# Analisi Matematica I

*Riassunto da: Domenico Gagliotti*

*Nota: il riassunto è basato sulle lezioni del docente Castorina Daniele nel corso di laurea triennale in informatica, presso la Federico II di Napoli in anno 2022/2023*

# Indice

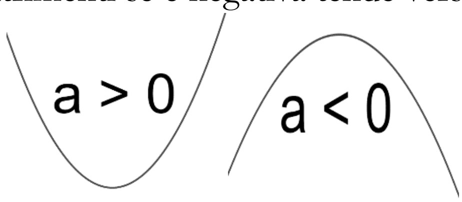
# Introduzione

Iniziamo ad assimilare alcune terminologie fondamentali: infatti un **assioma** (oppure postulato) è un presupposto che non viene più cambiato, mediante esso e dimostrazioni posso raggiungere i **teoremi** (oppure lemma, proposizione, corollario). I primi assiomi da comprendere sono:
**numeri naturali** $\mathbb{N}: \{1,2,3, \dots\}$, cioè come suggerisce il nome, che risiedono in natura. Dunque l'uomo decise di usarli facendo su di loro delle operazioni, come ad esempio l'addizione e rispetto ad essa i numeri naturali sono un insieme chiuso, ovvero si traduce in $n_1 + n_2 \in \mathbb{N} \; \forall \; n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, Proseguendo con le operazioni, si va alla sottrazione e qui risiede il primo problema dei $\mathbb{N}$,
dunque nascono i **numeri interi relativi** $\mathbb{Z}: \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ aggiungendo l'**opposto** ovvero quel numero che sommato fa 0, ovvero l'opposto del numero $a$ è il numero $-a$, in quanto $\alpha + (-a) = 0$, rendendo così un insieme chiuso rispetto all'addizione e sottrazione, e anche la moltiplicazione. Aggiungendo la divisione sorge qui un altro problema, per questo motivo nascono i **numeri razionali** $\mathbb{Q}$ **,** cioè $\frac{a}{b}$ , in cui è necessario che $\alpha, b \in \mathbb{Z} \; , b \neq 0$, si chiamano razionali poiché in latino ratio, ovvero frazione, altrettanto aggiunge anche l'**inverso**, cioè quel numero che moltiplicato al numero di partenza fa 0, ovvero l'inverso di $\frac{a}{b}$ è $\frac{b}{a}$, oppure definibile come lo stesso numero elevato a -1, cioè $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ . Anche con l'elevamento a potenza non genera problemi con l'insieme $\mathbb{Q}$ , contrariamente con le radici quadrate perché ad esempio $\sqrt{2}$ non è in $\mathbb{Q}$, per la seguente **proposizione**, la quale ipotesi afferma che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, per la seguente **tesi, dimostrazione**:

1) ipotizziamo **per assurdo** il contrario, ovvero $\sqrt{2} \; \in \mathbb{Q}$;
2) quindi potremmo affermare che $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ , in cui supponiamo che $\alpha$ e $b$ siano **coprimi** tra loro con un $= MCD(a, b) = 1$, cioè non divisibili in pratica;
3) ora potremmo moltiplicare $b$ per entrambi i membri $b \times \sqrt{2} = \frac{a}{b} \times b$ ;
proseguiamo a semplificare $b\sqrt{2} = a$;
4) pertanto possiamo elevare ambedue i membri $\left(b\sqrt{2}\right)^2 = (a)^2$ , risultando $2b^2 = a^2$;
a questo punto potremmo affermare che $a^2$, in quanto è equivalente ad un'incognita moltiplicata per $2$ , ed ogni numero moltiplicato per $2$ viene un numero pari;
5)indi per cui $a^2$ è **pari,** ma anche $a$, di conseguenza è **pari**;
6) ogni numero pari può essere scritto nel seguente modo $2k$, quindi $a = 2k$, di conseguenza $a^2 = (2k)^2$, il quale fa $\alpha^2 = 4k^2$;

7) ebbene potremmo scrivere l'equazione in questo modo $2b^2 = 4k^2$, semplificato $\frac{1}{2} \times 2b^2 = 4k^2 \times \frac{1}{2}$, il quale risulta $b^2 = 2k^2$;
8) analogamente a prima $b^2$ equivale ad un numero **pari**, conseguentemente $b$ è **pari**;
9) dunque se $a$ che $b$ sono numeri pari, equivale che siano divisibili tra loro, e questo annulla la premessa che fossero coprimi tra loro. Infine per **assurdo**, ovvero ipotizzando **il contrario della tesi**, raggiungo un punto di **contraddittorio** che **conferma la tesi.**
Per questo motivo esistono i **numeri irrazionali**, ovvero numeri **decimali illimitati** aperiodici, come $\sqrt{2}$, o $\pi$, oppure $e$. L'unione dei numeri irrazionali e razionali forma l'insieme dei **numeri reali** $\mathbb{R}$

Equazioni e disequazioni
Partiamo definendo che $P(x)$ è un polinomio, ovvero un insieme di monomi (espressione algebrica). Il polinomio ha un deg, ovvero un grado, che corrisponde al più grande esponente dell'incognita. I polinomi di primo grado formano una retta, invece quelli di secondo generano una parabola. Per disegnare una retta basta dunque sostituire all'incognita 2 valori casuali, per poi disegnare il risultato come punti, infine si uniscono con un righello. Invece per la parabola abbiamo varie accortezze le principali, che ci permettono inoltre di fare le disequazioni, sono a e la discriminante delta $\Delta$:
la a è quel valore o costante che risiede affianco all'incognita con esponente 2, ad esempio $ax^2 + bx + c$ la sua positività determina il verso della parabola, ovvero se è positivo tende verso l'alto, altrimenti se è negativa tende verso il basso:



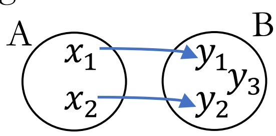

Per quanto riguarda delta invece ricaviamo quante soluzioni abbia $f(x) = 0$, ovvero se delta sia maggiore di 0 ($\Delta > 0$) ha 2 soluzione, invece se delta è uguale a 0 ($\Delta = 0$) la soluzione è una, altrimenti se delta è minore di 0 ($\Delta < 0$), non ammette soluzioni.
Riassumibile tutto nella seguente tabella:

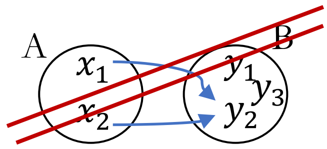
| | $\Delta \geq 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta < 0$ |
|---|---|---|---|
| $a > 0$ | + − ± | + 0 + | + |
| $a < 0$ | + | − 0 − | − |

## Funzioni

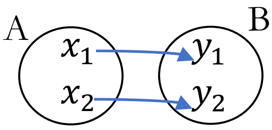
Dato A e B due **insiemi di numeri reali**. La **funzione** è una legge che fa corrispondere ad ogni elemento di A **uno e soltanto uno** elemento di B. Si indica A come **dominio** o campo di esistenza della funzione, invece B **codominio(immagine)**. Esso si scriverà come (Funzione)f: A → B, oppure y=f(x), ovvero ogni x appartenente ad A, corrisponde a un solo elemento y che appartiene a B. Sostanzialmente f() indica un **insieme di operazioni** che verranno effettuate su x, il quale è **l'argomento** di f, per ottenere y, cioè il **valore** di f. Proprietà:

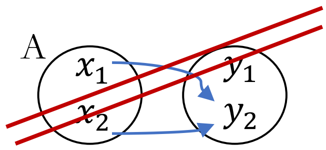
**Iniettiva (one on one)→** La funzione è iniettiva quando ad ogni argomento distinto si hanno immagini, valori della funzione, distinti. Matematicamente parlando: $\forall x_1 x_2 \in A\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ , ovvero ad ogni $x_1 x_2$ appartenenti all'insieme A, ovvero il dominio, si indica che le rispettive immagini in f di $x_1 x_2$ siano uguali, quindi implicano che $x_1 x_2$ sono congruenti.




**Suriettiva ("on to")→** La funzione è suriettiva quando ad ogni elemento di B è associato mediante fa funzione f almeno un elemento di A, cioè $\forall y \in B\ (\exists x \in A) :$ $y = f(x)$

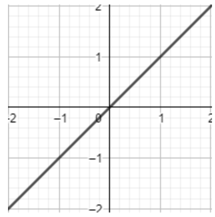



**Biunivoca (Biiettiva) →** La funzione è biunivoca quando è contemporaneamente suriettiva e iniettiva. Quindi f fa corrispondere $\forall x \in A\ \exists!\, y \in B$ e $\forall y \in B\ \exists!\, x \in A$ : $y = f(x)$

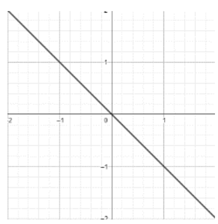
### Monotona

Una funzione è monotona in un insieme A,
se soddisfa una delle condizioni :



Crescente → $x_2 \geq x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ è stabile o sale

Decrescente → $x_2 \geq x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$ è stabile o scende

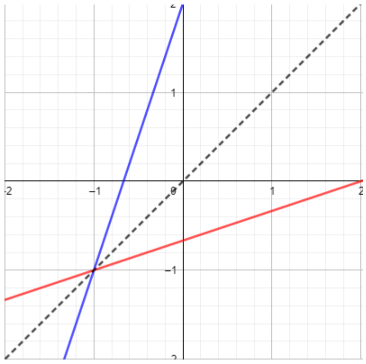


ATTENZIONE, il primo ≥ non cambia, cioè $x_2 \geq x_1$, perché altrimenti si verificherebbe l'opposto.

Arrivato a questo punto se tutto il domino di una funzione rispetta una delle due condizioni si può parlare di monotonia globale. Altrimenti se abbiamo una funzione in esame, il quale domino non rispetta una delle due condizioni nella sua interezza, si parla di monotonia locale dividendo in intervalli il dominio e analizzandoli in modo scisso.

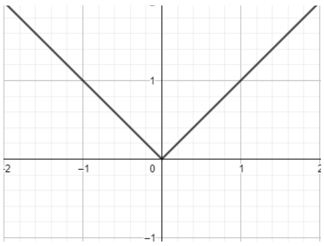
### Funzione inversa

Una funzione intanto per essere invertibile, deve necessariamente essere biunivoca, dato ciò, la funzione tale che $\forall y \in B$ fa corrispondere l'unico $x \in A$ , per cui $y = f(x)$, si definisce funzione inversa, la quale si indica con $f^{-1}$. Dunque $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ e $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$. Ad esempio se $f(x) = 3x + 2$, allora $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$ .



## Valore assoluto (o modulo)

Il valore assoluto o modulo di x, è indicato con il simbolo $|x|$, ed è definito da: $\begin{cases} x \ se \ x \ \geq 0 \\ -x \ se \ x < 0 \end{cases}$.



### Diseguaglianza triangolare

Si vuole affermare che $|x + y| \leq |x| + |y|$ , Dimostrazione

1)Per definizione $|x|$ è $\begin{cases} x \ se \ x \ \geq 0 \\ -x \ se \ x < 0 \end{cases}$;

2) dunque è chiaro che $-|x| \ \leq x \leq |x|$, uguale per y, $-|y| \ \leq y \leq |y|$;

3) sommando viene $-|x| - |y| \leq \ x + y \leq |x| + |y|$,ovvero $-(|x| + |y|) \leq \ x + y \leq |x| + |y|$;

4)da ciò posso ricavare che $\begin{cases} x+y \leq |x|+|y| \\ -(|x|+|y|) \leq |x|+|y| \end{cases}$;

5) ritornando all'inizio $|x+y|$ è $\begin{cases} x+y \\ -(x+y) \end{cases}$;

6) dunque possiamo affermare che $|x+y| \leq |x|+|y|$;

Un'altra possibile dimostrazione è sfruttando la proprietà della moltiplicazione di valori assoluti, ovvero $|x| \times |y| = |xy|$, di conseguenza $(|x|)^2 = x^2$, quindi:

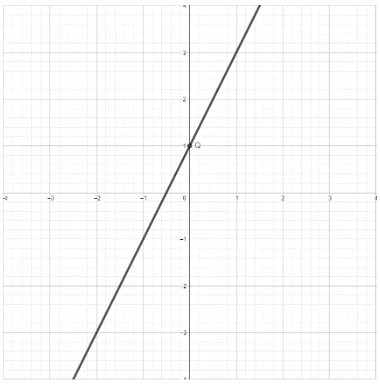
1) Dato $|x+y| \leq |x|+|y|$, posso elevare entrambi i membri per 2;
2) $|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$, ciò diventa dunque;
3) $(x+y)^2 \leq |x|^2+|y|^2+2|x||y|$, il membro di sinistra si svolge come un normale quadrato, invece posso utilizzare le proprietà anticipate prima per quelli di destra;
4) $x^2+y^2+2xy \leq |x|^2+|y|^2+2|x||y|$, ciò si traduce;
5) $x^2+y^2+2xy \leq x^2+y^2+2|x||y|$, si semplifica;
6) $2xy \leq 2|x||y|$, dividendo entrambi per 2;
7) $xy \leq |x||y|$;

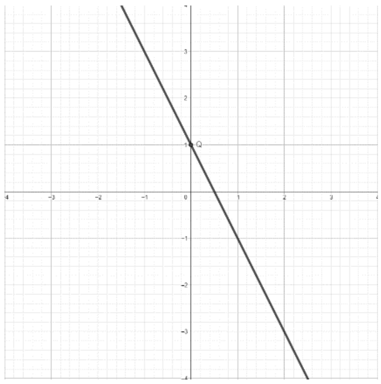
**Funzioni elementari**

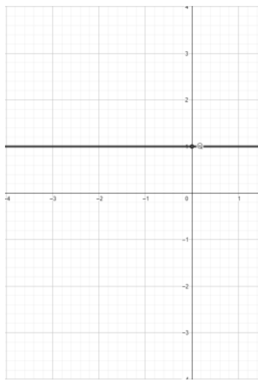
Retta

$f(x) = mx + q$ è la funzione retta, monotona, la quale ha le seguenti proprietà;

$m > 0$ Crescente $m < 0$ Decrescente $m = 0$ Costante







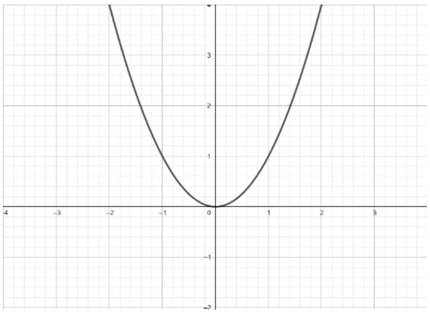
- m, coefficiente angolare, ci indica la pendenza, infatti più è grande è più sarà più simile a una linea verticale, in corrispondenza del numero;
- q invece determina dove si intersecherà con l'asse delle y;

Potenze

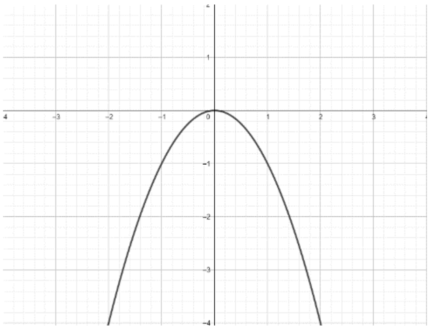
$f(x) = ax^n$ è la funzione potenza la quale va distinta in vari casi, in base al variare delle variabili.

Innanzitutto essa è tendente verso l'alto quando x è positiva, viceversa tende verso il basso quando x è negativa:

$a > 0$

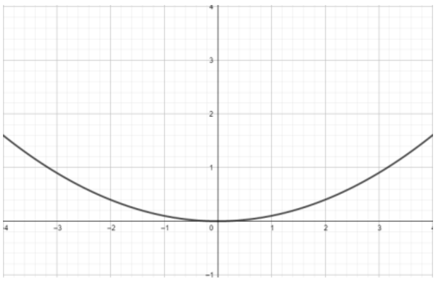


$a < 0$

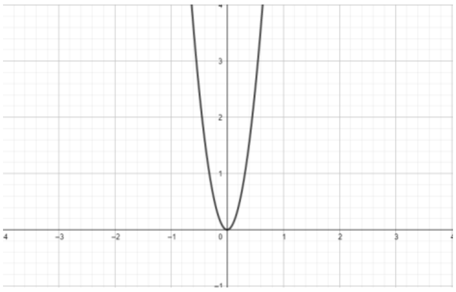


Poi più a è un numero distante dallo 0 è più la funzione tenderà all'asse delle y, viceversa più è tendete allo 0, più la funzione tenderà all'asse delle x:

$a$ tende a 0

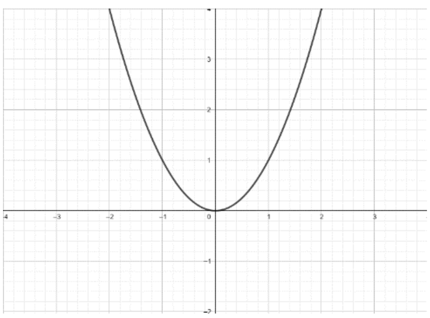


$a$ è lontano da 0

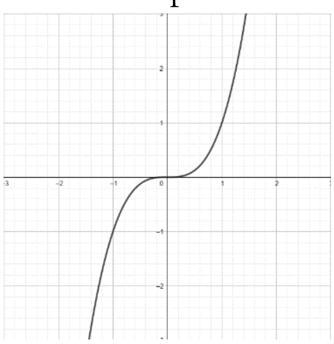


Spostiamo la nostra attenzione a questo punto su n, la quale richiede vari passaggi, apparentemente complessi, ma li sviscereremo con calma. Dunque dobbiamo fare prima un discorso su gli n appartenenti solo all'insieme naturale $n \in \mathbb{N}$. Dobbiamo discriminare le n pari e quelle dispari, in quanto si comportano in modi differenti.

n è pari



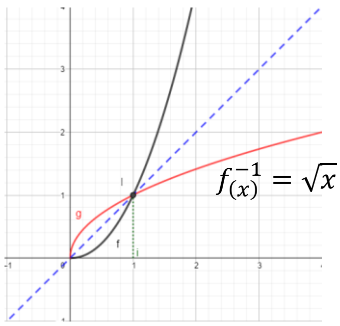
n è dispari

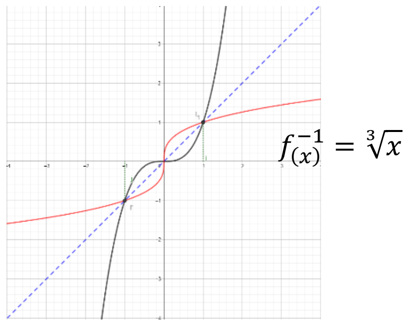


N è pari → il primo quadrante è simmetricamente specchiato sull'asse delle y nel secondo quadrante;

N è dispari → il primo quadrante è simmetricamente specchiato sull'asse delle y e poi su quello delle x nel terzo quadrante;

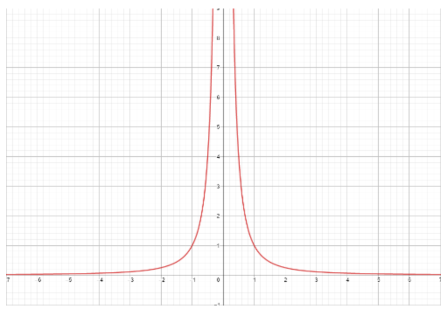
Come possiamo notare la funzione con n dispari è monotona e biiettiva, ciò significa che possiamo ottenere la funzione inversa. Ma faremo la stessa cosa con n pari considerando solo il primo quadrante:



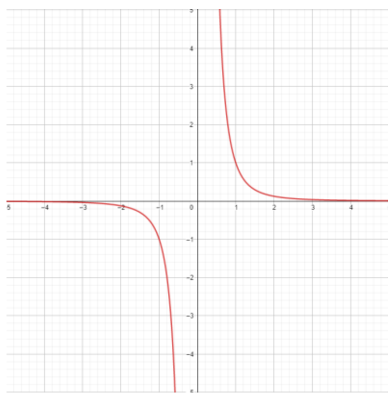




Passiamo dunque con $n$ nell'insieme degli interi relativi $n \in \mathbb{Z}$, dunque $\pm n$. Nel caso siano positivi abbiamo già visto le varie casistiche, ma se invece sono negativi, c'è sempre da discriminare, ad $a > 0$, se $n$ sia pari o dispari, infatti sc $n$ è pari la funzione sarà nel quadrante uno e due, altrimenti se dispari funzione sarà nel quadrante uno e tre:

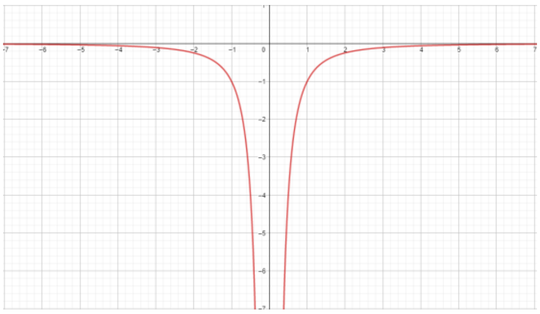
$n$ è pari

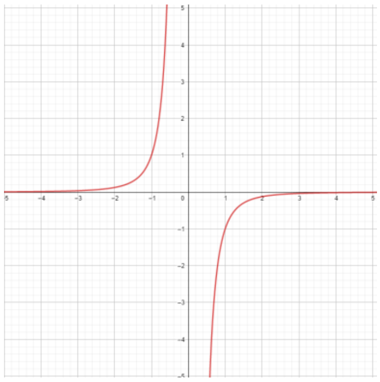


$n$ è dispari



Dunque nel caso $n$ sia pari ad ascisse $\pm 1$, assumono il valore di $a$, altrimenti nel caso $n$ sia dispari ad ascisse $+1$ assume il valore di $a$ e ad ascisse $-1$ assume il valore di $-a$. E più $a$ sarà distante dallo 0, più il grafico sarà lontano dall'origine. Nel caso invece che $a$ sia negativa, $a < 0$, il grafico si specchia, nel caso di $n$ pari si specchia rispetto all'asse delle x, altrimenti se $n$ è dispari si specchia rispetto all'asse delle y.



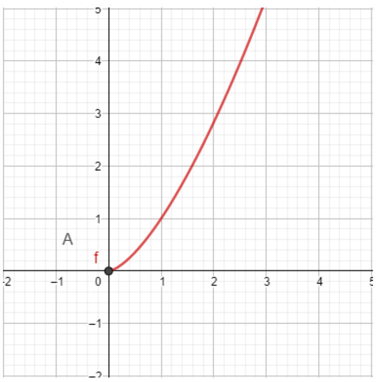


In ambedue i casi più si sostituisce alla $x$ un numero distante allo 0, più l'immagine tenderà allo 0. Contrariamente più si sostituisce alla $x$ un numero vicino allo 0, più l'immagine non tenderà allo 0.

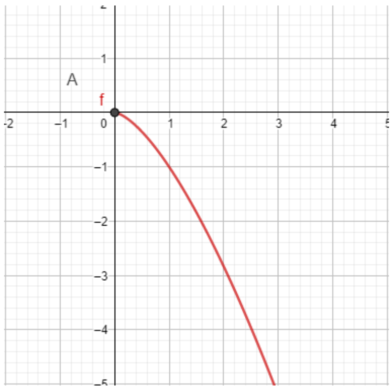
Dunque passiamo ora ad $n$ che assume dei valori appartenenti all'insieme dei numeri razionali, $n \in \mathbb{Q}$, ovvero $x^{\frac{a}{b}}$, ciò però non è altro che la radice $\sqrt[b]{x^a}$.

Dunque finché $n$ sia maggiore di 1, funzione sarà crescente è partirà dal punto di origine, senza includere i valori negativi, se $a$ è maggiore di 0, ovvero positivo $a > 0$, altrimenti il caso in cui $a$ è minore di 0, ovvero negativo $a < 0$, la funzione sarà decrescente con la medesima caratteristica, ovvero partirà dall'origine, in questo caso assumerà valori negativi. Entrambi più $a$ tende allo 0, meno è pendente, caso contrario più $a$ è lontana allo 0, più sarà pendente:

$a > 0$ e $n > 1$

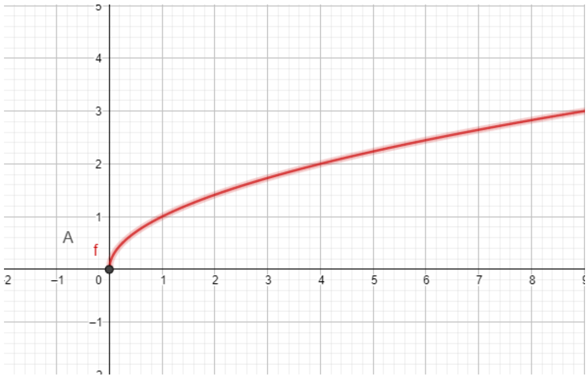



$a < 0$ e $n > 1$

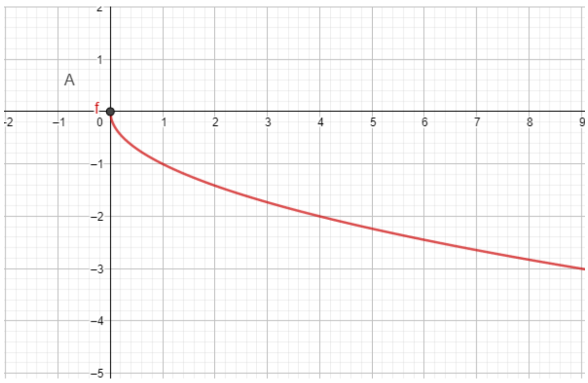



Altra differenziazione è quando n è compresa tra 1 e 0, cioè $0 < n < 1$, il grafico ha una variazione:

$a > 0$ e $0 < n < 1$

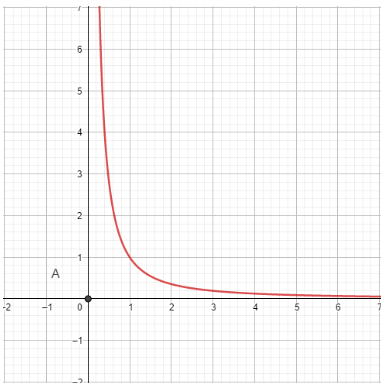


$a < 0$ e $0 < n < 1$

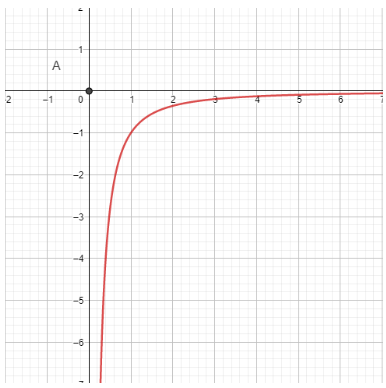


Per quanto riguarda invece n minore di 0, $n < 0$, essa si comporta ugualmente ai numeri interi, ma solo nel primo quadrante, quindi con valori solamente positivi:

$a > 0$ e $n < 0$



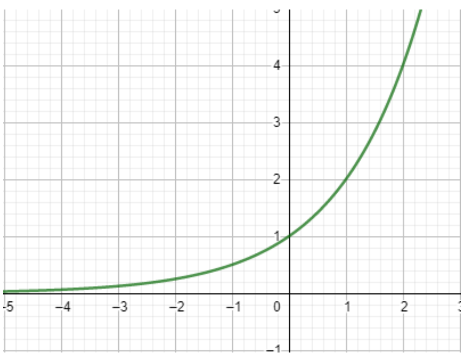
$a < 0$ e $n < 0$



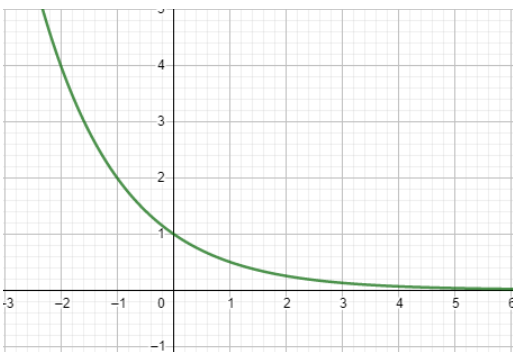
Funzioni esponenziali

Esse sono $f(x) = \alpha^x$, con $a$ numero reale positivo, è una funzione positiva. Inoltre è crescente se $a > 1$, altrimenti è decrescente se $a < 1 \; e \; a > 0$:

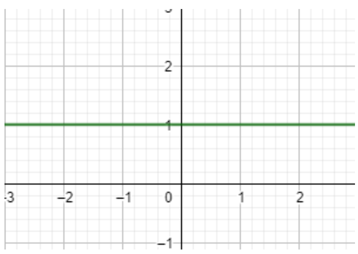
$a > 1$



$a < 1 \; e \; a > 0$



$a = 1$

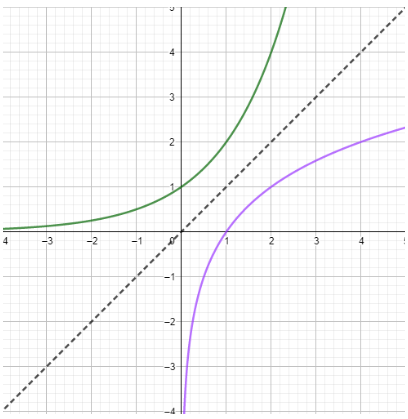


Le caratteristiche sono che:

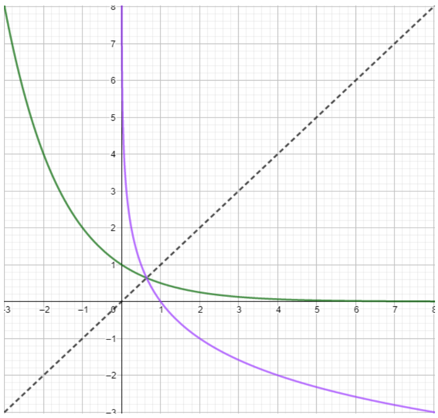
- $a$ deve essere sempre maggiore di zero;
- Se $a$ è 1, allora la funzione è costante;
- Maggiore è la $a$ è più la parte pendente sarà accentuata;
- Se $a > 1$, più piccola è la x più è piccola la y;
- Se $a < 1$, più è piccola la x più è grande la y;

Dunque per a $\neq 1$, la funzione è invertibile in quanto monotona e biiettiva:

$a > 1$



$a < 1 \; e \; a > 0$



La funzione inversa di cui stiamo parlando è la funzione logaritmo, ovvero $f(x) = log_a(x)$, quindi $y = log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$. Come abbiamo notato dal grafico se $a$ è maggiore di 1, allora è crescente la funzione, viceversa se $a$ è minore, allora la funzione è decrescente. Il logaritmo inoltre è definito quando:

- $x > 1$;
- $a > 0$ e $a \neq 1$;

Andiamo a vedere ora alcune proprietà  dei logaritmi note:

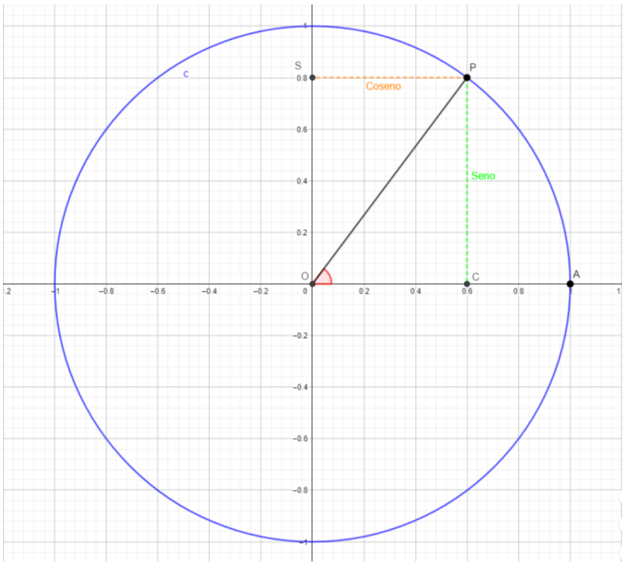
- $log_a(x \times y) = log_a(x) + log_a(y)$;
- $\log_a(x \,/\, y) = log_a(x) - log_a(y)$;
- $log_a x^b = b \times log_a x$;
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$;

Funzioni trigonometriche

Prima di passare alle funzioni vere e proprie, dobbiamo ricordare delle nozioni, infatti noi siamo abituati a misurare un angolo con i gradi, ad esempio l'angolo retto (congruente al proprio adiacente) misura 90° (ok scusa Pelella). Ma dobbiamo abituarci invece a abituarci a ragionare in radianti (rad), questo perché per le funzioni trigonometriche utilizziamo una circonferenza di raggio 1. Una tabella per facilitare la comparazione tra ° e rad:

| Gradi | Radianti |
|---|---|
| 0° | 0 |
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ |
| 45° | $\frac{\pi}{4}$ |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ |
| 90° | $\frac{\pi}{2}$ |
| 180° | $\pi$ |
| 270° | $\frac{3\pi}{2}$ |
| 360° | $2\pi$ |

Seno e Coseno



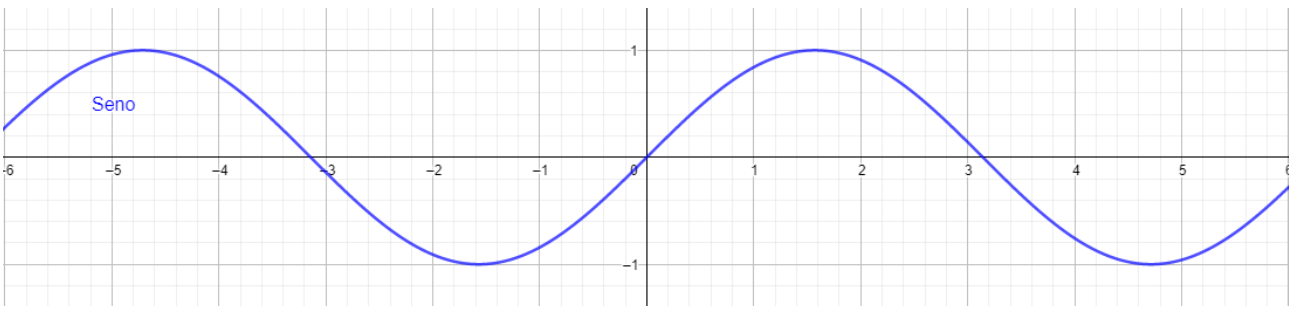

Prima ho introdotto una circonferenza di raggio 1, esattamente essa è la circonferenza goniometriche centrata nell'origine. Dato un punto P appartenente alla circonferenza, si definisce **seno** la distanza tra il punto P e l'asse dell'ascisse, invece si definisce **coseno** la distanza tra il P e l'asse dell'ordinate. E intuibile che esse siano comprese tra -1 e 1, ovvero:

$$-1 \leq sin(x) \leq 1$$

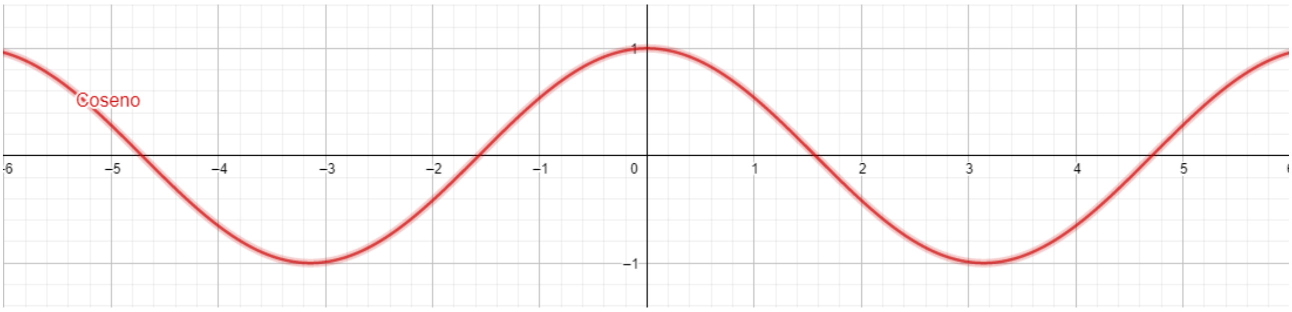
$$-1 \leq cos(x) \leq 1$$

Passiamo ora a vedere i grafici delle funzioni $cos(x)$ e $sin(x)$:

Seno

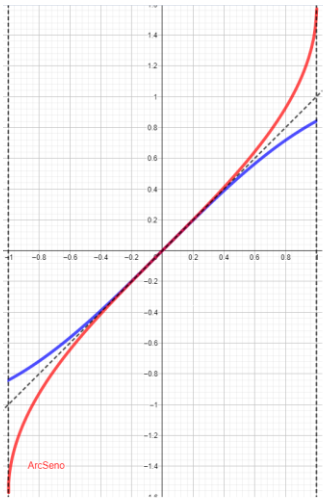


Coseno

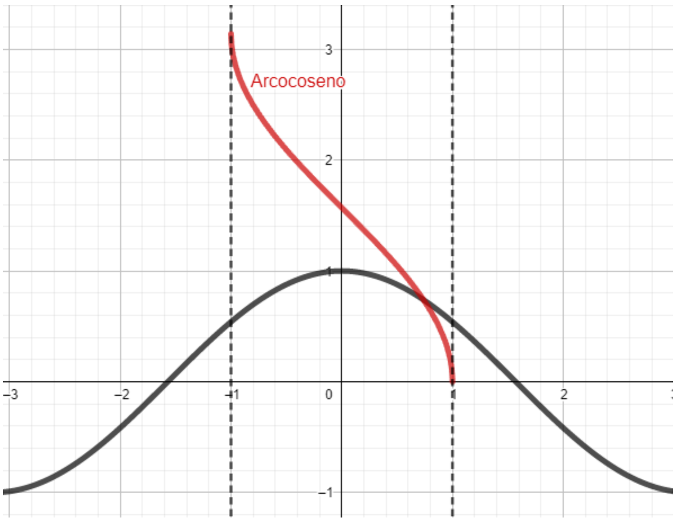



Esse sono delle funzioni periodiche, indi per cui non sono monotone e nemmeno biiettive, dunque non sono invertibili, ma se si limita a una porzione della funzione, ovvero quella tra ascissa -1 e 1, possiamo trovare le funzioni inverse, le porzioni considerate sono:

Seno e Arcoseno




Coseno e Arcoseno

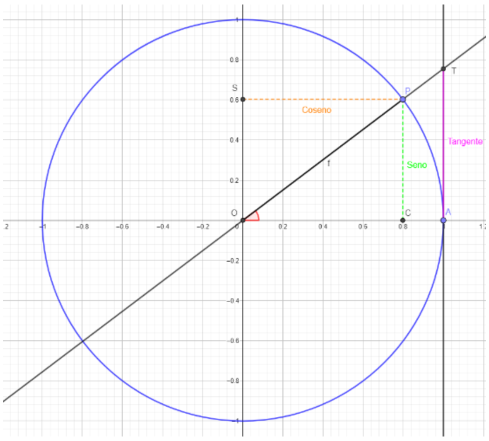



Dunque $sin^{-1}(x)$ oppure $arcsin(x)$ è la funzione inversa di $sin(x)$, invece per lo stesso ragionamento $cos(x)$ oppure $arccos(x)$ è la funzione inversa di $cos(x)$.

Vediamo delle proprietà:

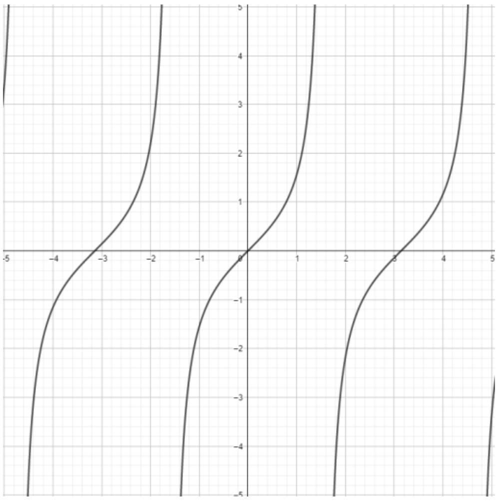
- $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$ *Teorema di Pitagora*;
- $sin(a \pm b) = sin(a) \times cos(b) \pm sin(b) \times cos(a)$;
- $cos(a \pm b) = cos(a) \times sin(b) \pm cos(b) \times sin(a)$;
- $sin\, 2x = 2\, sin(x) \times cos(x)$;
- $cos\, 2x = cos^2 x - \sin^2(x)$;

Tangente




A partire dalle due funzioni precedentemente studiate, possiamo definire la funzione tangente, ovvero $\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, scritta anche $\tan(x)$. Data la perpendicolare del punto A, e la retta passante per il punto O e P, la distanza tra il punto A e il punto di intersezione della retta con la perpendicolare è la tangente

Grafico della Tangente



Valori delle funzioni trigonometriche

| Rad | 0 | π/6 | π/4 | π/3 | π/2 | π | 3π/2 | 2π |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Gradi | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 180 | 270 | 360 |
| Seno | 0 | 1/2 | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 | 0 | -1 | 0 |
| Coseno | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1/2 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| Tangente | 0 | $\sqrt{3}/3$ | 1 | $\sqrt{3}$ | non definito | 0 | non definito | 0 |

**Dominio**

Il dominio o campo di esistenza è insieme dei valori appartenenti all'insieme $\mathbb{R}$, per il quale la funzione non perda di significato, ovvero l'insieme dei numeri che posso sostituire alla x, che mi permettono di ottenere un numero reale finito.
Per identificare un dominio bisogna prestare l'attenzione ad:

- Denominatori → devono essere diversi da 0, ovvero dato $\frac{a}{b}$, allora $b \neq 0$;
- Radice con indice pari → l'argomento necessita di essere positivo, ovvero dato $b$ pari $\sqrt[b]{a}$, allora $a \geq 0$;
- Logaritmi → l'argomento necessita di essere strettamente positivo, ovvero dato $\log_a b$, allora $b > 0$;
- Funzione con esponente un'altra funzione → dato $f(x)^{g(x)}$, allora$f(x) > 0$;
- Valore Assoluto → dato $|x|$ allora $\begin{cases} x \; se \; x \; \geq 0 \\ -x \; se \; x < 0 \end{cases}$;
- Funzione trigonometriche → $tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ quindi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $arcsin(x)$ e $arccos(x)$ hanno il dominio $[-1,1]$;

Immagine

Le immagini sono l'insieme dei valori assunti da una funzione.

Vediamo in generale i vari domini e immagini delle funzioni elementari:

| Funzione | Dominio | Immagine |
|---|---|---|
| $mx + q$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^k$ $//k$ pari | $\mathbb{R}$ | $[o, +\infty)$ |
| $x^k$ $//k$ dispari | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| $a^x$ | $\mathbb{R}$ | $(o, +\infty)$ |
| $\sqrt[k]{x}$ $//$ $k$ pari | $[o, +\infty)$ | $[o, +\infty)$ |
| $\sqrt[k]{x}$ $//$ $k$ dispari | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| $log_a(x)$ | $(o, +\infty)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin(x)$ e $\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ | $[-1,1]$ |
| $tan(x)$ | $\mathbb{R}$ - $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ | $\mathbb{R}$ |
| $arcsin(x)$ | $[-1,1]$ | $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ |
| $arccos(x)$ | $[-1,1]$ | $[-\pi, \pi]$ |
| $\|x\|$ | $\mathbb{R}$ | $[o, +\infty)$ |

**Principio di induzione**

Essa è una tecnica dimostrativa, e la tesi è vera se soddisfatte due condizioni da verificare: ovvero il passo zero e il passo induttivo. Essa si usa per dimostrare proprietà in funzione dei numeri naturali. Data una proprietà da dimostrare:

- Nel passo zero, dimostri che la proprietà $P(n)$ è vera per $n = 0$ **,** ovvero $P(0)$;
- Nel passo induttivo, per ipotesi induttiva diciamo che $P(n)$ sia vera, di conseguenza $P(n+1)$ deve essere anch'essa vera.

Dimostrata quest'ultima, puoi garantire che $P(n)$ è vera $\forall n \epsilon \mathbb{N}$.

Possiamo paragonare questo principio a l'effetto domino, ovvero sappiamo che la prima cade "$P(0)$", e sappiamo che dato un domino cadente" $P(n)$", quello successivo per forza cade "$P(n+1)$", allora arriveremo alla conclusione che cadranno tutti "dimostrata".

Usiamo questo principio per dimostrare la disuguaglianza di Bernoulli.

**Disuguaglianza di Bernoulli**

Presi $\forall x > -1\ x \in \mathbb{R} \wedge \forall n \in \mathbb{N}$ si ha la seguente proprietà $(1+x)^n \geq nx + 1$:

- Primo passo, "passo zero", sostituisco 0 al posto di n, $P(0) = (1+x)^0 \geq 0x + 1$ svolta viene $1 \geq 1$, proprietà è vera. Primo passo verificato.
- Secondo passo, "passo induttivo", cioè ipotizzata $P(n)$ sia vera, procedo a dimostrare $P(n+1)$, cioè $(1+x)^{n+1} \geq (n+1)x + 1$, dunque dobbiamo fare in modo che il primo membro diventi uguale a quello di $P(n)$, ovvero $(1+x)^{n+1}$, sfruttando la proprietà delle potenze diciamo che è uguale a $(1+x)^n(1+x)^1$, elevato a uno viene rimosso, in quanto è 1, $(1+x)^n(1+x)$, e dato che $(1+x)^n \geq nx + 1$, allora posso scrivere $(1+x)^n(1+x) \geq (nx+1)(1+x)$, dunque ho ottenuto $P(n)$ con entrambi i membri moltiplicati per $(1+x)$, il quale è per forza un numero positivo (perché all'inizio abbiamo detto >-1), è ciò rende possibile. Proseguiamo a moltiplicare il membro di destra $(1+x)^n(1+x) \geq nx + nx^2 + 1 + x$, quest'ultima si può riscrivere per la proprietà commutativa $nx + x + 1 + nx^2$, poi possiamo procedere a raccogliere per x, divenendo $(n+1)x + 1 + nx^2$ , ora posso dire che $(n+1)x + 1 + nx^2 \geq (n+1)x + 1$, poiché $+nx^2$ assumerà sicuramente un valore positivo. Dunque partendo da $(1+x)^{n+1}$ siamo arrivati a $(n+1)x + 1$, d'eco $P(n+1)$, è vera.

Dunque dimostrato passo zero e passo induttivo allora puoi garantire che $P(n)$ è vera $\forall n \epsilon \mathbb{N}$.

**Maggiorante e Superiormente limitato**

Dato l'insieme A, non vuoto di numeri reali, il **maggiorante** di A è un numero, che se esiste, è maggiore o uguale di tutti gli elementi di A. Se esso esiste A si dice **superiormente limitato.** $\forall x \in Ax \leq M$

Ad esempio dato l'insieme $A = [0,2)$, è superiormente limitato e possiede infiniti maggioranti, il più piccolo è il 2, in quanto non incluso.

Ad esempio dato l'insieme A= $\{x\epsilon\mathbb{R}:\times > 2\}$ non è superiormente limitata, perché non ha maggioranti

**Minorante e Inferiormente limitato**

Dato l'insieme A, non vuoto di numeri reali, il **minorante** di A è un numero, che se esiste, è minore o uguale di tutti gli elementi di A. Se esso esiste A si dice **inferiormente limitato.** $\forall x \in Ax \geq M$

Ad esempio dato l'insieme A= $\{x\epsilon\mathbb{R}:\times > 1\}$ è inferiormente limitato e possiede infiniti minoranti, il più grande è 2, in quanto è strettamente maggiore.

**Limitato**

L'insieme A si definisce limitato quando è sia **superiormente limitato** che **inferiormente limitato.**

**Massimo di un insieme**

Dato l'insieme A, non vuoto di numeri reali, e un numero reale M si dice massimo di A, scritto M = max(A), se:

- $M \in A$, cioè M appartiene ad A;
- $M \geq x, \forall x \in A$, ovvero M è un maggiorante;

Ad esempio dato l'insieme $A = [0,2]$, il massimo è 2 perché appartiene ad A ed è un maggiorante.

Ad esempio dato l'insieme $A = [0,2)$, non c'è un massimo.

**Minimo di un insieme**

Dato l'insieme A, non vuoto di numeri reali, e un numero reale m si dice minimo di A, scritto m = min(A), se:

- $m \in A$, cioè m appartiene ad A;
- $m \leq x, \forall x \in A$, ovvero m è un minorante;

Ad esempio dato l'insieme $A = [0,2]$, il minimo è 0 perché appartiene ad A ed è un minorante.

Ad esempio dato l'insieme $A = (0,2)$, non c'è un minorante.

**Estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme**
Dato l'insieme A, non vuoto di numeri reali:
- **Estremo superiore** di A "sup A", se esiste, è il minimo dell'insieme dei maggioranti di A;
- **Estremo inferiore** di A "sup A", se esiste, è il massimo dell'insieme dei minoranti di A

Ad esempio dato l'insieme $A = (0,2]$, 0 è un estremo inferiore, ma non è un minimo. Invece 2 è l'estremo superiore e anche massimo.

Ad esempio dato l'insieme $A = [0,2)$, 0 è un estremo inferiore, e anche un minimo. Invece 2 è l'estremo superiore e però non è massimo.

**Teorema dell'esistenza dell'estremo superiore o inferiore**

Dato l'insieme A, non vuoto di numeri reali:
- Se A è superiormente limitata allora esiste in ℝ l'estremo superiore di A, M = Sup A ⇔ $\begin{cases} M \geq a, \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A: M - \varepsilon < a \end{cases}$;
- Se A è inferiormente limitata allora esiste in ℝ l'estremo inferiore di A, m = Inf A ⇔ $\begin{cases} m \leq a, \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A: M + \varepsilon > a \end{cases}$;

**Assioma di completezza**

Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali che $a \leq b$, comunque si scelgano a elementi di A e b elementi di B. Allora esiste almeno uno numero reale c tale che $a \leq c \leq b$, qualunque siano a in A e b in B. Ovvero che i numeri reali si susseguono con continuità.

**Insiemi non limitati**
Introduciamo i simboli $+\infty, -\infty$, per descrivere insiemi non limitati, sia l'insieme A, non vuoto:
- Se non è limitato superiormente, l'estremo superiore sarà $+\infty$;
  sup A = $+\infty$ ⇔ $V_x, \exists a \in A: a > x$
- Se non è limitato inferiormente, l'estremo inferiore sarà $-\infty$;
  inf A = $-\infty$ ⇔ $V_x, \exists a \in A: a < x$

## Successioni Numeriche

Facciamo ora un passo in avanti *(verso il baratro)*, è iniziamo a comprendere cosa sia una successione numerica fondamentale per comprendere i futuri argomenti. Formalmente si definisce successione numerica $a_n$ è una funzione da ℕ a ℝ, o meglio una legge (mappa, appl) che associa ad ogni elemento n ∈ ℕ un unico numero reale $a_n$.
Esempi:

- $a_1 = 1\,, a_2 = 4\,, a_3 = 9$ ... allora $a_n = n^2$;
- $a_1 = 1\,, a_2 = \frac{1}{2}\,, a_3 = \frac{1}{3}$ ... allora $a_n = \frac{1}{n}$;
- $a_1 = 1\,, a_2 = -1\,, a_3 = 1\,, a_4 = -1$ ... allora $a_n = (-1)^n$;

**Limite di successioni**

Comprendiamo innanzitutto perché da un numero naturale si passa a un numero reale, bene allora se io voglio avvicinarmi il più possibile, tendere, ad un numero $n$, se valuto i numeri naturali il minimo intervallo e $n+1$ e $n-1$, di fatto essendo completamente un altro numero. Ad esempio se voglio tendere a $5$, posso solo prendere $4$ o $6$, che sono numeri completamente diversi da 5. Questo discorso può valere solo quando si parla a tendere verso l'infinito ∞.

Dunque in numero reale $a$ è il limite della successione $a_n$ (si dice anche che $a_n$ tende o converge ad $a$) e si scrive:

$$\lim_{n\to n_0} a_n = a, \text{ (a volte con } L \text{ al posto di } a\text{), oppure } \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

Solo se $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\colon |a_n - L| < \varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon$ . Ora cerchiamo di sviscerare questa definizione, per comprenderla al meglio e chiarire possibili dubbi. $\forall\varepsilon > 0$ esso dice, **per ogni epsilon maggiore di 0**, in cui epsilon è una lettera greca minuscola che rappresenta un numero, che per convenzione è molto piccolo. $\exists n_\varepsilon\colon |a_n - L| < \varepsilon$, **esiste $n_\varepsilon$ tale che il valore assoluto di $a_n$ meno L sia minore di epsilon**, ovvero esiste questo numero $n_\varepsilon$ il quale rappresenta la distanza tra $a_n$ e L, che sia minore si epsilon. $\forall n \geq n_\varepsilon$, **per ogni n maggiore uguale a $n_\varepsilon$**, ovvero valide per ogni scelta di $n$ la quale sia maggiore di $n_\varepsilon$. Sostanzialmente sto dicendo prendiamo un numero piccolissimo positivo, la distanza tra la funzione e il limite è più piccola di questo numero piccolissimo. Salendo lievemente di livello, dato un numero epsilon ($\varepsilon$), molto piccolo, positivo, posso trovare in corrispondenza di esso, un altro valore $n_\varepsilon$ dipendente da esso, positivo, tale che sia la distanza tra la funzione ($a_n$) e il limite $(L)$ minore di epsilon ($\varepsilon$), per ogni numero $n$ maggiore di $n_\varepsilon$.

Dunque proviamo a verificare dei limiti mediante la funzione, ad esempio $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, innanzitutto tende a zero perché più grande sarà il denominatore è più piccolo sarà il risultato, quindi con un numero infinitamente grande tenderà allo zero.
Quindi applicando la definizione viene fuori che la nostra $a_n = \frac{1}{n}$, e la $L = 0$, indi per cui sarà $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon: \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon$, ma il $\left|\frac{1}{n} - 0\right|$ è uguale a $\left|\frac{1}{n}\right|$ , ancora una volta congruente a $\frac{1}{n}$. Riscriviamola $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon: \frac{1}{n} < \varepsilon\ \ \forall n \geq n_\varepsilon$, ciò significa che $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ed $n_\varepsilon$ combacia con $n$.

Limite a $\pm\infty$
$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
In questo caso la successione $a_n$ ha il limite a $+\infty$, se solo se $\forall \mathrm{M} > 0$, allora abbiamo che $\exists n_M: a_n > M\ \forall n \geq n_M;$

Similmente $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, In questo caso la successione $a_n$ ha il limite a $-\infty$, se solo se $\forall M > 0$, allora abbiamo che $\exists n_M: a_n < M\ \forall n \geq n_M;$

**L'unicità del limite**
Se il limite esiste esso è unico, altrimenti il limite non esiste $\nexists$, per questo $a_n$ è irregolare. Un esempio è:
$\lim_{n\to\infty}(-1)^n = \nexists$
Dimostrazione per assurdo: allora vogliamo dimostrare che in questo caso il limite non esista, dunque proseguiamo a per assurdo ipotizzare il contrario: quindi che esistano due limiti distinti, ovvero che $\lim_{n\to n_0} a_n = L_1$ e $\lim_{n\to n_0} a_n = L_2$, quindi per definizione avremo

- sia $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_{1\varepsilon}: |a_n - L_1| < \varepsilon\ \forall n \geq n_{1\varepsilon}$ per il primo che $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_{2\varepsilon}: |a_n - L_2| < \varepsilon\ \forall n \geq n_{2\varepsilon}$.
- Se $L_1 \neq L_2$, d conseguenza la distanza tra i due è un numero positivo $|L_1 - L_2| > 0$;
- Dato che per definizione $\varepsilon$ è $\forall\varepsilon > 0$, allora $\varepsilon < \frac{|L_1 - L_2|}{2}$
- Essendo $|L_1 - L_2| > 0$ una disequazione, valgono tutte le regole, quindi aggiungo $a_n$ a entrambi così il valore non cambia, $|(a_n - L_1) + (a_n - L_2)| > 0$;
- Questo punto possiamo utilizzare la disuguaglianza triangolare che afferma $|x + y| \leq |x| + |y|$, quindi $|(a_n - L_1) + (a_n - L_2)| \leq |(a_n - L_1)| + |(a_n - L_2)|$;
- Ora per definizione $|a_n - L_1| < \varepsilon\ \forall n \geq n_{1\varepsilon}$ e idem per $|a_n - L_2| < \varepsilon\ \forall n \geq n_{2\varepsilon}$, dicendo dunque che in totale tutto è minore di $2\varepsilon$;

- Quindi non sarà più minore uguale, ma solo minore. Ora sostituisco a $\varepsilon$, il valore precedentemente scelto, quindi $2\varepsilon = 2 \times \frac{|L_1-L_2|}{2}$, dividiamo per 2 viene $|L_1 - L_2|$;
- Dunque sto affermando che $| \leq \ |(a_n - L_1)| + |(a_n - \ L_2)|$, che non è altro che dire $|L_1 - L_2|$, sia minore di $2\varepsilon$, cioè $|L_1 - L_2|$, quindi che $|L_1 - L_2| < \ |L_1 - L_2|$, ciò è IMPOSSIBILE;

Arrivando alla conclusione che $L_1$ debba essere congruente a $L_2$, per il teorema di unicità.

Esercizi: Calcolo e verifica Limite con definizione
$\lim\limits_{n\to\infty} 3n^2 - 2n + 1 = \infty$

Perché $\forall M > 0\ \exists n_M : a_n > M\ \forall n > n_M$, sostituiamo ora la nostra funzione al posto di $a_n$, allora $\forall M > 0\ \exists n_M : 3n^2 - 2n + 1 > M\ \forall n > n_M$, dunque $3n^2 - 2n + 1 > M$ ci compostiamo come una disequazione di 2 grado, $3n^2 - 2n + 1 - M > 0$ , quindi $3n^2 - 2n - (M-1) > 0$, calcoliamo il delata $\varDelta = 4 - 12(1-M) = 12M - 8$, formula risolutiva $x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{12M-8}}{6} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{3M-2}$, quindi basta scegliere $n > n_M$, ovvero $n > \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3M-2}$, quindi è verificata perché infinito è certamente maggiore.

**Successioni limitate**
Abbiamo detto precedentemente che una successione è **regolare** se ammette limite (finito o infinito).

- Invece una successione si dice superiormente limitata $\exists M\colon\ a_n \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}$, ovvero che ammette dei maggioranti, ovvero dei numeri che se esistono sono maggiori di tutto l'insieme.
- Contrariamente una successione si dice inferiormente limitata $\exists M\colon\ a_n \geq M\ \forall n \in \mathbb{N}$, ovvero che ammette dei minoranti, ovvero dei numeri che se esistono sono minori di tutto l'insieme.

Dunque una successione si dice **limitata** quando è sia superiormente limitata che inferiormente limitata, ovvero $-M \leq a_n \leq M$ (possibile trovare in alcuni libri anche la seguente affermazione $|a_n| \leq M$ ).
Infine una successione è detta **irregolare**, se non ammette un limite come accennato già in precedenza

**Successioni convergenti**
Se $a_n$ ammette limite finito si dice "convergente".
Se $a_n$ se ammette limite infinito $\pm\infty$ si dice "divergente"

Proposizioni:

- Una successione limitata non è convergente, ad esempio $(-1)^n$ è limitata ma non corvegente;
- Ogni successione convergente è limitata, perché per ipotesi $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, di cui $L \neq \pm\infty$, ed è convergente perché la definizione $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon: |\alpha_n - L| < \varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon$, seguiamo a dire che $\varepsilon = 1$, ottenendo che $\forall n \geq n_1$, quindi $|\alpha_n - L| < 1\ \ \forall n \geq n_1$, ciò implica $-1 \leq a_n - L \leq 1\ \ \forall n \geq n_1$, ancora implica $1 - L \leq a_n \leq 1 + L\ \forall n \geq n_1$. Dunque stiamo dicendo che è limitata tra $1 - L$ e $1 + L\ \ \forall n \geq n_1$, viceversa sia $k_1 = \min_{n \leq n_1} a_n$, $k_2 = \max_{n \leq n_1} a_n$, scegliendo ora $N = \min(k_1, 1 - L)$ e $M = \max(k_2, 1 + L)$ ottenendo $N \leq a_n \leq M$.

**Operazioni con i limiti**

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$;
2) $\lim_{n\to\infty}(a_n \times b_n) = ab$;
3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}\ (se\ b_n, b \neq 0)$;

*Dimostrazioni di queste non le chiede*

**Forme indeterminate**

Definire che un limite è in forma indeterminata è importante capire che significa che occorre fare prima delle trasformazioni, o semplificazioni, al fine di togliere, se possibile, l'indeterminazione. Le forme indeterminate sono:

| |
|---|
| $\infty - \infty$ |
| $0 \times \infty$ |
| $\infty/\infty$ |
| $0/0$ |
| $1^{\pm\infty}$ |
| $\pm\infty^0$ |
| $0^0$ |

## Teorema di confronto

**Teorema della permanenza del segno**

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0, \exists n_0 : a_n > 0 \ \forall n \geq n_0$

Dimostrazione: *(CHIEDE)*

- Noi sappiamo che un limite è $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon$,
- Ciò equivale a dire che $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon$,
- Per le proprietà delle diseguaglianze con valore assoluto ciò equivale $a - \varepsilon < a_n < \varepsilon + a \ \forall n \geq n_\varepsilon$;
- Essendo $\forall \varepsilon > 0$, posso scegliere $\varepsilon = \frac{a}{2}$;
- Sostituendo $a - \frac{a}{2} < a_n < \frac{a}{2} + a$;
- Svolgendo le operazioni viene $+\frac{a}{2} < a_n < \frac{a}{2} + a$;
- Dunque abbiamo dimostrato che $\frac{a}{2} < a_n$, in cui $\frac{a}{2} > 0$;
- Quindi positivo;

Corollario: quindi se parto da una successione non negativa $a_n \geq 0$, allora anche il limite sarà altrettanto non negativo $a \geq 0$,ovvero Se $\lim_{n\to\infty} a_n = a \geq 0$

Dimostrazione per assurdo:

- Allora supponiamo che per assurdo, $a < 0$;
- Dal teorema precedente esisterebbe $n_0 : a_n < 0 \ \forall n \geq n_0$;
- Pero per ipotesi è impossibile, poiché parte dicendo $a_n > 0$;

**Teorema di confronto**

Chiarito il teorema precedente possiamo comprendere il seguente teorema, quello di confronto, il quale parte dall'ipotesi che, se $a_n \geq b_n \ \forall n \geq n_0$, allora afferma che $\lim_{n\to\infty} a_n = a \geq \lim_{n\to\infty} b_n = b$. Ovvero il teorema sostiene che se ho una successione maggiore di un'altra, allora anche i rispettivi limiti rispetteranno il confronto.

Dimostrazione:

- Consideriamo la successione $c_n := a_n - b_n$, che per ipotesi $c_n \geq 0 \ \forall n \geq n_0$;
- Dunque se prendiamo in considerazione il limite di $c_n = \lim_{n\to\infty} c_n$ ;
- Il quale risulterà uguale a $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = (a - b)$;
- Per il teorema della permanenza del segno se $a_n - b_n \geq 0$, allora anche $a - b \geq 0$;
- Dunque se $a - b \geq 0$, allora $a \geq b$;

**Teorema dei carabinieri**

Supponiamo che $a_n \leq b_n \leq\ c_n$, e che il $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n) = b$, allora abbiamo che $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = b$. Ovvero date tre successioni, di cui una centrale è maggiore uguale di una e minore uguale dell'altra, e i due estremi assumono lo stesso valore, allora anche quella centrale assumerà lo stesso valore.

Dimostrazione:

- Noi sappiamo che $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_{a\varepsilon}: -\varepsilon \leq a_n - b \leq \varepsilon\ \forall n \geq n_{a\varepsilon}$ ;
- Ciò risulta uguale a $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_{a\varepsilon}: b - \varepsilon \leq a_n \leq \varepsilon + b\ \forall n \geq n_{a\varepsilon}$ ;
- Per ugual principio $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_{c\varepsilon}: -\varepsilon \leq c_n - b \leq \varepsilon\ \forall n \geq n_{c\varepsilon}$ ;
- Ciò risulta uguale a $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_{c\varepsilon}: b - \varepsilon \leq c_n \leq \varepsilon + b\ \forall n \geq n_{c\varepsilon}$;
- Scegliamo $n_{b\varepsilon} \coloneqq \max\,(n_0, n_{a\varepsilon}, n_{c\varepsilon})$;
- Di conseguenza $b - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq\ c_n\ \leq \varepsilon + b$ ;
- Ma quindi $b - \varepsilon \leq b_n \leq \varepsilon + b$;
- D'eco $-\varepsilon \leq b_n - b \leq \varepsilon$;
- Ciò significa che $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = b$;

**Teorema di confronto con limiti infiniti**

Dati $a_n \leq b_n\ \ \forall n \geq n_0$, può succedere:

1) Se $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = +\infty$, allora $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = +\infty$. Dimostrazione:
   a. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = +\infty$, cioè $\forall M > 0\ \exists n_M: a_n > M\ \forall n_0 \geq n_M$,per definizione;
   b. Per ipotesi $b_n \geq\ a_n > M$, sappiamo che $b_n$ sia maggiore di $a_n$;
   c. $\forall n \geq \max(n_M, n_0)$, ma se il limite $a_n$ è infinito;
   d. Ovvero $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = +\infty$, allora il limite $b_n$, che è più grande, sarà infinito;
2) Se $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = -\infty$, allora $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = -\infty$. Dimostrazione:
   a. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = +\infty$,cioè $\forall m > 0\ \exists n_m: a_n < m\ \forall n_0 \geq n_m$,per definizione;
   b. Per ipotesi $b_n \geq\ a_n < m$, sappiamo che $b_n$ sia maggiore di $a_n$;
   c. $\forall n \geq \min(n_m, n_0)$, ma se il limite $a_n$ è meno infinito;
   d. Ovvero $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = -\infty$, allora il limite $b_n$, che è più grande, sarà meno infinito;

**Fattoriale**

$n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$. Ad esempio $n = 3$, allora $n! = 3 \times 2 \times 1$ . Oppure il fattoriale di zero è uno $0! = 1$, oppure il fattoriale di uno è uno $1! = 1$;

**Binomio di Newton**

$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$ ($n$ volte), esso è uguale ad $a^n \ na^{n-1}b \ \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 \dots b^n$

Per saper rappresentare in quel modo un binomio elevato ad un certo $n$, necessitiamo del confiscante binomiale ($k$).

Confiscante binomiale

Dato un numero $k \leq n$, in due parentesi tonde, sopra si scrive l'ordine, ovvero $n$, e sotto la classe $k$. Quindi $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Ad esempio $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!}$

**Triangolo di Tartaglia**

Esso serve per sviluppare qualsiasi binomi di Newton, esso si costruisce ne seguente modo:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$(a+b)^0 = 1 \ \ (a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$

$(a+b)^4 = a^4 + 4ab^3 + 6a^3b^3 + 4a^3b + b^4$

**Ordine di infinito**

$\boldsymbol{log(n) \ll n^b(b<1) \ll n \ll n^a(a>1) \ll k^n \ll n! \ll n^n}$

Il limite viene deciso dall'ordine maggiore.

**Limiti notevoli**

(Proposizione 1)

Dato $a_n \to 0$ se solo se $|a_n| \to 0$

Dimostrazione:

- Dato $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, per definizione $\forall\varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : |a_n - 0| < \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon$;
- Quindi facendo la sottrazione nel modulo $\forall\varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : |a_n| < \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon$;
- Ecco Dimostrato
- Inoltre se -$|a_n| \leq \ a_n \leq |a_n|$,in cui $\pm|a_n| \to 0$ ,per i due carabinieri $a_n \to 0$

(Proposizione 2)

Supponiamo $a_n \to 0$ e $b_n \leq M$, allora $c_n$=$a_n b_n = 0$ se $n \to \infty$, Dimostrazione:

- $b_n \leq M$, cioè $b_n$ è limitata, allora $-M \leq b_n \leq M$;
- se moltiplichiamo tutto per $|a_n|$, risulterà $-M|a_n|, \leq b_n|a_n|, \leq M|a_n|$;
- dato che $|a_n|$ tende a 0, ongni numero moltiplicato per 0 fa 0;
- quindi $0 \leq b_n|a_n|, \leq 0$,
- per il teorema dei due carabinieri allora $b_n|a_n|$ tende a 0.

Osservazioni: Spesso si usa con le successioni oscillanti
Esempio $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, ovvero:
- $(-1)^n$ non ha limite ma è limitata;
- $\frac{1}{n}$ è infinitesima, ovvero tende a 0;

Quindi per la proposoizione 2 è certo è infinitesima, ovvero tenda a 0.

**Limiti notevoli: Esponenziali**

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & se\ a > 1\ (A) \\ 1 & se\ a = 1\ (B) \\ 0 & se -1 < a < 1\ (C) \\ \nexists & se\ a \leq -1\ (D) \end{cases}$$ ,proseguiamo ora a svolgere le varie dimostrazioni:

(A)

- se $a > 1$, significa che $a = 1 + x$ con $x > 0$
- quindi $a^n = (1 + x)^n$, usando Bernoulli diviene
- $(1 + x)^n \geq 1 + nx \to \infty$;
- Ma se $n \to \infty$, dato che $x > 0$;
- Dal confronto segue la teoria.

(B)

- $1^n\ \forall n \geq 1$
- Ovviamente $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$ (Successione costante)
- Ogni esponente viene messo ad 1, riamne tale.

(C)

- Supponiamo $-1 < a < 1$, se $a < 1 \Rightarrow b = |\frac{1}{a}| > 1 \Rightarrow b = |1 + x|$ con $x \geq 0$;
- Quindi $\lim_{n\to\infty} |a^n| = \lim_{n\to\infty} |(\frac{1}{b})^n| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{b^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(1+x)^n}\right| = \frac{1}{\infty} = 0$

(D) Supponiamo $a < -1$

- Consideriamo $a_{2k} = a^{2k} = (a^2)^\kappa, a^2$ sarà sicuamente positivo, quindi elevandolo alla k, il risultato tendera a infinito $\infty$;
- Facciamo un ipotetico successivo $a_{2k+1} = a^{2k+1}$=$a^{2k}a$ → -∞;
- Doppio limite, dunque per il teorema d'unicità dei limiti, questa successione non ha limite;

Prop.

Sia a >0, allora $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1,$ dimstrazione:

- CASO 1) $a \geq 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \geq 1$
- Consideriamo $b_n := \sqrt[n]{a} - 1$ e dimostriamo che $b_n \to 0$ se $n \to \infty;$
- $a = (1 + b_n)^n$ applichiamo Bernoulli $(1 + b_n)^n \geq (1 + n\, b_n);$
- Quindi $0 \leq b_n \leq \frac{a-1}{n}$, in cui 0 è 0 e $\frac{a-1}{n}$ tende a 0;
- Quindi per i due carabinieri esso tende a zero $b_n \to 0$ per $n \to \infty;$

- CASO 2) $0 < a < 1;$
- $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{a^{n}}}},$
- ma$\frac{1}{\frac{1}{a^{n}}}$ tende ad uno, quindi $\frac{1}{1} = 1$, tende ad 1;

Proposizione

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^a}$ = 1 $\forall a.$

Osservazione: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \infty^0$, Forma indeterminata. Se intendiamo $n,$ come $e^{log(n)}$ , considerando che $log(n) \to 0$, allora $e^0 = 1;$

Dimostrazione:

- (CASO $a = \frac{1}{2}$) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}} = 1$
- $b_n := \sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}} - 1,$ notiamo che $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
- Quindi $(1 + b_n)^n,$ Bernoulli $(1 + b_n)^n \geq (1 + n\, b_n);$
- Cioè $0 \leq b_n \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}$, che ambedue tendono a 0 per $n \to \infty;$
- Ovvero $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, come volevasi dimostrare;

- (CASO Generale) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^a}$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(n^{\frac{1}{2}}\right)^{2a}}$,
- $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}}\right)^{2a}$
- $1^{2a} = 1\ \forall a,$ come volevasi dimostrare

**Successioni Monotone**

Monotonia (⇒ Limite esiste)

Definizione:

- La successione $a_n$ è monotona crescente se $a_n + 1 \geq\ a_n\ \ \forall n \geq 1$;
- La successione $a_n$ è monotona decrescente se $a_n + 1 \leq\ a_n\ \ \forall n \geq 1$;

Teorema

Ogni Successione monotona è regolare, ovvero ammette limiti.

Dimostrazione: è sufficiente dimostrare se $a_n$ sia crescente (decrescente è analogo):

- Supponiamo che $a_n$ sia crescente, abbiamo due casi sup. limitata o limitata
- Se $a_n$ non fosse sup. limitata di ha:
  a. $\forall M > 0\ \exists n_M : a_{n_M} \geq M$;
  b. Però dato che $a_n$ è crescente, abbiamo che $a_n \geq a_{n_M} \geq M\ \forall n \geq a_{n_M}$
- Cioè $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$;

Viceversa, supponiamo che esista $L = \sup_{n\geq 1} a_n$. Dalle proprietà dell'estremo superiore osserviamo che:

1) $a_n \leq L\ \forall n \geq 1$;
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \colon a_n \geq L - \varepsilon$;

Mettendo insieme (1) e (2) e la crescenza si ha:

- $L - \varepsilon \leq a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq L < L + \varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon$;
- Visto che $a_{n_\varepsilon} \leq a_n \forall n \geq n_\varepsilon$, otteniamo che;
- $-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon\ \ \forall n \geq n_\varepsilon$,
- Ovvero $|a_n - L| < \varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon$ , ciò implica $\lim_{n\to\infty} a_n = L$;

  Osservazione: la monotonia è sufficiente per la regolarità, però non è necessaria, infatti esistono successioni convergenti o divergenti non monotone. Es: $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

**Numero di Nepero**

Il numero di Nepero, indicato con la lettera $e$, è uguale al seguente limite $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, esso esiste ed è un numero reale irrazionale, che per comodità arrotonderemo alla seconda cifra decimale $e = 2{,}71\ldots$

(Proposizione 1)

Dunque supponiamo che la successione $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ è monotona crescente. Dimostrazione:

- Il nostro obbiettivo è $a_n$ sia maggiore di $a_{n-1}$
- Quindi affermare che $(1+\frac{1}{n})^n \geq (1+\frac{1}{n-1})^{n-1}$
- Facendo il minimo comune multiplo e svolgendo la somma ne secondo membro viene $(1+\frac{1}{n-1})^{n-1} = (\frac{n-1+1}{n-1})^{n-1} = (\frac{n}{n-1})^{n-1}$ ;
- Quindi $(1+\frac{1}{n})^n \geq (\frac{n}{n-1})^{n-1}$, riscrivibile come $(1+\frac{1}{n})^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}$;
- Che risulta $(1+\frac{1}{n})^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)$
- Ora moltiplico entrambi i membri per $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ alla meno uno cioè $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$
- Risultando $(1+\frac{1}{n})^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$,svolgo a sinistra
- $\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$, regola del prodotto della somma e della differenza
- $\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$, divido le frazioni$\left(\frac{n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n}{n}-\frac{1}{n}$ e semplifico
- $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$, disuguaglianza di Bernoulli a sinistra
- $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq \left(1-n\frac{1}{n^2}\right)$, semplifica $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$, ecco dimostrato che $a_n$ sia crescente

(Proposizione 2)

Ora è il momento di verificare che $a_n$ sia limitata, Dimostrazione:

- Per fare ciò introduciamo una nuova successione $b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$,
- Notiamo ora che $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)$ è maggiore o uguale di $a_n$;
- Quindi quello che tocca fare adesso è dimostrare che $b_n$ sia decrescente;
- Infatti se lo facciamo avremo dalla monotonia $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$, cioè $1 \leq a_n \leq b_n \leq 4$, quello che ci manca fare è dimostrare la decrescenza di $b_n$;

- Dunque per questo $b_{n-1} \geq b_n$, cioè$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, facendo il minimo comune multiplo $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$, il quale secondo membro è uguale a $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n+1}{n}$,ovvero $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n+1}{n}$;
- Come prima moltiplico $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ alla meno uno ad entrambi i membri, divenendo $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \geq \frac{n+1}{n}$, moltiplico i membri di sinistra
- $\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \geq \frac{n+1}{n}$, riscritto $\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{1}{n}$, Bernoulli al primo membro
- $\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n 1+\frac{n}{n^2-1}$ semplificando è uguale a $1+\frac{1}{n}$, come volevasi dimostrare $b_n$ è decrescente.

Corollario: quindi abbiamo dimostrato che $a_n$ è monotona crescente e limitata, dunque una successione con queste caratteristiche è convergente, ovvero $\exists \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n := e$ .

(Proposizione 3)

Supponiamo che $a_n$ divergente, quindi $a_n \to \pm\infty$, allora $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$. Idea di dimostrazione:

- Segue dal cambio di variabili nei limiti
- Supponiamo che $a_n \to +\infty$, e definiamo $m = a_n$, notiamo che, la più grande parte intera di $a_n$ ({floor} il più grande intero che non supera $n$), scritto in questo modo $[a_n] \leq a_n \leq [a_n]+1$,
- Se io faccio $\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} \leq \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]+1}$
- Ma entrambi gli estremi tendono ad $e$
- Quindi grazie ai due carabinieri $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ tende ad $e$;

## Limiti di funzione

### Intervalli

Dati $a$ e $b$, due numeri reali, in cui $a < b$, per indicare un intervallo di estremi $a, b$ si usano le seguenti notazioni

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$ Chiuso;
- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$ Aperto;
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$ Chiuso a sinistra, aperto a destra;
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$ Aperto a sinistra, chiuso a destra;

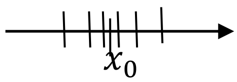
Oltre ad essere limitati, possono definire anche intervalli illimitati:

- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$ Numeri superiori da $a$, compreso $a$;
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$ Numeri superiori da $a$;
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$ Numeri inferiori da $b$, compreso $b$;
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}: x < b\}$ Numeri inferiori da $b$;
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Si definisce intorno di un punto $x_0$, un intervallo aperto contenente $x_0$, tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

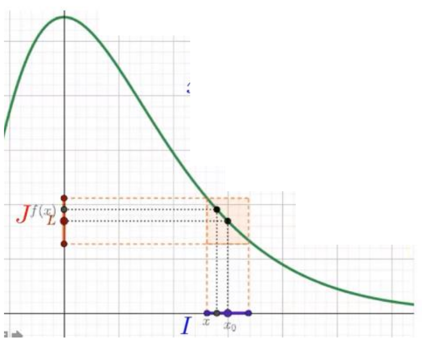
**Teorema Ponte**

Una funzione $f(x)$ ha limite $L$ per $x \to x_0$, se solo se $f(a_n) \to L$, per $n \to \infty$, per ogni successione $a_n \to x_0$




**Limite di funzione**

Scritto come $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, se solo se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0): 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Osserviamo però che non è necessario che $f$ debba essere definita in $x_0$.




Esempio: $\lim\limits_{x \to 2}(5x - 3) = 7$,

poiché $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, 2): 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |5x - 3 - 7| < \varepsilon$, svolgiamo il modulo

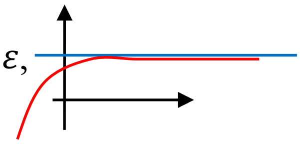
$|5x - 3 - 7| = |5x - 10| = 5|x - 2| < \varepsilon$

Se solo se $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} = \delta_3$;

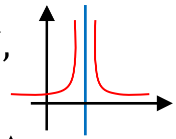
Ancora un altro esempio: $\lim\limits_{x \to 3}(x^2) = 9$, poiché $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, 3): 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |x^2 - 9| < \varepsilon$ , quindi $|x^2 - 9| = |(x - 3)(x + 3)| = |x - 3||x + 3|$ , se assumessimo che $|x - 3| < 1 \Rightarrow |x + 3| \leq 7$, dunque $7|x - 3| < \varepsilon$ non appena $|x - 3| < \varepsilon = \delta_2$. Basta scegliere un $d = \min(\delta_1, \delta_2) = \min(\frac{\varepsilon}{7}, 1)$.

Fino ad ora abbiamo visto degli scenari in cui la funzione avevano la x che tendeva verso un numero, finito, ma $x_0$ può assumere anche valore infinito, vediamole:

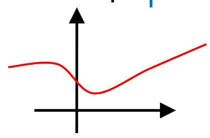
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) \Leftrightarrow L, \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists M=(\varepsilon,x_0)|x>M| \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon,$ a destra notiamo in rosso la funzione, e in blu il limite chiamato Asintoto orizzontale



- $\lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \infty, \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\delta=\delta(M,x_0): |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M,$ a destra notiamo in rosso la funzione, e in blu $x_0$ chiamato Asintoto verticale



- $\lim_{x\to+\infty} f(x) \Leftrightarrow \infty, \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists N=N(M): x>N \Rightarrow f(x)>M,$ a destra notiamo in rosso la funzione

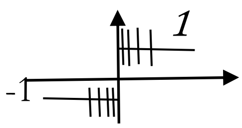


Esempi:

- $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-2x}{x^2+1}\right)=\left(\frac{x^2\left(3-\frac{2x}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right)=\frac{3x^2}{x^2}=3$, poiché $\forall\varepsilon>o\exists M=M(\varepsilon): x> M\left|\frac{3x^2-2x}{x^2+1}-3\right|$ , quindi $\left|\frac{3x^2-2x}{x^2+1}-3\right|=\left|\frac{3x^2-2x-3x^2-3}{x^2+1}\right|$, semplificando $\left|\frac{-2x-3}{x^2+1}\right|=\left|\frac{2x+3}{x^2+1}\right|, M_1=x>3\ 2x+3\ \left|\frac{3x}{x^2+1}\right|\le\left|\frac{3x}{x^2+1}\right|=\frac{3x}{x^2}=\frac{3}{x}<\varepsilon\Leftrightarrow x>\frac{3}{\varepsilon}=M_2$
- $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{0}=\infty$, cioè $\forall M>0\ \exists\delta=\delta(M,0): f(x)>M\ se\ 0<|x|< S,\ \frac{1}{x^2}>M\Rightarrow x^2>\frac{1}{M}\Rightarrow|x|<\frac{1}{\sqrt{M}}\Leftrightarrow\delta M$

Contro esempi:

- $f(x)=\begin{cases}x^2+3; x\neq1\\ 5 \qquad ; x=1\end{cases}, \lim_{x\to1}(f(x))=4\ \neq f(1)=5$
- $f(x)=x-1\ \neq g(x)=\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)$, perché $Df:\mathbb{R}$ e $Dg:\{x\epsilon\mathbb{R}|x\neq-1\}$, $\lim_{x\to-1}(g(x))=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}\ F.I.$ quindi $\lim_{x\to-1}(g(x))=\left(\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}}\right)=x-1=-1-1=-2$
- $\lim_{x\to0}\left(\frac{|x|}{x}\right)=\nexists$, in quanto $\begin{cases}1; x>0\\-1; x<0\end{cases}$




-

**Teorema ponte: esplicito**

$\lim_{x\to x_0} f(x)=L\ \Leftrightarrow\ \lim_{x_n\to\infty} f(x_n)=L, x_n\to x_0$ per $n\to\infty$

Osservazione: Un limite esiste se solo se esiste lungo ogni successione

Corollario:

Se esistono 2 successioni lungo le quali i limiti sono diversi allora il limite non esiste

Dimostrazione:

- Vogliosi dimostrare che $\lim_{x\to 0}\left(\frac{|x|}{x}\right) = \nexists$
- $\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{|\frac{1}{x}|}{\frac{1}{x}}\right)$, semplificando $= 1 \to 1$ per $n \to \infty$;
- $\lim_{x\to\infty} f\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{|-\frac{1}{x}|}{-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{|\frac{1}{x}|}{-\frac{1}{x}}\right)$ semplificando $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{-1}\right) = -1 \to -1$ per $n \to \infty$;
- Quindi lungo la successione ci sono diversi limiti quindi per il teorema ponte il limite di questa successione non esiste;

**Limite destro e sinistro**

- Limite destro di $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ se $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon, x_0): |f(x) - L|$ se $0 < x - x_0 < \delta$, quindi $x_0 < x < x_0 + \delta$
- Limite sinistro di $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ se $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon, x_0): |f(x) - L|$ se $0 > x - x_0 > -\delta$, quindi $x_0 > x > x_0 - \delta$

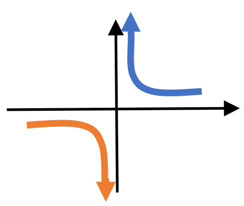
Osservazione: la notazione con la quale si indica il limite sinistro o destro è molto deviante e può confondere.

(Proposizione)

Da qui giunge una proposizione, ovvero il limite esiste se e solo se esistono uguale limite sinistro e destro, la dimostrazione:

- $(\Rightarrow)$deriva dalla definizione di limite stesso, sia se $\begin{cases} x > x_0 \\ x < x_0 \end{cases}$
- $(\Leftarrow)$ $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$, in quanto
  a. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta: |f(x) - L| < \delta\ \forall x_0 < x < x_0 + \delta$ da destra
  b. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta: |f(x) - L| < \delta\ \forall x_0 > x > x_0 - \delta$ da sinistra
  c. Uniti $0 < |x - x_0| < \delta$

Esempio: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \nexists$ , dimostrazione:



- $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$;
- $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$;
- Quindi da proposizione questo limite non esiste, in quanto si comporta in modo distinto, come facile vedere da grafico;

Esercizio calcolo limite dx e sx:

$$\lim_{x\to 2^{\pm}}\left(\frac{x+1}{x^2-4}\right):$$

- $\lim_{x\to 2^{+}}\left(\frac{x+1}{x^2-4}\right)=\left(\frac{(2^+)+1}{(2^+)^2-4}\right)=\left(\frac{3}{4^+-4}\right)=\frac{3}{0^+}=+\infty;$
- $\lim_{x\to 2^{-}}\left(\frac{x+1}{x^2-4}\right)=\left(\frac{(2^-)+1}{(2^-)^2-4}\right)=\left(\frac{3}{4^--4}\right)=\frac{3}{0^-}=-\infty;$

**Continuità**

$f$ si dice continuità in $x_0$ appartiene al dominio di $f$ , se solo se $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. [Essenziale valutare il dominio]

Esempio:

- $f(x)\begin{cases} x^2+3; x\neq 1 \\ 5 \quad\quad ; x=1\end{cases} \lim_{x\to 0^{\pm}} f(x)=0$, però $f(0)=1$, non è continua;
- $\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x^2+3)=0$, però $f(0)=0$, è continua;

Osservazione: grazie alla definizione di limite abbiamo che $f(x)$ è continua se $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=(\varepsilon,\varepsilon_0):|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ se|x-x_0|<\delta$. In soldoni mi dice che a piccole variazioni di $x$ devono corrispondere piccole variazioni della $y$.

**Discontinuità**

Tipi:

1) Eliminabile $x\,\epsilon\, Dominio\, f$ ma il $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$, quindi è possibile estendere la continuità $f(x)\coloneqq 2;$
2) Limite sinistro diverso dal limite destro, detta discontinuità di salto;
3) Essenziale: uno del due limite destro o sinistro non esiste oppure $\pm\infty$;

## Teoremi sulle funzioni continue

### Teorema della permanenza del segno

Sia $f(x)$ continua in $x_0$, e supponiamo che $f(x_0)>0$. Allora esiste un numero $\delta>0$: $f(x)>0$ per ogni $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. Dimostrazione:

- Data $f(x)$ continua in $x_0$, allora $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,
- in un intervallo $|x-x_0|<\delta$
- $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, riscrivibile come $f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$

- Quindi dato $\varepsilon > 0$ per ipotesi, posso scegliere $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, allora:
- $f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2}$, dato che a sinistra la somma di un positivo e della sua metà negativa, fa l'altra metà positiva viene
- $+\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2}$, dunque $f(x)$ rimane positivo, come da tesi.

Osservazioni:

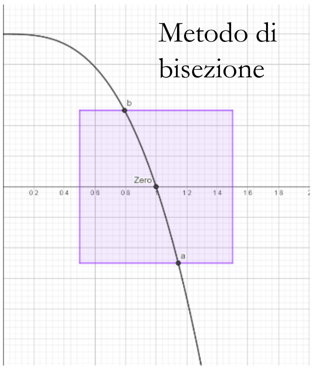
- Questo ragionamento vale anche se è negativo, quindi $f(x) < 0$;
- Non vale invece quando si valutano $f(x)$ discontinue;
- Non vale se $f(x_0) = 0$, in quanto possono succedere due cose diverse, ovvero non cambia segno, come per una parabola con delta uguale a zero, oppure cambia il segno come una funzione esponenziale con esponente dispari.

Teorema dell'esistenza degli zeri

Sia $f(x_0) = 0$ si dice che $x_0$ è uno zero (radice) per $f(x)$

Metodo di bisezione

Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$. E supponiamo $f(a) \times f(b) < 0$,cioè sono discordi (segno opposto), allora esiste $x_0 \in (a, b)$, tale che $f(x_0) = 0$




Dimostrazione:

- Supponiamo che $f(a) < 0$ e che $f(b) > 0$ e consideriamo $c \coloneqq \frac{a+b}{2}$, casi:
  a. $f(c) = 0$, abbiamo finito, la nostra $x_0 = c$;
  b. $f(c) > 0$, scelgo un nuovo intervallo $(a, c)$, poiché se $f(c)$ è maggiore di 0, vuol dire che "probabilmente" tutti i numeri precedenti siano positivi;
  c. $f(c) < 0$, scelgo un nuovo intervallo $(c, b)$, poiché se $f(c)$ è minore di 0, vuol dire che "probabilmente" tutti i numeri precedenti siano negativi;

Ciò si itera finché non si trova il primo caso, ovvero che $f(c) = 0$, trovando lo zero. Ad esempio supponiamo che $f(c) > 0$, ripetiamo la stessa operazione nell'intervallo $(a, c)$, considerando $c_1 = \frac{a+c}{2}$ e ripete lo stesso ragionamento …

Reiterando queste operazioni ottengo tre successioni $a_n, c_n, b_n$, con queste proprietà:

1) $a_n$ è non decrescente;
2) $b_n$ è non crescente;
3) $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0, \forall n \geq 1$
4) $a_n < c_n < b_n$ con $|b_n - a_n| = |\frac{b-a}{2^n}|$;

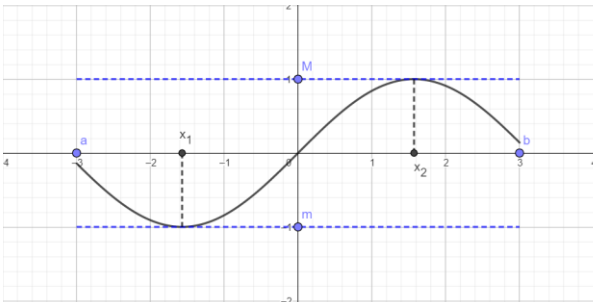
Dalla proprietà uno e quattro e dalla continuità segue la tesi: data $a_n$ crescente allora $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$ e $b_n$ è decrescente allora $\lim_{n\to\infty} b_n = b_\infty$. Notiamo che: $|b_\infty - a_\infty| = \lim_{n\to\infty} b_\infty - a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0 \Rightarrow b_\infty = a_n$. In particolare, $a_n < c_n < b_n$ è $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a_\infty$, per i due carabinieri.

Per semplicità supponiamo che $x_0 \coloneqq a_n$,

- dato che $f(a_n) < 0 \Rightarrow f(a_\infty) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \to \lim_{n\to\infty} f(a_n)$, la quale $a_n$ tende a zero allora $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ dalla continuità di $f$ e dalla permanenza del segno.
- Allo stesso modo $f(b_n) < 0 \Rightarrow f(b_\infty) = f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \to \lim_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0$,
- Quindi $0 \leq f(x_0) \leq 0$, quindi per i due carabinieri $f(x_0) = 0$;

## Teorema di Weierstrass

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, detto anche compatto. Allora $f$ ammette massimi e minimi, cioè $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ tale che $\forall x \in [a, b]\ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.




Osservazione: il teorema è "scharp(appuntito)", ovvero ottimale (a filo), quindi tutte le ipotesi sono necessarie. Poiché:

1) Non è possibile rimuovere la continuità
   a. Ad esempio $f(x)\begin{cases} x;\ x < x < 1 \\ \frac{1}{2};\ x = 0 \vee x = 1 \end{cases}$ è definita in $[0,1]$ è continua in $[0,1]$, ma non ammette ne' massimi ne' minimi: INF = 0
2) Non è possibile inoltre rimuovere l'ipotesi della funzione compatta
   a. Ad esempio $\frac{1}{x}$ per $x \in (0, +\infty)$, (cioè è continua ma non limitata):
      i. SUP = $+\infty$ non è assunto;
      ii. INF = 0 non è assunto
3) La funzione di Dirichlet

a. $f(x)\begin{cases}1;\ x\in\mathbb{Q}\\0;x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ essa è discontinua in tutti i punti, però ammette infiniti minimi dove vale zero ed infiniti massimi dove vale uno

**Teoremi valori intermedi**

Sia $f$ continua in $[a,b]$, allora $f$ assume tutti i valori compresi tra il suo massimo ed il suo minimo. Dimostrazione:

- Dal teorema di Weiestrass esistono $x_1, x_2 \in [a,b]$, ovvero
- $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, cioè $f(x_1)$ è il minimo della funzione e invece $f(x_2)$ è il massimo della funzione.
- Quindi supponiamo che $f(x_1) \leq f(x_2)$
- Fissiamo $y_0$: $f(x_1) < y_0 < f(x_2)$, quindi fisso un qualsiasi valore tra il massimo e il minimo
- con lo scopo di dimostrare che $\exists x_0$: $f(x_0) = y_0$
- Indi per cui consideriamo $g(x) \coloneqq y_0 - f(x)$, la quale è continua, poiché la differenza tra due funzioni continue è essa stessa continua.
- Quindi $g(x_1) = y_0 - f(x_1) = y_0 - MIN > 0$, e
- $g(x_2) = y_0 - f(x_2) = y_0 - MAX < 0$
- Quindi $g(x)$ assume valore discordi in $g(x_1)$ e $g(x_2)$
- E dal teorema degli zeri esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che $g(x_0) = y_0 - f(x_0) = 0$, cioè $f(x_0) = y_0$, $\exists y_0 \in (x_1, x_2)$.

**Limiti notevoli**

(Proposizione) La composizione di funzioni continue e anch'essa continua se $f$ è continua in $x_0$ e $g$ è continua in $f(x_0) = y_0$, allora $h(x) = g(f(x))$ è continua in $x_0$.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$;
    a. Dimostrazione:
        i. Noi sappiamo che $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$,
        ii. Ma se elevo tutti i membri per uno negativo, il segno cambia, ribaltandosi
        iii. $\frac{1}{\sin(x)} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{\tan(x)}$, moltiplichiamo ogni membro per $\sin(x)$
        iv. $\frac{\sin(x)}{\sin(x)} \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \frac{\sin(x)}{\tan(x)}$, seno fratto seno si semplifica divenendo 1
        v. $1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \frac{\sin(x)}{\tan(x)}$, inoltre sappiamo che la tangente e coseno fratto seno, quindi riscrivibile come
        vi. $1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\sin(x)$, possibile semplificare seno per uno fratto seno

vii. $1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x)$, ora passiamo ai limiti
viii. $\lim_{x \to 0} 1 \geq \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \geq \lim_{x \to 0} \cos(x)$, il limite di una costante è la costante stessa
ix. $1 \geq \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \geq \lim_{x \to 0} \cos(x)$, invece il coseno a tendere a zero risulta uno
x. $1 \geq \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \geq 1$, quindi per i due carabinieri $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
   a. Dimostrazione:
      i. $\frac{1-\cos x}{x^2}$ possiamo moltiplicarlo per uno, il risultato non cambia
      ii. Ma l'uno lo scriviamo come qualcosa diviso sé stesso, quindi
      iii. $\frac{1-\cos x}{x^2} \frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)}$, svolgendo le moltiplicazioni
      iv. $\frac{1-\cos^2 x}{x^2 (1+\cos x)}$, noi sappiamo che per i principi della trigonometria uno meno il quadrato del seno fa il coseno al quadrato, viceversa uno meno il quadrato del coseno fa il seno al quadrato, indi per cui
      v. $\frac{\sin^2 x}{x^2 (1+\cos x)}$, riscrivibile come $\frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{1}{(1-\cos x)}$, ora se passiamo all'limite
      vi. $\lim_{x \to 0} (\frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{1}{(1+\cos x)})$, il primo è semplicemente il limite notevole precedentemente studiato alla seconda, ma facendo uno, uno alla uno fa uno,
      vii. Invece il coseno che tende a zero fa uno, più uno, fa due, quindi un'mezzo, cioè $1^2 \frac{1}{1+1} = 1 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
   a. Dimostrazione:
      i. Ricordando che $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$
      ii. Cerchiamo di ricondurli infatti si può riscrivere $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log(1 + x)$, per le proprietà della moltiplicazione
      iii. Riscrivibile come $\lim_{x \to 0} \log(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ per le proprietà del logaritmo
      iv. Dato che la x tende a zero diviene $\lim_{x \to 0} \log(e) = \lim_{x \to 0} \ln(e) = 1$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
   a. Dimostrazione
      i. Allora sostituiamo a $e^x$ il termine $t$

ii. E ad $\mathrm{x}$, il logaritmo naturale $\mathrm{e}^{x}$, che fa x stessa $\mathrm{x} = \ln(\mathrm{e}^{x}) = \ln(t)$;
iii. Risultando $\frac{t-1}{\ln(t)}$, ora sostituisco $z = t - 1$, quindi
iv. $\frac{z}{\ln(t)}$ ma $t$ non è altro che $z + 1$, poiché $z = t - 1$, quindi $t = z - 1 + 1$, cioè
v. $\frac{z}{\ln(z+1)}$, in questo modo abbiamo il limite notevole precedente elevato alla meno uno, ma dato che il risultato è uno, uno alla meno uno fa sempre uno, quindi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{z}{\ln(z+1)} = 1$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{a}-1}{x} = a$
   a. Dimostrazione:
      i. $\frac{(1+x)^{a}-1}{x}$ possiamo moltiplicarlo per uno, il risultato non cambia
      ii. Ma l'uno lo scriviamo come qualcosa diviso sé stesso, quindi
      iii. $\frac{(1+x)^{a}-1}{x}\frac{\log(1+x)}{\log(1+x)}$ che per le per le proprietà delle moltiplicazioni sappiamo che è uguale a $\frac{(1+x)^{a}-1}{\log(1+x)}\frac{\log(1+x)}{x}$
      iv. Per i limiti notevoli sappiamo che quello a destra tende ad 1 per x che tende a 0, quindi $\frac{(1+x)^{a}-1}{\log(1+x)}1 = \frac{(1+x)^{a}-1}{\log(1+x)}$
      v. Sostituisco a $\log(1+x)$ la variabile $\mathrm{t}$, quindi $\frac{(1+x)^{a}-1}{\mathrm{t}}$
      vi. È chiaro che $\mathrm{t}$ tende a zero se x tende a zero e che $(1+x)^{a} = e^{a\times t}$
      vii. Quindi $\frac{(1+x)^{a}-1}{\mathrm{t}} = \frac{e^{a\times t}-1}{\mathrm{t}} = a\frac{e^{a\times t}-1}{a\times t} = a$;
   b. Vediamo un esempio $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{(1+x)}-1}{x}$
      i. $\sqrt{(1+x)} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = e^{y} \to y = \log\left((1+x)^{\frac{1}{2}}\right) =$
      ii. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{y}-1}{e^{2y}-1}\frac{2y}{2y} = \frac{1}{2}$

## Derivate

### Derivata Prima

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo e sia $x_0$ un punto dell'intervallo, si definisce come derivata prima di $f$ nel punto $x_0$ il limite che tende a zero del rapporto incrementale $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Facciamo una piccola digressione per capire cosa sia il rapporto incrementale, esso non è altro che il tasso di crescita medio, in fisica sarebbe la velocità. Quindi si prendono due punti definiti nell'intervallo, e si traccia la retta secante tra l'immagine dei due punti in $f$.

La derivata prima non è altro, il far collassare il punto $x_0$ nel punto $x$, in modo tale che quel doppio contatto di due punti collassi in uno singolo punto, generando una retta tangente, il quale coefficiente angolare è proprio la nostra derivata prima.

Se provassimo ora a calcolare, senza alcuna manipolazione, la derivata ci verrà una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, la quale è fondamentale che esca, ciò vuol dire che la funzione è derivabile. Dunque se apportiamo manipolazioni anche con limiti notevoli, riusciremo a calcolare la nostra derivata nel nostro punto $x_0$, che attenzione deve essere uguale a qualsiasi $x_0$ io prenda dal dominio della funzione.

Esempio: Calcolare $f'(x)$, cioè la derivata prima, di $f(x) = 3x - 2$ nel punto $x_0 = 5$

$f'(5) = \lim\limits_{x \to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{3x-2-(13)}{x-5} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{3x-15}{x-5}$, ora se sostituissimo normalmente alla $x$ il valore $5$, ottoneremo la forma indeterminata, quindi lo manipoliamo affinché si eviti ciò, quindi $\lim\limits_{x \to 5} \frac{3x-15}{x-5} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{3\cancel{(x-5)}}{\cancel{x-5}} = 3$

Passiamo ora ad un'ulteriore osservazione, ovvero il rapporto incrementale si può scrivere anche in un altro modo:

Se $x \to x_0 \Rightarrow h = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + h$, ovvero

$f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

### Derivabilità

(Proposizione) Ogni funzione derivabile è continua, dimostrazione:

- Siccome $f'(x)$ è uguale ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, la cosa importante che sia tale è che il numeratore tendi a $0$
- Per ipotesi esiste finito il limite del rapporto incrementale

- $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)} (x - x_0) =$
- $= \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$, poiché
- Il limite di sinistra è $f'(x)$ e invece il limite a destra tende a 0
- Cioè f è continua

Il viceversa NON VALE.

Aneddoto: Teorema di Ampare, Ampere sostenne che ogni funzione continua sia derivabile, ciò è falso. Per il controesempio $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$:

- $f'_{\pm}(x) = \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{\cancel{|h|}}{\cancel{h}} = \pm 1$

Cioè $|x|$ è continua ma non derivabile.

**Differenzialità** *non la chiede*

$f$ è differenziabile (in $x_0$) $\Leftrightarrow$ "Esiste un'applicazione lineare che l'approssima bene", ovvero $f(x) \cong f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ → equazione della retta tagente.

(Lemma) $f$ è derivabile se solo se è differenziabile, dimostrazione:

- $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)} \Leftrightarrow$
- $f'(x_0) \cong \frac{(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)}$ per $x \sim x_0$
- $f'(x_0)(x - x_0) \cong f(x) - f(x_0)$, ovvero
- $f(x) \cong f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

**Regole di derivabilità**

Supponendo che $f$ e $g$ siano derivabili in $x_0$:

(1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
(2) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{(f'(x)g(x)-f(x)g'(x))}{g^2(x)}$ → Regola del quoziente
(3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ → Regola di Leibniz
(4) $(kf(x))' = kf'(x)$

Dimostrazione:

(1) $\lim_{x \to x_0} \frac{((f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0)))}{(x-x_0)} =$
   a. $\lim_{x \to x_0} \frac{(f(x)+g(x))}{(x-x_0)} + \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x_0)+g(x_0))}{(x-x_0)}$

b. $f'^{(x)} + g'^{(x)}$

(2) $\lim_{x \to x_0} \frac{\left((f(x)g(x)) - (f(x_0)g(x_0))\right)}{(x-x_0)} =$

a. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{(x-x_0)} =$

b. $\lim_{x \to x_0} f(x) \frac{(g(x)-g(x_0))}{(x-x_0)} + \lim_{x \to x_0} g(x) \frac{(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)}$

c. È continua, dato che è derivabile

d. In cui il primo è $f(x)g'(x)$

e. Il secondo invece è $g(x)f'(x)$

**Derivate delle funzioni elementari**

- $f(x) = k \to f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n \to f'(x) = nx^{n-1}$

a. Dimostrazione: $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - (x^n)}{h} =$

b. $\lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\cancel{h} \ldots - x^n}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} \cancel{x^n} + nx^{n-1} \ldots - \cancel{x^n}$

c. $= nx^{n-1}$

- $f(x) = \sqrt{x} \to \ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

a. $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - (\sqrt{x})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x}}{h}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right) =$

b. $= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{h}} \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right)}{\frac{h}{x}} \frac{\cancel{h}}{\cancel{\sqrt{x}}} =$ per il limite notevole è $\frac{1}{2}$

c. Quindi $= \frac{1}{2\sqrt{x}}$

**Esponenziali**

- $f(x) = e^x \to f'(x) = \ e^x$

a. $\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \frac{(e^h - 1)}{h}$ per il limite notevole tende a 1

b. $\lim_{h \to 0} \ 1e^x = \ e^x$

- $f(x) = a^x \to f'(x) = a^x \log(a)$

a. $\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \ a^x \lim_{h \to 0} \frac{(a^h - 1)}{h}$, ma noi possiamo scrivere $a^x = e^{x \ln(a)}$

b. Quindi $a^x \lim_{h \to 0} \frac{(e^{h \ln(a)} - 1)}{h} = \ a^x \lim_{h \to 0} \frac{(e^{h \ln(a)} - 1)}{h \ln(a)} \ln(a)$

c. Per il limite notevole tende a 1, quindi è uguale ad $a^x \log(a)$

**Logaritmi**

$f(x) = \log(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{x}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)\frac{1}{x} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$, per il limite notevole tende ad $e$, quindi $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{x}\log(\mathrm{e}) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{x}1 = \frac{1}{\mathrm{x}}$

**Trigonometriche**

- $f(x) = \sin(\mathrm{x}) \rightarrow f'(x) = \cos(x)$
  a. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} =$ Sapendo che $\sin(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$
  b. $= \lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(\mathrm{x+h})-\sin(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)}{h} =$
  c. $\sin(x)\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right) + \cos(x)\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{\sin(h)}{h}\right) = \cos(x)$
- $f(x) = \cos(\mathrm{x}) \rightarrow f'(x) = -\sin(x)$
  a. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} =$ Sapendo che $\cos(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \cos(x)\cos(y) - \sin(y)\sin(x)$
  b. $= \lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(\mathrm{x+h})-\cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(h)\sin(x)-\cos(x)}{h} =$
  c. $\cos(x)\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right) - \sin(x)\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{\sin(h)}{h}\right) =$
  d. $\cos(\mathrm{x})\,0 - \sin(x)1 = -\sin(x)$
- $f(x) = \tan(\mathrm{x}) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
  a. $\tan(\mathrm{x}) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, quindi per la regola del quoziente
  b. $\tan'(\mathrm{x}) = \frac{\sin'(x)\cos(x)-\cos'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$,
  c. Sapendo che $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, allora la derivata $\frac{1}{\cos^2(x)}$

**Funzione iperboliche**

- $\cosh^2(\mathrm{x}) - \sinh^2(\mathrm{x}) = 1$
- $f(x) = \sinh(\mathrm{x}) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \rightarrow f'(x) = \cosh(x)$
- $f(x) = \cosh(\mathrm{x}) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \rightarrow f'(x) = \sinh(x)$

**Funzione Composta**
Quando si ha una situazione del genere $g(f(x)): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ti attua il seguente teorema
(Teorema) Chain Rule
Se $f$ è una funzione derivabile in $x_0$, e sia $g$ derivabile in $f(x_0)$, allora la funzione composta di $g(f(x))$ è derivabile in $x_0$ e vale: $\left(g(f(x))\right)' = g'(x) \times f'(x)$.
Dimostrazione:

- Supponiamo $f(x+h) \neq f(x)\ \forall h \neq 0$, ovvero che $f$ non è costante, quindi monotona
- Allora $\left(g(f(x))\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h} =$
- $\lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h} \frac{f(x+h)-f(x)}{f(x+h)-f(x)}$, ovvero moltiplichiamo per un numero diviso sé stesso, ovvero 1, quindi de iure non abbiamo manipolato il limite, ma ora
- $\lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- Per le regole dei limiti è stato possibile scindere questi due limiti per rendere tutto più semplice,
    a. per comodità chiameremo il primo $A$, cioè questo $\lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}$,
    b. invece chiameremo $B$ il secondo, ovvero $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- Iniziamo a svolgere $A$, e osserviamo che $f$ e $g$ essendo derivabili, sono continue,
    a. quindi per $h \to 0$, si ha che $f(x+h) \to f(x)$,
    b. per lo stesso principio $g(f(x+h)) \to g(f(x))$,
    c. Per facilità di comprensione, facciamo un cambio di variabile, diciamo che $y_0 = f(x)$ e $y = f(x+h)$, quindi sappiamo che $y \to y_0$ se $h \to 0$
    d. Quindi $\lim_{h\to 0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = g'(y) = g'(f(x))$[Rapporto incrementale]
- Per quanto riguarda $B$, la questione è più semplice, poiché
    a. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ non è altro che, dire $f'(x)$

Esempi:

- $f(x) = (x^3-2)^2 \to \left(f(x)\right)^2 \to g(f(x))$
    a. $f'(x) = 2(x^3-2)^{2-1}(3x^{3-1}-0) = (2x^3-4)(3x^2) = 6x^5 - 12\ x^2$
- $f(x) = \sin^4(x) \to \left(f(x)\right)^4 \to g(f(x))$
    a. $f'(x) = 4\sin^3(x)\cos(x)$
- $f(x) = \sin(x^4) \to \sin(f(x)) \to g(f(x))$
    a. $f'(x) = \cos(x^4)4x^3$
- $f(x) = e^{\tan(x)} \to f(x)^{\tan(x)} \to g(f(x))$

  a. $f'(x) = e^{\tan(x)} \frac{1}{\cos^2(x)}$
- $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$
  a. $f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^{-3}}$ Questa non è composta
- $f(x) = x^x$ ATTENZIONE QUESTA <u>NON</u> È COMPOSTA
  a. Per risolverla bisogna portarla allo stato di composta
  b. $f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln(x)} = (e^{\ln(x)})^x$ ora è composta
  c. Quindi $(x^x)' = ((e^{\ln(x)})^x)' = e^{x\ln(x)}(x\ln(x))'$
  d. $= e^{x\ln(x)}\left(x'\ln(x) + x\left(\ln(x)\right)'\right) = e^{x\ln(x)}\left(1\ln(x) + x\frac{1}{x}\right)$
  e. $= e^{x\ln(x)}(\ln(x) + \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}) = e^{x\ln(x)}(\ln(x) + 1) = x^x(\ln(x) + 1)$

**Derivate funzione inversa**

Sia $f^{-1}(x)$ la funzione inversa di $f(x)$, se sussiste:

- $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$
- $f(f^{-1}(x)) = x$

Quindi sia $f(x)$invertibile, allora se è anche derivabile allora sicuramente anche $f^{-1}(x)$ è derivabile $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. Dimostrazione:

- Supponiamo $f^{-1}\left(f(x)\right) = x \ \forall x \in Dom f$
- $\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)' = (f^{-1})'\left(f(x)\right) \times f'(x) = (x)' = 1$
- Cioè abbiamo $(f^{-1})'\left(f(x)\right) = \frac{1}{f'(x)}$
- Ovvero $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

**Derivate logaritmiche**

- $f(x) = \log_a(x) = \frac{1}{x}\log_a(e)$
- $f(x) = \ln(x) = \log(x) \to f'(x) = \frac{1}{x}$

**Derivate arcotangente**

Ricordando che

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)} \to \cos^2(x) = \frac{1}{\tan^2(x)+1}$

Quindi la derivata dell'arcotangente è:

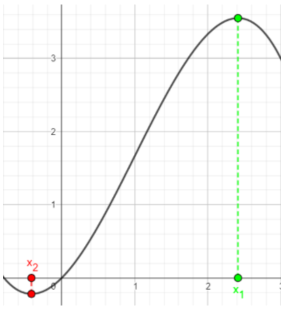
- $(\arctan(x))'$ per la proprietà della derivata di un'inversa, è uguale
- $\frac{1}{\tan'(\arctan(x))}$, invece per le proprietà scritte sopra
- $\frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} = 1 \times \frac{\cos^2(\arctan(x))}{1} = \cos^2(\arctan(x))$, per le proprietà frazioni
- Per le proprietà scritte sopra $\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{\tan^2(\arctan(x))+1}$
- $\frac{1}{(\tan(\arctan(x)))^2+1}$, ma $f(f^{-1}(x)) = x$
- Quindi è uguale ad $1 + x^2$

**Tabelle riassuntive**

| derivate delle funzioni elementari | |
|---|---|
| $D\,k = 0$ dove $k$ è una costante | $D\,senx = cosx$ |
| $D\,x^n = n\,x^{n-1}$ | $D\,cosx = -\,senx$ |
| $D\,\frac{1}{x^n} = Dx^{-n} = -n\,x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$ | $D\,tgx = \frac{1}{cos^2x} = 1 + tg^2x$ |
| $D\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ | $D\,cotgx = -\frac{1}{sen^2x} = -1 - cotg^2x$ |
| $D\,\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $D\,arcsenx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $D\,log_a x = \frac{1}{x} log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{lna}$ | $D\,arccosx = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $D\ln x = \frac{1}{x}$ | $D\,arctgx = \frac{1}{1+x^2}$ |
| $D\,a^x = a^x\,ln\,a = a^x \cdot \frac{1}{log_a e}$ | $D\,arccotgx = -\frac{1}{1+x^2}$ |
| $D\,e^x = e^x$ | $D\,\lvert x \rvert = \frac{x}{\lvert x \rvert} = \frac{\lvert x \rvert}{x}$ |

| regole di derivazione | |
|---|---|
| $D\,k \cdot f(x) = k \cdot f'(x)$ | prodotto di una **costante** k per una funzione |
| $D\,f(x) \pm g(x) \pm h(x) = f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x)$ | **somma** di due o più funzioni |
| $D\,f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ | **prodotto** di due funzioni |
| $D\,f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$ | **prodotto** di tre funzioni |
| $D\,\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ | **rapporto** di due funzioni |
| $Df[g(x)] = f'[g(x)] \cdot g'(x)$ | funzione **composta** |
| $Df(x)^{g(x)} = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot ln[f(x)] + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right]$ | funzione **elevata** ad una funzione |

**Massimi e minimi relativi**




Data $f(x)$, definita in un intervallo $[a,b]$, Diciamo che:

- $x_1 \in [a,b]$, è un massimo locale se
    a. $\exists\delta > 0: f(x_1) \geq f(x) \forall x \in (x_1 - \delta, x_2 + \delta)$
- $x_2 \in [a,b]$, è un minimo locale se
    a. $\exists\delta > 0: f(x_1) \leq f(x) \forall x \in (x_1 - \delta, x_2 + \delta)$

**Teorema di Fermat**

Sia $f$ derivabile e sia $x_0$ un estremo locale, allora la derivata della funzione è uguale a zero, cioè la tangente del punto $x_0$ sulla funzione è parallela all'asse delle ascisse, matematicamente parlando $f'(x) = 0$. Dimostrazione:

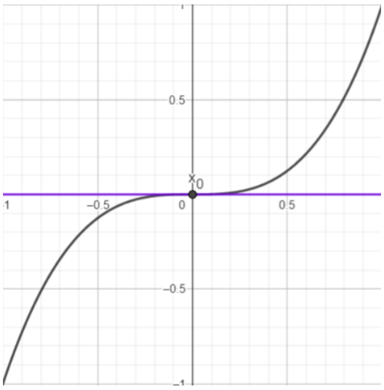
a. Supponendo che $x_0$ è un minimo locale $\exists\delta > 0: f(x_1) \leq f(x) \forall x \in (x_1 - \delta, x_2 + \delta)$
b. Allora abbiamo che
    i. Innanzitutto dato che $x_0$è un minimo, stiamo dicendo che $f(x) \geq f(x_0)$, quindi spostando il termine destro a sinistra $f(x) - f(x_0) \geq 0$, per questo motivo i numeratori successivi tenderanno ad un numero $\geq 0$;
    ii. $f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ , allora dato $x \to x_0^+$ci dice che $x > x_0$, quindi: $x - x_0$ è $\geq 0$, quindi dalla permanenza del segno il limite sarà $\geq 0$
    iii. $f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ , allora dato $x \to x_0^-$ci dice che $x < x_0$, quindi: $x - x_0$ è $\leq 0$, quindi dalla permanenza del segno il limite sarà $\leq 0$;
c. Sapendo che $f$è derivabile dobbiamo dire che $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, ma $f'_+(x_0) \geq 0$, mentre $f'_-(x_0) \leq 0$, quindi necessariamente $f'(x_0) = 0$

**Punti critici**

Si definisce $x_0$ un punto critico per $f(x)$ se $f'$ non esiste oppure $f'(x_0) = 0$

Osservazione: il teorema di Fermat dice che un estremo relativo è anche un punto critico $(f'(x_0) = 0)$. Ma il viceversa NON vale, contro esempio:

Dato $f(x) = x^3$, come si può vedere dal grafico:

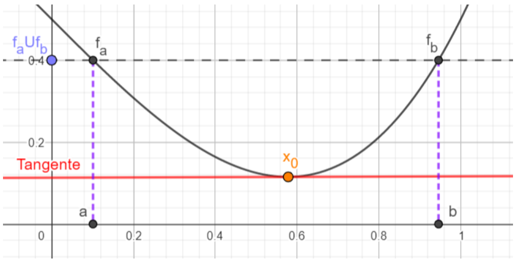



Prossimo dire certamente che $x_0 \to 0$ è un punto critico, poiché $f'(0) = 0$, però è flesso a tangente orizzontale:

- $\forall x \geq 0\ f(x) \geq f(0) = 0$
- $\forall x \leq 0\ f(x) \leq f(0) = 0$

Ciò ci dice che non è né un minimo né un massimo

**Teorema di Rolle**

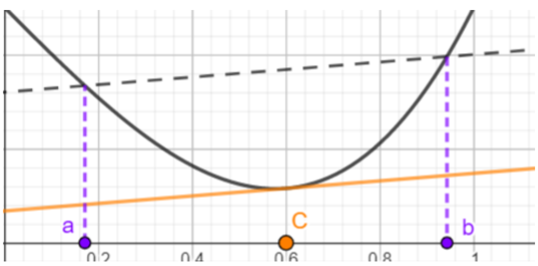



Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$ e sia derivabile nell'intervallo $(a, b)$. Supponendo che $f(a) = f(b)$, allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione:

- $f$ è continua in $[a, b]$, dal teorema di Weierstrass abbiamo che $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ tale che $\forall x \in [a, b]\ f(x_1) \leq\ f(x) \leq f(x_2)$. ($x_1$ minimo assoluto) ( $x_2$ massimo assoluto). Ora possiamo scindere due casi distinti:
    a. Caso 1: $x_1$ e $x_2$ sono gli estremi, ad esempio $x_1 = a$ e $x_2 = b$
        i. Per ipotesi $f(a) = f(x_1) \leq f(x) \geq f(x_2) = f(b)$,
        ii. Però $f(a) = f(b) \Rightarrow f(x) \equiv$(sempre equivalente) $f(a)$ è costante
        iii. Ma allora $f'(x) = 0$,quindi basta scegliere $c\ \in (a, b)$ qualsiasi
    b. Caso 2: Almeno uno tra $x_1$ o $x_2$ è $\neq a, b$,
        i. ma allora $x_1$ o $x_2 \in (a, b)$
        ii. Dal teorema di Fermat otteniamo che $f'(x_1)$ oppure $f'(x_2)$ sia uguale a $0$, basta scegliere $c =$ a $x_1$ o $x_2$.

**Teorema di Lagrange**




Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$ e derivabile in $(a, b)$ allora esiste $c \in (a, b)$: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Osserviamo: la retta tangente in $c$ è perpendicolare alla retta secante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, dimostrazione:

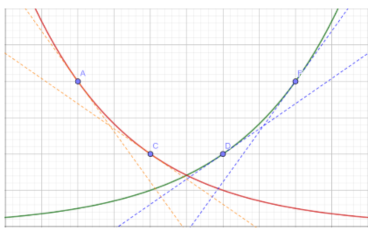
- Consideriamo $g(x) := f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)\right]$

- Osserviamo: che $g(x)$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in $(a,b)$, perché è una differenza tra funzioni continue e derivabili
    a. $g(a)=f(a)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)\right]=$
        i. $f(a)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}0\right]= f(a)-[f(a)+0]$
        ii. $= f(a)-f(a)=0$
    b. $g(b)=f(b)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(a-b)}\right]=$
        i. $f(b)-[\cancel{f(a)}+f(b)-\cancel{f(a)}]=$
        ii. $f(b)-[+f(b)]=f(b)-f(b)=0$
    c. Dal teorema di Rollè si ottiene che $\exists\ c\in(a,b)$ tale che $g'(c)=0$
    d. $g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow 0=g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
    e. Cioè $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Commenti a Lagrange

(1) Si può anche dedurre Rolle da Lagrange: se per ipotesi aggiuntiva $f(a)=f(b)$ allora $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$
(2) Lagrange è ottimale
    a. Non si può rimuovere l'ipotesi di essere continua in $[a,b]$, ad esempio richiedere solo continua in $(a,b)$
        i. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}; se\ x=0\ \vee x=1\\ x; se\ 0<x<1\end{cases}$
        ii. continua su $(0,1)$, derivabile su $(0,1)$,
        iii. $f(0)=f(1)=\frac{1}{2}$, ma $\forall x\in(0,1)\ f'(x)=1$, non $0$ come vorrebbe il teorema
    b. Non si può rimuovere la derivabilità
        i. Poiché data $f(x)=|x|, -1\le x\le 1$
        ii. Continua su $[-1,1]$ e derivabile $\forall x\ \neq 0$
        iii. Inoltre $f(1)=f(-1)=1$, però $\forall x\neq 0\ f'(x)\neq 0$, non $0$ come vorrebbe il teorema
    c. Nel teorema di Rolle è necessario che $f(a)=f(b)$, infatti $f(x)=x$ su $[0,1]$ verifica tutto tranne $f(0)=f(1)$, ma $\forall x\in(0,1)\ f'(x)\neq 0$

**Monotonia e derivate (criteri di monotonia)**



Sia $f$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile $(a,b)$, abbiamo che:

(1) $f'(x)\ge 0$ se solo se $f$ è crescente in $[a,b]$;
(2) $f'(x)\le 0$ se solo se $f$ è decrescente in $[a,b]$;

Dimostrazione: per dimostrare (1), verifichiamo la doppia implicazione, ovvero il se solo se, dividendo prima in un'implicazione poi nell'altra:

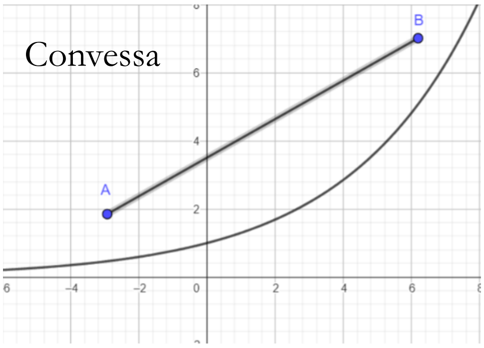
(⇒) Prima implicazione

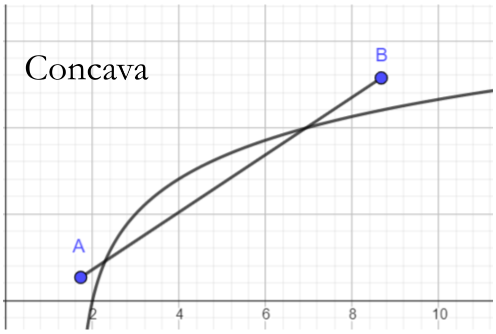
- Dal teorema di Lagrange $\forall x_1 < x_2 \in [a, b]$
- ottengo $c \in (x_1, x_2)$:
- $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x)$,
- in cui $f'(c) \geq 0$ e $(x_2 - x) > 0 \rightarrow f'(c)(x_2 - x) \geq 0$
- Ciò implica $f(x_2) \geq f(x_1)$, cioè $f$ è crescente

(⇐) Seconda implicazione

- Se $h > 0$ dalla crescenza di $f(x)$, ottengo che
- $f(x+h) \geq f(x)$ cioè
- $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$, allora
- $f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ dalla permanenza del segno
- Altrimenti se invece $h < 0 \rightarrow f(x+h) \leq f(x) \rightarrow OK$

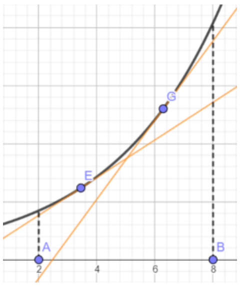
**Convessità e concavità**




**Funzione Convessa**

$f$ è convessa in $(a, b)$, se l'insieme di sopralivello $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ è convesso

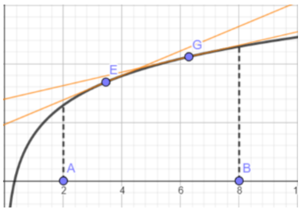


Data un $f$ derivabile, se il grafico di $f$ giace al di sopra della retta tangente, cioè $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ \forall x, x_0 \in [a, b]$, essa si definisce convessa.

Osservazione: questa definizione va bene se è derivabile, si necessita che $f \in C^1$, ovvero che sia $f$ che $f'$ siano continue.

*Se* $f$ *non è* $C^1$ *? Basta che* $f$ *sia sempre sotto la retta secante:* $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)\ \forall x, y \in (a, b)\ \forall t \in [0,1]$ *non lo chiede*

**Funzione Concava**




Data un $f$ derivabile, se il grafico di $f$ giace al di sotto della retta tangente, cioè $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ \forall x, x_0 \in [a, b]$, essa si definisce concava.

Oss: vale la diseguaglianza opposta rispetto alla retta secante

**Derivate successive**

Si chiama "derivata seconda" di $f$ in $x_0$ (e si indica con $f''(x_0)$) la derivata prima di $f'(x_0)$. $f''(x_0) = (f')'(x_0)$, qualora $f$ sia derivabile

Osservazione:

- Derivabile $\Rightarrow$ Continua
- $f'$ derivabile $\Rightarrow f''$ esiste
- $f''$esiste (cioè $f'$ derivabile) NON implica $f' \in C$
    a. Non implica, poiché esistono funzioni derivabili che non hanno derivata continua! Allo stesso modo esistono funzioni ma non $C^1$

Consideriamo: $f = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right); x \neq 0 \\ 0; x = 0 \end{cases}$

- $f$ è continua, $0 = f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) =$,
    a. $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ ed è il prodotto di un infinitesimo per un limitato che fa zero
    b. quindi continua;
- $f$ è derivabile in $x = 0$
    a. $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(h^x \sin(\frac{1}{x}))}{h^x}$, ora si semplifica $h^x$
    b. $= \lim_{h \to 0} hsin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$ ,
    c. quindi derivabile con $f'(0) = 0$
- $f$ non è $C^1$ in $x = 0$, ovvero $f'$ non è continua $x = 0$
    a. $f'(x) = \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 2xsin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$
    b. $= 2xsin\left(\frac{1}{x}\right) + \cancel{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) = 2xsin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
    c. Ma se $\mathrm{x} \to 0, 2xsin\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$ e $-\cos\left(\frac{1}{x}\right) \to \nexists$

**Criterio di convessità e concavità**

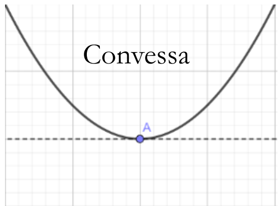
Sia $f$ derivabile in $[a, b]$ e derivabile due volte in $(a, b)$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

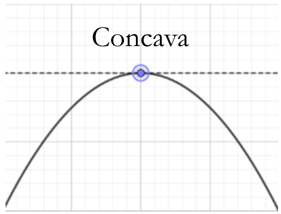
1) $f$ è convessa in $[a, b]$
2) $f'$ è crescente in $[a, b]$
3) $f''$ è non-negativa in $(a, b)$. $(f'' \geq 0)$

Allo stesso modo:

1) $f$ è concava in $[a, b]$
2) $f'$ è decrescente in $[a, b]$
3) $f''$ è non positiva in $(a, b)$, $(f'' \leq 0)$

**Spoiler: Criteri del secondo ordine**




Supponiamo che $f \in C^2$

- Se $x_0$ è un punto di minimo, allora $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$
- Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ allora $x_0$ è un minimo

Ovviamente dualmente:

- Se $x_0$ è un punto di massimo, allora $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \leq 0$
- Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ allora $x_0$ è un massimo

Osservazioni: condizioni necessarie ma non sufficienti

Controesempio: $f(x) = x^4$

- $f(0) = 0 \leq x^4 = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ è minimo
- $f'(0) = 0, f''(0) = 0$ (non è necessario $f''(0) > 0$ per avere un minimo)
- Se prendessimo $f(x) = -x^4$, stessa cosa ma con il massimo

**TEOREMA di de L'HOPITAL**

Siano $f$ e $g$ continue e derivabili, in un intorno di $x_0$,

- Supponiamo inoltre che $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$
- E supponiamo aggiuntivamente che $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}\ F.I.$

Allora se esiste: il limite del quoziente delle derivate $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, vale anche $\frac{f(x)}{g(x)} = L$,

Osservazione: vale anche se $x_0 = \pm\infty$, e anche se $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$

Dimostrazione (caso $f, g \in C^1$)

- Visto che $f, g \in C^1$ e $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$,
- Allora $f(x_0) = 0$ e $g(x_0) = 0$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} =$, cioè dato che $f(x_0)$ e $g(x_0)$, tendono a zero, possiamo sottrarli senza alterare niente
- $\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} =$, ora dividendo numeratore e denominatore per la stessa quantità il risultato non cambia
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, essendo quelli i limiti del rapporto incrementale sono le derivate

Commenti:

1) Attenzione: va usata bene!!
   a. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x+1} = 0$ →non è zero su zero$\frac{0}{0}$
      i. Infatti se applicassimo $(H) \lim_{x \to 0} \frac{(x)'}{(x+1)'} = \frac{1}{1} = 1$, incongruente
   b. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = (H) \lim_{x \to 0} \frac{(sinx)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{cosx}{1} = \cos 0 = 1$
   c. $\lim_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = (H) \lim_{x \to 0} \frac{(1-cosx)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{sinx}{2x} = \frac{0}{0} = (H) \lim_{x \to 0} \frac{cosx}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}$

**Studio di una funzione completo**

- Dominio
- Limiti
- Derivata
- Max e Min – Monotonia
- Derivata Seconda – Concavità

Esempio: $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

1) Dominio $\{x \neq 0\} \rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
2) Limiti:
   a. $\lim_{x \to \pm\infty} xe^{\frac{1}{x}} = (\pm\infty)e^{\frac{1}{\pm\infty}} = (\pm\infty)e^0 = (\pm\infty)1 = \pm\infty$
   b. Quindi non ci sono asintoti orizzontali, forse quello obliquo: $y = mx + q$
      i. $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x}e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\pm\infty}} = e^0 = 1$
      ii. $q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - 1x\right) =$

iii. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)\frac{1}{x} \to$ per il limite notevole

iv. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}\right) = 1 \to \lim\limits_{x\to\pm\infty} x1\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}} = 1 = q$

v. Quindi l'asintoto obliquo $y = mx + q \to y = x + 1$

c. $\lim\limits_{x\to o^+} xe^{\frac{1}{x}} \to$per ordine degli infiniti $\lim\limits_{x\to o^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{o^+}} = e^{+\infty} = +\infty$, Quindi c'è un asintoto verticale da destra verso sinistra, per $x = +\infty$

d. $\lim\limits_{x\to o^-} xe^{\frac{1}{x}} = o^-e^{\frac{1}{o^-}} = 0e^{-\infty} = 0\frac{1}{e^{\infty}} = 0 \times 0 = 0$

3) Derivata Prima

a. $f'(x) = \left(xe^{\frac{1}{x}}\right)' \to$ Derivata di un prodotto $= (x)'e^{\frac{1}{x}} + x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' =$

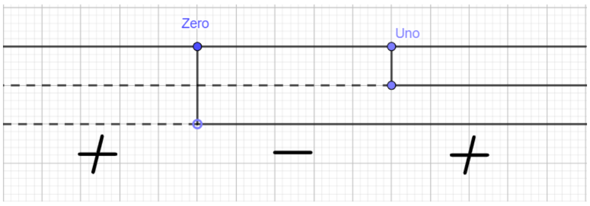
b. $= (x)'e^{\frac{1}{x}} + x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = 1e^{\frac{1}{x}} + x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = e^{\frac{1}{x}} + x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' \to$ composta

c. $e^{\frac{1}{x}} + x\left(e^{\frac{1}{x}}(x^{-1})'\right) = e^{\frac{1}{x}} + x\left(e^{\frac{1}{x}}(x^{-2})\right) = e^{\frac{1}{x}} + \cancel{x}\, e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^{\cancel{2}}} = e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x} =$

d. $= e^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)$, ora procediamo a trovare la positività

e. $e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)$, allora $e^{\frac{1}{x}}$ sempre positivo

f. quindi procediamo a vedere quella di $\frac{x-1}{x} \to \begin{cases} x-1 \geq 0 \to x \geq 1 \\ x > 0 \quad\quad \to x > 0 \end{cases}$



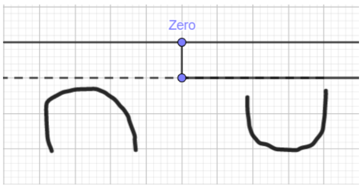

g. Trovando la positività della derivata si capisce quando la funzione sia crescente o decrescente

4) Derivata Seconda

a. $f''(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)'\left(\frac{x-1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)' =$

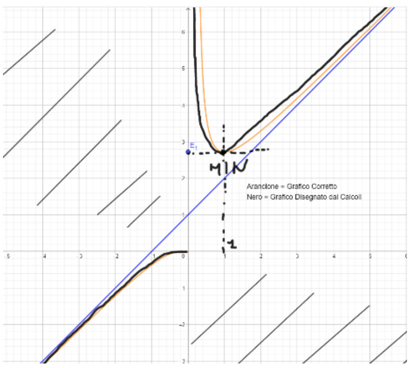
b. $= e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1x-x-1}{x^2}\right)\left(\frac{x-1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1x-x-1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right) =$

c. $= \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(\frac{1}{x} - \cancel{1} + \cancel{1}\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\frac{1}{x} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} \to$ in cui $e^{\frac{1}{x}}$ è sempre positivo




d. $x^3 > 0 \to x > 0$

5) Grafico



**Massimi e Minimi Assoluti**

Dal teorema di Weierstrass, sia $f \in C([a,b])$, allora $f$ ammette massimi e minimi assoluti o vincolati. Il criterio per trovarli è:

- Se $f$ è derivabile e massimo o il minimo sono interni, allora dal teorema di Fermat $f'(x_0) = 0$

Quindi la strategia: è costruire una lista di candidati ad essere massimo e minimi:

- Punti di criticità di non derivabilità
- Punti critici $(f'(x) = 0)$
- Estremi dell'intervallo

Valutando $f(x)$ in tutti questi punti il valore più grande è il massimo, e di conseguenza il valore più piccolo è il minimo

Esempio: $f(x) = x\log(x) \to [e^{-2}, 1]$

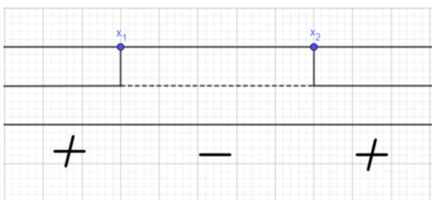
- $f'(x) = \big(x\log(x)\big)' = (x)'\log(x) + x\big(\log(x)\big)' = 1\log(x) + \cancel{x}\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right) =$
    a. $= \log(x) + 1 \to f'$
- Punti di non derivabilità $\mathrm{D}\,\mathrm{f}'(\mathrm{x}): \mathrm{x} < 0$
- Punti critici $f'(x) = 0 \to \log(x) + 1 = 0 \to \log(x) = -1 \to$
    a. $\log(x) = \log\left(\frac{1}{e}\right) \to x = \frac{1}{e}$
- Lista
    a. $\frac{1}{e^2} \to f\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{2}{e^2}$
    b. $\frac{1}{e} \to f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \to MIN$
    c. $1 \to f(1) = 0 \to MAX$

**Massimi e minimi senza intervalli**

- Dominio Funzione
- Derivata
- Dominio derivata
- Derivata = 0
- Positività Derivata oppure Derivata seconda nella Derivata prima = 0

Esempio: $f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + x^2}$

- $D\,f(x)$: $\mathbb{R}$
- $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(1 + x^2)^2}$
- $f'(x) = 0 \to x_1 = -1 - \sqrt{2}, x_2 = -1 + \sqrt{2}$



- $f''(x) = \left(\frac{-2x^3-6x^2+6x+2}{(1+x^2)^3}\right)$
  a. $f''(-1-\sqrt{2}) = -0{,}06 \rightarrow < 0 \rightarrow Max\ Locale$
  b. $f''(-1+\sqrt{2}) = +2{,}06 \rightarrow > 0 \rightarrow Min\ Locale$

**Formula di Taylor**

[ $f$ è differenziabile in $x_0$se $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0)$ →"resto" con $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{R(x,x_0)}{(x-x_0)} = 0$, cioè $f$ è approssimabile all'ordine 1 con "formula di Taylor" ]

Definizione: Diremo che $g(x) = o(f(x))$, (detto "o piccolo"), per $x \rightarrow x_0$ se succede che $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

Esempi:

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0 \rightarrow 1 - \cos(x) = o(x)\ per\ x \rightarrow 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}\sqrt{x}$, in cui il primo tende, per il limite notevole, ad 1 il secondo a 0, quindi è uguale a 0, in cui $e^x - 1 = o(\sqrt{x})\ per\ x \rightarrow 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0, x = o(e^x)\ per\ x \rightarrow +\infty$

(Teorema)

Sia $f$ di classe $C^n(\{x_0\})$ derivabile in $x_0$, allora esiste un polinomio di ordine $n$, detto "polinomio di Taylor", il quale lo approssima localmente, ovvero:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 \dots \dots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x - x_0)$$

In cui il $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{R_n(x-x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Il polinomio di Taylor si abbrevia in $P_n(x - x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ , quando $x_0 = 0$ si chiama "di MCLAURIN".

Vediamo che tutta la struttura quindi "$f(x) = P_n(x - x_0) + R_n(x - x_0)$" si chiama formula di Taylor, in cui $P_n(x - x_0)$ è detto polinomio di Taylor, e invece $R_n(x - x_0)$ si chiama resto (nella forma) di Peano, cioè $R_n(x - x_0) = o((x - x_0)^n)$

Dimostrazione:

Procediamo a dimostrare per induzione, quindi dovremmo verificare la base induttiva e il o passo induttivo:

- Partiamo a verificare la base induttiva per $n = 2$
  a. L'obbiettivo è $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + R_n(x - x_0)$, in cui $\lim_{x \to x_0} \frac{R_2(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = 0$, ovvero
  b. $\lim_{x \to x_0} \frac{R_2(x - x_0)}{(x - x_0)^2} =$ possiamo portare tutti i membri di sinistra a destra
  c. $= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = \frac{0}{0}\ F.I.$, essendo una forma indeterminata zero su zero, possiamo applicare Hopital
  d. $(H) \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - 0 - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0)}{2(x - x_0)} =$ ancora una volta
  e. $(H) \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{f''(x)} - 0 - 0 - \cancel{f''(x_0)}}{2} = 0$
- Supponiamo che per $n - 1$, sia vero
- Quindi tocca verificare il passo induttivo cioè $n$
  a. Sapendo che $f(x), k.(x - x_0) \in C^n$
  b. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = \frac{0}{0}$
  c. $(H) = \lim_{x \to x_0} \left[f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 - \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right] \times \frac{1}{n(x - x_0)^{n-1}}$ ← Taylor d'ordine $(n - 1)$ per $f'$
  d. Dato che $(f')^{(k)} = f^{(k+1)}$,
  e. Quindi per ipotesi induttive, tutto tende a 0

Applicazioni:

- $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x) - x}{x^2} = (H)(H) = \frac{1}{2}$
  - Altrimenti $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x) - x}{x^2}$, dato che sappiamo che il limite notevole di
  - $\text{Lim}_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1 + o(1)_{\to 0}$, allora $\log(1 + x) = x + xo(1) = x + o(x)$
  - Quindi $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x) - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x + o(x) - x}{x^2} = \frac{0}{0}$, quindi se di ordine 1 non è bastato, procediamo a quello di ordine 2
  - $\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, sostituendo ed ottengo

- $\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\cancel{x}}{x^2}$ = semplificando la $x$
- $= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}$ = raccogliendo la $x^2$
- $= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)}{\cancel{x^2}} = -\frac{1}{2}+o(1)_{\to 0} = -\frac{1}{2}$

Sviluppi di Taylor noti:

1) $f(x) = e^x \to f(0) = e^0 = 1$
   a. $f'(x) = e^x \to f'(0) = 1$
   b. $f''(x) = e^x \to f''(0) = 1$
   c. Quindi $e^x = 1 + 1 \times x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$
2) $f(x) = \log(1+x) \to f(0) = \log(1) = 0$
   a. $f'(x) = \frac{1}{1+x} \to f(0) = 1$
   b. $f''(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \to \frac{f''(0)}{2} = -\frac{1}{2}$
   c. $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \to \frac{f'''(0)}{6} = \frac{1}{3}$
   d. $f^{(4)}(x) = \frac{6}{(1+x)^4} \to \frac{f^{(4)}(0)}{24} = -\frac{1}{4}$
   e. Quindi $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$
3) $f(x) = \sin(x) \to f(0) = \sin(0) = 0$
   a. $f'(x) = \cos(x) \to f(0) = 1$
   b. $f''(x) = -\sin(x) \to \frac{f''(0)}{2} = 0$
   c. $f'''(x) = -\cos(x) \to \frac{f'''(0)}{6} = -\frac{1}{6}$
   d. Da notare $\sin(x) = x + 0 - \frac{x^3}{6} + 0 + o(x^{3/4})$
   e. Quindi $\sin(x) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$

4) $f(x) = \cos(x) \to f(0) = \cos(0) = 1$
   a. $f'(x) = -\sin(x) \to f(0) = 0$
   b. $f''(x) = -cos(x) \to \frac{f''(0)}{2} = \frac{1}{2}$
   c. $f'''(x) = sin(x) \to \frac{f'''(0)}{6} = 0$
   d. Da notare $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + 0 + o(x^{2/3})$
   e. Quindi $\cos(x) = \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n})$

5) $f(x) = (1+x)^a \rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \rightarrow f(0) = (1+x)^0 = 1$
   a. $f'(x) = a(1+x)^{a-1} \rightarrow f(0) = a$
   b. $f''(x) = a(1+x)(1+x)^{a-2} \rightarrow \frac{f''(0)}{2} = \frac{a(a-1)}{2}$
   c. Quindi $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2)$
   d. Esempio $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^2)$

Esercizio d'esame:

$$\lim_{x\to 2} \frac{3(\sqrt{x^2-4x+5}-1)}{(x-2)\sin(x-2)}$$

- Applicheremo Taylor a $\sqrt{x^2-4x+5}$ e $\sin(x-2)$
- Per fare ciò dobbiamo portare il limite a $x_0 = 0$ cioè quelli di McLaren
- Per fare ciò diciamo che $y = x - 2$, cioè $x = y + 2$
- Quindi notiamo che per quanto riguarda
   a. Il denominatore non è un problema divenendo $y\sin(y)$
   b. Invece il numeratore dobbiamo far caso che $x^2 - 4x + 5$ non è altro che $x^2 - 4x + 4 + 1$, cioè $(x-2)^2 + 1$, quindi il numeratore diviene $3\sqrt{y^2+1} - 1$
- Componendo tutto $\lim_{y\to 0} \frac{3(\sqrt{y^2+1}-1)}{y\sin(y)}$, ora possiamo applicare Taylor
   a. Allora $\sin(y)$, possiamo scriverlo al primo ordine di Taylor, ovvero $\sin(y) = y + o(y)$
   b. Invece $\sqrt{y^2+1}$ , facciamo un ulteriore sostituzione di variabile $\sqrt{y^2+1} \rightarrow z = y^2 \rightarrow = \sqrt{z+1}$, questo possiamo scriverlo al secondo ordine di Taylor, ovvero $\sqrt{z+1} = 1 + \frac{1}{2}z + o(z) \rightarrow z = y^2 \rightarrow 1 + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$
- Riassemblando tutto $\lim_{y\to 0} \frac{3\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2) - \cancel{1}\right)}{y(y+o(y))} =$ si semplifica l'uno
   a. $\lim_{y\to 0} \frac{3\left(\frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\right)}{y(y+o(y))} =$ si svolgono le moltiplicazioni
   b. $= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{3}{2}y^2 + o(y^2)}{y^2 + o(y^2)} =$ raccolgo per $y^2$
   c. $= \lim_{y\to 0} \frac{\cancel{y^2}\left(\frac{3}{2} + o(1)\right)}{\cancel{y^2}(1 + o(1))} =$ semplifica $y^2$

d. $= \frac{\frac{3}{2}+o(1)_{\to 0}}{1+o(1)_{\to 0}} = \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2}$, dato che $o(1)$ tende a 0