

Introdução à Probabilidade

Probabilidades

A probabilidade pode ser aplicada a um acontecimento que pode ter ocorrido, no passado-presente, ou que poderá ocorrer, no futuro, mas sobre o qual não temos conhecimentos completos, designadamente sobre a respectiva realização. Consiste na teoria matemática utilizada para se estudar a incerteza proveniente dos fenômenos aleatórios. O valor da probabilidade (número entre zero e um) quantifica o grau de convicção ou conhecimento resultante de diversos fatores relativamente aos quais não possuímos evidências suficientes que nos convençam da realização ou não do acontecimento de algum evento.

Definição: **Probabilidade é um número real no intervalo de 0 a 1** que é utilizada para exprimir a chance de ocorrência de determinado evento.

Uma função $P(\cdot)$ é denominada probabilidade se satisfaz as condições:

- i) $P(\Omega) = 1$;
- ii) $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega$;
- iii) $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$, com A_i 's disjuntos, ou seja, se A_1, A_2, \dots, A_n forem 2 a 2 mutuamente exclusivos.

Propriedades:

1. Se os eventos A_1, A_2, \dots, A_n formam uma partição do espaço amostral, então: $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$
2. Se \emptyset é um evento impossível, então $P(\emptyset) = 0$
3. Para todo evento $A \subset \Omega$, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
4. Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
5. Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, sendo que $B \subset A$. Então, $P(B) \leq P(A)$.

Exercícios:

1. Uma escola do ensino médio do interior de São Paulo tem 40% de estudantes do sexo masculino. Entre estes, 20% nunca viram o mar, ao passo que, entre as meninas, essa porcentagem é de 50%. Qual a probabilidade de que um aluno selecionado ao acaso seja: (a) do sexo masculino e nunca tenha visto o mar? (b) do sexo feminino ou nunca tenha visto o mar?
2. Considere um conjunto de 4 números dos quais nenhum deles é zero, três deles são positivos e um é negativo. Sorteamos ao acaso, com reposição, 2 números desse conjunto. Determine a probabilidade de (a) o quociente ser negativo; (b) os dois números terem o mesmo sinal.
3. Dois processadores tipos A e B são colocados em teste por 50 mil horas. A probabilidade de que um erro de cálculo aconteça em um processador do tipo A é de 1/30, no tipo B, 1/80 e em ambos, 1/1000. Qual a probabilidade de que:
 - (a) pelo menos um dos processadores apresente erro?
 - (b) nenhum processador apresente erro?
 - (c) somente o processador A apresente erro?
4. Assinale a resposta correta, justificando seus cálculos. Uma urna contém cinco bolas brancas e sete vermelhas. Se forem extraídas três bolas dessa urna, em sequência e sem reposição, qual a probabilidade de que duas delas sejam vermelhas? (a) 0,1590 (b) 0,425 (c) 0,477 (d) 0,142

Probabilidade condicional:

Definição: Para dois eventos A e B, sendo $P(B) > 0$, definimos a

probabilidade condicional de A dado B, $P(A|B)$, como sendo:

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B).$$

Desta relação obtemos a **regra do produto de probabilidades**:

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B)$$

Exercícios:

5. Uma turma de estatística teve a seguinte distribuição das notas finais: 4 do sexo masculino e 6 do feminino foram reprovados, 8 do sexo masculino e 14 do feminino foram aprovados. Para um aluno sorteado dessa classe, denote por M se o aluno escolhido for do sexo masculino e por A se o aluno foi aprovado. Calcule: (a) $P(A \cup \bar{M})$ (b) $P(\bar{A} \cap \bar{M})$ (c) $P(A|M)$
6. As probabilidades de 3 jogadores A, B e C marcarem um gol quando cobram um pênalti são 2/3, 4/5 e 7/10, respectivamente. Se cada um cobrar uma única vez, qual a probabilidade de que pelo menos um marque um gol?
7. Um homem tem duas moedas, uma comum e outra com duas caras. Apanha uma ao acaso e lança-a. Se cair cara, qual é a probabilidade de que a moeda lançada tenha sido a de duas caras?
8. Em uma indústria, a experiência indica que há uma probabilidade de 85% de um operário novo, que tenha feito um curso prévio de treinamento, cumprir sua quota de produção; e que essa probabilidade, para um novato que não tenha feito o curso prévio, é de 40%. Se 80% de todos os operários novos frequentaram o curso prévio de treinamento, qual a probabilidade de um operário novo cumprir sua quota de produção?
9. Dois armários guardam as bolas de voleibol e basquete. O armário 1 tem 3 bolas de voleibol e 1 de basquete, enquanto o armário 2 tem 3 bolas de voleibol e 2 de basquete. Escolhendo-se ao acaso um armário e, em seguida, uma de suas bolas, calcule a probabilidade dela ser: (a) de voleibol, sabendo-se que o armário 1 foi escolhido (b) de basquete, sabendo-se que o armário 2 foi escolhido (c) de basquete

Independência:

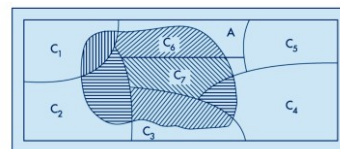
Definição: Dois eventos A e B são independentes sempre que

$$P(A|B) = P(A), \text{ ou seja, } P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

Teorema de Bayes:

Suponha que os eventos C_1, C_2, \dots, C_n formem uma partição do espaço amostral Ω e que suas probabilidades sejam conhecidas. Suponha ainda que para um evento A, se conheçam as probabilidades $P(A|C_i)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Então, a probabilidade de ocorrência do evento C_i , supondo-se a ocorrência do evento A, é dada por:

$$P(C_i|A) = \frac{P(C_i)P(A|C_i)}{\sum_{j=1}^n P(C_j)P(A|C_j)}, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n$$



Exercícios:

10. Uma máquina consiste de quatro componentes ligados em paralelo, de tal forma que a máquina falha somente se todos os quatro componentes falharem. Suponha que as falhas dos componentes são independentes umas das outras. Se os componentes têm probabilidades 0,1; 0,2; 0,3 e 0,4 de falhar quando a máquina é acionada, qual é a probabilidade de que a máquina funcione quando acionada?
11. Em uma revendedora de automóveis, 70% dos veículos são novos e 30% são usados. Entre os novos: 80% são da marca A, 10% da marca B e 10% da marca C. Já entre os usados: 60% são da marca A, 30% da marca B e 10% da marca C. Se for sorteado ao acaso um carro do estoque dessa revendedora: Qual a probabilidade de que ele seja da marca A? e da marca B? e da marca C? Supondo que ele é da marca A, qual a probabilidade de ser um carro novo? E de ser um carro usado?