是列紧集相矛盾，所以 A 有界。

注 1.13

- 自列紧集是有界闭集。
- 在一般的距离空间中，有界的闭集不一定是列紧的（反例可以从无限维空间找，比如 l^∞ 中的标准基集合）。

定理 1.12 设 f 是定义在列紧的距离空间 (X, d) 上的实值连续函数，则 f 是有界的，即

$$M = \sup\{f(x) \mid x \in X\}, \quad m = \inf\{f(x) \mid x \in X\}$$

是有限的。进一步，存在点 $x_{\max}$ 和点 $x_{\min}$，使得

$$f(x_{\max}) = M, \quad f(x_{\min}) = m$$

证明的方法与数学分析中证明闭区间上连续函数性质的方法类似。

定理 1.13 （Arzela 定理）$C[a,b]$ 中的子集 A 是列紧的当且仅当 A 中的函数是一致有界和等度连续的。

一致有界：即存在 $K>0$，使得对于每一点 $t\in[a,b]$ 及一切 $x\in A$，

$$|x(t)|\leq K$$

等度连续：对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时，对任意 $x\in A$ 有

$$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$$

1.3.4 完全有界

下面我们从完全有界的角度来研究讨论距离空间的紧性。

定义 1.16 设 A,B 是距离空间 X 中的点集，$\forall\varepsilon>0$，如果对于每一个 $x\in A$，存在 $y\in B$，使得 $d(x,y)<\varepsilon$，则称 B 是 A 的 ε-网。

设 $A\subset X$，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，A 有有穷的 ε-网，则称 A 是完全有界集。

注 1.14

- 完全有界集是有界集。
  事实上，令 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是 A 的有穷的 1-网，即 $\varepsilon=1$。于是 $\forall x\in A$，$\exists x_k$，使得 $d(x_k,x)<1$。所以
  $$d(x,x_n)\leqslant d(x,x_k)+d(x_k,x_n)<1+d(x_k,x_n)\leqslant 1+M,$$
  其中 $M=\max\{d(x_k,x_n)\mid k=1,2,\cdots,n-1\}$，所以 A 有界。
- 有界集不一定是完全有界集。反例：l^∞ 中的标准正交列 $\{e^i\}_{i=1,\ldots,\infty}$，他是有界的，但是没有有穷 $\frac{1}{2}-$ 网。而且有限维空间中有界集确实是完全有界集。
- 如果 A 是完全有界集，对于每一个 $\varepsilon>0$，可以从 A 中选取它的一个有穷子集，作为 A 的 ε-网。(区别在于之前的定义不要求有穷的 $\varepsilon-$ 网是 A 的子集，这里可以进一步将有穷的 $\varepsilon-$ 网限制在 A 中)。事实上：
  设 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是 A 的有穷的 $\frac{\varepsilon}{2}$-网。若 $A\cap S(x_k,\frac{\varepsilon}{2})\neq\varnothing$，取 $x_k'\in A\cap S(x_k,\frac{\varepsilon}{2})$，则对于 $\forall x\in A$，$\{x_1',x_2',\cdots,x_n'\}\subset A$(实际有穷集里面元素的数量可能少于 n)，且存在 x_k'，使得
  $$d(x_k',x)\leqslant d(x_k',x_k)+d(x_k,x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$
  即 $\{x_1',x_2',\cdots,x_n'\}\subset A$ 是 A 的 ε-网。

定理 1.14 如果 A 是完全有界集，则 A 是可分的。

证明. 因为 A 是完全有界集，所以对于 $\forall n$，存在 A 的有穷的 $\frac{1}{n}$-网 B_n，B_n 是有限集，令 $B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$，$B$ 是 A 中的至多可数子集，且 B 在 A 中稠密。所以 A 可分。

定理 1.15 (列紧和全有界的关系) 设 A 是距离空间 X 中的列紧集，则 A 是完全有界的。如果 X 是完备的，则当 A 是完全有界集时，可推出 A 是列紧的。

证明.

- "$\Rightarrow$"（列紧 $\Rightarrow$ 完全有界）
  假若不然，存在 $\varepsilon_0>0$，A 没有有限的 ε_0-网。即 $\forall x_1\in A$，$\exists x_2\in A$，使得 $d(x_1,x_2)\geqslant\varepsilon_0$（假若不然，$\{x_1\}$ 是 A 的 ε_0-网）。同样 $\exists x_3\in A$，使得 $d(x_1,x_3)\geqslant\varepsilon_0$，$d(x_2,x_3)\geqslant\varepsilon_0$，否则 $\{x_1,x_2\}$ 是 A 的 ε_0-网。这样一直做下去，于是存在 $\{x_n\}\subset A$，$d(x_n,x_m)\geqslant\varepsilon_0\ (n\neq m)$。显然 $\{x_n\}$ 无收敛子列，与列紧性矛盾。
- "$\Leftarrow$"（当空间是完备时，完全有界 $\Rightarrow$ 列紧）
  - 不妨设 A 为无穷集合，因为有穷集合一定是列紧的。
  - 因为 A 完全有界，所以存在有穷的 1-网，所以存在一个以 1-网中的点为中心、以 1 为半径的开球 S_1，在 S_1 中有 A 中的无穷多个点。
  - 令 $A\cap S_1=A_1$, 因为 A_1 完全有界，所以它有 $\frac{1}{2}$-网，即存在一个以 $\frac{1}{2}$-网中的点为中心、以 $\frac{1}{2}$ 为半径的开球 S_2，在 S_2 中有 A_1 中的无穷多个点。
  - 一直做下去，可以得到一列无穷集 $A\supset A_1\supset A_2\supset\cdots$，及一列球 $S_1,S_2,\cdots$，且 $S_n\supset B_n$，S_n 的半径为 $\frac{1}{n}$。
  - 取 $x_1\in A_1$，$x_2\in A2\setminus\{x_1\}$，$\cdots$，$x_n\in A_n\setminus\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\}$，$\cdots$。我们得到点列 $\{x_n\}\subset A$。因为 $A_n\subset S_n$，$A_{n+1}\subset A_n\subset S_n\ (n=1,2,\cdots)$，所以当 $m\geqslant n$ 时，$d(x_n,x_m)\leqslant\frac{2}{n}$。即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，因为 X 完备，所以 $\{x_n\}$ 收敛。故 A 是列紧集。

注 1.15 定理说明，在完备的距离空间，列紧性和完全有界性是等价的。

我想为什么要提出完全有界这个概念呢？回想一下在实数系当中有界集和列紧集等价，那么能不能在一般的距离空间当中有着一性质呢？注意到我们之前提到过列紧集一定有界，但是有界集合不一定列紧啊，因此需要另一个概念。

注意到在实数系证明有界集一定列紧时，一个经典的证明方法是对这个有界集进行任意无限细小有限分割的操作 (在任何一本数学分析书上都可以找到)，并利用完备性得到一个收敛的子列。于是可能是受此启发，我们将可以进行任意无限细小有限分割的集合称为完全有界集合 (在有限维空间当中有限集就可以进行任意无限细小有限分割，因

此在那里有界和完全有界是一个概念)。于是将那里的证明框架拿过来就可以证明：完备空间当中的完全有界集一定是列紧的。

1.3.5 紧性

我们知道在实数空间 $\mathbb{R}$ 中，闭区间上有限覆盖定理成立，而闭区间是自列紧的，下面我们从这个角度讨论紧性。

定义 1.17 设 X 是距离空间，$A \subset X$，如果 $A \subset \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$，其中 G_α 是开集，$\alpha \in I$，则称 $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in I$ 是 A 的一个开覆盖。

如果 A 的任何开覆盖必存在有限子覆盖，则称 A 是紧的。即：如果 $A \subset \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$，其中 G_α 是开集, 则存在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in I$，使得 $A \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$，则 A 是紧的集合。

如果全空间 X 是紧的，则称 X 是紧的空间。

例 1.11 从数学分析中的有限覆盖定理可知，$[a, b] \subset \mathbb{R}$，$[a, b]$ 是紧的集合，但是 $\mathbb{R}$ 不是紧的空间。

定理 1.16 设 (X, d) 是距离空间，$A \subset X$，则 A 是紧集当且仅当 A 是自列紧集。

证明.

- “$\Leftarrow$” 设 A 是自列紧集，即列紧的闭集，$\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 A 的开覆盖。
  (1) 先构造 A 的一个可数开覆盖。
  因为 A 列紧，则 A 完全有界，则 A 可分，于是设 $\{x_n\}$ 是 A 的可数稠密子集。
  则 $\{S(x_k, r') : r' \in \mathbb{Q}^+\}$ 为可数集。
  $\forall x \in A$，$\exists G_\alpha$，$x \in G_\alpha$，由于 G_α 是开集，所以 $\exists r > 0$，使得 $S(x, r) \subset G_\alpha$。由于 $\{x_n\}$ 稠密，所以 $\exists x_k$，使得 $d(x, x_k) < \frac{r}{4}$，取 r_x 为有理数，$\frac{r}{4} < r_x < \frac{r}{2}$，于是
  $$x \in S(x_k, r_x) \subset S(x, r) \subset G_\alpha.$$
  于是 $\{S(x_k, r_x) : x \in A, k \in \mathbb{N}^+\}$ 为 $\{S(x_k, r') : r' \in \mathbb{Q}^+\}$ 的子集，因此是可数集，记为 $\{S_n\}$.
  于是我们得到 A 的另一个开覆盖 $\{S_n\}$，这个开覆盖是由至多可数个开球组成的。
  (2) 从这可数开覆盖 $\{S_n\}$ 中可以选取出 A 的有限开覆盖。
  假若不然，对每一个 m，存在 $y_m \in A \setminus \bigcup_{k=1}^m S_k$。因为 A 列紧，$\{y_m\}$ 含有收敛子列 $\{y_{m_k}\}$，设 $y_{m_k} \to y_0$ $(k \to \infty)$，因为 A 是闭的，$y_0 \in A$。
  但是 $y_0 \notin S_n (n = 1, 2, \cdots)$(例如 $y_{m_k} \in A \cap S_1^C$，而后者为闭集，因此 $y_0 \in A \cap S_1^C$)，这与 $\{S_n\}$ 是 A 的覆盖矛盾。所以 $\{S_n\}$ 中存在有穷子覆盖，不妨设其为 $\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$。

(3) 证明 A 是紧的。

根据上述式子，设 $S_k \subset G_{\alpha_k}$，于是 $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} S_k \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{\alpha_k}$，即 $\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_n}\}$ 是从 $\{G_\alpha\}, \alpha \in I$ 中选出的一个有穷子覆盖，所以 A 是紧集。

- "$\Rightarrow$"

  假若不然，存在 A 中无穷点列 $\{x_n\}$，$\{x_n\}$ 中不存在收敛到 A 中点的子列。所以 $\forall y \in A$ 存在 $r_y > 0$，使得 $S(y, r_y)$ 中除去 y 以外不含 $\{x_n\}$ 中的点（否则，y 的任何邻域中都有 $\{x_n\}$ 中不同于 y 的点，则 y 是 $\{x_n\}$ 的一个子列的极限）。因此 $\{S(y, r_y)\}$ 是 A 的一个开覆盖，因为 A 是紧集，所以存在有限子覆盖，即 $\bigcup_{i=1}^{r} S(y_i, r_{y_i}) \supset A \supset \{x_n\}$，但 $S(y_i, r_{y_i})$ 中最多只有 $\{x_n\}$ 中的一个点，这与 $\{x_n\}$ 是 A 中的无穷点列矛盾。

1.4 完备距离空间

定义 1.18 设 (X, d) 是一个距离空间，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (X, d)$。若对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $m, n > N$ 时，有 $d(x_n, x_m) < \varepsilon$，则称 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 列（柯西列）。

命题 1.17 设 $\{x_n\}$ 是距离空间 (X, d) 中的 Cauchy 列，则集合 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 是有界的。

证明. 由 Cauchy 列的定义，对于 $\varepsilon = 1$，存在 N，当 $n, m > N$ 时，$d(x_n, x_m) < 1$。令

$$\beta = \max\left\{d\left(x_1, x_2\right), d\left(x_1, x_3\right), \cdots, d\left(x_1, x_{N+1}\right)\right\},$$

结合三角不等式，对于任何的正整数 n，有

$$d\left(x_1, x_n\right) < \beta + 1.$$

因此集合 $\{x_1, x_2, \cdots\} \subset B(x_1, \beta + 1)$，即集合 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 是有界的。

命题 1.18 收敛的点列一定是 Cauchy 列。

证明. 设 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n, m > N$ 时，有

$$d\left(x_n, x_0\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d\left(x_m, x_0\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

根据距离的三角不等式，$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$，因此 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 列。

命题 1.19 Cauchy 列收敛当且仅当存在收敛的子列。

证明. 必要性显然。

对于充分性，设 $\{x_n\}$ 存在收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$, 设 $x_{n_k} \to \bar{x}$

由于 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，则 $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, 使得 $\forall n, m > N$, 有 $d(x_n, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

又 $x_{n_k} \to \bar{x}$，则 $\forall \epsilon > 0, \exists K > 0$, 使得 $\forall k > K$, 有 $n_K > N$ 且 $d(x_{n_k}, \bar{x}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

于是 $\forall n > N, k > K, d(x_n, \bar{x}) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \bar{x})\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

定义 1.19 若距离空间 (X, d) 中的任意 Cauchy 列在 X 中都收敛，则称距离空间 X 是完备的。

注 1.16 完备性是十分重要的，有了完备性，极限运算（微积分）才能很好地进行。在一个完备的距离空间中，要判断一个点列是否收敛，仅仅需要判断它是否是 Cauchy 列。

例 1.12 设 $\mathbb{Q}$ 为全体有理数组成的集合，赋以通常的距离（即对任意 $a, b \in \mathbb{Q}$，距离 $d(a, b) = |a - b|$）成为一个距离空间，但它不完备。

命题 1.20 完备空间的任何一个闭子空间也是完备的。

证明. 设 X 是完备的，子空间 $X_1 \subset X$，且 X_1 是闭的。

设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$ 是任意一个 Cauchy 列。由于 X 是完备的，因而 $\{x_n\}$ 收敛到 $x \in X$。又因为 X_1 是闭集，根据（闭集性质：闭集中收敛点列的极限属于该闭集），可知 $x \in X_1$，因此 X_1 是完备的。

1.4.1 距离空间的完备化

定理 1.21 任何距离空间 (X, d) 都存在一个完备的距离空间 $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$，使得 (X, d) 和 $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ 的一个稠子空间等距，且在等距的意义下，这样的空间 $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ 是唯一的。称 $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ 为 (X, d) 的完备化空间。

证明. 分析：证明分四步：

(1) 先构造空间 $\widetilde{X}$ 和距离 $\widetilde{d}$;
(2) 证明 (X, d) 与 $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ 中的一个稠子空间等距;
(3) 证明 $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ 完备，这个空间 $\widetilde{X}$ 就是我们需要的空间;
(4) 在等距的意义下，证明完备化空间的唯一性。

(1) 构造距离空间 $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$。

- 构造集合 $\widetilde{X}$。把 (X, d) 中的 Cauchy 列全体表示为 $\widetilde{X}$。如果两个 Cauchy 列 $\widetilde{x} = \{x_n\}$，$\widetilde{y} = \{y_n\}$，满足 $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$，则称它们为 $\widetilde{X}$ 中的同一元素，即 $\widetilde{x} = \widetilde{y}$。

- 定义距离。对任何 $\widetilde{x}=\{x_n\},\widetilde{y}=\{y_n\}\in\widetilde{X}$，定义

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n).$$

- 验证距离的合理性由于 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $m,n>N$ 时，

$$d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2},\text{且 } d(y_n,y_m)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，由三角不等式

$$|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)|\leqslant d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m)<\varepsilon.$$

所以 $\{d(x_n,y_n)\}$ 是实数空间 $\mathbb{R}$ 中的一个 Cauchy 数列，于是 $\{d(x_n,y_n)\}$ 收敛。这说明 $\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})$ 有意义。

- 证明 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x},\widetilde{y}$ 的选择无关。如果 $\widetilde{x}=\{x_n\}=\{x'_n\}$，$\widetilde{y}=\{y_n\}=\{y'_n\}$，$\{x'_n\},\{y'_n\}$ 都是 X 中的 Cauchy 列，则

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}d(x'_n,y'_n).$$

事实上，因为

$$|d(x_n,y_n)-d(x'_n,y'_n)|\leqslant d(x_n,x'_n)+d(y_n,y'_n)\to 0\ (n\to\infty).$$

所以 $d(x_n,y_n)-d(x'_n,y'_n)\to 0\,(n\to\infty)$，即 $\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}d(x'_n,y'_n)$。这说明 $\widetilde{X}$ 中定义的 $\widetilde{d}$ 与 $\widetilde{x},\widetilde{y}$ 相对应的 Cauchy 列的选择无关。

容易验证 $\widetilde{d}$ 是 $\widetilde{X}$ 中的距离。

(2) (X,d) 与 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 中的一个稠子空间等距。

- 构造稠子空间和等距映射。设 $\widetilde{X}_0$ 是全体由 X 中的元素 x 作成的常值 Cauchy 列 $\{x,x,\cdots,x,\cdots\}$。显然 $\widetilde{X}_0\subset\widetilde{X}$，$\widetilde{X}_0$ 是 $\widetilde{X}$ 的一个子空间。

令 $T:(X,d)\to(\widetilde{X},\widetilde{d})$，$x\in X$，$Tx=(x,x,\cdots)$。

- 验证等距映射。显然 $Tx\in\widetilde{X}$。任何 $x,y\in X$，$\widetilde{x}=(x,x,\cdots)$，$\widetilde{y}=(y,y,\cdots)$，

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x,y)=d(x,y).$$

即 $T:X\to\widetilde{X}_0$ 是等距映射。

- 证明 $TX=\widetilde{X}_0$ 在 $\widetilde{X}$ 中稠密。$\forall\widetilde{x}=\{x_n\}\in\widetilde{X}$，令 $\widetilde{x}_k=(x_k,x_k,\cdots,x_k,\cdots)$（$\widetilde{x}_k$ 由 $\widetilde{x}=\{x_n\}$ 产生）。显然 $\widetilde{x}_k\in\widetilde{X}_0$。现证 $\widetilde{x}_k\to\widetilde{x}\ (k\to\infty)$。

$\forall\varepsilon>0$，因为 $\{x_n\}\in\widetilde{X}$ 是 X 中的 Cauchy 列，所以存在 N，当 $k,n\geqslant N$ 时，$d(x_n,x_k)<\varepsilon$。即

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{x}_k)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_k)\leqslant\varepsilon\ (k\geqslant N).$$

所以 $(\widetilde{X}_0,\widetilde{d})$ 在 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 中稠密，即 TX 在 $\widetilde{X}$ 中稠密。

(3) 证 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ 完备。

- 设 $\{\widetilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\widetilde{X}$ 中的 Cauchy 列。因为 $\widetilde{X}_0$ 在 $\widetilde{X}$ 中稠密，所以对于每一个 $\widetilde{x}_n$，存在一个 $\widetilde{y}_n=\{y_n,y_n,y_n,\cdots\}\in\widetilde{X}_0$，使得

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)<\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots).$$

- 令 $\widetilde{y}=(y_1,y_2,\cdots)$。由于 $\{\widetilde{x}_n\}$ 是 $\widetilde{X}$ 中的 Cauchy 列，

$$\begin{aligned}d(y_n,y_m)=d(\widetilde{y}_n,\widetilde{y}_m)&\le d(\widetilde{y}_n,\widetilde{x}_n)+d(\widetilde{x}_n,\widetilde{x}_m)+d(\widetilde{x}_m,\widetilde{y}_m)\\&<\frac{1}{n}+d(\widetilde{x}_n,\widetilde{x}_m)+\frac{1}{m}\to 0\ (n,m\to\infty),\end{aligned}$$

  所以 $\widetilde{y}$ 是 (X,d) 中的一个 Cauchy 列，即 $\widetilde{y}\in\widetilde{X}$，且 $\lim_{n\to\infty}\widetilde{d}(\widetilde{y}_n,\widetilde{y})=0$。

- 我们有

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}_n,\widetilde{y})\leqslant\widetilde{d}(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)+\widetilde{d}(\widetilde{y}_n,\widetilde{y})\leqslant\frac{1}{n}+\widetilde{d}(\widetilde{y}_n,\widetilde{y})\to 0\ (n\to\infty).$$

  即 $\widetilde{x}_n\to\widetilde{y}$，所以 $\widetilde{X}$ 是完备的。

(4) 证唯一性。假若存在 $\widetilde{Y}$ 也是 X 的完备化，则存在 $\widetilde{Y}$ 的稠密子空间 $\widetilde{Y}_0$ 与 X 等距。因此 $\widetilde{X}_0$ 与 $\widetilde{Y}_0$ 等距，设它们之间的等距映射为 φ。
任取 $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$，存在 $\widetilde{x}_n\in\widetilde{X}_0$，使得 $\widetilde{x}_n\to\widetilde{x}\ (n\to\infty)$。设 $\widetilde{y}_n=\varphi(\widetilde{x}_n)$，$\widetilde{y}_n$ 是 $\widetilde{Y}$ 中的收敛点列，即存在 $\widetilde{y}\in\widetilde{Y}$，使得 $\widetilde{y}_n\to\widetilde{y}\ (n\to\infty)$。定义 $\widetilde{x}\to\widetilde{y}\ (\widetilde{x}\in\widetilde{X})$，这是从 $\widetilde{X}$ 到 $\widetilde{Y}$ 的等距映射，即在等距的意义下，完备化是唯一的。

注 1.17 如果上述定理没有要求完备之后的距离空间在原空间稠密，则完备化的空间不唯一 (在等距同构的意义下)。这是因为如果失去了稠密性，在上述证明的最后一步，就无法构造等距映射。

1.5 完备距离空间的例子与应用

1.5.1 完备距离空间的例子

例 1.13 $C[a,b]$（即闭区间 $[a,b]$ 上全体连续函数构成的集合，距离定义为 $d(x,y)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$）是完备的。

证明. 分析：设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C[a,b]$ 中的任意一个 Cauchy 列，要证明其完备性，需完成以下三点：

- 找出 $\{x_n\}$ 的极限 $x(t)$；

- 证明 $x(t) \in C[a,b]$（即极限函数连续）；
- 证明 $x_n(t) \to x(t)\ (n \to \infty)$（按 $C[a,b]$ 空间中的距离收敛）。

- （1）找极限函数 $x(t)$：由 $\{x_n(t)\}$ 是 $C[a,b]$ 中的 Cauchy 列，可知对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n,m \geq N$ 时，$d(x_n,x_m) < \varepsilon$，即 $\max\limits_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$。因此对任意 $t \in [a,b]$，有 $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon\ (n,m \geq N)$，即 $\{x_n(t)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 数列。由 $\mathbb{R}$ 的完备性，存在 $x(t)$ 使得

$$x_n(t) \to x(t) \quad (n \to \infty).$$

- （2）证明 $x(t) \in C[a,b]$：当 $n,m \geq N$ 时，对任意 $t \in [a,b]$，有

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon.$$

对固定的 t，令 $m \to \infty$，由极限的保号性得

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon \quad (n \geq N), \quad \forall t \in [a,b].$$

这表明 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛到 $x(t)$。根据“连续函数列一致收敛则极限函数连续”的性质，可知 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，即 $x(t) \in C[a,b]$。
- （3）证明按 $C[a,b]$ 距离收敛：由（2）中结论，当 $n \geq N$ 时，对任意 $t \in [a,b]$，有 $|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon$，因此

$$\max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon,$$

即 $d(x_n,x) \leq \varepsilon$，故 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$。

综上，$C[a,b]$ 是完备的。

例 1.14 l^∞（即全体有界数列构成的集合，距离定义为 $d(x,y) = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k - \eta_k|$，其中 $x = \{\xi_k\}, y = \{\eta_k\} \in l^\infty$）是完备的。

证明. 分析：设 $\{x_n\}$ 是 l^∞ 中的任意 Cauchy 列，其中 $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$，要证明其完备性，需完成以下三点：

- 找出 $\{x_n\}$ 的极限 x；
- 证明 $x \in l^\infty$（即极限数列为有界数列）；
- 证明 $x_n \to x\ (n \to \infty)$（按 l^∞ 空间中的距离收敛）。

（1）找极限数列 x：由 $\{x_n\}$ 是 l^∞ 中的 Cauchy 列，根据 Cauchy 列定义，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n,m \geq N$ 时，$d(x_n,x_m) < \varepsilon$，即

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| < \varepsilon.$$

因此对任意 $k\in\mathbb{N}$，有 $|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}|<\varepsilon\ (n,m\geq N)$，即 $\{\xi_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 数列。由 $\mathbb{R}$ 的完备性，存在 ξ_k 使得

$$\lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k.$$

令 $x=\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$，即得 $\{x_n\}$ 的极限候选。

（2）证明 $x\in l^{\infty}$：由（1）中结论，当 $n,m\geq N$ 时，对任意 $k\in\mathbb{N}$，有 $|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}|<\varepsilon$。令 $m\to\infty$，由极限的保号性得

$$|\xi_k^{(n)}-\xi_k|\leq\varepsilon\quad(n\geq N),\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

取 $n=N$，则对任意 $k\in\mathbb{N}$，有

$$|\xi_k|\leq|\xi_k^{(N)}-\xi_k|+|\xi_k^{(N)}|\leq\varepsilon+|\xi_k^{(N)}|.$$

由于 $x_N=\{\xi_k^{(N)}\}_{k=1}^{\infty}\in l^{\infty}$，故存在 $M>0$ 使得对任意 $k\in\mathbb{N}$，$|\xi_k^{(N)}|\leq M$。因此

$$|\xi_k|\leq\varepsilon+M\quad\forall k\in\mathbb{N},$$

即 $\{\xi_k\}$ 是有界数列，故 $x\in l^{\infty}$。

（3）证明按 l^{∞} 距离收敛：由（2）中结论，当 $n\geq N$ 时，对任意 $k\in\mathbb{N}$，有 $|\xi_k^{(n)}-\xi_k|\leq\varepsilon$，因此

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}|\xi_k^{(n)}-\xi_k|\leq\varepsilon,$$

即 $d(x_n,x)\leq\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。

综上，l^{∞} 是完备的。

例 1.15 设 s 是全体实数列组成的集合，定义

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|},$$

其中 $x=\{\xi_k\}$，$y=\{\eta_k\}$。s 是一个完备的距离空间。

原因是 s 中的收敛是按坐标收敛的。(见例 1.5)

1.5.2 闭球套定理

定理 1.22 设 X 是完备的距离空间，$\bar{B}_n=\bar{B}(x_n,r_n)\ (n=1,2,\cdots)$ 是 X 中的一系列闭球套：

$$\bar{B}_1\supset\bar{B}_2\supset\cdots\supset\bar{B}_n\supset\cdots,$$

且 $r_n\to0\ (n\to\infty)$，则存在 X 中唯一的一点 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{B}_n$。

证明. (1) 设 $\{x_n\}$ 是球心组成的点列，因此有

$$d(x_n, x_m) < r_n \ (m > n).$$

因为 $r_n \to 0 \ (n \to \infty)$，所以 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n, m > N$ 时，

$$d(x_n, x_m) < r_n < \varepsilon \ (m > n).$$

因此 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列。由于 X 完备，故存在 $x \in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

(2) 由 $d(x_n, x_m) < r_n \ (m > n)$，据距离的连续性，令 $m \to \infty$，有

$$d(x_n, x) \leqslant r_n \ (n > N).$$

（注意上式中是“$\leqslant$”，不是“$<$”）. 因此 $x \in \bar{B}(x_n, r_n)$，即 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}(x_n, r_n)$。

(3) 如果存在 $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n$，则对于任意的 n，有

$$d(x_n, y) \leqslant r_n.$$

在上式中令 $n \to \infty$，则 $d(x, y) = 0$，即 $x = y$。

注 1.18 类似地可以证明“闭集套”定理，即：如果闭集一个套着一个，并且闭集的直径趋近于 0，则有唯一的点被套在其中（这个点属于所有的闭集）。

1.5.3 压缩映射原理

定理 1.23 (压缩映射原理, Banach 不动点定理) 设 (X, d) 是完备的距离空间, $T: X \to X$. 如果对于任意的 $x, y \in X$, 不等式

$$d(Tx, Ty) \leqslant \theta d(x, y)$$

成立, 其中 $0 < \theta < 1$, 则存在唯一的 $\bar{x} \in X$, 使得

$$T\bar{x} = \bar{x}.$$

证明.

- (1) T 是连续的. 事实上, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$, 当 $d(x, y) < \delta$ 时,

$$d(Tx, Ty) \leqslant \theta d(x, y) < \delta = \varepsilon.$$

- (2) 用迭代法找到 $\bar{x}$. 任取 $x_0 \in X$, 令

$$x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1,\ \cdots,\ x_{n+1} = Tx_n,\ \cdots.$$

由于

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \theta^n d(x_0, Tx_0),$$

于是对于任意的正整数 p,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\le \theta^n d(x_0, Tx_0) + \theta^{n+1} d(x_0, Tx_0) + \cdots + \theta^{n+p-1} d(x_0, Tx_0) \\ &< \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0, Tx_0). \end{aligned}$$

因为 $0 < \theta < 1$, 所以 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列.
由于 (X, d) 完备, 所以存在 $\bar{x}$, 使得 $x_n \to \bar{x}\ (n \to \infty)$. 在 $Tx_n = x_{n+1}$ 两边取极限,

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \bar{x},$$

由于 T 是连续的, 我们有 $\lim_{n\to\infty} Tx_n = T\lim_{n\to\infty} x_n = T\bar{x}$, 即: $T\bar{x} = \bar{x}$.
- (3) 唯一性: 若存在 $\bar{y}$, 使得 $T\bar{y} = \bar{y}$. 则

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(T\bar{x}, T\bar{y}) \leqslant \theta d(\bar{x}, \bar{y}).$$

由于 $0 < \theta < 1$, 于是 $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, 故 $\bar{x} = \bar{y}$.

定理 1.24 设 (X, d) 是完备的距离空间, T 是从 X 到 X 的映射, 如果存在正整数 n_0, 使得对所有的 $x, y \in X$,

$$d(T^{n_0}x, T^{n_0}y) \leqslant \theta d(x, y),$$

其中 $0 < \theta < 1$, 则 T 有唯一的不动点.

证明.

- 因 T^{n_0} 满足不动点定理, 所以存在唯一的 $\bar{x}$, 使得 $T^{n_0}\bar{x} = \bar{x}$.
- 因 $T^{n_0}(T\bar{x}) = T(T^{n_0}\bar{x}) = T\bar{x}$, 故 $T\bar{x}$ 也是 T^{n_0} 的不动点. 因为 T^{n_0} 的不动点是唯一的, 所以

$$T\bar{x} = \bar{x}.$$

即 $\bar{x}$ 是 T 的不动点.
- 唯一性 (反证法): 设 $\bar{x}_1$ 也是 T 的不动点, 则

$$T^{n_0}\bar{x}_1 = T^{n_0-1}(T\bar{x}_1) = T^{n_0-1}(\bar{x}_1) = \cdots = T\bar{x}_1 = \bar{x}_1,$$

即 $\bar{x}_1$ 也是 T^{n_0} 的不动点, 由 T^{n_0} 不动点的唯一性, 我们有 $\bar{x} = \bar{x}_1$.

1.6 习题

例 1.16 设 T 是压缩映射，求证 T^n 也是压缩映射，并说明逆命题不一定成立.

证明.

- (1) 因为 T 是压缩映射，所以 $\exists \alpha \in (0,1)$，使得 $\rho(Tx,Ty) \leqslant \alpha\rho(x,y)$，从而

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^+,\ \rho(T^n x, T^n y) \leqslant \alpha\rho(T^{n-1}x, T^{n-1}y) \leqslant \cdots \leqslant \alpha^n \rho(x,y),$$

  即 T^n 是压缩映射.
- (2) 逆命题不一定成立. 例如，设

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} : [0,1] \to [0,1],$$

  易知

$$f^2(x) = \frac{x}{2} : [0,1] \to [0,1]$$

  是压缩映射. 但是

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} : [0,1] \to [0,1]$$

  不是压缩映射. 事实上，如果 $f(x) : [0,1] \to [0,1]$ 是压缩映射，则 $\exists \alpha : 0 < \alpha < 1$，使得

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant \alpha |x_2 - x_1|$$
$$\Longrightarrow \frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{|x_2 - x_1|} \leqslant \alpha\ (\forall\, x_1, x_2 \in [0,1]),$$

  即差商 $\frac{|f(x_2)-f(x_1)|}{|x_2-x_1|}$ 是有界的. 但是如果取

$$x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = 2x_1 = \frac{2}{n}\ (n \geqslant 2),$$

  则有

$$\frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{|x_2 - x_1|} = \sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to \infty\ (n \to \infty),$$

  即知差商 $\frac{|f(x_2)-f(x_1)|}{|x_2-x_1|}$ 是无界的，矛盾.

例 1.17 设 $(\mathcal{X}, \rho)$ 是一个完备距离空间，映射 $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 满足

$$a_n \overset{\text{def}}{=} \sup_{x,y \in \mathcal{X}} \frac{\rho(T^n x, T^n y)}{\rho(x,y)} \to 0\ (n \to \infty).$$

证明: 映射 T 在 $\mathcal{X}$ 中必有唯一的不动点.

证明. 取 $\varepsilon = 1/2 > 0$, 因为 $a_n \to 0\ (n \to \infty)$, 故 $\exists n_0$ 使得 $a_{n_0} < 1/2$, 即

$$\rho(T^{n_0}x, T^{n_0}y) \leqslant \frac{1}{2}\rho(x, y), \quad x, y \in \mathcal{X},$$

即 T^{n_0} 是压缩映射. 根据定理 1.24 , T 在 $\mathcal{X}$ 中必有唯一的不动点.

例 1.18 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集，映射 $T: M \to M$ 满足

$$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)\ (\forall\, x, y \in M, x \neq y).$$

求证 T 在 M 中存在唯一的不动点.

证明. 因为

$$\rho(Tx, Tx_0) < \rho(x, x_0),$$

所以

$$\rho(x, x_0) \to 0 \implies \rho(Tx, Tx_0) \to 0.$$

再由三角不等式，得到

$$|\rho(x, Tx) - \rho(x_0, Tx_0)| \leq \rho(x, x_0) + \rho(Tx, Tx_0).$$

由此可见，$f(x) \overset{\text{def}}{=} \rho(x, Tx)$ 在 M 上连续.

因为 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集，所以 $\exists\, x_0 \in M$，使得

$$\rho(x_0, Tx_0) = f(x_0) = \min_{x \in M} f(x) = \min_{x \in M} \rho(x, Tx).$$

如果 $\rho(x_0, Tx_0) = 0$，那么 x_0 就是不动点. 今假设 $\rho(x_0, Tx_0) > 0$. 根据假设，我们有

$$\rho(Tx_0, T^2x_0) < \rho(x_0, Tx_0) = \min_{x \in M} \rho(x, Tx).$$

但是 $Tx_0, T^2x_0 \in M$，这与 $\rho(x_0, Tx_0)$ 是最小值矛盾. 故 $\rho(x_0, Tx_0) = 0$，即存在不动点 x_0.

不动点的唯一性是显然的. 事实上，如果存在两个不动点 x_1, x_2，则从

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(Tx_1, Tx_2) < \rho(x_1, x_2)$$

即得矛盾.

例 1.19 设 $(\mathcal{X}, \rho)$ 是一个完备距离空间, M 是 $\mathcal{X}$ 的闭子集, $0 < \alpha < 1$, 映射 $T_n: M \to M$ 满足

$$\rho(T_nx, T_ny) \leq \alpha\rho(x, y)\ (x, y \in M),$$

$$Tx = \lim_{n \to \infty} T_nx\ (x \in M),$$

并且 $x_n = T_nx_n \in M$. 证明：映射 T 有唯一的不动点，并且 x_n 收敛到该不动点.

证明. (1) 由距离的连续性，对不等式

$$\rho(T_n x, T_n y) \le \alpha\rho(x, y)\ (x, y \in M)$$

令 $n \to \infty$ 取极限，得到

$$\rho(Tx, Ty) \le \alpha\rho(x, y)\ (x, y \in M).$$

由此推出 T 是压缩映射，因而 T 有不动点，设之为 x^*，即有

$$Tx^* = x^*.$$

(2) 考虑

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x^*) = \rho(T_n x_n, Tx^*) &\le \rho(T_n x_n, T_n x^*) + \rho(T_n x^*, Tx^*)\\ &\le \alpha\rho(x_n, x^*) + \rho(T_n x^*, Tx^*),\end{aligned}$$

由此推出

$$\rho(x_n, x^*) \le \frac{1}{1-\alpha}\rho(T_n x^*, Tx^*).$$

又因为 $Tx^* = \lim_{n\to\infty} T_n x^*$，所以

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x^*) = 0 \implies x_n \to x^*\ (n \to \infty).$$

例 1.20 设 $(\mathcal{X}, \rho)$ 是一个完备距离空间，$B(y_0, r) \subset \mathcal{X}$ 是以 y_0 为中心、r 为半径的开球. 如果映射 $T : B(y_0, r) \to \mathcal{X}$ 满足 $\rho(Tx, Ty) \le \alpha\rho(x, y)$，而且

$$\rho(Ty_0, y_0) < (1-\alpha)r,\ 0 < \alpha < 1,$$

证明：映射 T 在 $B(y_0, r)$ 中有唯一不动点.

证明. 任取 $0 < r_1 < r$，使得

$$\rho(Ty_0, y_0) \le (1-\alpha)r_1 < (1-\alpha)r.$$

又对 $\forall y \in \overline{B}(y_0, r_1)$，由

$$\begin{aligned}\rho(Ty, y_0) &\le \rho(Ty, Ty_0) + \rho(Ty_0, y_0)\\ &\le \alpha\rho(y, y_0) + (1-\alpha)r_1\\ &\le \alpha r_1 + (1-\alpha)r_1 = r_1,\end{aligned}$$

于是

$$T : \overline{B}(y_0, r_1) \to \overline{B}(y_0, r_1).$$

因此，压缩映射 T 在完备子空间 $\overline{B}(y_0, r_1) \subset B(y_0, r)$ 上有唯一的不动点. r_1 的任意性是很关键的。

例 1.21 (Newton 法) 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的二次连续可微的实值函数，$\hat{x}\in(a,b)$，使得 $f(\hat{x})=0$，$f'(\hat{x})\neq 0$。求证：存在 $\hat{x}$ 的邻域 $U(\hat{x})$，使得 $\forall x_0\in U(\hat{x})$，迭代序列

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

是收敛的，并且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\hat{x}.$$

证明. 考虑 $Tx\overset{\text{def}}{=}x-\frac{f(x)}{f'(x)}$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Tx)=1-\frac{(f'(x))^2-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}=\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

因为 $f(\hat{x})=0$，$f'(\hat{x})\neq 0$，$f''(x)$ 在点 $\hat{x}$ 处连续，所以 $\lim_{x\to\hat{x}}\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}=0$，从而 $\exists\hat{x}$ 的邻域 $U(\hat{x})$，使得

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right|\leqslant\alpha<1,$$

$$f'(x)\neq 0\quad(\forall x\in U(\hat{x})),$$

$$|Tx-Ty|=\left|\frac{f(\xi)f''(\xi)}{(f'(\xi))^2}\right||x-y|\leqslant\alpha|x-y|(\forall x,y\in U(\hat{x})).$$

于是，对 $\forall x_0\in U(\hat{x})$，$x_{n+1}=Tx_n(n=0,1,2,\cdots)$ 是收敛的。设 $x_n\to x\in U(\hat{x})$，$Tx=x\implies f(x)=0$，联合

$$\begin{cases}f(\hat{x})=0, & \hat{x}\in U(\hat{x}),\\ f(x)=0, & x\in U(\hat{x}),\\ f'(x)\neq 0, & \forall x\in U(\hat{x})\end{cases}\implies x=\hat{x},$$

故有 $x_n\to\hat{x}(n\to\infty)$。

例 1.22 在完备的度量空间 $(\mathcal{X},\rho)$ 中给定点列 $\{x_n\}$，如果 $\forall\varepsilon>0$，存在 Cauchy 列 $\{y_n\}$，使得 $\rho(x_n,y_n)<\varepsilon(\forall n\in\mathbb{N})$，求证：$\{x_n\}$ 收敛。

证明. 对 $\frac{\varepsilon}{3}>0$，$\exists\{y_n\}$，使得

$$\rho(x_n,y_n)<\frac{\varepsilon}{3},\quad\rho(x_m,y_m)<\frac{\varepsilon}{3},$$

又 $\{y_n\}$ 是基本列，对 $\frac{\varepsilon}{3}>0$，$\exists N$，使得 $\forall n,m>N$，有

$$\rho(y_n,y_m)<\frac{\varepsilon}{3},$$

于是当 $n,m>N$ 时，

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x_m)&<\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,y_m)+\rho(x_m,y_m)\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，又由 $(\mathcal{X},\rho)$ 的完备性，知 $\{x_n\}$ 收敛。

例 1.23 求证：$[0,1]$ 上的多项式全体按距离

$$\rho(p,q)=\int_0^1|p(x)-q(x)|\mathrm{d}x$$

是不完备的，并指出它的完备化空间。

证明. 取 $P_m(x)=\sum_{k=0}^m\frac{x^k}{k!}$，首先证明 $\{P_m(x)\}$ 在 ρ 度量下是 Cauchy 列:

$$\begin{aligned}\rho(P_m(x),P_{m+p}(x))&=\int_0^1\sum_{k=m+1}^{m+p}\frac{x^k}{k!}\mathrm{d}x=\sum_{k=m+1}^{m+p}\frac{1}{(k+1)!}\\&\leqslant\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{m+1}\to0,(m\to\infty,\forall p\in\mathbb{N})\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\rho(P_m(x),\mathrm{e}^x)&=\int_0^1\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\mathrm{d}x=\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}\\&\leqslant\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{m+1}\to0\quad(m\to\infty),\end{aligned}$$

即 $P_m(x)\xrightarrow{\rho}\mathrm{e}^x$，但是 e^x 不是多项式。它的完备化空间是 $C[0,1]$。

例 1.24 在完备距离空间中求证：子集 A 是列紧的充分必要条件是：对 $\forall\varepsilon>0$，存在 A 的列紧的 ε-网。

证明. 必要性显然，因为 A 就是 A 自身的列紧的 ε-网;

只证充分性。$\forall\varepsilon>0$，设 N 是 A 的列紧的 $\frac{\varepsilon}{2}$-网；N_0 是 N 的有限 $\frac{\varepsilon}{2}$-网，则有

$$\begin{aligned}&\forall\,x\in A,\ \exists\,\xi\in N,\ \rho(x,\xi)<\frac{\varepsilon}{2},\\&\xi\in N,\ \exists\,x_\varepsilon\in N_0,\ \rho(\xi,x_\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{2}\\\Longrightarrow&\ \rho(x,x_\varepsilon)\leqslant\rho(x,\xi)+\rho(\xi,x_\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即 N_0 是 A 的有限 ε-网。于是 A 是完全有界的, 又距离空间是完备的，由此得 A 是列紧的。

2 赋范空间

2.1 赋范空间的基本概念

定义 2.1 设 X 是数域 K 上的线性空间，函数 $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ 满足以下四个条件：

(1) 非负性：对任意 $x \in X$，有 $\|x\| \geq 0$；
(2) 正定性：$\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$（其中 0 为线性空间 X 的零元）；
(3) 正齐次性：对任意 $x \in X$、任意 $\alpha \in \mathbb{K}$，有 $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$；
(4) 三角不等式：对任意 $x, y \in X$，有 $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$。

则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个范数。定义了范数的线性空间称为赋范空间，记为 $(X, \|\cdot\|)$，或简记为 X。

注 2.1 在赋范空间中，可由范数自然地定义距离：

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

由范数的定义，可验证上述 $d(x, y)$ 满足距离的定义，具体如下：

(1) 非负性：对任意 $x, y \in X$，有 $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$；
(2) 正定性：$d(x, y) = \|x - y\| = 0$ 当且仅当 $x - y = 0$，即 $x = y$；
(3) 对称性：对任意 $x, y \in X$，有 $d(y, x) = \|y - x\| = |-1|\|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$；
(4) 三角不等式：对任意 $x, y, z \in X$，有 $d(x, y) = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$。

把 (X, d) 称为由范数诱导的距离空间。由此可见，赋范空间一定是距离空间。如无特殊说明，赋范空间的距离都是指由范数诱导的距离。赋范空间有了距离后，就可以沿用距离空间的相关概念，包括开集、闭集、收敛以及完备性等。

定义 2.2 设 $\{x_n\}$ 是赋范空间 X 中的点列，$x \in X$。如果

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

则称 $\{x_n\}$ 按范数收敛到 x，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$。

定义 2.3 完备的赋范空间称为 Banach 空间。

注 2.2 由于赋范空间是距离空间，因此 Banach 空间是完备的距离空间，具备完备距离空间的所有性质。

定理 2.1 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间，则：

(1) 对任意 $x, y \in X$，有 $|\|y\| - \|x\|| \le \|y - x\|$；
(2) 范数 $\|\cdot\|$ 是连续函数，即若 $x_n \to x\ (n \to \infty)$，则 $\|x_n\| \to \|x\|\ (n \to \infty)$；
(3) 范数 $\|\cdot\|$ 对线性运算连续，即若 $x_n \to x$、$y_n \to y\ (n \to \infty)$，且数域 K 中的数列 $\{\alpha_n\}$ 满足 $\alpha_n \to \alpha\ (n \to \infty)$，则 $x_n + y_n \to x + y$、$\alpha_n x_n \to \alpha x\ (n \to \infty)$。

证明.

(1) 由三角不等式推导：一方面，$\|y\| = \|(y - x) + x\| \le \|y - x\| + \|x\|$，移项得 $\|y\| - \|x\| \le \|y - x\|$；另一方面，$\|x\| = \|(x - y) + y\| \le \|x - y\| + \|y\|$，移项得 $\|x\| - \|y\| \le \|x - y\| = \|y - x\|$。结合两式，即得 $|\|y\| - \|x\|| \le \|y - x\|$。
(2) 由 (1) 的结论可知：$|\|x_n\| - \|x\|| \le \|x_n - x\|$。若 $x_n \to x\ (n \to \infty)$，则 $\|x_n - x\| \to 0$，进而 $|\|x_n\| - \|x\|| \to 0$，即 $\|x_n\| \to \|x\|\ (n \to \infty)$。因此范数 $\|\cdot\|$ 是连续函数。
(3) 验证对线性运算的连续性：
- 对加法：由三角不等式，$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$。若 $x_n \to x$、$y_n \to y$，则 $\|x_n - x\| \to 0$、$\|y_n - y\| \to 0$，故 $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \to 0$，即 $x_n + y_n \to x + y$。
- 数乘：将 $\|\alpha_n x_n - \alpha x\|$ 拆分变形：

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n(x_n - x) + (\alpha_n - \alpha)x\| \le |\alpha_n|\|x_n - x\| + \|x\||\alpha_n - \alpha|$$

  因 $\{\alpha_n\}$ 收敛，故 $\{|\alpha_n|\}$ 有界（设 $|\alpha_n| \le M$，M 为常数）；又 $\alpha_n \to \alpha$ 得 $|\alpha_n - \alpha| \to 0$，$x_n \to x$ 得 $\|x_n - x\| \to 0$。因此 $|\alpha_n|\|x_n - x\| \to 0$、$\|x\||\alpha_n - \alpha| \to 0$，进而 $\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \to 0$，即 $\alpha_n x_n \to \alpha x$。

综上，范数 $\|\cdot\|$ 对线性运算连续。

定理 2.2 设 X 是赋范空间，d 是由范数诱导的距离。则对任意 $x, y, z \in X$、任意 $\alpha \in K$，有：

$$d(x, y) = d(x + z, y + z)$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$$

证明.

- 平移不变性：

$$d(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

- 数乘齐次性：

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \|\alpha(x - y)\| = |\alpha|\|x - y\| = |\alpha| d(x, y)$$

注 2.3

- 上述两式是范数诱导距离需满足的必要条件，并非所有距离都能由范数诱导.
- 第一式反映范数诱导的距离具有“平移不变性”，即距离在“刚体平移”后保持不变；第二式反映该距离具有“数乘齐次性”，即距离随向量的数乘比例缩放。

例 2.1 空间 s，即全体实数列组成的集合，在其上定义距离：

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|},$$

其中 $x=\{\xi_k\}$，$y=\{\eta_k\}$。容易证明 s 是距离空间。

考虑 $d(\alpha x,0)$。显然，当 $x\neq 0$，$\alpha\neq 0$ 且 $|\alpha|\neq 1$ 时，有

$$d(\alpha x,0)\neq|\alpha|d(x,0).$$

可见，这个距离 d 不满足数乘齐次性相关式子，因此空间 s 中的距离不是由任何一个范数诱导出来的。

此例表明赋范空间是特殊的距离空间（距离满足由范数诱导的条件），而并非所有距离空间都是赋范空间。

2.2 完备的赋范空间

2.2.1 连续函数空间上定义的不同范数

例 2.2 $C[a,b]$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的全体，对加法、数乘运算封闭。在 $C[a,b]$ 上定义范数：

$$\|x\|=\max_{a\le t\le b}|x(t)|$$

容易证明 $C[a,b]$ 是一个赋范空间。在由该范数诱导的距离

$$d(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$$

下，$C[a,b]$ 是完备的（Banach 空间）且可分的（参见例 1.1.4、例 1.3.19、例 1.4.11）。

类似地，考虑 $C(\Omega)$，其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是列紧的闭集。$C(\Omega)$ 表示 Ω 上全体连续函数的集合，其上定义范数：

$$\|x\|=\max_{t\in\Omega}|x(t)|$$

可证明 $C(\Omega)$ 是完备的（Banach 空间）且可分的赋范空间。

例 2.3 设 X 表示 $[a,b]$ 上的全体连续函数，在 X 上定义范数：

$$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt$$

利用积分的线性性质和绝对值的三角不等式，可证明 $\|\cdot\|_1$ 是一个范数，即 $(X, \|\cdot\|_1)$ 是赋范空间。

但在由该范数诱导的距离

$$d(x,y) = \|x-y\|_1 = \int_a^b |x(t)-y(t)|dt$$

下，$(X, \|\cdot\|_1)$ 不是完备的（证明参见例 1.1.13、例 1.4.13）。同理，在 $[a,b]$ 上全体连续函数组成的线性空间中，赋以其他类似积分型范数形成的赋范空间也不完备。

注 2.4 上述例子表明，同一个集合上赋以不同的范数，生成的赋范空间其完备性可能不同。

2.2.3 L^p 空间

主要讨论内容

- 1. 验证 L^p 空间是赋范空间，建立 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式；
- 2. 讨论赋范空间 L^p 的完备性与可分性；
- 3. 分析 $p=\infty$ 时的特殊情形；
- 4. 研究 L^p 的离散情形 l^p，建立离散型 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式。

定义 2.4 设 $f(t)$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数，若 $|f|^p$ $(1 \le p < \infty)$ 在 E 上可积，则称 f 是 p 次幂可积的函数。全体在 E 上 p 次幂可积的函数组成的集合，记为 $L^p(E)$，简称为 L^p 空间，即：

$$L^p(E) = \left\{ x(t) \mid \int_E |x(t)|^p dt < \infty \right\}$$

特别地，当 $E=[a,b]$ 时，记为 $L^p[a,b]$。在 $L^p(E)$ 上定义范数：

$$\|x\|_p = \left(\int_E |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

引理 2.3 设 p,q 是正数且满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$（称 p,q 为共轭数），则对任意实数 a,b，有：

$$|ab| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

证明. 1. 当 $b=0$ 时，不等式左边 $|a\cdot 0|=0$，右边 $\frac{|a|^p}{p}+0\geq 0$，显然成立；2. 当 $b\neq 0$ 时，考虑函数 $\phi(t)=t^{\frac{1}{p}}-\frac{1}{p}t$（$t>0$）。求导得 $\phi'(t)=\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}-\frac{1}{p}$，令 $\phi'(t)=0$，解得 $t=1$。当 $t=1$ 时，$\phi(t)$ 取到最大值 $\phi(1)=1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$。

令 $t=\frac{|a|^p}{|b|^q}$，代入 $\phi(t)\leq\frac{1}{q}$，得：

$$\left(\frac{|a|^p}{|b|^q}\right)^{\frac{1}{p}}-\frac{1}{p}\cdot\frac{|a|^p}{|b|^q}\leq\frac{1}{q}$$

整理后两边同乘 $|b|^q$，结合 $q-\frac{q}{p}=1$，即可得 $|ab|\leq\frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}$。引理得证。

引理 2.4 (Hölder 不等式) 设 E 是 Lebesgue 可测集，$x(t),y(t)$ 是 E 上的可测函数，p,q 是正数且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则：

$$\int_E|x(t)y(t)|dt\leq\left(\int_E|x(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_E|y(t)|^qdt\right)^{\frac{1}{q}}$$

证明. 令 $A=\left(\int_E|x(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}$，$B=\left(\int_E|y(t)|^qdt\right)^{\frac{1}{q}}$。1. 若 $A=0$ 或 $B=0$ 或 $A=\infty$ 或 $B=\infty$，不等式显然成立；2. 若 $0<A<\infty$ 且 $0<B<\infty$，对任意 $t\in E$，由引理 2.2.5（基本不等式）得：

$$\frac{|x(t)y(t)|}{AB}\leq\frac{1}{p}\left|\frac{x(t)}{A}\right|^p+\frac{1}{q}\left|\frac{y(t)}{B}\right|^q$$

将上式两边在 E 上积分：

$$\frac{1}{AB}\int_E|x(t)y(t)|dt\leq\frac{1}{pA^p}\int_E|x(t)|^pdt+\frac{1}{qB^q}\int_E|y(t)|^qdt$$

代入 $A^p=\int_E|x(t)|^pdt$ 和 $B^q=\int_E|y(t)|^qdt$，右边化简为 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，因此：

$$\int_E|x(t)y(t)|dt\leq AB=\left(\int_E|x(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_E|y(t)|^qdt\right)^{\frac{1}{q}}$$

引理得证。

注 2.5 当 $p=q=2$ 时，Hölder 不等式退化为 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\int_E|x(t)y(t)|dt\leq\left(\int_E|x(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_E|y(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

引理 2.5 (Minkowski 不等式) 设 E 是 Lebesgue 可测集，$x(t),y(t)$ 是 E 上的可测函数，$p\geq 1$，则：

$$\left(\int_E|x(t)+y(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_E|x(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E|y(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}$$

证明. 1. 当 $p=1$ 时，由绝对值三角不等式 $|x(t)+y(t)| \le |x(t)|+|y(t)|$，积分后直接得证；2. 当 $\int_E |x(t)+y(t)|^p dt = 0$ 时，不等式左边为 0，右边非负，显然成立；3. 当 $p>1$ 且 $\int_E |x(t)+y(t)|^p dt > 0$ 时，利用 $|x(t)+y(t)|^p = |x(t)+y(t)| \cdot |x(t)+y(t)|^{p-1}$，结合 Hölder 不等式：

$$\int_E |x(t)+y(t)|^p dt \le \int_E |x(t)| \cdot |x(t)+y(t)|^{p-1} dt + \int_E |y(t)| \cdot |x(t)+y(t)|^{p-1} dt$$

令 $q = \frac{p}{p-1}$（满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$），对右边两项分别应用 Hölder 不等式：

$$\int_E |x(t)| \cdot |x(t)+y(t)|^{p-1} dt \le \left(\int_E |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |x(t)+y(t)|^{q(p-1)} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

由于 $q(p-1)=p$，右边第二项化简为 $\left(\int_E |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}}$。同理处理第二项积分，整理后两边同除以 $\left(\int_E |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}}$，即得：

$$\left(\int_E |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_E |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

引理得证。

注 2.6 由 Minkowski 不等式可知，$L^p(E)$ 上定义的 $\|\cdot\|_p$ 满足三角不等式，结合范数的非负性、正定性和正齐次性，可验证 $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ 是赋范空间。

定理 2.6 $L^p(E)$ $(p \ge 1)$ 是 Banach 空间（完备的赋范空间）。

证明. 证明思路：需证明 $L^p(E)$ 中任意 Cauchy 列都收敛，步骤如下：1. 从 Cauchy 列 $\{x_n(t)\}$ 中选取点点收敛的子列 $\{x_{n_k}(t)\}$：由 Cauchy 列定义，对任意 $k \in \mathbb{N}$，存在 n_k 使得 $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$。考虑级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|$，其 L^p 范数小于 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$，故级数几乎处处收敛，即 $\{x_{n_k}(t)\}$ 几乎处处点点收敛，记极限为 $x_0(t)$。

2. 证明 $x_0(t) \in L^p(E)$：由 Fatou 引理，$\int_E |x_0(t)|^p dt = \int_E \liminf_{k\to\infty} |x_{n_k}(t)|^p dt \le \liminf_{k\to\infty} \int_E |x_{n_k}(t)|^p dt$。由于 $\{x_n(t)\}$ 是 Cauchy 列，$\{\|x_n\|_p\}$ 有界，故右边有限，即 $x_0(t) \in L^p(E)$。

3. 证明 $\{x_n(t)\}$ 按 L^p 范数收敛到 $x_0(t)$：对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N 使得当 $n, m > N$ 时，$\|x_n - x_m\|_p < \varepsilon$。由 Fatou 引理，$\|x_n - x_0\|_p^p = \int_E \liminf_{k\to\infty} |x_n(t) - x_{n_k}(t)|^p dt \le \liminf_{k\to\infty} \|x_n - x_{n_k}\|_p^p < \varepsilon^p$，即 $\|x_n - x_0\|_p < \varepsilon$。

综上，$L^p(E)$ 是 Banach 空间。

注 2.7 特别地，$L^p[a,b]$ $(p \ge 1)$ 是 Banach 空间。

定理 2.7 $L^p[a,b]$ $(1 \le p < \infty)$ 是可分的赋范空间。

证明. 证明思路：找到 $L^p[a,b]$ 中的可数稠密子集，步骤如下：1. 对任意 $x(t) \in L^p[a,b]$，构造截断函数 $x_n(t)$：

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t), & |x(t)| \le n \\ 0, & |x(t)| > n \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

由积分绝对连续性，$\|x - x_n\|_p = \left(\int_{\{t||x(t)|>n\}} |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$ $(n \to \infty)$，即对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N 使得 $\|x - x_N\|_p < \varepsilon$。

2. 对 $x_N(t)$，由 Luzin 定理，存在连续函数 $y(t)$ 使得：- 除零测集 A 外，$x_N(t) = y(t)$；- $|y(t)| \le N$，且 $m(A) < \left(\frac{\varepsilon}{2N}\right)^p$。计算得 $\|x_N - y\|_p = \left(\int_A |x_N(t) - y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le 2N \cdot (m(A))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$。

3. 对连续函数 $y(t)$，由 Weierstrass 定理，存在有理系数多项式 $p(t)$ 使得：

$$|y(t) - p(t)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{p}}} \quad (\forall t \in [a,b])$$

积分得 $\|y - p\|_p = \left(\int_a^b |y(t) - p(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$。

综上，$\|x - p\|_p \le \|x - x_N\|_p + \|x_N - y\|_p + \|y - p\|_p < 3\varepsilon$。由于全体有理系数多项式是可数集，故 $L^p[a,b]$ 可分。

注 2.8 $[a,b]$ 上的连续函数全体是 $L^p[a,b]$ 的稠子集，但连续函数空间在 L^p 范数下不完备。$L^p[a,b]$ 可看作是连续函数空间在 L^p 范数下的完备化空间。

2.2.4 L^∞ 空间

定义 2.5 设 E 是可测集，$x(t)$ 是 E 上的可测函数。若存在 E 的零测子集 E_0 $(m(E_0) = 0)$，使得 $x(t)$ 在 $E \setminus E_0$ 上有界，则称 $x(t)$ 是本性有界的函数。

全体在 E 上本性有界的可测函数组成的集合，记为 $L^\infty(E)$。在 $L^\infty(E)$ 上定义范数（本性上界）：

$$\|x\|_\infty = \inf \{m \mid \exists E_0 \subset E, m(E_0) = 0 \text{ 且} |x(t)| \le m, \forall t \in E \setminus E_0\}$$

例 2.4 $L^\infty(E)$ 是赋范空间。验证范数的四条性质：1. 非负性：由下确界定义，$\|x\|_\infty \ge 0$；2. 正定性：$\|x\|_\infty = 0$ 当且仅当 $x(t)$ 几乎处处为 0；3. 正齐次性：$\|\alpha x\|_\infty = |\alpha| \|x\|_\infty$ $(\alpha \in \mathbb{K})$；4. 三角不等式：$\|x + y\|_\infty \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$。

注 2.9 1. $\|x\|_\infty$ 的下确界可达到：存在零测集 E_0 使得 $\|x\|_\infty = \sup_{t\in E\setminus E_0} |x(t)|$。证明：由下确界定义，对任意 $n \in \mathbb{N}$，存在零测集 E_n 使得 $\sup_{E\setminus E_n} |x(t)| < \|x\|_\infty + \frac{1}{n}$。令 $E_0 = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$（零测集），则 $\sup_{E\setminus E_0} |x(t)| \le \sup_{E\setminus E_n} |x(t)| < \|x\|_\infty + \frac{1}{n}$ 对所有 n 成立，故 $\sup_{E\setminus E_0} |x(t)| = \|x\|_\infty$。

2. $L^\infty(E)$ 中的收敛：$\|x_n - x\|_\infty \to 0\ (n \to \infty)$ 等价于 $\{x_n(t)\}$ 除去零测集外，在 E 上一致收敛到 $x(t)$。

定理 2.8 $L^\infty(E)$ 是不可分的 Banach 空间。

证明.（完备性）设 $\{x_n(t)\}$ 是 $L^\infty(E)$ 中的 Cauchy 列，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N 使得当 $n, m > N$ 时，$\|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon$。由本性上界定义，存在零测集 $E_{n,m}$ 使得 $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ 对所有 $t \in E \setminus E_{n,m}$ 成立。令 $E_0 = \bigcup_{n,m>N} E_{n,m}$（零测集），则 $\{x_n(t)\}$ 在 $E \setminus E_0$ 上一致收敛到某有界函数 $x(t)$，故 $x(t) \in L^\infty(E)$ 且 $\|x_n - x\|_\infty \to 0$，完备性得证。

（不可分性）考虑集合 $\{x_a(t) \mid a \in (0,1)\}$，其中 $x_a(t) = 1$ 当 $t \in (0,a)$，$x_a(t) = 0$ 当 $t \in [a,1]$（取 $E = (0,1)$）。对任意 $a \ne b$，$\|x_a - x_b\|_\infty = 1$，即该集合是不可数的“离散”集。若 $L^\infty(E)$ 可分，则存在可数稠密子集，无法覆盖不可数的离散集，故不可分。

命题 2.9 当 $m(E) < \infty$ 时，若 $1 \le p_2 < p_1 < \infty$，则：

$$L^\infty(E) \subset L^{p_1}(E) \subset L^{p_2}(E)$$

证明. 1. 证明 $L^\infty(E) \subset L^{p_1}(E)$：设 $x(t) \in L^\infty(E)$，则存在 $M > 0$ 使得 $|x(t)| \le M$ 几乎处处成立。积分得 $\int_E |x(t)|^{p_1} dt \le M^{p_1} m(E) < \infty$，故 $x(t) \in L^{p_1}(E)$。

2. 证明 $L^{p_1}(E) \subset L^{p_2}(E)$：设 $x(t) \in L^{p_1}(E)$，令 $B = \{t \in E \mid |x(t)| \le 1\}$，则：

$$\int_E |x(t)|^{p_2} dt = \int_B |x(t)|^{p_2} dt + \int_{E\setminus B} |x(t)|^{p_2} dt$$

右边第一项 $\le \int_B 1 \cdot dt = m(B) < \infty$，第二项 $\le \int_{E\setminus B} |x(t)|^{p_1} dt < \infty$（因 $|x(t)| > 1$ 时 $|x(t)|^{p_2} \le |x(t)|^{p_1}$），故 $x(t) \in L^{p_2}(E)$。

注 2.10 当 $m(E) < \infty$ 时，对任意 $x(t) \in L^\infty(E)$，有 $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$。因此可将 $L^\infty(E)$ 看作 $L^p(E)$ 当 $p \to \infty$ 时的极限情形。

2.2.5 l^p 空间

定义 2.6 1. 当 $1 \le p < \infty$ 时，l^p 表示全体 p 次方可和的数列组成的集合，即：

$$l^p = \left\{ x = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty \mid \sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p < \infty \right\}$$

在 l^p 上定义范数：

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

2. l^∞ 表示全体有界数列组成的集合，即：

$$l^\infty = \{x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \mid \exists M > 0, \forall k \in \mathbb{N}, |\xi_k| \leq M\}$$

在 l^∞ 上定义范数：

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k|$$

例 2.5 l^p $(1 \leq p < \infty)$ 是赋范空间。由离散型 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式可验证范数的三角不等式，结合其他范数性质，即得 l^p 是赋范空间。

例 2.6 l^∞ 是赋范空间。验证范数的四条性质：1. 非负性：$\|x\|_\infty = \sup |\xi_k| \geq 0$；2. 正定性：$\|x\|_\infty = 0$ 当且仅当所有 $\xi_k = 0$；3. 正齐次性：$\|\alpha x\|_\infty = \sup |\alpha\xi_k| = |\alpha| \sup |\xi_k| = |\alpha|\|x\|_\infty$; 4. 三角不等式: $\|x+y\|_\infty = \sup |\xi_k+\eta_k| \leq \sup(|\xi_k|+|\eta_k|) \leq \sup |\xi_k|+\sup |\eta_k| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$。

定理 2.10 (离散型 Hölder 不等式) 设 $x = \{\xi_k\} \in l^p$，$y = \{\eta_k\} \in l^q$，其中 $p, q > 0$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则：

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k\eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

定理 2.11 (离散型 Minkowski 不等式) 设 $x = \{\xi_k\}, y = \{\eta_k\} \in l^p$，其中 $p \geq 1$，则：

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

注 2.11 1. l^p $(1 \leq p < \infty)$ 是可分的 Banach 空间；2. l^∞ 是不可分的 Banach 空间。

2.3 赋范空间的几何结构

定理 2.12 设 $B(0,1) = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$ 是赋范空间 X 中开的单位球，则 $B(0,1)$ 是凸的。

证明. 对于任意的 $x, y \in B(0,1)$ 及 $0 < \alpha < 1$，则

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\| < \alpha + (1-\alpha) = 1$$

于是 $\alpha x + (1-\alpha)y \in B(0,1)$, 所以 $B(0,1)$ 是一个凸集。

注 2.12 单位球是 0 点的一个凸邻域，这是赋范空间十分重要的几何特征。

例 2.7 设 X 是由有序实数组 $x=(x_1,x_2)$ 组成的空间，在 X 上定义 $\varphi(x)=(\sqrt{|x_1|}+\sqrt{|x_2|})^2$，则曲线 $\varphi(x)=1$ 围成的区域不是凸集。因此 $\varphi(x)$ 不是 X 上的范数。

定理 2.13 设 X 是一个赋范空间，X_1 是 X 的一个子空间。如果 X_1 是开集，则 $X_1=X$。

证明. 对任意的 $x\in X$，只需证明 $x\in X_1$ 即可。

- (1) 当 $x=0$ 时，由于 X_1 是一个子空间，故 $x=0\in X_1$。
- (2) 假设 $x\neq 0$。因为 X_1 是开集且 $0\in X_1$，所以存在 $\delta>0$，使得 $B(0,\delta)\subset X_1$。因此 $\frac{\delta x}{2\|x\|}\in X_1$，这是由于

$$\left\|\frac{\delta x}{2\|x\|}\right\|=\frac{\delta\|x\|}{2\|x\|}=\frac{\delta}{2}<\delta$$

注意到 X_1 是一个线性子空间，于是 $x=\frac{2\|x\|}{\delta}\cdot\frac{\delta x}{2\|x\|}\in X_1$。因此 $X\subset X_1$，从而 $X=X_1$。

注 2.13 这个定理说明赋范空间 X 的真子空间不能是开集。

那真子空间是否是闭集呢？事实上在 $\mathbb{R}^n$ 空间以及所有有限维空间中 (后续我们将看到所有 n 维空间都同构于 $\mathbb{R}^n$)，所有的子空间都是闭的。但是在无穷维空间，子空间就可能不是闭的。

例 2.8 设 $\varphi=\{\{x_n\}\in l^\infty\mid \exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N,x_n=0\}$, 即 φ 中的数列仅有有限项不等于零。显然 φ 是 l^∞ 的一个线性子空间，但是 φ 不是闭的。

事实上，令 $y_n=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},0,0,\cdots)$，$y=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots)$。虽然 $y_n\in\varphi$ 并且

$$\|y_n-y\|=\left\|\left(0,0,0,\cdots,0,\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},\cdots\right)\right\|=\frac{1}{n+1}$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\|y_n-y\|=0$，即 $\lim_{n\to\infty}y_n=y$，但是 $y\notin\varphi$，因此 φ 不是闭的。

定理 2.14 设 X 是赋范空间，$X_1\subset X$ 是子空间，则

- (1) 若子空间 X_1 是完备的，则 X_1 是闭的；
- (2) 若 X 是 Banach 空间，X_1 是 X 的闭子空间，则 X_1 一定是 Banach 空间。

证明.

- (1) 由完备性的定义和收敛点列都是柯西列）可证。
- (2) 根据（闭子空间的性质）可证。

例 2.9 设 c 表示收敛数列的全体，定义范数

$$\|x\|=\sup_k|\xi_k|$$

则 c 是一个赋范空间。在通常加法和数乘的意义下，c 是 Banach 空间 l^∞ 的子空间。

定理 2.15 c 是 Banach 空间 l^∞ 的闭子空间。进而 c 是 Banach 空间。

证明. 分析：只需证明 c 中的任何收敛点列的极限属于 c。

设 $\{x_n\}$ 是 c 中收敛点列，即 $x_n \to x_0$，其中 $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}$，$x_0 = \{\xi_k^{(0)}\}$。我们要证明 $x_0 \in c$，即证 x_0 是一个收敛的数列，只需证明 x_0 是一个 Cauchy 数列。

由于 $c \subset l^\infty$ 且 $\{x_n\}$ 在 l^∞ 中按范数收敛到 x_0，故对于 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n \geq N$ 时，

$$\|x_n - x_0\| = \sup_k |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

因此当 $n \geq N$ 时，对于每一个 k，

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

因为 $x_N = \{\xi_k^{(N)}\}_{k=1}^\infty$ 是一个收敛的数列（$k \to \infty$），所以 $\exists K$，当 $k, l > K$ 时，

$$|\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

于是

$$|\xi_k^{(0)} - \xi_l^{(0)}| \leq |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(N)}| + |\xi_k^{(N)} - \xi_l^{(N)}| + |\xi_l^{(N)} - \xi_l^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

从而 $\{\xi_k^{(0)}\}_{k=1}^\infty$ 是 Cauchy 数列，即它是收敛的数列，因此 $x_0 \in c$。所以 c 是 Banach 空间 l^∞ 的闭子空间。

例 2.10 设 $c_0 = \{$全体收敛到 0 的数列$\}$，定义范数

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|$$

则 c_0 是 c 的闭子空间。

证明. 显然 c_0 是 c 的子空间，要证明是闭的，只需证明：若

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0 = \{\xi_k^{(0)}\} \quad (n \to \infty)$$

则 $x_0 \in c_0$，即 x_0 是收敛到 0 的数列。

注意到，在 c 中的收敛是一致收敛，所以对于任意的 $\varepsilon > 0$，可以找到 N，当 k 充分大时

$$|\xi_k^{(0)}| \leq |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(N)}| + |\xi_k^{(N)}| < \varepsilon$$

即 $\lim_{k\to\infty} \xi_k^{(0)} = 0$，我们有 $x_0 \in c_0$，即 c_0 是 c 的闭子空间。

注 2.14 $c_0 \subset c \subset l^\infty$（都是 l^∞ 的闭子空间），于是 c_0 是 Banach 空间。同理可证：全体收敛到实数 x 的数列也是 l^∞ 的闭子空间（x 为任意常数）。

关于赋范空间的真子空间和闭子空间，需要注意：

(1) 若 M 是赋范空间 X 中的一个真子空间，那么 M 可能在 X 中稠密。例如，多项式函数的全体是 $C[a,b]$ 的稠密的真子空间。但在有限维空间，真子空间不可能在全空间中稠密。(这是因为有限维空间的真子空间一定是闭的，如果还是稠密的话，那就不可能是真子空间了)

(2) 若 M 是 X 的闭子空间，M 要在 X 中稠密只能是 $M = X$。

(3) 从前两点可以看出，一个真闭子空间不可能稠密。于是若 M 是 X 中的一个真闭子空间，则一定存在一个 X 中的点，它和 M 有正距离。但是这个正距离能有多大？

定理 2.16 (F.Riesz 引理) 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间，X_0 是 X 的真闭子空间，则 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $x_0 \in X$，使得 $\|x_0\| = 1$，且 $\forall x \in X_0$，

$$\|x - x_0\| = \left\| x - \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|} \right\| = \frac{1}{\|x_1 - x_2\|} \|(\|x_1 - x_2\| x + x_2) - x_1\| \geq \frac{1}{\|x_1 - x_2\|} \cdot d > 1 - \varepsilon$$

证明.

- 因为 X_0 是 X 的真子空间，于是存在 $x_1 \in X \setminus X_0$，记 $d = \inf_{x \in X_0} \|x - x_1\|$。
- 因 X_0 是闭的，故 $d > 0$。否则存在 $x_n \in X_0$，且 $\|x_n - x_1\| \to 0$，再由 X_0 闭，推出 $x_1 \in X_0$，矛盾。
- 不妨设 $\varepsilon < 1$，则有 $\frac{d}{1-\varepsilon} > d$。由下确界的定义，存在 $x_2 \in X_0$，使得 $\|x_1 - x_2\| < \frac{d}{1-\varepsilon}$。
- 令 $x_0 = \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}$，则 $\|x_0\| = 1$。对于任何 $x \in X_0$，注意到 $x_2 \in X_0$，我们有 $x \cdot \|x_1 - x_2\| + x_2 \in X_0$，因此

$$\|x \cdot \|x_1 - x_2\| + x_2 - x_1\| \geq d$$

两边除以 $\|x_1 - x_2\|$ 得

$$\|x - \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}\| \geq \frac{d}{\|x_1 - x_2\|} > 1 - \varepsilon$$

2.4 有限维赋范空间

定义 2.7 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数，如果存在正数 $a > 0$、$b > 0$，使得对任意 $x \in X$，都有

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$$

则称范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是等价的。

命题 2.17 在两个等价范数产生的赋范空间中，点列 $\{x_n\}$ 的收敛性完全一致。

证明. 由范数等价的定义，存在 $a>0$、$b>0$ 使得 $a\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b\|x\|_1$。

- 若 $\|x_n - x_0\|_1 \to 0\ (n\to\infty)$，则由 $a\|x_n - x_0\|_1 \le \|x_n - x_0\|_2$，可得 $\|x_n - x_0\|_2 \to 0$;
- 反之，若 $\|x_n - x_0\|_2 \to 0\ (n\to\infty)$，则由 $\|x_n - x_0\|_2 \le b\|x_n - x_0\|_1$，可得 $\|x_n - x_0\|_1 \to 0$。

结合上述两点，点列在两个赋范空间中的收敛性一致，命题得证。

注 2.15 在等价范数诱导的赋范空间中，同一元素的范数数值可能不同，但空间中点列的收敛性、闭集与开集的判定、完备性等拓扑性质完全相同。

推论 2.18 设 X 是线性空间，$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上的等价范数，令 $d_1(x,y)=\|x-y\|_1$、$d_2(x,y)=\|x-y\|_2$ 分别为两范数诱导的距离，则：

- (1) 点列 $\{x_n\}$ 在 (X,d_1) 中收敛到 x，当且仅当 $\{x_n\}$ 在 (X,d_2) 中收敛到 x;
- (2) 点列 $\{x_n\}$ 是 (X,d_1) 中的 Cauchy 列，当且仅当 $\{x_n\}$ 是 (X,d_2) 中的 Cauchy 列;
- (3) 距离空间 (X,d_1) 是完备的，当且仅当 (X,d_2) 是完备的。

注 2.16 赋范空间 $(X,\|\cdot\|_1)$ 与 $(X,\|\cdot\|_2)$ 不仅代数结构同构（元素与线性运算一致），且拓扑结构同胚（收敛性、闭集/开集完全相同）。

例 2.11 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义三个常用范数（设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$）：

- 1-范数：$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|$;
- 2-范数：$\|x\| = (\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2)^{\frac{1}{2}}$;
- ∞-范数：$\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |\xi_k|$。

这三个范数满足以下不等式：

$$\|x\| \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|$$

$$\|x\|_\infty \le \|x\| \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

因此 $\|x\|$、$\|x\|_1$、$\|x\|_\infty$ 彼此等价，诱导的距离空间中点列收敛性一致（均等价于按坐标收敛）。

事实上，对于有限维赋范空间，有一个十分有趣的结论。

定理 2.19 任意实的 n 维赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 必与 $\mathbb{R}^n$ 代数同构且拓扑同胚。

证明.

- **代数同构**: 因 X 是 n 维赋范空间，存在一组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，对任意 $x\in X$，可唯一表示为
$$x=\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+\cdots+\xi_n e_n$$

定义映射 $T: X \to \mathbb{R}^n$，使得 $T(x) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$，则易证 T 是双射且保持线性运算，故 X 与 $\mathbb{R}^n$ 代数同构。

- **拓扑同胚**: 需证明 X 上的范数 $\|\cdot\|$ 与 $\mathbb{R}^n$ 上的范数（如 2-范数 $\|\bar{x}\| = (\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2)^{\frac{1}{2}}$）等价。
  - 首先，由三角不等式与 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| \|e_k\| \leq \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \beta \|\bar{x}\|$$

    其中 $\beta = (\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2)^{\frac{1}{2}}$ 是与 x 无关的常数。
  - 其次，在 $\mathbb{R}^n$ 的单位球面 $S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{x}\| = 1\}$ 上定义函数

$$f: S \to X$$
$$\bar{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \to \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n\|$$

    因 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集（列紧集），且 $f(\bar{x}) > 0$（因为基线性无关，所以 $x \neq 0$），故 $f(\bar{x})$ 在 S 上取到最小值 $\alpha > 0$，即对任意 $\bar{x} \in S$，有 $f(\bar{x}) \geq \alpha$。

    则对任意 $x \in X$（$x \neq 0$），$\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \in S$，故 $f\left(\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right) = \left\|\frac{x}{\|\bar{x}\|}\right\| \geq \alpha$，即 $\|x\| \geq \alpha \|\bar{x}\|$。

结合上述两方面，$\alpha\|\bar{x}\| \leq \|x\| \leq \beta\|\bar{x}\|$，故 X 与 $\mathbb{R}^n$ 拓扑同胚。

注 2.17

- 实有限维赋范空间的范数均与 $\mathbb{R}^n$ 的范数等价，其收敛性等价于按坐标收敛；
- 复有限维赋范空间可类似证明与 $\mathbb{C}^n$ 代数同构且拓扑同胚，且所有有限维赋范空间都是 Banach 空间（因 $\mathbb{R}^n$、$\mathbb{C}^n$ 完备）。

定理 2.20 赋范空间 X 是有限维的，当且仅当 X 中的任意有界集都是列紧集。

证明.

- **必要性**：若 X 是有限维的，则 X 与 $\mathbb{R}^n$（或 $\mathbb{C}^n$）拓扑同胚。由 $\mathbb{R}^n$ 中“有界闭集必列紧”的性质，可知 X 中的任意有界集都是列紧集。
- **充分性**：（反证法）：假设 X 是无穷维的，考虑单位球面 $S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$（有界集）。
  - 任取 $x_1 \in S$，记 $X_1 = \text{span}\{x_1\}$（X 的 1 维闭子空间）。因 X 无穷维，X_1 是 X 的真闭子空间；
  - 由 Riesz 引理，存在 $x_2 \in S$ 使得 $\|x_2 - x\| > \frac{1}{2}$ 对所有 $x \in X_1$ 成立，记 $X_2 = \text{span}\{x_1, x_2\}$（2 维闭子空间）；
  - 重复上述步骤，可构造无穷点列 $\{x_n\} \subset S$，满足对任意 $i \neq j$，$\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2}$。

该点列 $\{x_n\}$ 是有界集 S 中的序列，但无收敛子列（任意两元素距离大于 $\frac{1}{2}$），与“有界集必列紧”矛盾，故 X 必为有限维。

推论 2.21 设 X 是无穷维赋范空间，则其单位球 $B(0,1)=\{x\in X \mid \|x\|<1\}$ 和单位球面 $S(0,1)=\{x\in X \mid \|x\|=1\}$ 都不是列紧集。

注 2.18

- 无穷维赋范空间中，即使是单位球（面）这样的有界集也不列紧，这是有限维与无穷维赋范空间的核心区别；
- 列紧性是距离空间的重要性质，有限维空间中“有界闭集 = 列紧集”的结论在无穷维空间中不再成立。

2.5 赋范空间的进一步性质

2.5.1 赋范空间中的级数

在赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中，定义无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots,$$

其中 $x_k \in X$。若级数的前 n 项和序列 $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 收敛，即存在 $x\in X$，使得 $\|S_n - x\| \to 0$（$n\to\infty$），则称 x 是级数的和，记为 $x=\sum_{k=1}^{\infty} x_k$。

定理 2.22 (级数收敛与空间完备性的关系) 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间，则以下结论成立：

- (1) 若 X 完备，且正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ 收敛，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛，且 $\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\| \le \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$。
- (2) 反之，若在赋范空间 X 中，任何满足 $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<\infty$ 的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 都收敛，则 X 是 Banach 空间。

注 2.19 (证明思路) (1) 该结论类似于“绝对收敛推出收敛”。要证级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 收敛，只需证明前 n 项和序列 $\{S_n\}$ 是 Cauchy 列。由 $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$ 收敛，对任意 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>m>N$ 时，$\sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\|<\varepsilon$，从而 $\|S_n - S_m\| = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\| \le \sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\| < \varepsilon$，故 $\{S_n\}$ 是 Cauchy 列。因 X 完备，故 $\{S_n\}$ 收敛。

(2) 要证 X 完备，只需证明 X 中的任意 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 都收敛。取子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$（$k=1,2,\cdots$），则 $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} < \infty$。由条件，级数 $x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ 收敛，即 $x_{n_k} \to x$（$k\to\infty$）。再由 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，可证 $x_n \to x$，故 X 完备。

2.5.2 赋范空间的商空间

通过等价关系构造新空间——商空间，是泛函分析中的重要方法。

定义 2.8 (等价关系) 设 M 是赋范空间 X 的线性子空间。对任意 $x_1, x_2 \in X$，若 $x_1 - x_2 \in M$，则称 x_1 和 x_2 关于 M 等价，记为 $x_1 \sim x_2$。

注 2.20 (等价关系的性质) 等价关系满足以下性质：

- (i) 自反性：因 $x - x = 0 \in M$，故 $x \sim x$；
- (ii) 对称性：若 $x \sim y$，则 $x - y \in M$，又 M 是子空间，故 $y - x = -(x - y) \in M$，即 $y \sim x$；
- (iii) 传递性：若 $x \sim y$ 且 $y \sim z$，则 $x - z = (x - y) + (y - z) \in M$，即 $x \sim z$。

例 2.12 (等价关系的实例) 在 $L^p(E)$ 中，设 $M = \{x(t) \mid x(t)\text{是}E\text{上几乎处处为零的可测函数}\}$，则 M 是 $L^p(E)$ 的线性子空间。对 $x_1, x_2 \in L^p(E)$，$x_1 \sim x_2$ 等价于 x_1 和 x_2 在 E 上几乎处处相等。

定义 2.9 (商空间) 设 M 是 X 的线性子空间，将与 $x \in X$ 等价的全体元素记为 $\tilde{x}$（即 $\tilde{x} = \{y \in X \mid y \sim x\}$，称为以 x 为代表的等价类）。定义等价类的加法和数乘：

$$\tilde{x} + \tilde{y} = \widetilde{x + y}, \quad \alpha\tilde{x} = \widetilde{\alpha x} \quad (\alpha \in \mathbb{K}),$$

则所有等价类构成的集合是线性空间，称为 X 关于 M 的商空间，记为 X/M。

定义 2.10 (赋范商空间) 设 X 是赋范空间，M 是 X 的闭子空间。在商空间 X/M 中定义

$$\|\tilde{x}\| = \inf_{y \in \tilde{x}} \|y\|,$$

则 $\|\tilde{x}\|$ 满足范数的正定、齐次和三角不等式，$(X/M, \|\cdot\|)$ 是赋范空间，称为赋范商空间。

例 2.13 (商空间的实例 1) 复数平面 $\mathbb{C}$ 中，$\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{C}$ 的闭子空间。商空间 $\mathbb{C}/\mathbb{R} = \{\tilde{x} \mid x \in \mathbb{C}\}$，其中 $\tilde{x} = \{y \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(y) = \mathrm{Im}(x)\}$。定义范数 $\|\tilde{x}\| = |\mathrm{Im}(x)|$，则 $(\mathbb{C}/\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ 是赋范商空间，且 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ 可等同于全体纯虚数构成的空间。

例 2.14 (商空间的实例 2) 设 $X = \{E\text{上所有}p\text{次可积的函数}\}, M = \{E\text{上几乎处处为零的可测函数}\}$，则 $L^p(E) = X/M$，即 $L^p(E)$ 可看作 X 关于 M 的商空间。

3 有界线性算子

3.1 有界线性算子和有界线性泛函

3.1.1 有界线性算子和有界线性泛函的定义

定义 3.1 (线性算子) 设 X、X_1 是赋范空间，$\mathrm{D}(T) \subset X$ 是一个线性子空间，T 是从 $\mathrm{D}(T)$ 到 X_1 的映射，满足

$$T(x+y) = Tx + Ty,$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx,$$

其中 $x, y \in \mathrm{D}(T)$，$\alpha \in \mathbb{K}$（$\mathbb{K}$ 是数域），则称 T 是从 X 到 X_1 的线性算子，$\mathrm{D}(T)$ 称为 T 的定义域。

注 3.1

- 一般地，$\mathrm{D}(T) \subsetneqq X$。如果 $\mathrm{D}(T) = X$，则称 T 是从 X 上到 X_1 的线性算子。
- 特别的，若 $X_1 = \mathbb{K}$（数域），$T : \mathrm{D}(T) \to \mathbb{K}$，这样的线性算子称为是线性泛函。。当 $\mathbb{K}$ 是实 (复) 数域，称为是实 (复) 线性泛函。

类似于函数或者映射的连续性，我们可以定义线性算子的连续性：

定义 3.2 (线性算子的连续性) 设 X、X_1 是赋范空间，T 是从 X 到 X_1 的线性算子。若 $x_n \to x_0$ 时，$Tx_n \to Tx_0$，则称 T 在 x_0 点连续。

定理 3.1 设 X、X_1 是赋范空间，T 是从 X 到 X_1 的线性算子。如果 T 在 x_0 点连续，则 T 在 X 上连续。

证明. 设 T 在 x_0 点连续，即 $x_n \to x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0$。

如果 $y_n \to y$，则 $y_n - y + x_0 \to x_0$，于是 $T(y_n - y + x_0) \to Tx_0$。

由于算子是线性的，有 $T(y_n - y) + Tx_0 \to Tx_0$，于是 $T(y_n - y) \to 0$, 则 $Ty_n \to Ty$。

注 3.2

- 对于上述证明来说，算子的线性是一个很重要的要求；对于线性算子来说，一点连续意味着点点连续。这个性质是由于算子具有线性这特殊性质。
- 我们可能会有这样的猜想：一个线性算子等价于一个矩阵。但是矩阵运算是连续的，那为什么是否说明了线性算子也都是连续的呢？其实并不是如此，因为矩阵运算的连续性依赖于矩阵范数的有界性，因此只有在有界线性算子时才可以连续，这也就是下面这个定理。

定义 3.3 (有界线性算子与有界线性泛函) 设 T 是从 X 到 X_1 的线性算子，若存在常数 $M > 0$，使得

$$\|Tx\|_1 \leq M\|x\|, \forall\, x \in X,$$

则称 T 为有界线性算子。

如果一个线性泛函 f 是有界的，即存在常数 $M>0$，使得

$$|f(x)| \leq M\|x\|, \forall\, x \in X,$$

则称 f 是有界线性泛函。

注 3.3

- 需要特别注意的是，线性算子的有界和函数的有界意义并不相同。例如：在实数空间 $\mathbb{R}$ 中，$y=Tx=x$ 看作普通的实函数是无界函数；但是把 $Tx=x$ 看作是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性算子，则 T 是有界线性算子（$M=1$）。
- 另外虽然定义赋范空间与像赋范空间的两个范数 ($\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|$) 可能不一样，但是有时候我们会不加区分。
- 有界线性算子把有界集映成有界集。

定理 3.2 (线性算子连续与有界的等价性) 设 X、X_1 是赋范空间，T 是从 X 到 X_1 的线性算子，则 T 是连续的当且仅当 T 是有界的。

证明.

- “$\Rightarrow$” 由 T 连续 $\Rightarrow T$ 有界（反证法）：
  假若 T 无界，则 $\forall\, n>0$，$\exists\, x_n$，使得 $\|Tx_n\|>n\|x_n\|$。
  令 $y_n=\frac{x_n}{n\|x_n\|}$，可见 $\|y_n\|\to 0$，于是 $y_n\to 0\ (n\to\infty)$。
  由于 T 连续，所以 $Ty_n\to T0=0$，但由上式有 $\|Ty_n\|=\frac{1}{n}\left\|\frac{Tx_n}{\|x_n\|}\right\|>1$，矛盾。
- “$\Leftarrow$” 由 T 有界 $\Rightarrow T$ 连续：
  若 $x_n\to x$，由于 T 有界，存在 $M>0$，使得 $\forall\, x\in X$，有 $\|Tx\|\leq M\|x\|$。
  于是 $\|Tx_n-Tx\|=\|T(x_n-x)\|\leq M\|x_n-x\|\to 0\ (n\to\infty)$，于是 T 是连续的。

注 3.4 线性算子连续等价于有界，这是线性算子一个重要的性质。因此本章介绍的有界线性算子其实也就是连续线性算子，他的很多性质都和连续函数有相似的地方。

3.1.2 有界线性算子组成的赋范空间

定义 3.4 (有界线性算子空间) 设 X、X_1 是赋范空间，$\mathcal{B}(X,X_1)$ 表示从 X 到 X_1 的全体有界线性算子。如果 $X=X_1$，我们把 $\mathcal{B}(X,X_1)$ 简记为 $\mathcal{B}(X)$。

注 3.5 在 $\mathcal{B}(X,X_1)$ 中可以自然地定义线性运算，即对于任给的 $A,B\in\mathcal{B}(X,X_1)$ 及 $\alpha\in\mathbb{K}$，定义：

$$(A+B)(x)=Ax+Bx,\ (\alpha A)(x)=\alpha Ax.$$

又由于

$$\|(A+B)x\| = \|Ax+Bx\| \leq \|Ax\|+\|Bx\| \leq (M_1+M_2)\|x\|,$$

$$\|\alpha Ax\| = |\alpha|\|Ax\| \leq |\alpha|M_1\|x\|,$$

所以 $\mathcal{B}(X,X_1)$ 对加法、数乘运算封闭，因此 $\mathcal{B}(X,X_1)$ 成为线性空间。

定义 3.5 (有界线性算子的范数) 设 $T \in \mathcal{B}(X,X_1)$，即存在 $M>0$，使得

$$\|Tx\| \leq M\|x\|, \forall\, x \in X,$$

定义

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

$\|T\|$ 称为有界线性算子 T 的范数。

注 3.6 由上述两式可得

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{M\|x\|}{\|x\|} = M,$$

这说明 $\|T\|$ 是良定义。由于对 $\forall\, x \in X$，$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|$，有 $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$，即 $\|T\|$ 是使 $\|Tx\| \leq M\|x\|$ 成立的最小的 M，于是

$$\|T\| = \inf\{M \mid \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X\}.$$

由上述定义的 $\|T\|$ 是线性算子空间 $\mathcal{B}(X,X_1)$ 上的范数。事实上:

- (非负) $\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq 0$;
- (正定) $\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0, \forall x \in X, x \neq 0 \Rightarrow T = 0$;
- (正齐次) $\|\alpha T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|\alpha Tx\|}{\|x\|} = |\alpha| \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$;
- (三角不等式)

$$\begin{aligned}\|T_1+T_2\| &= \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|(T_1+T_2)x\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|T_1x\|+\|T_2x\|}{\|x\|}\\ &\leq \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|T_1x\|}{\|x\|} + \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|T_2x\|}{\|x\|} = \|T_1\|+\|T_2\|.\end{aligned}$$

因此 $\|T\|$ 是一个范数。

注 3.7 上述讨论表明：$(\mathcal{B}(X,X_1), \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间. 上面定义的范数还有以下几种等价表示方式:

定理 3.3 (算子范数的等价表示) 设 T 是从赋范空间 X 到 X_1 的有界线性算子，则

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|.$$

证明. 一方面，

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq \sup_{\substack{x\neq 0\\\|x\|\leq 1}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq \sup_{\substack{x\neq 0\\\|x\|\leq 1}} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| \geq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|;$$

另一方面，对于任意的 $y \in X$，$y \neq 0$，

$$\left\|T\frac{y}{\|y\|}\right\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|,$$

取上确界，得

$$\sup_{\substack{y\in X\\y\neq 0}} \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|,$$

即 $\|T\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$。结合上面的不等式，有

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|.$$

注 3.8 当 $A, B \in \mathcal{B}(X)$ 时，还可以定义

$$(A \cdot B)(x) = A(Bx) \quad (\text{记为} AB),$$

显然 AB 也是线性算子，并且

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|,$$

这是因为，$\forall\, x \in X$，

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|.$$

进一步有

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n.$$

3.1.3 有界线性算子的例子

例 3.1 (有限矩阵算子) 考虑 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ ($i, j = 1, 2, \cdots, n$)，对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$，$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，令

$$Ax = (a_{ij})\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\vdots\\\eta_n\end{pmatrix} = y,$$

其中 $\eta_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j$，则 A 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性算子。由于

$$\begin{aligned}\|Ax\| &= \left(\sum_{i=1}^n |\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|x\| = \|A\|_F\|x\|,\end{aligned}$$

因此 A 是有界线性算子。

一般来说 $\|A\|\neq\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，进一步地可以证明，定义在有限维空间上的线性算子都是有界线性算子。

定理 3.4 (有限维空间线性算子的有界性) 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是有限维的赋范空间，$(Y,\|\cdot\|)$ 是任意一个赋范空间，T 是从 X 到 Y 的线性算子，则 T 是有界线性算子。

证明. 在 X 上定义一个新范数

$$\|x\|_1=\|x\|+\|Tx\|,$$

显然范数前三个条件 $\|\cdot\|_1$ 都满足，且

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1 &= \|x+y\|+\|T(x+y)\| = \|x+y\|+\|Tx+Ty\| \\ &\le \|x\|+\|y\|+\|Tx\|+\|Ty\| = \|x\|_1+\|y\|_1,\end{aligned}$$

即 $\|\cdot\|_1$ 是 X 上定义的另一个范数。

因为 X 是有限维的赋范空间，而有限维空间上定义的范数都是等价的，于是 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 等价，即存在 $K>0$，使得对于任意的 $x\in X$ 有

$$\|x\|_1\le K\|x\|.$$

根据新范数定义和上式，我们有

$$\|Tx\|\le\|x\|_1\le K\|x\|,$$

这说明 T 是有界的。

注 3.9 为什么新范数不可以直接定义为 $\|Tx\|$？因为这样不一定满足范数的正定性（若 $\exists x$满足$Tx=0$ 但 $x\neq 0$，则 $\|Tx\|=0$，这时不满足正定性）。

例 3.2 (无穷矩阵算子) 无穷矩阵 (a_{ik})，满足

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q<\infty\quad(q>1),$$

对 $\forall x \in l^p$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$，$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)$，令

$$\eta_i=\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k \quad (i=1,2,\cdots),$$

定义线性算子：$Tx=y$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k,\cdots)$，则 T 是从 l^p 到 l^q 的有界线性算子。

事实上，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q &= \sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k\right|^q \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^q \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q\|x\|_p^q,\end{aligned}$$

即

$$\|Tx\|_q=\|y\|_q\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\|x\|_p,$$

这说明 T 是 $l^p\to l^q$ 的有界线性算子。

例 3.3 (取值泛函) 设 T 是从 $C[0,1]$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的一个映射

$$T(x)=x(0),\forall x\in C[0,1],$$

则 T 是一个有界线性泛函。

事实上，

$$|T(x)|=|x(0)|\le\sup\{|x(t)|\mid t\in[0,1]\}=\|x\|,$$

所以 $\|T\|\le 1$。另一方面，对于 $x_0(t)\equiv 1\in C[0,1]$，$T(x_0)=1=\|x_0\|$，于是 $\|T\|=1$。

例 3.4 (内积型线性泛函) 设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$，对于任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，定义

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i,$$

则 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界线性泛函。

证明：f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性泛函，因为

$$\begin{aligned}f(\alpha x+\beta y)&=\sum_{i=1}^{n}a_i(\alpha x_i+\beta y_i)=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+\beta\sum_{i=1}^{n}a_iy_i\\ &=\alpha f(x)+\beta f(y).\end{aligned}$$

f 的有界性可由 Holder 不等式证出：

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i x_i| \\ &\le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|a\|\|x\|,\end{aligned}$$

即 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界线性泛函。

注 3.10 以后会看到，$\mathbb{R}^n$ 上的任何有界线性泛函一定可以写成上述形式，$f(x) = (a, x)$（内积），即 $\mathbb{R}^n$ 上的有界线性泛函 f 可以由 $\mathbb{R}^n$ 中的元素 a 确定。在 $\mathbb{R}^3$ 中可看到，$a = (a_1, a_2, a_3)$ 正是平面 $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ 的法向量。

例 3.5 (积分型线性泛函) 设 $y_0(t)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数，对于任意的 $x \in C[a, b]$，定义

$$f(x) = \int_a^b x(t)y_0(t)dt,$$

则 f 是 $C[a, b]$ 上的线性泛函。事实上，

$$\begin{aligned}|f(x)| &\le \int_a^b |x(t)y_0(t)|dt \\ &\le \int_a^b |y_0(t)| \max_{a\le t\le b} |x(t)|dt = \left(\int_a^b |y_0(t)|dt\right) \|x\|,\end{aligned}$$

即 f 是 $C[a, b]$ 上的有界线性泛函。

注 3.11 1. 可以证明 $\|f\| = \int_a^b |y_0(t)|dt$。

2. 特别地，若 $y_0(t) \equiv 1$，定积分 $f(x) = \int_a^b x(t)dt$ 是 $C[a, b]$ 上的有界线性泛函。

例 3.6 (无界微分算子) 不是所有的线性算子都是有界的，例如十分重要的微分算子就是一类无界算子。

设 $X = C[0, 1]$，

$$T : \mathrm{D}(T) \subset C[0, 1] \to C[0, 1],$$

$$Tx(t) = x'(t),$$

其中 $\mathrm{D}(T) = \{x(t) \in C[0, 1] \mid x(t) \text{ 的导数连续}\}$。

可以证明：T 是无界的线性算子。事实上，对于 $\sin nt \in C[0, 1]$，我们有

$$T(\sin nt) = n \cos nt, \|x_n\| = 1 \quad (n \ge 2),$$

但是 $\|Tx_n\| = n \to \infty$ $(n \to \infty)$，即 T 是无界的（注意 T 不是定义在全空间上的）。

注 3.12 微分算子是一类十分重要的无界线性算子，微分算子虽然是无界的，但它是闭的线性算子（闭算子的定义见 4.5，闭的线性算子也有“类似连续”的很好的性质）。

3.1.4 有界线性算子范数的计算

例 3.7 (积分算子的范数) 设 T 是如下从 $L[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的线性算子，定义为

$$(Tx)(t)=\int_a^t x(\tau)d\tau,$$

则 T 是有界的，且 $\|T\|=1$。

证明：对于任意的 $x\in L[a,b]$，$\|x\|=\int_a^b|x(\tau)|d\tau$，我们有

$$\|Tx\|=\max_{a\le t\le b}\left|\int_a^t x(\tau)d\tau\right|\le\max_{a\le t\le b}\int_a^t|x(\tau)|d\tau=\int_a^b|x(\tau)|d\tau=\|x\|,$$

即 $\|T\|\le 1$。

另一方面，令

$$x_0(t)=\frac{1}{b-a}\in L[a,b],\quad \|x_0\|=1,$$

因此

$$\|T\|\ge\|Tx_0\|=\max_{a\le t\le b}\left|\int_a^t x_0(\tau)d\tau\right|=\max_{a\le t\le b}\int_a^t\frac{1}{b-a}d\tau=1,$$

于是 $\|T\|=1$。

注 3.13 上例中的线性算子 T 若看作是从 $L[a,b]$ 到 $L[a,b]$ 的线性算子，则 $\|T\|=b-a$ （留作习题）。

3.2 有界线性算子空间的收敛性与完备性

3.2.1 有界线性算子空间的收敛性

定义 3.6 (有界线性算子列的收敛性) 设 $A_n, A\in\mathcal{B}(X,X_1)$, 如果 $\|A_n-A\|\to 0\ (n\to\infty)$, 则称有界线性算子列 $\{A_n\}$ 按范数收敛到有界线性算子 A.

定理 3.5 空间 $\mathcal{B}(X,X_1)$ 中线性算子列按范数收敛等价于线性算子列在 X 中的单位球 S 上一致收敛.

证明.

- 必要性. 事实上, $\forall\, x\in S$, 即 $\|x\|\le 1$, 有

$$\|A_nx-Ax\|\leqslant\sup_{\|x\|\le 1}\|(A_n-A)x\|=\|A_n-A\|\to 0\ (n\to\infty),$$

即 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛 (收敛的速度与 x 无关).

- 充分性. 事实上, 如果 $\{A_n\}$ 在 S 上一致收敛到 A, 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, $\exists\, N$, 当 $n \geqslant N$ 时, 对于任意的 $x \in S$, 有

$$\|A_n x - Ax\| < \varepsilon,$$

于是当 $n \geqslant N$ 时, $\|A_n - A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|A_n x - Ax\| \leqslant \varepsilon$. 即 $\{A_n\}$ 按范数收敛到 A.

注 3.14 算子列 $\{A_n\}$ 按范数收敛等价于在任意有界集上一致收敛.

事实上, 充分性由上述定理即可证明。对于必要性，设 $M \subset X$ 是有界集, 设 $K \geq 0$ 为 M 的界, 则 $\forall x \in M (x \neq 0)$, 有

$$\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\| \, \|x\| \leq \|A_n - A\| \, K,$$

这说明 $\{A_n\}$ 在有界集上一致收敛.

定义 3.7 (强收敛 (逐点收敛)) 设 $T_n, T \in \mathcal{B}(X, X_1)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 如果 $\forall x \in X$, $T_n x \to Tx$ $(n \to \infty)$, 即

$$\|T_n x - Tx\| \to 0 \ (n \to \infty),$$

则称 $\{T_n\}$ 逐点收敛到 T, 或称 $\{T_n\}$ 强收敛到 T. 记为 $T_n \xrightarrow{\text{强}} T$.(此时收敛的速度和 x 有关)

注 3.15 $\{T_n\}$ 按范数收敛 (一致收敛) 到 $T \Rightarrow T_n$ $\{T_n\}$ 强收敛 (逐点收敛) 到 T. 事实上

$$\|T_n - T\| < \varepsilon \ (n > N) \Rightarrow \|(T_n - T)x\| \leqslant \|T_n - T\| \|x\| < \varepsilon \|x\| \ (n > N), \ \forall x \in X,$$

这个结论是符合上一定理的，因为单点集就是一个有界集合。这与数学分析里学到的关于函数列的性质是一样的, 但是逐点收敛不一定是一致收敛，看以下反例

例 3.8 (左移算子) 设 $X = l^p$, $x \in l^p$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)$, 考虑左移算子

$$T_n x = x_n = (\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots).$$

易知

$$\|T_n x\| = \|x_n\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|,$$

可见 T_n 是有界线性算子, 且 $\|T_n\| \leqslant 1$.

则左移算子列 $\{T_n\}$ 强收敛到零, 但 $\{T_n\}$ 不是按范数收敛到零.

- $\{T_n\}$ 强收敛到零.

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n x\| = \lim_{n \to \infty} \|x_n\| = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

- $\{T_n\}$ 不是按范数收敛到零. 令 $y_n = (0, \cdots, \underset{n}{1}, 0, \cdots) \in l^p$, 则

$$\|y_n\| = 1,\ \ T_n y_n = (1, 0, 0, \cdots),$$

于是 $\|T_n y_n\| = 1$, 所以 $\|T_n\| \geqslant \|T_n y_n\| = 1$. 结合 $\|T_n\| \leqslant 1$, 我们有 $\|T_n\| = 1$, 所以 $\|T_n - 0\| = 1$, $\{T_n\}$ 按范数不收敛到零.

3.2.2 有界线性算子空间的完备性

接下来讨论 $\mathcal{B}(X, X_1)$ 的完备性。

定理 3.6 设 X 是赋范空间, X_1 是 Banach 空间, 则 $\mathcal{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间.

证明.

- 构造一个线性算子 T:

  设 $\{T_n\}$ 是 $\mathcal{B}(X, X_1)$ 中的 Cauchy 列. 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m \geqslant N$ 时, 有

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

  于是, $\forall x \in X$,

$$\|T_n x - T_m x\| \leqslant \|T_n - T_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|,$$

  这表明对于 $\forall\, x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列. 因为 X_1 完备, 故存在 $y \in X_1$, 使得

$$T_n x \to y\ (n \to \infty),\ \forall\, x \in X.$$

  可以定义

$$Tx = y = \lim_{n\to\infty} T_n x.$$

  易证 T 是从 X 到 X_1 的线性算子.
- 证明 T 是有界线性算子:

  注意到

$$|\|T_n\| - \|T_m\|| \leqslant \|T_n - T_m\| \to 0\ (n, m \to \infty),$$

  即 $\{\|T_n\|\}$ 是 Cauchy 数列. 故存在 $M > 0$, 使得

$$\|T_n\| \leqslant M\ (n = 1, 2, \cdots).$$

  由范数的连续性, 我们有

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leqslant M\|x\|.$$

  故 T 是有界线性算子, 即 $T \in \mathcal{B}(X, X_1)$.

- 证明 $\{T_n\}$ 按范数收敛 (一致收敛) 到 T:
  因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n, m \geqslant N$ 时,
  $$\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon \|x\|,$$
  $\forall x \in X$ 都成立. 令 $m \to \infty$, 由范数的连续性和 $\lim_{m\to\infty} T_m x = Tx$ 可推出
  $$\|T_n x - Tx\| \leqslant \varepsilon \|x\| \ (n > N),\ \forall x \in X$$
  即
  $$\|T_n - T\| \leqslant \varepsilon \ (n > N),$$
  于是有 $T_n \to T \ (n \to \infty)$.

综上可知 $\mathcal{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间.

注 3.16 设 X 是一个赋范空间, $\mathbb{K}$ 为数域, 由于数域 $\mathbb{K}$ 是完备的, 则 $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ 是完备的.

注 3.17 其实我一直想把这个证明和 $C[a, b]$ 的完备性的证明统一起来

- $\mathcal{B}(X, X_1)$ 是 $X \to X_1$ 的有界线性算子集合，其实也就是 X 中单位球 $\{x : \|x\| \leq 1, x \in X\}$ 上的连续线性映射集合，其范数定义为 $\sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|_1$, 所以是不是可以和 $C[a, b]$ 的证明统一起来了。
- 可能需要用到连续映射列在紧集上一致收敛于连续映射
- 因此我感觉也可以这样证明：其实主要就是利用了有界线性算子就是连续线性算子这一性质，再结合算法范数的等价定义以及连续映射列在紧集上一致收敛于连续映射。

证明.

- （1）构造一个线性算子 T：
  设 $\{T_n\}$ 是 $\mathcal{B}(X, X_1)$ 中的 Cauchy 列. 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m \geqslant N$ 时, 有
  $$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$
  于是, $\forall x \in X$,
  $$\|T_n x - T_m x\| \leqslant \|T_n - T_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|,$$
  这表明对于 $\forall\, x \in X$, $\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列. 因为 X_1 完备, 故存在 $y \in X_1$, 使得
  $$T_n x \to y \ (n \to \infty),\ \forall\, x \in X.$$
  可以定义
  $$Tx = y = \lim_{n\to\infty} T_n x.$$
  易证 T 是从 X 到 X_1 的线性算子.

- （2）证明 T 是有界线性算子且 $\{T_n\}$ 按范数收敛 (一致收敛) 到 T
  由（1）对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m \geqslant N$ 时, 有

$$\|T_n - T_m\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon.$$

因此 $\forall\, n, m \geq N$, $\forall\, x : \|x\| \leq 1$，有

$$\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon.$$

对固定的 x，令 $m \to \infty$，由极限的保号性得

$$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon \quad (n \geq N), \quad \forall\, x : \|x\| \leq 1.$$

这表明 $\{T_n\}$ 一致收敛到 T。根据“连续映射列一致收敛则极限映射连续”的性质，可知 T 在 $\{x : \|x\| \leq 1\}$ 上连续，则 T 为有界线性算子, 且 $\{T_n\}$ 按范数收敛 (一致收敛) 到 T.

综上可知 $\mathcal{B}(X, X_1)$ 是 Banach 空间.

- 进一步想一下，是不是所有的从赋范空间到 Banach 空间的连续映射构成的赋范空间是完备的，这个首先问题是是否可以给这样的空间定义范数。貌似不可以，因为如果还是定义 $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|_1$ 那范数可能没有正定性。为了得到正定性还需要映射是线性的。因此本节考虑连续线性算子是必要的。

3.3 一致有界原则

3.3.1 Baire 纲定理

定义 3.8 (疏集) 设 (X, d) 是距离空间，$E \subset X$。如果 E 不在 X 的任何非空开集中稠密，则称 E 是疏集。

注 3.18

- 对于 X 中的任何一个点，总能在他周围找到无法用疏朗集 E 中的点列逼近的点；换句话说，无法用 E 中点列逼近的点在 X 中”到此”都有
- 疏集 E 中没有内点。事实上，若 $x \in E$ 是内点，即存在 $S(x, r) \subset E$，则 E 在 $S(x, r)$ 中稠密。
- Cantor 集是疏集。事实上，Cantor 集没有内点。

定义 3.9 (第一与第二纲集) 若集合 E 可以表示成至多可数个疏集的并，即

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

其中 E_n 是疏集 $(n = 1, 2, \cdots)$，则称 E 是第一纲集。不是第一纲集的集合称为第二纲集。

定理 3.7 (Baire 纲定理) 完备的距离空间是第二纲集。

证明. 反证法: 假如不然，则

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

其中 $E_n\ (n=1,2,\cdots)$ 是疏集, 于是

(1) 对于任何开球 S，E_1 在 S 中不稠密，即存在 S 中的点 $x_1\notin\overline{E_1}$ 中, 由于 S 是开集，所以存在一个以 x_1 为球心半径小于 1 的闭球 $\overline{S_1}\subset S$，使得

$$\overline{S_1}\bigcap E_1=\emptyset$$

(2) 同样，E_2 在 S_1 中不稠密，即存在 S_1 中的点 $x_2\notin\overline{E_2}$ 中, 存在一个以 x_2 为球心半径小于 $1/2$ 的闭球 $\overline{S_2}\subset\overline{S_1}$，使得

$$\overline{S_2}\bigcap E_2=\emptyset$$

(3) 一直做下去，我们得到闭球套

$$\overline{S_1}\supset\overline{S_2}\supset\cdots\supset\overline{S_n}\supset\cdots,\ 且\overline{S_n}\bigcap E_n=\varnothing以及\overline{S_n}\ 的半径r_n<\frac{1}{2^{n-1}}$$

(4) 因 X 完备，$r_n\to 0$，由**闭球套定理 (只有完备空间才有这个定理)** 知存在唯一的点

$$x_0\in X,\ x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{S_n}$$

但 $\overline{S_n}\bigcap E_n=\varnothing$，由于 $\forall n$，$x_0\in\overline{S_n}$，所以 $x_0\notin E_n$，这与 $X=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_n$ 矛盾。所以 X 不是第一纲集，即 X 是第二纲集。

推论 3.8 Banach 空间是第二纲集。

注 3.19 设 E 是定义在 $[0,1]$ 上的全体处处不可微的连续函数组成的集合，则 E 是非空的，且 E 的补集 $C[0,1]\setminus E$ 是第一纲集。

此例表明：点点都连续可微的函数在连续函数空间中仅仅是包含在第一纲集中，或者是说“相对比较少”。点点连续、点点不可微的函数是非常之多的，这与我们的“直观感觉”并不相同。

3.3.2 一致有界原则

定理 3.9 4.3.7 (Banach-Steinhaus 一致有界原则) 设 $\{T_\alpha|\alpha\in I\}$ 是 Banach 空间 X 上到赋范空间 X_1 中的有界线性算子族. 如果对于 $\forall x\in X$,

$$\sup_{\alpha}\|T_\alpha x\|<\infty,$$

则 $\{\|T_\alpha\||\alpha\in I\}$ 是有界集.

注 3.20 定理表明, 若对任意的 $x \in X$, 存在 $M_x > 0$, 使得

$$\|T_\alpha x\| \leq \sup_\alpha \|T_\alpha x\| = M_x < \infty,$$

则存在一个共同的 M, 使得

$$\|T_\alpha\| \leq M, \ \forall \alpha \in I.$$

简言之, 点点有界 $\Rightarrow$(范数) 一致有界.

上述定理的逆否命题称为共鸣定理:

定理 3.10 如果 $\{T_\alpha | \alpha \in I\}$ 是 Banach 空间 X 上到赋范空间 X_1 中的有界线性算子族, $\sup_\alpha \|T_\alpha\| = \infty$, 则存在 $x_0 \in X$, 使得

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x_0\| = \infty.$$

注 3.21 证明思路:

- 目标: 要证明的是集合 $\{T_\alpha | \alpha \in I\}$ 中的线性算子的范数有一个共同的上界 (即一致有界).
- 条件: $\sup_\alpha \|T_\alpha x\| < \infty$, 即 $\forall x \in X, \exists M_x > 0$, 使得

$$\|T_\alpha x\| \leq \sup_\alpha \|T_\alpha x\| = M_x < \infty,$$

- 要证明: 存在一个共同的 M, 使得

$$\|T_\alpha\| \leq M, \ \forall \alpha \in I.$$

  即 $\forall x \in X, \forall \alpha \in I$, 都有 $\|T_\alpha x\| \leq M\|x\|$.
- 步骤:
  (1) 首先证明 $\{T_\alpha | \alpha \in I\}$ 在以原点为中心的一个小的闭球上一致有界, 即存在 $M > 0$, 使得

$$\|T_\alpha x\| \leq M < \infty, \ \forall x \in \overline{B(0, r)}, \ \forall \alpha \in I.$$

  (2) 根据算子的线性性, $\forall x \in X, \forall \alpha \in I$, 由 $\left\| T_\alpha \left(\frac{rx}{\|x\|} \right) \right\| \leq M$, 则推出

$$\|T_\alpha x\| \leq M r^{-1} \|x\|,$$

  即在全空间上一致有界.
  (3) 针对 (1) , 可以由以下三步证明:
  (a) 我们考虑集合 $M_k = \{x | \|T_\alpha x\| \leq k, \ \forall \alpha \in I\}$ $(k = 1, 2, \cdots)$

$$M_k = \left\{ x \in X | \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \leq k \right\} = \bigcup_{\alpha \in I} \{x \in X | \|T_\alpha x\| \leq k\},$$

$\{T_\alpha\}$ 在集合 M_k 上一致有界, 界是 k. 由条件: $\forall x \in X, \exists M_x > 0$, 使得

$$\|T_\alpha x\| \le \sup_\alpha \|T_\alpha x\| = M_x < \infty,$$

即 $\forall x \in X$, x 必定属于某一个 M_k, 于是我们有

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

由于 X 是 Banach 空间, 是第二纲集, 所以存在一个 M_{k_0} 不是疏集, 即它在某一个非空开集 G 中稠密 $(G \subset \overline{M_{k_0}})$;

(b) 随之在一个较小的闭球 $\overline{B}$ 中稠密, $\overline{B} \subset \overline{M_{k_0}}$. 注意到范数是连续函数, 根据 M_{k_0} 的定义, 我们有

$$\overline{B} \subset \overline{M_{k_0}} = M_{k_0},$$

即在这个闭球中 $\{T_\alpha\}$ 一致有界, 界是 k_0.

(c) 把它“平移”成为以原点为中心的闭球, 由 T 的线性性质, 使之在这个以原点为中心的闭球上一致有界.

证明.

(1) 证明 $\{T_\alpha | \alpha \in I\}$ 在以原点为中心的一个小的闭球上一致有界:

(i) 对于 $k \in \mathbb{N}_+$, 令

$$M_k = \left\{ x \in X | \sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\| \le k \right\} = \bigcap_{\alpha \in I} \{x \in X | \|T_\alpha x\| \le k\},$$

由条件: $\forall x \in X$,

$$\|T_\alpha x\| \le \sup_\alpha \|T_\alpha x\| = M_x < \infty,$$

即 $\forall x \in X$, x 必定属于某一个 M_k, 于是我们有

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

因 X 是 Banach 空间, 故 X 是第二纲集. 因此, 必存在 k_0, 使得 M_{k_0} 不是疏集. 即 M_{k_0} 在 X 的某非空开集 G 中稠密, 即 $G \subset \overline{M_{k_0}}$.

(ii) 由于 G 是开的, 对 $x_0 \in G$, 存在一个闭球

$$\overline{B} = \{x \in X | \|x - x_0\| \le r\} \subset G,$$

于是 M_{k_0} 在闭球 $\overline{B}$ 中稠密,

$$\overline{B} = \{x \in X | \|x - x_0\| \le r\} \subset G \subset \overline{M_{k_0}}.$$

注意到 $\|T_\alpha x\|$ 是关于 x 的连续函数, 因此对 $\forall\alpha\in I$,

$$\{x\in X|\|T_\alpha x\|\le k\}$$

是闭集, 于是 $M_k=\bigcap_{\alpha\in I}\{x\in X|\|T_\alpha x\|\le k\}$ 是闭集.

所以 $\overline{B}\subset\overline{M_{k_0}}=M_{k_0}=\{x\in X|\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\|\le k_0\}$. 即: 对于 $\forall x\in\overline{B},\forall\alpha\in I$, 都有 $\|T_\alpha x\|\le k_0$, 这说明 $\{T_\alpha\}$ 在闭球 $\overline{B}$ 上是一致有界的.

(iii) 进一步证明 $\{T_\alpha|\alpha\in I\}$ 在以原点为中心的闭球 $\overline{B_0}=\{x\in X|\|x\|\le r\}$ 上一致有界.

对于任意的 $x\in\overline{B_0}=\{x\in X|\|x\|\le r\}$, 我们有 $x+x_0\in\overline{B}=\{x\in X|\|x-x_0\|\le r\}$, 于是

$$\|T_\alpha x\|\le\|T_\alpha(x+x_0)\|+\|T_\alpha x_0\|\le 2k_0,\ \forall\alpha\in I.$$

(2) 根据算子的线性性, 证明 $\{T_\alpha\}$ 在全空间上一致有界.

$\forall x\in X$, 因 $r\frac{x}{\|x\|}\in\overline{B_0}$, 故 $\left\|T_\alpha\frac{rx}{\|x\|}\right\|\le 2k_0$. 于是

$$\|T_\alpha x\|\le 2k_0\|x\|/r.$$

因此

$$\|T_\alpha\|\le\frac{2}{r}k_0=M,\ \forall\alpha\in I,$$

即 $\sup_\alpha\|T_\alpha\|\le M<\infty$.

注 3.22

- 一致有界原则也可以由范数等价的定理推出.
- 定理中的条件, X 是 Banach 空间, 仅仅用到推出 X 是第二纲集. 即定理的条件可以减弱为 X 是第二纲集.
- 算子的线性性质在这里很重要, 如果没有线性性质, 结论就会在很大的程度上被减弱: $\mathcal{F}$ 是完备距离空间 X 上的实连续函数族, 且对 $\forall x\in X$, 存在 $M_x>0$, 使得对于每一个 $f\in\mathcal{F}$, $|f(x)|\le M_x$, 则存在开集 U 及 $M>0$, 使得 $\forall x\in U$, $f\in\mathcal{F}$ 有

$$|f(x)|\le M,$$

即在 U 上, $f(x)$ 一致有界.

其实这是因为没有了线性, 上述证明的 (1)(iii) 无法进行, 于是只能进行到 (1)(ii).

注 3.23 下面是一些推论:

(1) 设 X 是 Banach 空间, 若 $f_\alpha(\alpha\in I)$ 是定义在 X 上的有界线性泛函, 如果对于每一个 $x\in X$,

$$\sup_{\alpha\in I}|f_\alpha(x)|<\infty,$$

则 $\{\|f_\alpha\||\alpha\in I\}$ 是有界集.

(2) 当 I 是一个可数集时, X 是一个 Banach 空间, $\{f_n\}$ 是定义在 X 上的有界线性泛函, 如果 $\forall x \in X$, 有 $\sup_n |f_n(x)| < \infty$, 则 $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

(3) 当 I 是一个可数集时, X 是一个 Banach 空间, $\{f_n\}$ 是定义在 X 上的有界线性泛函, 如果 $\sup_n \|f_n\| = \infty$, 则存在 $x_0 \in X$, 使得 $\sup_n |f_n(x_0)| = \infty$.

3.3.3 强收敛意义下的完备性

定理 3.11 设 X, X_1 是 Banach 空间，则 $\mathcal{B}(X, X_1)$ 在强收敛的意义下完备。即：如果

- $T_n \in \mathcal{B}(X, X_1)$;
- 若 $\forall x \in X$，$\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列，

则存在 $T \in \mathcal{B}(X, X_1)$，$T_n \xrightarrow{\text{强}} T\ (n \to \infty)$，即 $\forall x \in X$，$T_n x \to Tx\ (n \to \infty)$。

证明. 设 $T_n \in \mathcal{B}(X, X_1)$，且 $\forall x \in X$，$\{T_n x\}$ 是 X_1 中的 Cauchy 列。

(i) 构造一个线性算子 T。
因 X_1 完备，$\{T_n x\}$ 是 Cauchy 列，故存在 $z \in X$，使得 $T_n x \to z$，即定义 $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$。

(ii) 显然 T 是线性的。要证明 $T \in \mathcal{B}(X, X_1)$。
由于收敛的点列有界，$\forall x \in X$，我们有 $\sup_n \|T_n x\| < \infty$。因 X 完备，由一致有界原则，$\{\|T_n\|\}$ 有界。所以

$$\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\| \|x\|,$$

于是 T 是有界线性算子，且 $\|T\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|$。即：$T \in \mathcal{B}(X, X_1)$，$T_n \xrightarrow{\text{强}} T\ (n \to \infty)$。

注 3.24 之前我们提到过有界线性算子空间的完备性定理 3.6, 但是那里只要求 X_1 也是 Banach 空间，但是上述定理还要求 X 是 Banach 空间。

3.4 开映射定理与逆算子定理

3.4.1 逆算子

若对任给的 $y \in \mathcal{R}(T)$，只有唯一的 $x \in X$，使得 $y = Tx$，则称 T 是单射，这时可定义从值域 $\mathcal{R}(T)$ 到 X 的算子 $T^{-1} : T^{-1} y = x$。称 T^{-1} 为 T 的逆算子。

众多数学问题，都可归结为求方程 $Tx = y$ 的解，即考虑 T^{-1} 是否存在、是否唯一以及 T^{-1} 是否连续（保证解的稳定性）。我们在 Banach 空间的框架下研究这些问题，将

得到开映射定理和逆算子定理。

定义 3.10 (逆算子) 设 T 是从线性空间 X 中到线性空间 X_1 中的线性算子. 如果存在 X_1 到 X 中的线性算子 T_1，使得

$$T_1Tx = x\ (x \in \mathcal{D}(T) \subseteq X),\ \ TT_1y = y\ (y \in \mathcal{R}(T) \subseteq X_1),$$

则称算子 T 有逆算子，T_1 称为 T 的逆算子，记为 T^{-1}.

注 3.25

- T 存在逆算子的充要条件是: T 是空间 X 中到空间 X_1 中的一对一映射.
- 如果逆算子存在则唯一。
- $(T^{-1})^{-1} = T$
- 逆算子也是线性算子.
- 但是逆算子是有界线性算子吗? 在什么情况下是?

定理 3.12 T 是赋范空间 X 中到赋范空间 X_1 中的线性算子, 则定义在 $\mathcal{R}(T)$ 上的逆算子 T^{-1} 存在且有界等价于在 $m > 0$, 使得

$$\|Tx\| \geqslant m\|x\|\ (x \in \mathcal{D}(T)).$$

证明.

- “$\Leftarrow$”
  - 证 T^{-1} 存在.
    如果 $Tx_1 = Tx_2$, 则 $T(x_1 - x_2) = 0$, 但
    $$\|T(x_1 - x_2)\| \geqslant m\|x_1 - x_2\|,$$
    因此, $\|x_1 - x_2\| = 0$, 即 $x_1 = x_2$. 故 T 是一对一的, 于是逆算子 $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{D}(T)$ 存在.
  - 证 T^{-1} 是有界的.
    对于任意的 $y \in \mathcal{R}(T)$, $T^{-1}y \in \mathcal{D}(T)$. 由条件
    $$\|T(T^{-1}y)\| \geqslant m\|T^{-1}y\|,$$
    即 $\|y\| \geqslant m\|T^{-1}y\|$, 于是我们有
    $$\|T^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{m}\|y\|,\ \forall y \in \mathcal{R}(T),$$
    T^{-1} 是有界线性算子.

- “⇒”

  反之, 如果定义在 $\mathcal{R}(T)$ 上的逆算子 T^{-1} 存在且有界, 但上述不等式不成立, 则对每个正整数 n, 存在 $x_n \in \mathcal{D}(T)$, 使得

  $$\|Tx_n\| < \frac{1}{n}\|x_n\|.$$

  设 $y_n = Tx_n, x_n = T^{-1}y_n$, 则

  $$n\|y_n\| < \|T^{-1}y_n\|,$$

  由此推出 T^{-1} 无界, 矛盾.

注 3.26 这里并未要求 T 有界, 只要 T 下方有界即可. 这个条件应当是任意想到的，因为我们如果需要 T^{-1} 有界，只需要

$$\exists m > 0,\ \forall y \in \mathcal{R}(T),\ \|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\|,$$

把 y 当成 Tx, 则就是

$$\exists m > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}(T),\ \|x\| \leq \frac{1}{m}\|Tx\|$$

即

$$\|Tx\| \geq m\|x\|$$

3.4.2 开映射定理

定义 3.11 设 T 是 $X \to X_1$ 的一个映射, 如果 T 把 X 中的任何一个开集映成 X_1 中的开集, 则称 T 是开映射.

定理 3.13 (开映射定理) 设 T 是 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 上的有界线性算子, 则 T 是开映射.

注意：

- 定理要求条件: $\mathcal{D}(T) = X, \mathcal{R}(T) = X_1$, 即: $TX = X_1$.
- 定理表明: 当 T 是有界线性算子时, 如果 X, X_1 都是 Banach 空间, $TX = X_1$, 则对于任何开集 G, TG 一定是开集.
- 注意 T 是开映射与 T 连续的区别:
  - T 是开映射: T 把一个开集映成开集.
  - T 连续 ⇔ 开集的原像是开的, 即 $G \subset X_1, G$ 是开集 ⇒ $T^{-1}(G)$ 是开集.
- 如果线性算子 T 是开映射, 且 T 的逆算子存在, 则 T 的逆算子 T^{-1} 是连续的, 即 T^{-1} 是有界线性算子.

- 事实上, G 在 T^{-1} 的值域里, 如果 G 是开的, 由于 T 是开映射, $T(G)$ 是开的, 即对于 T^{-1} 来说, 开集 G 的原像是 $T(G)$, 而 $T(G)$ 是开的, 所以逆算子 T^{-1} 是连续的, T^{-1} 是有界线性算子.

证明思路:

- 目标:
  G 是 X 中的开集, 要证 TG 是 X_1 中的开集. $x \in G, x \mapsto Tx \in TG$, 要证 Tx 是 TG 的内点. 即要证明存在 $r > 0$, 使得
  $$B_1(Tx, r) \subset TG.$$
- 已知:
  G 是开的, 对于 $x \in G$, 存在 $r_1 > 0$, 使得
  $$B(x, r_1) \subset G,$$
  进一步有 $0 < r_2 < r_1$, 使得
  $$\overline{B}(x, r_2) \subset B(x, r_1) \subset G.$$
  于是有: $T\overline{B}(x, r_2) \subset TG$. 问题: 是否存在 $r > 0$, 使得
  $$B_1(Tx, r) \subset T\overline{B}(x, r_2) \subset TG.$$
- 注意到 T 是线性算子
  $$B_1(Tx, r) = Tx + B_1(0, r),$$
  $$T\overline{B}(x, r_2) = T(x + \overline{B}(0, r_2)) = Tx + T\overline{B}(0, r_2).$$
- 问题转化为: 是否存在 $r > 0$, 使得
  $$B_1(0, r) \subset T\overline{B}(0, r_2)$$

证明. 我们把定理的证明分为以下 6 个步骤.

1. 考虑 $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{B}(0, k)$, $X_1 = TX = \bigcup_{k=1}^{\infty} T\overline{B}(0, k)$.
   由于 X_1 是 Banach 空间, 由 Baire 纲定理知, X_1 是第二纲集, 于是存在 k_0, $T\overline{B}(0, k_0)$ 不是疏集. 所以 $T\overline{B}(0, k_0)$ 在某个小球 $B_1(y_0, r_0)$ 中稠密, 即
   $$B_1(y_0, r_0) \subset \overline{T\overline{B}(0, k_0)}.$$
2. 通过 T 的线性性质 (平移、压缩) 和球形邻域是平衡的, 我们可以得到 $T\overline{B}(0, k_0)$ 在小球 $B_1(0, r_0)$ 中稠密, 即
   $$B_1(0, r_0) \subset \overline{T\overline{B}(0, k_0)}.$$
   事实上, $\forall z \in B_1(0, r_0)$, $z_1 = y_0 + z$, $z_2 = y_0 - z \in B_1(y_0, r_0)$, 结合上式有 $2z = z_1 - z_2 \in \overline{T\overline{B}(0, 2k_0)}$, 即 $z \in \overline{T\overline{B}(0, k_0)}$.

3. 由 T 的线性性质推出 $T\overline{B}(0,1)$ 在小球 $B_1\left(0,\frac{r_0}{k_0}\right)$ 中稠密, 即

$$B_1\left(0,\frac{r_0}{k_0}\right)\subset\overline{T\overline{B}(0,1)}.$$

4. 进一步可得到, $\forall\varepsilon>0, T\overline{B}(0,\varepsilon)$ 在小球 $B_1(0,\varepsilon\delta)$ 中稠密, 其中 $\delta=\frac{r_0}{k_0}$. 即

$$B_1(0,\varepsilon\delta)\subset\overline{T\overline{B}(0,\varepsilon)}.$$

5. 我们要证明的是包含关系, 而不仅仅是稠密. 即 $B_1(0,r)\subset T\overline{B}(0,r_2)$.
   下面通过上式中稠密性推出上式中的包含关系.
   我们下面分 4 步证明, 即

$$y\in B_1(0,r)\Rightarrow y\in T\overline{B}(0,r_2).$$

   即要证明存在 $x\in\overline{B}(0,r_2)$, 使得 $Tx=y$.
   (a). 已知 $T\overline{B}(0,\varepsilon)$ 在 $B_1(0,\varepsilon\delta)$ 中稠密. 对于任意的 $y\in B_1\left(0,\frac{\delta}{2}\right)$ $(\varepsilon=\frac{1}{2})$, $T\overline{B}\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 在 $B_1\left(0,\frac{\delta}{2}\right)$ 中稠密, 即 $B_1\left(0,\frac{\delta}{2}\right)\subset\overline{T\overline{B}\left(0,\frac{1}{2}\right)}$,
   于是存在 $x_1\in\overline{B}\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 使得

$$\|y-Tx_1\|<\frac{\delta}{2^2}.$$

   令 $y_1=y-Tx_1\in B_1\left(0,\frac{\delta}{2^2}\right)$.
   (b). 再由于 $T\overline{B}\left(0,\frac{1}{2^2}\right)$ 在 $B_1\left(0,\frac{\delta}{2^2}\right)$ 中稠密 $(\varepsilon=\frac{1}{2^2})$, 于是存在 $x_2\in\overline{B}\left(0,\frac{1}{2^2}\right)$, 使得

$$\|y_1-Tx_2\|<\frac{\delta}{2^3}.$$

   令 $y_2=y_1-Tx_2=y-T(x_1+x_2)\in B_1\left(0,\frac{\delta}{2^3}\right)$.
   (c). 这样继续下去, 可以得到点列 $\{x_n\}$,

$$x_n\in\overline{B}\left(0,\frac{1}{2^n}\right)\ (n=1,2,\cdots),$$

   且 $\|y-T(x_1+x_2+\cdots+x_n)\|<\frac{\delta}{2^{n+1}}$.
   (d). 因为 X 是 Banach 空间及 $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$, 由定理 2.5.1 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛, 即存在 $x\in X$, 使得

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n,\ \text{并且}\|x\|\le 1.$$

   由于 T 是连续线性算子, 结合上式, 有

$$y=\lim_{n\to\infty}T\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)=T\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)=T\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k\right)=Tx.$$

   这说明 $y\in T\overline{B}(0,1)$.
   因为 $\forall y\in B_1\left(0,\frac{\delta}{2}\right)\Rightarrow y\in T\overline{B}(0,1)$, 于是有

$$B_1\left(0,\frac{1}{2}\delta\right)\subset T\overline{B}(0,1).$$

由 T 的线性性质, 对于 $r_2 > 0$,

$$B_1\left(0, \frac{1}{2}r_2\delta\right) \subset T\overline{B}(0, r_2).$$

令 $r = \frac{1}{2}r_2\delta$, 其中 $\delta = \frac{r_0}{k_0}$, 我们有

$$B_1(0, r) \subset T\overline{B}(0, r_2)$$

6. 结合相关式子我们有

$$B_1(Tx, r) \subset T\overline{B}(x, r_2) \subset TG.$$

这说明 Tx 是 TG 的内点, TG 是 X_1 中的开集.

3.4.3 逆算子定理

定理 3.14 (Banach 逆算子定理) 设 T 是从 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 上的一对一的有界线性算子, 则 T 的逆算子存在, 且 T^{-1} 是有界的.

证明.

- 由 T 是一对一的可知 T^{-1} 存在.
- 由开映射定理可知, T 是开映射. $B(0,1)$ 是开集, 所以 $TB(0,1)$ 是开集. $0 \in TB(0,1)$, 即 0 是 $TB(0,1)$ 的内点, 所以

$$\exists\, \delta > 0, \text{使得: } B_1(0, \delta) \subset TB(0,1)$$

- 于是 $\forall\ y \in X_1$, 不妨设 $y \neq 0$, $\frac{\delta y}{2\|y\|} \in B_1(0, \delta)$, 由上式有 $\frac{\delta y}{2\|y\|} \in TB(0,1)$, 即 $\|T^{-1}\frac{\delta y}{2\|y\|}\| \leqslant 1$. 于是 $\|T^{-1}y\| \leqslant \frac{2\|y\|}{\delta}$, 所以 $\|T^{-1}\| \leqslant \frac{2}{\delta}$, T^{-1} 是有界线性算子.

注 3.27

- 由于有界线性算子范数的定义，我们可以看出线性算子有界等价于算子在某个包含原点的球 $B(0,\delta)$ 上像集是有界的。于是如果想证明 T^{-1} 有界只需要其在 X_1 中的 $B(0,\delta)$ 上像集是有界即可, 即原像有界, 而开映射定理实际上就在保证这样一个特点。
- 其实仔细想想，连续映射的定义是说开集的原像是开集，而开映射是说开集的像是开集，这其实就是对于逆映射来说的开集的原像是开集；因此只要一个算子是开映射，则他的逆映射一定是连续的。而我们考虑的是线性算子，连续与有界是等价的。

- 上述定理的证明也可以以证明 T^{-1} 在 $0_1 \in X_1$ 处连续为目的得到。事实上，$T^{-1}0_1 = 0$，对 0 处的任意开球 $B(0,\epsilon)$，由于 $TB(0,\epsilon)$ 为 X_1 中开集，于是 $\exists\delta > 0$ 使得 $B_1(0,\delta) \subset TB(0,\epsilon)$，因此 $T^{-1}B_1(0,\delta) \subset B(0,\epsilon)$.

还可以利用逆算子定理证明下面这个定理

定理 3.15 设 X 是一个线性空间，其上定义两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$。设 $(X,\|\cdot\|_1)$ 和 $(X,\|\cdot\|_2)$ 都是 Banach 空间，且存在常数 $C > 0$，使得

$$\|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1, \quad \forall x \in X,$$

则 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价。

证明. 考虑恒等映射 $I : X_1 \to X_2$。由于 I 是 Banach 空间 X_1 上到 Banach 空间 X_2 上的一对一的有界线性算子。因此由 Banach 逆算子定理，

$$I^{-1} = I : X_2 \to X_1$$

是有界线性算子。所以存在 $C_1 > 0$，使得 $\|Ix\|_1 = \|x\|_1 \leqslant C_1\|x\|_2$。即

$$\frac{1}{C_1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1,$$

$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价。

3.5 闭算子与闭图像定理

定义 3.12 设 X, X_1 是赋范空间，T 是从 X 中到 X_1 中的线性算子，考虑乘积空间

$$X \times X_1 = \{(x,y) | x \in X, y \in X_1\}$$

在其上定义范数：对于任意的 $z = (x,y) \in X \times X_1$，令

$$\|z\| = \|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|_1.$$

令 $G(T) = \{(x,Tx) \in X \times X_1 | x \in \mathcal{D}(T)\}$ 称为算子 T 的图像。

注 3.28 可以验证 $X \times X_1$ 是赋范空间；若 X 和 X_1 是 Banach 空间，则 $X \times X_1$ 也是 Banach 空间。

定义 3.13 如果 $G(T)$ 在乘积赋范空间 $X \times X_1$ 中是闭的，则称 T 是闭算子。

根据定义容易证明：

定理 3.16 (闭算子的等价条件) 设 X, X_1 是赋范空间，T 是从 X 到 X_1 中的线性算子，则 T 是闭算子当且仅当对任意 $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(T)$，$x_n \to x \in X$，及 $Tx_n \to y \in X_1$，必有 $x \in \mathcal{D}(T)$，且 $y = Tx$。

注 3.29

- 有界 (连续) 线性算子一定是闭算子，但反之不一定。
- 闭算子的定义与连续算子的定义十分类似，不同点在于连续算子是当 $x_n \to x \in X$ 就要求 $Tx_n \to Tx$，闭算子则需要外加 Tx_n 收敛这一条件。

定理 3.17 (闭图像定理) 设 T 是 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 X_1 中的闭线性算子，则 T 是有界线性算子。

注 3.30

$$\begin{cases} \mathcal{D}(T) = X,\ X \text{ 是 Banach 空间} \\ X_1 \text{ 是 Banach 空间} \\ T \text{ 闭} \end{cases} \Longrightarrow T \text{ 有界}.$$

证明. 因 X, X_1 是 Banach 空间，故 $X \times X_1$ 是 Banach 空间。由于 T 是闭的，故 $G(T)$ 是 $X \times X_1$ 中的闭子空间，则 $G(T)$ 是一个 Banach 空间。定义从 $G(T)$ 上到 X 中的线性算子

$$\tilde{T} : (x, Tx) \to x.$$

$\tilde{T}$ 是一对一在上的线性算子（因为 $\mathcal{D}(T) = X$）。所以 $\tilde{T}^{-1}$ 存在，

$$\tilde{T}^{-1}:\ x \to (x, Tx).$$

由 Banach 逆算子定理可知，$\tilde{T}^{-1} : x \to (x, Tx)$ 是有界的。于是

$$\|(x, Tx)\| = \|\tilde{T}^{-1}(x)\| \leqslant \|\tilde{T}^{-1}\|\|x\|,$$

因为 $\|(x, Tx)\| = \|x\| + \|Tx\|$，所以

$$\|Tx\| \leqslant (\|\tilde{T}^{-1}\| - 1)\|x\|,$$

即 T 是有界线性算子。

注 3.31 定理的条件要求 $\mathcal{D}(T) = X$，这点十分重要。定义域 $\mathcal{D}(T)$ 是否是闭的，关系到 $\tilde{T}^{-1}$ 是否有界。