59

A. Alvino L. Carbone G. Trombetti

ESERCITAZIONI DI MATEMATICA

volume primo
parte seconda

Liguori Editore

Prima edizione italiana Giugno 1993
Liguori Editore, Srl
Via Posillipo 394
I 80123 Napoli

Alvino, Angelo :
Esercitazioni di Matematica : Volume primo Parte seconda/A. Alvino, L. Carbone, G. Trombetti
Napoli : Liguori, 1993
ISBN 88 - 207 - 2201 - 1

Ristampe:
9 8 7 6 5 4 3 2   2001 2000 1999 1998 1997 1996

Questo volume è stato stampato in Italia dalle Officine Grafiche Liguori - Napoli.

In occasione del completamento della seconda parte del primo volume desideriamo ringraziare per gli utili consigli ed i preziosi suggerimenti M.F. Betta, A. Corbo Esposito, R. De Arcangelis, A. Ferone, V. Ferone, A. Gaudiello, A. Mercaldo, M.R. Posteraro, R. Volpicelli. Ovviamente la responsabilità degli errori, certamente presenti, resta esclusivamente degli autori i quali saranno naturalmente molto grati a coloro che vorranno segnalarli.

Indice

CAPITOLO 1

CALCOLO DIFFERENZIALE

1. Monotonia ed estremi relativi; applicazioni

1.1 Monotonia ed estremi relativi

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo I ed x_o un punto interno ad I; si dirà che x_o è un punto di *massimo* (*minimo*) *relativo* se esiste un $h>o$ tale che

$$f(x) \leq f(x_o) \quad (f(x) \geq f(x_o)) \quad \forall x \in]x_o-h, x_o+h[;$$

se per $x \neq x_o$ la precedente diseguaglianza è stretta si dirà che x_o è un punto di *massimo* (*minimo*) *relativo proprio*.

I punti di massimo e di minimo relativo si dicono anche estremi relativi od estremi locali.

Riassumiamo nello schema seguente le informazioni che si possono ottenere dallo studio del segno della derivata prima di una funzione.

A) MONOTONIA

Sia $f(x)$ continua in un intervallo I e derivabile nei punti interni ad I; si ha:

i) $f'(x) \geq 0 \ (\leq 0) \iff f(x)$ crescente (decrescente) in I

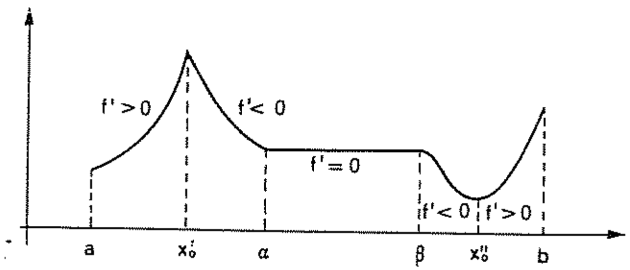
ii) $\left\{\begin{array}{l} f'(x) \geq 0 \ (\leq 0) \text{ ed } f'(x) \text{ non} \\ \text{si annulla in alcun} \\ \text{intervallo } J \subseteq I \end{array}\right. \iff f(x)$ strett.cresc. (decresc.) in I

B) ESTREMI RELATIVI

Sia $f(x)$ continua in un punto x_0 e derivabile in un intorno di x_0 fatta al più eccezione per il punto x_0; si ha:

$$\exists\, h>0 \text{ tale che: } \left\{\begin{array}{l} f'(x) \geq 0 \ (\leq 0) \text{ in }]x_0-h,\ x_0[\\ f'(x) \leq 0 \ (\geq 0) \text{ in }]x_0,\ x_0+h[\end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ x_0 p.to di massimo relativo (minimo relativo)



$f(x)$ non derivabile in x_0', $f'(x_0'')=0$; $f(x)$ strett. cresc. in $[a,\ x_0']$ ed in $[x_0'',\ b]$, $f(x)$ strett. decresc. in $[x_0',\ \alpha]$ ed in $[\beta,\ x_0'']$ decrescente (ma non strett. decr.) in $[x_0',\ x_0'']$; x_0' p.to di max. rel. (proprio); x_0'' p.to di min. rel. (proprio).

Determinare gli intervalli di crescenza o decrescenza e gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni:

1) $x^4 + 3x^2$;
2) x^3-4x+2;
3) x^3+1;
4) $\dfrac{1}{x}$;
5) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;
6) $\dfrac{1}{x^3-x}$;
7) $\sqrt{x+1}$;
8) $\sqrt[3]{x^2}$;
9) $\sqrt{x^3-3x^2}$;
10) $2\sqrt{x+4}-x$;
11) $x \log |x|$;
12) $x+\log x$;
13) $\log \sqrt{3x^2+5}$;
14) $\log (1-x+x^2)-x$;
15) $\log (x^2+3x+3)+x$;
16) $\dfrac{1}{x^2} + \log x^2$;
17) $\log (x+1) + \log (x-1)$;
18) $\dfrac{\log x}{x}$;
19) $\sqrt{\log^2 x+1}$;
20) $x e^{1/x}$;
21) e^x+x;
22) $\dfrac{e^x-2}{e^x-1}$;
23) x^x;
24) $\sqrt{x}\ e^{(1-x^2)}$;
25) $2^{\text{sen}2x}$;
26) $2\,\text{sen}x-x$;
27) $\text{sen}x + \cos x$;
28) $\sqrt{\text{sen}^2 x + 3\,\text{sen}x}$;

29) $\operatorname{arctg} \log x$;

30) $\arccos (e^{-1/x})$;

31) $\operatorname{arcsen} \left[2^{x^2-x}\right]$;

32) $|x|\, e^{1/|x|}$;

33) $\left|\dfrac{x^2+1}{x-1}\right| + |x+2|$;

34) $\log x + |x^2-3x+2|$;

35) $\operatorname{arctg} x + \dfrac{|2x-1|}{1+x^2}$;

36) $\log (\pi - \operatorname{arctg} (x^3-3x))$;

37) $\log |\cos x|$;

38) $\dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{x-1}}}$;

39) x^4-2x^2;

40) $-x^7+x^5$;

41) $\dfrac{x}{x^2-4}$;

42) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$;

43) $\dfrac{(x-2)^3}{(x-1)^2}$;

44) $\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$;

45) $\sqrt[3]{x^2(x-1)}$;

46) $\log(1-x+x^2)+x$;

47) $\log(x^2+3x+3)-x$;

48) $\dfrac{x+3}{\log |x+3|}$;

49) $\dfrac{1}{\log |x^2-4|}$;

50) $\dfrac{\log x +1}{\log x -1}$;

51) e^x-x;

52) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ ($=\operatorname{tgh} x$);

53) $e^{x/(x^2-2)}$;

54) $\dfrac{x+1}{e^{x+2}}$;

55) $e^{\sqrt{x^4+x^2}}$;

56) $-\cos 2x + 2\cos x$;

57) $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$;

58) $\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x-8\cos x-4x$;

59) $(\log [3+\operatorname{sen} x])^{\pi}$;

60) $\operatorname{arcsen} \dfrac{x-1}{x+1}$;

61) $\operatorname{arctg} (\sqrt{x}-x)$;

62) $\log (x+1) + |x^2-x|$;

63) $|\operatorname{arctg} x| - \dfrac{2x+1}{1+x^2}$;

64) $e^{\operatorname{sen} x}-\operatorname{sen} x$;

65) $\left[e^{x^2/(x-1)}-1\right]^{-1}$;

66) $e^{1/x} \sqrt{x+1}$;

67) $\log (e^{2x}-e^x+1)$;

68) $\log_{1/2} \operatorname{arcsen} x$;

69) $x+\sqrt{1-x^2}$;

70) $\left|\operatorname{arcsen} \dfrac{x}{x^2+1}\right|$;

71) $\log^4 [\operatorname{arctg} x]$;

72) $\log \operatorname{arcsen} |x+1|$;

73) $\sqrt{|x^2-5x+4|}$;

74) $\log \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$;

75) $e^{\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x^2-1}$;

76) $\operatorname{arctg} e^x + \dfrac{1}{2e^x}$;

77) $|x+1|\ |x|$;

78) $\operatorname{arctg} \dfrac{x^2}{x-1}$;

79) $\dfrac{x}{2-\log |x|}$;

80) $\sqrt{x^2-1}\ \log |x^2-1|$;

81) $\operatorname{tg} \log x$;

82) $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$;

83) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$;

84) $\log |\operatorname{senh} x|$;

85) $\cosh x-3x$;

86) $e^{\operatorname{tgh} x}$;

87) $\dfrac{1-\operatorname{senh} x}{1+\operatorname{senh} x}$;

88) $\operatorname{arctg} (1-\cosh^2 x)$;

89) $\operatorname{senh}^4 (x^2+x)$;

90) $\operatorname{tgh} (1+\log^2 x)$.

Risposte

1) str. cr. in $[0,+\infty[$; str. decr. in $]-\infty,0]$; $x=0$ p.to di min. rel.;

2) str. cr. in $]-\infty,-2/\sqrt{3}]$ ed in $[2/\sqrt{3}, +\infty[$; str. decr. in $[-2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}]$; $x = -2/\sqrt{3}$ p.to di max. rel, $x=2/\sqrt{3}$ p.to di min. rel.;
3) str. cresc. in $]-\infty,+\infty[$;
4) str. decr. in $]-\infty,0[$ ed in $]0,+\infty[$;
5) str. cresc. in $[0,+\infty[$; str. decr. in $]-\infty,0]$; $x=0$ p.to di min. rel.;
6) str. cresc. in $[-1/\sqrt{3},0[$ ed in $]0,1/\sqrt{3}]$; str. decr. in $]-\infty,-1[$, in $]-1, -1/\sqrt{3}]$, in $[1/\sqrt{3}, 1[$ ed in $]1,+\infty[$; $x=-1/\sqrt{3}$ p.to di min. rel., $x=1/\sqrt{3}$ p.to di max. rel.;
7) str. cresc. in $[-1,+\infty[$;
8) str. cresc. in $[0,+\infty[$; str. decr. in $]-\infty,0]$; $x=0$ p.to di min. rel.;
9) str. cr. in $[3,+\infty[$;
10) str. cresc. in $[-4, -3]$; str. decr. in $[-3,+\infty[$; $x=-3$ p.to di max. rel.;
11) $f(x)$ str. cr. in $]-\infty,-1/e]$ ed in $[1/e, +\infty[$; str. decr. in $[-1/e, 0[$ ed in $]0,1/e]$; $x= -1/e$ p.to di max. rel., $x=1/e$ p.to di min. rel.;
12) str. cr. in $]0,+\infty[$;
13) str. cr. in $[0,+\infty[$, str. decr. in $]-\infty,0]$; $x=0$ p.to di min. rel.;
14) str. cr. in $[1,2]$, str. decr. in $]-\infty,1]$ ed in $[2,+\infty[$; $x=1$ p.to di min. rel., $x=2$ p.to di max. rel.;
15) str. cr. in $]-\infty,-3]$ ed in $[-2,+\infty[$, str. decr. in $[-3,-2]$, $x=-3$ p.to di max. rel., $x=-2$ p.to di min. rel.;
16) str. cr. in $[-1,0[$ ed in $[1,+\infty[$, str. decr. in $]-\infty,-1]$ ed in $]0,1]$; $x=-1$ ed $x=1$ p.ti di min. rel.;
17) str. cr. in $]1,+\infty[$;
18) str. cr. in $]0,e]$, str. decr. in $[e,+\infty[$, $x=e$ p.to di max. rel.;
19) str. cr. in $[1,+\infty[$, str. decr. in $]0,1]$, $x=1$ p.to di min. rel.;
20) str. cresc. in $]-\infty,0[$ ed in $[1,+\infty[$; str. decr. in $]0,1]$, $x=1$ p.to di min. rel.;
21) str. cresc. in $]-\infty,+\infty[$;
22) str. cr. in $]-\infty,0[$ ed in $]0,+\infty[$;
23) str. cr. in $[1/e, +\infty[$, str. decr. in $]0,1/e]$, $x=1/e$ p.to di min. rel.;
24) str. cr. in $[0,1/2]$, str. decr. in $[1/2, +\infty[$, $x=1/2$ p.to di max. rel.;

25) str. cr. in ogni interv. $[k\pi, k\pi+\pi/2]$ con $k\in\mathbb{Z}$, str. decr. in ogni interv. $[k\pi+\pi/2, (k+1)\pi]$; $\{k\pi+\pi/2\}_{k\in\mathbb{Z}}$ p.ti di max rel., $\{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ p.ti di min. rel.;
26) str. cr. in ogni interv. $[-\pi/3+2k\pi, \pi/3 + 2k\pi]$ con $k\in\mathbb{Z}$, str. decr. in ogni interv. $[\pi/3 + 2k\pi, -\pi/3 + (2k+2)\pi]$ con $k\in\mathbb{Z}$; $\{-\pi/3+2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ p.ti di min. rel e $\{\pi/3 + 2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ p.ti di max. rel.;
27) al variare di k in Z: str. cr. in $[-3\pi/4 + 2k\pi, \pi/4 + 2k\pi]$, str. dec. in $[\pi/4 + 2k\pi, -\frac{3}{4}\pi + (2k+2)\pi]$, $x = \pi/4 + 2k\pi$ p.ti di max. rel., $x = -3\pi/4+2k\pi$ p.ti di min. rel.;
28) al variare di k in Z: str. cr. in $[2k\pi, 2k\pi + \pi/2]$, str. decr. in $[2k\pi+\pi/2, (2k+1)\pi]$; $x = \pi/2 + 2k\pi$ p.ti di max. rel.
29) str.cr. in $]0,+\infty[$;
30) str. decr. in $]0, +\infty[$;
31) str. cr. in $[1/2,1]$, str. decr. in $[0,1/2]$, $x=1/2$ p.to di min. rel.;
32) str. cres. in $[1,+\infty[$ ed in $[-1,0[$, str. decr. in $]-\infty,-1]$ ed in $]0,1]$, $x=\pm1$ p.ti di min. rel.;
33) str. decres. in $]-\infty,-2]$ ed in $]1,2]$, str. cres. in $[-2,1[$ ed in $[2,+\infty[$, $x=\pm2$ p.ti di min. rel.;
34) str. cres. in $]0,1/2]$, $[1, \frac{3+\sqrt{17}}{4}]$, $[2, +\infty[$, str. decr. in $[1/2,1]$, $[\frac{3+\sqrt{17}}{4}, 2]$; $x = 1/2$, $x= \frac{3+\sqrt{17}}{4}$ p.ti di max. rel. e $x=1$, $x=2$ p.ti di min. rel.;
35) str. cres. in $[1/2, 3]$ ed in $]-\infty,-1/3]$, str. decr. in $[-1/3, 1/2]$ ed in $[3,+\infty[$; $x = -1/3$ ed $x=3$ p.ti di max. rel., $x=1/2$ p.to di min. rel.;
36) str.cr. in $]-\infty,-1]$ ed in $[1,+\infty[$, str. decr. in $[-1,1]$, $x=-1$ p.to di max. rel., $x=-1$ di min. rel.;
37) str. cres. in $]\pi/2 + k\pi, (k+1)\pi]$, str. decr. in $[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$; $x = k\pi$ p.ti di max. rel. con $k\in\mathbb{Z}$.
38) str. decr. in $]-\infty,0[$, in $]0,1[$, ed in $]1,+\infty[$;
39) str. cr. in $[-1,0]$ ed in $[1,+\infty[$, str. decr. in $[0,1]$ ed in $]-\infty,-1[$; $x=\pm1$ p.ti di min. rel, $x=0$ p.to di max. rel.;
40) str. cr. in $\left[-\sqrt{\frac{5}{7}}, \sqrt{\frac{5}{7}}\right]$, str. decr. in $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{5}{7}}\right[$, ed

in $\left]\sqrt{\frac{5}{7}}, +\infty\right[$; $x=-\sqrt{\frac{5}{7}}$ p.to di min. rel. ed $x=\sqrt{\frac{5}{7}}$ p.to di max. rel.;

41) str.decr. in $]-\infty,-2[$, in $]-2,2[$ ed in $]2, +\infty[$;

42) str. cr. in $]-\infty,-1[$ ed in $[1,+\infty[$;

43) str. cr. in $]-\infty,-1]$ ed in $]1,+\infty[$; str. decr. in $[-1,1[$; $x=-1$ p.to di max. rel.;

44) str. cr. in $]-\infty,1[$ ed in $]1,+\infty[$;

45) str. cresc. in $]-\infty,0]$, in $[2/3, +\infty[$; str. decr. in $[0,2/3]$; $x=0$ p.to di max. rel., $x=2/3$ p.to di min. rel.;

46) str. cres. in $]-\infty,-1]$ ed in $[0,+\infty[$; str. decr. in $[-1,0]$; $x=-1$ p.to di max. rel., $x=0$ p.to di min. rel.;

47) str. cr. in $[-1,0]$; str. decr. in $]-\infty,-1]$ ed in $[0,+\infty[$; $x=-1$ p.to di min. rel., $x=0$ p.to di max. rel.;

48) str. cr. in $]-\infty,-e-3]$ ed in $[e-3, +\infty[$, str. decr. in $[-e-3, -4[$, in $]-4, -3[$, in $]-3, -2[$ ed in $]-2, e-3]$; $x = -e-3$ p.to di max. rel.; $x = e-3$ p.to di min. rel. (Se si prolunga la funzione per continuità in $x=-3$ ponendo $f(-3)=0$ allora $f(x)$ è str. decr. in tutto l'intervallo $]-4,-2[$;

49) str. cres. in $]-\infty,-\sqrt{5}[$, in $]-\sqrt{5},-2[$, in $[0, \sqrt{3}[$ ed in $]\sqrt{3},2[$; str. decr. in $]-2, -\sqrt{3}[$, in $]-\sqrt{3}, 0]$, in $]2, \sqrt{5}[$ ed in $]\sqrt{5}, +\infty[$; $x=0$ p.to di min. rel.; se si prolunga la funzione in ±2 ponendo $f(\pm2)=0$ si ha $x=\pm2$ p.ti di max. rel.;

50) str. decr. in $]0,e[$ ed in $]e, +\infty[$;

51) str. cr. in $[0,+\infty[$, str.decr. in $]-\infty,0]$, $x=0$ p.to di min. rel.;

52) str. cr. in $]-\infty, +\infty[$;

53) str. decr. in $]-\infty,-1[$, in $]-1, 1[$ ed in $]1,+\infty[$;

54) str. cr. in $]-\infty,0]$, str. decr. in $[0,+\infty[$; $x=0$ p.to di max. rel.;

55) str. cr. in $[0,+\infty[$, str. decr. in $]-\infty,0]$; $x=0$ p.to di min. rel.;

56) str. cr. in $[2k\pi, 2k\pi+\pi/3]$ ed in $[(2k+1)\pi, 2k\pi+\frac{5}{3}\pi]$, str. decr. in $[2k\pi+\pi/3, (2k+1)\pi]$ ed in $[2k\pi+5\pi/3, (2k+2)\pi]$ al variare di k in Z; $x=k\pi$ p.ti di min. rel; $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $x=\frac{5}{3}\pi+2k\pi$ p.ti di max. rel.

57) str. cr. in $[2k\pi, (2k+1)\pi[$, str. decr. in $](2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ al variare di k in Z; $x=2k\pi$ p.ti di min. rel.;

58) str. cres. in $[\pi/6+2k\pi, 5\pi/6+2k\pi]$; str. decr. in $[5\pi/6+2k\pi, \frac{\pi}{6}+(2k+2)\pi]$; $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ p.ti di min. rel., $x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$ p.ti di max. rel. al variare di k in Z;

59) str. cr. in $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi]$, str. decr. in $[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi]$; $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ p.ti di max. rel., $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ p.ti di min. rel.;

60) str. cr. in $[0,+\infty[$;

61) str. cr. in $[0,1/4]$, str. decr. in $[1/4, +\infty[$; $x=1/4$ p.to di max. rel;

62) str. cr. in $[-1, -\frac{1}{2}]$, $[0, \frac{-1+\sqrt{17}}{4}]$, $[1,+\infty[$; str. decr. in $[-1/2, 0]$ ed in $[\frac{-1+\sqrt{17}}{4}, 1]$, $x=-\frac{1}{2}$ ed $x = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ p.ti di max. rel.; $x=0$, $x=1$ di min. rel.;

63) str. cr. in $]-\infty, -3]$ ed in $[1/3, +\infty[$, str. decr. in $[-3, 1/3]$; $x=-3$ p.to di max. rel., $x=1/3$ p.to di min. rel.;

64) str. cres. in $[k\pi, k\pi+\pi/2]$ str. decr. in $[k\pi+\pi/2, (k+1)\pi]$ $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ p.ti di max. rel., $x=k\pi$ p.ti di min. rel., al variare di k in Z;

65) str. cres. in $]0,1[$ ed in $]1,2]$, str. decr. in $]-\infty,0[$ ed in $[2,+\infty[$; $x=2$ p.to di max. rel.;

66) str. cr. in $[-1, 1-\sqrt{3}]$ ed in $[1+\sqrt{3}, +\infty[$, str. decr. in $[1-\sqrt{3}, 0[$ ed in $]0, 1+\sqrt{3}]$; $x=1-\sqrt{3}$ p.to di max. rel., $x=1+\sqrt{3}$ p.to di min. rel.;

67) str. cr. in $[\log 1/2, +\infty[$, str. decr. in $]-\infty, \log 1/2]$; $x=\lg 1/2$ p.to di min. rel.;

68) str. decr. in $]0,1]$;

69) str. cr. in $[-1, 1/\sqrt{2}]$, str. decr. in $[1/\sqrt{2}, 1]$; $x=1/\sqrt{2}$ p.to di max. rel.;

70) str. cres. in $]-\infty, -1]$ ed in $[0,1]$, str. decr. in $[-1,0]$ ed in $[1,+\infty[$; $x=0$ p.to di min. rel, $x=\pm1$ p.ti di max. rel;

71) str. decr. in $]0, \operatorname{tg} 1]$, str. cres. in $[\operatorname{tg} 1, +\infty[$; $x=\operatorname{tg}1$ p.to di min. rel.;

72) str. cres. in $]-1,0]$, str. decr. in $]-2, -1[$;

73) str. cr. in $[1,5/2]$ ed in $[4,+\infty[$, str. decr. in $]-\infty,1]$ ed in $[5/2, 4]$; $x=1$, $x=4$ p.ti di min. rel.; $x=5/2$ p.to di rel.;

74) str. cres. $]-\infty,-1]$, str. decr. in $[1,+\infty[$; $x=0$ p.to di max;
75) str. cres. in $[1,+\infty[$, str decr. in $]-\infty, -1]$;
76) str. cres. in $[0, +\infty[$, str. decr. in $]-\infty,0]$; $x=0$ p.to di min. rel.;
77) str. cr. in $]-\infty,-2]$, ed in $[-1,+\infty[$, str. decr. in $[-2,-1]$; $x=-2$ p.to di max. rel., $x=-1$ p.to di min. rel.;
78) str. cres. in $]-\infty,0]$ ed in $[2,+\infty[$; str. decr. in $[0,1[$ ed in $]1,2[$ $x=0$ p.to di max. rel.; $x=2$ p.to di min. rel.;
79) str. cres. in $[-e^3, -e^2[$, in $]-e^2,0[$ in $]0,e^2[$ ed in $]e^2, e^3[$; str decr. in $]-\infty, -e^3]$ ed in $[e^3, +\infty[$; $x=e^3$ p.to di max. rel. $x=-e^3$ p.to di min. rel.; (se si prolunga la funzione in 0 ponendo $f(0)=0$ allora essa è str. cres. in $]-e^2, e^2[$);
80) str. cres. in $[\sqrt{1+e^{-2}},+\infty[$ ed in $[-\sqrt{1+e^{-2}}, -1[$; str. decr. in $]-\infty, -\sqrt{1+e^{-2}},]$ ed in $]1, \sqrt{1+e^{-2}},]$; $x=\pm\sqrt{1+e^{-2}}$, p.ti di min. rel.;
81) str. cres. in ogni intervallo $]e^{\pi/2+k\pi}, e^{\pi/2+(k+1)\pi}[$ con $k\in Z$;
82) str. cr. in $[k\pi, \pi/2 + k\pi[$; str. decr. in $]\pi/2+k\pi, (k+1)\pi]$ con $k\in Z$, i punti $x=k\pi$ $(k\in Z)$ sono di min. rel.;
83) str. cr. in $[-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, \dfrac{\pi}{4}+k\pi]$; str. decr. in $[\pi/4+k\pi, \pi/2 + k\pi[$ ed in $]\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{3\pi}{4}+k\pi]$ (se si prolunga per cont. la funzione nei punti $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ponendo $f(\dfrac{\pi}{2}+k\pi) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi} f(x) = 0$ allora $f(x)$ è str. decr. in $[\pi/4 + k\pi, 3\pi/4 + k\pi]$); i punti $x = \dfrac{\pi}{4}+k\pi$ sono di max rel. ed i punti $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ di min. rel.;
84) str. decr. in $]-\infty,0[$ e str. cres. in $]0,+\infty[$;
85) str. cres. in $[\log (3+\sqrt{10}), +\infty[$, str. decr. in $]-\infty, \log (3+\sqrt{10})]$; $x=\log (3+\sqrt{10})$ è p.to di min. rel;
86) str. cres. in $]-\infty, +\infty[$;
87) str. decr. in $]-\infty, \log (-1+\sqrt{2})$ [ed in $]\log (-1+\sqrt{2}),+\infty[$;
88) str cres. in $]-\infty,0]$ e str. decr. in $[0,+\infty[$; $x=0$ è p.to di max. rel.;
89) str. cres. in $[-1, -1/2]$ ed in $[0,+\infty[$, str. decr. in $]-\infty,-1]$ ed in $[-1/2, 0]$; $x=-\dfrac{1}{2}$ p.to di max. rel. $x=-1$, 0 p.ti di min. rel.;
90) str. decr. in $]0,1]$, str. cres. in $[1,+\infty[$; $x=1$ p.to di min. rel.

Risoluzioni (da 1 a 38)

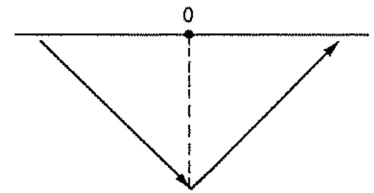
1) $f(x) = x^4+3x^2$; si ha:

$$f'(x) = 4x^3+6x = 2x\,[2x^2+3]$$

da cui si ottiene:

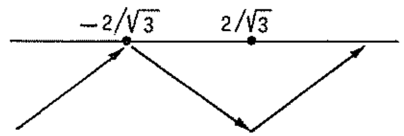
$f'(0) = 0$; $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$; $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$.

Ne segue:
$f(x)$ str. cres. in $[0,+\infty[$; $f(x)$ str. decr. in $]-\infty,0]$; $x=0$ p.to di min. rel.



2) $f(x) = x^3-4x+2$; il C.d.e. è R; $f'(x) = 3x^2-4$; si ha:

$f'\left(\pm \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0$; $f'(x)>0$ in $]-\infty, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}[\ \cup\ ]\dfrac{2}{\sqrt{3}},+\infty[$; $f'(x)<0$ in $]-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}[$.



Quindi: $f(x)$ è str. decr. in $[-2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}]$, $f(x)$ è strett. cresc. in $]-\infty, -2/\sqrt{3}]$ ed in $[2/\sqrt{3}, +\infty[$ (attenzione: è un grave errore concludere che $f(x)$ è strett. cres. in

$]-\infty,-2/\sqrt{3}] \cup [2/\sqrt{3},\ +\infty[$ (!!); $x=-2/\sqrt{3}$ è p.to di max. rel, $x=2/\sqrt{3}$ è p.to di min. rel.

3) $f(x)=x^3+1$; il C.d.e. è R; $f'(x)=3x^2$; ne segue $f'(x)>0\ \forall x\neq 0$ e $f'(0)=0$.
Quindi $f(x)$ è str. cr. in $]-\infty,\ +\infty[$ ed è pertanto priva di max. e min. relativi.

4) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; il C.d.e. è $R-\{0\}$; $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$; si ha
$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\ ]-\infty,0[\ \cup\ ]0,+\infty[$ (in $x=0$ $f(x)$ non è definita).
Ne segue che $f(x)$ è str. decresc. in $]-\infty,0[$ ed in $]0,+\infty[$ (è falso che $f(x)$ sia decrescente in $]-\infty,0[\ \cup\ ]0,+\infty[$ cfr. fig. 1).

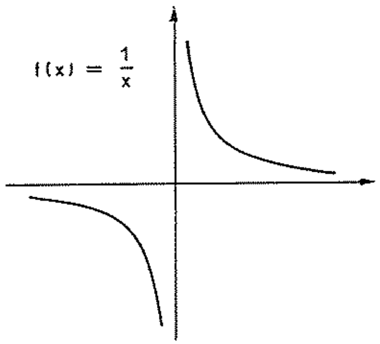
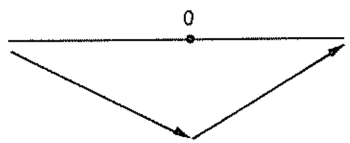


Figura 1

5) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; il C.d.e. è R; $f'(x)=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$; si ha: $f'(0)=0$, $f'(x)>0$ per $x>0$, $f'(x)<0$ per $x<0$. Allora:
$f(x)$ str.decr. in $]-\infty,0]$; str. cres. in $[0,+\infty[$; $x=0$ p.to di min. rel.



6) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-x}$; il C.d.e. è $R-\{0,1,-1\}$; $f'(x)=\dfrac{1-3x^2}{(x^3-x)^2}$;
Quindi: $f'(x)>0$ in $]-1/\sqrt{3},\ 0[\ \cup\ ]0,1/\sqrt{3}[$
$f'(x)<0$ in $]-\infty,-1[\ \cup\ ]-1,-1/\sqrt{3}[\ \cup\ ]1/\sqrt{3},1[\ \cup\ ]1,+\infty[$
$f'(\pm 1/\sqrt{3})=0$

Ne segue che:
$f(x)$ è str. cres. in $[-1/\sqrt{3},0[$ ed in $]0,1/\sqrt{3}]$
$f(x)$ è str. decr. in $]-\infty,-1[$, in $]-1,-1/\sqrt{3}]$, in $[1/\sqrt{3},1[$ ed in $]1,+\infty[$; $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ è p.to di min. rel.; $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ è p.to di max. rel. (cfr. fig. 2)

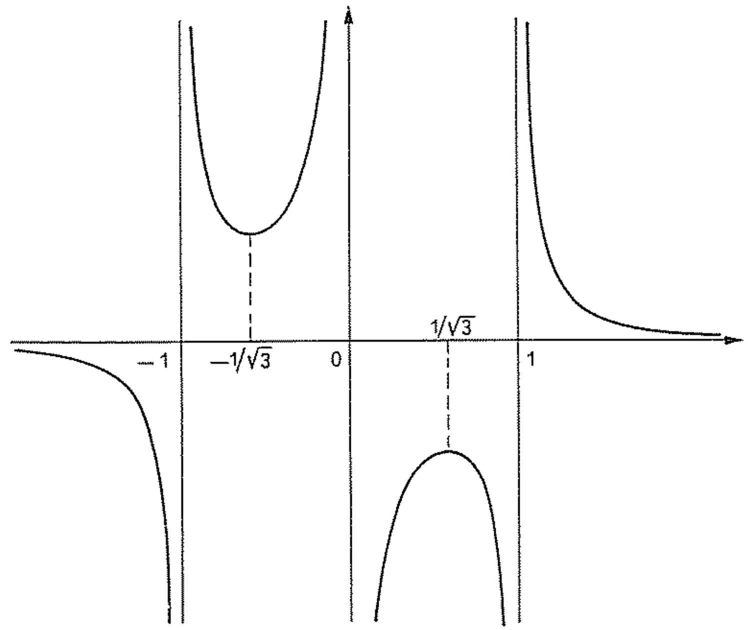


Figura 2

7) $f(x)=\sqrt{x+1}$; il C.d.e. è $[-1,+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}>0$ $\forall x\in\ ]-1,+\infty[$. Ne segue che $f(x)$ è strett. cresc. in $[-1,+\infty[$.

8) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; il C.d.e. è R; $f'(x) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; si ha: $f'(x)>0$ per $x>0$ ed $f'(x)<0$ per $x<0$. Ne segue che:
$f(x)$ è str. cresc. in $[0,+\infty[$; str. decr. in $]-\infty,0]$.
Quindi $x=0$ è p.to di min. rel.; (osserva che in $x=0$ $f(x)$ non è derivabile).

9) $f(x) = \sqrt{x^3-3x^2}$; il C.d.e. è $[3,+\infty[$; $f'(x) = \frac{3x^2-6x}{2\sqrt{x^3-3x^2}}$; ne segue:
$f'(x)>0$ $\forall x\in [3,+\infty[$ e cioè $f(x)$ è str. cresc. in $[3,+\infty[$.

10) $f(x)=2\sqrt{x+4}-x$; il C.d.e. è $[-4,+\infty[$; $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+4}}-1$;
ne segue: $f'(x)>0$ in $]-4,\ -3[$; $f'(-3)=0$
$f'(x)<0$ in $]-3,+\infty[$.

Quindi $f(x)$ è str. cresc. in $[-4,-3]$, str. decr. in $[-3,+\infty[$;
$x=-3$ è p.to di max. rel. (cfr. fig. 3).

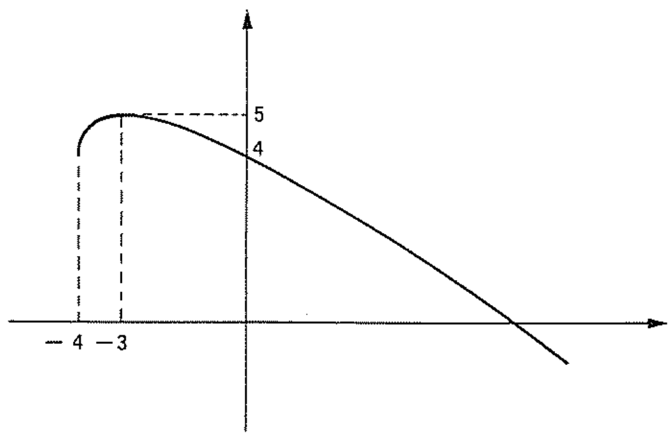


Figura 3

11) $f(x) = x\log|x|$; il C.d.e. è $R-\{0\}$; si ha: $f'(x)=\log|x|+1$ e quindi:
$f'(x)>0 \Leftrightarrow |x|>1/e \Leftrightarrow x\in\ ]-\infty,-1/e[\ \cup\ ]1/e,+\infty[$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow |x|<1/e \Leftrightarrow x\in\ ]-1/e,0[\ \cup\ ]0,1/e[$
$f'(\pm 1/e)=0$.

Ne segue:
$f(x)$ str. cr. in $]-\infty,-1/e]$ ed in $[1/e,+\infty[$ (attenzione: costituisce grave errore affermare che $f(x)$ è str. cr. in $]-\infty,-1/e]\cup[1/e,+\infty[$);
$f(x)$ è str. decr. in $[-1/e,0[$ ed in $]0,1/e[$;
$x=-1/e$ è p.to di max. rel ed $x=1/e$ è p.to di min. rel.

N.B. Poiché $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ è possibile prolungare per continuità $f(x)$ in 0 ponendo $f(0)=0$; effettuato tale prolungamento $f(x)$ sarà str. decrescente in $[-1/e,\ 1/e]$.

N.B. Poiché la funzione studiata è dispari ($-f(x) = f(-x)$) bastava studiarla in $]0,+\infty[$. (cfr. fig. 4)

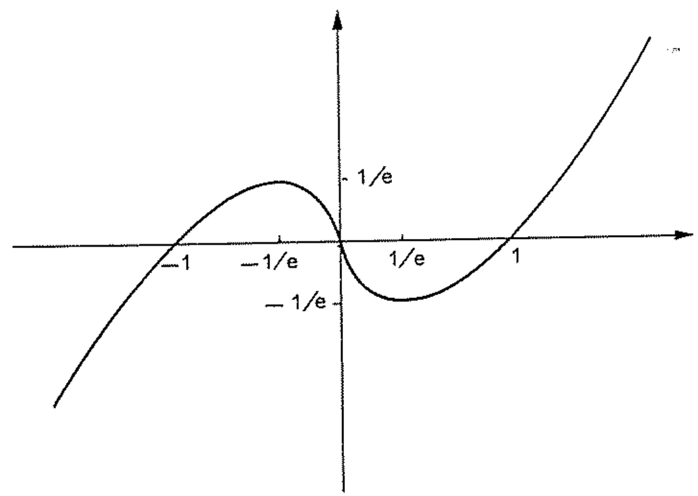


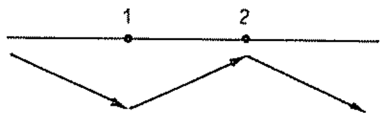
Figura 4

12) $f(x) = x+\log x$; C.d.e. $]0,+\infty[$; $f'(x) = 1+1/x$; ne segue:
$f'(x)>0$ $\forall x\in\ ]0,+\infty[$ e cioè $f(x)$ è str. cr. in $]0,+\infty[$.

13) $f(x) = \log\sqrt{3x^2+5}$; C.d.e. R; $f'(x) = \frac{3x}{(3x^2+5)}$; quindi $f'(x)>0$ per $x>0$ ed $f'(x)<0$ per $x<0$; $f'(0)=0$.
Ne segue che $f(x)$ è str. cr. in $[0,+\infty[$, str. decr. in $]-\infty,0]$ ed $x=0$ è p.to di min. rel.

N.B. $f(x)$ è pari ($f(x) = f(-x)$); bastava allora studiare la funzione in $[0,+\infty[$.

14) $f(x) = \log(1-x+x^2)-x$; C.d.e. R; $f'(x) = \frac{-x^2+3x-2}{x^2-x+1}$; si ha: $f'(x)>0$ in $]1,2[$, $f'(x)<0$ in $]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$, $f'(1)=f'(2)=0$; ne segue che $f(x)$ è str. cr. in $[1,2]$, str. decr. in $]-\infty,1]$ ed in $[2,+\infty[$ e che $x=1$ è p.to di min. rel. e $x=2$ di max. rel.



15) $f(x)=\log(x^2+3x+3)+x$; C.d.e. R; $f'(x)=\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+3}$; $f'(x)>0$ in $]-\infty,-3[\cup]-2,+\infty[$, $f'(x)<0$ in $]-3,-2[$, $f'(-3)=f'(-2)=0$; ne segue che $f(x)$ str. cr. in $]-\infty,-3]$ ed in $[-2,+\infty[$, str. decr. in $[-3,-2]$ e che $x=-3$ è p.to di max. rel. e $x=-2$ p.to di min. rel.

16) $f(x)=\frac{1}{x^2} + \log x^2$; C.d.e. $R-\{0\}$; $f'(x) = \frac{2x^3-2x}{x^4}$; $f'(x)>0$ in $]-1,0[\cup]1,+\infty[$, $f'(x)<0$ in $]-\infty,-1[\cup]0,1[$, $f'(-1)=f'(1)=0$; quindi la funzione è str. cr. in $[-1,0[$ ed in $[1,+\infty[$, str. decr. in $]-\infty,-1]$ ed in $]0,1]$; $x=-1$ ed $x=1$ p.ti di min. rel.

17) $f(x)=\log(x+1) + \log(x-1)$; C.d.e. $]1,+\infty[$; $f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$; ne segue $f'(x)>0$ in tutto l'intervallo $]1,+\infty[$ e pertanto $f(x)$ str. cresc. in $]1,+\infty[$.

18) $f(x)=\frac{\log x}{x}$; C.d.e. $]0,+\infty[$; $f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$; ne segue $f'(x)>0$ per $0<x<e$, $f'(x)<0$ per $x>e$, $f'(e)=0$.

Quindi la funzione è str. cr. in $]0,e]$, str. decr. in $[e,+\infty[$ ed $x=e$ è p.to di max. rel. (cfr. fig. 5).

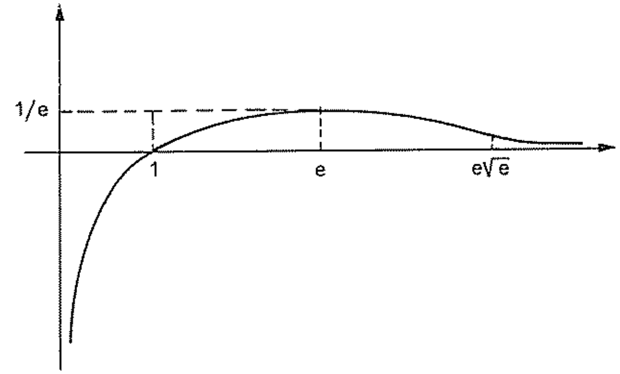
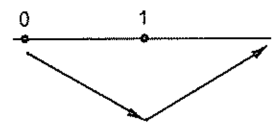


Figura 5

19) $f(x)=\sqrt{\log^2 x+1}$; C.d.e. $]0,+\infty[$; $f'(x)=\frac{\log x}{x\sqrt{1+\log^2 x}}$;
$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>1$, $f'(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<1$, $f'(1)=0$; ne segue: $f(x)$ str.cr. in $[1,+\infty[$, str. decr. in $]0,1]$, $x=1$ p.to di min. rel.



20) $f(x)=x\,e^{1/x}$; C.d.e. $R-\{0\}$; $f'(x)=e^{1/x}\left[\frac{x-1}{x}\right]$; si ha:

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\ ]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$
$f'(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<1$
$f'(1)=0$.

Quindi $f(x)$ è str. cr. in $]-\infty,0[$ ed in $[1,+\infty[$, str. decr. in $]0,1]$ ed $x=1$ è p.to di min. rel. (cfr. fig. 6)

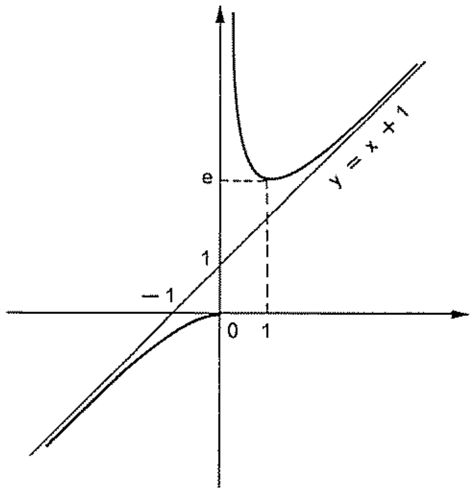


Figura 6

21) $f(x)=e^x+x$; C.d.e. R; $f'(x)=e^x+1$; si ha $f'(x)>0$ $\forall x\in R$ e quindi $f(x)$ è str. cr. in tutto R.

22) $f(x)=\dfrac{e^x-2}{e^x-1}$; C.d.e. $R-\{0\}$; $f'(x)=\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}>0$ $\forall x\in R-\{0\}$; quindi $f(x)$ è str. cres. in $]-\infty,0[$ ed in $]0,+\infty[$. (cfr. fig. 7)

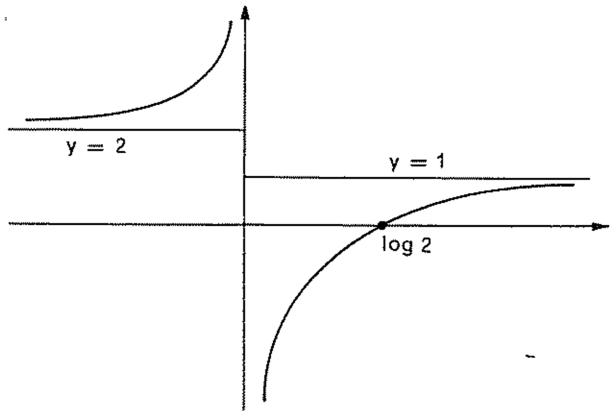


Figura 7

23) $f(x)=x^x$; C.d.e. $]0,+\infty[$; $f'(x)=x^x\,[\log x+1]$; $f'(x)>0$ in $]1/e,+\infty[$, $f'(x)<0$ in $]0,1/e[$, $f'(1/e)=0$.
Ne consegue che $f(x)$ è str. cr. in $[1/e,+\infty[$, str. decr. in $]0,1/e]$ ed $x=1/e$ è p.to di min. rel.

N.B. $f(x)$ è prolungabile per continuità in $x=0$ ponendo $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)=1$.

24) $f(x)=\sqrt{x}\,e^{1-x^2}$; C.d.e. $[0,+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{e^{1-x^2}}{2\sqrt{x}}\,[1-4x^2]$; si ha $f'(x)>0$ in $]0,1/2[$, $f'(x)<0$ in $]1/2,+\infty[$, $f'(1/2)=0$.
Quindi $f(x)$ è str. cr. in $[0,1/2]$, str. decr. in $[1/2,+\infty[$ ed $x=1/2$ è p.to di max. rel.

25) $f(x)=2^{sen^2x}$; C.d.e. R; $f'(x)=2^{sen^2x+1}\,senx\,cosx\,\log 2$; $f'(x)>0$ in $]k\pi,\ k\pi+\pi/2[$ $(\forall k\in Z)$, $f'(x)<0$ $]k\pi+\pi/2,\ (k+1)\pi[$ $(\forall k\in Z)$, $f'(k\pi)=f'(k\pi+\pi/2)=0$ $(\forall k\in Z)$. Pertanto $f(x)$ è str. cres. in ogni intervallo $[k\pi,\ k\pi+\pi/2]$, str. decr. in ogni intervallo $[k\pi+\pi/2,\ (k+1)\pi]$ con $k\in Z$; i punti $\{k\pi+\pi/2\}_{k\in Z}$ sono di max. rel. ed i punti $\{k\pi\}_{k\in Z}$ di min. rel.

26) $f(x)=2senx-x$; C.d.e. R; $f'(x)=2cosx-1$; $f'(x)>0$ in $\bigcup_{k\in Z}]-\pi/3+2k\pi,\ \pi/3+2k\pi[$; $f'(x)<0$ in $\bigcup_{k\in Z} (]\pi/3+2k\pi,\ -\dfrac{\pi}{3}+(2k+2)\pi[)$; $f'(\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi)=0$.
Quindi: $f(x)$ str. cr. in $[-\pi/3+2k\pi,\ \pi/3+2k\pi]$ $\forall k\in Z$, $f(x)$ str. decr. in $[\pi/3+2k\pi,\ -\dfrac{\pi}{3}+(2k+2)\pi]$ $\forall k\in Z$; i punti $\{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\}_{k\in Z}$ sono di min. rel. e $\{\pi/3+2k\pi\}_{k\in Z}$ sono di max. rel.

27) $f(x)=senx+cosx$; C.d.e. R; $f'(x)=cosx-senx$; si ha: $f'(x)>0$ in $\bigcup_{k\in Z}]-\dfrac{3}{4}\pi+2k\pi,\ \dfrac{\pi}{4}+2k\pi[$, $f'(x)<0$ in $\bigcup_{k\in Z}]\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ -\dfrac{3}{4}\pi+(2k+2)\pi[$;
$f'(\dfrac{\pi}{4}+2k\pi)=f'(-\dfrac{3}{4}\pi+2k\pi)=0$; quindi al variare di k in Z $f(x)$ è str. cres. in ogni intervallo $[-3\pi/4+2k\pi,\ \pi/4+2k\pi]$, è str.

decr. in ogni intervallo $]\pi/4+2k\pi, -\frac{3\pi}{4}+(2k+2)\pi[$; i punti $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ sono di max. rel. ed i punti $x=-\frac{3}{4}\pi+2k\pi$ di min. rel.

28) $f(x)=\sqrt{sen^2x+3senx}$; C.d.e. $\bigcup_{k\in Z}([2k\pi, (2k+1)\pi])$

$f'(x)=\frac{2senx\ cosx+3cosx}{2\sqrt{sen^2x+3senx}}$; $f'(x)>0$ in $\bigcup_{k\in Z}]2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{2}[$, $f'<0$ in $\bigcup_{k\in Z}]2k\pi+\frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi[$; $f'(\frac{\pi}{2}+2k\pi)=0$. Quindi f(x) è strettamente crescente in ogni intervallo $[2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{2}]$ e strettamente decrescente in ogni intervallo $[2k\pi+\frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi[$; $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ sono punti di massimo relativo.

29) $f(x)=arctg\ logx$; C.d.e. $]0,+\infty[$; $f'(x)=\frac{1}{x(1+log^2x)}>0$ $\forall x\in]0,+\infty[$; ne segue: f(x) str. cr. in $]0,+\infty[$. (cfr. fig. 8).

N.B. In realtà f(x) è prolungabile per continuità nell'origine ponendo $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=-\frac{\pi}{2}$.

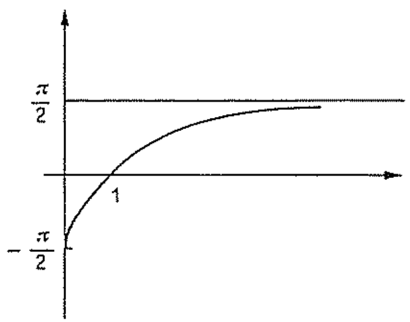
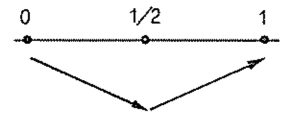


Figura 8

30) $f(x)=arccos\ (e^{-1/x})$; C.d.e. $]0,+\infty[$; $f'(x)=\frac{-e^{-1/x}}{x^2\sqrt{1-e^{-2/x}}}<0$ $\forall x\in]0,+\infty[$; quindi f(x) è str. decr. in $]0,+\infty[$.

31) $f(x) = arcsen\left[2^{x^2-x}\right]$; C.d.e. $[0,1]$; $f'(x)=\frac{2^{x^2-x}(2x-1)\cdot log2}{\sqrt{1-2^{2(x^2-x)}}}$; si ha $f'(x)>0$ in $]1/2, 1[$, $f'(x)<0$ in $]0, 1/2[$, $f'(1/2)=0$; quindi f(x) str. cr. in $[1/2, 1]$, st. decr. in $[0, 1/2]$ ed $x=1/2$ è p.to di min. rel.



32) $f(x)=|x|\ e^{1/|x|}$; C.d.e. R−{0}; poiché f(x) è pari ($f(x) = f(-x)$) basterà studiare la funzione in $]0,+\infty[$ dove si ha (cfr. es. 20): $f(x)=x\ e^{1/x}$, $f'(x)=e^{1/x}\left[\frac{x-1}{x}\right]$; $f'(x)>0$ in $]1,+\infty[$, $f'(x)<0$ in $]0,1[$, $f'(1)=0$.
Quindi f(x) è str. cr. in $[1,+\infty[$, str. decr. in $]0,1]$ ed x=1 è p.to di min. rel.; per simmetria si ha allora che f(x) è str. cres. in $[-1,0[$, str. decr. in $]-\infty,-1]$ ed x=−1 è p.to di min. rel. (cfr. fig. 9)

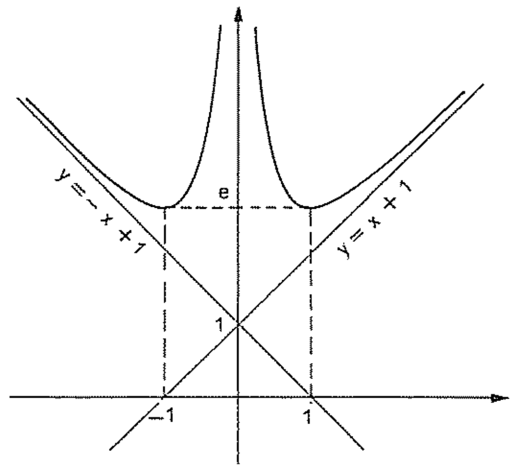


Figura 9

33) $f(x)=\left|\dfrac{x^2+1}{x-1}\right| + |x+2|$; C.d.e. $\mathbb{R}-\{1\}$; si ha:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{1-x} -x-2 & \text{se } x\leq -2 \\ \dfrac{x^2+1}{1-x} +x+2 & \text{se } -2<x<1; \\ \dfrac{x^2+1}{x-1} +x+2 & \text{se } x>1 \end{cases}$$

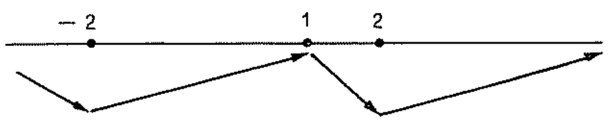
tale funzione è derivabile in $]-\infty,-2[\ \cup\ ]-2,1[\ \cup\ ]1,+\infty[$ e si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x^2+4x}{(1-x)^2} & x\in\ ]-\infty,-2[\\ \dfrac{2}{(1-x)^2} & x\in\ ]-2,1[\\ \dfrac{2x^2-4x}{(1-x)^2} & x\in\ ]1,+\infty[\end{cases}$$

È facile verificare che

$f'(x)<0$ in $]-\infty,-2[\ \cup\ ]1,2[$
$f'(x)>0$ in $]-2,1[\ \cup\ ]2,+\infty[$

Quindi: $f(x)$ è str. decr. in $]-\infty,-2]$ ed in $]1,2]$, str. cr. in $[-2,1[$ ed in $[2,+\infty[$, $x=\pm 2$ sono p.ti di min. rel. (Il punto $x=1$, pur separando un intervallo in cui $f(x)$ è str. cr. da un intervallo in cui $f(x)$ è str. decr.



non è di max. rel. poiché la funzione non è definita nel punto; si tratta di una discont. di 2ª specie: $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$ (cfr. fig. 10)

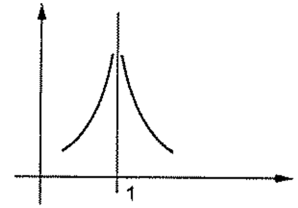


Figura 10

34) $f(x)=\log x + |x^2-3x+2|$; C.d.e. $]0,+\infty[$; si ha:

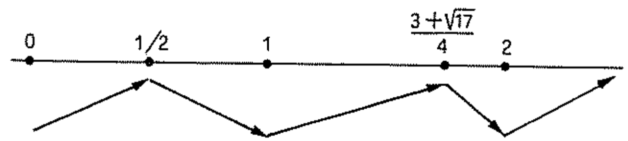
$$f(x)= \begin{cases} \log x+x^2-3x+2 & x\in\ ]0,1]\ \cup\ [2,+\infty[\\ \log x-x^2+3x-2 & x\in\ ]1,2[\end{cases}$$

$$f'(x)= \begin{cases} \dfrac{1}{x}+2x-3 & x\in\ ]0,1[\ \cup\ ]2,+\infty[\\ \dfrac{1}{x}-2x+3 & x\in\ ]1,2[\end{cases}$$

N.B. nei punti $x=1$ ed $x=2$ la funzione non è derivabile:
$f'_+(1)=2$, $f'_-(1)=0$, $f'_+(2)=\dfrac{3}{2}$, $f'_-(2)=-\dfrac{1}{2}$)

Si ha facilmente:

$$\begin{cases} f'(x)>0 &]0,1/2[\ \cup\ ]1,\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}[\ \cup\ ]2,+\infty[\\ f'(x)<0 &]1/2,1[\ \cup\ ]\dfrac{3+\sqrt{17}}{4},\ 2[\\ f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=f'\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right)=0 \end{cases}$$



e quindi f(x) cresce strett. negli intervalli $]0,1/2]$, $\left[1, \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right]$ e $[2,+\infty[$, decr. strett. negli intervalli $[1/2,1]$ e $\left[\frac{3+\sqrt{17}}{4}, 2\right]$; i punti $x=1/2$, $\frac{3+\sqrt{17}}{4}$ sono di max. rel., $x=1,2$ sono di min. rel.

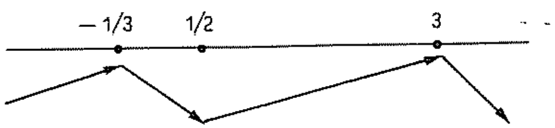
35) $f(x) = \text{arctg}x + \frac{|2x-1|}{x^2+1}$; C.d.e. R;

$$f(x)=\begin{cases} \text{arctg}x + \frac{2x-1}{x^2+1} & x\in[1/2,+\infty[\\ \text{arctg}x + \frac{1-2x}{x^2+1} & x\in]-\infty,1/2[\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+1)^2} & x\in]1/2,+\infty[\\ \frac{3x^2-2x-1}{(x^2+1)^2} & x\in]-\infty,1/2[\end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(x)>0 & x\in]1/2,3[\ \cup\ ]-\infty,-1/3[\\ f'(x)<0 & x\in]-1/3,\ 1/2[\ \cup\ ]\ 3,+\infty[\\ f'(-1/3)=f'(3)=0 \end{cases}$$

Ne segue: f(x) str. cres. in $[1/2,3]$ ed in $]-\infty,-1/3]$, str. decr. in $[-1/3,1/2]$ ed in $[3,+\infty[$; $x=-\frac{1}{3}$, $x=3$ p.ti di max. rel.; $x=1/2$ p.to di min. rel.



36) $f(x)=\log[\pi-\text{arctg}(x^3-3x)]$; C.d.e. R; $f'(x)=\frac{1}{\pi-\text{arctg}(x^3-3x)}\cdot\frac{3(1-x^2)}{1+(x^3-3x)^2}$. Quindi: $f'(x)<0$ in $]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,+\infty[$, $f'(x)>0$ in $]-1,1[$, $f'(\pm1)=0$; ne segue che f(x) decres. str. in $]-\infty,-1]$ ed in $[1,+\infty[$, cres. str. in $[-1,1]$; $x=+1$ p.to di max. rel. ed $x=-1$ p.to di min. rel.

37) $f(x)=\log|\cos x|$; C.d.e. $R-\bigcup_{k\in Z}\{\pi/2+k\pi\}$; $f'(x)=-\text{tg}x$; $f'(x)<0$ in $\bigcup_{k\in Z}]k\pi,\ \pi/2+k\pi[$, $f'(x)>0$ in $\bigcup_{k\in Z}]\pi/2+k\pi,(k+1)\pi[$; $f'(k\pi)=0$.
Quindi f(x) e strett. cres. in ogni intervallo del tipo $]\frac{\pi}{2}+k\pi,(k+1)\pi[$ e strett. decr. in ogni intervallo del tipo $[k\pi,\ \pi/2+k\pi[$. I punti $x=k\pi$ sono di max. rel. (cfr. fig. 11).

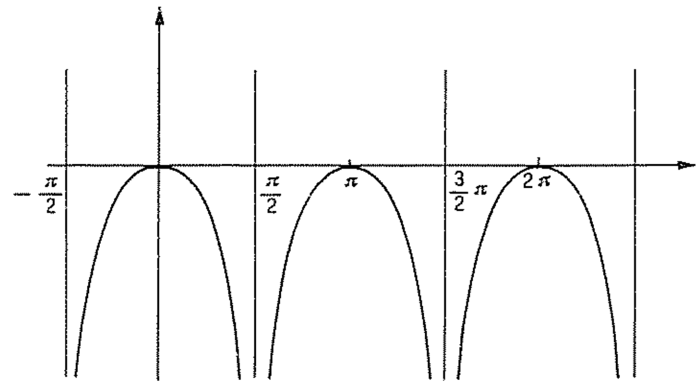


Figura 11

38) $f(x)=\frac{1}{1-2^{\frac{x}{x-1}}}$; C.d.e. $R-\{1,0\}$; $f'(x)=\frac{\log2\cdot2^{\frac{x}{x-1}}\cdot\frac{-1}{(x-1)^2}}{\left(1-2^{\frac{x}{x-1}}\right)^2}$; $f'(x)<0$ in $R-\{1,0\}$; ne segue che f(x) e str. decr. in $]-\infty,0[$, in $]0,1[$ ed in $]1,+\infty[$ (e non gia in $R-\{0,1\}$!) (cfr. fig. 12)

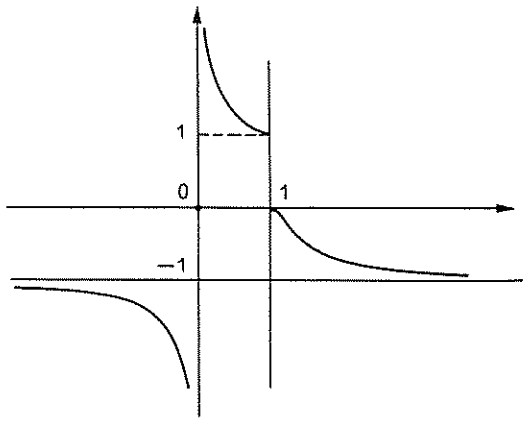


Figura 12

1.2 Ulteriori metodi per la ricerca degli estremi relativi

Per la ricerca degli estremi relativi di una funzione (specialmente quando lo studio del segno della derivata prima è particolarmente laboriosa) si può ricorrere al seguente utilissimo criterio:

C) ESTREMI RELATIVI

Sia $f(x)$ derivabile nei punti interni all'intervallo I e dotata di derivata seconda in x_0 interno ad I; si ha:

$$\left[\begin{array}{l} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0\ (>0) \end{array}\right] \Rightarrow x_0 \text{ p.to di max (min.) rel.}$$

Più in generale se $f(x)$ è derivabile $(n-1)$ volte in I ed n volte in x_0 con n pari si ha:

$$\left[\begin{array}{l} f'(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0 \\ f^{(n)}(x_0)<0\ (>0) \end{array}\right] \Rightarrow x_0 \text{ p.to di max (min.) rel.}$$

N.B. Se n è dispari:

$$\left[\begin{array}{l} f'(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0 \\ f^{(n)}(x_0)<0\ (>0) \end{array}\right] \Rightarrow x_0 \text{ p.to di cr. (decr.) per } f(x)$$

e quindi x_0 non è un estremo relativo.

Determinare gli estremi relativi delle seguenti funzioni:

1) $4x^6-6x^4$;	2) sen^3x;
3) $\text{sen}^2x-\cos x$;	4) $2\,\text{sen}x+x$;
5) $\text{sen}x-\sqrt{3}\cos x$;	6) $x^4\log\lvert x\rvert$;
7) $2\,\text{arctg}x-x$;	8) $\dfrac{x^2+1}{x}$;
9) $\dfrac{2-\text{sen}x}{2+\text{sen}x}$;	10) $\dfrac{1}{x^2-1}$;
11) $\sqrt{x}-x+4$;	12) $x^3+5\log\lvert x\rvert$;
13) $x\,e^{-1/x}$;	14) $e^{\cos x}-\cos x$;
15) $e^{-x}\cos x$;	16) $x-\sqrt{1-x^2}$;
17) $\text{tg}^3x-3\,\text{tg}x$;	18) $\text{sen}\log x$;
19) $3x\arcsin x+3\sqrt{1-x^2}-\pi x$;	20) $2\sqrt{(x+1)^3}-3x$;

21) tg^2x;

22) $\dfrac{tg^2(2x)}{1+tg^2(2x)}$;

23) $x-\cosh x$;

24) $\mathrm{senh}(x^2-1)$.

Il lettore potrà ulteriormente esercitarsi ritrovando i risultati degli esercizi 1)-38) del paragrafo precedente con l'ausilio del criterio C) sopra esposto, nei casi in cui detto criterio risulti applicabile.

Risposte

1) $x=\pm 1$ p.ti di min. rel.; $x=0$ p.to di max. rel.;

2) $\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}_{k\in Z}$ p.ti di max. rel.; $\{\pi/2+(2k+1)\pi\}$ p.ti di min. rel.;

3) $\{k\pi\}_{k\in Z}$ p.ti di min. rel., $\left\{\frac{2}{3}\pi+2k\pi\right\}_{k\in Z}$ e $\left\{\frac{4}{3}\pi+2k\pi\right\}_{k\in Z}$ p.ti di max. rel.;

4) $\left\{\frac{2}{3}\pi+2k\pi\right\}_{k\in Z}$ p.ti di max. rel.; $\left\{\frac{4}{3}\pi+2k\pi\right\}_{k\in Z}$ p.ti di min. rel.;

5) $\left\{\frac{5}{6}\pi+2k\pi\right\}_{k\in Z}$ p.ti di max. rel.; $\left\{\frac{5}{6}\pi+(2k+1)\pi\right\}_{k\in Z}$ p.ti di min. rel.

6) $x=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ p.ti di min. rel.;

7) $x=1$ p.to di max. rel. ed $x=-1$ di min. rel.;

8) $x=-1$ p.to di max. rel. ed $x=1$ di min. rel.;

9) $\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}_{k\in Z}$ p.ti di min. rel. e $\{\pi/2+(2k+1)\pi\}_{k\in Z}$ p.ti di max. rel.;

10) $x=0$ p.to di max. rel.;

11) $x=\frac{1}{4}$ p.to di max rel.;

12) $x=-1$ p.to di max. rel.;

13) $x=-1$ p.to di max. rel.;

14) $\{k\pi\}_{k\in Z}$ p.ti di max. rel. e $\{\pi/2+k\pi\}_{k\in Z}$ p.ti di min. rel.;

15) $\left\{\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right\}_{k\in Z}$ p.ti di min. rel.; $\left\{\frac{7}{4}\pi+2k\pi\right\}$ p.ti di max. rel.;

16) $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ p.to di min. rel.;

17) $\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\right\}_{k\in Z}$ p.ti di min. rel.; $\left\{\frac{3}{4}\pi+k\pi\right\}_{k\in Z}$ p.ti di max. rel.;

18) $\{e^{\pi/2+2k\pi}\}_{k\in Z}$ p.ti di max. rel., $\{e^{3/2\pi+2k\pi}\}_{k\in Z}$ p.ti di min. rel.;

19) $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ p.to di min. rel.;

20) $x=0$ p.to di min. rel.;

21) $x=k\pi$, $k\in Z$ p.ti di min. rel.;

22) $x=\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$ p.ti di min. rel. (Se si prolunga la funzione nei punti $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ ponendo $f\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)=1$, tali punti sono di max. rel.)

23) $x=\log(1+\sqrt{2})$ p.to di max. rel.;

24) $x=0$ p.to di min. rel.

Risoluzioni (da 1 a 10)

1) $f(x)=4x^6-6x^4$; C.d.e. R; $f'(x)=24(x^5-x^3)$; risolvendo l'equazione $f'(x)=24x^3(x^2-1)=0$ si trovano le soluzioni $x=0$, $x=\pm 1$; si ha:
$f''(x)=24(5x^4-3x^2)$ e quindi:
$f''(1)=48>0$, $f''(-1)=48>0$, $f''(0)=0$; ne segue che $x=\pm 1$ sono punti di minimo relativo mentre ancora nulla può dirsi per il punto $x=0$; calcolando le derivate successive si ha:
$f'''(x)=24(20x^3-6x)$; $\quad f'''(0)=0$
$f^{IV}(x)=24(60x^2-6)$; $\quad f^{IV}(0)=-6<0$
Quindi $x=0$ è p.to di massimo relativo.

2) $f(x)=\mathrm{sen}^3x$; C.d.e. R; $f'(x)=3\mathrm{sen}^2x\cos x$; si ha:
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=k\pi,\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ con $k\in Z$;
$f''(x)=6\mathrm{sen}x\cos^2x-3\mathrm{sen}^3x=6\mathrm{sen}x-9\mathrm{sen}^3x$. Si ha:
$f''\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=-3<0$, $f''\left(\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi\right)=3>0$, $f''(k\pi)=0$

Quindi i punti $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ sono di max. rel., i punti $\left(\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi\right)$ di min. rel., e nulla può dirsi sui punti $\{k\pi\}$; calcolando le derivate successive si ha:
$f'''(x) = 6\cos x - 27\,\mathrm{sen}^2 x \cos x$; $f'''(2k\pi)=6>0$, $f'''((2k+1)\pi)=-6<0$. Quindi i punti $\{2k\pi\}$ sono di crescenza ed i punti $\{(2k+1)\pi\}$ di decrescenza.

3) $f(x)=\mathrm{sen}^2 x-\cos x$; C.d.e. R; $f'(x)=2\,\mathrm{sen}x\cos x+\mathrm{sen}x = 0 \Leftrightarrow x=k\pi$, $x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$, $x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi$
$f''(x)=2(\cos^2 x-\mathrm{sen}^2 x) + \cos x$, si ha:
$f''(2k\pi) = 3>0$, $f''((2k+1)\pi)=1>0$, $f''(\frac{2}{3}\pi+2k\pi)=-\frac{3}{2}<0$,
$f''(\frac{4}{3}\pi+2k\pi) = -\frac{3}{2}<0$; quindi $\{k\pi\}_{k\in Z}$ sono punti di min. rel. e $\{\frac{3}{2}\pi+2k\pi,\ \frac{4}{3}\pi+2k\pi\}_{k\in Z}$ di max. rel.

4) $f(x)=2\,\mathrm{sen}x+x$; C.d.e. R; $f'(x)=2\cos x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$, $x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi$;
$f''(x)=-2\,\mathrm{sen}x$; si ha: $f''(\frac{2}{3}\pi+2k\pi) = -\sqrt{3}<0$, $f'(\frac{4}{3}\pi+2k\pi) = \sqrt{3}>0$;
ne segue che $\left\{\frac{2}{3}\pi+2k\pi\right\}_{k\in Z}$ sono p.ti di max. rel. e $\left\{\frac{4}{3}\pi+2k\pi\right\}_{k\in Z}$ di min. rel.

5) $f(x)=\mathrm{sen}x - \sqrt{3}\cos x$: C.d.e. R; $f'(x)=\cos x+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}x$;
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{6}\pi+k\pi$; si ha ancora:
$f''(x)=\sqrt{3}\cos x-\mathrm{sen}x$; $f''\left(\frac{5}{6}\pi+2k\pi\right)=-2<0$,
$f''\left(\frac{5}{6}\pi+(2k+1)\pi\right)=2>0$; quindi $\left\{\frac{5}{6}\pi+2k\pi\right\}_{k\in Z}$ sono p.ti di max. rel. e $\left\{\frac{5}{6}\pi+(2k+1)\pi\right\}_{k\in Z}$ di min. rel.

6) $f(x) = x^4 \log|x|$; C.d.e. $R-\{0\}$; $f'(x)=4x^3\log|x| + x^3$
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$
$f''(x)=12x^2\log|x| + 7x^2=x^2[12\log|x|+7]$; si ha:
$f''(\pm e^{-1/4})=\frac{4}{\sqrt{e}}>0$ e quindi $x=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ sono p.ti di min. rel. (cfr. fig. 11).

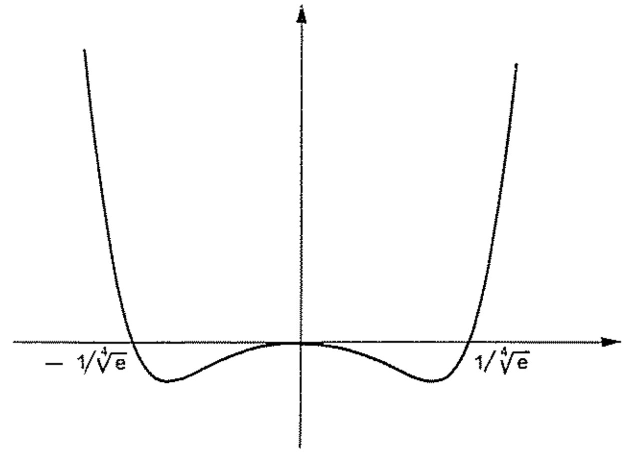


Figura 11

Se si prolunga la funzione in 0 ponendo $f(0)=\lim_{x\to 0} x^4\log|x|=0$ si ottiene facilmente, che x=0 è p.to di max. rel. poiché per $x\in]-1,1[-\{0\}$ si ha $f(x)<0$.

Il criterio C) non è comunque applicabile poiché (ed il lettore compirà un utile esercizio verificando ciò) f(x) una volta prolungata è dotata di derivate prima, seconda e terza in x=0 e si ha: $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$ mentre non esiste in x=0 la derivata quarta.

7) $f(x)=2\,\mathrm{arctg}x-x$; C.d.e. R; $f'(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ e quindi $f'(x)=0 \Leftrightarrow$ $x=\pm 1$; $f''(x)= -\frac{4x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(1)=-1<0$ e $f''(-1)=1>0$; quindi x=1

è p.to di max. rel. e $x=-1$ di min. rel.

8) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$; C.d.e. $R-\{0\}$; $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$; ne segue $f'(x)=0 \Leftrightarrow$ $x=\pm1$; si ha poi: $f''(x)=\frac{2}{x^3}$ e quindi $f''(-1)=-2<0$, $f''(1)=2>0$; in definitiva $x=-1$ è p.to di max. rel. ed $x=1$ di min. rel.

9) $f(x)=\frac{2-\text{sen}x}{2+\text{sen}x}$; C.d.e. R; $f'(x)=\frac{-4\cos x}{(2+\text{sen}x)^2}=0$ per $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ con $k\in Z$; si ha poi
$f''(x)=4\cdot\frac{\text{sen}x\,(2+\text{sen}x)^2+2\cos^2x\,(2+\text{sen}x)}{(2+\text{sen}x)^4}$ e quindi:
$f''(\pi/2+2k\pi)>0$, $f''(\pi/2+(2k+1)\pi)<0$; pertanto $\{\pi/2+2k\pi\}_{k\in Z}$ sono p.ti di min. rel e $\{\pi/2+(2k+1)\pi\}$ sono p.ti di max. rel.

10) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$; C.d.e. $R-\{1,-1\}$; $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}=0 \Leftrightarrow x=0$;
$f''(x)=2\frac{(1+3x^2)}{(x^2-1)^3}$ e quindi $f''(0)=-2<0$ cioè $x=0$ è un punto di max. rel.

1.3 Applicazioni

1) Dimostrare che l'equazione

$$\log x = 1+\frac{1}{x}$$

ha una sola soluzione $]0,+\infty[$ e determinarne un valore approssimato.

2) Dimostrare che l'equazione

$$x^7-10x+2=0$$

ha un'unica soluzione in $[0,1]$ e calcolarne con il metodo di bisezione un'approssimazione a meno di 10^{-4}.

3) Dimostrare che l'equazione

$$\text{tg}\,\frac{x^2}{2} + x^2-1 = 0 \qquad x\in[0,\sqrt{\pi}[$$

ha una sola soluzione e costruirne un'approssimazione a meno di 10^{-2} con il metodo di bisezione.

4) Studiare al variare di K in R l'equazione

$$\text{sen}2x - Kx = 0 \qquad x\in[0,\pi/4].$$

5) Determinare il numero delle radici dell'equazione

$$f(x) = e^{1/x}-x=0.$$

6) Studiare l'equazione

$$f(x)=e^x-kx=0$$

al variare del parametro $k\neq0$.

7) Determinare il numero di radici reali dell'equazione

$$f(x)=4x^5-5x^4+1=0$$

8) Studiare al variare del parametro $k\neq0$ l'equazione

$$f(x)=\log x-kx^2=0$$

9) Provare che si ha

$$\alpha>1 \Rightarrow x^\alpha+y^\alpha \le (x+y)^\alpha;\quad 0<\alpha<1 \Rightarrow x^\alpha+y^\alpha \ge (x+y)^\alpha$$

Risoluzioni

1) Poiché la funzione

$$f(x) = \log x - 1 - \frac{1}{x}, \quad x \in]0,+\infty[$$

è continua e si ha inoltre $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ dal teorema degli zeri segue che esiste almeno una soluzione della equazione $f(x)=0$. Poiché inoltre

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in]0,+\infty[$$

la funzione è strettamente crescente in $]0,+\infty[$ e quindi l'equazione $f(x)=0$ ammette una sola soluzione.
Osservato che si ha $f(2)<0$ ed $f(8)>0$ la soluzione x_0 cercata cadrà nell'intervallo $[2,8]$; un valore approssimato di x_0 può essere ottenuto adoperando il metodo di bisezione; detto x_n il valore che si trova dopo n iterazioni del metodo di bisezione si ha: $x_5 = 3.6875$, $x_{10}=3.58789$, $x_{20}=3.59112$ con

$|x_n - x_0| \le \frac{8-2}{2^n} = \frac{3}{2^{n-1}}$ (stima dell'errore).

Adoperando il metodo di Newton si ha:

$$x_0 = 2, \quad x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{(x_{n-1}\log x_{n-1} - 1 - x_{n-1})\, x_{n-1}}{x_{n-1}+1} \quad \text{e}$$

$x_5 = 3.59112$.

2) Posto $f(x)=x^7-10x+2$ si ha:
$f(0)=2>0$, $f(1)=-7<0$.
Quindi per il teorema degli zeri esiste una soluzione dell'equazione

$$x^7-10x+2=0.$$

Inoltre essendo

$$f'(x)=7x^6-10<0 \qquad \forall x \in [0,1]$$

la funzione è strettamente decrescente in $[0,1]$ e quindi la soluzione x_0 dell'equazione è unica.

Per trovare un'approssimazione di x_0 a meno di 10^{-4} usiamo il metodo di bisezione; detto x_n il valore che si trova dopo n iterazioni si ha la stima dell'errore seguente:

$$|x_n - x_0| \le \frac{1}{2^n}$$

e quindi

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^4} \Leftrightarrow n > \log_2 10^4 = 4\log_2 10.$$

Poiché $3<\log_2 10<4$ basterà prendere $n=16$. Si ha: $x_{15}=0.19998\ldots$ e tale valore è esatto fino alla quarta cifra decimale.

3) Posto $f(x)=\mathrm{tg}\frac{x^2}{2}+x^2-1$, si ha: $f(0)=-1<0$, $\lim_{x\to\sqrt{\pi}} f(x)=+\infty$; quindi applicando il teorema degli zeri si ricava che $f(x)$ ha almeno uno zero in $[0,\sqrt{\pi}[$, si ha poi:

$$f'(x) = x\left[\mathrm{tg}^2\frac{x^2}{2}+3\right] > 0 \quad \forall x \in [0,\sqrt{\pi}[;$$

quindi $f(x)$ è strettamente crescente e pertanto in $[0,\sqrt{\pi}[$ cade un solo zero che diciamo x_0; per trovarne un'approssimazione a meno di 10^{-2} con il metodo di bisezione basta trovare un n tale che

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2^n} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n > \log_2\left[100\cdot\sqrt{\pi}\right]$$

Si ricava facilmente che basta prendere $n=8$. Indicato con x_n il valore che si trova dopo n iterazioni del metodo di bisezione si ha $x_8=0,8046\ldots$

4) Posto $f(x)=\mathrm{sen}2x-kx$ si ha $f(0)=0$ e quindi $x=0$ è una radice dell'equazione $f(x)=0$. Inoltre si ha: $f'(x)=2\cos 2x-k$ e quindi:
$k\le 0 \Rightarrow f'(x)\ge 0$ in $[0,\pi/4] \Rightarrow f(x)$ strett. cresc. in $[0,\pi/4]$ $\Rightarrow x=0$ è l'unica radice dell'equazione in $[0,\pi/4]$;
$k\ge 2 \Rightarrow f'(x)\le 0$ in $[0,\pi/4] \Rightarrow f(x)$ strett. decrescente $\Rightarrow x=0$ è l'unica radice dell'equazione in $[0,\pi/4]$.
Sia adesso $0<k<2$. Si ha:

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \cos 2x > \frac{k}{2} \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \arccos \frac{k}{2}.$$

(Osservato che $0<\frac{k}{2}<1 \Rightarrow \arccos\frac{k}{2} \in]0,\pi/2[\Rightarrow \frac{1}{2}\arccos\frac{k}{2} \in]0,\frac{\pi}{4}[$

si ha:

$f(x)$ strett. cres. in $[0, \frac{1}{2} \arccos \frac{k}{2}]$, strett. decr. in $[\frac{1}{2} \arccos \frac{k}{2}, \frac{\pi}{4}]$.

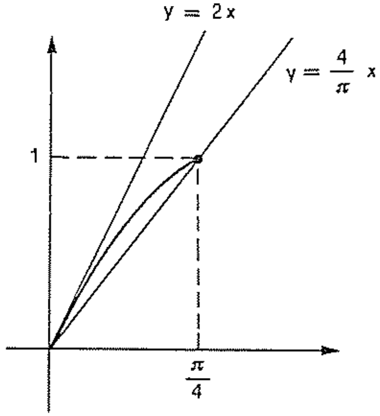
Pertanto (poiché $f(0)=0$) una radice dell'equazione diversa da 0 se esiste cade in $]\frac{1}{2} \arccos \frac{k}{2}, \frac{\pi}{4}]$.

Poiché si ha:

$$f\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{k}{2}\right)>0$$

nell'intervallo $]\frac{1}{2}\arccos\frac{k}{2},\frac{\pi}{4}]$ cadrà uno zero (ed uno solo) di $f(x)$ se e solo se $f(\frac{\pi}{4})\le 0$ cioè $1-k\frac{\pi}{4}\le 0 \Leftrightarrow k\ge\frac{4}{\pi}$.

In conclusione l'equazione $f(x)=0$ ha due soluzioni (di cui una è $x=0$) se $\frac{4}{\pi}\le k<2$; solo la soluzione $x=0$ negli altri casi (cfr. fig.)

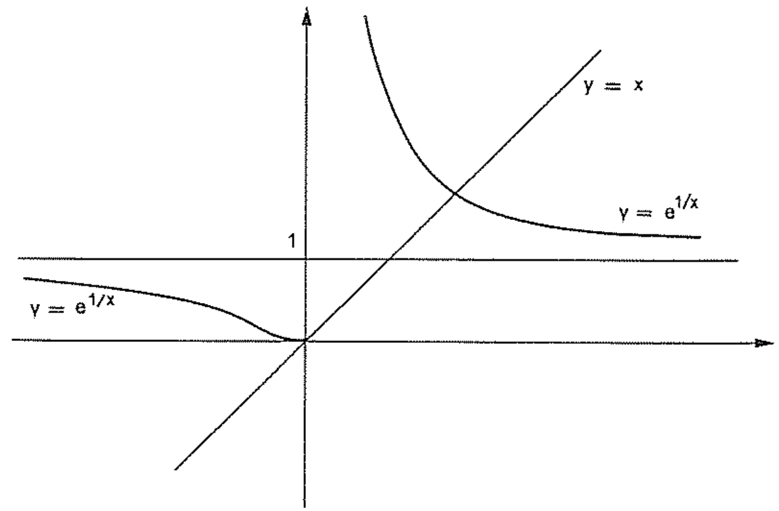


N.B. Si può pervenire al risultato studiando il grafico di $\text{sen}2x$, $x\in[0,\pi/4]$ e tracciando la tangente in 0 e la secante per $(0,0)$, $(\pi/4,1)$.

5) Si ha: $f'(x) = -\left[e^{1/x}\frac{1}{x^2}+1\right]<0 \quad \forall x\in R-\{0\}$

Quindi $f(x)$ è strettamente decrescente in $]-\infty,0[$ ed in $]0,+\infty[$.

Poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$, ne segue che l'equazione non ha radici in $]-\infty,0[$; poiché inoltre $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, allora in $]0,+\infty[$ cade una radice.



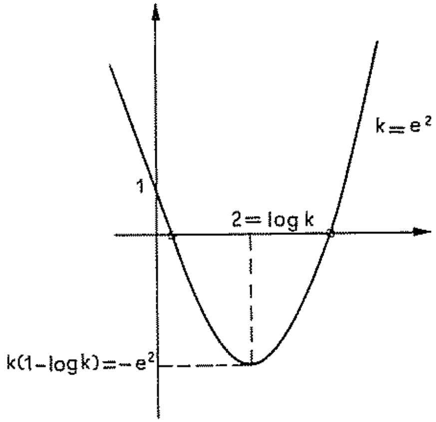
6) Sia dapprima $k>0$.

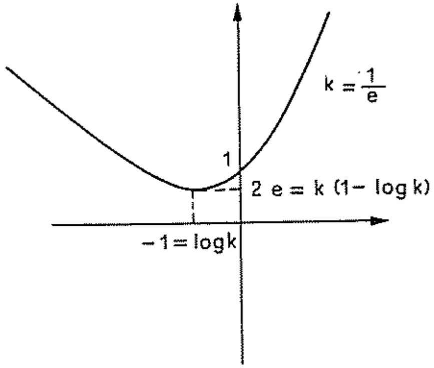
Si ha: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Inoltre $f'(x) = e^x-k>0 \Leftrightarrow x>\log k$. Pertanto $f(x)$ decr. str. in $]-\infty,\log k[$ da $+\infty$ a $f(\log k)=k[1-\log k]$ e cres. str. in $]\log k,+\infty[$ da $k[1-\log k]$ a $+\infty$; quindi (cfr. anche la fig.):

$1-\log k<0\ (k>e) \Rightarrow$ l'equazione ha due radici;

$1-\log k=0\ (k=e) \Rightarrow$ l'equazione ha una radice $(x=\log k=1)$;

$1-\log k>0\ (k<e) \Rightarrow$ l'equazione non ha radici



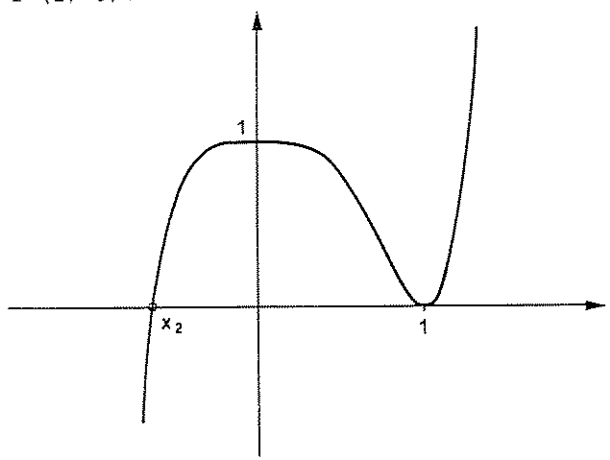


Sia ora $k<0$

Si ha:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; poiché $f'(x)=e^x-k>0$ $\forall x$ si ha subito che l'equazione ammette una sola soluzione.

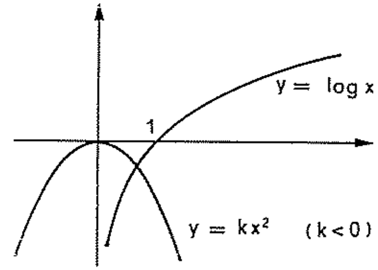
7) Si ha:
$f'(x)=20x^3(x-1)>0 \Leftrightarrow x<0$ e $x>1$
e pertanto $f(x)$ è strett. cres. in $]-\infty,0[$ ed in $]1,+\infty[$ e strett. decr. in $]0,1[$. Tenuto conto che
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $f(0)=1>0$, $f(1)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, si ha che la equazione ammette le due radici reali: $x_1=1$ ed $x_2\in\,]-\infty,0[$. (Si osservi inoltre che $x=1$ è una radice doppia poiché $f(1)=f'(1)=0$).



8) **Caso k<0**

Si ha: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}-2kx>0$ $\forall x\in\,]0,+\infty[$; pertanto l'equazione ha una sola soluzione.



Caso k>0

$f'(x) = \dfrac{1-2kx^2}{x}>0$ in $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{2k}}\right[$;

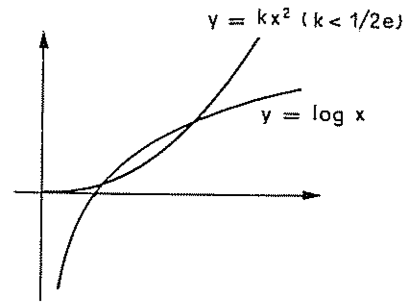
inoltre $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

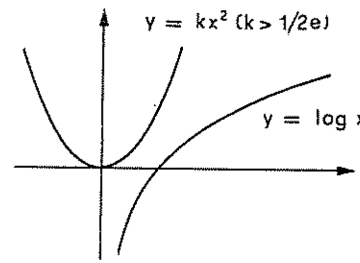
Pertanto la funzione cresce in $]0,1/\sqrt{2k}[$ da $-\infty$ a $f(1/\sqrt{2k})=$
$= -\dfrac{1}{2}\,(\log(2k)+1)$ a $-\infty$. Ne segue che

$-\dfrac{1}{2}\,(\log(2k)+1)>0 \Leftrightarrow 0<k<\dfrac{1}{2e} \Rightarrow$ l'equazione ha due soluzioni

$-\dfrac{1}{2}\,(\log(2k)+1) = 0 \Leftrightarrow k=\dfrac{1}{2e} \Rightarrow$ l'equazione ha una sola soluzione

$-\dfrac{1}{2}\,(\log(2k)+1)<0 \Leftrightarrow k>\dfrac{1}{2e} \Rightarrow$ l'equazione non ha soluzioni.





9) Sia $\alpha>1$. Se si ha $y=0$ e/o $x=0$ la diseguaglianza è banale (diviene infatti un'eguaglianza). Fissiamo $y>0$ e consideriamo le funzione di x

$$f(x)=(x+y)^{\alpha}-x^{\alpha}-y^{\alpha} \qquad x\in[0,+\infty[.$$

Si ha:

$$f'(x)=\alpha[(x+y)^{\alpha-1}-x^{\alpha-1}]>0$$

e quindi $f(x)$ è strettamente crescente in $[0,+\infty[$; ne segue: $x>0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow (x+y)^{\alpha} > x^{\alpha}+y^{\alpha}$.
Pertanto la diseguaglianza è dimostrata.

N.B. In realtà abbiamo dimostrato che se si ha $x>0$ ed $y>0$ la diseguaglianza è stretta.
Sia $0<\alpha<1$. La dimostrazione della diseguaglianza si ottiene allo stesso modo che nel caso $\alpha>1$ osservando che fissato $y>0$ questa volta si ha:

$$f'(x) = \alpha\ [(x+y)^{\alpha-1}-x^{\alpha-1}]<0 \ \forall x>0$$

poiché $0<\alpha<1 \Rightarrow \alpha-1<0 \Rightarrow (x+y)^{\alpha-1} < x^{\alpha-1}$.

2. Massimi e minimi assoluti; applicazioni

2.1 Ricerca dei punti di massimo e minimo assoluti

Sia $f(x)$ una funzione definita in I; un punto $\overline{x}$ si dirà di *massimo (minimo) assoluto se*

$$f(x) \le f(\overline{x}) \quad (f(x) \ge f(\overline{x})) \quad \forall x\in I.$$

Il numero reale $f(\overline{x})$ si dirà il *massimo (minimo) assoluto* di $f(x)$. Richiamiamo, per comodità del lettore, il classico *teorema di Weierstrass*:

i - *Se $f(x)$ è continua nell'intervallo I chiuso e limitato essa è dotata di massimo e minimo assoluto.*

Da tale risultato discendono vari corollari utili per la ricerca dei punti di massimo e minimo assoluto quando le ipotesi del teorema di Weierstrass non sono verificate. Ne richiamiamo qualcuno a titolo di esempio.

ii - *Se $f(x)$ è continua in $]a,b]$ e se $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty(-\infty)$, $f(x)$ è dotata di minimo (massimo) assoluto.*

Analogo risultato vale se $f(x)$ è continua in $[a,b[$ e riesce $\lim_{x\to b} f(x)=+\infty(-\infty)$ o $f(x)$ è continua in $]a,b[$ e riesce $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to b} f(x)=+\infty(-\infty)$.

iii - *Se $f(x)$ è continua in $]a,b]$ ed esiste un numero reale ℓ tale che*

i) $f(x) \ge(\le) \ \ell \ \forall x\in\ ]a,b]$

ii) $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$

allora $f(x)$ è dotata di massimo (minimo) assoluto.

Risultati analoghi valgono nel caso in cui $f(x)$ sia continua in $[a,b[$ od in $]a,b[$.

Infine osserviamo esplicitamente che i risultati ii e iii e le successive osservazioni valgono anche nel caso in cui sia $a=-\infty$ e/o $b=+\infty$.
Riportiamo schematicamente il metodo per la ricerca dei punti di minimo e di massimo.

Massimi e minimi assoluti.

Sia f(x) una funzione definita in un intervallo I (limitato o non, ed ivi dotata di massimo e/o minimo assoluto; i punti di massimo e/o di minimo assoluto devono necessariamete cadere tra i seguenti:

α) i punti interni ad I in cui si ha $f'(x)=0$;

β) i punti interni ad I in cui f(x) non è derivabile;

γ) gli estremi di I (se appartengono ad I).

Basterà quindi selezionare tra i punti soddisfacenti alle condizioni α), β), γ) quelli in cui f(x) assume il massimo e/o il minimo valore.

N.B. Per applicare correttamente il procedimento indicato *bisogna sapere a priori* che la funzione ammette minimo e/o massimo.

Stabilire se le seguenti funzioni sono dotate, negli intervalli indicati, di massimo e/o di minimo assoluto; ciò posto determinare gli eventuali punti di massimo e/o di minimo assoluto

1) e^x-x $\quad [-1,3]$; 2) $2\,\text{arctg}x-x$ $\quad [0,\sqrt{3}[$;

3) x^3-3x $\quad [-\sqrt{3},3/2]$; 4) $|x^2-x|$ $\quad [-2,3]$;

5) $x\,e^{-\frac{1}{x}}$ $\quad]0,+\infty[$; 6) $x^2\,e^{-|x|}$ $\quad]-\infty,+\infty[$;

7) $x+\sqrt{1-x^2}$ $\quad [-1,1]$; 8) $\sqrt{|x|}+\sqrt{|1-x|}$ $\quad [-2,2]$;

9) $\dfrac{x}{\log x}$ $\quad]1,+\infty[$; 10) $f(x)=\begin{cases} x^x & \text{per } x>0 \\ 1 & \text{per } x=0 \end{cases}$ $\quad [0,+\infty[$;

11) $\text{arcsen}\,\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ $\quad]-\infty,+\infty[$; 12) $\log x-x$ $\quad]0,+\infty[$;

13) $\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad]-\infty,+\infty[$; 14) $e^{-x}\cos x$ $\quad [0,2\pi]$;

15) $\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$ $\quad]-\pi,\pi[$; 16) $\dfrac{|x^2-4|}{x^2+4}$ $\quad]-\infty,+\infty[$;

17) $\log(1+|x|-x)$ $\quad [-1,2]$; 18) $\cosh\dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad]-\infty,+\infty[$.

Risposte

1) p.to di min. $x=0$; p.to di max. $x=3$;
2) p.to di min. $x=0$; p.to di max. $x=1$;
3) $x=-1$ p.to di max.; $x=1$ p.to di min.;
4) $x=0$ ed $x=1$ p.ti di min; $x=-2$; $x=3$ p.ti di max.
5) la funzione è limitata inferiormente: $\inf f(x)=0$, ma non superiormente $\sup f(x)=+\infty$;
6) $x=0$ p.to di min.; $x=\pm 2$ p.ti di max.;
7) $x=-1$ p.to di min. ed $x=1/\sqrt{2}$ p.to di max.;
8) $x=0$ ed $x=1$ p.ti di min., $x=-2$ p.to di max.;
9) $\sup f(x)=+\infty$; $x=e$ p.to di min.;
10) $\sup f(x)=+\infty$; $x=1/e$ p.to di min.;
11) $\sup f(x)=\pi/2$ ma la funz. non ha max.; $x=0$ p.to di min.;
12) $x=1$ p.to di max.; $\inf f(x)=-\infty$;
13) $x=0$ p.to di min.; $\sup f(x)=1$ ma f(x) è priva di max. ass.;
14) $x=\frac{3}{4}\pi$ p.to di min. $x=0$ p.to di max;
15) $\inf f(x)=-\infty$; $x=0$ p.to di max;
16) $x=0$ p.to di max $x=\pm 2$ p.ti di min;
17) $x=-1$ p.to di max, $x\in[0,2]$ p.ti di min;
18) $x=0$ p.to di max.; $\inf f(x)=1$ ma la funzione non ha min.

Risoluzioni (da 1 a 18)

1) $f(x)=e^x-x$, $x\in[-1,3]$. La funzione data è continua nell'intervallo compatto $[-1,3]$ e quindi ammette massimo e minimo

in forza del teor. di Weierstrass. Si ha:

$$f'(x)=e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Poiché non vi sono punti in cui f(x) non è derivabile (cfr.β)) i punti di minimo e di massimo vanno ricercati tra i punti {0,-1,3} cioè tra i punti in cui si annulla f'(x) (cfr. α)) e gli estremi dell'intervallo (cfr. γ)). Si ha:

$$f(0)=1 < f(-1)=1+\frac{1}{e} < f(3)=e^3-3$$

e quindi: x=0 p.to di min. ass., x=3 p.to di max. ass (1 ed e^3-3 sono risp. il minimo ed il massimo assoluto; cfr. fig. 12).

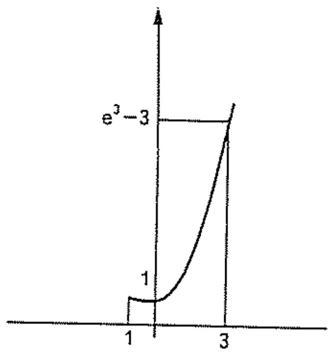


Figura 12

2) $f(x)=2\operatorname{arctg}x-x$ è continua in $[0,\sqrt{3}]$ e quindi è ivi dotata di minimo e di massimo;

$f'(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}=0 \Rightarrow x=\pm1$; il punto x=-1 si scarta poiché non appartiene all'intervallo $[0,\sqrt{3}]$; il max. ed il min. vanno ricercati tra i punti $\{0,1,\sqrt{3}\}$. Si ha:

$$f(0)=0 < f(\sqrt{3})=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3} < f(1)=\frac{\pi}{2}-1$$

e quindi

$$\min f(x)=f(0)=0, \quad \max f(x)=f(1)=\frac{\pi}{2}-1$$ (cfr. fig. 13).

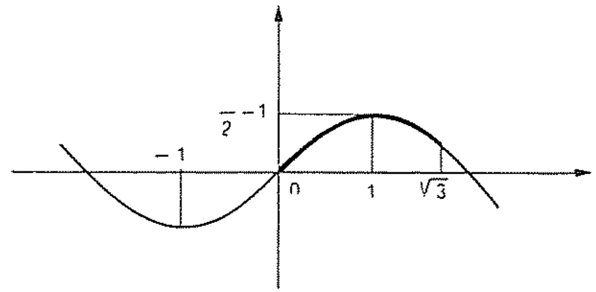


Figura 13

3) $f(x)=x^3-3x$ è continua nell'intervallo compatto $[-\sqrt{3},3/2]$ e quindi è dotata di massimo e di minimo; si ha $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=\pm1$; il max ed il min di f(x) vanno ricercati tra i punti $\{-1,+1,-\sqrt{3},3/2\}$ (cfr. fig. 14).
Si ha:

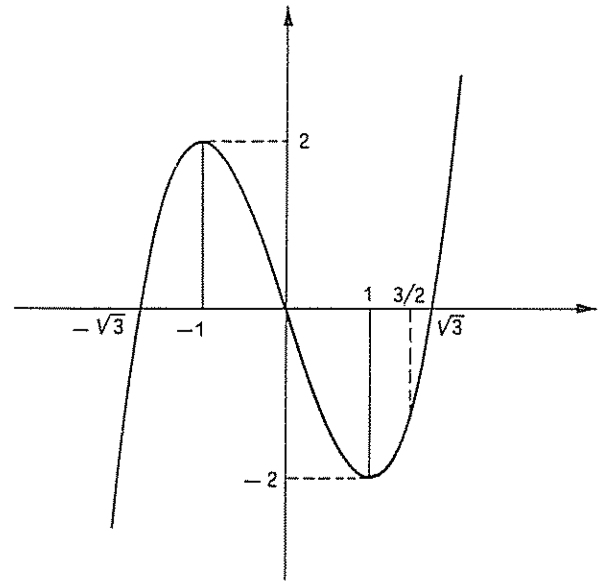


Figura 14

$f(1)=-2 < f(3/2)=-\frac{9}{8} < f(-\sqrt{3})=0 < f(-1)=2$; quindi

$\max\limits_{[-\sqrt{3},3/2]} f(x)=f(-1)=2$, $\quad \min\limits_{[-\sqrt{3},3/2]} f(x)=f(1)=-2$.

4) $f(x)=|x^2-x|$ in $[-2,3]$; per il teor. di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo nell'intervallo considerato; si ha:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x & \text{in } [-2,0] \cup [1,3] \\ x-x^2 & \text{in } [0,1] \end{cases};$$

si ha poi:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{in }]-2,0[\cup]1,3[\\ 1-2x & \text{in }]0,1[\end{cases}$$

e la funzione non è derivabile nei punti $x=0$ e $x=1$ avendosi $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$, $f'_+(1)=1$, $f'_-(1)=-1$; inoltre $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1/2$. Quindi il massimo ed il minimo di $f(x)$ vanno ricercati tra i punti $\{-2, 3, 1/2, 0, 1\}$. (cfr. fig. 15).

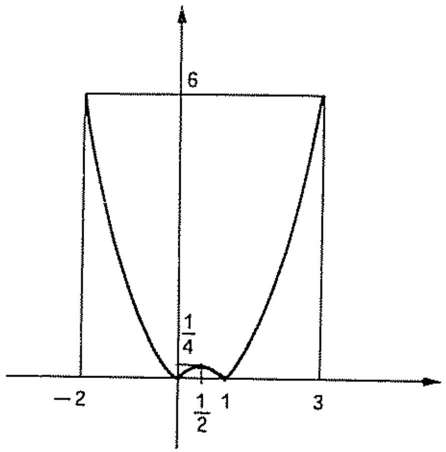


Figura 15

Si ha:
$f(0)=0=f(1) < f(1/2)=1/4 < f(3)=f(-2)=6$. Quindi:

$\min f(x)=f(0)=f(1)=0$; $\quad \max f(x)=f(3)=f(-2)=6$.

5) $f(x)=xe^{-\frac{1}{x}}$, $x\in]0,+\infty[$; si ha:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$; da ciò tenendo conto che $f(x)>0$ $\forall x>0$ si deduce che la funzione non ha minimo in $]0,+\infty[$ e si ha:

$\inf\limits_{]0,+\infty[} f(x)=0$. (Se si prolunga per continuità la funzione in 0 ponendo $f(0)=0$ allora $f(0) = \min\limits_{[0,+\infty[} f(x)$). Si ha poi:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ e quindi $f(x)$ non è limitata superiormente:

$\sup\limits_{]0,+\infty[} f(x)=+\infty$ (fig. 16).

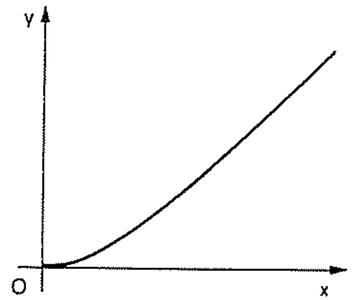


Figura 16

6) $f(x)=x^2 e^{-|x|}$, $x\in]-\infty,+\infty[$; si ha:

$f(x)\geq 0$ $\forall x\in]-\infty,+\infty[$; $f(0)=0 \Rightarrow \min\limits_{]-\infty,+\infty[} f(x)=f(0)=0$.

Osserviamo inoltre che: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$; dal teor. iii segue allora $f(x)$ ammette massimo in $]-\infty,+\infty[$; si ha:

$$f'(x)=\begin{cases} e^{-x}\cdot x\,[2-x] & x\geq 0 \\ e^{x}\, x\,[2+x] & x<0 \end{cases}$$

e quindi $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, $x=2$, $x=-2$.
Allora il massimo di $f(x)$ va ricercato tra i punti $\{-2,2\}$ (il punto $x=0$ va scartato poiché come già visto è il punto di minimo). Si ha:

$\max\limits_{]-\infty,+\infty[} f(x) = f(2) = f(-2) = \frac{4}{e^2}$ (cfr. fig. 17).

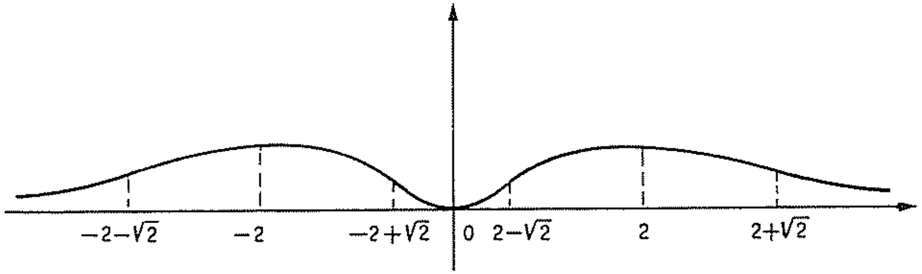


Figura 17

7) $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ $x\in[-1,1]$; la funzione ammette minimo e massimo per il teor. di Weierstrass; si ha:

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}=0 \iff x=1/\sqrt{2};$$

il max. ed il min. vanno cercati tra i punti $\{-1,1,\ 1/\sqrt{2}\}$; si ha:

$f(-1)=-1 < f(1)=1 < f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$; quindi:

$f(-1)=\min\limits_{[-1,1]} f(x)$ ed $f(1/\sqrt{2})=\max\limits_{[-1,1]} f(x)$ (cfr. fig. 18).

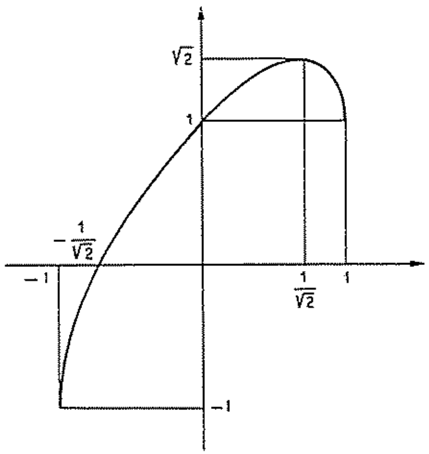


Figura 18

8) $f(x)=\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|}$, $x\in[-2,2]$. Per il teor. di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo. Si ha:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}+\sqrt{1-x} & x\in[-2,0] \\ \sqrt{x}+\sqrt{1-x} & x\in[0,1] \\ \sqrt{x}+\sqrt{x-1} & x\in[1,2]\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{2\sqrt{-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}} & x\in[-2,0[\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}} & x\in]0,1[\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & x\in]1,2]\end{cases}$$

la funzione data non è derivabile in $x=0$ ed $x=1$ avendosi $f'_-(0)=-\infty$, $f'_+(0)=+\infty$, $f'_-(1)=-\infty$, $f'_+(0)=+\infty$.
Si ha poi:
$f'(x)=0 \iff x=1/2$; quindi i punti di estremo assoluto vanno ricercati nell'insieme $\{-2,2,1/2,0,1\}$; poiché si ha:
$f(0)=f(1)=1 < f(1/2)=\sqrt{2} < f(2)=\sqrt{2}+1 < f(-2)=\sqrt{2}+\sqrt{3}$
(cfr. fig. 19).

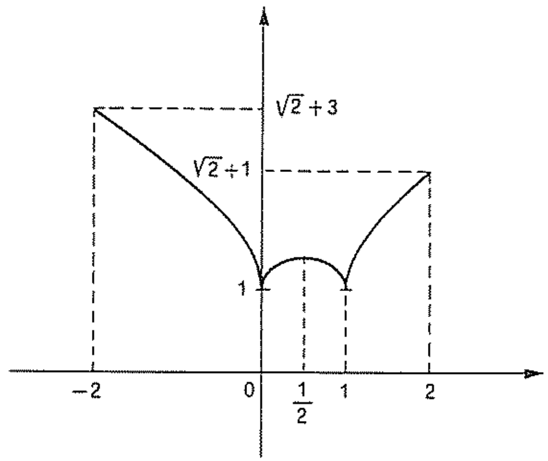


Figura 19

ne segue che $x=0$ ed $x=1$ sono i punti di minimo assoluto ed $x=-2$ è il punto di massimo assoluto.

9) $f(x)=\dfrac{x}{\log x}$, $x\in\,]1,+\infty[$; tenendo presente che $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ si ha:

1) $f(x)$ non è limitata superiormente;

2) poiché $f(x)$ è continua essa è dotata di minimo assoluto (cfr. teor. ii); d'altro canto il punto di minimo assoluto non potrà che essere uno zero di $f'(x)$ (che esiste in ogni punto di $]1,+\infty[$); pertanto osservato che:

$$f'(x)=\frac{\log x-1}{\log^2 x}=0 \Leftrightarrow x=e$$

ne segue: $\min\limits_{]1,+\infty[} f(x)=f(e)=e$ (cfr. fig. 20).

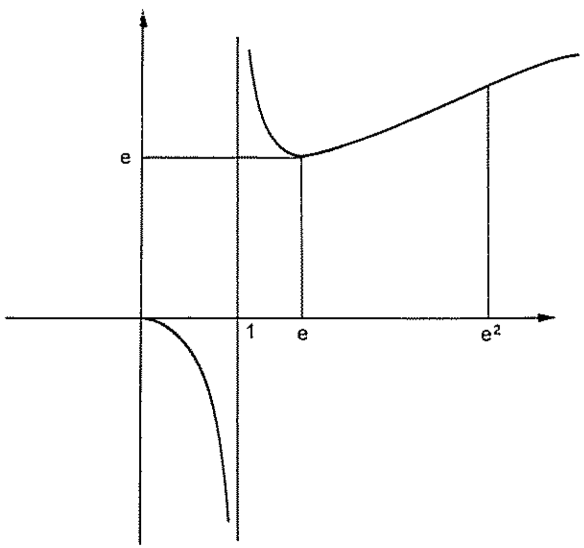


Figura 20

10) $f(x)=\begin{cases} x^x \text{ per } x\in\,]0,+\infty[\\ 1 \text{ per } x=0 \end{cases}$ e quindi, poiché $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$, la funzione data è continua in $[0,+\infty[$; osservato che: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ne segue, sulla falsariga dell'es. 9, che

1) $f(x)$ non è limitata superiormente;

2) $f(x)$ ammette minimo assoluto in $[0,+\infty[$;

il punto di minimo assoluto è $x=0$ od uno zero di $f'(x)$ (che esiste in ogni punto di $]0,+\infty[$); si ha:

$$f'(x)=x^x\,[\log x+1]=0 \Leftrightarrow x=1/e$$

e poiché

$$f(0)=1 > f(1/e)=\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$$

ne segue che $x=1/e$ è il p.to di minimo cercato. (cfr. fig. 21).

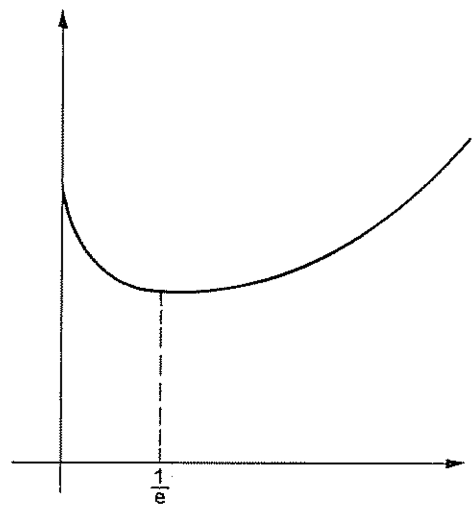


Figura 21

11) $f(x)=\operatorname{arcsen}\frac{x^2-1}{x^2+1}$, $x\in\,]-\infty,+\infty[$; poiché $-\frac{\pi}{2} \le \operatorname{arcsen} y \le \frac{\pi}{2}$ per ogni $y\in[-1,1]$ dall'eguaglianza $f(0)=\operatorname{arcsen}(-1)=-\frac{\pi}{2}$ segue che la funzione è dotata di minimo assoluto in $x=0$. D'altro canto si ha: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}$; pertanto $\sup\limits_{]-\infty,+\infty[} f(x)=\frac{\pi}{2}$. Se la funzione fosse dotata di massimo assoluto in un punto $\bar{x}$ dovrebbe aversi $f(\bar{x})=\operatorname{arcsen}\frac{\bar{x}^2-1}{\bar{x}^2+1} = \frac{\pi}{2} =\operatorname{arcsen}1$ e ciò è impossibile poiché $\frac{x^2-1}{x^2+1} \neq 1$ $\forall x\in R$. Quindi $f(x)$ è limitata superiormente ma priva di massimo (cfr. fig. 22).

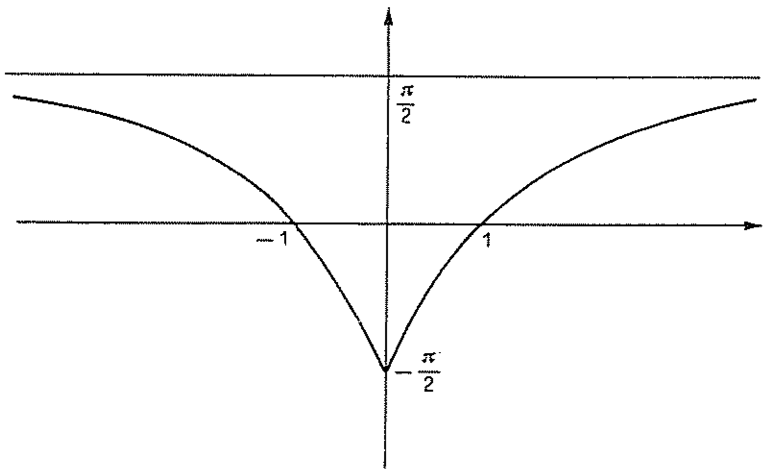


Figura 22

12) $f(x)=\log x-x$, $x\in\,]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)= \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow \inf f(x)=-\infty$; tenendo conto che $f(x)$ è continua in $]0,+\infty[$ si ricava, dal teor. ii che $f(x)$ è dotata di max. assoluto; d'altro canto un punto di massimo assoluto non può che essere uno zero di $f'(x)$ (che esiste in tutto $]0,+\infty[$); pertanto osservato che:

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

ne segue che: $\max\limits_{]0,+\infty[} f(x) = f(1) = -1$ (cfr. fig. 23).

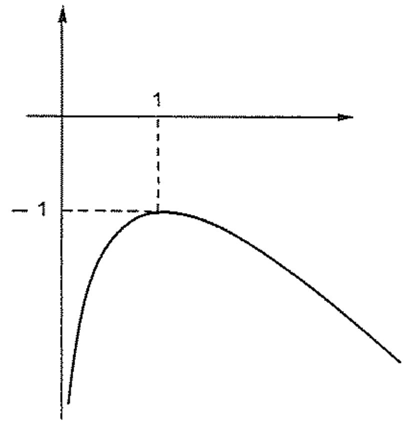


Figura 23

13) $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\,]-\infty,+\infty[$;

Poiché si ha $f(x)\geq 0$ $\forall x\in R$ ed $f(0)=0$ ne segue:

$$\min_{]-\infty,+\infty[} f(x)=f(0)=0;$$

si ha ancora:

$$\begin{cases} f(x) < 1 \quad \forall x\in R; \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1; \end{cases}$$

ne segue che: $\sup f(x)=1$ e che la funzione non ammette massimo poiché non si ha mai $f(x)=1$ (fig. 24).

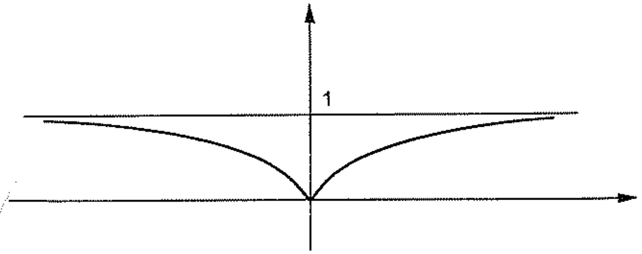


Figura 24

14) $f(x)=e^{-x}\cos x$, $x\in[0,2\pi]$; $f(x)$ ammette massimo e minimo per il teor. di Weierstrass; si ha:

$$f'(x)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\,\mathrm{sen}\,x=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}\pi,\ x=\frac{7}{4}\pi.$$

I punti di max. e min. vanno ricercati nell'insieme

$$\left\{0,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ 2\pi\right\}.$$

Poiché

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2e^{(3/4)\pi}}<f(2\pi)=\frac{1}{e^{2\pi}}<f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{7}{4}\pi}}<f(0)=1$$

si ha:

$$\min_{[0,2\pi]} f(x)=f\left(\frac{3}{4}\pi\right);\ \max_{[0,2\pi]} f(x)=f(0)\ \text{(cfr. fig. 25)}.$$

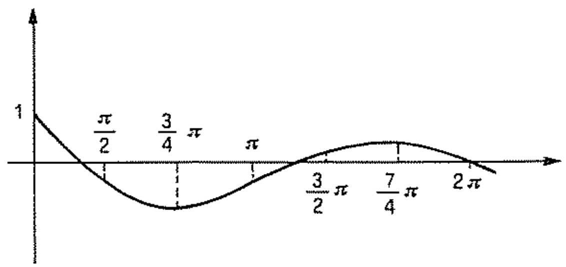


Figura 25

15) $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$, $x\in\,]-\pi,\pi[$; $\lim\limits_{x\to\pm\pi} f(x)=-\infty$ e quindi $f(x)$ non è limitata inferiormente; d'altronde $f(x)$ è continua (e derivabile) in $]-\pi,\pi[$ e quindi (cfr. teor. ii) $f(x)$ è dotata di massimo assoluto; si ha:

$$f'(x)=\frac{-\mathrm{sen}\,x}{(1+\cos x)^2}=0 \Leftrightarrow x=0 \ (\text{in }]-\pi,\pi[),$$

quindi $\max\limits_{]-\pi,\pi[} f(x)=f(0)=\dfrac{1}{2}$ poiché il punto di massimo (che sappiamo esistere) non potrà che essere uno zero di $f'(x)$ (cfr. fig. 26).

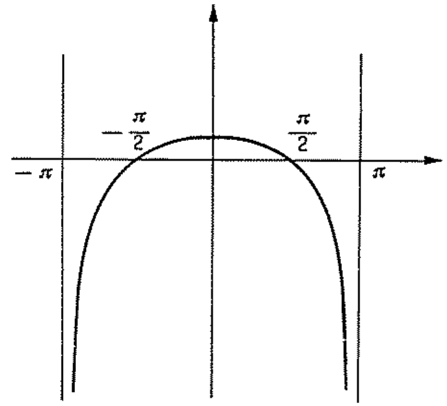


Figura 26

16) $f(x)=\dfrac{|x^2-4|}{x^2+4}$, $x\in\,]-\infty,+\infty[$; che $f(x)$ sia dotata di minimo si ottiene subito osservando che: $f(x)\geq 0\ \forall x\in R$; ne segue: $0=f(2)=f(-2)=\min\limits_{]-\infty,+\infty[} f(x)$.

Si ha poi:

$$\frac{|x^2-4|}{x^2+4}\leq 1\ \forall x\in\,]-\infty,+\infty[\ \text{ed}\ f(0)=1;$$

quindi: $\max_{]-\infty,+\infty[} f(x)=f(0)=1$ (fig.27).

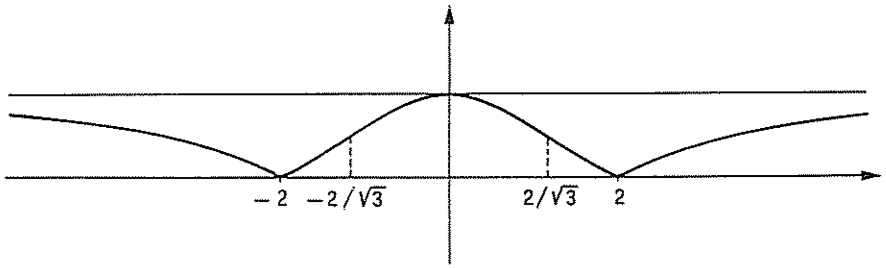


Figura 27

17) $f(x)=\log(1+|x|-x)$, $x\in[-1,2]$; si ha:

$$f(x)=\begin{cases}\log 1=0 & x\in[0,2]\\ \log(1-2x) & x\in[-1,0]\end{cases}$$

Poiché $f'(x)=\dfrac{-2}{1-2x}$ in $[-1,0]$ e quindi $f'(x)<0$ in $[-1,0]$ si conclude facilmente (cfr. fig. 28):

$$\min_{[-1,2]} f(x)=0=f(\bar{x})\ \forall \bar{x}\in[0,2];\quad \max_{[-1,2]} f(x)=\log 3=f(-1).$$

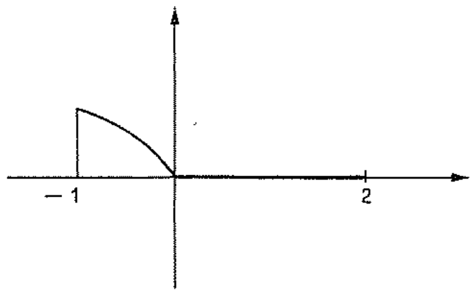


Figura 28

18) Dalle relazioni:

$$\cosh\frac{1}{1+x^2}>1\ \forall x\in\,]-\infty,+\infty[,\quad \lim_{x\to\pm\infty}\cosh\frac{1}{1+x^2}=1$$

si ha che la funzione data è priva di minimo assoluto ed ha 1 per estremo inferiore; inoltre essendo continua tale funzione sarà dotata di massimo assoluto (cfr. teor. iii). Avendosi

$$f'(x)=-\operatorname{senh}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^2}=0\ \Leftrightarrow\ x=0$$

ne consegue che x=0 è il punto di massimo assoluto.

2.2 Applicazioni

Risolvere i seguenti esercizi:

1) tra le coppie di numeri reali non negativi di fissata somma $h>0$ determinare quella per cui è massimo il prodotto;
2) tra i triangoli isosceli di assegnato perimetro 2p determinare quello di area massima;
3) tra i rettangoli inscritti in una circonferenza di raggio r determinare quello di area massima;
4) tra i trapezi isosceli inscritti in una semicirconferenza di raggio r determinare quello di perimetro massimo;
5) tra i cilindri circolari retti di assegnato volume V determinare quello di minima superficie totale;
6) tra le piramidi rette a base quadrata di assegnata superficie laterale S determinare quella di volume massimo;
7) per quali valori del parametro a il punto x=0 è di minimo assoluto per $f(x)=e^{a^2x}-x$;
8) per quale valore del parametro a il punto x=2 è di massimo assoluto per $f(x)=\sqrt{1-(a-x)^2}$;
9) tra i triangoli isosceli circoscritti ad un cerchio di raggio r determinare quello la cui rotazione intorno all'altezza genera il cono di volume minimo;
10) tra le coppie di numeri positivi di fissato prodotto $p>0$ determinare quella per cui è minima la somma dei quadrati;

11) tra i cilindri circolari retti aventi la somma tra il raggio di base e l'altezza eguale ad un fissato numero $A>0$, determinare quello di volume massimo;

12) data una retta r e due punti distinti A e B situati nello stesso semipiano, determinare su r un punto P tale che sia minima la somma delle distanze di P da A e da B (*riflessione*);

13) data una retta r e due punti A e B situati in semipiani distinti determinare su r un punto P tale che sia minima la quantità: $\lambda\overline{PA} + \mu\overline{PB}$ con $\lambda>0$, $\mu>0$ fissati (*rifrazione*);

14) in un sistema di riferimento cartesiamo ortogonale sia dato il punto $P\equiv(2,1)$; tra le rette passanti per P determinare quella che incontrando in A il semiasse positivo delle ascisse ed in B il semiasse positivo delle ordinate individua il triangolo AOB di area minima;

15) dato un punto $P\equiv(x_0,y_0)$ ed una retta r di equazione $y=mx+n$ dimostrare che la distanza di P da r è: $\dfrac{|y_0-mx_0-n|}{\sqrt{1+m^2}}$.

Risposte

1) $(h/2,\ h/2)$;

2) il triangolo equilatero;

3) il quadrato;

4) la base minore ha lunghezza r;

5) raggio di base $=\sqrt[3]{V/2\pi}$, altezza $=2\sqrt[3]{V/2\pi}$;

6) il lato del quadrato di base è $\sqrt{S}/\sqrt[4]{3}$;

7) $a=\pm1$;

8) $a=2$;

9) il triangolo cercato avrà altezza $4r$ e base $2r\sqrt{2}$;

10) $(\sqrt{p},\ \sqrt{p})$;

11) raggio di base $2A/3$ ed altezza $A/3$;

12) assunto un riferimento cartesiano con r≡asse delle ascisse, $A\equiv(0,a)$, $B\equiv(b_1,\ b_2)$ $a>0$, $b_1>0$, $b_2>0$ il punto P cercato ha per ascissa x l'unica soluzione dell'eq. $\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \dfrac{b_1-x}{\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}}$;

13) assunto un riferimento cartesiano con r≡asse delle ascisse, $A\equiv(0,a)$, $B\equiv(b_1,\ b_2)$ con $a>0$, $b_1>0$, $b_2<0$ il punto P cercato ha per ascissa l'unica soluzione dell'equazione $\dfrac{\lambda}{\sqrt{x^2+a^2}} =$
$= \dfrac{\mu\ (b_1-x)}{\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}}$;

14) $y=-\dfrac{x}{2}+2$.

Risoluzioni (da 1 a 15)

1) Detta (x,y) una coppia di numeri non negativi di somma $h>0$ si ha: $x+y=h \Rightarrow y=h-x$ e quindi:

$$x\cdot y = x\cdot(h-x);$$

bisognerà pertanto cercare il massimo della funzione $f(x)=x\cdot(h-x)$ nell'intervallo $[0,h]$ (infatti: $x+y=h$ ed $y\geq0$ $\Rightarrow x\leq h$); tale massimo esiste per il teorema di Weierstress. Si ha:

$$f'(x)=h-2x = 0 \Leftrightarrow x=\frac{h}{2};$$

ne segue che il punto di massimo va ricercato nell'insieme $\{0,\ h,\ h/2\}$;

Poichè $f(0)=f(h)=0 < f(h/2)=\frac{h^2}{4}$ ne segue che il massimo è raggiunto in corrispondenza del punto $x=\frac{h}{2}$ e cioè dalla coppia $(h/2,\ h/2)$.

2) Si faccia riferimento alla fig. 29;

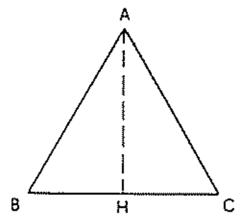


Figura 29

posto $|AC| = |AB| = x$ si ha:
$|HC| = p-x$ e quindi $|AH| = \sqrt{x^2-(p-x)^2} = \sqrt{2px-p^2}$.

Quindi la funzione da massimizzare (area del triangolo) è:

$$A(x) = (p-x)\cdot\sqrt{2px-p^2}$$

nell'intervallo $\left[\frac{p}{2},\ p\right]$; si ha:

$$A'(x)=-\sqrt{2px-p^2} + \frac{(p-x)p}{\sqrt{2px-p^2}} = \frac{-3px+2p^2}{\sqrt{2px-p^2}} = 0 \Leftrightarrow x=\frac{2p}{3};$$

il punto di massimo cadrà nell'insieme $\{p/2,\ p,\ 2p/3\}$ ed avendosi:

$$A(p)=A(p/2)=0 < A(2p/3) = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

ne segue che il punto di massimo è $x=2p/3$ e cioè: il triangolo di area massima è quello equilatero.

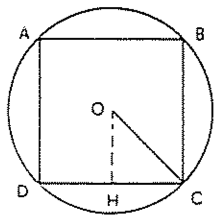


Figura 30

3) Si faccia riferimento alla fig. 30;
$|OC|=r$; posto $|OH|=x$ si ha: $|HC| = \sqrt{r^2-x^2}$ e quindi la funzione da studiare è (area del rettangolo):

$$A(x)=|DC|\cdot|BC| = 2\,|HC|\cdot 2\,|OH| = 4x\sqrt{r^2-x^2}$$

nell'intervallo $[0,r]$ (infatti: $0\le x=|OH|\le|OC|=r$); si ha:

$$A'(x) = 4\sqrt{r^2-x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = 4\,\frac{r^2-2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = 0$$

e cioè $x=r/\sqrt{2}$ (in $[0,r]$); ne segue che il punto di massimo cade nell'insieme $\{0,r,r/\sqrt{2}\}$; poiche si ha:

$$A(0)=A(r)=0 < A(r/\sqrt{2})=2r^2$$

ne segue che il punto massimo è $x=r/\sqrt{2}$, da qui poichè:

$$x=\frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow |DC| = 2\,|HC| = \frac{2r}{\sqrt{2}} \text{ e } |BC| = 2|OH| = \frac{2r}{\sqrt{2}}$$

segue che il rettangolo di area massima, tra quelli considerati, è il quadrato.

4) Si faccia riferimento alla fig. 31;

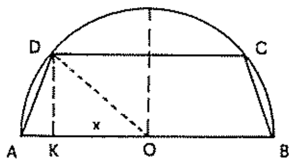


Figura 31

$|AO|=r$; posto $|OK|=x$ $(0\le x\le r)$ si ha: $|DK|=\sqrt{r^2-x^2}$ e quindi:

$$|AD|=\sqrt{(r-x)^2+(r^2-x^2)}=\sqrt{2r^2-2rx};$$

il problema posto è quindi ricondotto a quello della ricerca del massimo della funzione (perimetro del trapezio):

$$P(x)=2r+2x+2\sqrt{2r^2-2rx},\quad x\in[0,r];$$

si ha:

$$P'(x)=2\cdot\frac{\sqrt{2r^2-2rx}-r}{\sqrt{2r^2-2rx}}=0 \iff x=\frac{r}{2};$$

quindi il punto di massimo cadrà nell'insieme $\{0,r,r/2\}$; si ha inoltre:

$$P(r)=4r < P(0)=2(1+\sqrt{2})r < P(r/2)=5r$$

e quindi il massimo è raggiunto nel punto $x=r/2$.

5) si faccia riferimento alla fig. 32;

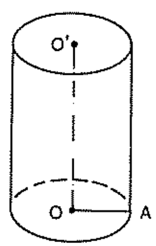


Figura 32

V=volume del cilindro; posto $|OA|=x$, si ha: $|OO'|=\frac{V}{\pi x^2}$ e quindi la funzione da minimizzare (superficie totale) sarà:

$$S(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x\,\frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x},\quad x\in\,]0,+\infty[.$$

Poiché: $\lim_{x\to 0^+} S(x) = \lim_{x\to+\infty} S(x)=+\infty$ la funzione essendo continua ammette minimo assoluto; ovviamente il punto di minimo assoluto sarà uno zero di $S'(x)$;

$$S'(x)=2\left[2\pi x-\frac{V}{x^2}\right]=0 \iff x=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Quindi il minimo cercato si ha per $x=\sqrt[3]{V/(2\pi)}$.

6) Si faccia riferimento alla fig. 33;

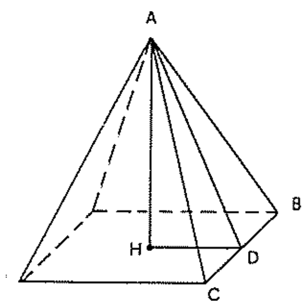


Figura 33

S=superficie laterale=2 $|AD|\cdot|BC|$

Posto $|BC| = x$ si ha; $|AD| = \frac{S}{2x}$.

Inoltre $|AD| \ge |DH| \Rightarrow \frac{S}{2x} \ge \frac{x}{2} \Rightarrow 0 \le x \le \sqrt{S}$.

Si ha ancora: $|AH| = \sqrt{\frac{S^2}{4x^2}-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2x}\sqrt{S^2-x^4}$.

Allora la funzione da massimizzare è (volume della piramide):

$$V(x) = \frac{1}{6}x\sqrt{S^2-x^4},\quad x\in\left[0,\sqrt{S}\right],$$

e tale funzione ha massimo per il teorema di Weierstrass. A tale funzione possiamo sostituire il suo quadrato moltiplicato per 36 che è più facile da studiare:

$$f(x) = 36\,V^2(x) = x^2\,(S^2-x^4),\quad x\in[0,\sqrt{S}].$$

(Ovviamente $V(x)$ ed $f(x)$ assumono il massimo nello stesso punto). Si ha:

$$f'(x) = 2x\,(S^2-3x^4)$$

e l'unico zero di $f'(x)$ interno all'intervallo $[0,\sqrt{S}]$ è $x=\sqrt{S}/\sqrt[4]{3}$;

Poiché $f(0) = f(\sqrt{S}) = 0 < f\left(\sqrt{S}/\sqrt[4]{3}\right) = 2\sqrt{3}/9\ S^3$ ovviamente $x=\sqrt{S}/\sqrt[4]{3}$ è il punto di massimo cercato.

7) La funzione $f(x) = e^{a^2x}-x$ è definita e derivabile in tutto R qualunque sia il parametro reale a. Se $a=0$ si ha $f(x)=-x$ ed in tal caso la funzione non è limitata inferiormente e quindi, a fortiori, è priva di minimo. Se $a\neq 0$ si ha: $\lim_{x\to+\infty} f(x)= \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; ne segue che $f(x)$ è dotata di minimo (cfr. fig. 34) ed il punto di minimo non può che essere uno zero di $f'(x)$; si ha:

$$f'(x) = a^2e^{a^2x}-1$$

e quindi

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow a^2-1 = 0 \Leftrightarrow a=\pm 1.$$

Pertanto $x=0$ è punto di minimo assoluto se e solo se $a=\pm 1$.

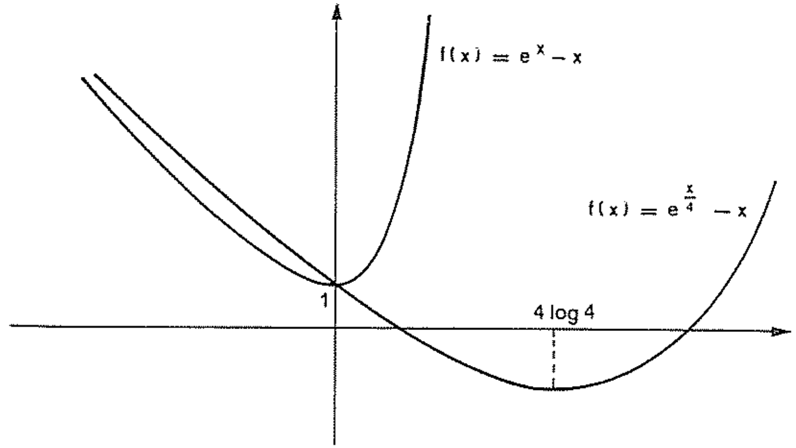


Figura 34

8) La funzione $f(x)=\sqrt{1-(a-x)^2}$ è continua in $[a-1,\ a+1]$ e derivabile in $]a-1,\ a+1[$; poiché $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a-1,\ a+1]$ e: $f(a-1)=f(a+1)=0$ il punto di massimo non può che essere uno zero di $f'(x)$ appartenente all'intervallo $]a-1,\ a+1[$; si ha:

$$f'(x) = \frac{a-x}{\sqrt{1-(a-x)^2}} = 0 \Leftrightarrow x = a. \text{ (fig. 35)}$$

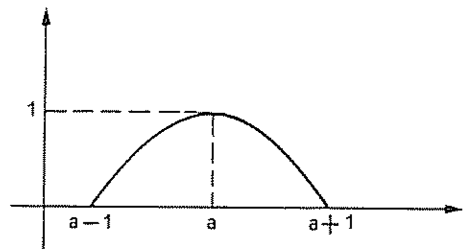


Figura 35

Pertanto $x=2$ è di massimo assoluto se e solo se $a=2$.

9) Si faccia riferimento alla fig. 36;

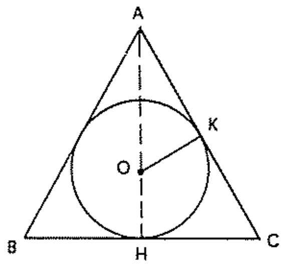


Figura 36

$|OH| = r$; posto $|AO| = x$ si ha $|AK| = \sqrt{x^2-r^2}$ e per similitudine tra i triangoli AOK ed AHC si ha:

$$\frac{|AH|}{|HC|} = \frac{|AK|}{|OK|} \text{ e quindi: } |HC| = \frac{r\cdot(x+r)}{\sqrt{x^2-r^2}};$$

la funzione da minimizzare (volume del cono) sarà:

$$V(x)=\frac{\pi}{3}\,\frac{r^2(x+r)^2}{x^2-r^2}\cdot(x+r)=\frac{\pi}{3}\,r^2\,\frac{(x+r)^2}{(x-r)};\quad x\in\,]r,+\infty[;$$

tale funzione ammette minimo poiché: $\lim\limits_{x\to r^+} V(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} V(x) = +\infty$ ed il punto di minimo sarà uno zero di $V'(x)$; si ha:

$$V'(x)=\frac{\pi}{3}\,r^2\,\frac{(x+r)\,(x-3r)}{(x-r)^2} = 0 \iff x=3r.$$

Quindi $x=3r$ individua il triangolo cercato.

10) Detta (x,y) una coppia di numeri positivi tale che $x\cdot y=p$ si ha: $y=p/x$ e quindi $x^2+y^2=x^2+p^2/x^2$; pertanto la funzione da minimizzare è:

$$f(x) = x^2 + \frac{p^2}{x^2},\quad x\in\,]0,+\infty[;$$

si ha:

$$f'(x) = 2x-2\,\frac{p^2}{x^3} = 2\,\frac{x^4-p^2}{x^3}>0 \iff x>\sqrt{p} \text{ (cfr. fig. 37).}$$

Quindi la funzione $f(x)$ è str. cres. in $[\sqrt{p},+\infty[$ e str. decr. in $]0,\sqrt{p}]$; ne segue che $x=\sqrt{p}$ è punto di minimo assoluto e quindi $(\sqrt{p},\sqrt{p})$ è la coppia cercata.

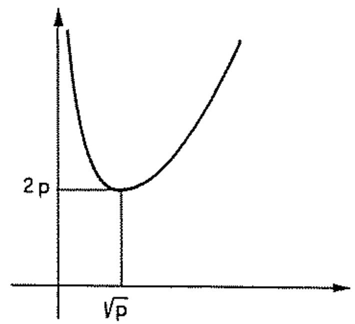


Figura 37

11) Si faccia riferimento alla fig. 38;

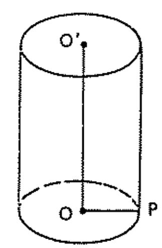


Figura 38

$|OP| + |OO'| = A>0$; posto $|OP|=x$ si ha $|OO'| = A-x$ e la funzione da massimizzare è (volume del cilindro):

$$V(x) = \pi x^2\,(A-x),\quad x\in[0,A];$$

si ha:

$$V'(x) = \pi x\,(2A-3x)$$

e quindi $x = 2/3A$ è il punto di massimo assoluto poiché $V(x)$ cresce in $[0, 2A/3]$ e decresce in $[2A/3, A]$.

12) Si faccia riferimento alla fig. 39; siano $(0, a)$ le coordinate di A, (b_1, b_2) quelle di B ed $(x, 0)$ quelle di P. La funzione da minimizzare è

$$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{(x-b_1)^2+b_2^2},\quad x\in\,]-\infty,+\infty[.$$

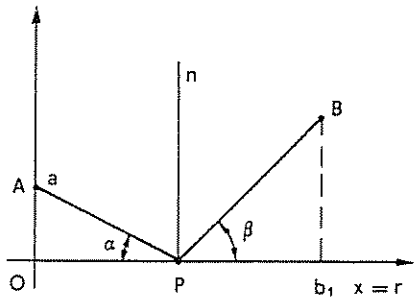


Figura 39

Osservato che: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, si ha che $f(x)$ essendo continua, ammette minimo assoluto; ovviamente un punto di minimo assoluto non può che essere uno zero di $f'(x)$.
Si ha:

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{x-b_1}{\sqrt{(x-b_1)^2+b_2^2}}$$

e quindi

$$f'(x)=0 \iff \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{b_1-x}{\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}};$$

se x è una soluzione di tale equazione non può aversi $x\le 0$ né $x\ge b_1$ (ricorda che $b_1>0$) poiché in entrambi i casi i due membri dell'equazione avrebbero segni opposti; quindi le soluzioni dell'equazione cadono in $]0, b_1[$.

È possibile dimostrare che la soluzione dell'equazione scritta sopra è unica (ricorda che almeno una soluzione esiste poiché abbiamo già osservato che $f(x)$ ha minimo assoluto e che un punto di minimo assoluto deve essere uno zero di $f'(x)$); l'unicità della soluzione discende dal fatto che $f(x)$ è strettamente convessa (cfr. esercizio 21 par. 3) e quindi per ogni coppia di punti distinti vale la disuguaglianza:

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$; se si avesse $f(x_1)=f(x_2)=m=\min f(x)$ si arriverebbe subito ad un assurdo: avendosi $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{m+m}{2} = m$ contro l'ipotesi che m sia il minimo di $f(x)$.

N.B. È facile osservare che se x è la soluzione dell'equazione $f'(x)=0$ e P è il punto di ascissa x (cfr. fig. 39) allora $\cos\alpha=\cos\beta$ e cioè $\alpha=\beta$. La soluzione x cercata altro non è che l'ascissa del punto P di intersezione tra l'asse x e la congiungente A con il simmetrico di B rispetto all'asse x.

13) Si faccia riferimento alla fig. 40;

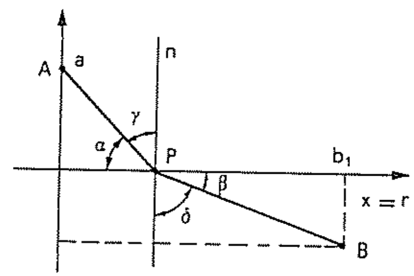


Figura 40

$A\equiv(a,0)$ $a>0$, $B\equiv(b_1,b_2)$ $b_1>0$, $b_2<0$, $P(x,0)$; la funzione da minimizzare è

$$f(x)=\lambda\sqrt{a^2+x^2}+\mu\sqrt{(x-b_1)^2+b_2^2};$$

ragionando come nell'esercizio 12) si ha che $f(x)$ è dotata di minimo assoluto e che un punto x di minimo assoluto è soluzione dell'equazione

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\lambda x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{\mu(b_1-x)}{\sqrt{(b_1-x)^2+b_2^2}}$$

e non può che appartenere all'intervallo $]0,b_1[$; ancora dalla stretta convessità di $f(x)$ segue, come nell'esercizio 29, che la soluzione dell'equazione $f'(x)=0$ è unica.
N.B. Si ha ancora facilmente che se x è la soluzione dell'equazione $f'(x)=0$ e P è il punto di ascissa x (cfr. fig. 39) allora si ha: $\lambda\cos\alpha=\mu\cos\beta$ o, ciò che è lo stesso, $\lambda\operatorname{sen}\gamma=\mu\operatorname{sen}\delta$.

14) Si faccia riferimento alla fig. 41;

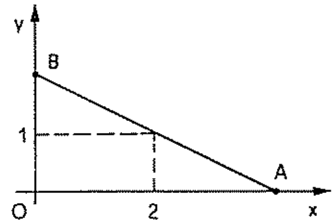


Figura 41

sia $y=m(x-2)+1$ l'equazione di una retta per $P\equiv(2,1)$ di coefficiente angolare m; si ha:

$x=0 \Rightarrow y=1-2m;$

$y=0 \Rightarrow x=\dfrac{2m-1}{m}.$

Affinché sia $1-2m>0$ e $\dfrac{2m-1}{m}>0$ dovrà essere $m<0$.
La funzione da minimizzare (area del triangolo OAB) sarà:

$$A(m)=\frac{(1-2m)\quad(2m-1)}{2m}=-\frac{(2m-1)^2}{2m},\quad m\in]-\infty,0[.$$

Avendosi: $\lim_{m\to 0^-} A(m)=\lim_{m\to-\infty} A(m)=+\infty$ ed essendo la funzione continua si ha che essa è dotata di minimo assoluto; ovviamente il punto di minimo sarà uno zero di $A'(m)$.
Si ha:

$$A'(m)=-\frac{1}{2}\,\frac{(2m-1)\,(2m+1)}{m^2}=0 \Leftrightarrow m=-1/2 \quad (\text{in }]-\infty,0[).$$

Quindi $y=-\dfrac{x}{2}+2$ è la retta cercata.

15) La distanza tra $P\equiv(x_0, y_0)$ ed un punto generico della retta $y=mx+n$ è data da:

$$d(x)=\sqrt{(x-x_0)^2+(mx+n-y_0)^2},\quad x\in R.$$

Minimizzare tale funzione è equivalente a minimizzare il suo quadrato

$$d^2(x)=f(x)=(x-x_0)^2+(mx+n-y_0)^2\ x\in R.$$

Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$ si ha che il minimo assoluto di $f(x)$ esiste; il punto di minimo assoluto è ovviamente uno zero di $f'(x)$; si ha:

$$f'(x)=2[x-x_0+m(mx+n-y_0)]=0 \Leftrightarrow x=\frac{x_0+y_0m-nm}{1+m^2}$$

e quindi il valore di x trovato, essendo l'unico zero di $f'(x)$, è il punto di minimo cercato. Si ha:

$$\min f(x)=f\left(\frac{x_0+my_0-mn}{1+m^2}\right)=\frac{m^2(y_0-n-mx_0)^2}{(1+m^2)^2}+\frac{(mx_0+n-y_0)^2}{(1+m^2)^2}=$$

$$=\frac{(mx_0+n-y_0)^2}{1+m^2}\Rightarrow d=\min d(x)=\sqrt{\min f(x)}=\frac{|mx_0+n-y_0|}{\sqrt{1+m^2}}$$

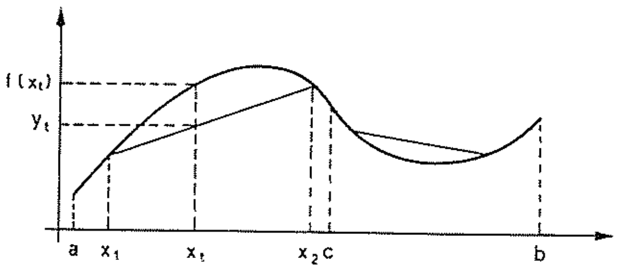
3. Convessità, concavità, flessi

3.1 Convessità e concavità in intervalli, flessi

Ricordiamo che una funzione $f(x)$ si dice *convessa* (*concava*) in un intervallo I se per ogni coppia di punti distinti x_1 ed x_2 appartenenti ad I si ha

$$f(tx_1+(1-t)x_2)\leq(\geq)tf(x_1)+(1-t)f(x_2),\ \forall t\in[0,1];$$

se tale disuguaglianza è stretta per $t\in]0,1[$ $f(x)$ si dirà *strettamente convessa* (*concava*) in I.



$x_t=tx_1+(1-t)x_2$
$y_t=tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$

$f(x)$ è str. concava in $[a,c]$ e str. convessa in $[c,b]$

Alla nozione di concavità e convessità in un intervallo, che ha carattere globale, si affianca quella di concavità e convessità in un punto che qui di seguito richiamiamo.

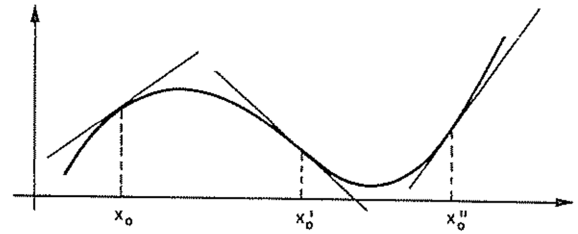
Sia $f(x)$ derivabile in un punto x_0 dell'intervallo I; si dirà che $f(x)$ è *concava* (*convessa*) in x_0 se esiste un $h>0$ tale che si abbia

$$f(x)\leq(\geq)\ f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\quad \forall x\in\ ]x_0-h,\ x_0+h[\cap I.$$

Le nozioni di concavità e convessità in un intervallo ed in un punto sono collegate dal seguente risultato:

una funzione concava (convessa) in ogni punto di un intervallo I è concava (convessa) in I

Ricordiamo infine che un punto x_0 in cui $f(x)$ è derivabile senza essere né concava né convessa si dice *punto di flesso*



in x_0 $f(x)$ è conc.
in x'_0 $f(x)$ ha un flesso
in x''_0 $f(x)$ è conv.

Riassumiamo adesso nello schema sottostante le informazioni che si possono ottenere dallo studio del segno della derivata seconda di una funzione

A) CONCAVITÀ E CONVESSITÀ

Sia $f(x)$ dotata di derivata seconda in un intervallo I; si ha:

i) $f''(x)\geq 0\ (\leq 0)$ in I $\Leftrightarrow$ $f(x)$ convessa (concava) in I

ii) $f''(x)\geq(\leq)0$ in I ed $f''(x)$ non si annulla in alcun intervallo $J\subseteq I$ $\Leftrightarrow$ $f(x)$ strett. convessa (concava) in I

B) FLESSI

Sia $f(x)$ dotata di derivata seconda in I ed x_0 un punto interno ad I; si ha:

iii) $\exists h>0: \begin{cases} f''(x)\geq 0 \text{ in }]x_0-h,\ x_0] \\ f''(x)\leq 0 \text{ in } [x_0, x_0+h[\end{cases} \Rightarrow x_0$ è punto di flesso

Studiare la convessità, la concavità ed individuare i punti di flesso delle seguenti funzioni (abbozzando l'andamento del grafico):

1) x^3-x;
2) x^4+1;
3) $\dfrac{x^2}{x^2+1}$;
4) $\dfrac{1}{x^3-x}$;
5) $2\sqrt{x+1}-x$;
6) $x\log x$;
7) $x-\log|x|$;
8) $\dfrac{\log x}{x}$;
9) $xe^{1/x}$;
10) $e^{x/(x-1)}$;
11) $2\cos x+x$;
12) $\operatorname{sen}x+\cos x$;
13) $\operatorname{arctg}\log x$;
14) $|x|\, e^{1/|x|}$;
15) $\log x+|1-x^2|$;
16) $x^4\log|x|$;
17) $\dfrac{x^2+1}{x}$;
18) $e^x\cos x$;
19) $2\operatorname{arctg}x-x$;
20) $|x^2-x|$;
21) $\lambda\sqrt{a^2+x^2}+\mu\sqrt{(x-b)^2+c^2}$ $(b>0,\ \lambda>0,\ \mu>0)$;
22) $x^2\, e^{-|x|}$;
23) $\dfrac{x^2+1}{|x^2-1|}$;
24) $x+\sqrt{1-x^2}$;
25) $\sqrt{|x|}+\sqrt{|1-x|}$;
26) $\dfrac{x}{\log x}$;
27) $\operatorname{arcsen}x^2$;
28) $\dfrac{\log x+1}{\log x-1}$;
29) $\log\log x$;
30) $\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$;

31) $\operatorname{arcsen}\dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+2}$;
32) $\dfrac{|x+1|}{e^x}$;
33) tg^2x;
34) $\operatorname{tg}x+2\log|\cos x|$;
35) $\log|\cos nx|$;
36) $\operatorname{sen}nx-x$.

Risposte

1) conv. in $]0,+\infty[$, conc. in $]-\infty,0[$, $x=0$ flesso;
2) convessa in $]-\infty,+\infty[$;
3) conv. in $[-1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}]$, conc. in $]-\infty,\ 1/\sqrt{3}]$ ed in $[1/\sqrt{3},\ +\infty[$; $x=\pm1/\sqrt{3}$ flessi;
4) conv. in $]-1,0[$ ed in $]1,+\infty[$; conc. in $]-\infty,\ -1[$, ed in $]0,1[$;
5) conc. in $[-1,+\infty[$;
6) conv. in $]0,+\infty[$;
7) conv. in $]-\infty,0[$ ed in $]0,+\infty[$;
8) conv. in $[e\sqrt{e}$, conc. in $]0,e\sqrt{e}]$; $x=e\sqrt{e}$ p.to di flesso;
9) conv. in $]0,+\infty[$ e conc. in $]-\infty,0[$;
10) conv. in $[1/2,1[$ ed in $]1,+\infty[$; conc. in $]-\infty,1/2]$; $x=1/2$ p.to di flesso;
11) conv. $[\pi/2+2k\pi,\ 3\pi/2+2k\pi]$, conc. in $[-\pi/2+2k\pi,\ \pi/2+2k\pi]$ con $k\in Z$; $x=\pi/2+k\pi$ con $k\in Z$ p.ti di flesso;
12) conv. in $[3\pi/4+2k\pi,\ 7\pi/4+2k\pi]$, conc. in $[7\pi/4+2k\pi,\ 11\pi/4+2k\pi]$; $x=3\pi/4+k\pi$ p.ti di flesso con $k\in Z$;
13) conc. in $]0,+\infty[$;
14) conv. in $]-\infty,0[$ ed in $]0,+\infty[$;
15) conc. in $]0,1]$, conv. in $[1,+\infty[$.
16) conv. in $[e^{-7/12},+\infty[$ ed in $]-\infty,-e^{-7/12}]$, conc. in $[-e^{-7/12},0[$ ed in $]0,e^{-7/12}]$; $x=\pm e^{-7/12}$ p.ti di flesso;
17) conc. in $]-\infty,0[$; conv. in $]0,+\infty[$;
18) conv. in $[(2k+1)\pi,\ (2k+2)\pi]$, conc. in $[2k\pi,\ (2k+1)\pi]$, $x=k\pi$ punti di flesso con $k\in Z$;
19) conv. in $]-\infty,0]$ ed in $[0,+\infty[$; $x=0$ p.to di flesso;
20) conv. in $]-\infty,0]$ ed in $[1,+\infty[$; conc. in $[0,1]$;
21) conv. in $]-\infty,+\infty[$;
22) conv. in $]-\infty,-2-\sqrt{2}]$, $[-2+\sqrt{2},2-\sqrt{2}]$, $[2+\sqrt{2},+\infty[$, conc. in $[-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}]$ ed in $[2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}]$; i punti $x=\pm(2+\sqrt{2})$, $\pm(2-\sqrt{2})$ sono di flesso;

23) conv. in $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $]1,+\infty[$;
24) conc. in $[-1,1]$;
25) conc. in $]-\infty,0]$ in $[0,1]$ ed in $[1,+\infty[$;
26) conv. in $]1,e^2]$, conc in $]0,1[$ ed in $[e^2,+\infty[$; $x=e^2$ p.to di flesso;
27) conv. in $[-1,1]$;
28) conv. in $]0,1/e]$ ed in $[e,+\infty[$; conc. in $[1/e, e[$; $x=1/e$ p.to di flesso;
29) conc. in $]1,+\infty[$;
30) conc. in $[0,1/8]$ ed $]1,+\infty[$; conv. in $]-\infty,0]$ ed in $[1/8,1[$; $x=1/8$ p.to di flesso;
31) conc. in $]-\infty,-1]$ ed in $[-1,+\infty[$;
32) conv. in $]-\infty,-1]$ ed in $[1,+\infty[$; conc. in $[-1,1]$; $x=\pm 1$ p.ti di flesso;
33) conv. in ogni intervallo $]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$ con $k\in Z$;
34) conv. in $[\pi/4+k\pi, \pi/2+k\pi[$ conc. in $]-\pi/2+k\pi, \pi/4+k\pi]$; $x=\pi/4+k\pi$ p.ti di flesso (con $k\in Z$);
35) conv. in $]-\infty,+\infty[$;
36) conv. in $[0,+\infty[$, conc. in $]-\infty,0]$; $x=0$ p.to di flesso.

Risoluzioni

1) $f(x)=x^3-x$; c.d.e. $]-\infty,+\infty[$; $f'(x)=3x^2-1$, $f''(x)=6x$; si ha: $f''(x)>0$ in $]0,+\infty[$, $f''(x)<0$ in $]-\infty,0[$. Quindi $f(x)$ è convessa in $]0,+\infty[$, concava in $]-\infty,0[$ ed ha un punto di flesso in $x=0$ (osserva anche che $f''(0)=0$, $f'''(0)=6\neq 0$) (fig. 1).

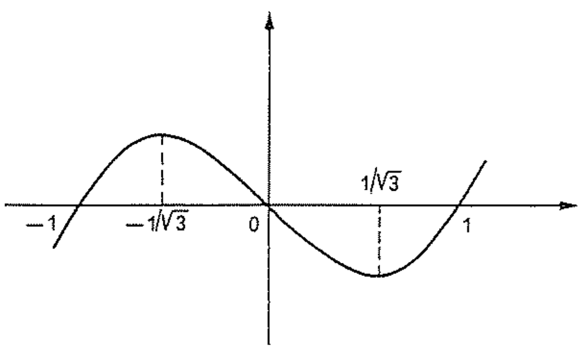


Figura 1

2) $f(x)=x^4+1$; c.d.e. $]-\infty,+\infty[$; $f'(x)=4x^3$; $f''(x)=12x^2\geq 0$ $\forall x\in\ ]-\infty,+\infty[$; la funzione è convessa in tutto R (fig. 2).

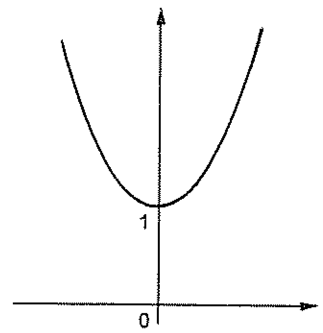


Figura 2

3) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$; c.d.e. $]-\infty,+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$; $f''(x)=\dfrac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}>0$ per $x\in\ ]-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}[$, $f''(x)<0$ per $x\in\ ]-\infty, -1/\sqrt{3}[\ \cup\ ]1/\sqrt{3},+\infty[$; quindi $f(x)$ è convessa in $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ (concava in $]-\infty, -1/\sqrt{3}]$ ed in $[1/\sqrt{3},+\infty[$ ed ha un flesso nei punti $x=\pm 1/\sqrt{3}$ (fig. 3).

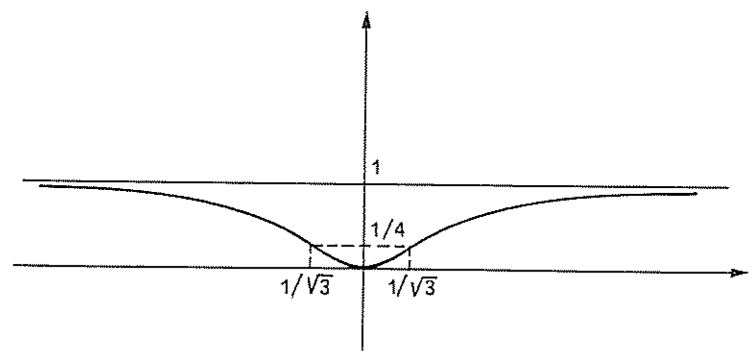


Figura 3

4) $f(x)=\frac{1}{x^3-x}$; c.d.e. $R-\{0,1,-1\}$; $f'(x)=\frac{1-3x^2}{(x^3-x)^2}$; $f''(x)=\frac{2[6x^4-3x^2+1]}{(x^3-x)^3}$;
evidentemente $f''(x)$ ha il segno di x^3-x e si ha quindi: $f''(x)>0$ in $]1,+\infty[\ \cup\ ]-1,0[$, $f''(x)<0$ in $]0,1[\ \cup\ ]-\infty,-1[$; $f''(x)$ non è mai nulla. Quindi $f(x)$ è convessa in $]-1,0[$ ed in $]1,+\infty[$ ed è concava in $]-\infty,-1[$ ed in $]0,1[$; inoltre $f(x)$ non ha flessi (fig. 4).

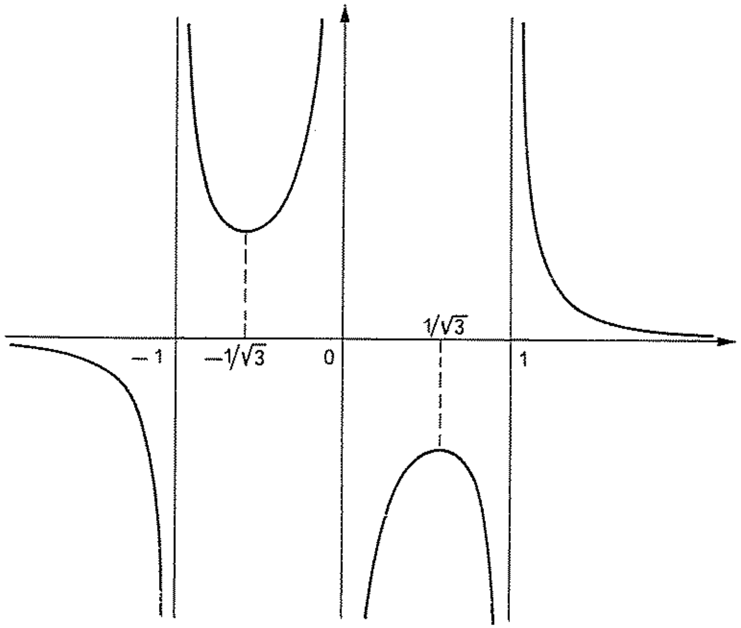


Figura 4

5) $f(x)=2\sqrt{x+1}-x$; c.d.e. $[-1,+\infty[$; $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1$; $f''(x)=$
$-\frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}}<0$ $\forall x\in\ ]-1,+\infty[$; ne segue che $f(x)$ è concava in $]-1,+\infty[$; poiché $f(x)$ è continua in $x=-1$ si conclude che $f(x)$ è concava in $[-1,+\infty[$ (fig. 5).

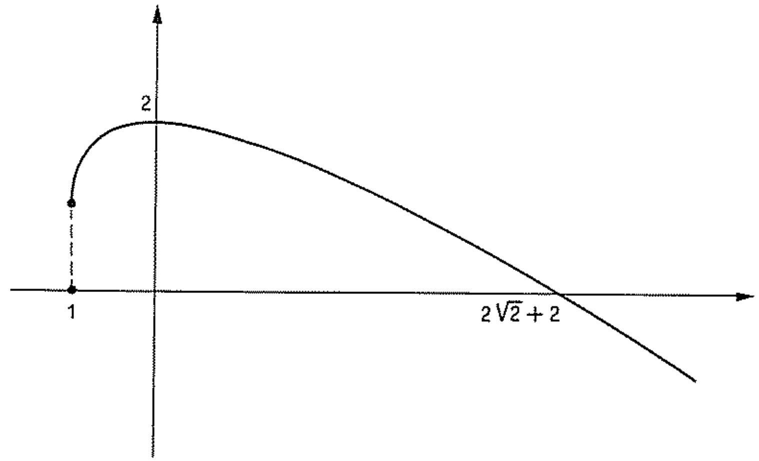


Figura 5

6) $f(x)=x\ \log x$; c.d.e. $]0,+\infty[$; $f'(x)=\log x+1$; $f''(x)=\frac{1}{x}>0$ $\forall x\in\ ]0,+\infty[$. La funzione è convessa in $]0,+\infty[$; se si prolunga in $x=0$ ponendo $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=0$ la funzione diviene convessa in $[0,+\infty[$ (fig. 6).

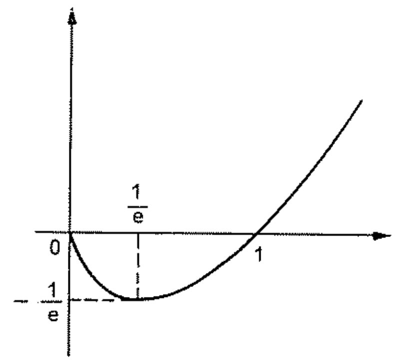


Figura 6

7) $f(x)=x-\log|x|$; c.d.e. $R-\{0\}$; $f'(x)=\frac{x-1}{x}$; $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$ $\forall x\in R-\{0\}$; $f(x)$ è convessa in $]-\infty,0[$ ed in $]0,+\infty[$ (fig. 7).

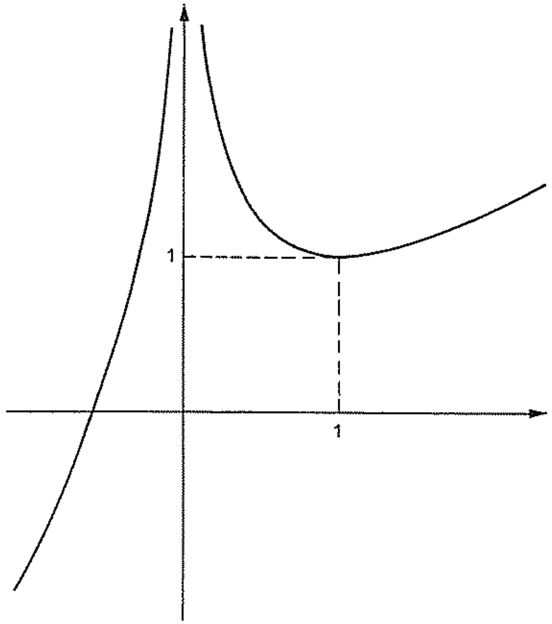


Figura 7

8) $f(x)=\frac{\log x}{x}$; c.d.e. $]0,+\infty[$; $f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$; $f''(x)=\frac{2\log x-3}{x^3}>0$ in $]e\sqrt{e},+\infty[$, $f''(x)<0$ in $]0,e\sqrt{e}[$; quindi $f(x)$ è convessa in $]e\sqrt{e},+\infty[$, concava in $]0,e\sqrt{e}[$ ed $x=e\sqrt{e}$ è un punto di flesso. (fig. 8).

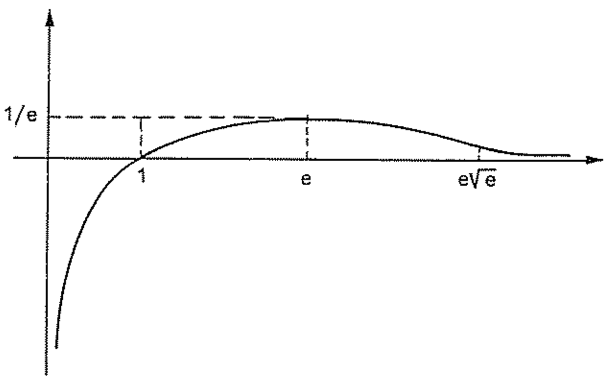


Figura 8

9) $f(x)=xe^{1/x}$; c.d.e. $R-\{0\}$; $f'(x)=e^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right)$; $f''(x)=\frac{1}{x^3}e^{1/x}>0$ in $]0,+\infty[$, $f''(x)<0$ in $]-\infty,0[$; $f(x)$ è convessa in $]0,+\infty[$ e concava in $]-\infty,0[$ (fig. 9).

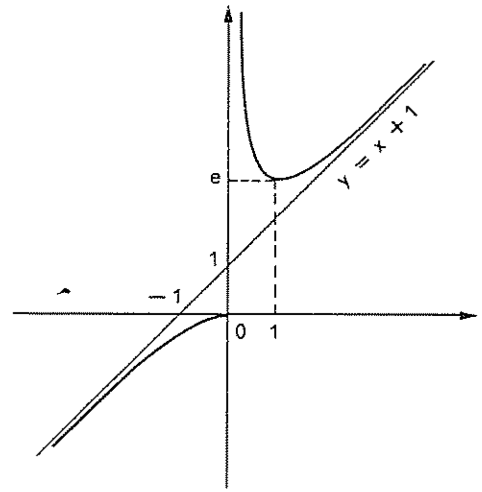


Figura 9

10) $f(x)=e^{x/(x-1)}$; c.d.e. $R-\{1\}$; $f'(x)=-e^{x/(x-1)}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}$;

$f''(x)=\frac{e^{x/(x-1)}}{(x-1)^4}\cdot(2x-1)>0$ in $]1/2,1[\ \cup\ ]1,+\infty[$, $f''(x)<0$ in $]-\infty,1/2[$. Quindi $f(x)$ è convessa in $[1/2,1[$ ed in $]1,+\infty[$ e concava in $]-\infty,1/2]$; $x=1/2$ è punto di flesso (fig. 10).

11) $f(x)=2\cos x+x$; c.d.e. R; $f'(x)=1-2\operatorname{sen}x$; $f''(x)=-2\cos x<0$ in $]-\pi/2+2k\pi,\pi/2+2k\pi[$, $f''(x)>0$ in $]\pi/2+2k\pi,3\pi/2+2k\pi[$ con $k\in Z$; quindi $f(x)$ è concava negli intervalli del tipo $[-\pi/2+2k\pi,\pi/2+2k\pi]$ e convessa in quelli del tipo $[\pi/2+2k\pi,3\pi/2+2k\pi]$; i punti $x=\pi/2+k\pi$ sono punti di flesso (fig. 11).

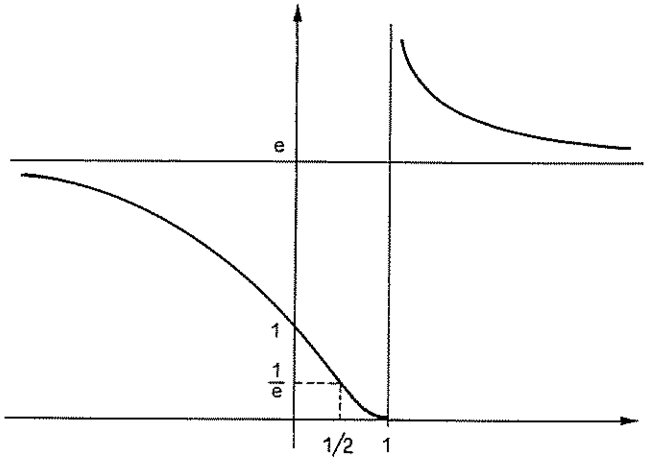


Figura 10

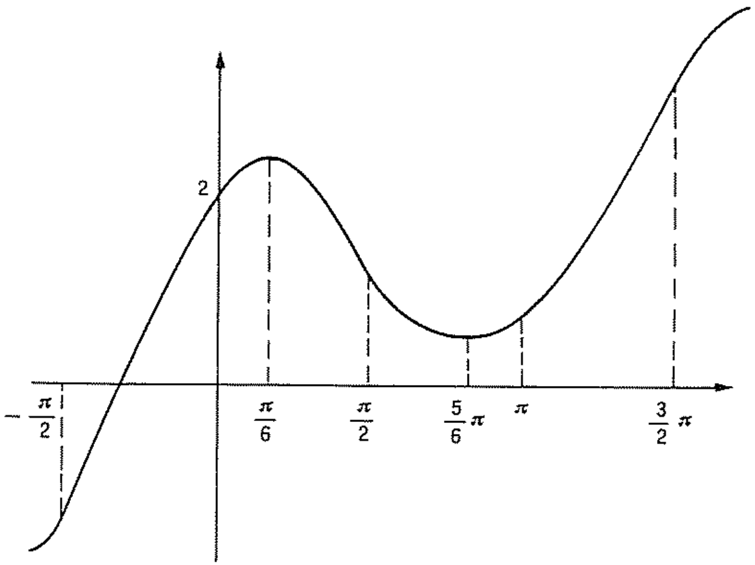


Figura 11

12) $f(x)=\operatorname{sen}x+\cos x$; c.d.e. $\mathbb{R}$; $f'(x)=\cos x-\operatorname{sen}x$; $f''(x)=-(\operatorname{sen}x+\cos x)>0$ in $]3\pi/4+2k\pi,\ 7\pi/4+2k\pi[$, $f''(x)<0$ in $]7\pi/4+2k\pi,\ 11\pi/4+2k\pi[$ con $k\in\mathbb{Z}$.

Quindi $f(x)$ è convessa in ogni intervallo del tipo $[3\pi/4+2k\pi,\ 7\pi/4+2k\pi]$ e concava in ogni intervallo del tipo $[7\pi/4+2k\pi,\ 11\pi/4+k\pi]$; $x=3\pi/4+k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$ sono punti di flesso (fig. 12).

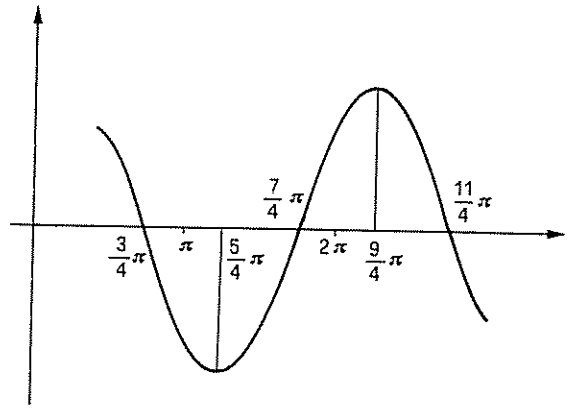


Figura 12

13) $f(x)=\operatorname{arctg}\log x$; c.d.e. $]0,+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{1}{x(1+\log^2x)}$; $f''(x)=-\dfrac{(1+\log x)^2}{x^2(1+\log^2x)^2}$; la funzione è concava in $]0,+\infty[$ (fig. 13). Se si prolunga in $x=0$ ponendo $f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$ la funzione è concava in $[0,+\infty[$.

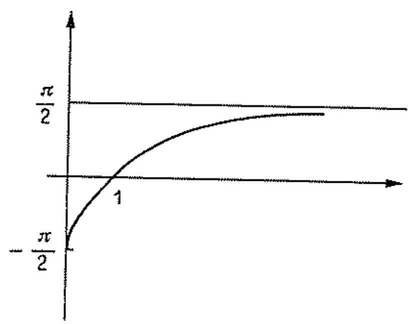


Figura 13

14) $f(x)=|x|\, e^{1/|x|}$; c.d.e. $R-\{0\}$; poiché $f(x)$ è pari basta studiarla in $]0,+\infty[$ e pertanto (cfr. esercizio 9) la funzione sarà convessa in $]0,+\infty[$ e (per simmetria) in $]-\infty,0[$ (fig. 14).

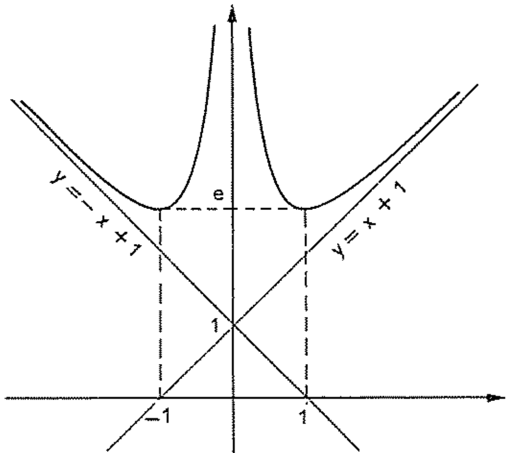


Figura 14

15) $f(x)=\log x+|1-x^2|$; c.d.e. $]0,+\infty[$; si ha:

$$f(x)=\begin{cases}\log x+1-x^2 & \text{in }]0,1] \\ \log x+x^2-1 & \text{in } [1,+\infty[\end{cases} \quad ; \quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-2x &]0,1[\\ \dfrac{1}{x}+2x &]1,+\infty[\end{cases} \quad ;$$

$$f''(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2}-2 &]0,1[\\ -\dfrac{1}{x^2}+2 &]1,+\infty[\end{cases}$$

Si ha $f''(x)<0$ in $]0,1[$ ed $f''(x)>0$ in $]1,+\infty[$; pertanto $f(x)$ è concava in $]0,1]$ e convessa in $[1,+\infty[$; il punto $x=1$ non è di flesso poiché in $x=1$ $f(x)$ non è derivabile (fig. 15).

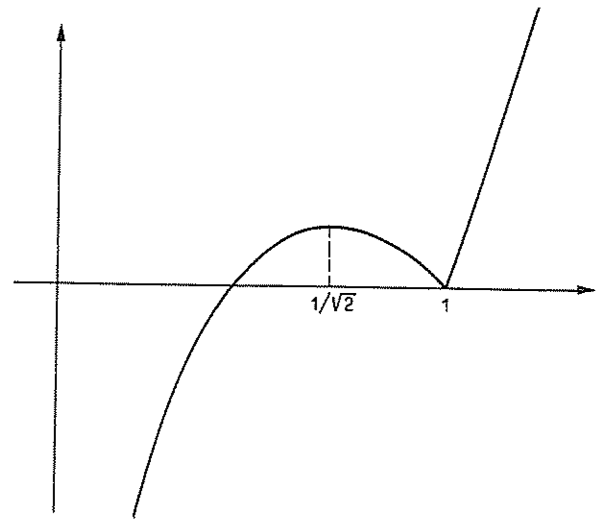


Figura 15

16) $f(x)=x^4\log|x|$; c.d.e. $R-\{0\}$; poiché $f(x)$ è pari basta studiarla in $]0,+\infty[$ dove si ha: $f'(x)=x^3(1+4\log x)$; $f''(x)=x^2(7+12\log x)>0$ per $x\in]e^{-7/12},+\infty[$, $f''(x)<0$ per $x\in]0,e^{-7/12}[$; ne segue che $f(x)$ è convessa in $[e^{-7/12},+\infty[$ e (per simmetria) in $]-\infty,-e^{-7/12}]$, è concava in $]0, e^{-7/12}]$ e (per simmetria) in $[-e^{-7/12}, 0[$; $x=\pm\, e^{-7/12}$ sono punti di flesso. Se poi si prolunga $f(x)$ in $x=0$ ponendo $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ allora $f(x)$ è concava in $[e^{-7/12}, e^{-7/12}]$ (fig. 16).

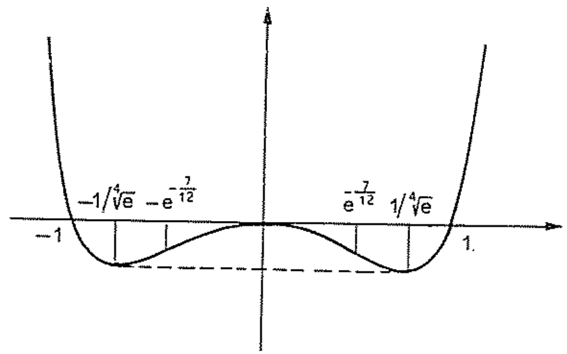


Figura 16

17) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$; c.d.e. $R-\{0\}$; si ha: $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$; $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}>0$ $\forall x\in]0,+\infty[$ ed $f''(x)<0$ $\forall x\in]-\infty,0[$. Quindi $f(x)$ è concava in $]-\infty,0[$ e convessa in $]0,+\infty[$ (fig. 17).

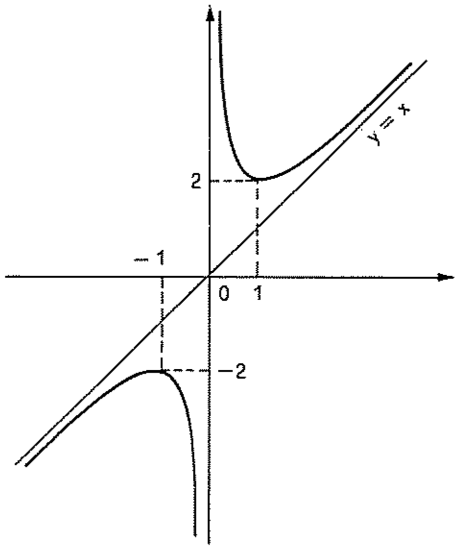


Figura 17

18) $f(x)=e^x\cos x$; c.d.e. R; $f'(x)=-e^x(\operatorname{sen}x-\cos x)$; $f''(x)=-2e^x\operatorname{sen}x>0$ in $]\pi+2k\pi,(2k+2)\pi[$, $f''(x)<0$ in $]2k\pi,(2k+1)\pi[$. Quindi $f(x)$ è convessa in ogni intervallo $[(2k+1)\pi,(2k+2)\pi]$ e concava in ogni intervallo $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ con $k\in Z$; i punti $x=k\pi$ sono di flesso (fig. 18).

19) $f(x)=2\operatorname{arctg}x-x$; c.d.e. $]-\infty,+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; $f''(x)=\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$

Quindi $f''(x)>0$ in $]-\infty,0[$, $f''(x)<0$ in $]0,+\infty[$; allora $f(x)$ è convessa in $]-\infty,0]$, concava in $[0,+\infty[$ ed ha un flesso in $x=0$ (fig. 19).

20) $f(x)=|x^2-x|$; c.d.e. R;

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x & \text{se } x\in]-\infty,0[\ \cup\ ]1,+\infty[\\ x-x^2 & \text{se } x\in [0,1] \end{cases};$$

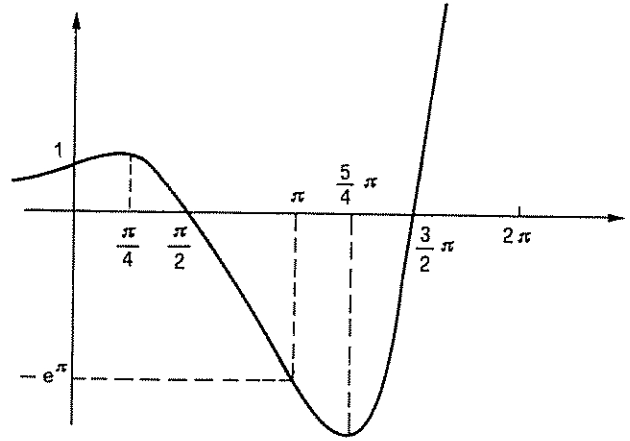


Figura 18

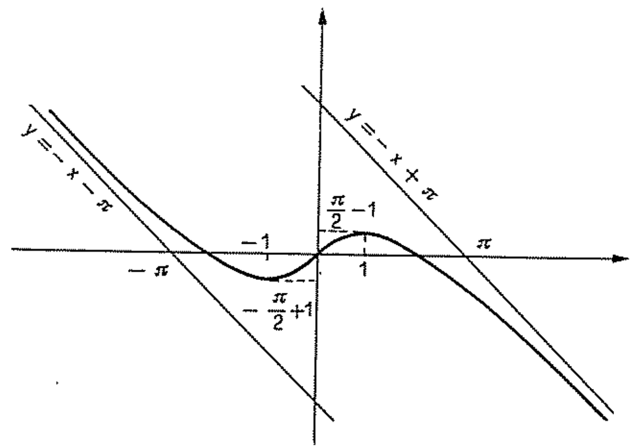


Figura 19

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\in]-\infty,0[\ \cup\ ]1,+\infty[\\ 1-2x & x\in]0,1[\end{cases};$$

$$f''(x)=\begin{cases}2 & x\in\,]-\infty,0[\;\cup\;]1,+\infty[\\ -2 & x\in\,]0,1[\end{cases};$$

quindi $f(x)$ è convessa in $]-\infty,0[$ ed in $]1,+\infty[$ e concava in $]0,1[$; i punti $x=0$ ed $x=1$ non sono di flesso perché $f(x)$ non è ivi derivabile (si tratta di punti angolosi; fig. 20).

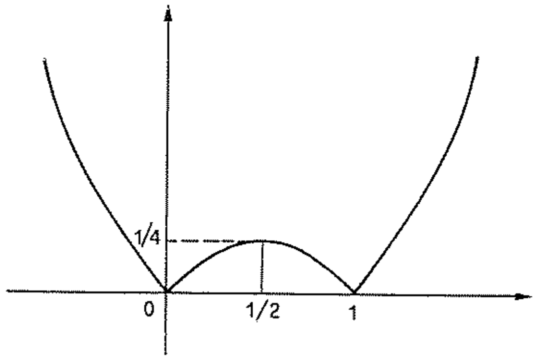


Figura 20

21) $f(x)=\lambda\sqrt{a^2+x^2}+\mu\sqrt{(x-b)^2+c^2}$; c.d.e. R;

$$f'(x)=\frac{\lambda x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{\mu(x-b)}{\sqrt{(x-b)^2+c^2}};\quad f''(x)=\frac{\lambda a^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}+\frac{\mu c^2}{((x-b)^2+c^2)^{3/2}}$$

Quindi $f(x)$ è convessa in tutto R (fig. 21).

22) $f(x)=x^2\,e^{-|x|}$; c.d.e. R; poiché $f(x)$ è pari la studiamo in $[0,+\infty[$ dove si ha: $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$; $f''(x)=e^{-x}(x^2-4x+2)>0$ in $]0,2-\sqrt{2}[$ ed in $]2+\sqrt{2},+\infty[$; per simmetria allora $f(x)$ è convessa in $[-2+\sqrt{2},\,2-\sqrt{2}]$, in $]-\infty,-2-\sqrt{2}]$ ed in $[2+\sqrt{2},+\infty[$, è concava in $[-2-\sqrt{2},\,-2+\sqrt{2}]$ ed in $[2-\sqrt{2},\,2+\sqrt{2}]$; i punti $x=-2+\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2},\ -2-\sqrt{2}$ sono di flesso (fig. 22).

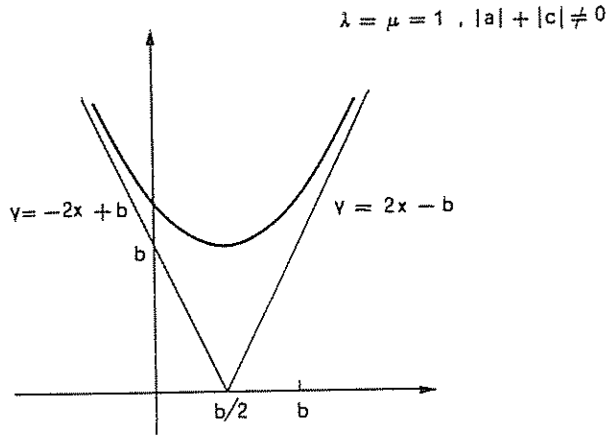


Figura 21

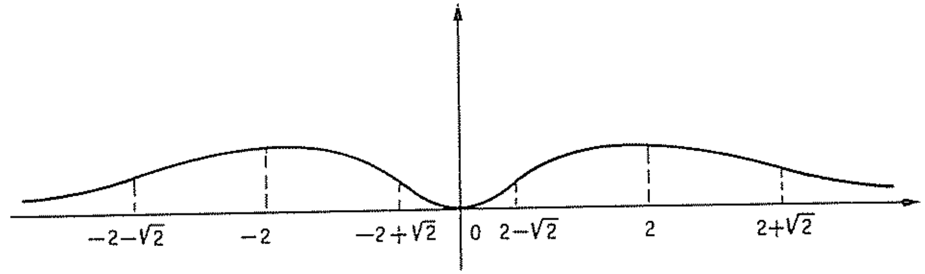


Figura 22

23) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{|x^2-1|}$; c.d.e. $R-\{1,-1\}$;

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x^2-1} &]-\infty,-1[\;\cup\;]1,+\infty[\\[2mm] \dfrac{x^2+1}{1-x^2} &]-1,1[\end{cases};$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-4x}{(x^2-1)^2} &]-\infty,-1[\;\cup\;]1,+\infty[\\[2mm] \dfrac{4x}{(1-x^2)^2} &]-1,1[\end{cases};$$

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{4(1+3x^2)}{(x^2-1)^3} &]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,+\infty[\\[2mm] \dfrac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3} &]-1,1[\end{cases}$$

quindi $f''(x)>0$ in tutto $R-\{-1,1\}$. Ne segue che $f(x)$ è convessa in ciascuno degli intervalli $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $]1,+\infty[$ (fig. 23).

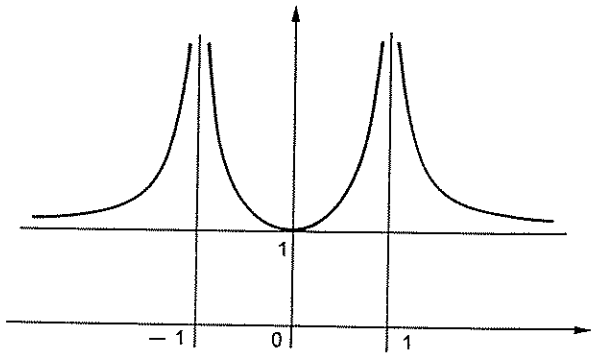


Figura 23

24) $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$; c.d.e. $[-1,1]$; $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $f''(x)=-\dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$.
Quindi $f(x)$ è concava in $[-1,1]$ (fig. 24).

25) $f(x)=\sqrt{|x|}+\sqrt{|1-x|}$; c.d.e. R;

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}+\sqrt{1-x} &]-\infty,0[\\ \sqrt{x}+\sqrt{1-x} & [0,1]\\ \sqrt{x}+\sqrt{x-1} &]1,+\infty[\end{cases};$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{2\sqrt{-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}} &]-\infty,0[\\[2mm] \dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}} &]0,1[\\[2mm] \dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} &]1,+\infty[\end{cases};$$

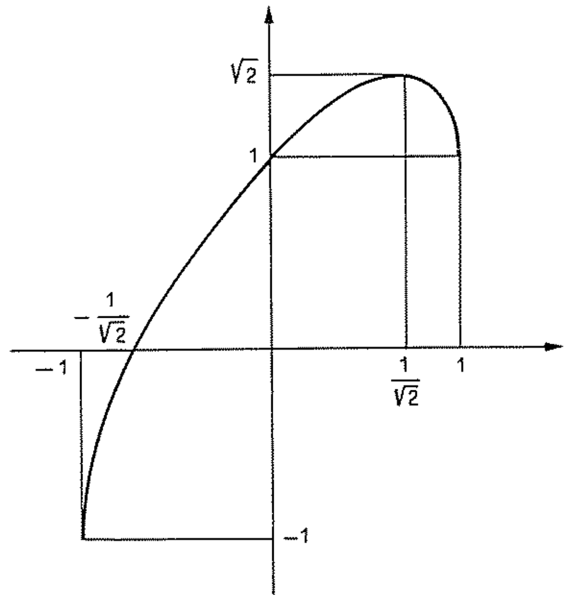


Figura 24

$$f''(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\sqrt{(-x)^3}}-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\sqrt{(1-x)^3}} &]-\infty,0[\\[2mm] -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\sqrt{(1-x)^3}} &]0,1[\\[2mm] -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^3}} &]1,+\infty[\end{cases};$$

si ha pertanto $f''(x)<0$ in $]-\infty,0[\ \cup\ ]0,1[\ \cup\ ]1,+\infty[$ e quindi $f(x)$ è concava in $]-\infty,0]$, in $[0,1]$ ed in $[1,+\infty[$ (ma non in tutto R!)

26) $f(x)=\dfrac{x}{\log x}$; c.d.e. $]0,1[\cup]1,+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{\log x-1}{\log^2 x}$;
$f''(x)=\dfrac{2\log x-\log^2 x}{x\ \log^4 x}>0$ in $]1,e^2[$, $f''(x)<0$ in $]0,1[$ ed in

$]e^2,+\infty[$; ne segue che $f(x)$ è concava in $]0,1[$ ed in $]e^2,+\infty[$, convessa in $]1,e^2]$ ed ha un flesso per $x=e^2$ (fig. 26). (Il lettore osservi che $f(x)$ è prolungabile in 0 per continuità ponendo $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$).

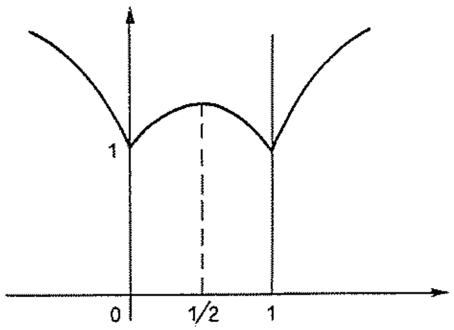


Figura 25

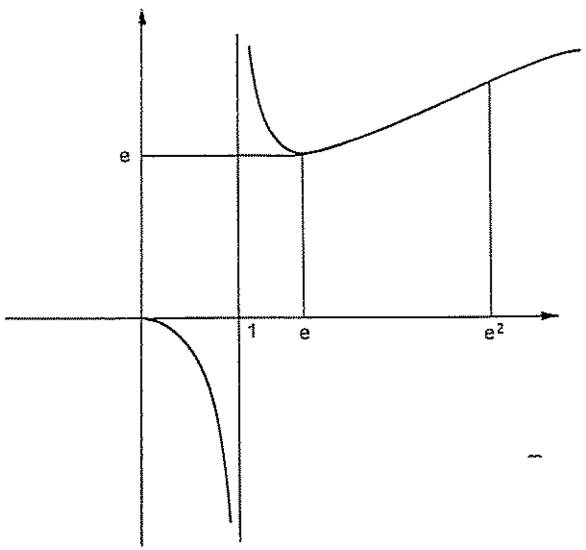


Figura 26

27) $f(x)=\text{arcsen}x^2$; c.d.e. $[-1,1]$; $f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; $f''(x)=\dfrac{2(1+x^4)}{(1-x^4)^{3/2}}>0$ in $]-1,1[$. Ne segue che $f(x)$ è convessa in $[-1,1]$.

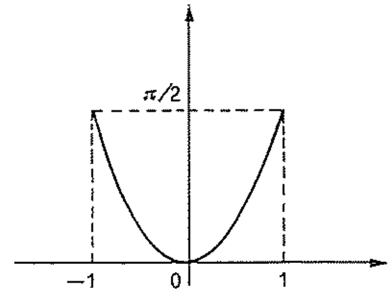


Figura 27

28) $f(x)=\dfrac{\log x+1}{\log x-1}$; c.d.e. $]0,e[\cup]e,+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{-2}{x(\log x-1)^2}$;

$f''(x)=\dfrac{2(\log^2 x-1)}{x^2(\log x-1)^4}>0$ in $]0,1/e[$ ed in $]e,+\infty[$; $f''(x)<0$ in $]1/e,e[$; quindi $f(x)$ è convessa in $]0,1/e]$ ed in $]e,+\infty[$; è concava in $[1/e,e[$ ed ha un flesso per $x=1/e$ (fig. 28). (N.B. $f(x)$ è prolungabile per continuità in 0 ponendo $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$).

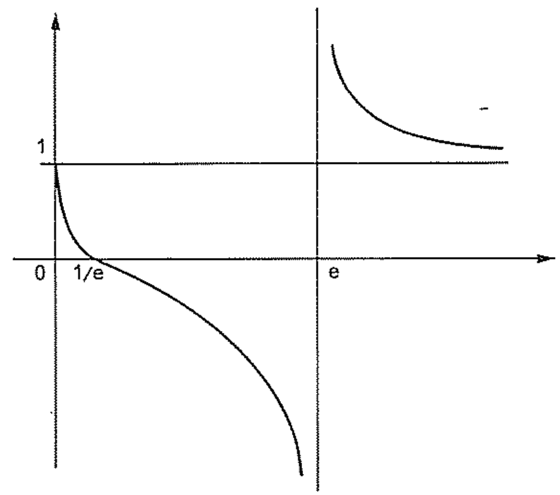


Figura 28

29) $f(x)=\log\log x$; c.d.e. $]1,+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{1}{x\log x}$; $f''(x)=-\dfrac{\log x+1}{x^2\log^2 x}<0$ $\forall x\in\ ]1,+\infty[$; la funzione pertanto è concava in $]1,+\infty[$ (fig. 29).

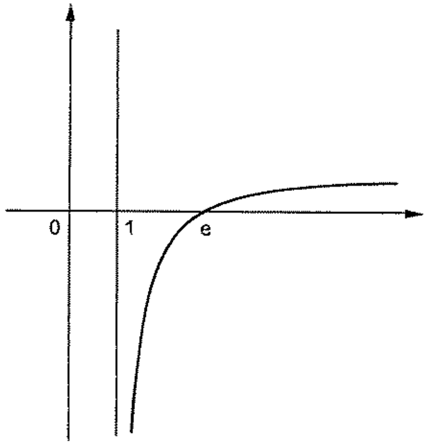


Figura 29

30) $f(x)=\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$; c.d.e. $R-\{1\}$; $f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^2}$;

$$f''(x)=-\frac{4}{9}\ \frac{1}{\left[\sqrt[3]{x^2}\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^2\right]^2}\ \frac{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\left(1-2\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}<0 \text{ in}$$

$]0,1/8[\ \cup\ ]1,+\infty[$; $f''(x)>0$ in $]-\infty,0[\ \cup\ ]1/8,1[$; quindi $f(x)$ è concava in $[0,1/8]$ ed in $]1,+\infty[$ ed è convessa in $]-\infty,0]$ ed in $[1/8,1[$; $x=1/8$ è un punto di flesso; in $x=0$ $f(x)$ non è derivabile e presenta un punto a tangente verticale (fig. 30).

N.B. Il punto $x=0$ viene anche detto punto di flesso a tangente verticale.

31) $f(x)=\text{arcsen}\ \dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+2}$; c.d.e. R; $f'(x)=2\dfrac{x+1}{|x+1|}\cdot\dfrac{1}{x^2+2x+2}$

$$f''(x)=\begin{cases} -\dfrac{2(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} & x>-1 \\[2ex] \dfrac{2(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} & x<-1 \end{cases} \Rightarrow\ f''(x)<0\ \forall x\in R-\{-1\}.$$

Pertanto $f(x)$ è concava in $]-\infty,-1]$ ed in $[-1,+\infty[$ (ma non in tutto R!) (fig. 31).

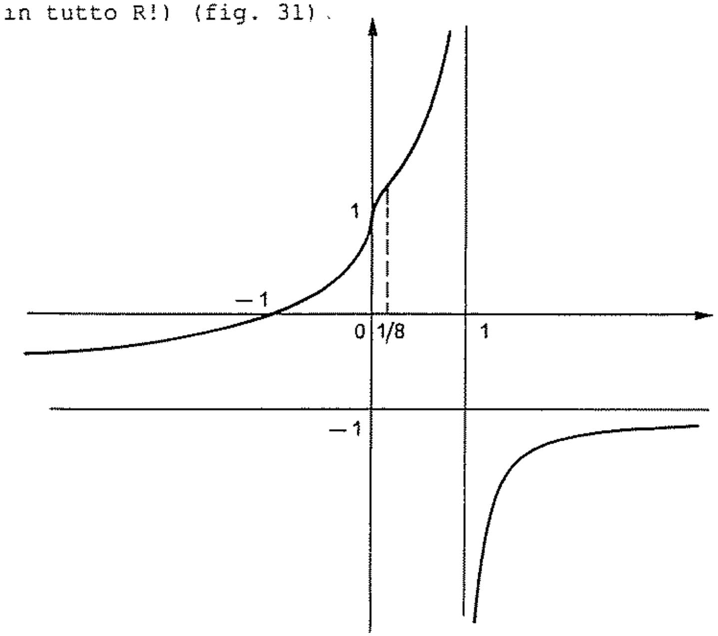


Figura 30

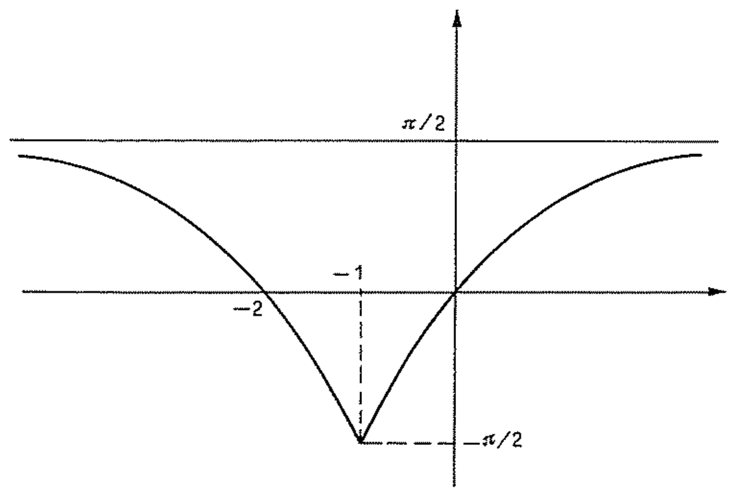


Figura 31

32) $f(x)=\dfrac{|x+1|}{e^x}$; c.d.e. R;

$$f'(x)=\begin{cases}-xe^{-x} & x>-1\\ xe^{-x} & x<-1\end{cases};$$

$$f''(x)=\begin{cases}(x-1)e^{-x} & x>-1\\ (1-x)e^{-x} & x<-1\end{cases};$$

si ha allora $f''(x)>0$ in $]1,+\infty[\ \cup\ ]-\infty,-1[$; $f''(x)<0$ in $]-1,1[$; quindi $f(x)$ è convessa in $[1,+\infty[$ ed in $]-\infty,-1]$, è concava in $[-1,1]$ ed ha come punto di flesso $x=1$; $x=-1$ non è punto di flesso poiché ivi $f(x)$ non è derivabile (si tratta di un punto angoloso) (fig. 32).

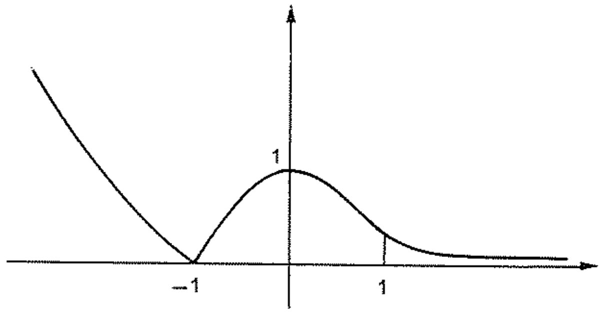


Figura 32

33) $f(x)=tg^2x$; c.d.e. $R-\{\pi/2+k\pi\}_{k\in Z}$; $f'(x)=2tgx(1+tg^2x)$; $f''(x)=2(1+tg^2x)(1+3tg^2x)>0\ \forall x\in R-\{\pi/2+k\pi\}_{k\in Z}$; ne segue che $f(x)$ è convessa in ogni intervallo $]-\pi/2+k\pi,\ \pi/2+k\pi[$ con $k\in Z$ (fig. 33).

34) $f(x)=tgx+2\log|\cos x|$; c.d.e. $R-\{\pi/2+k\pi\}_{k\in Z}$; $f'(x)=(1-tgx)^2$;

$$f''(x)=-2(1-tgx)(1+tg^2x)>0 \iff x\in \bigcup_{k\in Z}\ ]-\pi/4+k\pi,\ \pi/2+k\pi[;$$

$$f''(x)<0 \iff x\in \bigcup_{k\in Z}\ ]-\pi/2+k\pi,\ \pi/2+k\pi[.$$ Quindi $f(x)$ è convessa in ogni intervallo del tipo $[\pi/4+k\pi,\ \pi/2+k\pi[$ con $k\in Z$ e

concava in ogni intervallo del tipo $]\pi/2+k\pi,\ \pi/4+k\pi]$ $k\in Z$; $x=\pi/4+k\pi$ sono punti di flesso (fig. 34).

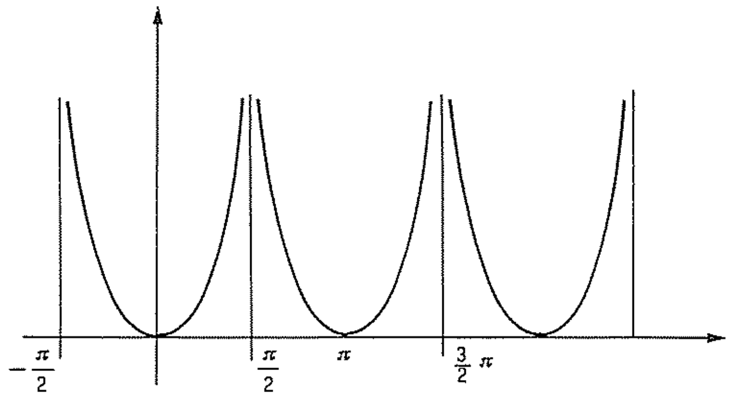


Figura 33

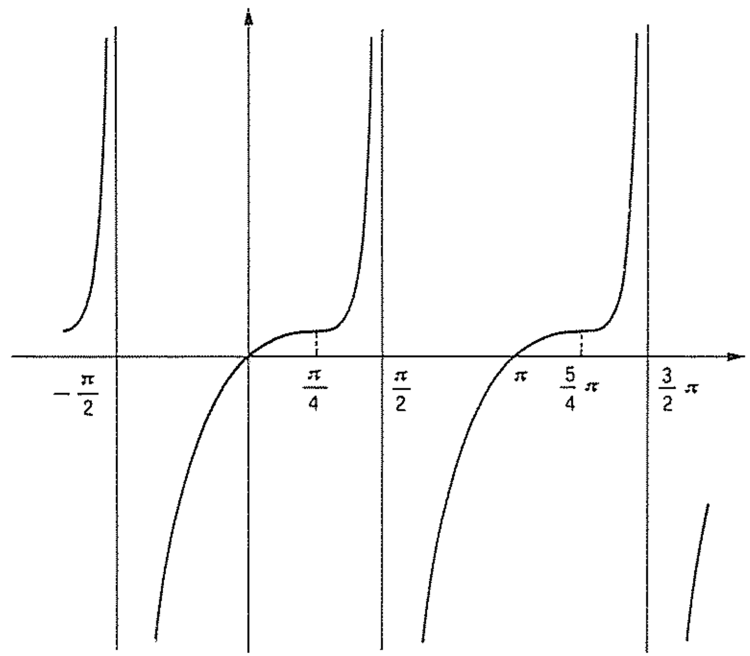


Figura 34

35) $f(x)=\log|\cosh x|$; c.d.e. R; $f'(x)=\mathrm{tgh}x$;

$f''(x)=\frac{1}{\cos^2 hx}>0\ \forall x\in\ ]-\infty,+\infty[$. Quindi $f(x)$ è convessa in tutto R.

35) $f(x)=\mathrm{senh}x-x$; c.d.e. R; $f'(x)=\cosh x-1$;
$f''(x)=\mathrm{senh}x>0 \Leftrightarrow x>0$.
Quindi $f(x)$ è convessa in $[0,+\infty[$, concava in $]-\infty,0]$ ed $x=0$ è punto di flesso.

3.2 Ulteriori metodi per lo studio di concavità, convessità, flessi.

Per la ricerca dei punti di flesso e per lo studio della concavità e della convessità in un punto di una funzione sono utili le condizioni qui riportate.

FLESSI; CONCAVITÀ E CONVESSITÀ IN UN PUNTO

C) *Sia $f(x)$ derivabile n volte in un intervallo I e sia x_0 interno ad I: si ha:*

n dispari, $f''(x_0)=f'''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$; $f^{(n)}(x_0)\neq 0 \Rightarrow$ p.to di flesso

n pari, $f''(x_0)=f'''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$; $f^{(n)}(x_0)\neq 0 \Rightarrow$ in x_0 $f(x)$ è convessa (concava)

Determinare i punti di flesso delle seguenti funzioni:

1) x^4-3x^2;

2) sen^2x;

3) $\mathrm{tg}x+x$;

4) x^6-6x^4;

5) e^x-x^2;

6) $2\log|x|+x^2$;

7) $e^{\sqrt{2}\mathrm{sen}x}$;

8) verificare se $x=0$ è o meno un punto di flesso per la funzione $f(x)=\frac{x^5}{5}+6\cos x-\frac{x^4}{4}+3x^2$;

9) determinare i valori del parametro reale α per cui $x=0$ è punto di flesso per la funzione $e^{\alpha x}-x^2$;

10) determinare i valori del parametro reale $\alpha(\neq 0)$ per cui $x=2$ è un punto di flesso per la funzione $f(x)=\cos\alpha x$;

11) determinare i valori del parametro reale $\alpha(\neq 0)$ per cui $x=1/\sqrt{2}$ è un punto di flesso per la funzione $e^{\alpha x^2+2}$.

12) Determinare i valori del parametro reale α per cui $x=0$ è un punto di flesso per la funzione $\mathrm{senh}x-\alpha x^2$;

13) Rispondere al quesito posto nell'esercizio 12 relativamente alla funzione $\cosh x-\alpha x^2$.

Il lettore potrà ulteriormente esercitarsi nell'uso del criterio riportato nella precedente tabella applicandolo allo studio delle funzioni proposte negli esercizi 1-36 del paragrafo precedente.

Risposte

1) $x=\pm 1/\sqrt{2}$;

2) $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, con $k\in Z$;

3) $x=k\pi$, con $k\in Z$;

4) $\pm 2\ \sqrt{3}/\sqrt{5}$;

5) $x=\log 2$;

6) $x=\pm 1$;

7) $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$, con $k\in Z$;

8) $x=0$ è punto di flesso;

9) $\alpha=\pm\sqrt{2}$;

10) $\alpha=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ con $k\in Z$;

11) $\alpha=-1$;

12) $\alpha=0$;

13) nessun valore di α.

Risoluzioni

1) $f(x)=x^4-3x^2$; c.d.e. R; $f'(x)=4x^3-6x$; $f''(x)=12x^2-6=0$ per $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $f'''(x)=24x$; $f'''\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\pm\frac{24}{\sqrt{2}}\neq 0$. Quindi $x=\pm 1/\sqrt{2}$ sono punti di flesso.

2) $f(x)=\operatorname{sen}^2x$; c.d.e. R; $f'(x)=2\operatorname{sen}x\cos x=\operatorname{sen}2x$; $f''(x)=2\cos 2x=0$ $\Leftrightarrow$ $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ con $k\in Z$; $f'''(x)=-4\operatorname{sen}2x$; $f'''\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)=-4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=$ $=(-1)^{k+1}\cdot 4\neq 0$. Quindi i punti $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ con $k\in Z$ sono punti di flesso.

3) $f(x)=\operatorname{tg}x+x$; c.d.e. $R-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}_{k\in Z}$; $f'(x)=2+\operatorname{tg}^2x$; $f''(x)=$ $=2\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}^2x)=0 \Leftrightarrow x=k\pi$ con $k\in Z$; $f'''(x)=2(1+\operatorname{tg}^2x)(1+3\operatorname{tg}^2x)$; $f'''(k\pi)=2\neq 0$; ne segue che $x=k\pi$ è un punto di flesso $\forall k\in Z$;

4) $f(x)=x^6-6x^4$; c.d.e. R; $f'(x)=6(x^5-4x^3)$; $f''=6[5x^4-12x^2]=0 \Leftrightarrow$ $x=0,\ x=\pm 2\sqrt{3}/\sqrt{5}$; $f'''(x)=24[5x^3-6x]$; $f'''\left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)\neq 0$ e quindi $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ sono punti di flesso.

Invece $f'''(0)=0$ e quindi nulla può ancora dirsi sul punto $x=0$.
D'altro canto $f^{IV}(x)=24[15x^2-6]$ e $f^{IV}(0)=-144$. Quindi $x=0$ è un punto in cui $f(x)$ è concava.

5) $f(x)=e^x-x^2$; c.d.e. R; $f'(x)=e^x-2x$; $f''(x)=e^x-2=0 \Leftrightarrow x=\log 2$; $f'''(x)=e^x$; $f'''(\log 2)=2\neq 0$; quindi $x=\log 2$ è un punto di flesso.

6) $f(x)=2\log|x|+x^2$; c.d.e. $R-\{0\}$; $f'(x)=\frac{2}{x}+2x$; $f''(x)=2\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)=0$ $\Leftrightarrow$ $x=\pm 1$; $f'''(x)=\frac{4}{x^3}$; $f'''(\pm 1)=\pm 4\neq 0$; ne segue che $x=\pm 1$ sono punti di flesso.

7) $f(x)=e^{\sqrt{2}\operatorname{sen}x}$; c.d.e. R; $f'(x)=\sqrt{2}\ e^{\sqrt{2}\operatorname{sen}x}\cos x$; $f''(x)=e^{\sqrt{2}\operatorname{sen}x}$ $[2\cos^2x-\sqrt{2}\operatorname{sen}x]=0$ $\Leftrightarrow$ $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$ con $k\in Z$; $f'''(x)=e^{\sqrt{2}\operatorname{sen}x}\ \sqrt{2}\cos x\ [2\cos^2x-\sqrt{2}\operatorname{sen}x]+e^{\sqrt{2}\operatorname{sen}x}[-4\operatorname{sen}x\cos x-$ $-\sqrt{2}\cos x]$; poiché come è facile verificare si ha $f'''(\pi/4+2k\pi)\neq 0$ e $f'''\left(\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right)\neq 0$ $\forall k\in Z$ si deduce che $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ed $x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$ sono punti di flesso.

8) $f(x)=\frac{x^5}{5}+6\cos x-\frac{x^4}{4}+3x^2$; $f'(x)=x^4-6\operatorname{sen}x-x^3+6x$; $f''(x)=4x^3-6\cos x-$ $-3x^2+6$; $f'''(x)=12x^2+6\operatorname{sen}x-6x$; $f^{IV}(x)=24x+6\cos x-6$; $f^{V}(x)=$ $=24-6\operatorname{sen}x$. Poiché $f''(0)=f'''(0)=f^{IV}(0)=0$ ed $f^{V}(0)=24\neq 0$ $x=0$ è punto di flesso.

9) Data la funzione $f(x)=e^{\alpha x}-x^2$ si ha:
$f'(x)=\alpha e^{\alpha x}-2x$; $f''(x)=\alpha^2e^{\alpha x}-2$; quindi si ha: $f''(0)=0 \Leftrightarrow \alpha^2-2=0$ $\Leftrightarrow$ $\alpha=\pm\sqrt{2}$. D'altro canto $f'''(x)=\alpha^3e^{\alpha x}$ e quindi $f'''(0)=\alpha^3\neq 0$ $\forall\alpha\neq 0$.
Ne segue che $x=0$ è punto di flesso sia per $\alpha=\sqrt{2}$ che per $\alpha=-\sqrt{2}$.

10) $f(x)=\cos\alpha x$; $f'(x)=-\alpha\operatorname{sen}\alpha x$; $f''(x)=-\alpha^2\cos\alpha x$; $f''(2)=0 \Leftrightarrow$ $\alpha^2\cos 2\alpha=0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha=0$ (poiché $\alpha\neq 0$) $\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, con $k\in Z$. Si ha poi: $f'''(x)=\alpha^3\operatorname{sen}\alpha x$; per $\alpha=\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)$; $f'''(2)=\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)^3 \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}+k\pi\right]=$ $=(-1)^k\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)^3\neq 0$. Quindi x=2 è punto di flesso per ogni α del tipo $\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, con $k\in Z$.

11) $f(x)=e^{\alpha x^2+2}$; $f'(x)=2\alpha x\ e^{\alpha x^2+2}$; $f''(x)=2\alpha e^{\alpha x^2+2}+4\alpha^2x^2e^{\alpha x^2+2}$; $f''(1/\sqrt{2})=2\alpha(1+\alpha)\ e^{\alpha/2+2}=0 \Leftrightarrow \alpha=-1$ (tieni conto che per ipotesi è $\alpha\neq 0$); inoltre $f'''(x)=[8\alpha^2x+4\alpha^3x(1+2\alpha x^2)]\ e^{\alpha x^2+2}$ e per $\alpha=-1$ $f'''(1/\sqrt{2})=\frac{8}{\sqrt{2}}\ e^{3/2}\neq 0$ e quindi $x=1/\sqrt{2}$ è punto di flesso per $\alpha=-1$.

12) Data la funzione $f(x)=\operatorname{senh}x-\alpha x^2$ si ha: $f''(x)=\operatorname{senh}x-2\alpha$, $f'''(x)=\cosh x$ e quindi $f''(0)=-2\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=0$; essendo $f'''(0)=1$ ne segue che x=0 è punto di flesso se e solo se $\alpha=0$.

13) Data la funzione $f(x)=\cosh x-\alpha x^2$ si ha: $f''(x)=\cosh x-2\alpha$, $f'''(x)=\operatorname{senh}x$, e quindi $f''(0)=1-2\alpha=0 \Leftrightarrow$ $\alpha=1/2$; avendosi $f'''(0)=0$ bisogna calcolare la derivata quarta e si ha: $f^{IV}(x)=\cosh x \Rightarrow f^{IV}(0)=1>0 \Rightarrow$ in x=0 la funzione è convessa (pur essendo, per $\alpha=1/2$, $f''(0)=0$!). In definitiva x=0 non è punto di flesso per alcun valore del parametro α.

3.3 Applicazioni

1) Provare che se $\alpha>1$ e $x\geq 0$, $y\geq 0$ si ha:

$$[x+y]^\alpha \leq 2^{\alpha-1}\ [x^\alpha+y^\alpha].$$

2) Provare che se $\alpha\in\,]0,1[$ e $x\geq 0$, $y\geq 0$ si ha:

$$[x+y]^\alpha \geq 2^{\alpha-1}\ [x^\alpha+y^\alpha].$$

3) Provare se a>0 si ha:

$$2\ a^{\frac{x+y}{2}} \leq a^x+a^y\ \ \forall x,y\in R.$$

4) Provare che si ha per $x\geq 0$, $y\geq 0$:

$$3\ \operatorname{arctg}\frac{x+2y}{3} \geq \operatorname{arctg}x + 2\ \operatorname{arctg}y.$$

5) Provare che per x>0 e y>0 si ha

$$\log_a \sqrt{xy} \leq \log_a\left(\frac{x+y}{2}\right)\quad a>1,$$

$$\log_a \sqrt{xy} \geq \log_a\left(\frac{x+y}{2}\right)\quad 0<a<1.$$

Risoluzioni

1) Sia $\alpha>1$; consideriamo in $[0,+\infty[$ la funzione $f(t)=t^\alpha$. Si ha $f''(t)=\alpha(\alpha-1)\ t^{\alpha-2}>0\ \forall t$. Quindi t^α è convessa. Fissati x ed y in $[0,+\infty[$ si ha per definizione di convessità

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

e quindi

$$\left[\frac{x+y}{2}\right]^\alpha \leq \frac{x^\alpha+y^\alpha}{2} \Leftrightarrow [x+y]^\alpha \leq 2^{\alpha-1}\left[x^\alpha+y^\alpha\right].$$

(Osserva che il caso x=0 ed y=0 è banale)

2) Sia $\alpha\in\,]0,1[$; la funzione $f(t)=t^\alpha$ definita su $]0,+\infty[$ è concava poiché si ha $f''(t)=\alpha(\alpha-1)\ t^{\alpha-2}<0\ \forall t>0$. Dalla definizione di funzione concava discende allora:

$$\left[\frac{x+y}{2}\right]^{\alpha} \geq \frac{x^{\alpha}+y^{\alpha}}{2} \Leftrightarrow [x+y]^{\alpha} \geq 2^{\alpha-1}\left[x^{\alpha}+y^{\alpha}\right]$$

(Il caso x=0 e/o y=0 è banale).

3) Sia $f(t)=a^t$; si ha:

$$f''(t)=(\log a)^2\, a^t.$$

Quindi a^t è convessa in tutto R. Ne segue per ogni $x,y\in R$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = a^{\frac{x+y}{2}} \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{a^x+a^y}{2}$$

e quindi

$$2\, a^{\frac{x+y}{2}} \leq a^x+a^y.$$

4) Sia $f(t)=\operatorname{arctg} t$; si ha:

$$f''(t)=\frac{-2t}{(1+t^2)^2} \leq 0 \quad \forall t\geq 0.$$

Quindi $f(t)$ è concava su $[0,+\infty[$; pertanto fissati $x\geq 0$, $y\geq 0$ si ha per definizione di concavità:

$$f[sx+(1-s)y] \geq sf(x)+(1-s)f(y) \quad s\in[0,1].$$

Quindi con s=1/3 si ha:

$$\operatorname{arctg}\left[\frac{x+2y}{3}\right] \geq \frac{1}{3}\left[\operatorname{arctg}x+2\operatorname{arctg}y\right].$$

5) Sia $f(t)=\log_a t$; si ha $f''(t)=-\frac{1}{t^2}\log_a e$;

Quindi

$a>1 \Rightarrow f''(t)<0 \ \forall t>0$
$0<a<1 \Rightarrow f''(t)>0 \ \forall t>0.$

Pertanto

$$a>1 \Rightarrow f(t) \text{ è concava} \Rightarrow \log_a\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq$$

$$\geq \frac{\log_a x + \log_a y}{2} = \log_a \sqrt{xy};$$

$$0<a<1 \Rightarrow f(t) \text{ è convessa} \Rightarrow \log_a\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq$$

$$\leq \frac{\log_a x + \log_a y}{2} = \log_a \sqrt{xy}.$$

4. Formula di Taylor: calcolo di limiti ed altre applicazioni

4.1 Primi esempi

Richiamiamo per comodità del lettore la formula di Taylor con i resti di Peano e di Lagrange.

FORMULA DI TAYLOR DI PUNTO INIZIALE X_0(*)

Sia f(x) *derivabile* (n-1) *volte in un intervallo I ed n volte in un punto* x_0 *interno ad I,* si ha:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+o((x-x_0)^n)$$

dove con $o((x-x_0)^n)$ si indica un infinitesimo di ordine superiore ad $(x-x_0)^n$, cioè

$$\lim_{x\to x_0}\frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} = 0; \quad (o((x-x_0)^n) = \text{resto di Peano});$$

se f(x) è derivabile n+1 volte in I per ogni $x\neq x_0$ esiste un punto c (dipendente da x) interno all'intervallo di estremi x_0 ed x tale che

$$o((x-x_0)^n)=f^{(n+1)}(c)\,\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (= \text{resto di Lagrange}).$$

(*) Nel caso $x_0=0$ si parla di formula di Mac Laurin

a) Il lettore compirà un utile esercizio verificando le seguenti eguaglianze:

1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

2) $\text{sen}x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$

3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$

4) $\text{senh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$

5) $\cosh x=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$

6) $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

7) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\ldots+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n)$

$$\left(\text{con } \alpha\in\mathbb{R} \text{ ed } \binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-n+1)}{n!}\right)$$

b) Il lettore verifichi che ponendo rispettivamente $\alpha=-1$, $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{1}{2}$ nella formula di Mac Laurin per la funzione $(1+x)^\alpha$ si ottiene:

8) $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n)$

9) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+\ldots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+o(x^n)$

dove $(-1)!!=(0)!!=1$; $(2n-1)!!=(2n-1)\cdot(2n-3)\ \ldots\ 5\cdot3\cdot1$
$(2n)!!=(2n)\ (2n-2)\ \ldots\ 4\cdot2$

10) $\sqrt{x+1}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\ldots\ (-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+o(x^n)\ (n\geq1)$

c) Usando i risultati di **b)** si ricavi che

11) $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n+1})$

Scrivendo la **8)** fino al termine di potenza n+1 e sostituendo x^2 ad x si ha:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}+o(x^{2n+2});$$

d'altro canto il termine $(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}+o(x^{2n+2})$ è un infinitesimo di ordine superiore ad x^{2n+1} e quindi si può porre: $(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}+o(x^{2n+2})=o(x^{2n+1})$; pertanto la **11)** è dimostrata.

12) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}x^4+\ldots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+o(x^{2n+1})$

Si procede come nel caso della **11)** a partire dalla **9)**

13) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+\ldots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+o(x^n)$

Si ottiene dalla **9)** sostituendo x con -x.

d) Verificare (almeno per i primi valori di n) che si ha:

14) $\text{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$

15) $\text{arcsen}x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5+\ldots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+o(x^{2n+2})$

16) $\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 - \ldots - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o\left(x^{2n+2}\right)$

Sarà molto utile nel seguito il seguente risultato: se $f_2 \ldots f_k$ sono infinitesimi in x_0 di ordine superiore ad f_1 e se $g_2 \ldots g_k$ sono infinitesimi in x_0 di ordine superiore ad g_1 si ha:

$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1 + \ldots + f_k}{g_1 + \ldots + g_k} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1}{g_1}$: in altri termini è *lecito cancellare gli infinitesimi di ordine superiore.*

4.2 Calcolo dei limiti mediante l'utilizzo della formula di Taylor

Calcolare i seguenti limiti (utilizzando la formula di Taylor):

1) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$; 2) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2 - x^2}{x^6}$;

3) $\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right]$; 4) $\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\log(1+x^4)} - \frac{1}{x^4}\right]$;

5) $\lim_{x \to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)^2 - x^2}{(\operatorname{arctg} x)^2 - (\log(1+x))^2}$; 6) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$;

7) $\lim_{x \to 0} \frac{\log^2(1+x) - x^2}{x\sqrt{1+x^2} - x\cos 2x}$;

8) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{\cos\frac{1}{x} - e^{\frac{1}{2x^2}}}\right) \cdot x \cdot \sqrt[3]{x}$; 9) $\lim_{x \to 0^+} \left[1 + \log(1+\sqrt{x})\right]^{\frac{1}{x^2}}$;

10) $\lim_{x \to 0} \frac{2e^{x^2} - 3x\operatorname{sen} x - 2\cos x}{\sqrt{1-x^2} - \cos x}$; 11) $\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^4} - 1} - \frac{1}{1-\cos x^2}\right]$;

12) $\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - \sqrt{1+x^2}}{\operatorname{arctg}\left(x^3\sqrt{x}\right) + x^4 - \operatorname{senh}\left(x^3\sqrt{x}\right)}$;

13) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\log(1+x^2) + 1 - \cos x}{\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x} - x}$; 14) $\lim_{x \to 0} \frac{\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^6}{\operatorname{arcsen} x - \operatorname{sen} x}$;

15) $\lim_{x \to +\infty} x\sqrt{x}\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right]$;

16) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot x^3 \left[\operatorname{sen}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right]}{\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{x}} + \operatorname{senn}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$;

17) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x\operatorname{tg}\frac{1}{x} - \frac{x^2}{x^2+1}}{\left(\operatorname{senh}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2}$;

18) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(e^{\frac{1}{2x^2}} - \cosh\frac{1}{x}\right)^2}{\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)^2}$;

19) $\lim_{x \to 0} \frac{\left[\log(1+x\operatorname{sen} x) - \sqrt{1+2x^2} + 1\right]^2}{\operatorname{senh}\left(x^2\sqrt[3]{x^2}\right) - \operatorname{sen}\left(x^2\sqrt[3]{x^2}\right)}$;

20) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x^2 - x^2 - \left[\log\left[1 + \operatorname{sen}^3 x\right]\right]^2}{\left(\operatorname{arctg} x^3\right)^2 + e^{x^6} - 1}$;

21) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}}}$;

22) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x\operatorname{tg} x} - 1 - x\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+x^4} - 1 - \operatorname{sen}^4 x}$;

23) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\operatorname{sen}\sqrt[3]{\log(x+1)} - \sqrt[3]{\log(x+1)}\right)^3}{2\arccos x-\pi+2x}$;

24) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\operatorname{sen}x-e^x+1)^4}{\operatorname{arcsen}x^2-\log(1+x^2)}$;

25) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2\log(1+1/x^2)-x/\sqrt{3}\operatorname{sen}(\sqrt{3}/x)}{\cos 1/x^2-x^2\operatorname{sen}(1/x^2)}$;

26) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{tg}^2x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$;

27) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[e^{1/x}-\dfrac{1}{x}-\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2}\right]^{x^2}$;

28) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log\operatorname{sen}x-\log x}{x-\sqrt{x}\ \operatorname{arctg}\sqrt{x}}$;

29) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1-\cos x}{x^2} + \dfrac{1}{2}\ \dfrac{\operatorname{arcsen}x}{x}\right]^{\frac{x}{\operatorname{arctg}x-\operatorname{senh}x}}$;

30) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x\operatorname{tg}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x}\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]^{\frac{1}{x\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)}}$;

31) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\cosh\dfrac{1}{x} + \operatorname{senh}\dfrac{1}{x^2}\right]^{\frac{x^4+1}{x^2+2}}$;

32) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen}^2x}-1-\log(1+\operatorname{sen}^2x)}{\cosh x^2-1+\operatorname{arctg}\log(1+\operatorname{tg}^4x)}$;

33) $\lim\limits_{x\to 0} [\operatorname{sen}x+1]^{\frac{1}{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}-\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}}}$;

34) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log[1+(\operatorname{arctg}x)\cdot x]-x\operatorname{sen}x}{\cos x-e^{-x^2/2}}$;

35) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{-1/6x^2}-x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} - \operatorname{arcsen}\dfrac{1}{x^4}}{\cos\dfrac{\sqrt{2}}{x} + \log\left(\dfrac{1+x^2}{x^2}\right)-1}$;

36) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x[1+\operatorname{sen}x]^x-\operatorname{arcsen}x}{\operatorname{sen}x\ [1+x]^{\operatorname{sen}x}-\operatorname{arctg}x}$;

37) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\operatorname{sen}\log(1+x^2)+(\cosh x)^2\right]^{\frac{1}{e^{x^2}-\cos x-\operatorname{sen}x\ \operatorname{arcsen}x}}$;

38) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ \sqrt{1+x^2}-\operatorname{sen}x}{[1+x^2]^x-\sqrt{1+x^3}}$;

39) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x[\cos x-\cosh x-x\operatorname{sen}x]}{\sqrt{1+x^3}-\operatorname{arctg}x^3-e^{x^3}}$;

40) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1+(x+x^3)\operatorname{sen}x}{x^2+1}\right]^{\frac{1}{(2\arccos x-\pi+2\operatorname{sen}x)\,x}}$;

41) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}x\ \operatorname{arctg}x-\operatorname{senh}x\ \operatorname{arcsen}x}{e^{x^4}-1-x^2+\log(1+x^2)}$;

N.B. Molti dei limiti proposti possono essere calcolati anche senza ricorrere alla formula di Taylor; tuttavia calcolarli utilizzando la formula di Taylor serve a rendere il lettore "esperto" nell'uso di una ulteriore tecnica.

Risposte

1) 1/2;
2) -1/6;
3) -1/2;
4) 1/2;
5) 0;
6) 1/6;
7) -2/5;
8) $-1/\sqrt[3]{12}$;
9) $+\infty$;
10) -17/2;
11) 1/3;
12) 1/3;
13) -9;
14) 3;
15) 1/6;

16) $1/2$;
17) 12;
18) $1/16$;
19) $1/12$;
20) $-5/12$;
21) $1/\sqrt[3]{e}$;
22) -1;
23) $1/72$;
24) 0;
25) $-31/40$;
26) e^2;
27) $1/\sqrt{e}$;
28) $-1/2$;
29) $1/\sqrt[12]{e}$;
30) e^{-4};
31) $e\sqrt{e}$;
32) $2/3$;
33) e^6;
34) 8;
35) $179/60$;
36) $5/7$;
37) e^4;
38) $4/3$;
39) $4/3$;
40) $e^{-5/4}$;
41) $-5/3$.

Risoluzioni (1-10, 21-30, 37-41)

1) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$; dalla formula di Mac Laurin per cosx (cfr. 3) si ha:

$$1-\cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

e quindi

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to0} \frac{o(x^3)}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\text{poiché } \lim_{x\to0} \frac{o(x^3)}{x^2}=0\right);$$

2) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$; dalla formula di Mac Laurin per senx (cfr. 2) sostituendo x con x^2 si ha:

$$\operatorname{sen}x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^8) \Rightarrow \operatorname{sen}x^2 - x^2 = -\frac{x^6}{6} + o(x^8) \text{ e quindi}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}x^2-x^2}{x^6} = -\frac{1}{6} + \lim_{x\to0} \frac{o(x^8)}{x^6} = -\frac{1}{6};$$

3) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$; dalla formula di Mac Laurin per e^x (cfr. 1) si ha:

$$e^x-1 = x+\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

e quindi:

$$\lim_{x\to0} \left[\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to0} \left[\frac{x-(e^x-1)}{x(e^x-1)}\right] = \lim_{x\to0} \frac{-x^2/2 - o(x^2)}{x^2 + x^3/3 + x\, o(x^2)} =$$

(cancellando gli infinitesimi di ordine superiore) =

$$= \lim_{x\to0} \frac{-x^2/2}{x^2} = -1/2.$$

4) Forma indeterminata $\infty-\infty$; si ha dalla formula di Mac Laurin per log(1+x) (cfr. 6):

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow x-\log(1+x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

e quindi

$$\lim_{x\to0} \left[\frac{1}{\log(1+x^4)} - \frac{1}{x^4}\right] = \lim_{x\to0} \left[\frac{x^4-\log(1+x^4)}{x^4 \log(1+x^4)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to0}\left[\frac{x-\log(1+x)}{x\log(1+x)}\right] = \lim_{x\to0}\frac{x^2/2+o(x^2)}{x^2-x^3/2+x\ o(x^2)} = \text{(cancellando gli}$$

infinitesimi di ordine superiore) $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2/2}{x^2} = 1/2.$

5) Forma indeterminata $\frac{0}{0}$; dalla formula di Mac Laurin per senx si ha:

$$(\operatorname{sen}x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{36} + (o(x^4))^2 -$$

$$- \frac{x^4}{3} + 2x\ o(x^4) - \frac{x^3}{3}\ o(x^4) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$$

poiché $\frac{x^6}{36} + (o(x^4))^2 + 2x\ o(x^4) - \frac{x^3}{3}\ o(x^4)$ è un infinitesimo di ordine superiore ad x^5 (cioè è $o(x^5)$); analogamente

$(\operatorname{arctg}x)^2 = x^2 - \dfrac{2x^4}{3} + o(x^5)$

$(\log(1+x))^2 = (x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2))^2 = x^2 - x^3 + o(x^3)$

e quindi

$(\operatorname{arctg}x)^2 - (\log(1+x))^2 = +x^3 + o(x^3)$ (poiché $o(x^5) \pm o(x^3) = o(x^3)$)

In definitiva:

$$\lim_{x\to0}\frac{(\operatorname{sen}x)^2 - x^2}{(\operatorname{arctg}x)^2 - (\log(1+x))^2} = \lim_{x\to0}\frac{-x^4/3 + o(x^5)}{x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to0}\frac{-4/3}{x^3}\ x^4 = 0$$

(l'ultimo passaggio si ottiene cancellando gli infinitesimi di ordine superiore).

6) Forma indeterminata $\frac{0}{0}$; dalla formula di Mac Laurin per arcsenx si ricava sostituendo x con $\sqrt{x}$:

$$\operatorname{arcsen}\sqrt{x} = \sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{6} + o(x^2) \text{ e quindi}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to0}\frac{x\sqrt{x}/6 + o(x^2)}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{6}$$

7) Forma indeterminata $\frac{0}{0}$; dalla formula di Mac Laurin per $\log(1+x)$ si ha:

$$(\log(1+x))^2 = \left[x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]^2 = x^2 - x^3 + o(x^3);$$

analogamente dalla formula di Mac Laurin per $\sqrt{1+x}$ con x^2 al posto di x si ha:

$$\sqrt{1+x^2} = x\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \text{ ed ancora } x\cos 2x = x(1 - 2x^2 + o(x^3))$$

Quindi

$$\lim_{x\to0}\frac{\log^2(1+x) - x^2}{x\sqrt{1+x^2} - x\cos 2x} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{-x^3 + o(x^3)}{\frac{5}{2}x^3 + x\ o(x^2) - x\ o(x^3)} = -\frac{2}{5}$$

8) Forma indeterminata $0\cdot(\infty)$: dalla formula di Mac Laurin per cosx e per e^x si ricava:

$$\cos\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4!x^4} + o\left(\frac{1}{x^5}\right)$$

$$e^{-\frac{1}{2x^2}} = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

(dove al solito $o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ rappresenta un infinitesimo di ordine superiore ed $\frac{1}{x^\alpha}$ per $x \to \pm\infty$). Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\cos\frac{1}{x} - e^{\frac{-1}{2x^2}}}\right) x^3\sqrt{x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{-1}{12x^4} + o\left(\frac{1}{x^5}\right) - o\left(\frac{1}{x^4}\right)}\; x^3\sqrt{x} = \text{(tenendo conto che } o\left(\frac{1}{x^5}\right) \pm$$

$$o\left(\frac{1}{x^4}\right) = o\left(\frac{1}{x^4}\right)) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{-\frac{1}{12} + x^4\, o\left(\frac{1}{x^4}\right)} = \frac{-1}{\sqrt[3]{12}}$$

9) Forma indeterminata $(1)^{+\infty}$; si ha:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\log\left[1+\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right]}{x^2}};$$

dalla formula di Mac Laurin per $\log(1+x)$ con $\log(1+\sqrt{x})$ al posto di x si ha:

$$\log\left[1+\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right] = \log\left(1+\sqrt{x}\right) + o\left(\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right)$$

e poiché

$$\log\left(1+\sqrt{x}\right) = \sqrt{x} + o\left(\sqrt{x}\right)$$

si ha in definitiva:

$$\log\left[1+\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right] = \sqrt{x} + o\left(\sqrt{x}\right)$$

(tenendo conto che $o\left(\sqrt{x} + o\left(\sqrt{x}\right)\right) = o\left(\sqrt{x}\right)$); quindi

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}{x^2}} = e^{+\infty} = +\infty$$

10) Forma indeterminata $\frac{0}{0}$; dalla formula di Mac Laurin si ha:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right);\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^5\right);$$

$$x\,\mathrm{sen}\,x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + x\, o\left(x^4\right)$$

e quindi

$$2e^{x^2} - 3x\,\mathrm{sen}\,x - 2\cos x = \frac{17}{12}x^4 + o\left(x^4\right);$$ (osserva che $o(x^4) \pm o(x^5) \pm x\, o(x^4) = o(x^4)$) analogamente:

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - o(x^4);$$

$$osx = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5);$$

da qui:

$$\sqrt{1-x^2} - \cos x = -\frac{x^4}{6} + o(x^4)$$ (osserva che $o(x^4) \pm o(x^5) = o(x^4)$)

e quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2} - 3x\,\mathrm{sen}\,x - 2\cos x}{\sqrt{1-x^2} - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{{}^{17}\!/_{12}\, x^4 + o\left(x^4\right)}{-\frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right)} = -\frac{17}{2}$$

21) Forma indeterminata $(1)^{\infty}$; bisogna calcolare $\lim_{x\to 0} e^{\frac{\log\frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\sqrt{x}}} =$

$= \lim_{t\to 0} e^{\frac{\log\frac{\mathrm{arctg}\,t}{t}}{t\,\mathrm{sen}\,t}}$; si ha dalla formula di Mac Laurin:

$\frac{\mathrm{arctg}\,t}{t} = \frac{1}{t}\left[t - \frac{t^3}{3} + o\left(t^4\right)\right] = 1 - \frac{t^2}{3} + o\left(t^3\right)$ e quindi dalla formula di Mac Laurin per $\log(1+x)$ segue:

$$\log\frac{\operatorname{arctg}t}{t} = \log\left[1-\frac{t^2}{3}+o(t^3)\right] = -\frac{t^2}{3}+o(t^3)+$$
$$+\,o\left(-\frac{t^2}{2}+o(t^3)\right) = -\frac{t^2}{3}+o(t^2);$$

inoltre

$t\operatorname{sen}t = t\cdot[t+o(t)] = t^2+o(t^2)$

Quindi:

$$\lim_{t\to0}\frac{\log\frac{\operatorname{arctg}t}{t}}{t\operatorname{sen}t} = \lim_{t\to0}\frac{-t^2/3+o(t^2)}{t^2+o(t^2)} = -\frac{1}{3};$$ allora il limite di partenza vale $e^{-1/3}=1/\sqrt[3]{e}$.

22) Forma indeterminata $\frac{0}{0}$; dalla formula di Mac Laurin per e^x con $x\,\operatorname{tg}x$ in luogo di x si ha:

$$e^{x\operatorname{tg}x}-1-x\operatorname{tg}x = 1+x\operatorname{tg}x+\frac{x^2}{2}\operatorname{tg}^2x+o(x^2\operatorname{tg}^2x)-1-x\operatorname{tg}x = \frac{x^2}{x}\operatorname{tg}^2x+$$
$$+\,o(x^4)$$

poiché, come è facile verificare, $o(x^2\operatorname{tg}^2x) = o(x^4)$; inoltre:

$$\sqrt{1+x^4}-\operatorname{sen}^4x = \left(\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)-(x+o(x^2))^4 = \frac{x^4}{2}-x^4+o(x^4)$$
$$= -\frac{x^4}{2}\,o(x^4).$$

Quindi

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x\operatorname{tg}x}-1-x\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+x^4}-1-\operatorname{sen}^4x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}\operatorname{tg}^2x+o(x^4)}{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)} = -1$$ ricordando il limite notevole: $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x} = 1$.

23) Forma indeterminata $\frac{0}{0}$; dalla formula di Mac Laurin per senx (con $\sqrt[3]{\lg(1+x)}$ al posto di x) si ha:

$$\operatorname{sen}\sqrt[3]{\log(1+x)} = \sqrt[3]{\log(1+x)}-\frac{\log(1+x)}{6}+o((\log(1+x))^{4/3}) =$$
$$= \sqrt[3]{\log(1+x)}-\frac{\log(1+x)}{6}+o(x^{4/3})$$ poiché $\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$;

quindi dalla formula di Mac Laurin per log(1+x) segue

$$\left[\operatorname{sen}\sqrt[3]{\log(1+x)}-\sqrt[3]{\log(1+x)}\right]^3 = \left[-\frac{\log(1+x)}{6}+o(x^{4/3})\right]^3 =$$
$$= \left[-\frac{x}{6}+o(x)+o(x^{4/3})\right]^3 = -\frac{x^3}{6^3}+o(x^3);$$

inoltre

$$2\arccos x-\pi+2x = -\frac{x^3}{3}+o(x^4),$$

quindi

$$\lim_{x\to0}\frac{\left[\operatorname{sen}\sqrt[3]{\log(x+1)}-\sqrt[3]{\log(x+1)}\right]^3}{2\arccos x-\pi+2x} = \lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{6^3}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{6}+o(x^4)} = \frac{1}{36}$$

24) Forma indeterminata $\frac{0}{0}$; si ha dalla formula di Mac Laurin

$$(\operatorname{sen}x-e^x+1)^4 = (x-\frac{x^3}{6}o(x^4)-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-o(x^3))^4 = \frac{x^8}{16}+o(x^8)$$
$$\operatorname{arcsen}x^2-\log(1+x^2) = x^2+\frac{x^6}{6}+o(x^8)-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{3}+o(x^6)$$
$$= \frac{x^4}{2}+o(x^5);$$ ne segue

$$\lim_{x\to0}\frac{(\operatorname{sen}x-e^x-1)^4}{\operatorname{arcsen}x^2-\log(1-x^2)} = \lim_{x\to0}\frac{x^8/16+o(x^8)}{\frac{x^4}{2}+o(x^5)} = 0$$

25) Forma indeterminata $\frac{0}{0}$; dalla formula di Mac Laurin si ha:

$$x^2 \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{x} = x^2 \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{3x^6} + o\left(\frac{1}{x^5}\right)\right] -$$

$$- \frac{x}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{x} - \frac{3\sqrt{3}}{6x^3} + \frac{3\sqrt{3}}{40} \frac{1}{x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right)\right] = \frac{31}{120} \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right);$$

$$\cos \frac{1}{x^2} - x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^6}\right) -$$

$$- x^2 \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{6x^6} + o\left(\frac{1}{x^8}\right)\right] = - \frac{1}{3x^4} + o\left(\frac{1}{x^6}\right).$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \log(1+1/x^2) - \frac{x}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{x}}{\cos(1/x^2) - x^2 \operatorname{sen}(1/x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{31}{120} \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)}{-\frac{1}{3x^4} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)} = - \frac{31}{40}$$

26) Forma indeterminata $(1)^{\infty}$; bisogna calcolare:

$$\lim_{x\to 0} (1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{tg}^2 x)}{1-\cos x}};$$

Dalla formula di Mac Laurin per $\log(1+x)$ con $\operatorname{tg}^2 x$ al posto di x si ha:

$\log(1+\operatorname{tg}^2 x) = \operatorname{tg}^2 x + o(\operatorname{tg}^2 x) = \operatorname{tg}^2 x + o(x^2)$ poiché $o(\operatorname{tg}^2 x) =$
$= o(x^2)$;

poiché si ha: $\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$ ne segue:

$\log(1+\operatorname{tg}^2 x) = (x+o(x^2))^2 + o(x^2) = x^2+o(x^2)$;

inoltre

$1-\cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$;

in definitiva

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{tg}^2 x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = 2;$$

ne segue che il limite di partenza vale e^2.

27) Forma indeterminata $(1)^{\infty}$; posto $\frac{1}{x}=t$ bisogna calcolare

$$\lim_{t\to 0} \left[e^t - t - \operatorname{sen} t^2\right]^{\frac{1}{t^2}} = e^{\lim_{t\to 0} \frac{\log\left[e^t-t-\operatorname{sen} t^2\right]}{t^2}};$$

dalla formula di Mac Laurin per e^t e per $\operatorname{sen} t$ si ha:

$(e^t - t = 1+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$; $\operatorname{sen} t^2 = t^2+o(t^4)$; $e^t-t-\operatorname{sen} t^2=1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$;

inoltre da $\log(1+y) = y+o(y)$ segue

$$\log[e^t-t-\operatorname{sen} t^2] = \log\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) = - \frac{t^2}{2} + o(t^2) +$$

$$+ o\left(- \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) = - \frac{t^2}{2} + o(t^2);$$

quindi

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log\left[e^t-t-\operatorname{sen} t^2\right]}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{-t^2/2 + o(t^2)}{t^2} = - \frac{1}{2};$$

pertanto il limite di partenza vale $e^{-1/2}=1/\sqrt{e}$

28) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ riscrivendolo come segue:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{x-\sqrt{x}\ \operatorname{arctg}\sqrt{x}};$$

dalla formula di Mac Laurin per senx si ha:

$$\frac{\operatorname{sen}x}{x} = \frac{1}{x}\left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right] = 1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^3);$$

quindi poiché log(1+y)=y+0(y) segue:

$$\log\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right) = \log\left[1-\frac{x^2}{3!} + o(x^3)\right] = -\frac{x^2}{3!} + o(x^3) + o\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) =$$

$$= -\frac{x^2}{3!} + o(x^2)\ \left(\text{poiché } o(x^3) + o\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = o(x^2)\right);$$

inoltre dalla formula di Mac Laurin per arctgx (con $\sqrt{x}$ al posto di x) si ha:

$$x-\sqrt{x}\ \operatorname{arctg}\sqrt{x} = x-\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{3} + o(x^2\ \sqrt{x})$$

Ne segue:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\operatorname{sen}x-\log x}{x-\sqrt{x}\ \operatorname{arctg}\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^2}{3!} + o(x^2)}{\frac{x^2}{3} + o(x^2\ \sqrt{x})} = -\frac{1}{2}$$

29) Bisogna calcolare:

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{x\log\left[\frac{1-\cos x}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{arcsen}x}{x}\right]}{\operatorname{arctg}x - \operatorname{sen}x}};$$

dalla formula di Mac Laurin per cosx e per arcsenx segue:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} + \frac{1}{2}\ \frac{\operatorname{arcsen}x}{x} = \frac{1}{x^2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2x}\left[x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right] = 1 + \frac{x^2}{24} + o(x^3)$$

e quindi poiché log(1+y) = y+o(y):

$$\log\left(\frac{1-\cos x}{x^2} + \frac{1}{2}\ \frac{\operatorname{arcsen}x}{x}\right) = \frac{x^2}{24} + o(x^3) +$$

$+ o\left(\frac{x^2}{24} + o(x^3)\right) = \frac{x^2}{24} + o(x^2)$ (tieni conto che $o\left(\frac{x^2}{24} + o(x^3)\right) +$ $+ o(x^3) = o(x^2)$; ancora dalla formula di Mac Laurin si ha:

$$\operatorname{arctg}x-\operatorname{sen}x = \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) - \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) =$$

$= -\frac{1}{2}\ x^3 + o(x^4)$ quindi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ \log\left[\frac{1-\cos x}{x^2} + \frac{1}{2}\ \frac{\operatorname{arcsen}x}{x}\right]}{\operatorname{arctg}x - \operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\frac{x^2}{24} + o(x^2)\right)}{-\frac{1}{2}\ x^3 + o(x^4)} = -\frac{1}{12}.$$

Il limite dato vale allora $1/\sqrt[12]{e}$.

30) Bisogna calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\log\left[x\operatorname{tg}\frac{1}{x} + \frac{1}{3x}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{x\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{t\to 0} e^{\frac{t\log\left[\frac{\operatorname{tg}t}{t} + \frac{t}{3}\log(1+t)\right]}{\operatorname{sen}t - t}}$$

Dalla formula di Mac Laurin per tgt e per log (1+t) si ricava

$$\frac{\operatorname{tg}t}{t} + \frac{t}{3}\log(1+t) = \frac{1}{t}\left[t + \frac{t^3}{3} + o(t^4)\right] + \frac{t}{3}[t + (t)] = 1 + \frac{2}{3}t^2 + o(t^2)$$

e poi tenendo conto che log (1+y) = y+o(y) si ottiene

$$\log\left[\frac{\operatorname{tg}t}{t} + \frac{t}{3}\ \log(1+t)\right] = \log\left[1 + \frac{2}{3}\ t^2 + o(t^2)\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\ t^2 + o(t^2) + o\left(\frac{2}{3}\ t^2 + o(t^2)\right) = \frac{2}{3}\ t^2 + o(t^2);$$

poiché si ha poi

$$\operatorname{sen}t-t = -\frac{t^3}{3!} + o(t^4)$$

si ottiene

$$\lim_{t\to 0} \frac{t \log\left[\frac{\operatorname{tg}t}{t} + \frac{t}{3}\log(1+t)\right]}{\operatorname{sen}t - t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2}{3}t^3 + t\,o(t^2)}{-\frac{t^3}{3!} + o(t^4)} = -4;$$

quindi il limite di partenza vale e^{-4}.

37) Forma indeterminata $(1)^{\infty}$; bisogna calcolare:

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\log[\operatorname{sen}\log(1+x^2) + (\cosh x)^2]}{e^{x^2} - \cos x - \operatorname{sen}x \arcsin x}}$$

Si ha:

$$\log(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$$

e da qui, poiché $\operatorname{sen}y = y + o(y^2)$, segue:

$$\operatorname{sen}\log(1+x^2) = x^2+o(x^2) + o((x^2+o(x^2))^2) = x^2 + o(x^2);$$

inoltre:

$$(\cosh x)^2 = (1 = x^2/2 + o(x^3))^2 = 1+x^2+o(x^3)$$

e dunque

$$\operatorname{sen}\log(1+x^2) + (\cosh x)^2 = 1+2x^2 + o(x^2)$$

Quindi

$$\log[\operatorname{sen}\log(1+x^2) + (\cosh x)^2] = \log[1+2x^2 + o(x^2)] =$$
$$= (\text{tenendo conto che } \log(1+y) = y+o(y)) = 2x^2 + o(x^2).$$

Ancora dalla formula di Mac Laurin per e^{x^2}, $\cos x$, $\operatorname{sen}x$, $\arcsin x$ si ha:

$$e^{x^2}-\cos x-\operatorname{sen}x \arcsin x = (1+x^2+o(x^2)) - (1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)) - (x+o(x^2))$$
$$(x+o(x^2)) = \frac{x^2}{2}+o(x^2);$$

ne segue

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log[\operatorname{sen}\log(1+x^2) + (\cosh x)^2]}{e^{x^2} - \cos x - \operatorname{sen}x \arcsin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 4$$

Pertanto il limite dato vale e^2.

38) Forma indeterminata $\frac{0}{0}$; si ha dalla formula di Mac Laurin per $\sqrt{1+x}$ dalla formula di Mac Laurin per $\operatorname{sen}x$:

$$x\sqrt{1+x^2} - \operatorname{sen}x = x\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) - \left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right) = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

Analogamente

$$[1+x^2]^x - \sqrt{1+x^3} = e^{x\log(1+x^2)} - \sqrt{1+x^3} =$$
$$= \left(1+x\log(1+x^2) + o(x\log(1+x^2))\right) - \left(1+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right) =$$
$$= \left(1+x(x^2+o(x^2)) + o(x\log(1+x^2))\right) - \left(1+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right) = \frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

tenendo conto che $x\,o(x^2) + o(x\log(1+x^2)) + o(x^3) = o(x^3)$.

Pertanto il limite dato vale

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2/3)x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \frac{4}{3}$$

39) Forma indeterminata $\frac{0}{0}$; si ha:

$$x\,[\cos x - \cosh x - x\operatorname{sen}x] = x\left[\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) - \right.$$

$$-\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right)-x\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)\Bigg]=-2x^3+o(x^6);$$

poi:

$$\sqrt{1+x^3}-\operatorname{arctg}x^3-e^{x^3}=\left(1+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)-\left(x^3+o(x^6)\right)-$$

$$-\left(1+x^3+o(x^3)\right)=\frac{3}{2}x^3+o(x^3).$$

Quindi il limite dato vale

$$\lim_{x\to0}\frac{-2x^3+o(x^5)}{-3\dfrac{x^3}{2}+o(x^3)}=+\frac{4}{3}.$$

40) Forma indeterminata $(1)^\infty$; bisogna calcolare:

$$\lim_{x\to0}\frac{\log\left[\dfrac{1+(x+x^3)\operatorname{sen}x}{x^2+1}\right]}{(2\arccos x-\pi+2\operatorname{sen}x)x};\ \text{si ha:}$$

$$\log\left[\frac{1+(x+x^3)\operatorname{sen}x}{x^2+1}\right]=\log\left[1+\frac{(x+x^3)\operatorname{sen}x-x^2}{x^2+1}\right]=$$

$$=\frac{(x+x^3)\operatorname{sen}x-x^2}{x^2+1}+o\left(\frac{(x+x^3)\operatorname{sen}x-x^2}{x^2+1}\right);$$

d'altronde

$$(x+x^3)\operatorname{sen}x-x^2=(x+x^3)\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)-x^2=\frac{5}{6}x^4+o(x^5)$$

Quindi:

$$\log\left[\frac{1+(x+x^3)\operatorname{sen}x}{x^2+1}\right]=\frac{1}{x^2+1}\left(\frac{5}{6}x^4+o(x^5)\right)+o(x^4)=\frac{5x^4}{6(x^2+1)}+o(x^4)$$

dove si è tenuto, tra l'altro, conto che:

$$o\left[\frac{1}{x^2+1}\left(\frac{5}{6}x^4+o(x^5)\right)\right]=o(x^4).$$

Si ha poi:

$$x(2\arccos x-\pi+2\operatorname{sen}x)=x\left(-2x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)+2x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)=-\frac{2}{3}x^4+o(x^5).$$

In definitiva il limite dato vale

$$e^{\lim_{x\to0}\left(\frac{5x^4}{6(x^2+1)}+o(x^4)\right)/\left(-\frac{2}{3}x^4+o(x^5)\right)}=e^{-5/4}.$$

41) Forma indeterminata $\frac{0}{0}$; si ha:

$$\operatorname{sen}x\operatorname{arctg}x-\operatorname{senh}x\operatorname{arcsen}x=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)+$$

$$-\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)=-\frac{5}{6}x^4+o(x^5);$$

poi

$$(e^{x^4}-1)-x^2+\left(\log(1+x^2)\right)=\left(x^4+o(x^4)\right)-x^2+\left(x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)=$$

$$=\frac{x^4}{2}+o(x^4);$$

in definitiva il limite dato vale

$$\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{5}{6}x^4+o(x^5)}{\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)}=-\frac{5}{3}.$$

4.3 Ulteriori applicazioni della formula di Taylor

1) Calcolare $\log\frac{3}{2}$ con un errore ε tale che $|\varepsilon| < 10^{-2}$.

2) Valutare l'errore ε nell'eguaglianza $\sqrt{1+10^{-k}} \cong 1+\frac{10^{-k}}{2}$.

3) Calcolare un'approssimazione del numero e a meno di 1/100 (cioè con le prime due cifre decimali esatte).

4) Calcolare un'approssimazione di $\cosh\frac{1}{2}$ a meno di 1/1000 (cioè con le prime tre cifre decimali esatte).

5) Dimostrare che

a) $\alpha<0$ od $\alpha>1$ $\Rightarrow (1+x)^\alpha \ge 1+\alpha x$ in $]-1,+\infty[$;
b) $0<\alpha<1$ $\Rightarrow (1+x)^\alpha \le 1+\alpha x$ in $]-1,+\infty[$.

6) Dimostrare che

$$x>0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} < 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2; \quad -1<x<0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} > 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2.$$

7) Dimostrare che se n è dispari si ha in tutto R

$$e^x \ge 1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

se n è pari la diseguaglianza vale in $[0,+\infty[$. In entrambi i casi si ha l'eguaglianza se e solo se $x=0$.

8) Dimostrare che

$$x-\frac{x^3}{6} < \operatorname{sen}x < x \qquad \text{per } x>0$$

$$x < \operatorname{sen}x < x-\frac{x^3}{6} \qquad \text{per } x<0.$$

9) Dimostrare che

$\log(1+x) \le x$ in $]-1,+\infty[$ (l'eguaglianza vale se e solo se $x=0$);

$$\log(1+x) > x-\frac{x^2}{2} \text{ in }]0,+\infty[;$$

$$\log(1+x) < x-\frac{x^2}{2} \text{ in }]-1,0[.$$

10) Dimostrare che

$$2\cos(x+1) > 1-x^2-2x \quad \forall x\in\left[-\frac{\pi}{2}-1,\ \frac{\pi}{2}-1\right].$$

11) Dimostrare che l'equazione

$$2(e^{\operatorname{sen}x}-1-\operatorname{sen}x) = \operatorname{sen}^2x$$

ha in $[-\pi/2,\ \pi/2]$ solo la soluzione $x=0$.

12) Dimostrare che

$$e^x+e^{-x} > 2+x^2 \quad \forall x\in R.$$

13) Utilizzando la formula di Taylor di punto iniziale 1 arrestata al termine di grado 2 provare che se $x\in[1,1+10^{-k}]$

$$\sqrt[3]{x} = \frac{1}{9}\left[5+5x-x^2\right]+\varepsilon$$

con $|\varepsilon| < \frac{5}{81}\frac{1}{10^{3k}}$.

14) Dimostrare indipendentemente le due diseguaglianze equivalenti

α) $e^x \le \frac{1}{1-x}$ $\quad x\in]-\infty,1[$;

β) $\log(1-x) \le -x$ $\quad x\in]-\infty,1[$

(dove il segno di uguale vale se e solo se $x=0$).

15) Dimostrare le due diseguaglianze equivalenti:

γ) $e^{\frac{1}{x+1}} < 1+\frac{1}{x} < e^{\frac{1}{x}}$ $\quad x\in]0,+\infty[$

δ) $\frac{1}{x+1} < \log\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ $\qquad x\in\,]0,+\infty[$.

16) Provare che

α) $\operatorname{senh}x > x+\frac{x^3}{3!}$ $\qquad \forall x>0$

β) $\operatorname{senh}x > x+\frac{x^3}{3!}$ $\qquad \forall x<0$.

17) Provare che

$16\sqrt{1+\operatorname{sen}x} \le 16+8\operatorname{sen}x-2\operatorname{sen}^2x+\operatorname{sen}^3x \qquad \forall x\in[0,\pi/2]$.

18) Dare una stima dell'errore nell'eguaglianza approssimata

$\log(1+\operatorname{sen}x) \cong x-\frac{x^2}{2} \qquad x\in[0,10^{-k}]$.

19) Dare una stima dell'errore nell'eguaglianza approssimata

$\frac{1}{1+\operatorname{tg}x} \cong 1-x+x^2 \qquad x\in[0,10^{-k}]$.

Risoluzioni

1) La formula di Mac Laurin con il resto di Lagrange per $\log(1+x)$ si scrive:

$$\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\varepsilon_n(x)$$

dove $\varepsilon_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}}$ con c interno all'intervallo di estremi 0 ed x; $\varepsilon_n(x)$ è l'errore che si commette assumendo l'eguaglianza approssimata:

$$\log(1+x) \cong x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n};$$

posto allora x=1/2 ed n=4 si ha:

$$\log(3/2) = \log(1+1/2) \cong \frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}-\frac{1}{64}=\frac{77}{192}$$

con un errore

$$\left|\varepsilon_4\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|+\frac{1}{5}\,\frac{1}{2^5}\,\frac{1}{(1+c)^5}\right| < \frac{1}{5\cdot 2^5} = \frac{1}{160}$$

(tieni conto che $0<c<\frac{1}{2}$).

Osserva che $\frac{77}{192}$ è un valore approssimato per difetto di $\log\frac{3}{2}$ in quanto l'errore $e_4(1/2)$ è positivo.

2) La formula di Mac Laurin di ordine 1 con il resto di Lagrange per $\sqrt{1+x}$ dà:

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}+\varepsilon_1(x), \quad \text{con } \varepsilon_1(x) = -\frac{1}{8}\frac{x^2}{\sqrt{(1+c)^3}}$$

dove c, al solito, è interno all'intervallo di estremi 0 ed x; posto $x=10^{-k}$ si ha allora:

$$\sqrt{1+x} \cong 1+\frac{10^{-k}}{2} \text{ ed } \left|\varepsilon_1(10^{-k})\right| \le \frac{10^{-2k}}{8}$$

3) Si ha:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\varepsilon_n(x)$$

con $\varepsilon_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^c$ dove c è interno all'intervallo di estremi 0 ed x: posto x=1 si ha:

$$c\in\,]0,1[\;\Rightarrow\;|\varepsilon_n(1)| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Quindi si avrà certamente un'approssimazione di e a meno di $\frac{1}{100}$ scegliendo n in modo tale che sia

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow (n+1)! > 300$$

Si ha subito che scegliendo n=5 riesce 6!=720 e quindi $|\varepsilon_5(1)| < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} < \frac{1}{100}$; ne segue che l'eguaglianza approssimata (per difetto)

$$e \cong 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!} = \frac{163}{60} = 2,716 \ldots$$

è esatta fino alla seconda cifra decimale.

4) Si ha:

$$\cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\varepsilon_{2n}(x)$$

dove $\varepsilon_{2n}(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cosh c$ con c appartenente all'intervallo di estremi 0 ed x; posto $x=\frac{1}{2}$ si ha per l'errore la stima

$$\left|\varepsilon_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{1}{(2n+2)!}\ \frac{1}{2^{2n+2}}\cosh c\right| \le \frac{1}{(2n+2)!}\ \frac{1}{2^{2n+3}}\left[e^c+\frac{1}{e^c}\right]$$

Tenendo conto che

$$c\in\left]0,1/2\right[\Rightarrow e^c < \sqrt{e}<1.8;\ \frac{1}{e^c} < 1.$$

Si ha:

$$\left|\varepsilon_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{1}{(2n+2)!}\ \frac{1}{2^{2n+3}}\left[\frac{18}{10}+1\right] = \frac{1}{(2n+2)!}\ \frac{1}{2^{2n+2}}\cdot\left[\frac{7}{5}\right]$$

e quindi con n=2

$$\left|\varepsilon_4\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{1}{6!}\ \frac{1}{2^6}\cdot\frac{7}{5} = \frac{7}{230400} < \frac{1}{10000},$$

Ne segue che l'eguaglianza approssimata (per difetto)

$$\cosh\frac{1}{2} \cong 1+\frac{1}{8}+\frac{1}{6\cdot 2^6} = \frac{433}{384}$$

è corretta fino alla terza cifra decimale.

5) Dalla formula di Mac Laurin arrestata al termine di primo grado si ha:

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\varepsilon_1(x)$$

dove $\varepsilon_1(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\,(1+c)^{\alpha-2}\,x^2}{2!}$ con c appartenente all'intervallo di estremi 0 ed x. Ne segue

$$\begin{array}{lll} \alpha<0 \text{ od } \alpha>1 & \Rightarrow \varepsilon_1(x)\ge 0 & \Rightarrow (1+x)^\alpha \ge 1+\alpha x \\ 0<\alpha<1 & \Rightarrow \varepsilon_1(x)\le 0 & \Rightarrow (1+x)^\alpha \le 1+\alpha x \end{array}$$

6) Dalla formula di Mac Laurin per $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ arrestata al termine di secondo grado si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}\,x^2+\varepsilon_2(x)$$

con $\varepsilon_2(x) = -\frac{5}{16}\,\frac{x^3}{(\sqrt{1+c})^7}$, dove c, al solito, appartiene all'intervallo di estremi 0 ed x.
Quindi

$$x>0 \Rightarrow \varepsilon_2(x)<0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} < 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}\,x^2$$

7) Si ha:

$$x^2 = 1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}\ e^c}{(n+1)!}$$

e quindi poiché sia nel caso n dispari, $x\in R$ che nel caso n pari $x\geq 0$ si ha $\frac{x^{n+1}\ e^c}{(n+1)!}\geq 0$ (con l'uguaglianza se e solo se $x=0$); ne segue:

$$e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n!}.$$

8) Si ha dalla formula di Mac Laurin arrestata al secondo termine:

$$\operatorname{sen}x=x-\frac{x^3}{3!}\cos c;$$

pertanto se $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$ si ha $c\in]0,x[$ e quindi $\cos c>0$;

Ne segue che

$$x\in]0,\pi/2[\ \Rightarrow\ -\frac{x^3}{3}\cos c<0\ \Rightarrow\ \operatorname{sen}x<x;$$

tale diseguaglianza è ovvia per $x\geq\pi/2$ poiché $\pi/2>1$ e quindi

$$\operatorname{sen}x\leq 1<\frac{\pi}{2}\leq x.$$

Si ha poi (tieni conto che è $x>0$):

$$\cos c\geq -1\ \Rightarrow\ -\frac{x^3}{3!}\cos c\geq -\frac{x^3}{3!}\ \Rightarrow\ \operatorname{sen}x\geq x-\frac{x^3}{3!}.$$

In modo analogo si procede se $x<0$.

9) Dalla formula di Mac Laurin per $\log(1+x)$ arrestata al primo ed al secondo termine si ha:

$$\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2(1+c)^2}$$ (con il solito significato per c)

e quindi $\log(1+x)\leq x$ poiché $\frac{x^2}{2(1+c)^2}\geq 0$ (con l'eguaglianza se e solo se $x=0$)

$$\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(1+c)^3}$$

e pertanto

$$x>0\ \Rightarrow\ \frac{x^3}{3(1+c)^3}>0\ \Rightarrow\ \log(1+x)>x-\frac{x^2}{2};$$

$$x<0\ \Rightarrow\ \frac{x^3}{3(1+c)^3}<0\ \Rightarrow\ \log(1+x)<x-\frac{x^2}{2}.$$

10) Dalla formula di Mac Laurin per $\cos t$ arrestata al secondo termine si ha:

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}\cos c;$$

pertanto se $t\in[-\pi/2,\ \pi/2]$ anche $c\in[-\pi/2,\ \pi/2]$ e quindi

$\frac{t^4}{4!}\cos c>0\ \Rightarrow\ \cos t>1-\frac{t^2}{2}.$

Così posto $t=x+1$ si ha: $2\cos(x+1)>1-2x-x^2$ per $x\in[-\pi/2-1,\pi/2-1]$

11) Si ha:

$$e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3!}\ e^c$$

e quindi:

$$2\left(e^{\operatorname{sen}x}-1-\operatorname{sen}x\right) = \operatorname{sen}^2 x+\frac{(\operatorname{sen}x)^3}{3}\; e^c$$

con c interno all'intervallo di estremi 0 e senx; quindi

$$2\left(e^{\operatorname{sen}x}-1-\operatorname{sen}x\right) = \operatorname{sen}^2 x \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}\, e^c=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^3 x=0 \Leftrightarrow x=0.$$

12) Dalla formula di Mac Laurin per coshx arrestata al secondo termine si ha:

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\cosh c$$

e quindi

$$\frac{x^4}{4!}\cosh c >0 \Rightarrow \frac{e^x+e^{-x}}{2} > 1+\frac{x^2}{2} \Rightarrow e^x+e^{-x} > 2+x^2.$$

13) Posto $f(x)=\sqrt[3]{x}$ si ha:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\, x^{-2/3}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}\, x^{-5/3}$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27}\, x^{-8/3}$$

Quindi

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(1)}+f'(1)(x-1)+f''\frac{(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(c)}{3!}(x-1)^3 =$$

$$= 1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{9}(x-1)^2+\frac{5}{81}\,\frac{1}{\sqrt[3]{c^8}}(x-1)^3 = \frac{5}{9}+\frac{5x}{9}-\frac{x^2}{9}+\varepsilon$$

con $c\in\,]1,x[$. Quindi:

$$|\varepsilon| = \left|\frac{5}{81}\,\frac{1}{\sqrt[3]{c^8}}(x-1)^3\right| < \frac{5}{81}\,\frac{1}{10^{3k}}\left(\text{poiché } 0\le x-1<\frac{1}{10^k} \text{ e } c>1\right).$$

14) Tenendo conto che $1-x>0$ si ha:

$$e^x \le \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow 1-x \le e^{-x}$$

e l'ultima diseguaglianza segue da $e^y\ge 1+y$ (cfr. esercizio 7) con n=1 con $y=-x$; inoltre poiché (cfr. esercizio 7)

$e^y=1+y \Leftrightarrow y=0$ si ha $e^x=\frac{1}{1-x} \Leftrightarrow x=0$.

La diseguaglianza $\log(1-x)\le -x$ in $]-\infty,1[$ segue (cfr. la prima diseguaglianza dell'esercizio 8) da

$$\log(1+y)\le y \text{ in }]1,+\infty[$$

con $-x$ al posto di y. Inoltre poiché $\log(1+y)=y \Leftrightarrow y=0$ si ha $\log(1-x)=-x \Leftrightarrow x=0$.

15) Dimostriamo γ): da $e^y>1+y\ \forall y>0$ (cfr. esercizio 6) posto $y=\frac{1}{x}$

segue $e^{\frac{1}{x}} > 1+\frac{1}{x}$; per dimostrare l'altra parte di γ) cioè

$$e^{\frac{1}{x+1}} < 1+\frac{1}{x} \quad x\in\,]0,+\infty[$$

poniamo $\frac{1}{x+1} = t$; si ha $x = \frac{1-t}{t}$ e quindi la diseguaglianza in oggetto è equivalente a

$$e^t < \frac{1}{1-t},\quad t\in\,]0,1[;$$

quest'ultima diseguaglianza è la α) dell'esercizio 14).

Per quanto riguarda δ) si ha che la diseguaglianza

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

segue da $\log(1+y)<y$ (cfr. la prima diseguaglianza dell'esercizio 8) con $y=\frac{1}{x}$.

L'altra parte di δ) si ottiene da (cfr. β) esercizio **13**)

$\log(1-y)<-y$ con $y=\dfrac{1}{x+1}$; si ha:

$$\log\left(1-\frac{1}{x+1}\right) < -\frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < -\log\frac{x}{x+1} = \log\frac{x+1}{x} =$$
$$= \log\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

N.B. La δ) si ottiene applicando il teorema di Lagrange alla funzione logt nell'intervallo $[x, x+1]$; si ha:

$\log\dfrac{x+1}{x} = \log[x+1]-\log[x]=\dfrac{1}{c}$ con $c\in]x, x+1[$; quindi δ) segue da $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{x}$.

16) Dalla formula di Mac Laurin per senhx si ha

$$\operatorname{senh}x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cosh c;$$

pertanto:

$$x>0 \Rightarrow \frac{x^5}{5!}\cosh c>0 \Rightarrow \operatorname{senh}x>x+\frac{x^3}{3!}$$
$$x<0 \Rightarrow \frac{x^5}{5!}\cosh c<0 \Rightarrow \operatorname{senh}x<x+\frac{x^3}{3!}.$$

17) Si ha dalla formula di Mac Laurin per $\sqrt{1+y}$ arrestata al termine di secondo grado:

$$\sqrt{1+y} = 1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{8}+\frac{y^3}{16\sqrt{(1+c)^5}}.$$

Se è $y>0$ si ha: $c\in]0,y[\Rightarrow 1+c>1 \Rightarrow \dfrac{1}{16\sqrt{(1+c)^5}}<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16\sqrt{1+y}<16+8y-2y^2+y^3$

e quindi con $y=\operatorname{sen}x$ si ottiene la diseguaglianza cercata.

18) Si ha per il teorema di Lagrange applicato alla funzione $\log(1+y)$ ed all'intervallo $[\operatorname{sen}x, x]$:

$$|\log(1+\operatorname{sen}x)-\log(1+x)| = |\operatorname{sen}x-x|\cdot\frac{1}{c+1},\quad c\in[\operatorname{sen}x, x];$$

poiché poi $\operatorname{sen}x=x-\dfrac{x^3}{3!}\cdot\cos\xi$ con $\xi\in]0,x[$ si ha:

$$|\log(1+\operatorname{sen}x)-\log(1+x)| \le \frac{x^3}{6} \le \frac{1}{6\cdot 10^{3k}}$$

(si è tenuto conto che $|\cos\xi| < 1$ e $\dfrac{1}{1+c} < 1$);

si ha poi

$$\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(1+\sigma)^3}\quad \text{con } \sigma\in]0,x[$$

e quindi

$$\left|\log(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\right| < \frac{1}{3\cdot 10^{3k}}.$$

In definitiva si ha:

$$\left|\log(1+\operatorname{sen}x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\right| \le |\log(1+\operatorname{sen}x)-\log(1+x)| +$$
$$+\left|\log(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\right| \le \frac{1}{2\cdot 10^{3k}}$$

e tale diseguaglianza è la stima dell'errore richiesto. Il lettore provi che scrivendo direttamente la formula di Mac Laurin per $\log(1+\operatorname{sen}x)$ si ottiene per l'errore ε la stima più fine: $|\varepsilon| < \dfrac{1}{6\cdot 10^{3k}}$.

19) Dal teorema di Lagrange applicato alla funzione $\frac{1}{1+y}$ nell'intervallo $[x, tgx]$ si ha:

$$\left|\frac{1}{1+tgx} - \frac{1}{1+x}\right| = \left|\frac{1}{(1+c)^2}\right| \cdot |tgx-x| \le |tgx-x|.$$

Poiché

$$tgx=x+\frac{1}{3}(1+tg^2(\xi))\cdot(1+3tg^2(\xi))x^3$$

si ha:

$$|tgx-x| \le \frac{1}{3\cdot 10^{3k}}.$$

(osserva che $\xi\in[0,x] \subset [0,10^{-k}] \subset [0,\pi/4] \Rightarrow tg^2 3<1$).

Inoltre

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\frac{1}{(\sigma+1)^4}\,x^3$$

e quindi

$$\left|\frac{1}{1+x} - (1-x+x^2)\right| \le \frac{1}{(10)^{3k}}.$$

Ne segue

$$\left|\frac{1}{1+tgx} - (1-x+x^2)\right| \le \left|\frac{1}{1+tgx} - \frac{1}{1+x}\right| + \left|\frac{1}{1+x} - (1-x+x^2)\right| \le$$

$$\le \frac{11}{3}\,\frac{1}{(10)^{3k}}$$

CAPITOLO 2

GRAFICI

Per portare a termine lo studio qualitativo del grafico di una funzione numerica f è necessario affrontare un complesso di questioni su ognuna delle quali abbiamo ampiamente discusso nei capitoli precedenti. Infatti, sinteticamente, tale studio si articola secondo il seguente schema:

1) trovare l'insieme di definizione I di f;

2) verificare se trattasi di una funzione pari o dispari e se presenta periodicità;

3) studiare il comportamento di f nei punti di accumulazione di I in cui f non risulti continua o definita e, eventualmente in $+\infty$ e/o $-\infty$; determinare gli eventuali asintoti;

4) studiare, quando la struttura della funzione lo consenta, il segno della funzione f determinandone gli zeri;

5) studiare il segno della derivata prima f'(x);

6) studiare infine il segno della derivata seconda f"(x).

1 - Funzioni razionali

1.1 - Polinomi

1) Consideriamo le seguenti funzioni (polinomi di 3° grado):

$$f_1(x) = x^3-3x+2, \quad f_2(x)=x^3+x+2.$$

Esse risultano continue in R e sono prive di asintoti obliqui. Risulta

$$f_1'(x)=3(x^2-1), \qquad f_1''(x)=6x$$
$$f_2'(x)=3x^2+1, \qquad f_2''(x)=6x.$$

Pertanto f_1 ha nei punti -1 e 1 rispettivamente un punto di massimo e uno di minimo relativo; inoltre f_1 risulta crescente in $]-\infty,-1]$ e $[1,+\infty[$, decrescente in $[-1,1]$. Ancora f_1 è convessa in $[0,+\infty[$, concava in $]-\infty,0]$ con 0 punto di flesso (cfr. fig. 1).

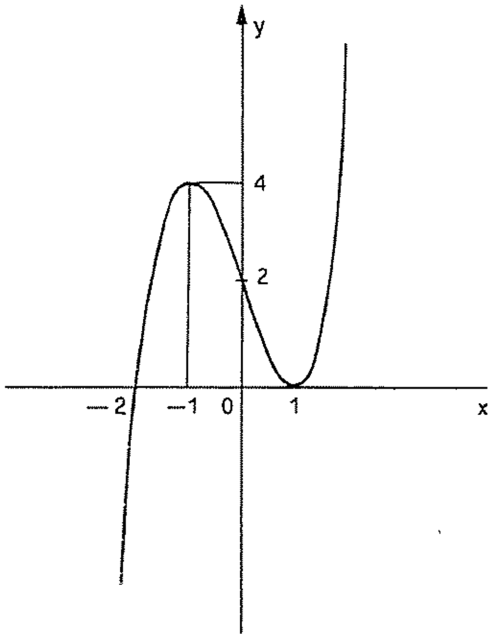


Figura 1

La funzione f_2 è invece crescente in tutto R, convessa in $]0,+\infty[$, concava in $]-\infty,0[$ con 0 punto di flesso (cfr. fig. 2).

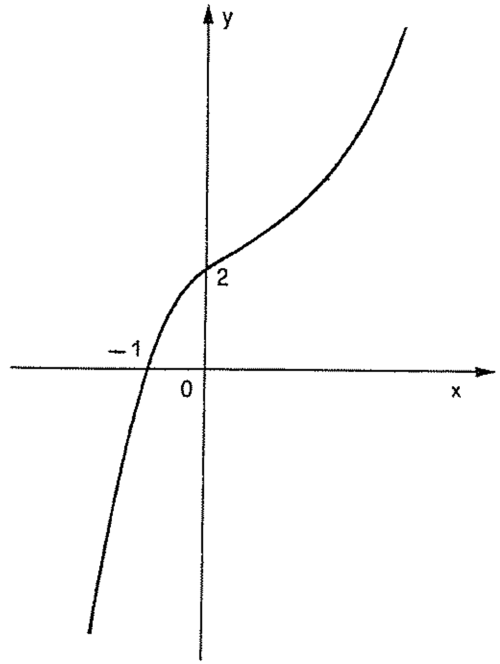


Figura 2

OSSERVAZIONE - Nei due esempi abbiamo considerato polinomi privi del termine di secondo grado perché un qualsiasi polinomio di terzo grado

$$x^3+ax^2+bx+c$$

con la trasformazione $x=y-a/3$ si riconduce ad uno del tipo $y^3+b'y+c'$.

2) Consideriamo la funzione

$$f(x)=(x-1)^2(x^2+a) \quad a\in R.$$

Essa risulta definita in tutto R ed è priva di asintoti. Si ha

$$f'(x)=2(x-1)(2x^2-x+a), \quad f''(x)=2(6x^2-6x+1+a).$$

Per visualizzare come il grafico muti al variare del parametro a consideriamo i seguenti tre casi.

i) $a=1$; f ha in $x=1$ un punto di minimo (assoluto), è decrescente in $]-\infty,1]$, crescente in $[1,+\infty[$. Essa inoltre è convessa in tutto R (cfr. fig. 3).

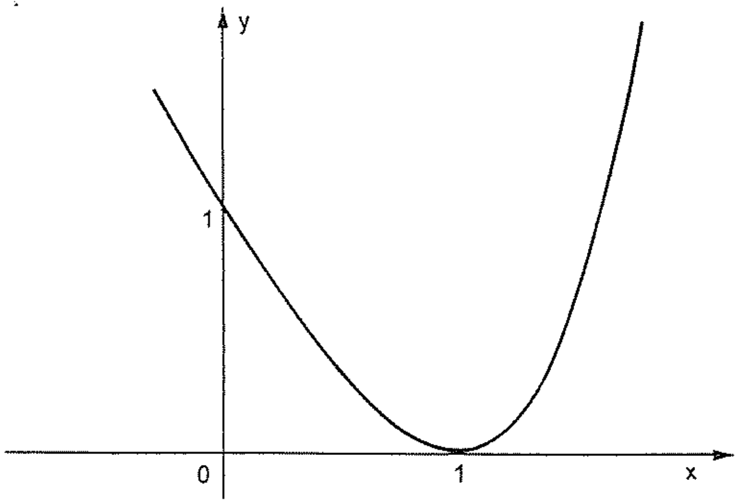


Figura 3

ii) $a=1/3$; f ha le stesse proprietà di monotonia del caso precedente. Per quanto riguarda la derivata seconda essa è negativa in $]1/3,2/3[$, positiva in $]-\infty,1/3[\,\cup\,]2/3,+\infty[$: 1/3 e 2/3 risultano pertanto punti di flesso (cfr. fig. 4).

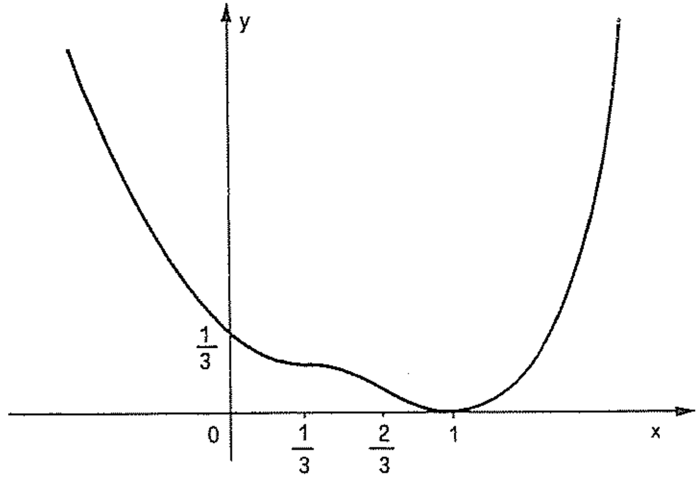


Figura 4

iii) $a=1/9$; f' è negativa in $]-\infty,1/6[\,\cup\,]1/3,1[$, nulla in 1/6, 1/3 e 1, positiva altrove. La derivata seconda è negativa in $\left]\frac{9-\sqrt{21}}{18}, \frac{9+\sqrt{21}}{18}\right[$, non negativa altrove (cfr. fig. 5).

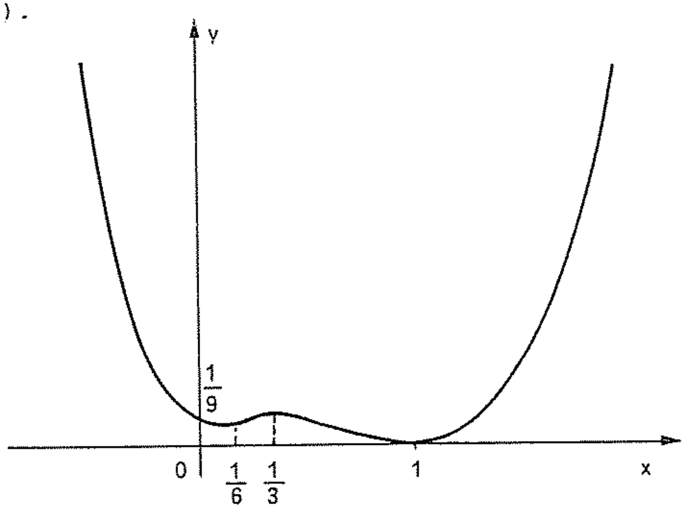


Figura 5

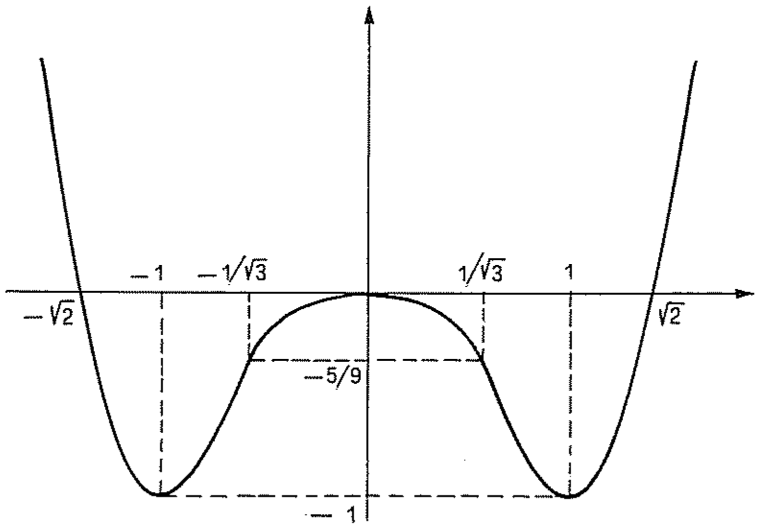
3) $f(x)=x^4-2x^2$

i) $f(x)$ è continua in tutto R e priva di asintoti; inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$;

ii) $f(x)=x^2(x^2-2) \geq 0 \Leftrightarrow x\leq-\sqrt{2},\ x\geq\sqrt{2}$;

iii) $f'(x) = 4x(x^2-1)>0 \Leftrightarrow -1<x<0,\ x>1$; quindi $f(x)$ è crescente in $[-1,0]$ ed in $[1,+\infty[$, decrescente in $]-\infty,-1]$ ed in $[0,1]$; $x=\pm1$ sono punti di minimo assoluti, $x=0$ è punto di massimo relativo;

iv) $f''(x)=12x^2-4>0 \Leftrightarrow x<-1/\sqrt{3},\ x>1/\sqrt{3}$; quindi $f(x)$ è convessa in $]-\infty,-1/\sqrt{3}]$ ed in $[1/\sqrt{3},\ +\infty[$ e concava in $[-1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}]$; $x=\pm1/\sqrt{3}$ sono punti di flesso.



OSS. - Osservando preliminarmente che $f(x)$ è pari si poteva limitare lo studio a $[0,+\infty[$.

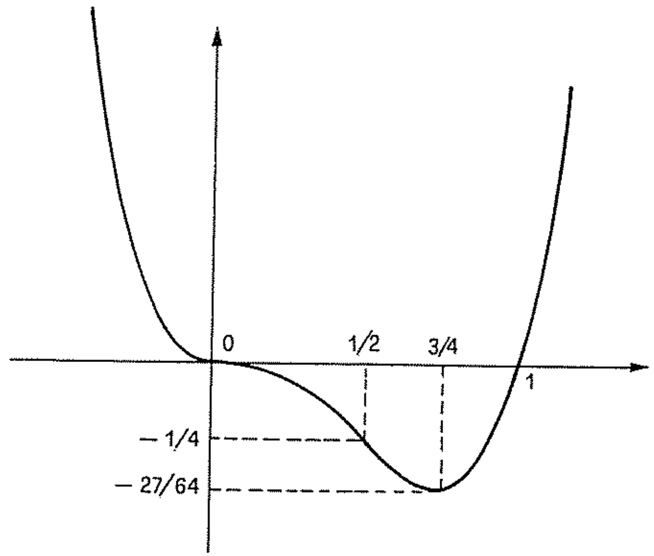
4) $f(x)=4(x^4-x^3)$

i) $f(x)$ è continua in R e priva di asintoti; inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$;

ii) $f(x)=4x^3(x-1)>0 \Leftrightarrow x<0,\ x>1$;

iii) $f'(x)=4(4x^3-3x^2)=4x^2(4x-3)>0 \Leftrightarrow x>3/4$; quindi $f(x)$ è crescente in $[3/4,+\infty[$ e decrescente in $]-\infty,\ 3/4]$; $x=3/4$ è punto di minimo relativo;

iv) $f''(x)=24x(2x-1)>0 \Leftrightarrow x<0,\ x>1/2$; quindi $f(x)$ è convessa in $]-\infty,0]$ e $[1/2,+\infty[$, concava in $[0,1/2]$; $x=0,\ 1/2$ sono punti di flesso.



OSS. - $f'(0)=0 \Rightarrow x=0$ punto a tangente orizzontale.

5) $f(x)=x^5+5x^3$

i) La funzione è continua in tutto R, priva di asintoti e dispari giacché $f(-x)=-f(x)$. Basta allora studiarne la restrizione a $[0,+\infty[$; si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$;

ii) $f'(x) = 5x^2(x^2+3) > 0 \Leftrightarrow x\in]0,+\infty[$;

iii) $f''(x) = 5x\ (4x^2+6) > 0 \Leftrightarrow x\in]0,+\infty[$.

Quindi f(x) in $[0,+\infty[$ è crescente e convessa cosicché l'andamento del suo grafico è quello riportato in fig. a.

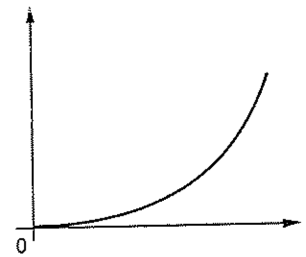


Figura a

Ricordando che una funzione dispari è simmetrica rispetto all'origine si ha che il grafico di f(x) in tutto R è quello riportato in fig. b.

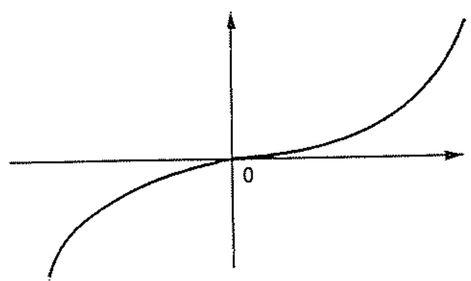


Figura b

6) $f(x)=(x^2-\sqrt{5}x)^3$

i) f(x) è continua in R, priva di asintoti e si ha $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$;

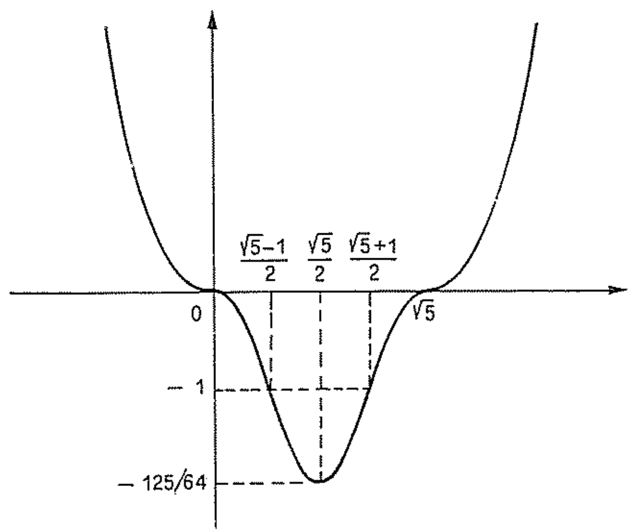
ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x^2-\sqrt{5}\ x>0 \Leftrightarrow x<0,\ x>\sqrt{5}$;

iii) $f'(x)=3(x^2-\sqrt{5}x)^2(2x-\sqrt{5})>0 \Leftrightarrow x>\sqrt{5}/2$;

iv) $f''(x)=30(x^2-\sqrt{5}x)(x^2-\sqrt{5}x+1)>0$; pertanto

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow x<0,\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<\frac{\sqrt{5}+1}{2},\ x>\sqrt{5}.$$

Quindi f(x) è crescente in $[\sqrt{5}/2,\ +\infty[$ e decrescente in $]-\infty,\sqrt{5}/2]$; $x=\sqrt{5}/2$ è punto di minimo assoluto. Inoltre la funzione è convessa in $]-\infty,0]$, $[(\sqrt{5}-1)/2,\ (\sqrt{5}+1)/2]$, $[\sqrt{5},+\infty[$ e concava in $[0,(\sqrt{5}-1)/2]$ ed in $[(\sqrt{5}+1)/2,\ \sqrt{5}]$; i punti $x=0$, $(\sqrt{5}\pm1)/2$, $\sqrt{5}$ sono di flesso.



OSS. $f'(0) = f'(\sqrt{5})=0 \Rightarrow x=0, \sqrt{5}$ sono punti a tangente orizzontale.

Il grafico è simmetrico rispetto alla retta $x=\sqrt{5}/2$.

7) $f(x)=(x^2+x+1)^4$

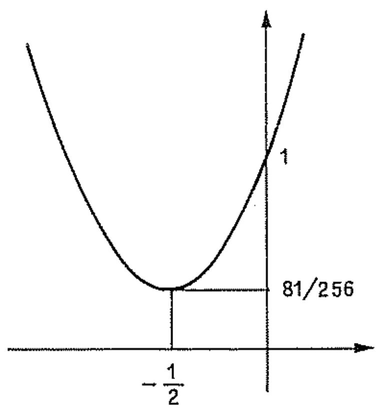
i) $f(x)$ è continua su R, priva di asintoti e si ha $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$;

ii) $f(x)>0\ \forall x\in R$;

iii) $f'(x)=4(x^2+x+1)^3\ (2x+1)>0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$;

iv) $f''(x)=4\ (x^2+x+1)^2\ [3(2x+1)^2+2(x^2+x+1)]>0\ \forall x\in R$.

Pertanto $f(x)$ è crescente in $[-1/2,+\infty[$, decrescente in $]-\infty,-1/2]$ e convessa su tutto R; $x=-1/2$ è punto di minimo assoluto.



1.2 - Rapporto fra polinomi.

1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

La funzione risulta definita in $R-\{-1,1\}$, positiva in $]-1,0\ [\cup]\ 1,+\infty[$, nulla in 0, negativa in $]-\infty,0[\cup]\ 0,1[$.

Si ha inoltre

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0;$$

quindi le rette $x=-1$, $x=1$ sono asintoti verticali, la retta $y=0$ è un asintoto orizzontale. Risulta

$$f'(x) = -\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$$

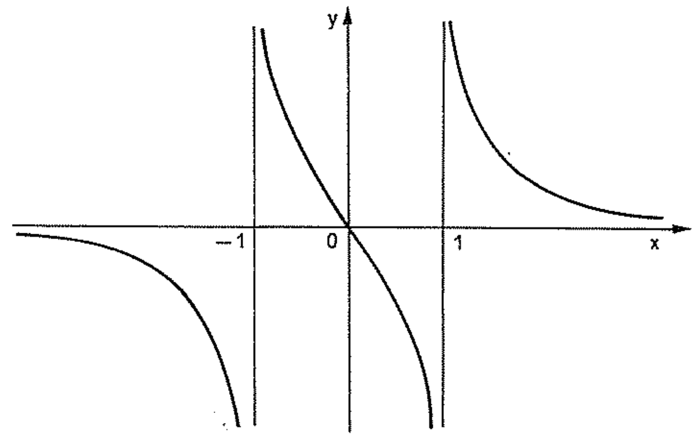


Figura 6

quindi la funzione è decrescente in ogni intervallo contenuto nel suo insieme di definizione. Si ha

$$f''(x) = \frac{2x\,(x^2+3)}{(x^2-1)^3};$$

pertanto la funzione risulta convessa in $]-1,0] \cup]1,+\infty[$, concava in $]-\infty,-1[\cup [0,1[$, 0 è punto di flesso. Tali informazioni permettono di tracciare il grafico (cfr. fig. 6).

2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-x}.$

La funzione è definita in $R-\{0,1\}$. Essa non si annulla mai, risulta negativa in $]0,1[$, positiva nella restante parte dell'insieme di definizione. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = 1 \Rightarrow y=1 \text{ asintoto orizzontale a } +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = 1 \Rightarrow y=1 \text{ asintoto orizzontale a } -\infty,$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to0^-} \frac{x^2+1}{x^2-x} = +\infty \\ &\lim_{x\to0^+} \frac{x^2+1}{x^2-x} = -\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=0 \text{ asintoto verticale,}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to1^-} \frac{x^2+1}{x^2-x} = -\infty \\ &\lim_{x\to1^+} \frac{x^2+1}{x^2-x} = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=1 \text{ asintoto verticale.}$$

Risulta

$$f'(x) = -\frac{x^2+2x-1}{x^2\,(x-1)^2}, \qquad f''(x) = 2\,\frac{x^3+3x^2-3x+1}{x^3\,(x-1)^3}.$$

Quindi la funzione presenta un punto di massimo relativo in $\sqrt{2}-1$, un punto di minimo relativo in $-(\sqrt{2}+1)$; inoltre essa è decrescente in ciascuno degli intervalli $]-\infty, -(\sqrt{2}+1)[$, $]\sqrt{2}-1, 1[$, $]1,+\infty[$, crescente in $]-(\sqrt{2}+1), 0[$, $]0, \sqrt{2}-1[$. Infine osservato che

$$x^3+3x^2-3x+1=2x^3-(x-1)^3=$$
$$=\left[\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\,x+1\right]\left[\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\,x^2-\left(\sqrt[3]{2}+2\right)\,x+1\right]$$

la derivata seconda si annulla solo in $x^*=\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{2}}$. Il grafico della funzione ha pertanto l'andamento illustrato in fig. 7.

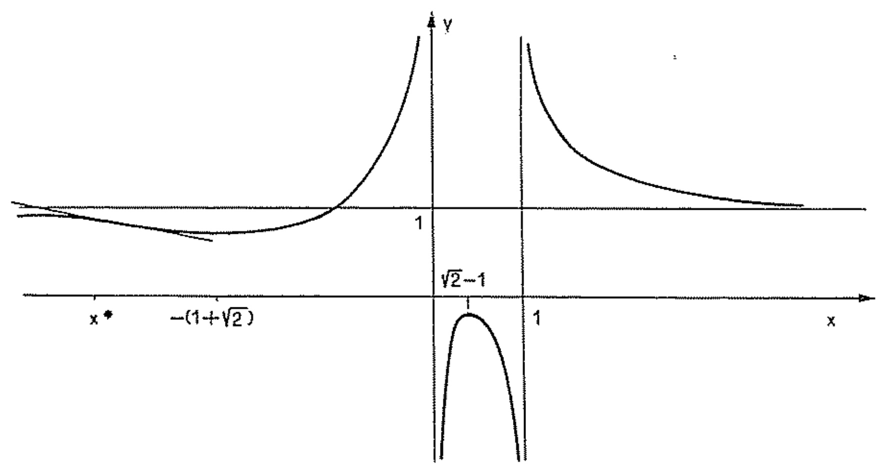


Figura 7

3) $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+x-8}{x\,(x+2)}$

La funzione risulta definita in $R-\{-2,0\}$. Si verifica facilmente che le rette $x=-2$ e $x=0$ sono asintoti verticali; inoltre essendo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+2x^2+x-8}{x^2\,(x+2)} = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-8}{x\,(x+2)} = 0$$

la retta di equazione $y=x$ è asintoto obliquo sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Si ha ancora

$$f'(x) = \frac{(x+1)\,(x+4)\,(x^2-x+4)}{x^2\,(x+2)^2}, \quad f''(x) = 2\,\frac{x^3-24x^2-48x-32}{x^3\,(x+2)^3}.$$

La funzione presenta in -4 un punto di massimo relativo e in -1 un punto di minimo relativo; essa inoltre risulta crescente in ciascuno degli intervalli $]-\infty,-4[$, $]-1,0[$, $]0,+\infty[$, decrescente in $]-4,2[$ e in $]-2,-1[$. Più delicato è lo studio del segno della derivata seconda. A tale proposito lo studio qualitativo del grafico della funzione polinomiale

$$g(x) = x^3 - 24x^2 - 48x - 32$$

unito all'uso appropriato del teorema degli zeri porta a concludere che $f''(x)$ si annulla in un unico punto a e che inoltre

$$g(x) > 0 \ (<0) \Leftrightarrow x>a \ (<a).$$

Si ha allora

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x\in\,]-2,0[\,\cup\,]a,+\infty[,$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x=a$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty,-2[\,\cup\,]0,a[.$$

Pertanto il grafico di f è quello illustrato nella fig.8.

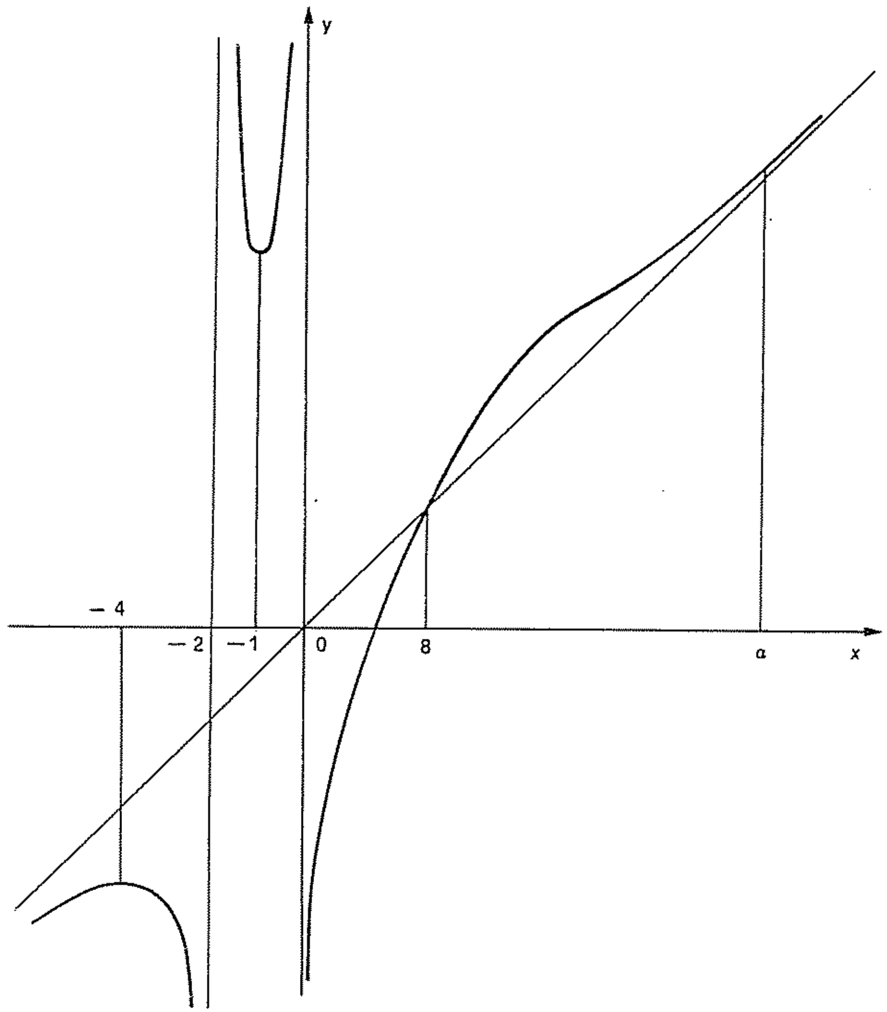


Figura 8

4) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$.

Tale funzione risulta definita in $R-\{0\}$, essa inoltre si annulla nel solo punto -1, è negativa per $x<-1$, positiva altrove. Si ha

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0,$$

quindi le rette di equazione $x=0$ e $y=0$ sono rispettivamente asintoto verticale e orizzontale. Infine

$$f'(x) = -\frac{2+x}{x^3}, \qquad f''(x) = 2\,\frac{3+x}{x^4},$$

da cui

$$\begin{array}{ll} f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2,0[, & f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in\ ]-3,+\infty[- \{0\}, \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=-2, & f''(x) = 0 \Leftrightarrow x=-3, \\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x<-2,\ x>0, & f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in\ ]-\infty,-3[. \end{array}$$

Il grafico ha quindi la configurazione illustrata in fig. 9.

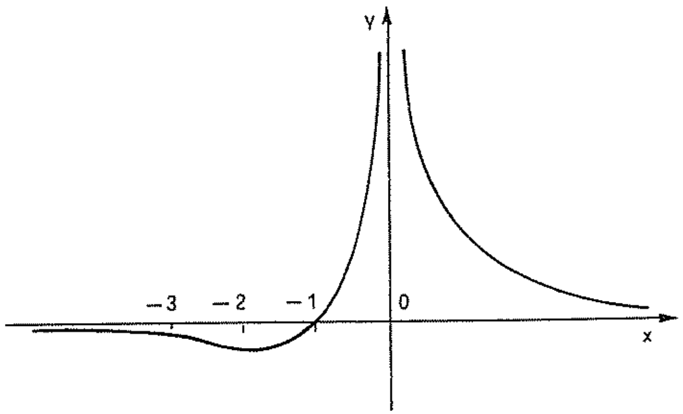


Figura 9

5) $f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}$

i) La funzione è continua in $R-\{0,1\}$;

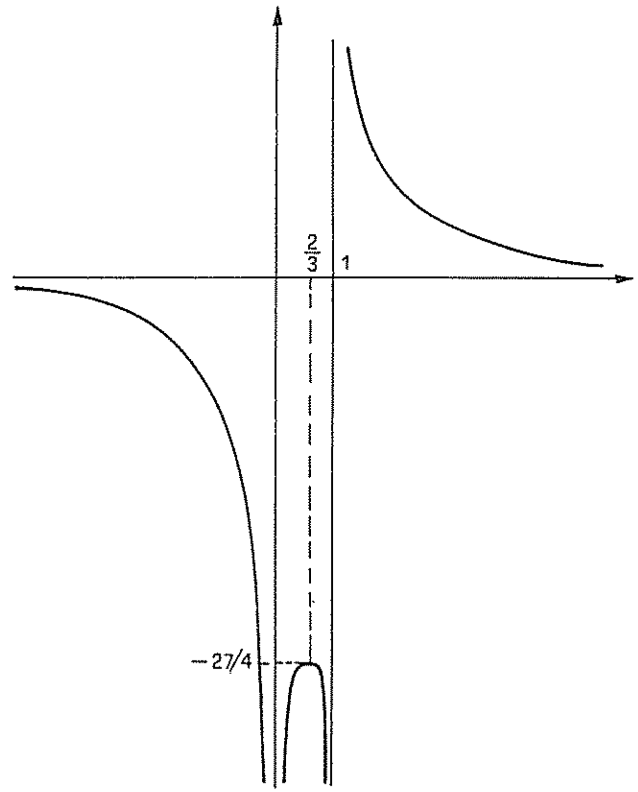
ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x>1$;

iii) $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

quindi $x=0$ ed $x=1$ sono asintoti verticali; inoltre

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y=0$ asintoto orizzontale;

iv) $f'(x) = -\frac{3x-2}{x^3\,(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow 0<x<2/3$;



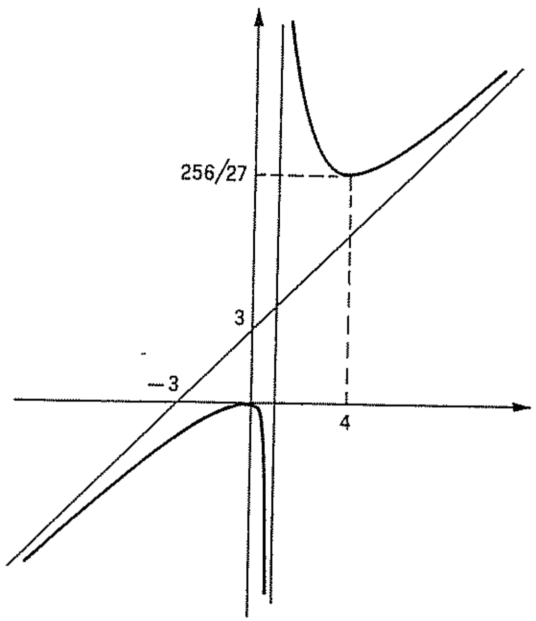
v) $f''(x) = \dfrac{12x^2-16x+6}{x^4\,(x-1)^3} > 0 \Leftrightarrow x>1.$

Quindi $f(x)$ è crescente in $]0,2/3]$ e decrescente in $]-\infty,0[$, in $[2/3,1[$ ed in $]1,+\infty[$; $x=2/3$ è punto di massimo relativo. Inoltre $f(x)$ è convessa in $]1,+\infty[$ e concava in $]-\infty,0[$ ed in $]0,1[$.

6) $f(x) = \dfrac{x^4}{(x-1)^3}$

i) La funzione è definita e continua in $\mathbb{R}-\{1\}$;

ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x>1$;



iii) $\lim\limits_{x\to1^{\pm}} f(x)=\pm\infty \Rightarrow x=1$ asintoto verticale;

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4-x\,(x-1)^3}{(x-1)^3} = 3$$

e quindi $y=x+3$ è un asintoto obliquo;

iv) $f'(x) = \dfrac{x^3\,(x-4)}{(x-1)^4} > 0 \Leftrightarrow x<0,\ x>4$;

v) $f''(x) = 12\,\dfrac{x^2}{(x-1)^5} > 0 \Leftrightarrow x>1.$

Quindi $f(x)$ è crescente in $]-\infty,0]$ ed in $[4,+\infty[$, decrescente in $[0,1[$ ed in $]1,4]$; $x=0$ è punto di massimo relativo ed $x=4$ di minimo relativo. Inoltre $f(x)$ è convessa in $]1,+\infty[$ e concava in $]-\infty,1[$.

7) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-2}$

i) La funzione è continua in $\mathbb{R}-\{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\}$; inoltre $f(x)$ è pari;

ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x<-\sqrt{2},\ x>\sqrt{2}$;

iii) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^{\pm}} f(x)=\pm\infty, \quad \lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^{\pm}} f(x)=\mp\infty$

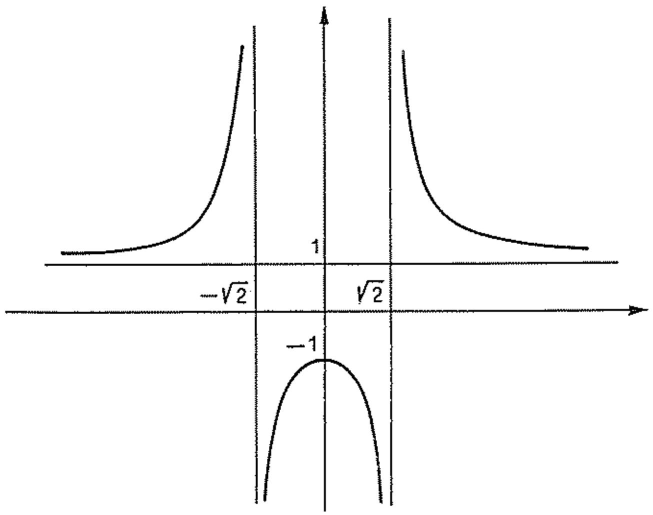
quindi $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$ sono asintoti verticali;

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \Rightarrow y=1$ asintoto orizzontale;

iv) $f'(x) = -\dfrac{8x}{(x^2-2)^2} > 0 \Leftrightarrow x<0,\ x\neq-\sqrt{2}$;

v) $f''(x) = -\dfrac{8\,(3x^2+2)}{(x^2-2)^3} > 0 \Leftrightarrow x<-\sqrt{2},\ x>\sqrt{2}.$

Pertanto f(x) è crescente in $]-\infty,-\sqrt{2}[$ ed in $]-\sqrt{2},0]$, decrescente in $[0,\sqrt{2}[$ ed in $]\sqrt{2},+\infty[$; x=0 è punto di massimo relativo. Inoltre f(x) è convessa in $]-\infty, -\sqrt{2}[$ ed in $]\sqrt{2},+\infty[$, concava in $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.



OSS. Essendo f(x) pari ci si poteva limitare a studiare il grafico in $[0,+\infty[$.

8) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$

i) f(x) è continua in R-{1};

ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x<0,\ x>1$;

iii) $\lim_{x\to 1^\pm} f(x)=\pm\infty$, $\Rightarrow$ x=1 asintoto verticale;

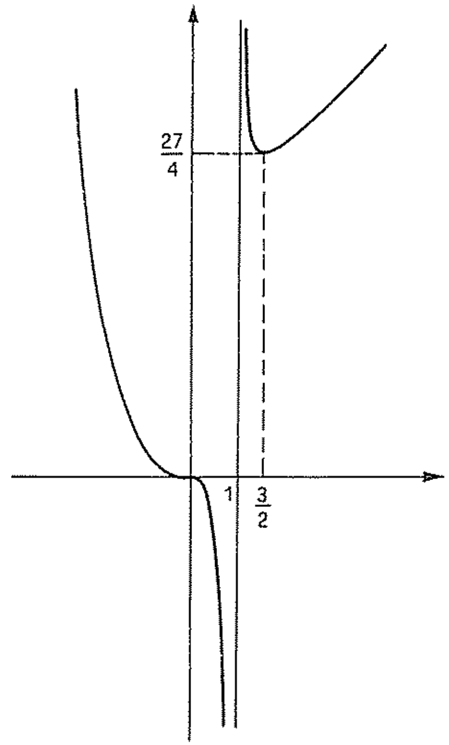
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

e inoltre

$\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty \Rightarrow$ non vi sono asintoti obliqui;

iv) $f'(x) = \dfrac{x^2\ (2x-3)}{(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow x>3/2$;

v) $f''(x) = \dfrac{2x\ (x-1)\ (x^2-3x+3)}{(x-1)^4} > 0 \Leftrightarrow x<0,\ x>1$.



Quindi la funzione è decrescente in $]-\infty,1[$ ed in $]1,3/2]$, crescente in $[3/2, +\infty[$; x=3/2 è punto di minimo relativo. Inoltre f(x) è convessa in $]-\infty,0]$ ed in $]1,+\infty[$, concava in $[0,1[$; x=0 è punto di flesso a tangente orizzontale.

9) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

i) $f(x)$ è continua in $R-\{-2\}$;

ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x<-2,\ x>1$;

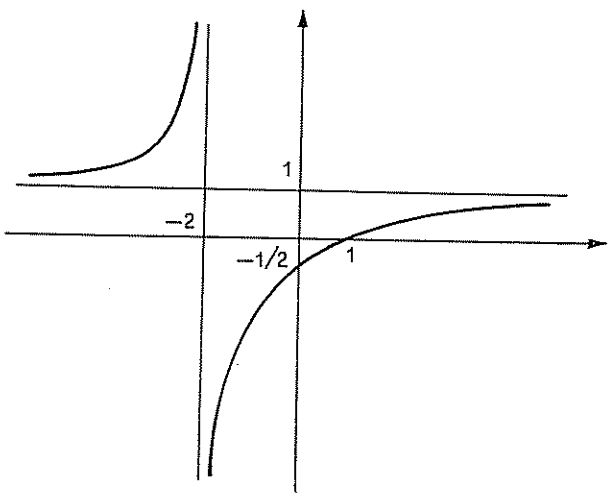
iii) $\lim\limits_{x\to -2^{\pm}} f(x) = \mp\infty \Rightarrow x=-2$ asintoto verticale;

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y=1$ asintoto orizzontale;

iv) $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}>0\ \forall x\neq -2$;

v) $f''(x) = \dfrac{-6}{(x+2)^3}<0 \Leftrightarrow x<-2.$

La funzione è crescente e convessa in $]-\infty,-2[$ e crescente e concava in $]-2,+\infty[$.



10) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

i) $f(x)$ è continua in $R-\{-1\}$;

ii) $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$;

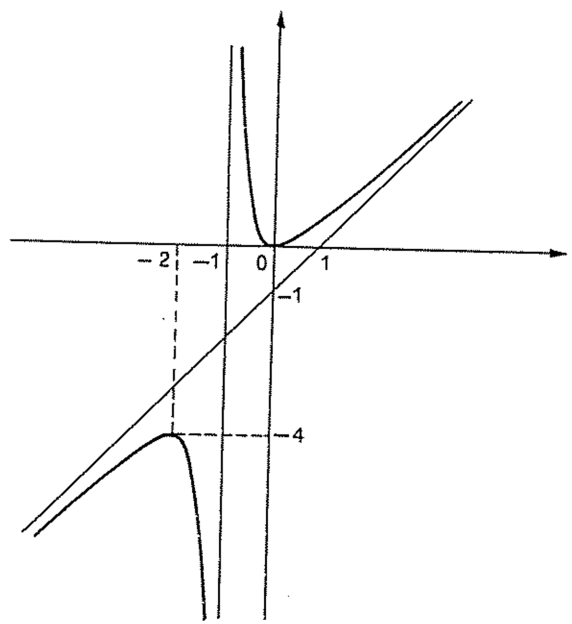
iii) $\lim\limits_{x\to -1^{\pm}} f(x)=\pm\infty \Rightarrow x=-1$ è asintoto verticale;

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2+x} = 1;\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x)-x\big) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x}{x+1}=-1;$

quindi $y=x-1$ è asintoto obliquo;

iv) $f'(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}>0 \Leftrightarrow x<-2,\ x>0;$

v) $f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}>0 \Leftrightarrow x>-1.$



Pertanto $f(x)$ è crescente in $]-\infty,-2]$ ed in $[0,+\infty[$, decresente in $[-2,-1[$ ed in $]-1,0]$; $x=-2$ è punto di massimo relativo, $x=0$ di minimo relativo Inoltre $f(x)$ è concava in $]-\infty,-1[$ e convessa in $]-1,+\infty[$.

1.3 - Ulteriori esempi

1) $f(x) = x^2 + |x|$

i) La funzione è continua in R e priva di asintoti; poichè $f(x)$ è pari basterà studiarne la restrizione a $[0,+\infty[$; in tale intervallo si ha

$$f(x) = x^2 + x;$$

ii) $f(x)>0 \qquad \forall x\in]0,+\infty[;$

iii) $f'(x) = 2x+1>0 \qquad \forall x\in[0,+\infty[;$

iv) $f''(x)=2>0 \qquad \forall x\in[0,+\infty[.$

Quindi in $[0,+\infty[$ $f(x)$ è crescente e convessa ed il suo grafico è quello riportato in fig. a.

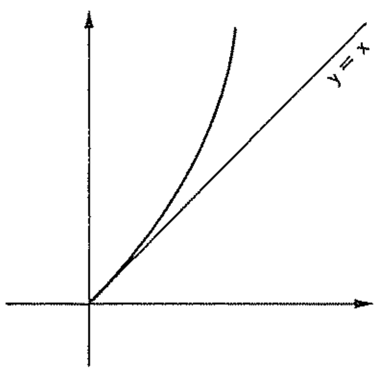


Figura a

Per simmetria il grafico di $f(x)$ su tutto R sarà quello riportato in fig. b.

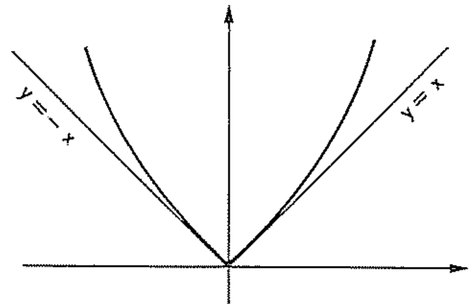


Figura b

Si osservi che $x=0$ è punto angoloso giacchè $f'(0^+)=1\neq f'(0^-)=-1$.

2) $f(x) = x^3 + |x|$

i) La funzione è continua in R e priva di asintoti; inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$. È conveniente scrivere

$$f(x) = \begin{cases} x^3+x & x\in[0,+\infty[\\ x^3-x & x\in]-\infty,0[\end{cases}$$

Quindi lo studio del grafico di $f(x)$ è ricondotto allo studio dei grafici delle funzioni

f_1: $x\in[0,+\infty[\;\to\; f_1(x)=x^3+x$

f_2: $x\in]-\infty,0[\;\to\; f_2(x)=x^3-x.$

Studiamo $f_1(x)$ (si ricordi che $f_1(x)$ è definita per $x\geq0$):

ii) $f_1(x) = x(x^2+1)>0 \quad \forall x\in]0,+\infty[;$

iii) $f_1'(x) = 3x^2+1>0 \quad \forall x \in [0,+\infty[$;

iv) $f_1''(x) = 6x>0 \quad \forall x \in]0,+\infty[$.

Quindi f_1 è crescente e convessa ed il suo grafico è quello riportato in fig. a.

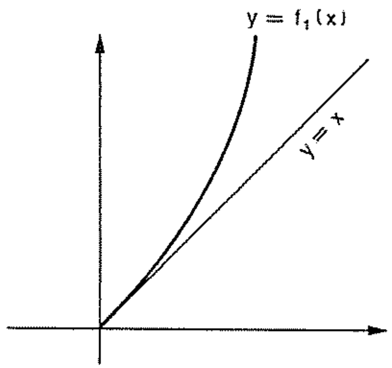


Figura a

Studiamo $f_2(x)$ (si ricordi che $f_2(x)$ è definita per $x<0$):

ii)' $f_2(x) = x(x^2-1)>0 \iff -1<x<0$;

iii)' $f_2'(x) = 3x^2-1>0 \iff x<-1/\sqrt{3}$;

iv)' $f_2''(x) = 6x<0 \iff x<0$.

Quindi $f_2(x)$ crescente in $]-\infty,-1/\sqrt{3}[$ e decrescente in $]-1/\sqrt{3}, 0[$; $x=-1/\sqrt{3}$ è punto di massimo relativo. Inoltre f_2 è concava; il suo grafico è quello riportato in fig. b.

Ne segue che il grafico di $f(x)$, ottenuto "incollando" quello di $f_1(x)$ con quello di $f_2(x)$, si presenta come in fig. c.

Si osservi che $x=0$ è un punto angoloso giacché $f'(0^+) = f_1'(0) = 1$ ed $f'(0^-) = f_2'(0) = -1$.

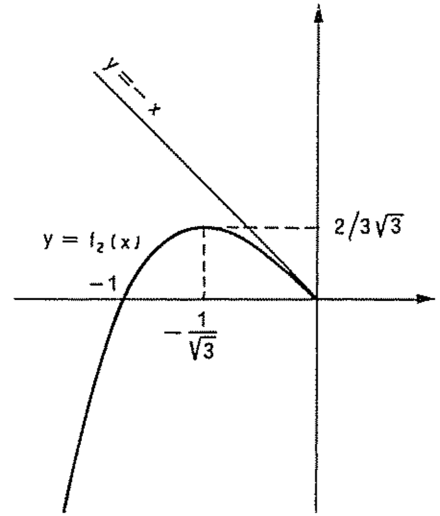


Figura b

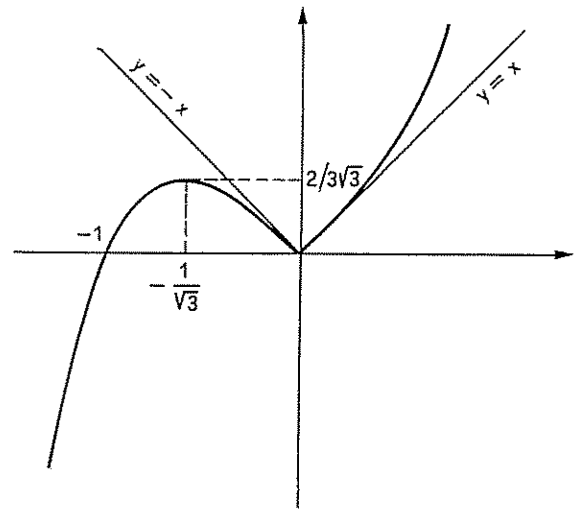


Figura c

3) $f(x) = x+\dfrac{1}{|x-1|}$

La funzione è continua in R-{1}; si ha:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty \Rightarrow x=1$ è un asintoto verticale;

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-x)=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{|x-1|}=0$$

e quindi y=x è un asintoto obliquo. A questo punto conviene scrivere

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x+\dfrac{1}{x-1} & x\in]1,+\infty[\\ f_2(x) = x-\dfrac{1}{x-1} & x\in]-\infty,1[\end{cases}$$

Si ha:

i) $f_1(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}>0 \iff x>1;$

ii) $f_1'(x) = 1-\dfrac{1}{(x-1)^2}>0 \iff x>2;$

iii) $f_1''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}>0 \iff x>1.$

Quindi $f_1(x)$ è crescente in]2,+∞[, decrescente in]1,2[; x=2 è punto di minimo relativo. Inoltre $f_1(x)$ è convessa ed il suo grafico è quello di fig. a.

Studiamo $f_2(x)$ (che è definita in]-∞,1[):

i)' $f_2(x) = \dfrac{x^2-x-1}{x-1}<0 \iff x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};$

ii)' $f_2'(x) = 1+\dfrac{1}{(x-1)^2}>0 \iff x<1;$

iii)' $f_2''(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^3}>0 \iff x<1.$

Quindi $f_2(x)$ è crescente e concava in]-∞,1[ed il suo grafico è quello riportato in fig. b.

In definitiva il grafico di f(x) è quello riportato in fig. c) ottenuto "incollando" i grafici di $f_1(x)$ ed $f_2(x)$.

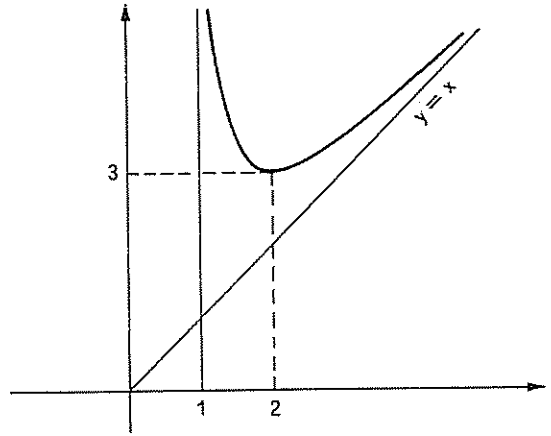


Figura a

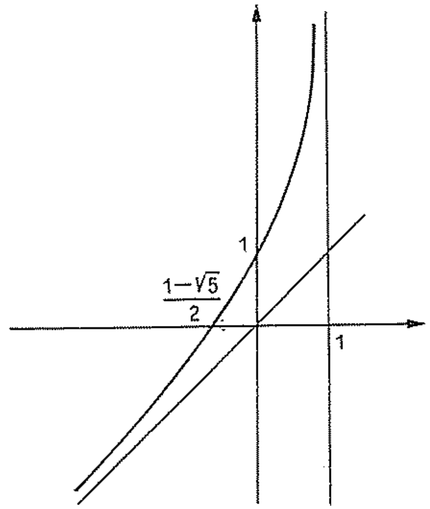


Figura b

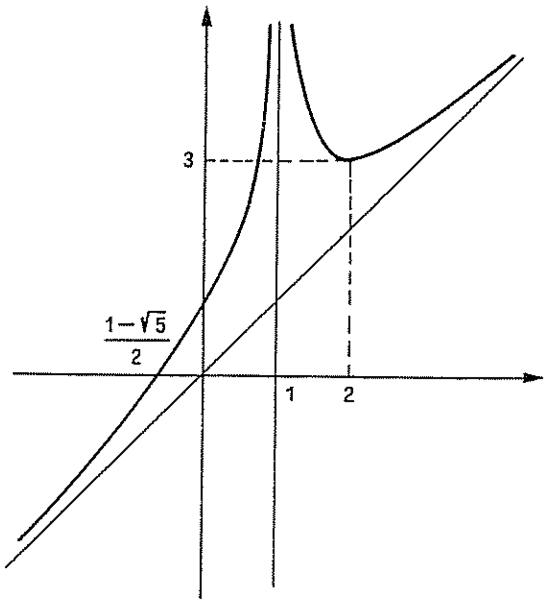


Figura c

4) $f(x) = \left|\frac{x^2+2}{x^2-2}\right|$

Si tratta di studiare il grafico di una funzione del tipo

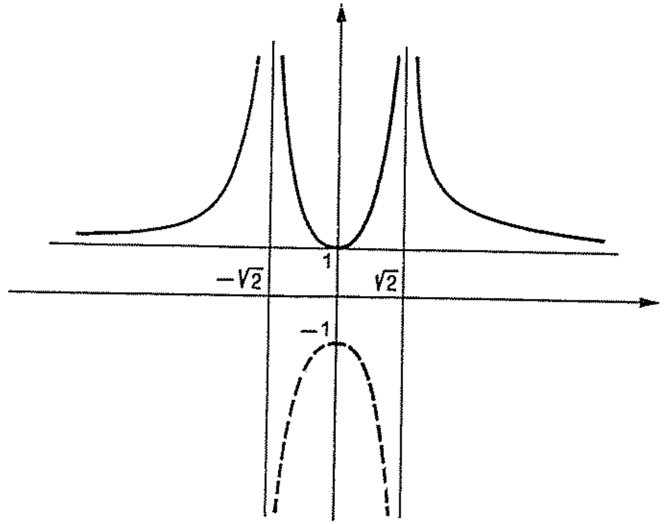
$$f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x)\geq 0 \\ -g(x) & \text{se } g(x)<0 \end{cases};$$

in tali casi è opportuno disegnare il grafico di $g(x)$; il grafico di $f(x)$ si ottiene poi da quello di $g(x)$ lasciandolo invariato nelle zone in cui è $g(x)>0$ e sostituendolo con il grafico di $-g(x)$ (simmetrico rispetto all'asse x) nelle zone in cui è $g(x)<0$.

Pertanto il grafico della funzione assegnata si ricava da quello di

$$g(x) = \frac{x^2+2}{x^2-2}$$

(cfr. es. **7**), par. 1.2)



OSS. $x=0$ è punto di minimo assoluto.

5) $f(x) = \left|\frac{x^2-2}{x^2+2}\right|$

Studiamo il grafico di

$$g(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2};$$

i) $g(x)$ è continua in R; $g(x)$ è pari;

ii) $g(x)>0 \Leftrightarrow x<-\sqrt{2},\ x>\sqrt{2}$;

iii) non ci sono asintoti verticali poiché $g(x)$ è continua in tutto R;

$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=1 \Rightarrow y=1$ asintoto orizzontale;

iv) $g'(x) = \frac{8x}{(x^2+2)^2}>0 \Leftrightarrow x>0$;

v) $g''(x) = 8\,\dfrac{(2-3x^2)}{(x^2+2)^3} > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{\dfrac{2}{3}} < x < \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Quindi $g(x)$ é crescente in $[0,+\infty[$ e decrescente in $]-\infty,0]$; $x=0$ é punto di minimo assoluto.

Inoltre $g(x)$ é convessa in $[-\sqrt{2}/\sqrt{3},\ \sqrt{2}/\sqrt{3}]$, concava in $]-\infty,\ -\sqrt{2}/\sqrt{3}]$ ed in $[\sqrt{2}/\sqrt{3},\ +\infty[$; $x=\pm\sqrt{2}/\sqrt{3}$ sono punti di flesso.

Riportiamo in successione i grafici di $g(x)$ (fig. 10) e di $f(x)=|g(x)|$ (fig. 11).

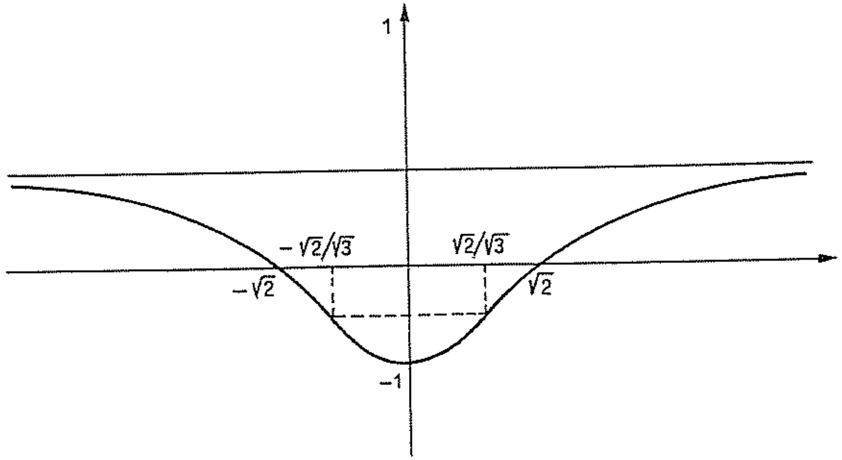


Figura 10

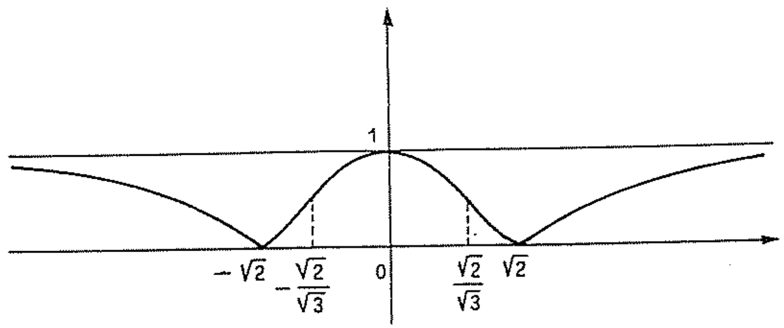


Figura 11

Il lettore verifichi che $x=\pm\sqrt{2}$ sono punti angolosi per $f(x)$ avendosi

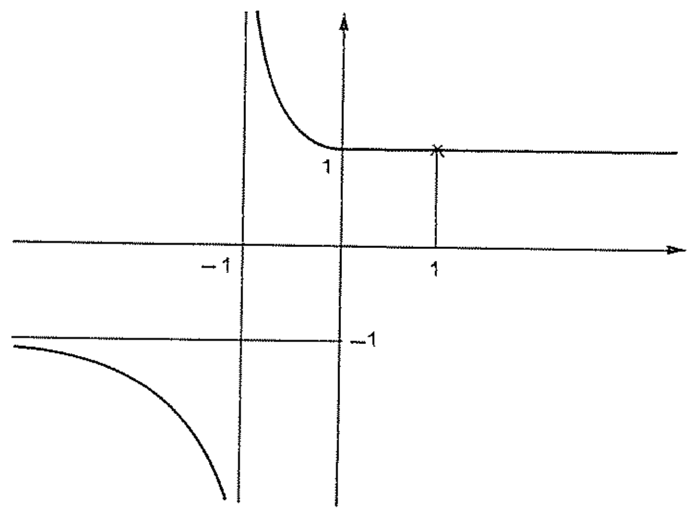
$$f'(\sqrt{2}^+) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ f'(\sqrt{2}^-) = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ f'(-\sqrt{2}^+) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ f'(-\sqrt{2}^-) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

inoltre $x=0$ é punto di massimo assoluto e $x=\pm\sqrt{2}$ sono punti di minimo assoluto.

6) $f(x) = \dfrac{x\,|x| - 1}{x^2-1}$

Tale funzione é "sostanzialmente" una funzione razionale (cfr. par. 1.2) dal momento che

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x\geq 0 \quad \text{e} \quad x\neq 1 \\ -\dfrac{x^2+1}{x^2-1} & \text{se } x<0 \quad \text{e} \quad x\neq -1. \end{cases}$$



Ovviamente la retta di equazione $y=-1$ è asintoto orizzontale a $-\infty$ mentre la retta $x=-1$ è asintoto verticale; inoltre il punto 1 è un punto di discontinuità eliminabile. In $]-\infty,0[\ -\ \{-1\}$ si ha:

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2-1)^2}, \qquad f''(x)=-4\,\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3},$$

quindi f è decrescente in $]-\infty,-1[$ e ivi concava, decrescente in $]-1,0[$ ed ivi convessa.

2.- Funzioni irrazionali

1) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

Tale funzione è definita in $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$; essendo inoltre una funzione pari ci si può limitare a studiarne il grafico in $[1,+\infty[$. Risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-1}-x\right) = 0;$$

quindi la retta di equazione $y=x$ è asintoto obliquo a $+\infty$. Ovviamente, data la parità di f, $y=-x$ è asintoto obliquo a $-\infty$. Si ha ancora

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(x^2-1)\ \sqrt{x^2-1}}.$$

La funzione risulta allora crescente in $[1,+\infty[$ e ivi concava; inoltre nel punto 1 f non è derivabile. Il grafico è illustrato nella fig. 12.

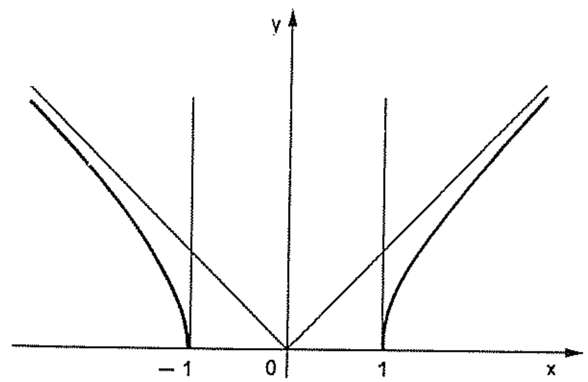


Figura 12

2) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

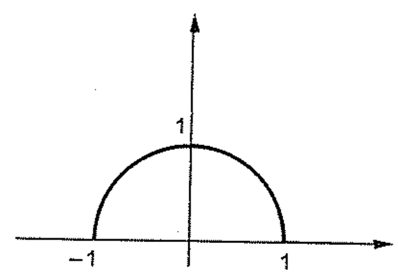
i) La funzione è continua in $[-1,1]$ ed è pari;

ii) $f(x)>0\ \ \forall x\in\ ]-1,1[$;

iii) $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \Leftrightarrow x\in\ ]-1,0[$;

iv) $f''(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}\ (1-x^2)} < 0\ \ \forall x\in\ ]-1,1[$.

Quindi $f(x)$ è crescente in $[-1,0]$ e decrescente in $[0,1]$; $x=0$ è punto di massimo assoluto. Inoltre $f(x)$ è concava in $[-1,1]$.



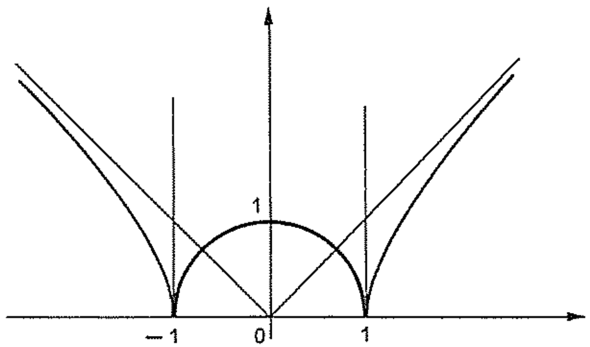
Il lettore osservi che il grafico è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio 1.

3) $f(x) = \sqrt{|1-x^2|}$

Si osservi che

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \sqrt{1-x^2} & x \in [-1,1] \\ f_2(x) = \sqrt{x^2-1} & x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[. \end{cases}$$

Pertanto il grafico di f(x) si ottiene "incollando" i grafici di $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ riportati negli esercizi **1)** e **2)**.



Si noti che i punti $x=\pm 1$ sono di cuspide.

4) $f(x) = \sqrt[3]{x(x^2+1)}$

La funzione è definita in tutto R, positiva per $x>0$, negativa per $x<0$, nulla nello zero. Essa inoltre è dispari; basta pertanto studiarne il grafico per $x \geq 0$.

Risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x^2+1)}}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x(x^2+1)} - x = 0,$$

quindi la retta di equazione $y=x$ è asintoto obliquo a $+\infty$, nonchè a $-\infty$ data la disparità di f. Si ha inoltre

$$f'(x) = \frac{3x^2+1}{3\sqrt[3]{x^2(x^2+1)^2}}, \qquad f''(x) = \frac{2}{9}\frac{3x^2-1}{\sqrt[3]{x^5(x^2+1)^5}}.$$

Semplici considerazioni sul segno di tali funzioni portano a concludere che il grafico di f è quello illustrato in fig. 13.

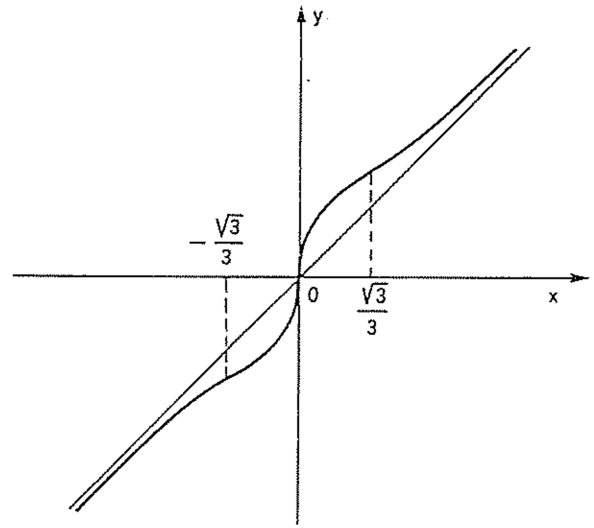


Figura 13

5) $f(x) = \sqrt[3]{x(x^2-1)}$

La funzione è definita in tutto R ed è dispari. Come nel caso precedente la retta $y=x$ è asintoto obliquo sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Inoltre

$$f'(x) = \frac{3x^2-1}{3\sqrt[3]{x^2(x^2-1)^2}}, \qquad f''(x) = -\frac{2}{9}\,\frac{3x^2+1}{x(x^2-1)\sqrt[3]{x^2(x^2-1)^2}}.$$

Le solite considerazioni sul segno di f, f', f" portano a concludere che il grafico di f si presenta come in fig. 14.

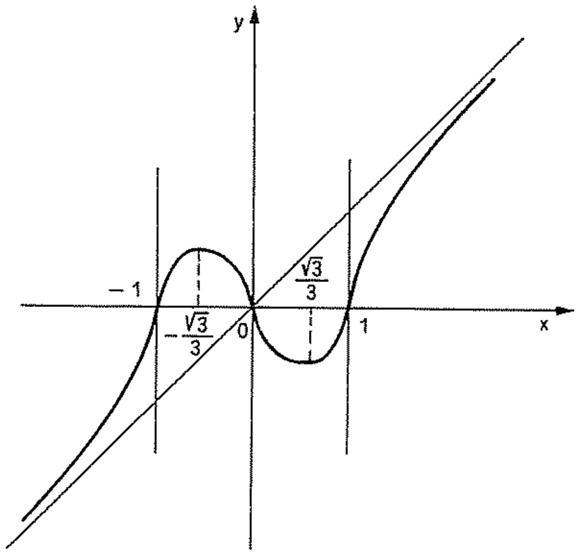


Figura 14

Si noti che nei punti -1,0,1 il grafico ha tangenti verticali.

6) $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$

La funzione è definita in tutto R, si annulla in 0 e 1, è positiva per x>1, negativa altrove. Si ha

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}{x} = 1 \\ &\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2(x-1)} - x = -\frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = x - \frac{1}{3} \text{ è asintoto obliquo a } +\infty \text{ e } -\infty.$$

Risulta inoltre

$$f'(x) = \frac{1}{3}\,\frac{3x-2}{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}, \qquad f''(x) = \frac{2}{9}\,\frac{1}{x(1-x)\sqrt[3]{x(x-1)^2}}.$$

La derivata prima si annulla solo in 2/3, è positiva in $]-\infty, 0[\, \cup\,]2/3, +\infty[- \{1\}$, negativa in $]0, 2/3[$; f infine non è derivabile in 0 e 1. Per quanto riguarda la derivata seconda, essa è positiva in $]-\infty, 1[- \{0\}$, negativa in $]1, +\infty[$.

Il grafico si presenta allora come in fig. 15.

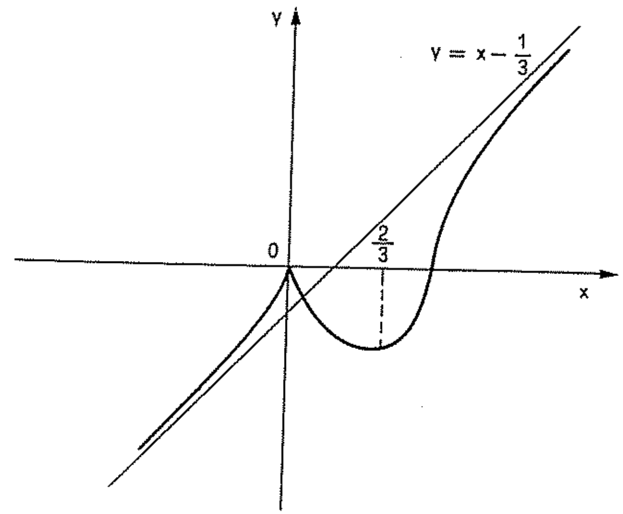


Figura 15

7) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+3x^2}$

i) La funzione è continua in R;

ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x>-3$;

iii) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1,\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)-x] = 1$

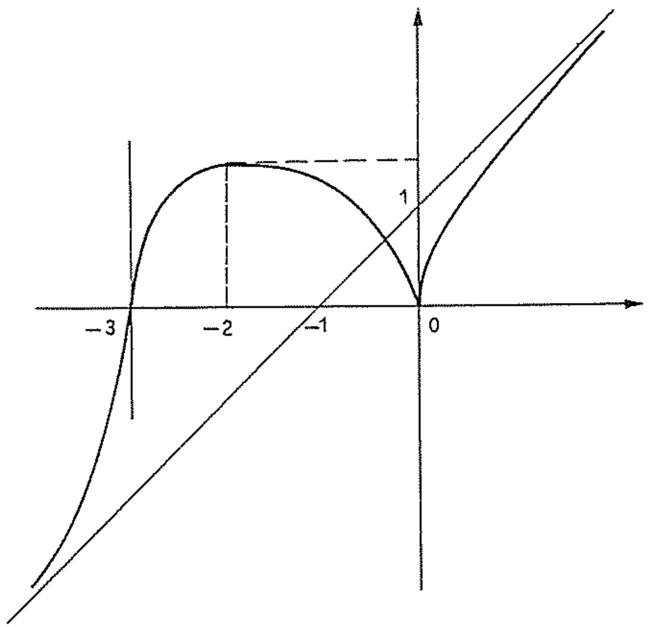
quindi $y=x+1$ è asintoto obliquo;

iv) $f'(x) = \dfrac{x^2+2x}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}} > 0 \Leftrightarrow x<-2,\ x>0;$

v) $f''(x) = \dfrac{-2}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}\,(x+3)} > 0 \Leftrightarrow x<-3.$

Quindi $f(x)$ è crescente in $]-\infty, -2]$ ed in $[0,+\infty[$ e decrescente in $[-2,0]$; $x=-2$ è punto di massimo relativo ed $x=0$ di minimo relativo.

Inoltre $f(x)$ è convessa in $]-\infty, -3]$ e concava in $[-3, 0[$ e in $]0, +\infty[$; $x=-3$ è punto di flesso. Si noti inoltre che $x=-3$ è punto a tangente verticale mentre $x=0$ è un punto di cuspide avendosi $f'(0^-)=-\infty$, $f'(0^+)=+\infty$.



8) $f(x) = \sqrt{x^2+3x+2} - x.$

La funzione è definita in $]-\infty, -2] \cup [-1,+\infty[$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2}-x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \text{ è asintoto orizzontale a } +\infty,$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+2}-x}{x} = -2 \\ &\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2}+x = -\frac{3}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=-2x-\frac{3}{2} \text{ è asintoto obl. a } -\infty,$$

Risulta inoltre

$$f'(x)=\frac{1}{2}\,\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+2}} -1, \qquad f''(x)=-\frac{1}{4(x^2+3x+2)^{3/2}}.$$

Si verifica facilmente che $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>-1$ e che f'' è sempre negativa.

Quindi il grafico si presenta come in fig. 16.

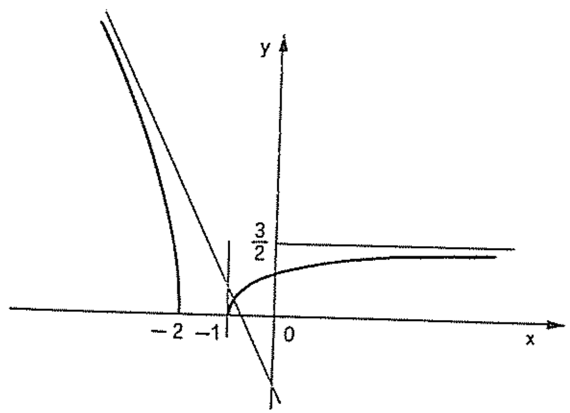


Figura 16

9) $f(x) = \sqrt{x^2-1} - x$

i) La funzione è continua in $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$;

ii) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$;

iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asintoto orizzontale a $+\infty$;

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2, \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) + 2x] = -\infty$$

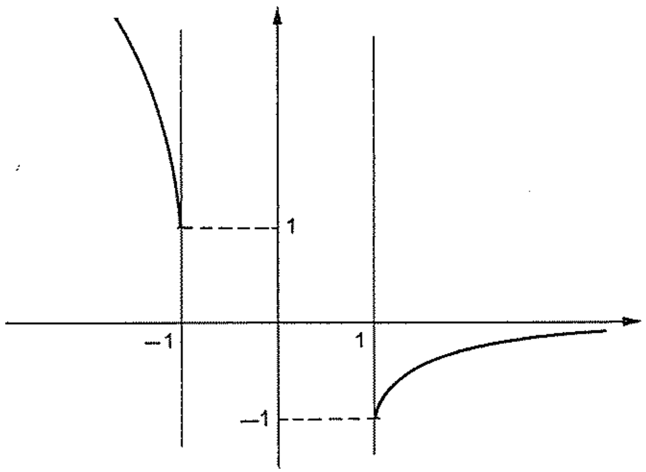
quindi non vi è asintoto obliquo a $-\infty$; inoltre si ha

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty;$$

iv) $f'(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} > 0 \Leftrightarrow x > 1$;

v) $f''(x) = \dfrac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} < 0 \ \forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Quindi la funzione è crescente in $[1, +\infty[$, decrescente in $]-\infty, -1]$; inoltre la funzione è concava in $]-\infty, -1]$ ed in $[1, +\infty[$.



10) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

i) La funzione è continua in $]-1, 1[$ ed è dispari;

ii) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 1[$;

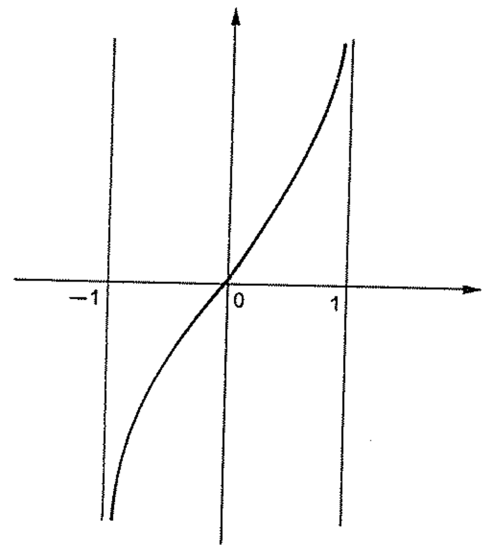
iii) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

e quindi $x = 1$, $x = -1$ sono asintoti verticali;

iv) $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} > 0 \ \forall x \in]-1, 1[$;

v) $f''(x) = \dfrac{3x}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}} > 0 \ \forall x \in]0, 1[$.

Quindi $f(x)$ è crescente in $]-1, 1[$, convessa in $[0, 1[$, concava in $]-1, 0]$ ed $x = 0$ è un punto di flesso.



11) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

i) La funzione è continua in $]-\infty, -1[\cup]1,+\infty[$, inoltre $f(x)$ è dispari;

ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x>1$;

iii) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$

quindi $x=1$ ed $x=-1$ sono asintoti verticali;

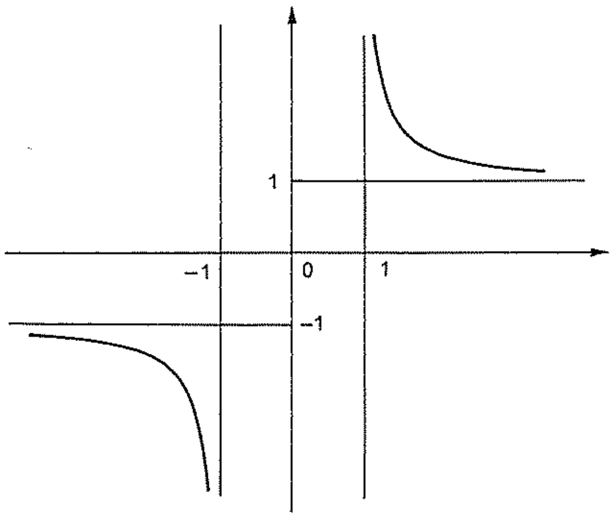
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm 1,$$

pertanto $y=1$ è un asintoto orizzontale a $+\infty$ ed $y=-1$ a $-\infty$;

iv) $f'(x) = \dfrac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} < 0 \ \forall x \in \ ]-\infty, -1[\cup]1,+\infty[$;

v) $f''(x) = \dfrac{3x}{(x^2-1)^2\sqrt{x^2-1}} > 0 \ \forall x \in \ ]1, +\infty[$.

Quindi $f(x)$ è decrescente e convessa in $]1,+\infty[$, decrescente e concava in $]-\infty, 1[$.



12) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}$

La funzione risulta definita in $]-\infty,0[\cup [1,+\infty[$. Si ha

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}} = 1, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}} - x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=x \text{ asintoto obliquo a } +\infty,$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}} = -1, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}} + x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=-x \text{ asintoto obliquo a } -\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{\frac{x^3-1}{x}} = +\infty \qquad \Rightarrow x=0 \text{ asintoto verticale.}$$

Essendo inoltre

$$f'(x) = \frac{2x^3+1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{x^3-1}}, \quad f''(x) = -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{x}{x^3-1}}\ \frac{4x^3-1}{x^3(x^3-1)}$$

il grafico si presenta come in fig. 17.

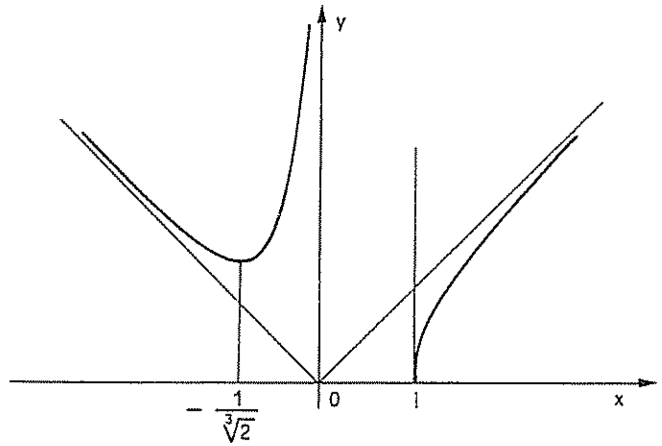


Figura 17

13) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}} \left(= \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}\right)$

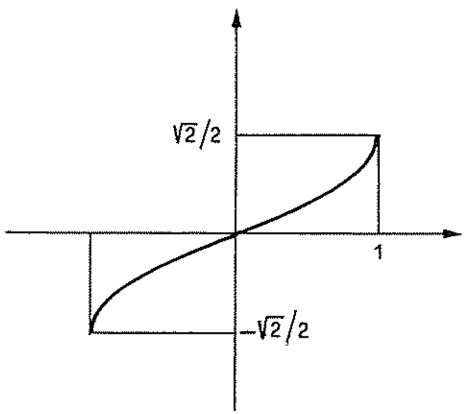
i) La funzione é continua per $x\in[-1,1]$;

ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in\ ]0,1]$;

iii) $f'(x) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right) > 0\ \forall x\in\ ]-1,1[$;

iv) $f''(x) = \dfrac{1}{8}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^3}} + \dfrac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}\right) > 0 \Leftrightarrow x\in\ ]0,\ 1[$.

Quindi $f(x)$ é crescente in $[-1,1]$; inoltre é convessa in $[0,1]$ e concava in $[-1,0]$; $x=0$ è un punto di flesso.

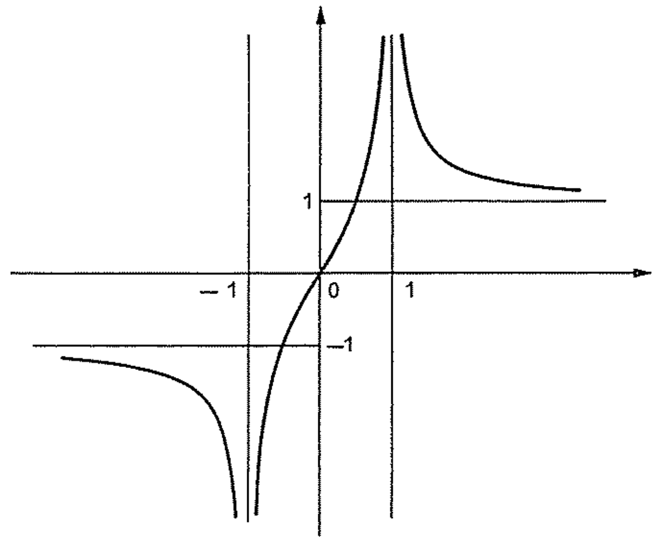


14) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}$

i) La funzione é continua in $R-\{-1,\ 1\}$ ed è dispari; conviene scrivere

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & x\in\ ]-1,1[\\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} & x\in\ ]-\infty,\ -1[\ \cup\ ]1,+\infty[\end{cases}$$

Il grafico di $f(x)$ si ottiene "incollando" i due grafici riportati negli esercizi **10)** e **11)**.



15) $f(x) = x\sqrt{|x-1|}$

i) La funzione è continua in tutto R;

ii) $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$;

iii) $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$ non vi sono asintoti obliqui;

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Osservato che

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x)=x\sqrt{x-1} & \text{per } x\geq 1 \\ f_2(x)=x\sqrt{1-x} & \text{per } x<1 \end{cases}$$

studiamo separatamente i "due rami" di cui si compone il grafico di $f(x)$. Si ha

$$f_1'(x) = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}} > 0 \iff x \geq 1;$$

$$f_1''(x) = \frac{3x-4}{4\sqrt{x-1}\,(x-1)} > 0 \iff x \geq 4/3.$$

Pertanto $f_1(x)$ è crescente in $[1, +\infty[$; inoltre $f_1(x)$ è concava in $[1, 4/3]$ e convessa in $[4/3, +\infty[$; $x=4/3$ è punto di flesso (cfr. fig a).

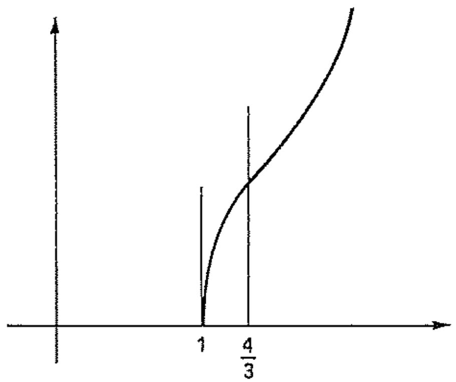


Figura a

$$f_2'(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}} > 0 \iff x \in\,]-\infty, 2/3]$$

$$f_2''(x) = \frac{3x-4}{4\,(1-x)\sqrt{1-x}} < 0 \iff x < 1.$$

Quindi $f_2(x)$ è crescente in $]-\infty, 2/3]$, decrescente in $[2/3, 1[$; quindi $x=2/3$ è punto di massimo relativo. Inoltre $f_2(x)$ è concava in $]-\infty, 1[$ (cfr. fig. b).

Il grafico di f si presenta pertanto come illustrato in fig. c.

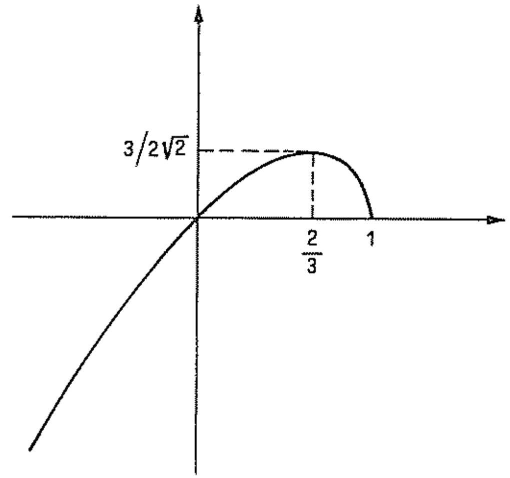


Figura b

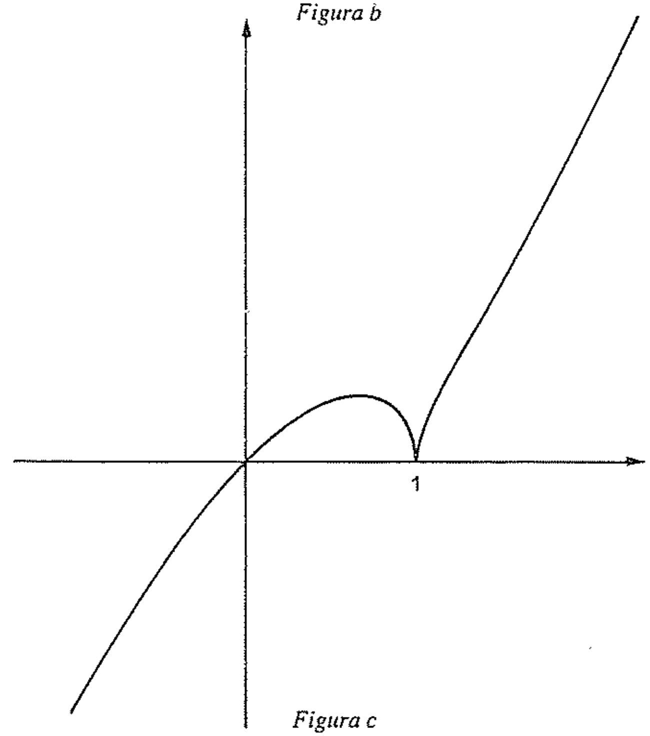


Figura c

16) $f(x) = \sqrt{|x^2+x|} - x$

La funzione è definita in tutto R. Poiché il polinomio x^2+x è positivo in $]-\infty, -1[\cup]0,+\infty[$ la funzione f ha le seguenti espressioni

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+x}-x & \text{se } x\in]-\infty, -1] \cup [0,+\infty[\\ \sqrt{-x^2-x}-x & \text{se } x\in]-1,0[. \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2} \text{ è asintoto orizzontale a } +\infty;$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}-x}{x} = -2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)+2x\right] = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow y=-2x-\frac{1}{2} \text{ è asintoto obl. a } -\infty.$$

Si ha ancora

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}} - 1 & x\in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{2x+1}{\sqrt{-x^2-x}} - 1 & x\in]-1,0[\end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4\,(x^2+x)\,\sqrt{x^2+x}} & x\in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\\ -\dfrac{1}{4\,(-x^2-x)\,\sqrt{-x^2-x}} & x\in]-1,0[\end{cases}$$

Per quanto riguarda il segno della derivata prima risulta

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in]-1, -\frac{2+\sqrt{2}}{4}[\cup]0, +\infty[$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in]-\infty, -1[\cup]-\frac{2+\sqrt{2}}{4}, 0[;$$

inoltre in $-1, 0$ la funzione non è derivabile.

Più semplice si presenta lo studio del segno della derivata seconda che risulta sempre negativa. Il grafico può essere allora tracciato (cfr. fig. 18).

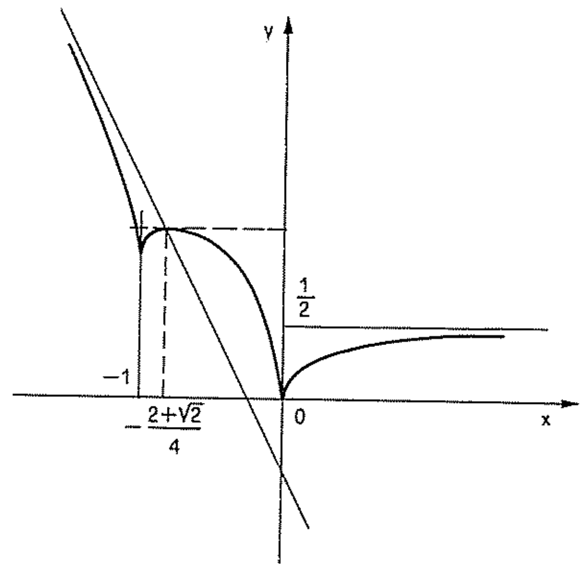


Figura 18

Il lettore verifichi che l'asintoto obliquo interseca il grafico nel punto di ascissa $-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

3 - Funzioni trascendenti

3.1 - Funzioni con esponenziali

1) $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

i) La funzione è continua in R;

ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x>0$;

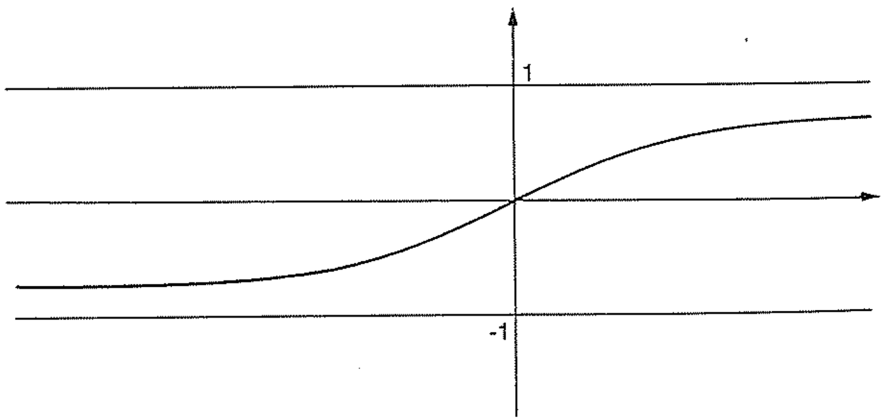
iii) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$

y=1 è asintoto orizzontale a $+\infty$, y=-1 è asintoto orizzontale a $-\infty$;

iv) $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2} >0 \ \forall x\in R$

v) $f''(x) = 2\,\dfrac{e^x\,(1-e^x)}{(e^x+1)^3} >0 \Leftrightarrow x<0.$

Quindi f(x) è crescente in R, convessa in $]-\infty, 0]$ e concava in $[0,+\infty[$; x=0 è punto di flesso.



2) $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

i) La funzione è continua per $x\neq0$;

ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x>0$

iii) $\lim_{x\to0^\pm} f(x)=\pm\infty \Rightarrow x=0$ è asintoto verticale;

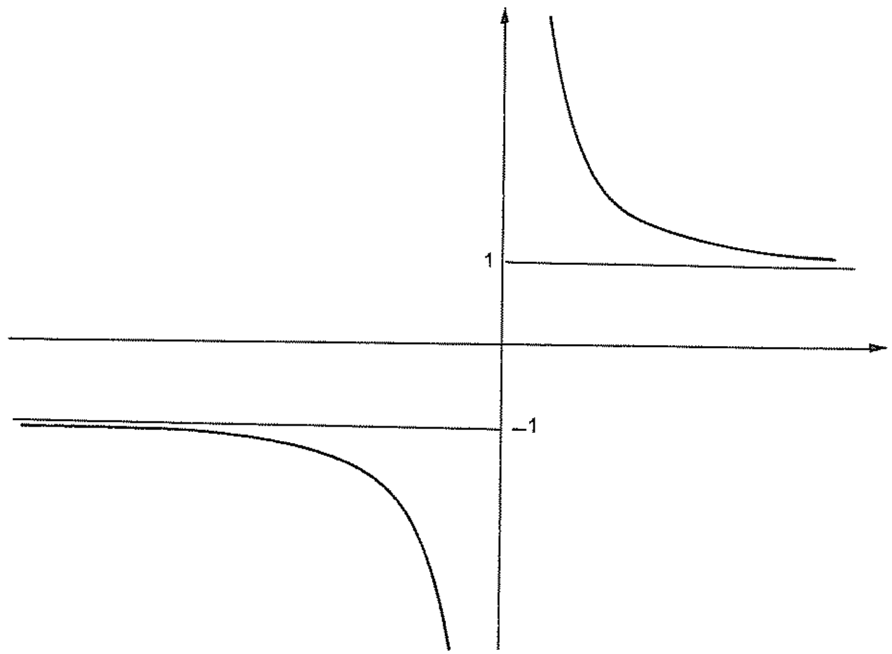
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$

y=1 è asintoto orizzontale a $+\infty$, y=-1 è asintoto orizzontale a $-\infty$;

iv) $f'(x) = -2\,\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2} < 0 \ \forall x\neq0$;

v) $f''(x) = \dfrac{2\,e^x\,(e^x-1)\,(e^x+1)}{(e^x-1)^4} > 0 \Leftrightarrow x>0.$

Quindi f(x) è decrescente e convessa in $]0,+\infty[$ e decrescente e concava in $]-\infty,0[$.



3) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

i) La funzione è continua in R;

ii) $f(x)>0 \ \forall x \in R$;

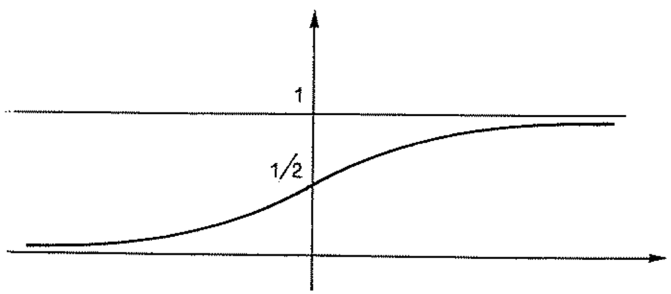
iii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1, \Rightarrow y=1$ è un asintoto orizz. a $+\infty$;

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \Rightarrow y=0$ è un asintoto orizz. a $-\infty$;

iv) $f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0 \ \forall x \in R$;

iv) $f''(x) = \dfrac{e^{-2x}-e^{-x}}{(1+e^{-x})^3} > 0 \Leftrightarrow x<0$.

Quindi $f(x)$ è crescente in R, convessa in $]-\infty,0[$ e concava in $[0,+\infty[$; $x=0$ è punto di flesso.



4) $f(x) = \dfrac{1}{1-e^{-x}}$

i) La funzione è continua per $x \neq 0$;

ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x>0$;

iii) $\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x=0$ asintoto verticale;

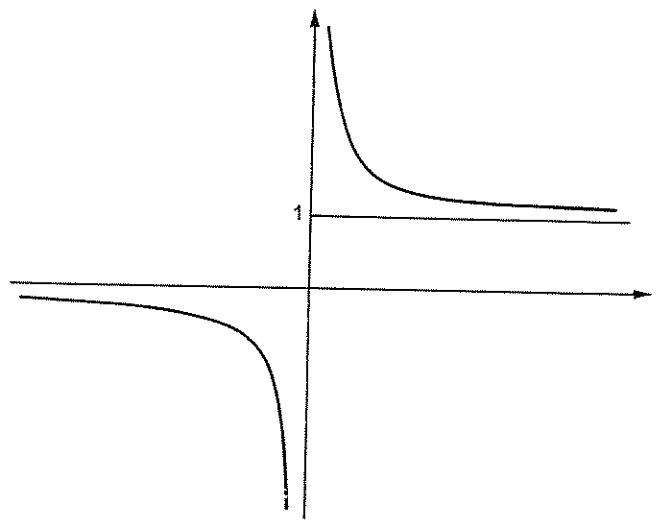
$\lim_{x \to +\infty} f(x)=1 \Rightarrow y=1$ asintoto orizzontale a $+\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ asintoto orizzontale a $-\infty$

iv) $f'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} < 0 \ \forall x \neq 0$;

v) $f''(x) = \dfrac{e^{-x}(1-e^{-2x})}{(1-e^{-x})^4} > 0 \Leftrightarrow x>0$.

Quindi $f(x)$ è decrescente e convessa in $]0,+\infty[$ e decrescente e concava in $]-\infty,0[$.



5) $f(x) = \dfrac{1}{1-e^{x}}$

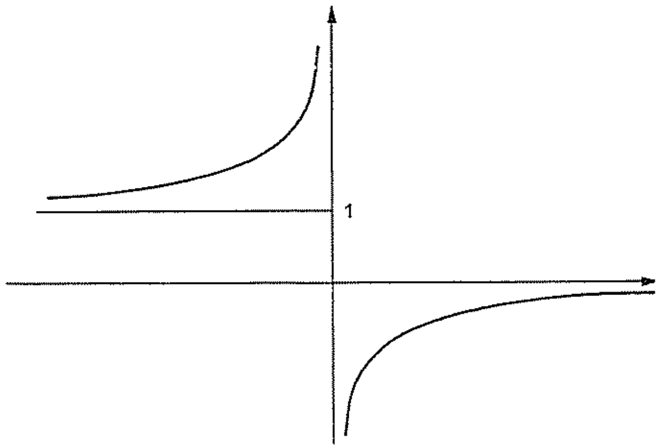
Il suo grafico si ottiene da quello della funzione considerata nell'esercizio precedente osservando che posto

$$g(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

si ha

$$f(x) = g(-x).$$

I due grafici allora sono l'uno il simmetrico dell'altro rispetto all'asse y



Il lettore ritrovi il risultato con un calcolo diretto.

6) $f(x) = x\, e^x$

i) La funzione è continua in R;

ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x>0$;

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ asintoto orizzontale a $-\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$ non vi sono asint. obl. a $+\infty$;

iv) $f'(x) = e^x(x+1)>0 \Leftrightarrow x>-1$;

v) $f''(x) = e^x(x+2)>0 \Leftrightarrow x>-2$.

Quindi $f(x)$ è crescente in $[-1,+\infty[$, decrescente in $]-\infty,-1]$; $x=-1$ è punto di minimo assoluto. Inoltre $f(x)$ è

convessa in $[-2,+\infty[$ e concava in $]-\infty,-2]$; $x=-2$ è punto di flesso.

Il grafico si presenta come in fig. a.

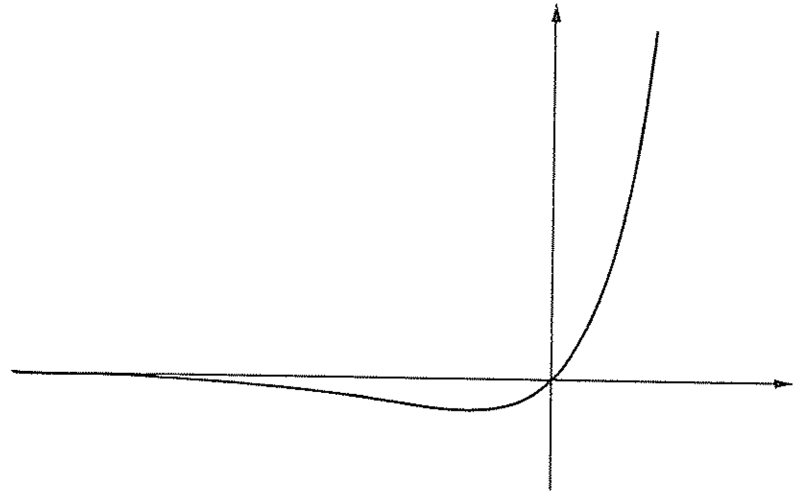


Figura a

7) $f(x) = x^2\, e^x$

i) La funzione è continua in R;

ii) $f(x)>0\ \forall x\in R$;

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ asintoto orizzontale a $-\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$ non c'è asint. obl. a $+\infty$;

iv) $f'(x) = e^x\,(x^2+2x)>0 \Leftrightarrow x<-2,\ x>0$;

v) $f''(x) = e^x\,(x^2+4x+2)>0 \Leftrightarrow x<-2-\sqrt{2},\ x>-2+\sqrt{2}$.

Quindi $f(x)$ è crescente in $]-\infty,-2]$ ed in $[0,+\infty[$ e decrescente in $[-2,0]$; $x=-2$ è punto di massimo relativo, $x=0$ di minimo relativo; $f(x)$ è convessa in $]-\infty,-2-\sqrt{2}]$

ed in $[-2+\sqrt{2},+\infty[$ e concava in $[-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}]$; $x=-2\pm\sqrt{2}$ sono punti di flesso (cfr. fig. b).

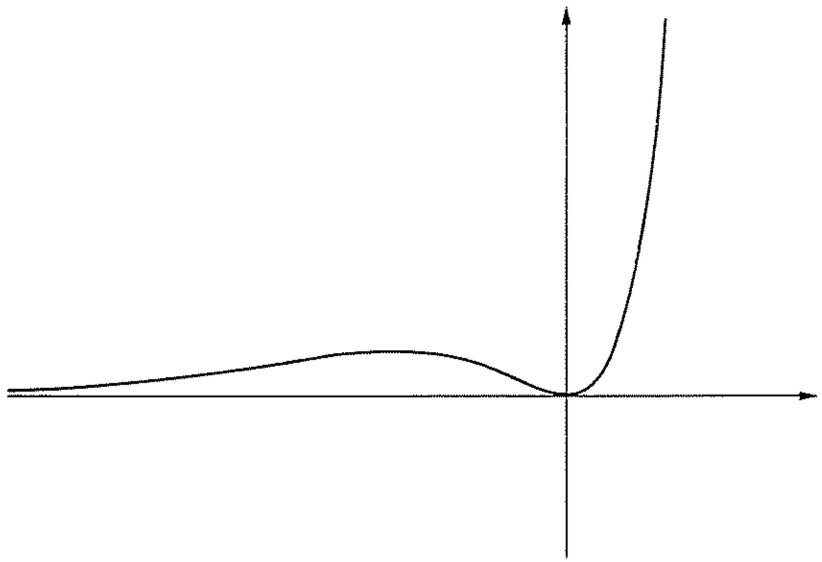


Figura b

8) $f(x) = x^3\ e^x$

i) La funzione è continua in R;

ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x>0$;

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ asintoto orizzontale a $-\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$ non vi è asint. obliquo a $+\infty$;

iv) $f'(x) = e^x\ x^2\ (x+3)>0 \Leftrightarrow x>-3$ e $x\neq0$;

v) $f''(x) = e^x\cdot x\ (x^2+6x+6)>0 \Leftrightarrow -3-\sqrt{3}<x<-3+\sqrt{3},\ x>0.$

Quindi $f(x)$ è crescente in $[-3,+\infty[$ e decrescente in $]-\infty,-3]$; $x=-3$ è punto di minimo assoluto. Inoltre $f(x)$ è convessa in $[-3-\sqrt{3},\ -3+\sqrt{3}]$ ed in $[0,+\infty[$ e concava in

$]-\infty,\ -3-\sqrt{3}]$ ed in $[-3+\sqrt{3},\ 0]$; inoltre $x=0$ $x=-3\pm\sqrt{3}$ sono punti di flesso. In particolare $x=0$ è punto di flesso a tangente orizzontale (cfr. fig. c).

Per un confronto tra i grafici delle funzioni **6)**, **7)**, **8)** si può far riferimento alla fig. d.

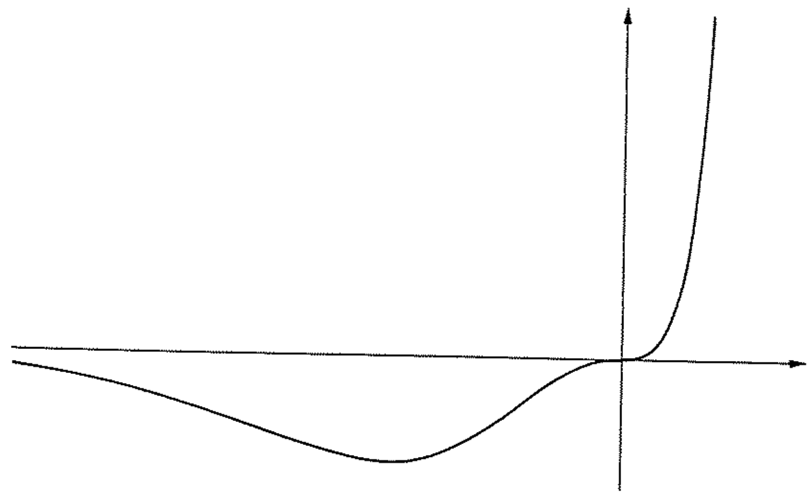


Figura c

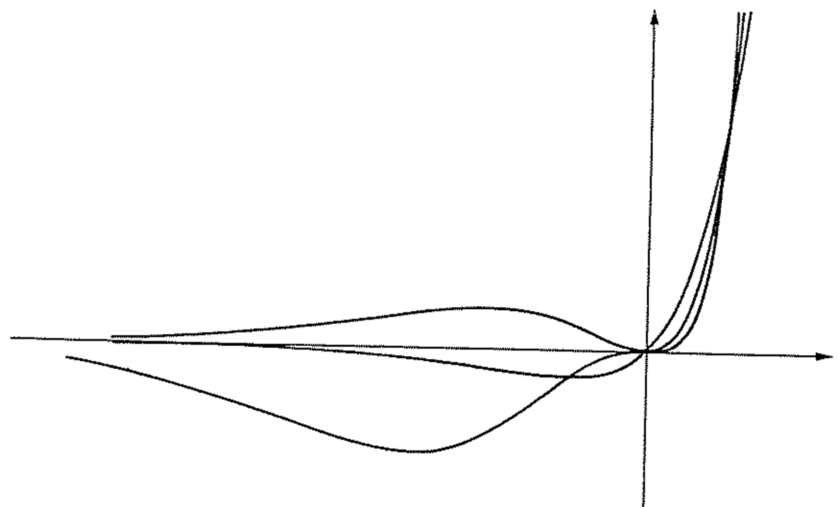


Figura d

9) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$

i) La funzione è continua per $x \geq 0$;

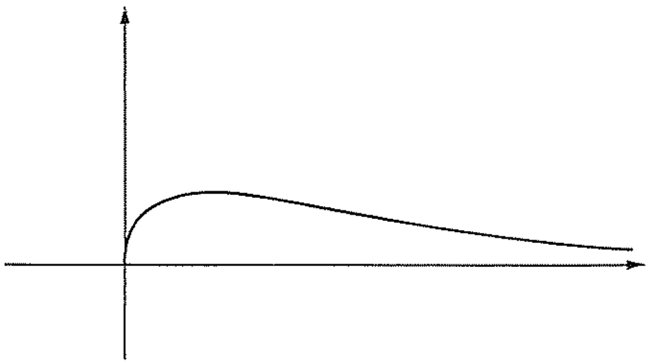
ii) $f(x) > 0 \quad \forall x \in \,]0, +\infty[$;

iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ è asintoto orizzontale;

iv) $f'(x) = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}\ e^x} > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1/2$;

v) $f''(x) = \dfrac{e^{-x}\left(4x^2-4x-1\right)}{4x\ \sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Quindi $f(x)$ è crescente in $[0, 1/2]$, decrescente in $[1/2, +\infty[$ e per $x=1/2$ ha un massimo assoluto. Inoltre $f(x)$ è convessa in $[(1+\sqrt{2})/2, +\infty[$ e concava in $[0, (1+\sqrt{2})/2]$; $x=(1+\sqrt{2})/2$ è punto di flesso. Si noti che $x=0$ è punto a tangente verticale.



10) $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$

i) La funzione è continua per $x > 0$;

ii) $f(x) > 0 \quad \forall x \in \,]0, +\infty[$;

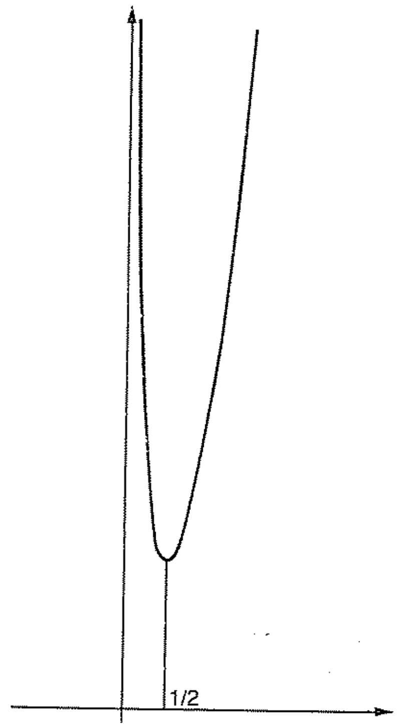
iii) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x=0$ è asintoto verticale;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$ non c'è asintoto obliquo;

iv) $f'(x) = e^x \dfrac{2x-1}{2x\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$;

v) $f''(x) = e^x \dfrac{4x^2-4x+3}{4x^2\sqrt{x}} > 0 \quad \forall x \in \,]0, +\infty[$.

Quindi $f(x)$ è decrescente in $]0, 1/2]$, crescente in $[1/2, +\infty[$ ed ha un minimo assoluto per $x=1/2$. Inoltre la funzione è convessa.



11) $f(x)=x\,e^{-1/x}$

La funzione risulta definita in $R-\{0\}$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0,$$

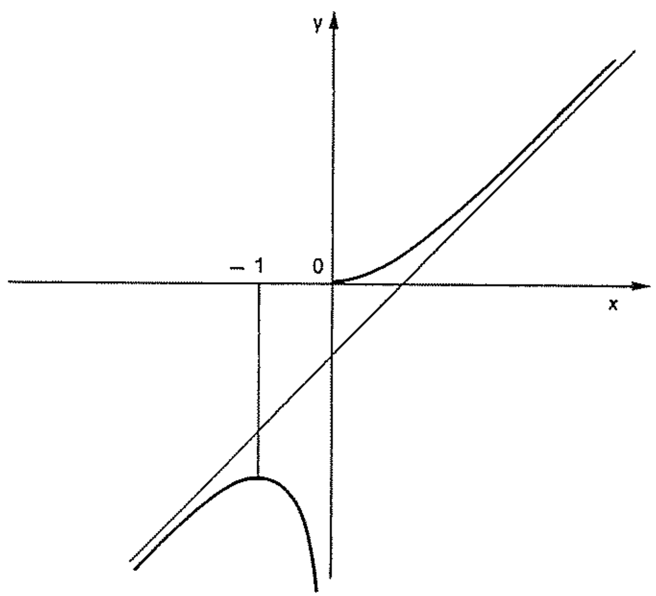
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty \quad \Rightarrow \quad x=0 \text{ asintoto verticale a sinistra;}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=1\\ &\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x)-x\big)=\lim_{x\to\pm\infty} x\left(e^{-1/x}-1\right)=-1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases}y=x-1 \text{ è asintoto}\\ \text{obliquo sia a } -\infty\\ \text{che a } +\infty.\end{cases}$$

Risulta

$$f'(x)=e^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right),\quad f''(x)=\frac{e^{-1/x}}{x^3}.$$

Pertanto -1 è punto di massimo relativo; f è crescente in $]-\infty,-1[$, $]0,+\infty[$, decrescente in $]-1,0[$; inoltre f è convessa in $]0,+\infty[$, concava in $]-\infty,0[$.



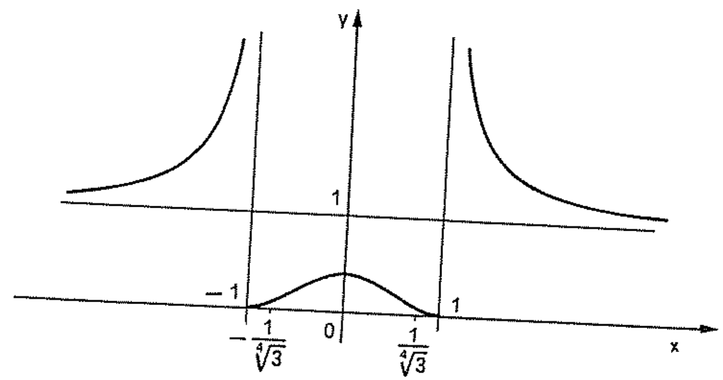
12) $f(x)=e^{-1/(x^2-1)}$

La funzione è definita in $R-\{-1,1\}$; essa inoltre è pari. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1,\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=0$$

e quindi, a seguito della parità di f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1,\quad \lim_{x\to -1^-} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to -1^+} f(x)=0.$$



La funzione presenta un asintoto orizzontale di equazione $y=1$ e due asintoti verticali di equazione $x=-1$ e $x=1$.

Risulta

$$f'(x)=-2x\,\frac{e^{1/(x^2-1)}}{(x^2-1)^2},\quad f''(x)=2\left(3x^4-1\right)\frac{e^{1/(x^2-1)}}{(x^2-1)^4};$$

quindi 0 è un punto di massimo relativo, f è crescente in $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, decrescente in $]0,1[$, $]1,+\infty[$; f è inoltre convessa in $]-\infty,-1[$, $]-1,-1/\sqrt[4]{3}$, $]1/\sqrt[4]{3},1[$, $]1,+\infty[$, concava in $]-1/\sqrt[4]{3},\ 1/\sqrt[4]{3}[$.

Poiché inoltre

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} f'(x)=0$$

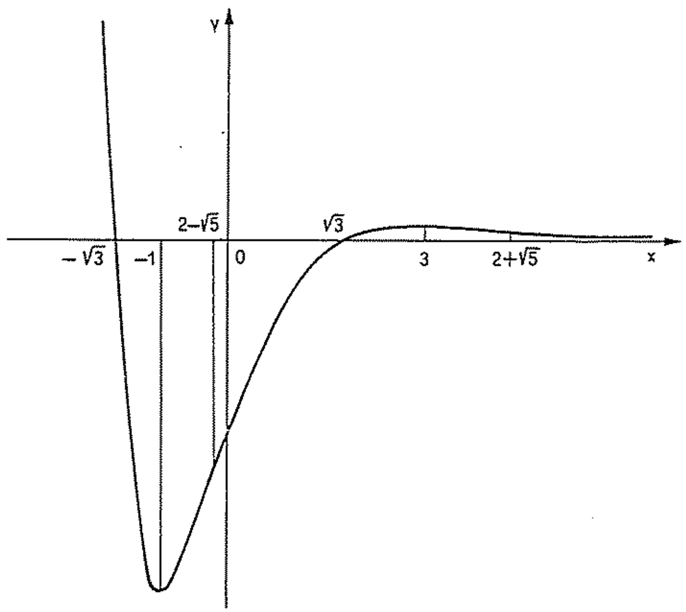
l'asse delle x può considerarsi tangente nei punti -1 e 1 al ramo del grafico della f i cui punti hanno ascisse contenute nell'intervallo di estremi -1, 1.

13) $f(x) = (x^2-3)\, e^{-x}$

La funzione è definita in tutto R; essa si annulla in $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, è positiva in $]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},+\infty[$, negativa in $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$. Si ha

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0;$$

l'asse delle x è asintoto orizzontale a $+\infty$, mentre non esiste asintoto a $-\infty$.



Risulta

$$f'(x) = -e^{-x}\,(x^2-2x-3), \qquad f''(x) = e^{-x}\,(x^2-4x-1);$$

-1 è un punto di minimo relativo (anzi assoluto), 3 è punto di massimo relativo; f è crescente in $]-1, 3[$, decrescente in $]-\infty,-1[$, $]3,+\infty[$, infine f è convessa in $]-\infty, 2-\sqrt{5}[$, $]2+\sqrt{5}, +\infty[$, concava in $]2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}[$.

14) $f(x) = e^{x/(x-1)}$

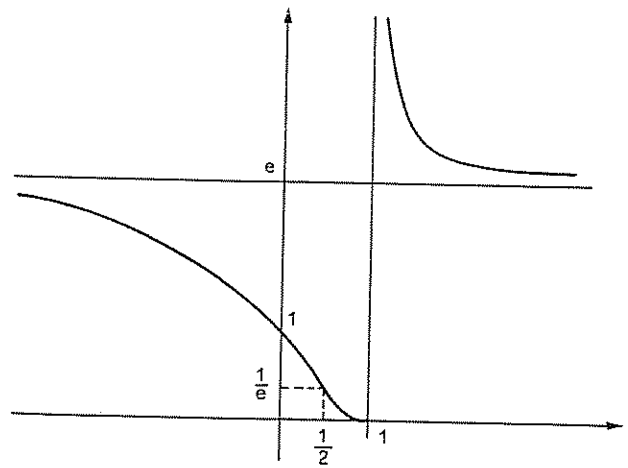
i) La funzione è continua per $x\neq 1$;

ii) $f(x)>0\ \forall x\neq 1$;

iii) $\lim_{x\to 1^-} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

$x=1$ è asintoto verticale destro;

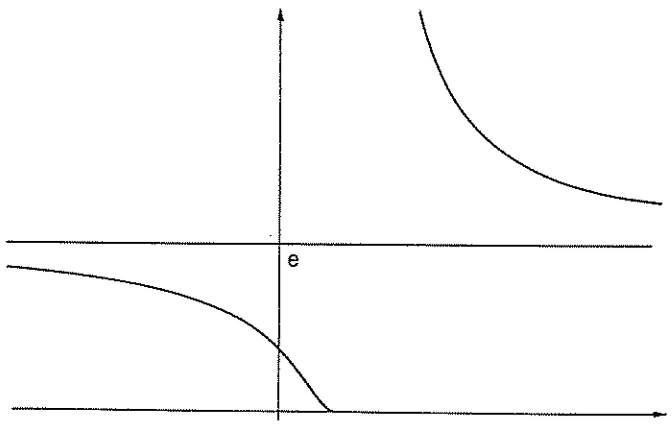
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=e \Rightarrow y=e$ è asintoto orizzontale;



iv) $f'(x) = -e^{x/(x-1)}\left(\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)<0 \quad \forall x\neq 1;$

v) $f''(x) = e^{x/(x-1)}\ \dfrac{1}{(x-1)^4}\ (2x-1)>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2},\ x\neq 1.$

Quindi la funzione è decrescente in $]-\infty,1[$ ed in $]1,+\infty[$; inoltre essa è concava in $]-\infty,1/2]$, convessa in $[1/2,\ 1[$ ed in $]1,+\infty[$; $x=1/2$ è punto di flesso.



3.2 - Funzioni con logaritmi

1) $f(x) = \dfrac{x\ \lg x}{x-1}.$

La funzione risulta definita in $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Risulta

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ \lg x}{x-1} = 0, \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x\ \lg x}{x-1} = 1, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x\ \lg x}{x-1} = +\infty.$$

Quindi in 0 e 1 la funzione f presenta due discontinuità eliminabili; inoltre è facile verificare che non esistono asintoti obliqui.

Risulta

$$f'(x) = \frac{x-1-\lg x}{(x-1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{1}{(x-1)^3}\left(2\ \lg x - x + \frac{1}{x}\right).$$

Lo studio del segno di tali due funzioni non è immediato ma richiede dei ragionamenti "ad hoc". Infatti per quanto riguarda la derivata prima, il suo numeratore $g=x-1-\lg x$ è una funzione decrescente in $]0,1]$, crescente in $[0,+\infty[$; quindi 1 è il punto di minimo assoluto, cioè

$$g(x)=x-1-\lg x \geq g(1)=0 \text{ e } g(x)=0 \Leftrightarrow x=1,$$

il che comporta $f'(x)\geq 0$.

Per quanto riguarda la derivata seconda, osservato che la funzione

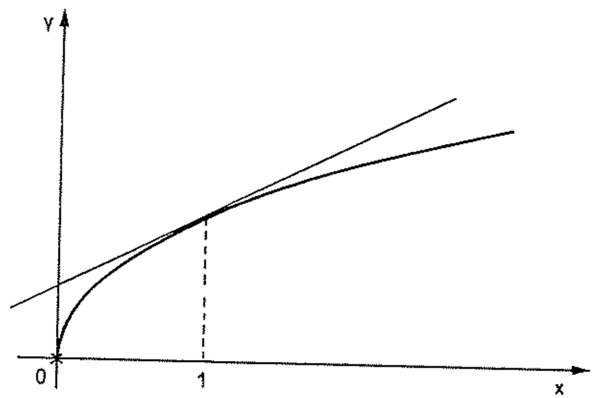
$$2\lg x - x+\frac{1}{x}$$

è decrescente e nulla in 1, si ha $f''(x)<0$ per ogni $x>0$.

Tenendo presente che

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1} f'(x) = \frac{1}{2}$$

il grafico di f si presenta come in figura



2) $f(x) = x-\lg(x^2-1)$.

La funzione é definita in $]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,+\infty[$. Si ha

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

È facile verificare che non ci sono asintoti obliqui. Risulta

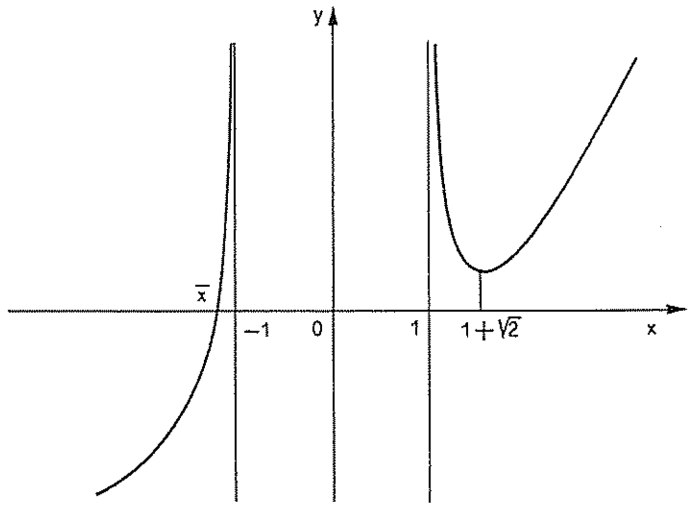
$$f'(x) = 1-\frac{2x}{x^2-1}, \qquad f''(x) = 2\,\frac{(x^2+1)}{(x^2-1)^2}.$$

Pertanto la derivata seconda è sempre positiva, mentre per quanto riguarda la derivata prima si ha

$$f'(x)>0 \iff x\in\ ]-\infty,-1[\ \cup\ ]1+\sqrt{2},\ +\infty[$$

$$f'(x)<0 \iff x\in\ ]1,\ 1+\sqrt{2}[.$$

$$f'(x)=0 \iff x=1+\sqrt{2} \text{ (punto di minimo relativo).}$$



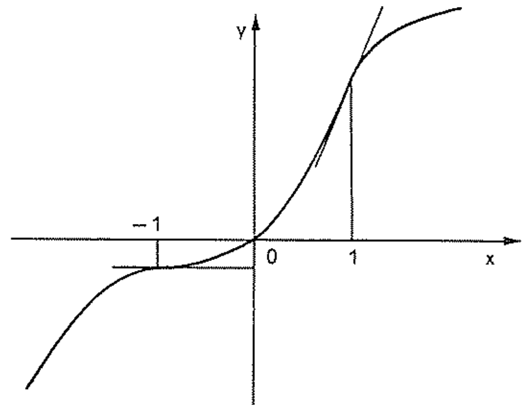
Il lettore dia una "valutazione" dell'unica soluzione $\bar{x}$ dell'equazione.

$$x = \lg\,(x^2-1)$$

3) $f(x) = x+\lg(1+x^2)$

La funzione é definita in tutto R. Inoltre f diverge negativamente a $-\infty$ e positivamente a $+\infty$ senza presentare asintoti. Risulta

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}, \qquad f''(x) = 2\,\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$



4) $f(x) = x\,(\lg x + \sqrt{2}\,\lg^2 x)$

La funzione é definita in $]0,+\infty[$; f si annulla per $x=e^{-\sqrt{2}/2}$, $x=1$, è negativa in $]e^{-\sqrt{2}/2},\ 1[$, positiva altrove. Si ha

$$\lim_{x\to0} f(x)=0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

La funzione non ha asintoto obliquo a $+\infty$. Risulta

$$f'(x) = \sqrt{2}\,\lg^2 x + (2\sqrt{2}+1)\,\lg x+1;$$

quindi

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e^{\sqrt{2}/2-1},\quad x=e^{-(\sqrt{2}+1)}$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in \left]0,\ e^{-(\sqrt{2}+1)}\right[\cup \left]e^{\sqrt{2}/2-1},\ +\infty\right[$$

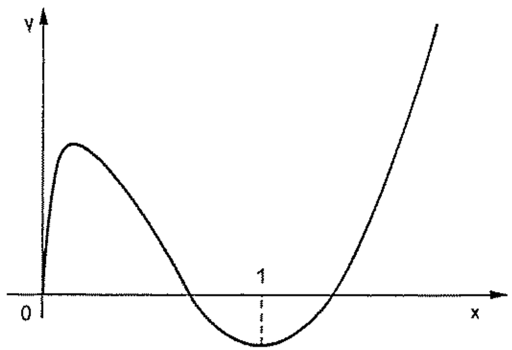
$$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in \left]e^{-(\sqrt{2}+1)},\ e^{\sqrt{2}/2-1}\right[.$$

Si ha ancora

$$f''(x) = \frac{1}{x}\left(2\sqrt{2}\ \lg x + 2\sqrt{2}+1\right)$$

e quindi

$$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq e^{-(2\sqrt{2}+1)/2\sqrt{2}}$$



5) $f(x) = x\,(\lg|x|+1)^2$

La funzione risulta definita in $R-\{0\}$; poiché f converge a 0 per x che tende a 0, f presenta in 0 una discontinuità eliminabile. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

senza che la funzione presenti asintoti obliqui.

Risulta

$$f'(x)=(\lg|x|+1)(\lg|x|+3), \qquad f''(x) = \frac{2}{x}(\lg|x|+2).$$

Quindi

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow -3\leq \lg|x| \leq -1 \Leftrightarrow -e^{-1}<x<-e^{-3},\ e^{-3}<x<e^{-1},$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-e^{-1},\ -e^{-3},\ e^{-3},\ e^{-1},$$

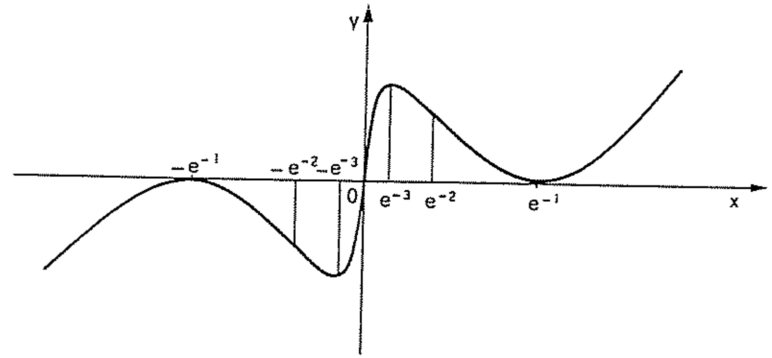
$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,\ -e^{-1}\right[\cup \left]-e^{-3},\ 0\right[\cup \left]0,\ e^{-3}\right[\cup \left]e^{-1},\ +\infty\right[;$$

ciò comporta che $-e^{-1}$, e^{-3} sono punti di massimo relativo, $-e^{-3}$, e^{-1} punti di minimo relativo.

Inoltre

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in \left]-e^{-2},0\right[\cup \left]e^{-2},+\infty\right[;$$

quindi f è convessa in $]-e^{-2},0[$ e in $]e^{-2}, +\infty[$, concava in $]-\infty, -e^{-2}[$ e in $]0, e^{-2}[$.



6) $f(x) = \log x + |x^2-4|$

i) La funzione è continua in $]0,+\infty[$;

ii) $f(x)>0$: non è possibile studiare elementarmente il segno di $f(x)$; si può tuttavia osservare che $x\geq 1 \Rightarrow f(x)>0$;

iii) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x=0$ è asintoto verticale;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$ non c'è asintoto obliquo.

Posto

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \log x + x^2-4 & x\in [2,+\infty[\\ f_2(x) = \log x + 4-x^2 & x\in]0,2[\end{cases}$$

studiamo separatamente i due rami della funzione;

iv) $f_1'(x) = \dfrac{1}{x}+2x = \dfrac{1+2x^2}{x}>0 \quad \forall x\in [2,+\infty[$;

v) $f_1''(x) = -\dfrac{1}{x^2}+2>0 \quad \forall x\in [2,+\infty[$.

Quindi $f_1(x)$ è crescente e convessa (cfr. fig. 15)

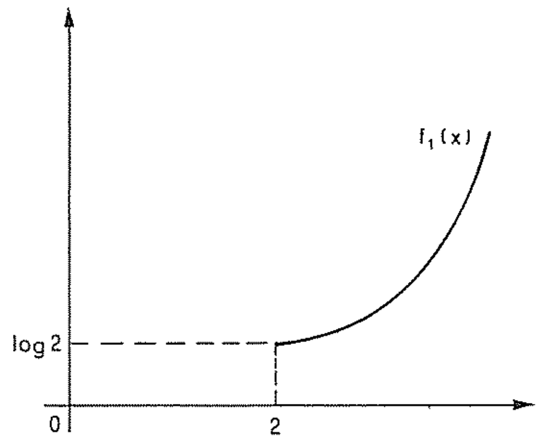


Figura 15

iv)' $f_2'(x) = \dfrac{1}{x}-2x = \dfrac{1-2x^2}{x}>0 \Leftrightarrow x\in]0,\ 1/\sqrt{2}[$;

v)' $f_2''(x) = -\dfrac{1}{x^2}-2<0 \Leftrightarrow \forall x\in]0,\ 2[$.

Pertanto $f_2(x)$ è crescente in $]0,1/\sqrt{2}[$ e decrescente in $[1/\sqrt{2},\ 2[$; $x=1/\sqrt{2}$ è punto di massimo relativo. Inoltre $f_2(x)$ è concava (cfr. fig. 16).

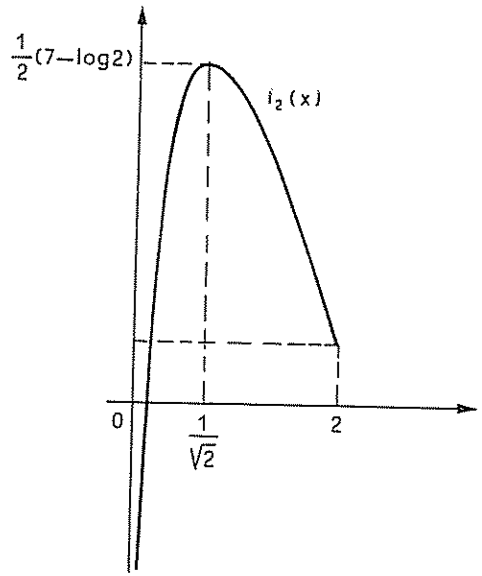


Figura 16

In definitiva la funzione $f(x)$ si presenta come in fig. 17. Essa ha un massimo relativo in $x=1/\sqrt{2}$ e un minimo relativo in $x=2$. Quest'ultimo punto è un punto angoloso dal momento che $f'(2^-)=9/2 \neq f'(2^+)=-7/2$.

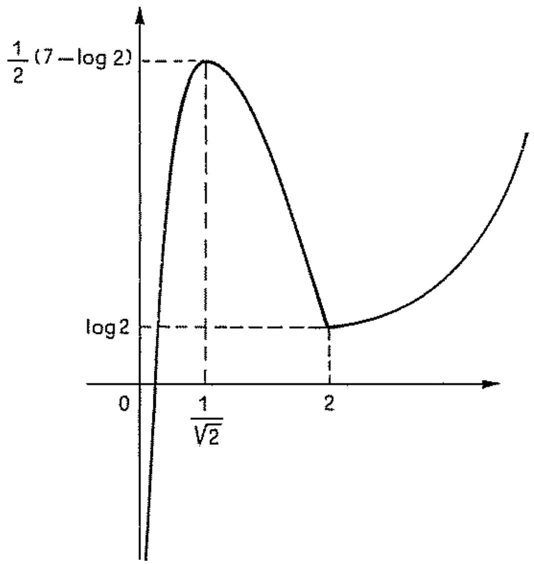


Figura 17

7) $f(x) = \log^2 x - \log x$

i) La funzione è continua per $x>0$;

ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x<1,\ x>e$;

iii) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x=0$ è asintoto verticale;

inoltre

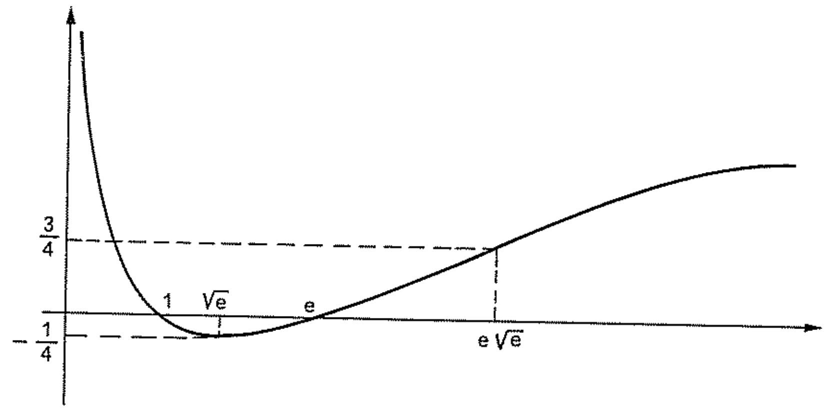
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

quindi non c'è asintoto obliquo;

iv) $f'(x) = \frac{1}{x}(2\log x-1)>0 \Leftrightarrow x>\sqrt{e}$;

v) $f''(x) = \frac{1}{x^2}(3-2\log x)>0 \Leftrightarrow 0<x<e\sqrt{e}$.

La funzione è decrescente in $]0, \sqrt{e}]$ e crescente in $[\sqrt{e}, +\infty[$; $x=\sqrt{e}$ è punto di minimo assoluto. Inoltre $f(x)$ è convessa in $]0, e\sqrt{e}]$ e concava in $[e\sqrt{e}, +\infty[$; $x=e\sqrt{e}$ è punto di flesso.



8) $f(x) = x^2-\log|x|$

i) La funzione è continua in $R-\{0\}$; inoltre $f(x)$ è pari;

ii) $f(x)>0$: non è possibile studiare elementarmente il segno della funzione;

iii) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \Rightarrow x=0$ è asintoto verticale;

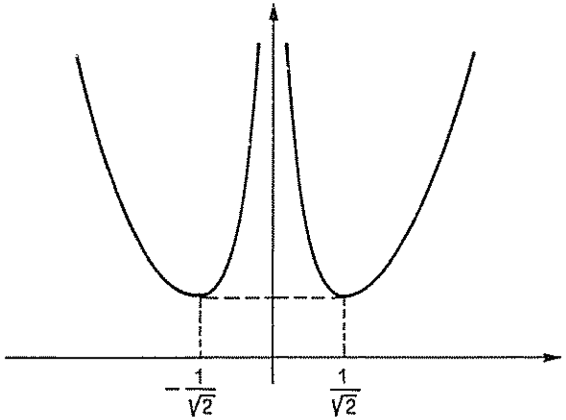
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty \Rightarrow \text{non vi sono asintoti obliqui;}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty;$$

iv) $f'(x) = \frac{2x^2-1}{x}>0 \Leftrightarrow x>1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2}<x<0$;

v) $f''(x) = 2+\frac{1}{x^2}>0\ \forall x\in R-\{0\}$.

Quindi f(x) è crescente in $[-1/\sqrt{2}, 0[$ ed in $[1/\sqrt{2}, +\infty[$ e decrescente in $]-\infty, -1/\sqrt{2}]$ ed in $]0, 1/\sqrt{2}]$; $x=\pm 1/\sqrt{2}$ sono punti di minimo assoluto. La funzione è convessa in $]-\infty, 0[$ ed in $]0, +\infty[$.



9) $f(x) = x \log^3 x$

i) La funzione è continua in $]0,+\infty[$;

ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x>1$;

iii) $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ (x=0 p.to di discontinuità eliminabile)

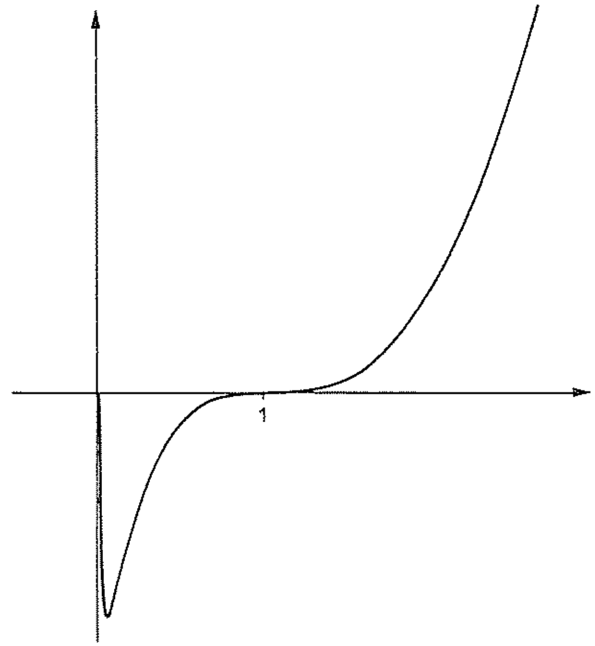
$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$ non c'è asintoto obliquo;

iv) $f'(x) = \log^3 x + 3\log^2 x>0 \Leftrightarrow x>e^{-3}$;

v) $f''(x) = \frac{3\log^2 x+6\log x}{x}>0 \Leftrightarrow x<e^{-2},\ x>1$.

Quindi f(x) è crescente in $[e^{-3}, +\infty[$, decrescente in $]0, e^{-3}]$ e per $x=e^{-3}$ ha un minimo assoluto. Inoltre f(x) è

convessa in $]0, e^{-2}]$ ed in $[1,+\infty[$ e concava in $[e^{-2}, 1]$; i punti x=1 ed $x=e^{-2}$ sono di flesso.



10) $f(x) = \log^3 x$

i) La funzione è continua per x>0;

ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x>1$;

iii) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x=0$ è asintoto verticale;

inoltre

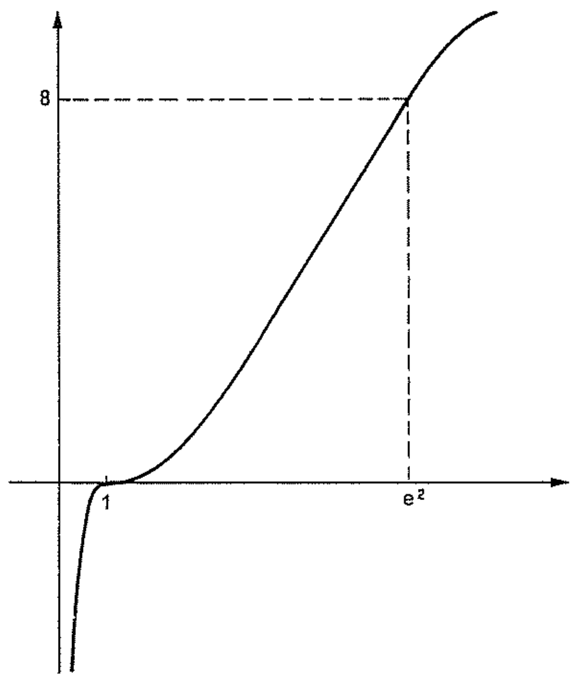
$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

pertanto non c'è asintoto obliquo;

iv) $f'(x) = \frac{3\log^2 x}{x} > 0 \ \forall x > 0;$

v) $f''(x) = \frac{3}{x^2}\left[2\log x - \log^2 x\right] > 0 \Leftrightarrow 1 < x < e^2.$

Quindi f(x) è crescente in $]0,+\infty[$, convessa in $[1, e^2]$ e concava in $]0,1]$ ed in $[e^2, +\infty[$; $x=1$ ed $x=e^2$ sono punti di flesso.



11) $f(x) = x + \log(1-x)$

i) La funzione è continua per $x<1$;

ii) non si può studiare elementarmente il segno di f(x);

iii) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x=1$ è asintoto verticale;

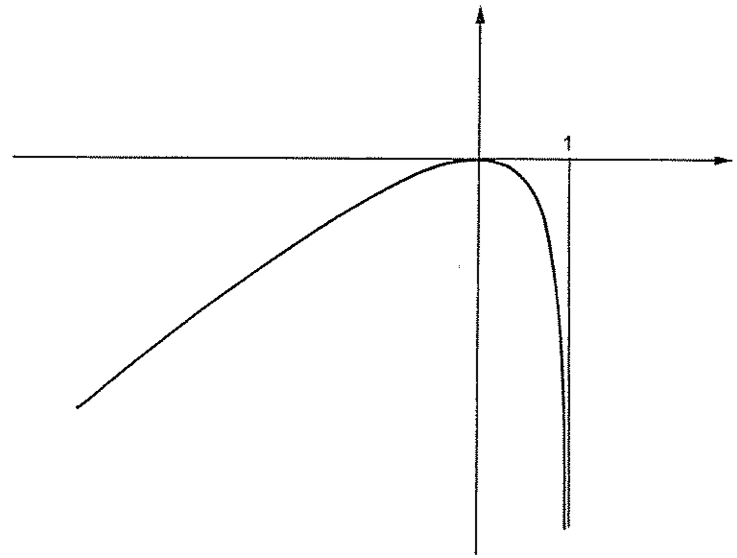
$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \ \lim_{x\to -\infty} (f(x)-x) = +\infty \Rightarrow$ non c'è asint. obl.

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty;$

iv) $f'(x) = \frac{-x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x < 0;$

v) $f''(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0 \ \forall x < 1.$

Quindi f(x) è crescente in $]-\infty,0]$, decrescente in $[0,1[$ ed ha un massimo assoluto per $x=0$; inoltre f(x) è concava.



12) $f(x) = \frac{\log x + 1}{\log x - 1}$

i) La funzione è definita per $x \in]0,e[\cup]e,+\infty[$;

ii) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0,1/e[\cup]e,+\infty[$;

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1 \Rightarrow y=1$ asintoto orizzontale,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1 \Rightarrow x=0$ p.to di discontinuità eliminabile,

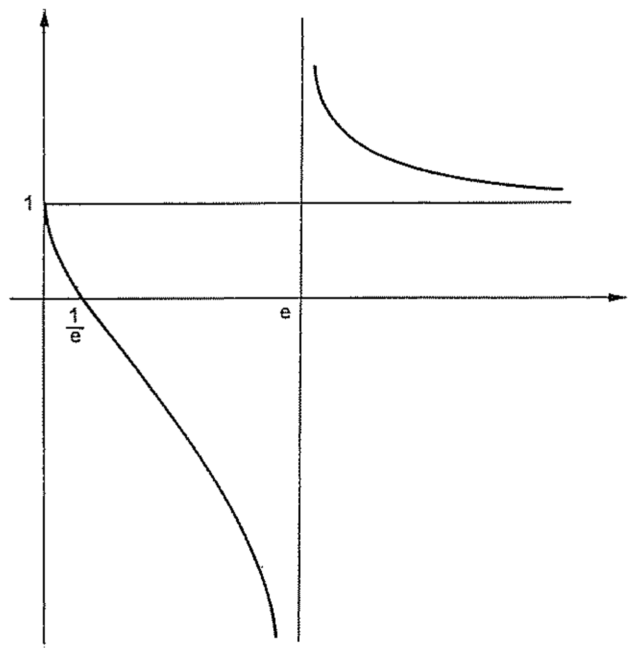
$\lim\limits_{x\to e^\pm} f(x)=\pm\infty \Rightarrow x=e$ asintoto verticale;

iv) $f'(x) = -\dfrac{2}{x\,(\log x-1)^2}<0 \quad \forall x\in\ ]0,e[\ \cup\ ]e,+\infty[;$

v) $f''(x) = \dfrac{2}{x^2\,(\log x-1)^4}\left[(\log x-1)^2+2\,(\log x-1)\right]>0 \iff$

$\iff x\in\ ]0,1/e[\ \cup\ ]e,+\infty[.$

Quindi $f(x)$ è decrescente in $]0,e[$ ed in $]e,+\infty[$, convessa in $]0,1/e]$ ed in $]e,+\infty[$ e concava in $[1/e, e[$; $x=1/e$ è punto di flesso.



13) $f(x) = \lg_x e = \dfrac{1}{\lg x}$

La funzione risulta definita in $]0,1[\ \cup\ ]1,+\infty[$. Si ha

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0;$

$y=0$ è asintoto orizzontale, $x=1$ è asintoto verticale. Risulta

$f'(x) = -\dfrac{1}{x\lg^2 x},\qquad f''(x) = \dfrac{\lg x+2}{x^2\lg^3 x}.$

Quindi f' è sempre negativa; inoltre

$$f''(x)>0 \iff x\in\ ]0,\ e^{-2}[\ \cup\ ]1,+\infty[.$$

Il grafico si presenta allora come in fig. 18.

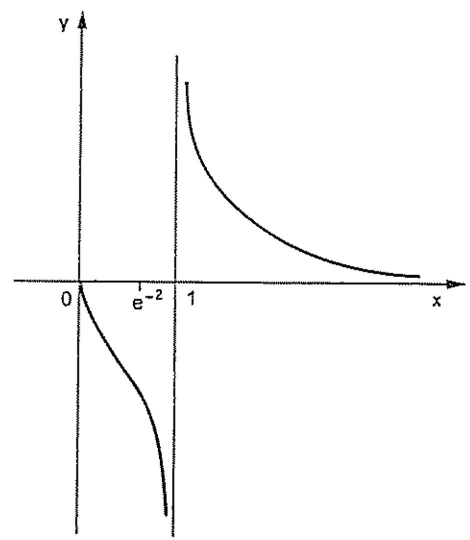


Figura 18

14) $f(x) = \lg(x^2+x+1) - |x|$

La funzione risulta definita in tutto R. Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2-x}{x^2+x+1} & \text{se } x>0 \\ \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x+1} & \text{se } x<0 \end{cases};$$

pertanto f è crescente in $]-\infty, -2[$, $]-1,0[$, $]0,1[$, decrescente in $]-2, -1[$, $]1,+\infty[$; -2 e 1 sono punti di massimo relativo, -1 è punto di minimo relativo. In 0 la funzione è continua ma non derivabile:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 2 \neq 0 = \lim_{x\to 0^+} f'(x).$$

Si ha inoltre

$$f''(x) = \frac{1-2x-2x^2}{\left(x^2+x+1\right)^2} \text{ in }]-\infty,0[\cup]0,+\infty[;$$

pertanto f è convessa in $\left]-\frac{\sqrt{3}+1}{2}, 0\right[$, $\left]0, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right[$, concava in $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right[$, $\left]\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$. Il grafico si presenta come in fig. 19. Si osservi che:

a) $x=1$ è punto di massimo assoluto.

b) L'equazione

$$\lg(x^2+x+1) = |x|$$

ammette un'unica soluzione $x_0 \neq 0$; se ne dia una valutazione.

c) f pur essendo convessa in $\left]-\frac{\sqrt{3}+1}{2}, 0\right[$ e in $\left]0, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right[$ *non* è convessa in $\left]-\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right[$.

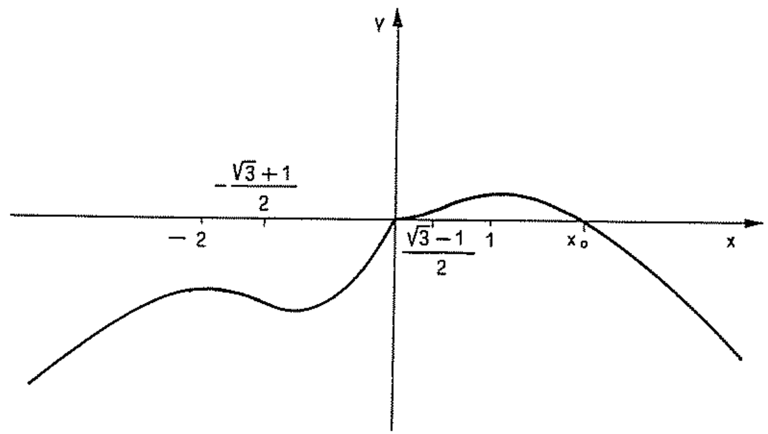


Figura 19

15) $f(x) = |\lg x| - |x^2-3x+2|$

La funzione risulta definita in $]0,+\infty[$. Poiché il polinomio x^2-3x+2 è positivo in $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ la funzione ha le seguenti differenti espressioni:

$$f(x) = \begin{cases} -\lg x - x^2+3x-2 & \text{se } x\in]0,1[, \\ \lg x + x^2-3x+2 & \text{se } x\in [1, 2], \\ \lg x - x^2+3x-2 & \text{se } x\in]2,+\infty[. \end{cases}$$

Risulta pertanto

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}-2x+3=-\dfrac{2x^2-3x+1}{x} & x\in\,]0,1[,\\ \dfrac{1}{x}+2x-2=\dfrac{2x^2-3x+1}{x} & x\in\,]1,2[,\\ \dfrac{1}{x}-2x+3=-\dfrac{2x^2-3x-1}{x} & x\in\,]2,+\infty[.\end{cases}$$

Quindi f risulta crescente in]1/2, 2[, decrescente in]0, 1/2[,]2, +∞[: 1/2 è punto di minimo relativo, 2 è punto di massimo relativo. Essendo inoltre

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \frac{3}{2} \neq -\frac{1}{2} = \lim_{x\to 2^-} f'(x)$$

f risulta derivabile in 1, non derivabile (ma continua) in 2.

Si ha ancora

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}-2 & \text{se} \quad x\in\,]0,1[,\\ -\dfrac{1}{x^2}+2 & \text{se} \quad x\in\,]1,2[,\\ -\dfrac{1}{x^2}-2 & \text{se} \quad x\in\,]2,+\infty[.\end{cases}$$

Quindi f è convessa in $]0, \sqrt{2}/2[$, $]1, 2[$, concava in $]\sqrt{2}/2, 1[$, $]2, +\infty[$.

Tenendo presente infine che

$$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$$

il grafico ha l'andamento illustrato in fig. 20.

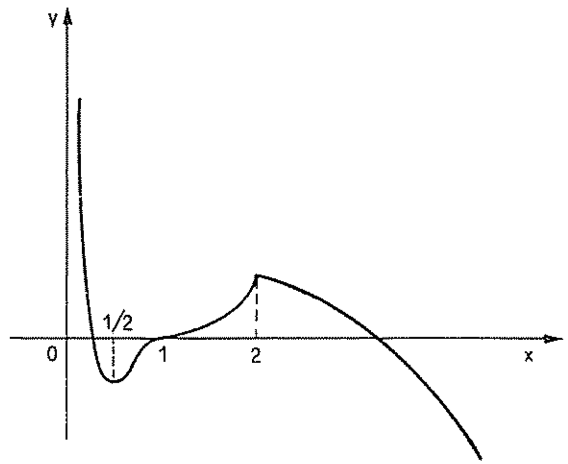


Figura 20

Problema: Dare una valutazione delle due soluzioni, diverse da 1, dell'equazione

$$|\lg x| = |x^2-3x+2|.$$

16) $f(x) = x - \lg|1+x|$.

La funzione è definita in R−{−1}. Si ha

$$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty \Rightarrow x=-1 \text{ asintoto verticale.}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

e non esistono asintoti obliqui.

Risulta

$$f'=\frac{x}{1+x}, \qquad f''(x)=\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Pertanto il grafico ha l'andamento illustrato in fig. 21.

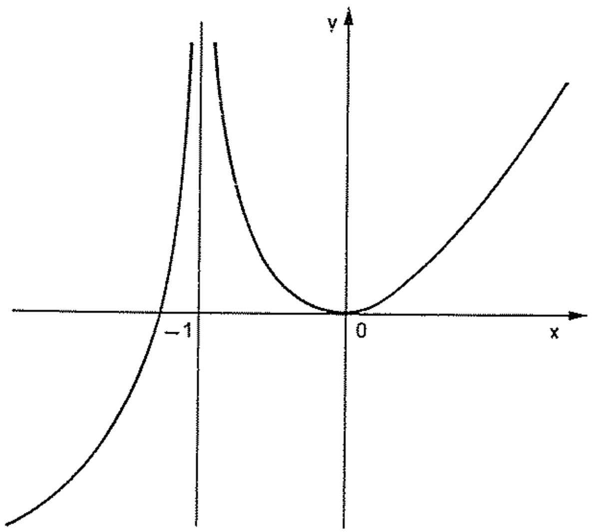


Figura 21

17) $f(x) = |x|^x$

La funzione risulta definita in $R-\{0\}$. Si ha

$\lim_{x\to 0} f(x)=1 \Rightarrow$ 0 punto di discontinuità eliminabile,

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ asintoto orizzontale a $-\infty$,

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$,

non esiste inoltre asintoto obliquo a $+\infty$.

Risulta

$$f'(x) = |x|^x (\lg|x|+1), \quad f''(x) = \frac{|x|^x}{x}\left[x(\lg|x|+1)^2+1\right].$$

Per quanto riguarda il segno della derivata prima si ha

$f'(x)>0 \Leftrightarrow |x|>e^{-1} \Leftrightarrow x\in\ ]-\infty, -e^{-1}[\ \cup\ ]e^{-1},+\infty[$,

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\ ]-e^{-1}, 0[\ \cup\ ]0, e^{-1}[$,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-e^{-1},\ x=e^{-1}$.

Lo studio del segno della derivata seconda è riconducibile allo studio della disequazione

(1) $$x(\lg|x|+1)^2>-1.$$

Dall'esercizio precedente è possibile dedurre che la (1) è soddisfatta per $x\in\ ]-1, +\infty[-\{0\}$, si ha quindi

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in\ ]-\infty, -1[\ \cup\ ]0,+\infty[$.

Il grafico si presenta come in fig. 22.

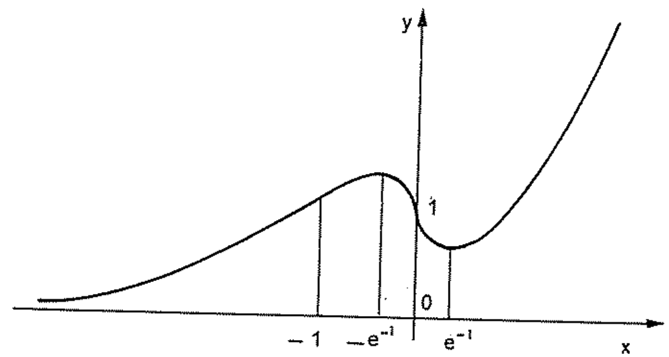


Figura 22

18) $f(x) = \lg\left(\left|1+\frac{1}{x}\right|\right) - \frac{1}{x+1}$.

La funzione risulta definita in $R-\{-1,0\}$. Si ha

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ asintoto orizzontale a $-\infty$ e $+\infty$,

$\lim_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x)=-\infty \Rightarrow x=-1$ asintoto verticale,

$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty \Rightarrow x=0$ asintoto verticale.

Risulta

$$f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{(x+1)(3x+1)}{x^2(x+1)^4};$$

quindi

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty,\,-1[\ \cup\ ]-1,0[$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty,\,-1[\ \cup\ ]-\frac{1}{3},0[\ \cup\ ]0,\,+\infty[$$

Il grafico è illustrato in fig. 23.

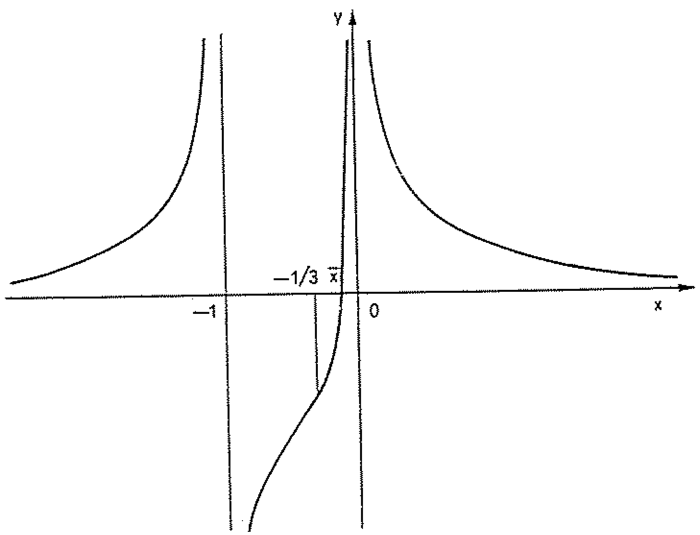


Figura 23

PROBLEMA: Dare una valutazione dell'unica soluzione $\bar{x}$ dell'equazione

$$\lg\left|1+\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x+1}.$$

19) $f(x) = \left|1+\frac{1}{x}\right|^x$

La funzione risulta definita in $R-\{-1,0\}$. Si ha

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e \Rightarrow y=e$ asintoto orizzontale a $+\infty$ e $-\infty$,

$\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty \Rightarrow x=-1$ asintoto verticale,

$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \Rightarrow 0$ è punto di discontinuità eliminabile.

Risulta

$$f'(x) = \left|1+\frac{1}{x}\right|^x\left[\lg\left|1+\frac{1}{x}\right| - \frac{1}{x+1}\right];$$

si ha allora (cfr. esercizio precedente):

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty,\,-1[\ \cup\ ]\bar{x},\,0[\ \cup\ ]0,\,+\infty[.$$

Si ha ancora

$$f''(x) = \left|1+\frac{1}{x}\right|^x\left\{\left(\lg\left|1+\frac{1}{x}\right| - \frac{1}{x+1}\right)^2 - \frac{1}{x(x+1)^2}\right\}.$$

Lo studio del segno della derivata seconda è più complesso. Osservato che in $]-\infty,\,0[\,-\{1\}$ la derivata seconda è senz'altro positiva, tutto è ricondotto allo studio della disequazione

(2) $$\lg\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\,(x+1)}.$$

Posto

$$g(x) = \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+1)}$$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

e

$$g'(x) = \frac{3x-2\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}(x+1)^2}>0;$$

si ha quindi $g(x)<0$ per ogni $x>0$: la (2) non è mai soddisfatta.

Possiamo sintetizzare il tutto scrivendo

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty,\,-1[\ \cup\ ]-1,0[.$$

Il grafico è illustrato in fig. 24.

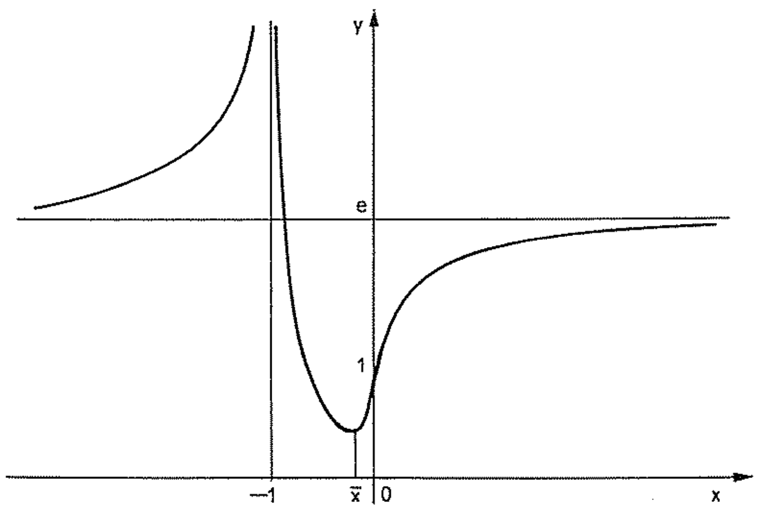


Figura 24

3.3 - Funzioni trigonometriche

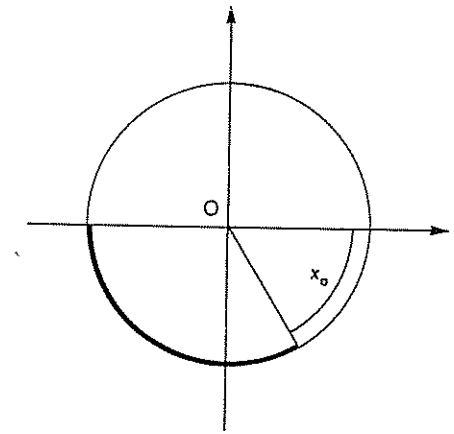
1) $f(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen} x$

i) La funzione è continua in tutto R; essendo periodica di periodo 2π basterà studiarla in $[-\pi,\ \pi]$;

ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \operatorname{sen} x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$;

posto $x_0 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ si ottiene

$f(x)>0 \Leftrightarrow -\pi\le x<x_0$



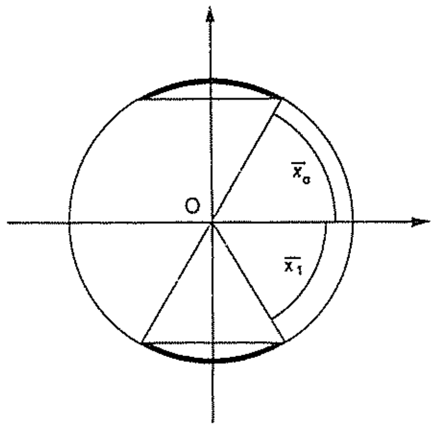
iii) $f'(x) = \cos x\,(1-2\operatorname{sen} x)>0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}<x<\frac{5}{6}\pi$;

iv) $f''(x)=4\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x-2>0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x<\frac{1-\sqrt{33}}{8},\ \operatorname{sen} x>\frac{1+\sqrt{33}}{8}$;

posto $\bar{x}_0=\operatorname{arcsen}\frac{1+\sqrt{33}}{8},\ \bar{x}_1=\operatorname{arcsen}\frac{1-\sqrt{33}}{8}$

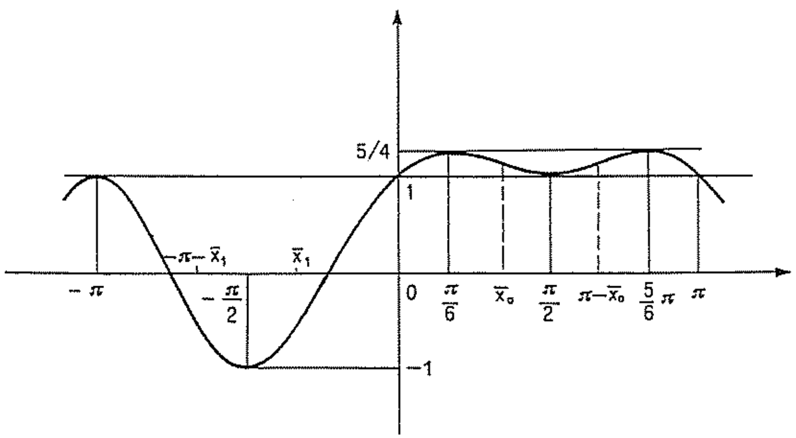
si ha

$f''(x)>0 \Leftrightarrow \bar{x}_0<x<\pi-\bar{x}_0,\ -\pi-\bar{x}_1<x<\bar{x}_1$



La funzione è crescente in $[-\pi/2, \pi/6]$ ed in $[\pi/2, 5\pi/6]$, decrescente in $[-\pi, -\pi/2]$, in $[\pi/6, \pi/2]$ ed in $[5\pi/6, \pi]$.

Inoltre è convessa in $[\overline{x}_0, \pi-\overline{x}_0]$ ed in $[-\pi-\overline{x}_1, \overline{x}_1]$ e concava in $[\overline{x}_1, \overline{x}_0]$, in $[-\pi, -\pi-\overline{x}_1]$ ed in $[\pi-\overline{x}_0, \pi]$.



2) $f(x) = \text{sen}x - x$

i) La funz. è continua in R; inoltre f(x) è dispari;

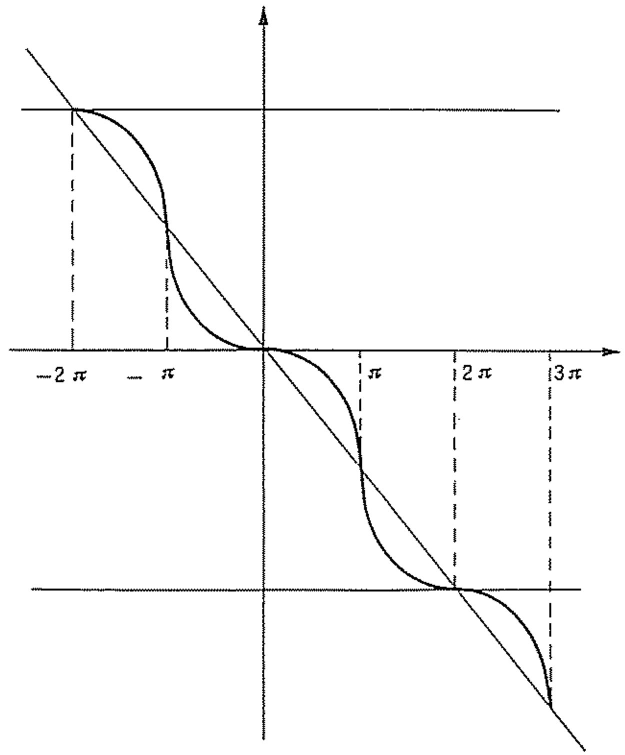
ii) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$,

la funzione f(x)+x non è regolare a $+\infty$ e $-\infty$; quindi non vi sono asintoti obliqui;

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$;

iii) $f'(x) = \cos x - 1 < 0 \quad \forall x \neq 2k\pi$ con $k \in Z$;

iv) $f''(x) = -\text{sen}x > 0 \Leftrightarrow (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ con $k \in Z$.



Quindi f(x) é decrescente in R, é convessa in ogni intervallo $[(2k+1)\pi,\ (2k+2)\pi]$ e concava in ogni intervallo $[2k\pi,\ (2k+1)\pi]$; i punti $k\pi$ con $k\in Z$ sono di flesso.

Si osservi che i punti $x=2k\pi$ con $k\in Z$ sono a tangente orizzontale poiché $f'(2k\pi)=0$.

3) $f(x) = \cos x-\frac{1}{2}\cos 2x-2$

i) La funzione é continua in R; inoltre é periodica di periodo 2π e pari; pertanto basterá studiarla su $[0,\pi]$;

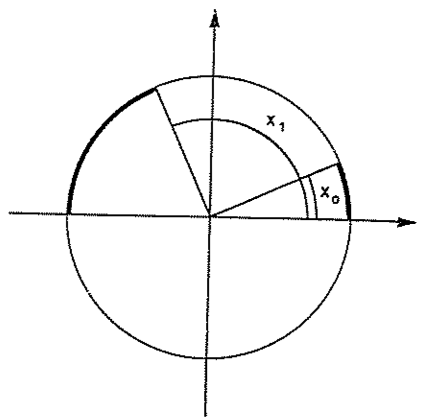
ii) $f(x)<0\ \ \forall x\in[0,\pi]$;

iii) $f'(x) = \operatorname{sen}x\,(2\cos x-1)>0 \Leftrightarrow x\in\,]0,\pi/3[$;

iv) $f''(x) = 4\cos^2x-\cos x-2>0 \Leftrightarrow \cos x<\frac{1-\sqrt{33}}{8},\ \cos x>\frac{1+\sqrt{33}}{8}$,

siano $x_0=\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}$, $x_1=\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}$; si ha

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in[0,\ x_0[\ \cup\ ]x_1,\ \pi]$.



Quindi f(x) é crescente in $[0,\ \pi/3]$ e decrescente in $[\pi/3,\ \pi]$; inoltre f(x) é convessa in $[0,\ x_0]$ ed in $[x_1,\ \pi]$ e concava in $[x_0,\ x_1]$.

Il grafico di f(x) in $[0,\ \pi]$ sará quello riportato in fig. a; il grafico in $[-\pi,\ \pi]$ é quello riportato in fig. b e si ottiene per simmetria rispetto all'asse y.

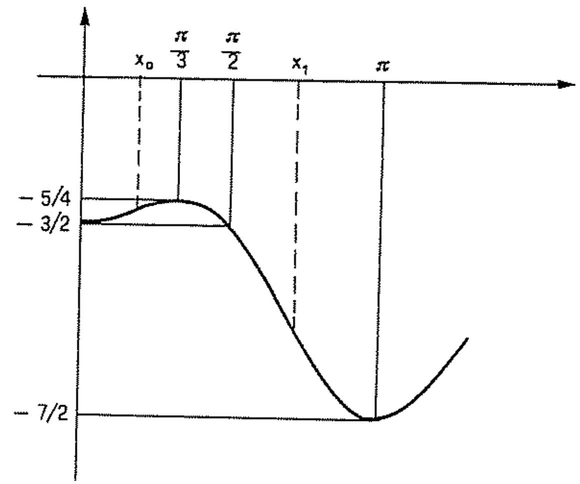


Figura a

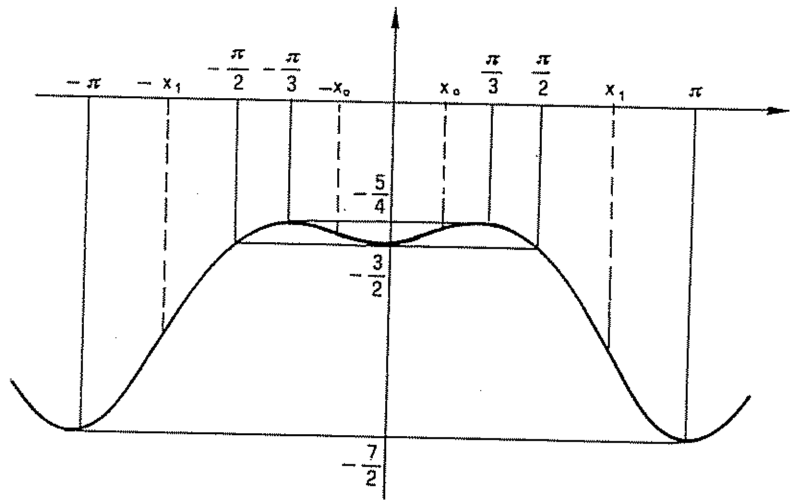


Figura b

Il grafico in tutto R si costruisce tenendo conto della periodicità di f(x); ne consegue che detto k un intero non negativo i punti $\pm(\pi/3+2k\pi)$ sono di massimo assoluto, $\pm 2k\pi$ di minimo relativo, $\pm(2k+1)\pi$ di minimo assoluto, $\pm(x_0+2k\pi)$ e $\pm(x_1+2k\pi)$ di flesso.

4) $f(x) = \cos 2x + 4 \operatorname{sen} x$

i) La funzione è continua in tutto R; inoltre essa è periodica di periodo 2π. Pertanto sarà sufficiente studiarla in $[-\pi, \pi]$;

ii) $f(x) = -2\operatorname{sen}^2 x+4\operatorname{sen} x+1>0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x\in \left]\frac{2-\sqrt{6}}{2}, \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right[$

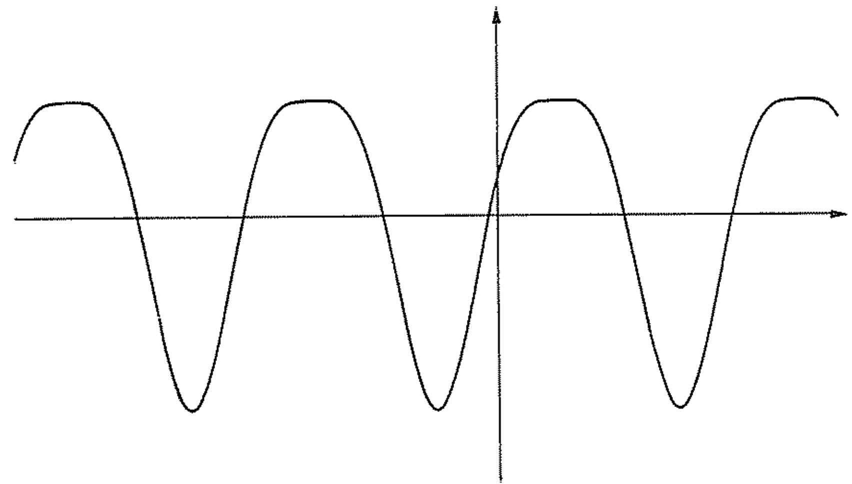
posto $x_0=\operatorname{arcsen}\frac{2-\sqrt{6}}{2}$ si ha

$f(x)>0 \Leftrightarrow x\in]x_0, \pi[\cup]-\pi, -\pi-x_0[$;

iii) $f'(x) = -2\operatorname{sen}2x+4\cos x = 4\cos x\ (1-\operatorname{sen} x)\geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos x\geq 0 \Leftrightarrow x\in [-\pi/2, \pi/2]$;

iv) $f''(x) = -4\cos 2x-4\operatorname{sen} x = 8\operatorname{sen}^2 x-4\operatorname{sen} x-4>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x<-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\in \left]-\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{6}\right[$.

Quindi f(x) è crescente in $[-\pi/2, \pi/2]$ e decrescente in $[-\pi, -\pi/2]$ ed in $[\pi/2, \pi]$; segue che $x=-\pi/2$ è punto di minimo relativo ed $x=\pi/2$ di massimo relativo; inoltre f(x) è convessa in $[-5\pi/6, -\pi/6]$ e concava in $[-\pi, -5\pi/6]$ ed in $[-\pi/6, \pi]$; i punti $x=-5\pi/6$ ed $x=-\pi/6$ sono di flesso. Pertanto, tenuto conto che f(x) è periodica di periodo 2π si ha che al variare di k in Z i punti $-\pi/2+2k\pi$ sono di minimo relativo, $\pi/2+2k\pi$ di massimo relativo, $-5\pi/6+2k\pi$ e $-\pi/6+2k\pi$ di flesso.



5) $f(x) = \operatorname{sen} x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x$

La funzione è definita in tutto R e periodica di periodo 2π, essa inoltre è dispari.
Si ha

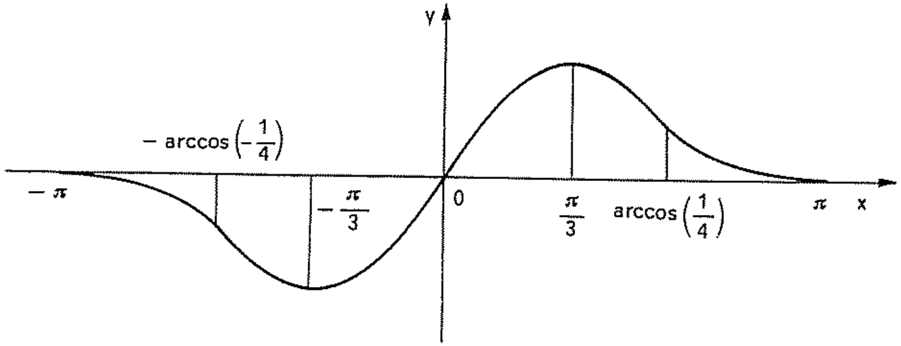
$f'(x)=2\cos^2 x+\cos x-1,\quad f''(x)=-\operatorname{sen} x(4\cos x+1)$,

quindi, posto $x_0=\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$,

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \cos x>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\in \left]-\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\right[\ k\in Z$,

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in\ x_0+2k\pi, 2k\pi[\cup]x_0+2k\pi, (2k+1)\pi[$.

Data la periodicità possiamo limitare a disegnare il grafico della funzione per $x\in[-\pi, \pi]$



6) $f(x)=\operatorname{sen}x+\dfrac{\cos 2x}{4}$

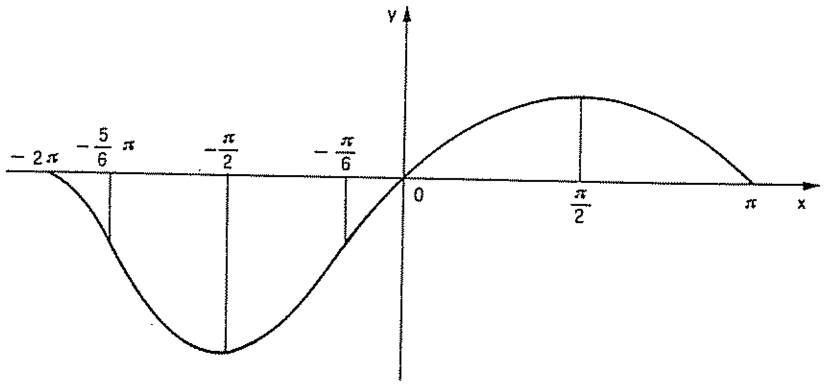
La funzione risulta definita in R e periodica di periodo 2π. Si ha

$f'(x)=\cos x(1-\operatorname{sen}x)$, $\quad f''(x) = 2\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}x-1$,

quindi

$f'(x)>0 \iff x\in\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\ k\in Z,$

$f''(x)>0 \iff \operatorname{sen}x<-\frac{1}{2} \iff x\in\left]-\frac{5}{6}\pi+2k\pi,\ -\frac{\pi}{6}+2k\pi\right[\ k\in Z.$



7) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$

La funzione è definita in $R-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ -\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ con } k\in Z\right\}$. Inoltre essa è periodica di periodo π; studiamone il comportamento in un intervallo di periodicità $\left]-\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\right[$. Si ha

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^-} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{4}\pi\right)^+} f(x)+\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{le rette di equazione}\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ con } k\in Z\\ \text{sono asintoti verticali per } f,\end{array}\right.$$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=1 \Rightarrow \frac{\pi}{2}+k\pi$ p.ti di discontinuità eliminabili.

Risulta

$$f'(x) = \frac{1+\operatorname{tg}^2x}{(1+\operatorname{tg}x)^2};$$

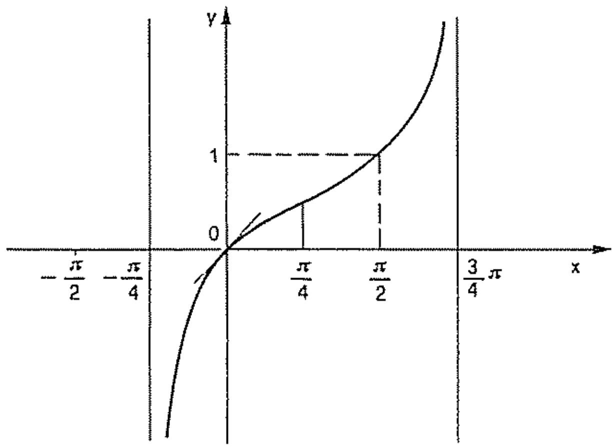
quindi

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f'(x) = 1.$$

Ciò comporta che la funzione, prolungata per continuità nei punti $\pi/2+k\pi$, è ivi derivabile. Essa risulta inoltre strettamente crescente in ogni intervallo del tipo $]-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{3}{4}\pi+k\pi[$. Si ha inoltre

$$f''(x) = 2\frac{(1+tg^2x)}{(1+tgx)^3}(tgx-1).$$

Quindi la funzione è concava in $]-\pi/4+k\pi, \pi/4+k\pi[$, convessa in $]\pi/4+k\pi, 3\pi/4+k\pi[$. Il grafico, limitatamente all'intervallo $]-\pi/4, 3\pi/4[$, si presenta come in figura



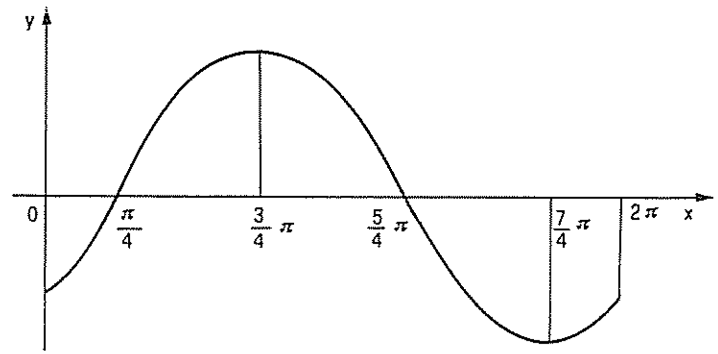
8) $f(x) = senx-cosx$

La funzione è definita in R e periodica di periodo 2π, studiamone pertanto il comportamento nell'intervallo $[0, 2\pi]$. La funzione si annulla in $\pi/4$, $5\pi/4$, è positiva in $]\pi/4, 5\pi/4[$, negativa altrove. Si ha

$$f'(x) = cosx+senx, \qquad f''(x)=-senx+cosx$$

Pertanto la derivata prima si annulla in $3\pi/4, 7\pi/4$, è positiva in $[0,3\pi/4[\cup]7\pi/4,2\pi]$, negativa in $]3\pi/4, 7\pi/4[$;

la derivata seconda risulta positiva in $[0,\pi/4[\cup]5\pi/4,2\pi]$, negativa in $]\pi/4,5\pi/4[$, nulla in $\pi/4,5\pi/4$.



Si osservi che $3\pi/4$ è punto di massimo assoluto, $7\pi/4$ è punto di minimo assoluto, il massimo è $\sqrt{2}$, il minimo $-\sqrt{2}$.

9) $f(x)=|senx|+cosx$

i) La funzione è continua in tutto R; inoltre è periodica di periodo 2π ed è pari; pertanto basterà studiarla in $[0, \pi]$ dove riesce $f(x)=senx+cosx$;

ii) $f(x)>0$ $\forall x\in[0, 3\pi/4[$;

iii) $f'(x) = cosx-senx>0 \Leftrightarrow x\in[0, \pi/4[$;

iii) $f''(x) = -(senx+cosx)>0 \Leftrightarrow x\in]3\pi/4, \pi]$.

Quindi $f(x)$ è crescente in $[0, \pi/4]$ e decrescente in $[\pi/4, \pi]$; inoltre la funzione è concava in $[0, 3\pi/4]$ e convessa in $[3\pi/4, \pi]$.

Il grafico in $[0, \pi]$ è riportato in fig. a e quello in $[-\pi, \pi]$ si ottiene per simmetria rispetto all'asse y ed è riportato in fig. b.

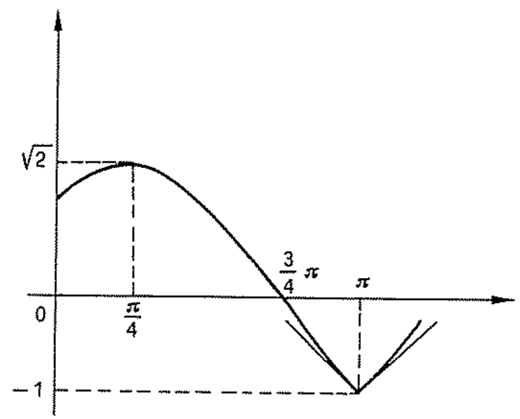


Figura a

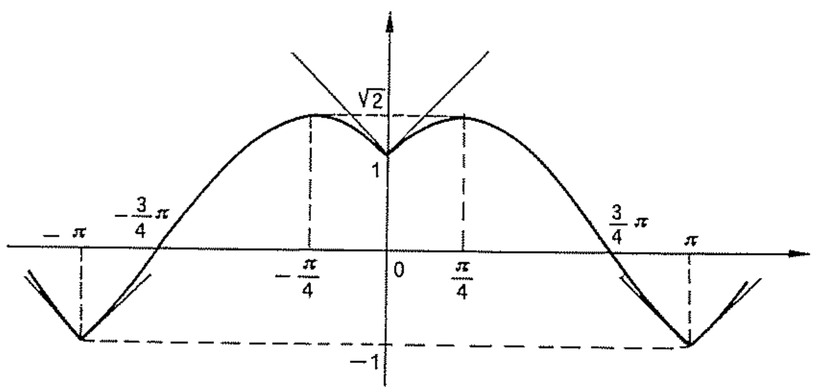


Figura b

Il grafico in R si costruisce tenendo conto della periodicità.

Detto k un intero non negativo i punti $\pm 2k\pi$ sono di minimo relativo, i punti $\pm(2k+1)\pi$ di minimo assoluto, i

punti $\pm(\pi/4+2k\pi)$ di massimo assoluto; i punti $\pm(3\pi/4+2k\pi)$ di flesso.

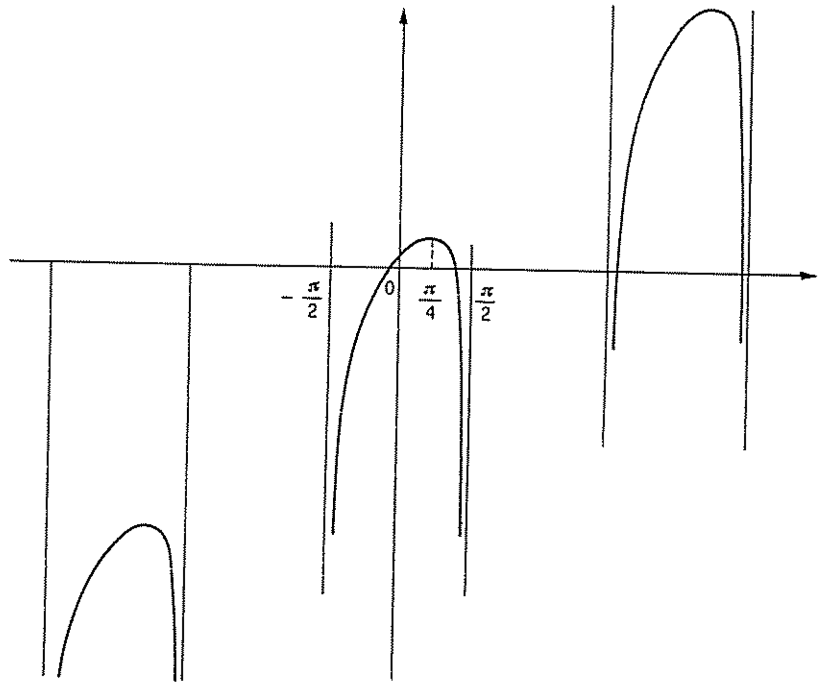
Si osservi anche che i punti $\pm k\pi$ sono angolosi; infatti

$$f'(0^+)=1, \qquad f'(0^-)=-1, \qquad f'(\pi^+)=1 \quad f'(\pi^-)=-1$$

10) $f(x)=\lg\cos x+x$.

La funzione è definita nell'unione con $k\in Z$, degli intervalli $I_k=]-\pi/2+2k\pi, \pi/2+2k\pi[$; agli estremi di tali intervalli funzione diverge negativamente. Risulta

$$f'(x)=1-\operatorname{tg}x, \qquad f''(x)=-\frac{1}{\cos^2 x}.$$



Il grafico di f è allora concavo in ogni I_k. Inoltre f risulta crescente in $]-\pi/2+2k\pi, \pi/4+2k\pi]$, decrescente in $[\pi/4+2k\pi, \pi/2+2k\pi[$; i punti $\pi/4+2k\pi$ sono tutti punti di massimo relativo.

11) $f(x)=3\lg\cos x+2x^2$.

Studiamone il grafico limitatamente all'intervallo $]-\pi/2, \pi/2[$ tenendo inoltre presente che f è pari. Si ha

$$f'(x)=-3\operatorname{tg}x+4x;$$

è facile verificare che l'equazione $f'(x)=0$, oltre alla soluzione banale $x=0$, ammette in $]0, \pi/2[$ una ulteriore soluzione che denotiamo con α. Risulta, sempre in $[0, \pi/2[$:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ o } x=\alpha$$

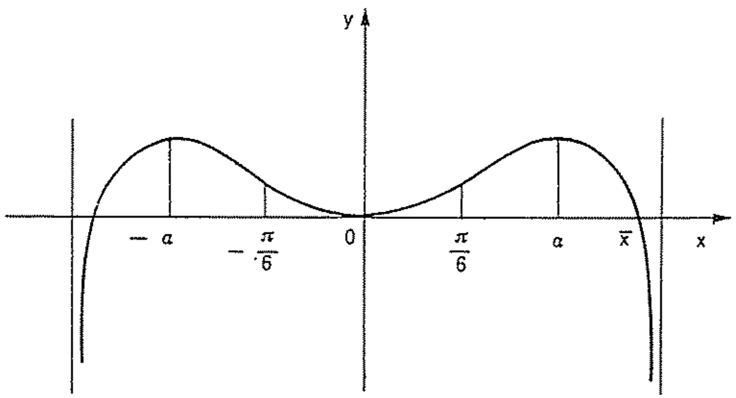
$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \alpha<x<\frac{\pi}{2};$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 0<x<\alpha.$$

Si ha ancora

$$f''(x)=-3\operatorname{tg}^2x+1$$

quindi f è convessa in $[-\pi/6, \pi/6]$. Tenendo infine presente che in $\pi/2$ f diverge negativamente il grafico della funzione si presenta come in figura.



PROBLEMA: Dare una valutazione di α e della soluzione $\bar{x}\in]0, \frac{\pi}{2}[$ dell'equazione $f(x)=0$.

12) $f(x)=x\operatorname{sen}x+\cos x$

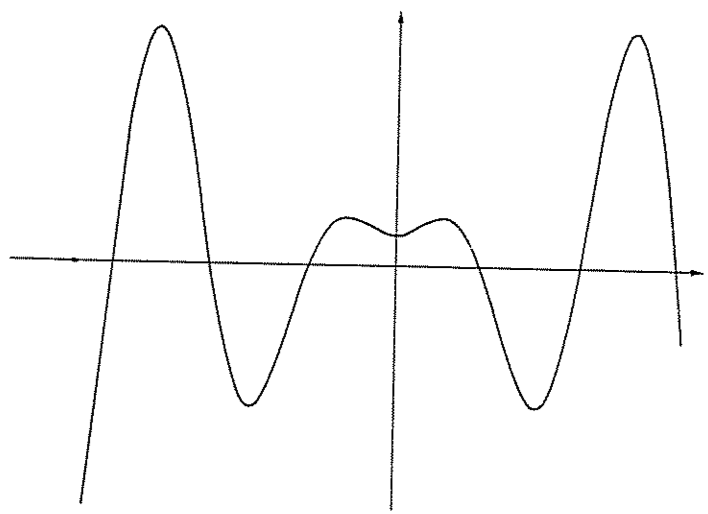
La funzione è definita in R. Risulta

$$f'(x)=x\cos x \qquad f''(x)=\cos x-x\operatorname{sen}x.$$

Pertanto

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0, \ x=\frac{\pi}{2}+k\pi,$$

inoltre in ogni intervallo $]k\pi, \pi+k\pi[$ esiste un'unica soluzione x_k dell'equazione $f''(x)=0$. Uno studio accurato del segno della derivata prima e seconda porta a concludere che il grafico di f si presenta come in figura.



13) $f(x) = \log(1-\cos x)-x$

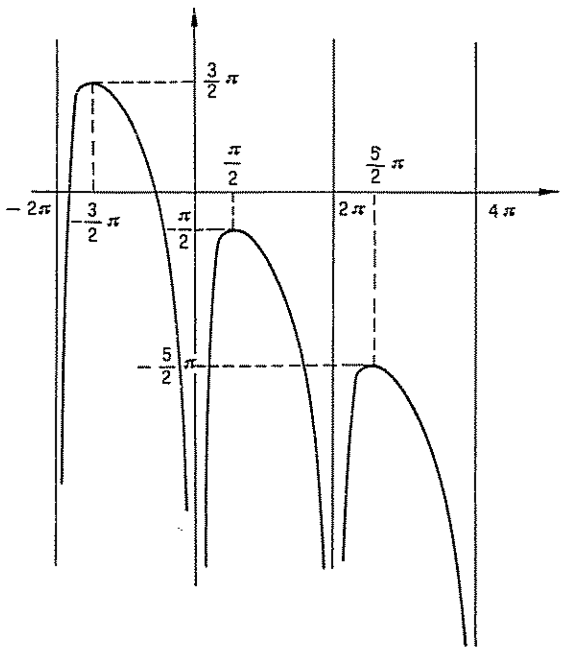
i) La funzione é continua per $x\neq 2k\pi$, con $k\in Z$;

ii) non é possibile studiare il segno di f(x) elementarmente;

iii) $\lim_{x\to 2k\pi} f(x)=-\infty \Rightarrow x=2k\pi$ con $k\in Z$ é un asint. vert.;

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=-1,$$

poiché f(x)+x non é regolare a $+\infty$ e $-\infty$ non vi sono asintoti obliqui;



$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\mp\infty;$$

iv) $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen}x+\cos x-1}{1-\cos x}>0 \Leftrightarrow 2k\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$;

v) $f''(x) = \dfrac{\cos x-1}{(1-\cos x)^2}<0 \ \forall x\neq 2k\pi$.

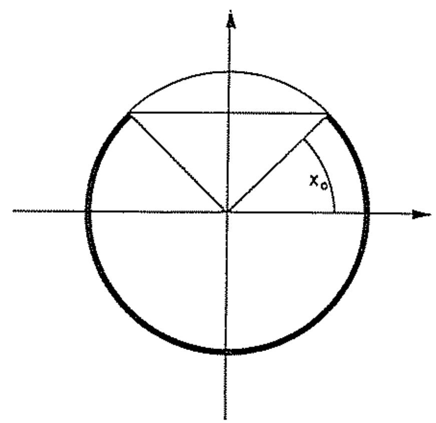
Quindi la funzione é crescente in ogni intervallo $]2k\pi, \pi/2+2k\pi]$, decrescente in $[\pi/2+2k\pi, (2k+2)\pi[$ ed ha un massimo relativo in ogni punto $x_k=\pi/2+2k\pi$; inoltre f(x) è concava in ogni intervallo $]2k\pi, (2k+2)\pi[$.

14) $f(x)=e^{\operatorname{sen}x}$

i) La funzione é continua in R; inoltre é periodica di periodo 2π; pertanto basterá studiarla in $[-\pi, \pi]$;

ii) $f(x)>0 \ \forall x\in[-\pi, \pi]$;

iii) $f'(x)=e^{\operatorname{sen}x}\cos x>0 \Leftrightarrow x\in]-\pi/2, \pi/2[$;

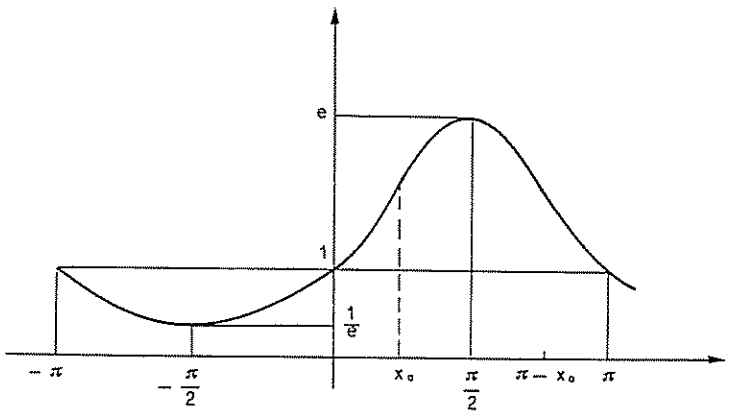


iv) $f''(x)=e^{senx}(\cos^2x-senx)>0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2}<senx<\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in[-\pi, x_0[\ \cup\ ]\pi-x_0, \pi]$ dove $x_0=\arcsen\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Quindi $f(x)$ è crescente in $[-\pi/2, \pi/2]$ e decrescente in $[-\pi, -\pi/2]$ ed in $[\pi/2, \pi]$; $x=-\pi/2$ è punto di minimo assoluto ed $x=\pi/2$ è punto di massimo assoluto. Inoltre $f(x)$ è convessa in $[-\pi, x_0]$ ed in $[\pi-x_0, \pi]$ ed è concava in $[x_0,\pi-x_0]$; x_0 e $\pi-x_0$ sono punti di flesso.

In tutto R i punti $\pi/2+2k\pi$ saranno di massimo assoluto e $-\pi/2+2k\pi$ di minimo assoluto, al variare di k in Z.



15) $f(x)=e^{|senx|}$

Osservato che la funzione è periodica di periodo 2π e pari basterà studiarla in $[0, \pi]$ dove si ha:

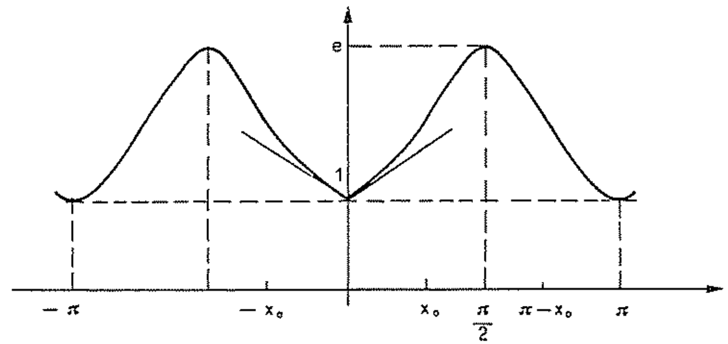
$$f(x) = e^{senx}.$$

Allora il grafico di $f(x)$ in $[0, \pi]$ si ottiene da quello dell'esercizio precedente; osservato poi che il

grafico di $f(x)$ è simmetrico rispetto all'asse y si ottiene il grafico di $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$

Si osservi che $x=0$ è punto di minimo assoluto, inoltre $x=0$ è punto angoloso poiché $f'(0^+)=1$, $f'(0^-)=-1$.

In tutto R i punti $k\pi$ con $k\in Z$ sono di minimo assoluto ed angolosi, i punti $\pi/2+k\pi$ di massimo assoluto.



16) $f(x)=e^{-tgx}$

i) La funzione è continua in $R-\bigcup_{k\in Z}\{\pi/2+k\pi\}$; inoltre è periodica di periodo π e quindi basterà studiarla in $]-\pi/2, \pi/2[$;

ii) $f(x)>0\ \forall x\in]-\pi/2, \pi/2[$

iii) $\lim_{x\to\pi/2^-} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x)=+\infty$

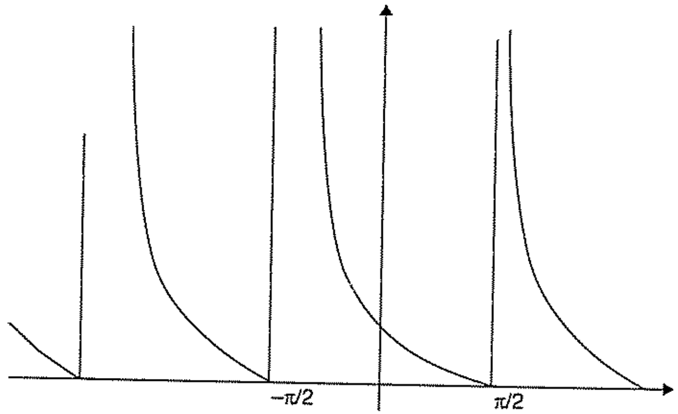
quindi $x=-\frac{\pi}{2}$ è asintoto verticale destro;

iv) $f'(x)=-e^{-tgx}(1+tg^2x)<0\ \forall x\in]-\pi/2, \pi/2[$;

v) $f''(x)=e^{-tgx}(tg^2x+1)(tgx-1)^2\geq 0\ \forall x\in]-\pi/2, \pi/2[$.

Quindi f(x) è decrescente in $]-\pi/2, \pi/2[$. Il grafico in tutto l'insieme di definizione si ottiene tenendo conto della periodicità cosicché la funzione è decrescente e convessa in ogni intervallo $]\pi/2+k\pi, \pi/2+(k+1)\pi[$; inoltre

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^+} f(x)=0, \quad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^-} f(x)=+\infty .$$



17) $f(x)=\log\left(1+\operatorname{sen}x+|\operatorname{sen}x|\right)$

i) La funzione è continua in R; inoltre f(x) è periodica di periodo 2π e quindi è sufficiente studiarla in $[-\pi, \pi]$. Si osservi che

$$f(x)=\begin{cases}\log 1=0 & x\in[-\pi, 0]\\ \log(1+2\operatorname{sen}x) & x\in[0, \pi]\end{cases}$$

e quindi si può restringere lo studio all'intervallo $[0, \pi]$;

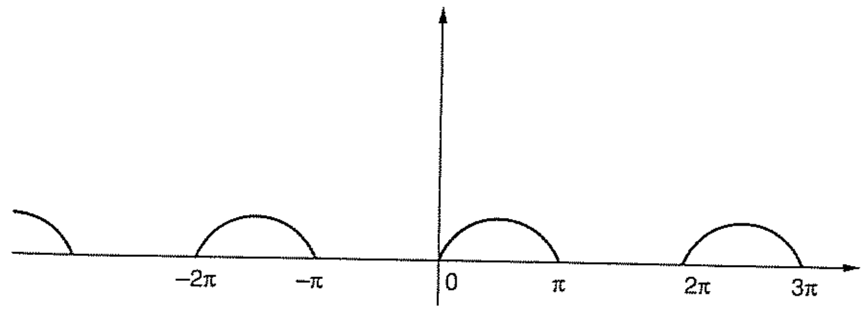
ii) $f(x)>0 \ \forall x\in]0,\pi[$;

iii) $f'(x)=\frac{2\cos x}{1+2\operatorname{sen}x}>0 \Leftrightarrow x\in[0, \pi/2[$;

iv) $f''(x)=-\frac{2(2+\operatorname{sen}x)}{(1+2\operatorname{sen}x)^2}<0 \ \forall x\in[0, \pi]$.

Quindi la funzione è concava in $[0, \pi]$, è crescente in $[0, \pi/2]$ decrescente in $[\pi/2, \pi]$ ed ha un massimo assoluto in $x=\pi/2$.

Il grafico in tutto R si ottiene dalla periodicità e pertanto f(x)=0 in ogni intervallo $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, i punti $x=\pi/2+2k\pi$ sono di massimo assoluto al variare di k in Z. Ovviamente i punti $k\pi$, con $k\in Z$ sono angolosi.



3.4 - Funzioni trigonometriche inverse

1) $f(x)=\operatorname{arcsen}\frac{x}{x+1}$

i) La funzione è continua per

$$-1\le\frac{x}{x+1}\le1 \Leftrightarrow x\ge-\frac{1}{2};$$

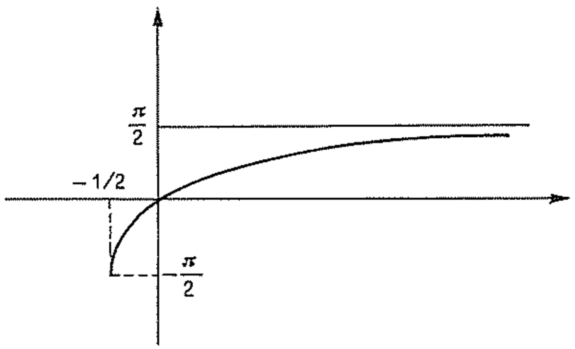
ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}>0 \Leftrightarrow x>0$;

iii) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\text{arcsen } 1=\frac{\pi}{2} \Rightarrow y=\pi/2$ è un asintoto orizz.;

iv) $f'(x)=\frac{1}{(x+1)}\,\frac{1}{\sqrt{2x+1}}>0 \quad \forall x>-\frac{1}{2}$;

v) $f''(x)=-\frac{3x+2}{(x+1)^2\,\sqrt{x+1}(2x+1)}<0 \quad \forall x>-\frac{1}{2}$.

Quindi f(x) è crescente e concava in [-1/2, +∞[.



2) $f(x)=\text{arctg}e^x$

i) La funzione è continua in tutto R;

ii) $f(x)>0 \quad \forall x\in R$;

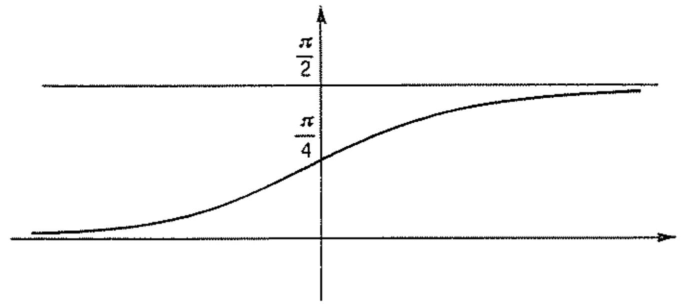
iii) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$;

quindi $y=\frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale a +∞ ed y=0 a -∞;

iv) $f'(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}}>0 \quad \forall x\in R$;

v) $f''(x)=\frac{e^x-e^{3x}}{(1+e^{2x})^2}>0 \Leftrightarrow x<0$.

Quindi f(x) è crescente in R ed è convessa in]-∞, 0] e concava in [0, +∞[; x=0 è punto di flesso.



3) $f(x)=x\,\text{arctg}x$

i) La funzione è continua in R; inoltre f(x) è pari: f(x)=f(-x); quindi è sufficiente studiare la funzione per x≥0;

ii) $f(x)>0 \quad \forall x>0$;

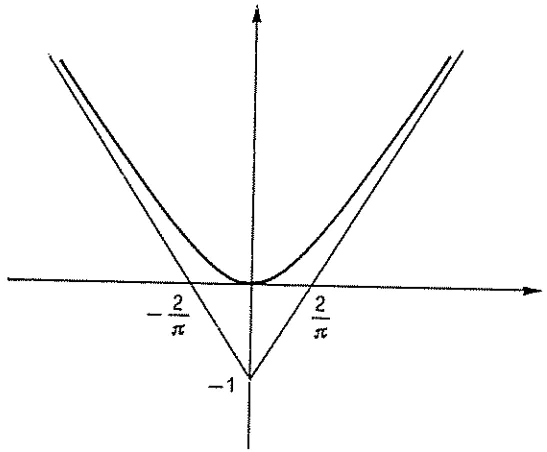
iii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} \left[f(x)-\frac{\pi}{2}x\right]=-1$

quindi $y=\frac{\pi}{2}x-1$ è un asintoto obliquo a+∞;

iv) $f'(x)=\text{arctg}x+\frac{x}{1+x^2}>0 \quad \forall x>0$;

v) $f''(x)=\frac{2}{(1+x^2)^2}>0 \quad \forall x>0$.

Quindi la funzione è crescente e convessa in [0,+∞[; essendo il suo grafico simmetrico rispetto all'asse y, f(x) sarà decrescente e convessa in]-∞, 0] e quindi x=0 è punto di minimo assoluto. Inoltre essendo $y=\frac{\pi}{2}x-1$ un asintoto obliquo a $+\infty$, $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ è un asintoto obliquo a $-\infty$.



Il lettore, per esercizio, ritrovi i risultati ottenuti studiando direttamente la funzione in tutto R senza utilizzare la proprietà di parità.

4) $f(x)=x+\operatorname{arctg}x$

i) La funzione è continua in tutto R; inoltre $f(x)$ è dispari: $f(-x)=-f(x)$; basterà allora studiare $f(x)$ per $x\geq 0$.

ii) $f(x)>0\ \forall x>0$;

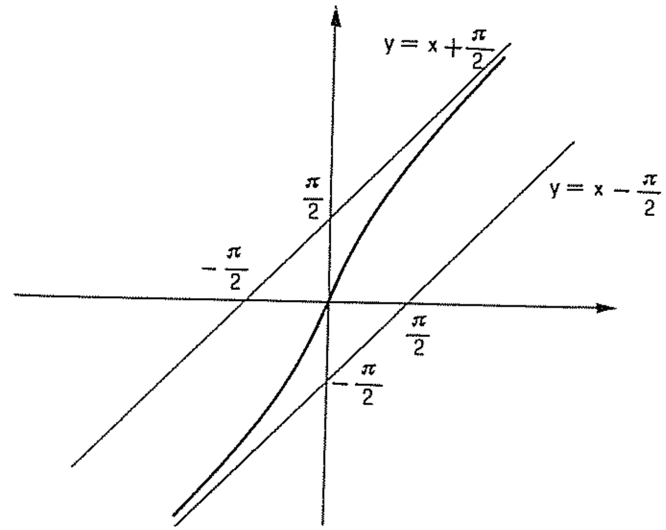
iii) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\pi/2$

quindi $y=x+\frac{\pi}{2}$ è asintoto obliquo;

iv) $f'(x)=1+\frac{1}{1+x^2}>0\ \forall x\geq 0$;

v) $f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}<0\ \forall x>0$.

Quindi $f(x)$ è crescente e concava su $[0,+\infty[$; essendo il grafico simmetrico rispetto all'origine (la funzione è infatti dispari) ne segue che f è crescente in tutto R e convessa in $]-\infty,0]$; $x=0$ è un punto di flesso. Inoltre $y=x-\frac{\pi}{2}$ sarà un asintoto obliquo a $-\infty$.



Il lettore, per esercizio, ritrovi i risultati studiando la funzione su tutto R senza utilizzare il fatto che essa è dispari.

5) $f(x)=\operatorname{arcsen}(|x|-2)$

i) La funzione è continua per $-1\leq|x|-2\leq 1 \Leftrightarrow -3\leq x\leq -1,\ 1\leq x\leq 3$.

Essendo $f(x)$ pari $(f(x)=f(-x))$ basterà studiarla per $x\in[1,3]$ dove riesce

$$f(x) = \operatorname{arcsen}(x-2)$$

Il grafico si ottiene con una traslazione da quello di arcsenx (fig. a, b):

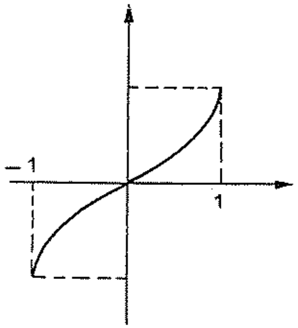


Figura a

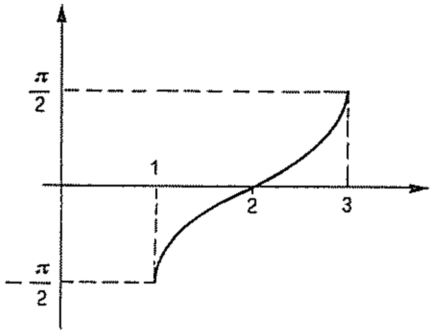


Figura b

Infine il grafico di f(x) si ottiene per simmetria rispetto all'asse y(fig. c):

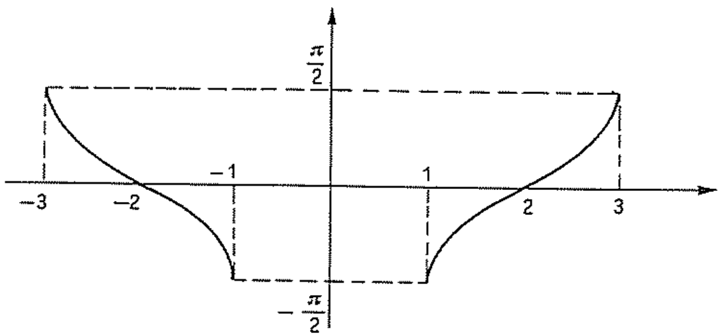


Figura c

Lo studente, per esercizio, ritrovi il grafico della funzione data con uno studio diretto.

6) $f(x)=\arcsen\sqrt{1-x^2}$

i) La funzione è continua in $[-1, 1]$; inoltre essa è pari;

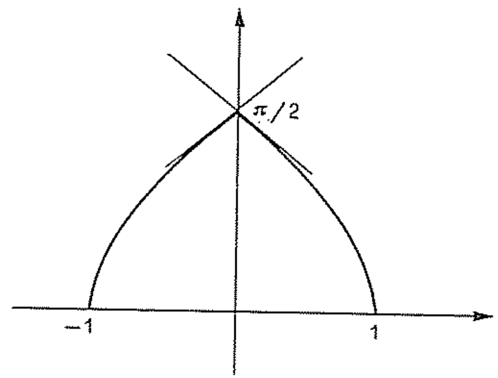
ii) $f(x)>0\ \forall x\in\,]-1, 1[$;

iii) $f'(x)=-\dfrac{x}{|x|}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}>0 \Leftrightarrow x\in\,]-1, 0[$

(si osservi che la derivata non esiste per x=0 e per x=±1);

iv) $f''(x)=-\dfrac{|x|}{\sqrt{1-x^2}\,\left(1-x^2\right)}<0\ \forall x\in\,]-1,0[\,\cup\,]0,1[$.

Quindi la funzione è crescente in $[-1,0]$, decrescente in $[0,1]$ ed ha un massimo assoluto per x=0; il minimo assoluto è raggiunto in x=±1. Inoltre f(x) è concava in $[-1,1]$.



7) $f(x)=\arcsen\sqrt{|1-x^2|}$

i) La funzione è continua in $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$; inoltre essa è pari;

ii) $f(x)\geq 0\ \forall x\in\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

Si osservi che

$$|1-x^2| = \begin{cases} 1-x^2 & -1\leq x\leq 1 \\ x^2-1 & -\sqrt{2}\leq x\leq -1,\ 1\leq x\leq\sqrt{2} \end{cases}$$

e quindi

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2} & -1\le x\le 1 \\ f_2(x) = \operatorname{arcsen}\sqrt{x^2-1} & -\sqrt{2}\le x\le 1,\ 1\le x\le\sqrt{2}\,. \end{cases}$$

Il grafico di $f_1(x)$ è stato tracciato nell'esercizio precedente. Studiamo $f_2(x)$;

iii) $f_2'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}\,\sqrt{x^2-1}} > 0 \iff x\in\,]1,\ \sqrt{2}[\,;$

iv) $f_2''(x) = \dfrac{x^4-2}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}\,(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$

e quindi

$f_2''>0 \iff x\in\,]-\sqrt{2},\ -\sqrt[4]{2}\,[\ \cup\ ]\sqrt[4]{2},\ \sqrt{2}\,[\,.$

Quindi $f_2(x)$ è crescente in $[1,\ \sqrt{2}]$ e decrescente in $[-\sqrt{2},-1]$; inoltre $f_2(x)$ è convessa in $[-\sqrt{2},\ -\sqrt[4]{2}]$ ed in $[\sqrt[4]{2},\ \sqrt{2}]$ ed è concava in $[-\sqrt[4]{2},\ -1]$ ed in $[1,\ \sqrt[4]{2}]$; i punti $\pm\sqrt[4]{2}$ sono di flesso. (fig. a)

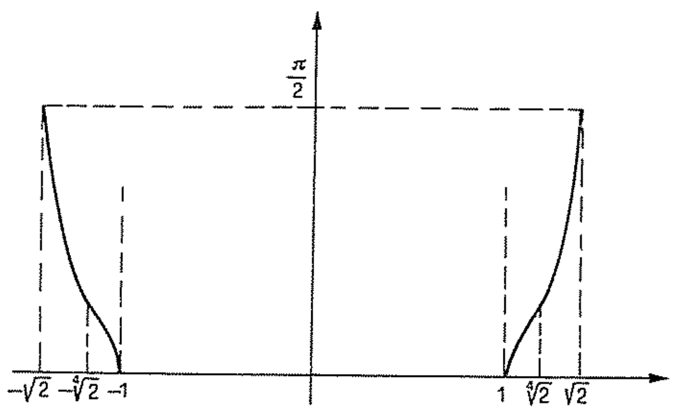


Figura a

Tenendo conto dei risultati dell'esercizio precedente si ricava allora il grafico di $f(x)$ (fig.b)

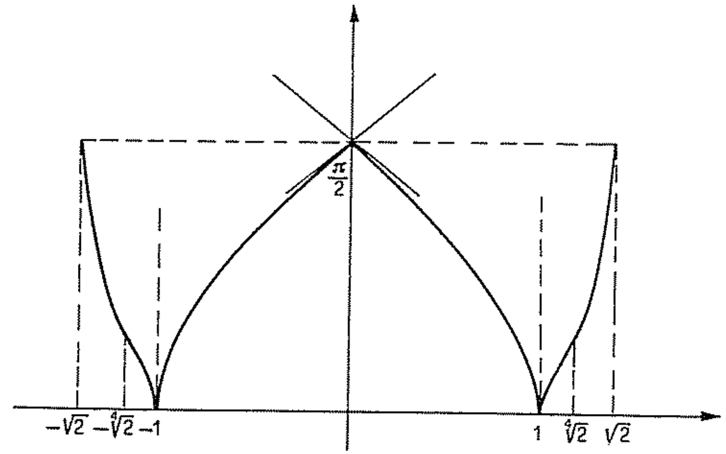


Figura b

8) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+\log x}$

i) La funzione è continua per $x\in\,]0,1/e[\ \cup\ ]1/e,+\infty[\,;$

ii) $f(x)>0 \iff 1+\log x>0 \iff x>1/e;$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ è asintoto orizzontale

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^+} f(x)=\dfrac{\pi}{2},\quad \lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^-} f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$

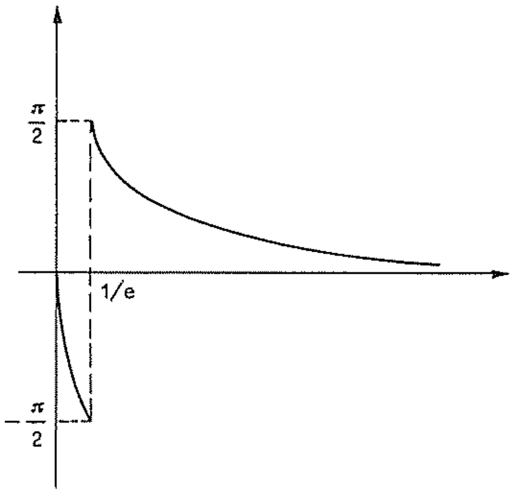
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

cosicché $x=0$ è una discontinuità eliminabile;

iv) $f'(x)=-\dfrac{1}{(1+\log x)^2+1}\cdot\dfrac{1}{x}<0\quad \forall x>0,\ x\neq\dfrac{1}{e};$

v) $f''(x)=\dfrac{[1+(1+\log x)]^2}{x^2[(1+\log x)^2+1]^2}>0\ \forall x>0,\ x\neq\dfrac{1}{e}.$

Quindi la funzione è decrescente e convessa in $]0,1/e[$ ed in $]1/e,+\infty[$.



9) $f(x)=\mathrm{arctg}\,x-\dfrac{x+1}{x^2+1}.$

La funzione è definita in tutto R; si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow y=-\frac{\pi}{2} \text{ asintoto orizzontale a } -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow y=\frac{\pi}{2} \text{ asintoto orizzontale a } +\infty.$$

Risulta

$$f'(x)=\frac{2x\,(x+1)}{(1+x^2)^2},\quad f''(x)=-2\frac{(2x^3+3x^2-2x-1)}{(1+x^2)^3}.$$

Lo studio del segno della derivata prima porta alle seguenti conclusioni

i) f è crescente in $]-\infty,-1]$ e in $[0,+\infty[$,

ii) f è decrescente in $[-1,0]$,

iii) f ha in -1 un punto di massimo relativo e in 0 un punto di minimo relativo.

Più complesso è lo studio del segno della derivata seconda che è ricondotto allo studio del segno del polinomio di terzo grado

$$g(x)=2x^3+3x^2-2x-1.$$

Semplici considerazioni sul grafico di g portano alle seguenti conclusioni (α, β, γ essendo le radici di g)

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ con $\alpha<-1<\beta<0<\gamma$
$f''(x)>0 \Leftrightarrow x<\alpha,\ \beta<x<\gamma$

Il grafico di f ha pertanto l'andamento illustrato in fig. 34.

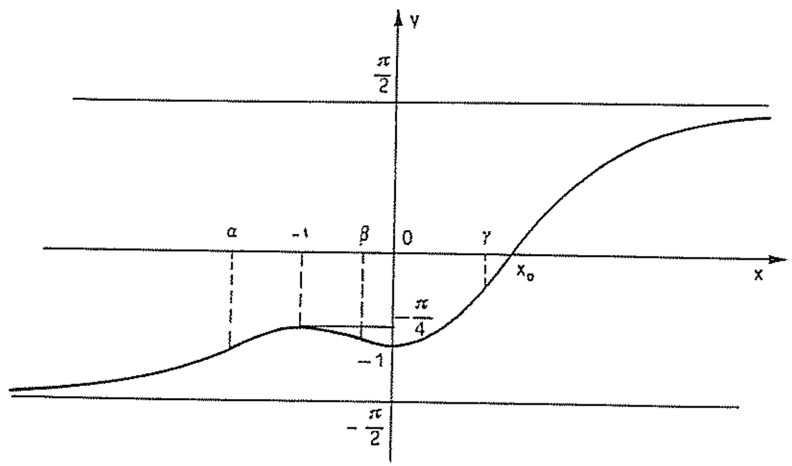


Figura 34

PROBLEMA - Dare una valutazione dell'unica soluzione x_0 dell'equazione $f(x)=0$ e delle tre soluzioni α, β, γ, dell'equazione $g(x)=0$.

CAPITOLO 3

INTEGRAZIONE INDEFINITA

1. - Nota introduttiva

Assegnati un intervallo $[a,b]$ e una funzione f a valori reali su esso definita, dicesi primitiva di f su $[a,b]$ una qualsivoglia funzione F definita e derivabile su $[a,b]$ tale che si abbia $F'(x)=f(x)$ per ogni x in $[a,b]$.

Si dice allora integrale indefinito della funzione f l'insieme costituito da tutte le primitive di f su $[a,b]$. Tale insieme si denota col simbolo

$$\int f(x)dx$$

omettendo di notare l'intervallo cui ci si riferisce.

Un corollario semplice del teorema di Lagrange assicura che se F_1 e F_2 sono primitive di f su $[a,b]$, esse differiscono per una costante, mentre è ovvio che se F è primitiva di f anche la funzione $F+C$, comunque si scelga la costante C, è ancora una primitiva.

Per tale motivo, una volta trovata una primitiva F di f su un intervallo $[a,b]$, si denota la generica primitiva con la scrittura $F+C$ e si scrive l'identità

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale assicura poi che se f è continua su [a,b] allora esiste una sua primitiva F.

Il calcolo dell'integrale indefinito di una funzione su un intervallo [a,b] consiste nell'individuare l'espressione esplicita delle sue primitive.

Si ha così ad esempio

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}+C.$$

A tale scopo è utile tenere sempre presente la tabella 1.1 degli integrali immediati e si devono saper utilizzare correntemente quattro semplici proprietà cosiddette di integrazione indefinita, che riposano su talune proprietà delle primitive.

Una prima regola cosiddetta di decomposizione in somma stabilisce che se F è primitiva di f e G è primitiva di g su [a,b], allora $\alpha F+\beta G$ è primitiva di $\alpha f+\beta g$ su [a,b] comunque si scelgono i numeri reali α e β.

Tale regola si può riassumere nella formula

$$\int \left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right) dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$$

Ad esempio [$f=\text{sen}x$, $g=e^x$, $\alpha=5$, $\beta=-3$] utilizzando la tabella 1.1 si ha:

$$\int \left(5\ \text{sen}x-3e^x\right) dx = 5 \int \text{sen}x\ dx - 3 \int e^x\ dx = -5\cos x - 3e^x+C$$

e così pure

$$\int \left[\frac{7}{x} + 2x^3 - \frac{4}{1+x^2}\right] dx =$$

$$= 7 \int \frac{1}{x}\,dx + 2 \int x^3\,dx - 4 \int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= 7 \log|x| + \frac{1}{2} x^4 - 4\,\text{arctg}x+C$$

F∘φ EST. INT

e

$$\int \left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\pi}{1+x^2}\right] dx = \sqrt{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx+\pi \int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \sqrt{3}\ \text{arcsen}x+\pi\,\text{arctg}x+C.$$

Una seconda regola, detta talora prima formula di sostituzione, stabilisce che se F è una funzione primitiva di f su [a,b] e φ è una funzione continua e derivabile da [c,d] ad [a,b], allora $F\circ\varphi$ è primitiva di $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.

Tale regola viene riassunta nella formula

$$\int f(\varphi(x))\ \varphi'(x)\,dx = \left[\int f(t)\,dt\right]_{t=\varphi(x)}$$

o anche

$$\int f(\varphi(x))\ d\varphi(x) = \left[\int f(t)\,dt\right]_{t=\varphi(x)}$$

nel senso che, per l'appunto, per ottenere una primitiva di $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ occorre cercare una primitiva di $f(t)$ sostituire materialmente alla variabile t l'espressione $\varphi(x)$.

Ad esempio calcoliamo sempre utilizzando la tabella 1.1 l'integrale indefinito

$$\int (\text{sen}x)^3 \cos x\,dx$$

che è del tipo

$$\int f(\varphi(x))\ \varphi'(x)\,dx$$

con $f(t)=t^3$, $\varphi(x)=\text{sen}x$, $\varphi'(x)=\cos x$.

Si ha:

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4}+C$$

cosicché l'integrale di partenza si ottiene sostituendo $\varphi(x)$ al posto di t:

$$\int (\mathrm{sen}x)^3 \cos x \, dx = \frac{(\mathrm{sen}x)^4}{4}+C.$$

In sintesi

$$\int (\mathrm{sen}x)^3 \cos x \, dx = \left[\int t^3 dt\right]_{t=\mathrm{sen}x} = \frac{(\mathrm{sen}x)^4}{4}+C.$$

A titolo di ulteriore esempio:

$$\int e^{\mathrm{tg}x}\frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \left[\int e^t \, dt\right]_{t=\mathrm{tg}x} = e^{\mathrm{tg}x}+C$$

con $f(t)=e^t$, $\varphi(x)=\mathrm{tg}x$, $\varphi'(x)=1/\cos^2 x$;

$$\int 2x\cos x^2 dx = \left[\int \cos t \, dt\right]_{t=x^2} = \mathrm{sen}x^2+C$$

con $f(t)=\cos t$, $\varphi(x)=x^2$, $\varphi'(x)=2x$.

Una terza regola detta regola di integrazione per parti stabilisce che se f e g sono funzioni continue con la derivata prima allora una primitiva di $f'\cdot g$ è data dalla differenza tra $f\cdot g$ e la primitiva di $f\cdot g'$. In simboli

$$\int f'(x)\, g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Il termine f' del prodotto f'g viene detto fattore differenziale, il termine g invece fattore finito. Tale regola viene simbolicamente riassunta anche nel modo seguente

$$\int g(x)\, d(f(x)) = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, d(g(x)).$$

Ad esempio nel caso dell'integrale

$$\int x\, e^x \, dx$$

ponendo $g(x)=x$ ed $f'(x)=e^x$ si ha $g'(x)=1$ ed $f(x)=e^x$: pertanto

$$\int x\, e^x \, dx = x\, e^x - \int e^x \, dx$$

e quindi il calcolo dell'integrale di partenza è ricondotto al calcolo dell'integrale (immediato) di e^x; in definitiva si ha:

$$\int x\, e^x \, dx = x\, e^x - e^x+C.$$

Si osservi che *un'errata scelta del fattore differenziale e del fattore finito può complicare* (invece di semplificare) *il calcolo*. Così, nell'esempio precedente, ponendo $g(x)=e^x$, $f'(x)=x$ si ha $g'(x)=e^x$ ed $f(x)=x^2/2$; pertanto la formula di integrazione per parti dà:

$$\int x\, e^x \, dx = \frac{x^2}{2}\, e^x - \int \frac{x^2}{2}\, e^x \, dx$$

e l'integrale a secondo membro è più complesso di quello di partenza!

A titolo di ulteriore esempio si ha

$$\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x}{2}\, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}+C$$

con la scelta: $g(x)=\log x$, $f'(x)=x$ (e quindi $g'(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{x^2}{2}$).

Un'ultima regola infine detta talora seconda regola di integrazione per sostituzione stabilisce che se φ è una funzione continua e derivabile da [c,d] su [a,b] insieme con la sua inversa φ^{-1} e se F è la primitiva di $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ su [c,d] allora $F\circ\varphi^{-1}$ è primitiva di f su [a,b]. In simboli

$$\int f(x)\, dx = \left[\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

nel senso che per cercare una primitiva di f si può cercare un'opportuna sostituzione $x=\varphi(t)$ tale che si sappia calcolare la primitiva di $f(\varphi(t))\varphi'(t)$; in questa primitiva occorre sostituire materialmente la t col valore $\varphi^{-1}(x)$ per ottenere la primitiva desiderata.

Osserviamo che spesso entrambe le regole di integrazione per sostituzione vengono richiamate attraverso la dizione 'integrando per sostituzione'.

Osserviamo ancora che nell'applicare la formula può essere utile un artificio mnemonico: individuata la funzione φ i primi passi da compiere sono sostituire la x con $\varphi(t)$ nell'integrando e dx con $\varphi'(t)dt$.

Per fornire un semplice esempio di applicazione della (seconda) regola di sostituzione calcoliamo il seguente integrale:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx;$$

ponendo $x=\varphi(t)=t^2$ si ha $dx=\varphi'(t)dt=2tdt$ e quindi

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = \left[\int \frac{t}{1+t^2}\,2t\,dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)=\sqrt{x}}.$$

Pertanto il calcolo dell'integrale di partenza è ricondotto al calcolo di

$$2\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt =$$
$$= 2\left[\int dt - \int \frac{1}{t^2+1}\,dt\right] = 2\,t-2\operatorname{arctg}t+C.$$

Pertanto

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = [2t-2\operatorname{arctg}t]_{t=\sqrt{x}}+C=$$
$$= 2\sqrt{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C.$$

Spesse volte la sostituzione che viene naturale effettuare si presenta sotto la forma $t=\varphi(x)$.

La funzione φ giocherà allora il ruolo della funzione φ^{-1} che compare nella formula e per ottenere la funzione φ occorrerà pertanto invertire (laddove possibile) la φ.

Calcoliamo ad esempio l'integrale indefinito

$$\int x^3\,e^{x^2}\,dx;$$

se si pone $x^2=t$ invertendo si ha $x=\sqrt{t}$, $dx=(1/2\sqrt{t})\,dt$ e quindi l'integrale dato si ottiene calcolando

$$\left(\int t^{3/2}\,e^t\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt\right)_{t=x^2} = \left(\frac{1}{2}\int t\,e^t\,dt\right)_{t=x^2}.$$

L'ultimo integrale è stato da noi già calcolato per parti e vale

$$\int t\,e^t = t\,e^t-e^t+C$$

e pertanto

$$\int x^3\,e^{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\,(te^t-e^t)\right]_{t=x^2}+C =$$
$$= \frac{1}{2}\,(x^2\,e^{x^2} - e^{x^2})+C.$$

In generale nella ricerca dell'integrale indefinito di una funzione non viene precisato l'intervallo su cui esso viene cercato in quanto lo si assume essere un qualsiasi intervallo di continuità dell'integrando. In maniera analoga nell'applicare le regole di sostituzione e per parti si assume per lo più di essersi ristretti ad intervalli ove sono soddisfatte le ipotesi di applicabilità.

Attraverso l'uso delle regole di integrazione indefinita e la conoscenza della tabella degli integrali immediati si può arrivare a scrivere l'integrale indefinito di una qualsivoglia funzione razionale (cioè di una funzione che sia rapporto di due polinomi) attraverso funzioni elementari (cfr. paragrafo 5).

Questo risultato insieme con opportune sostituzioni consente di calcolare l'integrale indefinito di un vasto numero di classi di funzioni (cfr. paragrafo 6).

Tale procedimento generale risulta tuttavia spesso un po' laborioso nei calcoli e porta pertanto alla generazione di errori tecnici.

In molte situazioni, semplici artifici "ad hoc" consentono con più speditezza di stabilire qual è l'integrale indefinito di una funzione. Un certo numero di essi verrà presentato nei paragrafi dal 2 al 5.

Si consiglia a tale proposito di ricordare il procedimento e di non memorizzare il risultato.

TAB. 1.1: integrali notevoli immediati

1) $\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}+C$

2) $\int \frac{1}{x} \, dx = \lg|x|+C$

3) $\int e^x \, dx = e^x+C$

4) $\int \cos x \, dx = \mathrm{sen}\, x+C$

5) $\int \mathrm{sen}\, x \, dx = -\cos x+C$

6) $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \mathrm{tg}\, x+C$

7) $\int \frac{1}{\mathrm{sen}^2 x} \, dx = -\frac{1}{\mathrm{tg}\, x}+C$

8) $\int \cosh x \, dx = \mathrm{senh}\, x+C$

9) $\int \mathrm{senh}\, x \, dx = \cosh x+C$

10) $\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \mathrm{tgh}\, x+C$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \mathrm{arcsen}\, x+C$

12) $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \mathrm{arctg}\, x+C$

13) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \mathrm{settsenh}\, x+C=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$

14) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \mathrm{settcosh}\, x+C=\lg\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$

15) $\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \mathrm{setttgh}\, x+C=\frac{1}{2} \lg \frac{1+x}{1-x}+C$

2. Integrazione con la prima regola di sostituzione

TAB. 2.1: i casi immediati

1) $\int f(x)^\alpha \, f'(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+1} \left[f(x)\right]^{\alpha+1}+C$

2) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \lg|f(x)|+C$

3) $\int e^{f(x)} \, f'(x)\,dx = e^{f(x)}+C$

4) $\int \cos f(x) \, f'(x)\,dx = \mathrm{sen}\, f(x)+C$

5) $\int \mathrm{sen}\, f(x) \, f'(x)\,dx = -\cos f(x)+C$

6) $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} \, dx = \mathrm{tg}\, f(x)+C$

7) $\int \cosh f(x) \, f'(x)\,dx = \mathrm{senh}\, f(x)+C$

8) $\int \mathrm{senh}\, f(x) \, f'(x)\,dx = \cosh f(x)+C$

9) $\int f'(x) \cdot \frac{1}{\cosh^2 f(x)} \, dx = \mathrm{tgh}\, f(x)+C$

10) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} \, dx = \mathrm{arcsen}\, f(x)+C$

11) $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} \, dx = \mathrm{arctg}\, f(x)+C$

12) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} \, dx = \mathrm{settsenh}\, f(x)+C=\lg\left(f(x)+\sqrt{1+f^2(x)}\right)+C$

13) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}} \, dx = \mathrm{settcosh}\, f(x)+C=\lg\left(f(x)+\sqrt{f^2(x)-1}\right)+C$

14) $\int \frac{f'(x)}{1-f^2(x)} \, dx = \mathrm{setttgh}\, f(x)+C = \frac{1}{2} \lg \frac{1+f(x)}{1-f(x)}+C$

2.1 Integrazione con l'uso delle tabelle

Si calcolino i seguenti integrali indefiniti

1) $\int x^5 \, dx$ 2) $\int x \sqrt[3]{x} \, dx$

3) $\int \operatorname{sen}^4 x \cos x \, dx$ 4) $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} \, dx$

5) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \, dx$ 6) $\int 2x \cos x^2 \, dx$

7) $\int \frac{\operatorname{sen} \log |x|}{x} \, dx$ 8) $\int \frac{e^x}{\cos^2 e^x} \, dx$

9) $\int 3x^2 \cosh x^3 \, dx$ 10) $\int 2x \operatorname{senh}(x^2+5)$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}} \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$ 12) $\int \frac{3x^2}{1+x^6} \, dx$

13) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}} \, dx$ 14) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} \, dx$

15) $\int \frac{3x^2}{1-x^6} \, dx$ 16) $\int \frac{\cos \lg |x|}{x} \, dx$

17) $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx$ 18) $\int e^x \operatorname{sen} e^x \, dx$

19) $\int \sqrt{x} \cos \sqrt{x^3} \, dx$ 20) $\int \frac{1}{x \lg |x|} \, dx$

21) $\int \frac{\lg |x|}{x} \, dx$ 22) $\int \sqrt{2x+3} \, dx$

23) $\int \frac{1}{(3x-2)^2} \, dx$ 24) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$

25) $\int \frac{x \arcsin x^2}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$ 26) $\int \frac{1}{\sqrt{1-\arcsin^2 x}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

27) $\int \sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \, dx$ 28) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x} \, dx$

29) $\int \frac{x}{1-x^4} \, dx$ 30) $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}} \, dx$

31) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ 32) $\int \frac{x}{1+x^4} \, dx$

33) $\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{(x-\cos x)^2} \, dx$ 34) $\int \sqrt{1+\cos^2 x} \operatorname{sen} 2x \, dx$

35) $\int \frac{1}{x \sqrt{1+\lg |x|}} \, dx$ 36) $\int \frac{\operatorname{arctg} x \sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} \, dx$

37) $\int \frac{e^{\sqrt{\lg x}}}{x \sqrt{\lg x}} \, dx$ 38) $\int \frac{1}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x} \, dx$

39) $\int \sqrt{(e^x+1)^3} \, e^x \, dx$ 40) $\int \frac{\lg x}{(1+\lg^4 x)x} \, dx$

41) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \operatorname{sen} \sqrt{e^x+1} \, dx$ 42) $\int \operatorname{sen} 3x \, dx$

43) $\int \cos 5x \, dx$ 44) $\int x \sqrt{x^2+1} \, dx$

45) $\int \frac{1}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} \, dx$ 46) $\int \left(e^{2x} + \frac{7}{3x+5}\right) dx$

47) $\int \left[\frac{2}{(5x+1)^5} - \frac{3}{\sqrt{2x+6}}\right] dx$ 48) $\int x \left(\sqrt{x^2+1} + e^{-x^2} - \frac{3}{\cos^2 x^2}\right) dx$

49) $\int \frac{1}{(6x+7)^8} \, dx$ 50) $\int \frac{1}{\operatorname{sen} 2x} \, dx$

Risultati

1) $F(x) = \frac{x^6}{6} + C$

2) $F(x) = \frac{3}{7} x^2 \sqrt[3]{x} + C$

3) $F(x) = \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C$

4) $F(x) = \log(1+\operatorname{sen} x) + C$

5) $F(x) = e^{\sqrt{x}} + C$

6) $F(x) = \operatorname{sen} x^2 + C$

7) $F(x) = -\cos \log |x| + C$

8) $F(x) = \operatorname{tg} e^x + C$

9) $F(x) = \operatorname{senh} x^3 + C$

10) $F(x) = \cosh (x^2+5) + C$

11) $F(x) = \operatorname{arcsen} \operatorname{tg} x + C$

12) $F(x) = \operatorname{arctg} x^3 + C$

13) $F(x) = \operatorname{settsenh} \operatorname{sen} x + C$

14) $F(x) = \operatorname{settcosh} e^x + C$

15) $F(x) = \operatorname{settgh} x^3 + C$

16) $F(x) = \operatorname{sen} \lg |x| + C$

17) $F(x) = e^{\operatorname{sen} x} + C$

18) $F(x) = -\cos e^x + C$

19) $F(x) = \frac{2}{3} \operatorname{sen} \sqrt{x^3} + C$

20) $F(x) = \lg \left|\log |x|\right| + C$

21) $F(x) = \frac{\lg^2 x}{2} + C$

22) $F(x) = \frac{1}{3} \sqrt{(2x+3)^3} + C$

23) $F(x) = -\frac{1}{3(3x-2)} + C$

24) $F(x) = \operatorname{arcsen} \frac{x}{2} + C$

25) $F(x) = \frac{1}{4} \operatorname{arcsen}^2 x^2 + C$

26) $F(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{arcsen} x) + C$

27) $F(x) = \frac{2}{3} \operatorname{settsenh} \sqrt{x^3} + C$

28) $F(x) = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$

29) $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{setttgh} x^2 + C$

30) $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{settcosh} x^2 + C$

31) $F(x) = -\sqrt{1-x^2} + C$

32) $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C$

33) $F(x) = -\frac{1}{x-\cos x} + C$

34) $F(x) = -\frac{2}{3} \left(\cos^2 x+1\right)^{\frac{3}{2}} + C$

35) $F(x) = 2\sqrt{1+\log |x|} + C$

36) $F(x) = \frac{2}{5} (\operatorname{arctg} x)^2 \sqrt{\operatorname{arctg} x} + C$

37) $F(x) = 2 e^{\sqrt{\log |x|}} + C$

38) $F(x) = \log |\operatorname{arctg} x| + C$

39) $F(x) = \frac{4}{7} (e^x+1) \sqrt[4]{(e^x+1)^3} + C$

40) $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \log^2 x + C$

41) $F(x) = -2\cos\sqrt{e^x+1}+C$

42) $F(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x+C$

43) $F(x) = \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,5x+C$

44) $F(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$

45) $F(x) = 2\,\mathrm{tg}\sqrt{x}+C$

46) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}+\frac{7}{3}\log|3x+5|+C$

47) $F(x) = -\frac{1}{10(5x+1)^4}-3\sqrt{2x+6}+C$

48) $F(x) = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}e^{-x^2}-\frac{3}{2}\,\mathrm{tg}x^2+C$

49) $F(x) = -\frac{1}{42}\frac{1}{(6x+7)^7}$

50) $F(x) = \frac{1}{2}\log|\mathrm{tg}x|+C$

Soluzioni

Per risolvere gli esercizi proposti occorre riconoscere in essi casi particolari della tabella 2.1

1) Dalla 1) della tabella 1.1 con $\alpha=5$ si ottiene

$$\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6}+C.$$

2) Osservato che $x\sqrt[3]{x} = x^{4/3}$ l'integrale si calcola utilizzando la 1) della tabella 1.1 con $\alpha=4/3$

$$\int x\sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{4/3}\,dx = \frac{x^{7/3}}{7/3}+C = \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x}+C.$$

3) Osservato che

$$\int \mathrm{sen}^4x\cos x\,dx = \int \mathrm{sen}^4x\,d(\mathrm{sen}x),$$

l'integrale si calcola applicando la formula 1) della tabella 2.1 con $\alpha=4$:

$$\int \mathrm{sen}^4x\cos x\,dx = \frac{(\mathrm{sen}x)^5}{5}+C.$$

4) Osservato che $\cos x$ è la derivata di $1+\mathrm{sen}x$ dalla 2) della tabella 2.1 si ha:

$$\int \frac{\cos x}{1+\mathrm{sen}x}\,dx = \int \frac{1}{1+\mathrm{sen}x}\,d(1+\mathrm{sen}x) = \log(1+\mathrm{sen}x)+C.$$

5) Osservato che $1/2\sqrt{x}$ è la derivata di $\sqrt{x}$ dalla 3) della tabella 2.1 si ottiene

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx = \int e^{\sqrt{x}}\,d(\sqrt{x}) = e^{\sqrt{x}}+C.$$

6) Dalla 4) della tabella 2.1 si ottiene tenuto conto che $2x$ è la derivata di x^2:

$$\int 2x\cos x^2\,dx = \int \cos x^2\,d(x^2) = \mathrm{sen}x^2+C.$$

7) Dalla 5) della tabella 2.1 con $f(x)=\log|x|$ ed $f'(x)=\frac{1}{x}$ si ottiene

$$\int \frac{\mathrm{sen}(\log|x|)}{x}\,dx = \int \mathrm{sen}(\log|x|)\,d(\log|x|) = -\cos\log|x|+C.$$

8) Dalla 6) della tabella 2.1 con $f(x)=e^x$ ed $f'(x)=e^x$ si ha

$$\int \frac{e^x}{\cos^2(e^x)}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2(e^x)}\,d(e^x) = \mathrm{tg}\,e^x+C.$$

9) Dalla 7) della tabella 2.1 con $f(x)=x^3$ ed $f'(x)=3x^2$ si ha

$$\int 3x^2 \cosh x^3 \, dx = \int \cosh x^3 \, d\left(x^3\right) = \operatorname{senh} x^3+C.$$

10) Dalla 8) della tabella 2.1 con $f(x)=x^2+5$ ed $f'(x)=2x$ si ha

$$\int 2x \operatorname{senh}\left(x^2+5\right) dx = \int \operatorname{senh}\left(x^2+5\right) d\left(x^2+5\right) = \cosh\left(x^2+5\right)+C.$$

11) Dalla 10) della tabella 2.1 con $f(x)=\operatorname{tg}x$ ed $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{arcsen} \operatorname{tg}x+C.$$

12) Dalla 11) della tabella 2.1 con $f(x)=x^3$ ed $f'(x)=3x^2$ si ha

$$\int \frac{3x^2}{1+x^6} dx = \int \frac{1}{1+\left(x^3\right)^2} d\left(x^3\right) = \operatorname{arctg}x^3+C.$$

13) Dalla 12) della tabella 2.1 con $f(x)=\operatorname{sen}x$ ed $f'(x)=\cos x$ si ha

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}} d(\operatorname{sen}x) = \operatorname{settsenh} \operatorname{sen}x+C.$$

14) Dalla 13) della tabella 2.1 con $f(x)=f'(x)=e^x$ si ha

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} d\left(e^x\right) = \operatorname{settcosh}\left(e^x\right)+C.$$

15) Dalla 14) della tabella 2.1 con $f(x)=x^3$ ed $f'(x)=3x^2$ si ha

$$\int \frac{3x^2}{1-x^6} dx = \int \frac{1}{1-\left(x^3\right)^2} dx^3 = \operatorname{setttgh}x^3+C.$$

16) Si osservi che

$$\int \frac{\cos \lg|x|}{x} dx = \int \cos \lg|x| \, d\left(\lg|x|\right)$$

e dunque si può applicare la formula che dà l'integrale 4) della tabella 2.1.

17) Si osservi che

$$\int e^{\operatorname{sen}x} \cos x \, dx = \int e^{\operatorname{sen}x} \, d(\operatorname{sen}x).$$

Si può allora applicare la formula che dà l'integrale 3) della tabella 2.1.

18) Si osservi che

$$\int e^x \cdot \operatorname{sen}e^x = \int \operatorname{sen}e^x \, d\left(e^x\right).$$

Si può allora applicare la formula che dà l'integrale 5) della tabella 2.1.

19) Si osservi che

$$\int \sqrt{x} \cos\sqrt{x^3} \, dx = \frac{2}{3} \int \cos\sqrt{x^3} \, d\left(\sqrt{x^3}\right).$$

Si può allora applicare la formula che dà l'integrale 4) della tabella 2.1.

20) Si osservi che

$$\int \frac{1}{x \lg|x|} dx = \int \frac{1}{\lg|x|} d\left(\lg|x|\right).$$

Si può allora applicare la formula che dà l'integrale 2) della tabella 2.1.

21) Si osservi che

$$\int \frac{\lg x}{x} dx = \int \lg|x| \, d\left(\lg|x|\right).$$

Si puó allora applicare la formula che dà l'integrale 1) della tabella 2.1

22) Si osservi che

$$\int \sqrt{2x+3}\, dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{2x+3}\, d(2x+3).$$

Si puó allora applicare la formula che dà l'integrale 1) della tabella 2.1.

23) Si osservi che

$$\int \frac{1}{(3x-2)^2}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(3x-2)^2}\, d\,(3x-2).$$

Si puó allora applicare la formula che dà l'integrale 1) della tabella 2.1.

24) Si osservi che

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}}\, d\left(\frac{x}{2}\right).$$

Si puó allora applicare la formula che dà l'integrale 10) della tabella 2.1.

25) Si osservi che

$$\int \frac{x\ \mathrm{arcsen}x^2}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{arcsen}x^2}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\, d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{arcsen}y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy\right)_{y=x^2}$$

grazie alla prima regola di sostituzione.
D'altro canto

$$\int \frac{\mathrm{arcsen}y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \int \mathrm{arcsen}y\ d\,(\mathrm{arcsen}\ y)$$

e pertanto grazie alla formula che dà l'integrale 1) della tabella 2.1 si ha

$$\int \frac{\mathrm{arcsen}y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \frac{1}{2}\,\mathrm{arcsen}^2 y+C.$$

Si ottiene così

$$\int \frac{x\ \mathrm{arcsen}\ x^2}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \frac{1}{4}\,\mathrm{arcsen}^2\ x^2+C.$$

26) Si osservi che

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{arcsen}^2 y}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{arcsen}^2 x}}\, d\,(\mathrm{arcsen}\ x).$$

Si puó allora applicare la formula che dà l'integrale 10) della tabella 2.1.

27) Si osservi che

$$\int \sqrt{x}\,\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{x^3})^2}}\, d\,(\sqrt{x^3}).$$

Si puó applicare la formula che dà l'integrale 12) della tabella 2.1.

28) Si osservi che

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{1+x}\, dx = 2\int \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\, d\,(\sqrt{x}).$$

Si puó allora applicare la formula che dà l'integrale 11) della tabella 2.1.

29) Si osservi che

$$\int \frac{x}{1-x^4}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-(x^2)^2}\, d\,(x^2).$$

Si puó applicare la formula che dà l'integrale 14) della tabella 2.1.

30) Si osservi che

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{(x^2)^2-1}}\,d\,(x^2).$$

Si può applicare la formula che dà l'integrale **13)** della tabella 2.1.

31) Si osservi che

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,d\,(1-x^2).$$

Si può applicare la formula che dà l'integrale **1)** della tabella 2.1.

32) Si osservi che

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(x^2)^2}\,d\,(x^2).$$

Si può applicare la formula che dà l'integrale **11)** della tabella 2.1.

33) Si osservi che

$$\int \frac{1+\mathrm{sen}x}{(x-\cos x)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-\cos x)^2}\,d\,(x-\cos x).$$

Si può applicare la formula che dà l'integrale **1)** della tabella 2.1.

34) Si osservi che

$$\int \sqrt{\cos^2 x+1}\ \mathrm{sen}2x\,dx = \int \sqrt{\cos^2 x+1}\ 2\mathrm{sen}x\cos x\,dx =$$
$$= -\int \sqrt{\cos^2 x+1}\ d\,(1+\cos^2 x).$$

Si può applicare la formula che dà l'integrale **1)** della tabella 2.1.

35) Si osservi che

$$\int \frac{1}{x}\,\frac{1}{\sqrt{1+\log|x|}}\,dx = \int (1+\log|x|)^{-1/2}\cdot d\,(1+\log|x|)$$

Si può allora applicare la formula **1)** della tabella 2.1 con $\alpha=-1/2$ ed $f(x)=1+\log|x|$.

36) Applicare la **1)** della tabella 2.1.

37) Applicare la **3)** della tabella 2.1.

38) Applicare la **2)** della tabella 2.1.

39) Applicare la **1)** della tabella 2.1.

40) Applicare la **11)** della tabella 2.1.

41) Applicare la **5)** della tabella 2.1.

42) Applicare la **5)** della tabella 2.1.

43) Applicare la **4)** della tabella 2.1.

44) Applicare la **1)** della tabella 2.1.

45) Applicare la **6)** della tabella 2.1.

46) Spezzare l'integrale nella somma di due integrali ed applicare le **2)** e **3)** della tabella 2.1.

47) Spezzare l'integrale nella somma di due integrali ed applicare la **1)** della tabella 2.1.

48) Spezzare l'integrale nella somma di tre integrali ed applicare la **1)**, la **3)** e la **6)** della tabella 2.1.

49) Moltiplicare e dividere per 6 e poi applicare la **1)** della tabella 2.1.

50) Osservato che $\dfrac{1}{\mathrm{sen}2x} = \dfrac{1}{2\,\mathrm{sen}x\cos x} = \dfrac{1}{2\,\mathrm{tg}x}\,\dfrac{1}{\cos^2 x}$ l'integrale si calcola applicando la **2)** della tabella 2.1.

2.2 Alcuni casi notevoli di applicazione della prima regola di sostituzione

Si calcolino i seguenti integrali indefiniti

1) $\int \frac{1}{tgx}\,dx$ 2) $\int \frac{1}{tghx}\,dx$

3) $\int \frac{1}{senx}\,dx$ 4) $\int \frac{1}{senhx}\,dx$

5) $\int \frac{1}{cosx}\,dx$ 6) $\int \frac{1}{coshx}\,dx$

7) $\int tgx\,dx$ 8) $\int tghx\,dx$

9) $\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx$ 10) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+px+q}}\,dx$ 12) $\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}\,dx$

13) $\int \frac{mx+n}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx$ 14) $\int \frac{mx+n}{\sqrt{-x^2+px+q}}\,dx$

15) $\int \frac{mx+n}{ax+b}\,dx$

Risultati

1) $F(x) = lg\,|senx|+C$

2) $F(x) = lg\,|senhx|+C$

3) $F(x) = lg\,\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$

4) $F(x) = lg\,\left|tgh\frac{x}{2}\right|+C$

5) $F(x) = 2\ setttgh\ tg\,\frac{x}{2}+C$

6) $F(x) = 2\ arctg\ tgh\,\frac{x}{2}$

7) $F(x) = -lg\,|cosx|+C$

8) $F(x) = lg\,|coshx|+C$

9) $F(x) = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\ arctg\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)+C$ se $p^2-4q<0$

$= -\frac{2}{\sqrt{p^2-4q}}\ setttgh\left(\frac{2x+p}{\sqrt{p^2-4q}}\right)+C$ se $p^2-4q>0$

$= -\frac{2}{2x+p}+C$ se $p^2-4q=0$

10) $F(x) = settsenh\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)+C$ se $p^2-4q<0$

$= settcosh\left(\frac{2x+p}{\sqrt{p^2-4q}}\right)+C$ se $p^2-4q>0$

$= \begin{cases} lg\,(2x+p)+C & x>-\frac{p}{2} \\ -lg\,|2x+p|+C & x<-\frac{p}{2} \end{cases}$ se $p^2-4q=0$

11) $F(x) = arcsen\,\frac{2x-p}{\sqrt{4q+p^2}}+C$

12) $F(x) = \frac{m}{2}\,lg\,|x^2+px+q| + \frac{2n-mp}{\sqrt{4q-p^2}}\ arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$ se $p^2-4q<0$

$= \frac{m}{2}\,lg\,|x^2+px+q| + \frac{mp-2n}{\sqrt{p^2-4q}}\ setttgh\,\frac{2x+p}{\sqrt{p^2-4q}}+C$ se $p^2-4q>0$

$= m\,lg\,|2x+p| + \frac{mp-2n}{(2x+p)}+C$ se $p^2-4q=0$

13) $F(x) = m\sqrt{x^2+px+q} + \frac{2n-mp}{2}\,lg\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right)+C$

14) $F(x) = -m\sqrt{-x^2+px+q} + \frac{2n+mp}{2} \operatorname{arcsen} \frac{2x-p}{\sqrt{4q+p^2}} + C$

15) $F(x) = \frac{m}{a}x + \frac{1}{a^2}(na-mb) \log|ax+b| + C$

Soluzioni

1) Si osservi che

$$\int \frac{1}{tgx}\,dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, d(\operatorname{sen} x)$$

e quindi si può applicare la formula che dà l'integrale **2)** della tabella 2.1.

2) Si osservi che

$$\int \frac{1}{tgx}\,dx = \int \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{senh} x}\, d(\operatorname{senh} x)$$

e quindi si può subito applicare la formula che dà l'integrale **2)** della tabella 2.1.

3) Si osservi che

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\operatorname{sen} x/2 \,\cos x/2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x/2}\,\frac{1}{tgx/2}\,dx = \int \frac{1}{tgx/2}\, d\left(tg\,\frac{x}{2}\right)$$

e quindi si può applicare la formula che dà l'integrale **2)** della tabella 2.1.

4) Si osservi che per la formula di duplicazione

$$\int \frac{1}{\operatorname{senh} x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\operatorname{senh} x/2 \,\cosh x/2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\cosh\, x/2)^2}\,\frac{1}{tghx/2}\,dx = \int \frac{1}{tgh\, x/2}\, d\left(tgh\,\frac{x}{2}\right)$$

e quindi si può applicare la formula che dà l'integrale **2)** della tabella 2.1.

5) Si osservi che per la formula di duplicazione

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x/2 - \operatorname{sen}^2 x/2}\,dx =$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x/2}\,\frac{1}{1-tg^2 x/2}\,dx = 2\int \frac{1}{1-tg^2 x/2}\, d\left(tg\,\frac{x}{2}\right)$$

e quindi si può applicare la formula che dà l'integrale **14)** della tabella 2.1.

6) Si osservi che per la formula di duplicazione

$$\int \frac{1}{\cosh x}\,dx = \int \frac{1}{(\cosh x/2)^2+(\operatorname{senh} x/2)^2}\,dx =$$
$$= \int \frac{1}{(\cosh x/2)^2}\,\frac{1}{1+(tgh\ x/2)^2}\,dx = 2\int \frac{1}{1+(tgh\ x/2)}\, d\left(tgh\,\frac{x}{2}\right)$$

e quindi si può applicare la formula che dà l'integrale **11)** della tabella 2.1.

7) Si osservi che

$$\int tgx\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\, d(\cos x)$$

e quindi si può applicare la formula che dà l'integrale **2)** della tabella 2.1.

8) Si osservi che

$$\int tghx\,dx = \int \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\,dx = \int \frac{1}{\cosh x}\, d(\cosh x)$$

e quindi si può applicare la formula che dà l'integrale **2)** della tabella 2.1.

9) Si osservi che

$$\int \frac{1}{x^2+px+q} = \int \frac{1}{x^2+px+p^2/4+q-p^2/4}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{(x+p/2)^2+q-p^2/4}\,dx = 4\int \frac{1}{(2x+p)^2+4q-p^2}\,dx.$$

Se ora $4q-p^2>0$ si ha

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \frac{4}{4q-p^2}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2+1}\,d\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)$$

e si può allora applicare la formula che dà l'integrale **11)** della tabella 2.1.
Se invece $4q-p^2<0$ si ha

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \frac{4}{p^2-4q}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+p}{\sqrt{p^2-4q}}\right)^2-1}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{p^2-4q}}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+p}{\sqrt{p^2-4q}}\right)^2-1}\,d\left(\frac{2x+p}{\sqrt{p^2-4q}}\right)$$

e si può allora applicare la formula che dà l'integrale **14)** della tabella 2.1.
Se infine $4q-p^2=0$ si ha allora

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = 2\int \frac{1}{(2x+p)^2}\,d\,(2x+p)$$

e si può allora applicare la formula che dà l'integrale **1)** della tabella 2.1.

10) Si osservi che

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+p^2/4+q-p^2/4}}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{(x+p/2)^2+q-p^2/4}}\,dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{(2x+p)^2+4q-p^2}}\,dx$$

Se ora $4q-p^2>0$ si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2+1}}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2+1}}\,d\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)$$

e si può allora applicare la formula che dà l'integrale **12)** della tabella 2.1.
Se ora $4q-p^2<0$ si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}} = \frac{2}{\sqrt{p^2-4q}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2x+p}{\sqrt{p^2-4q}}\right)^2-1}}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2x+p}{\sqrt{p^2-4q}}\right)^2-1}}\,d\left(\frac{2x+p}{\sqrt{p^2-4q}}\right)$$

e si può allora applicare la formula che dà l'integrale **13)** della tabella 2.1.
Se infine $4q-p^2=0$ si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx = \int \frac{1}{|2x+p|}\,d\,(2x+p)$$

e se $x>-\frac{p}{2}$ così come se $x<-\frac{p}{2}$ si può applicare la formula che dà l'integrale **2)** della tabella 2.1.
Si osservi ora che

$$\text{settsenh}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) = \lg\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + \sqrt{1+\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2}\right) =$$

$$= \lg \frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\left(2x+p+\sqrt{(2x+p)^2+4q-p^2}\right)$$

$$= \lg \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} + \lg\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right).$$

Analogamente si ha

$$\text{settcosh}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{p^2-4q}}\right) = \lg\frac{2}{\sqrt{p^2-4q}} + \lg\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right).$$

D'altro canto

$$\lg\,(2x+p) = \lg\left(x+\frac{p}{2}\right) + \lg 2.$$

Si ottiene così la formula unica

$$F(x) = \lg\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right)+C.$$

11) Affinché l'integrando abbia senso occorre che il discriminante dell'equazione $x^2-px-q=0$ sia positivo. Occorrerà pertanto che risulti $p^2+4q>0$.
Si ha allora

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+px+q}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{q+p^2/4-p^2/4-x^2+px}}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{q+p^2/4-(x-p/2)^2}}\,dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{4q+p^2-(2x-p)^2}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q+p^2}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-p}{\sqrt{4q+p^2}}\right)^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-p}{\sqrt{4q+p^2}}\right)^2}}\, d\left(\frac{2x-p}{\sqrt{4q+p^2}}\right)$$

e si può allora applicare la formula che dà l'integrale **10)** della tabella 2.1.

12) Si osservi che

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}\,dx = \frac{m}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(n-\frac{mp}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx$$

$$= \frac{m}{2}\int \frac{1}{x^2+px+q}\,d\left(x^2+px+q\right) + \left(n-\frac{mp}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx.$$

Il primo dei due integrali a secondo membro può essere calcolato attraverso la formula che dà l'integrale **2)** della tabella 2.1, mentre il secondo di tali integrali è del tipo esaminato nell'esercizio **9)** del presente paragrafo.

13) Si osservi che

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx = \frac{m}{2}\int \frac{2x+p}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx + \left(n-\frac{mp}{2}\right)\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx$$

$$= \frac{m}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}\,d\left(x^2+px+q\right) + \left(n-\frac{mp}{2}\right)\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx.$$

Il primo dei due integrali a secondo membro può essere calcolato attraverso la formula che dà l'integrale **1)** della tabella 2.1, mentre il secondo di tali integrali è del tipo esaminato nell'esercizio **10)** del presente paragrafo.

14) Si osservi che

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{-x^2+px+q}}\,dx = -\frac{m}{2}\int \frac{-2x+p}{\sqrt{-x^2+px+q}}\,dx + \left(n+\frac{mp}{2}\right)\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+px+q}}\,dx$$

$$= -\frac{m}{2}\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+px+q}}\,d\left(-x^2+px+q\right)+\left(n+\frac{mp}{2}\right)\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+px+q}}\,dx$$

Il primo dei due integrali a secondo membro può essere calcolato attraverso la formula che dà l'integrale **1)** della tabella 2.1, mentre il secondo di tali integrali è del tipo esaminato nell'esercizio **11)** del presente paragrafo.

15) Si ha con facili calcoli

$$\int \frac{mx+n}{ax+b}\,dx = \frac{m}{a}\int dx + \frac{na-mb}{a^2}\int \frac{a}{ax+b}\,dx$$

$$= \frac{m}{a}\,x + \frac{na-mb}{a^2}\log|ax+b| + C$$

dove per il calcolo del secondo integrale a secondo membro si è utilizzato l'integrale **2)** della tabella 2.1.

2.3 Ulteriori applicazioni della prima regola di sostituzione

Si calcolino i seguenti integrali indefiniti

1) $\int \frac{x}{\operatorname{sen}x^2}\,dx$

2) $\int \frac{\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x^3}}\,dx$

3) $\int e^x \operatorname{tg} e^x\,dx$

4) $\int \frac{1}{x}\,\frac{1}{\lg^2 x+3\lg x-4}\,dx$

5) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{1}{\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x+1}\,dx$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+3e^x+2}}\,e^x dx$

7) $\int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{arcsen}^2x+4\operatorname{arcsen}x+5}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

8) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{-\operatorname{sen}^2x-6\operatorname{sen}x+7}}\,dx$

9) $\int \frac{x}{\operatorname{tg}(x^2+1)}\,dx$

10) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\cos\sqrt{1-x^2}}\,dx$

11) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-4e^x}\,dx$

12) $\int \frac{2\operatorname{arctg}x+1}{\operatorname{arctg}x+3}\,\frac{1}{1+x^2}\,dx$

13) $\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$

14) $\int \frac{x+1}{x^2-5x+4}\,dx$

15) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x}}\,dx$

16) $\int \frac{3x+1}{2x+5}\,dx$

17) $\int \frac{x-1}{\sqrt{-x^2+x+2}}$

18) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+x+3}}\,dx$

19) $\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}\,dx$

20) $\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx$

21) $\int \frac{2x+1}{x+3}\,dx$

22) $\int \frac{1}{x^2-4x}\,dx$

23) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

24) $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen}x}\,dx$

25) $\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx$

26) $\int \operatorname{sen}3x\cos x\,dx$

27) $\int \cos^2 x\,dx$

28) $\int \operatorname{sen}^4 x\cos^3 x\,dx$

29) $\int \cos^6 x\operatorname{sen}^3 x\,dx$

Risultati

1) $F(x) = \frac{1}{2}\lg\left|\operatorname{tg}\frac{x^2}{2}\right|+C$

2) $F(x) = \frac{4}{3}\operatorname{setttgh}\left(\operatorname{tg}\frac{\sqrt{x^3}}{2}\right)+C$

3) $F(x) = -\lg|\cos e^x|+C$

4) $F(x) = -\frac{2}{5}\operatorname{setttgh}\left(\frac{2\lg x+3}{5}\right)+C$

5) $F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

6) $F(x) = \lg\left(e^x+\frac{3}{2}+\sqrt{e^{2x}+3e^x+2}\right)+C$

7) $F(x) = \lg\left(\operatorname{arcsen}x+2+\sqrt{\operatorname{arcsen}^2x+4\operatorname{arcsen}x+5}\right)+C$

8) $F(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen}x+3}{4}\right)+C$

9) $F(x) = \frac{1}{2}\lg\left|\mathrm{sen}\,(x^2+1)\right|+C$

10) $F(x) = -2\,\mathrm{setttgh}\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}+C$

11) $F(x) = \frac{1}{4}\log\left|\frac{e^x-4}{e^x}\right|+C$

12) $F(x) = 2\,\mathrm{arctg}x - 5\log\left|\mathrm{arctg}x+3\right|+C$

13) $F(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

14) $F(x) = \frac{1}{2}\lg\left|x^2-5x+4\right| + \frac{7}{6}\lg\frac{x-4}{x-1}+C$

15) $F(x) = \sqrt{x^2+x} + \frac{3}{2}\,\mathrm{settcosh}\,(2x+1)+C =$

$= \sqrt{x^2+x} + \frac{3}{2}\log\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right)+C =$

$= \sqrt{x^2+x} + \frac{3}{2}\log\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right)+C'$

16) $F(x) = \frac{3}{2}x-\frac{13}{4}\log\left|2x+5\right|+C$

17) $F(x) = -\sqrt{-x^2+x+2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{arcsen}\,\frac{2x-1}{3}+C$

18) $F(x) = 2\sqrt{x^2+x+3}-2\log\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+3}\right)+C =$

$= 2\sqrt{x^2+x+3}-2\,\mathrm{settcosh}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right)+C'$

19) $F(x) = \log\left|x^2-x+1\right|-2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$

20) $F(x) = 3\log\left|x-1\right|-\frac{1}{(x-1)}+C$

21) $F(x) = 2x-5\log\left|x+3\right|+C$

22) $F(x) = \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-4}{x}\right|+C = -\frac{1}{2}\,\mathrm{setttgh}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C'$

23) $F(x) = \mathrm{tg}\frac{x}{2}+C$

24) $F(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{2x+\pi}{4}\right)+C$

25) $F(x) = -\mathrm{cotg}\frac{x}{2}+C$

26) $F(x) = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\cos 4x+\cos x\right]+C$

27) $F(x) = \frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}2x\right]+C$

28) $F(x) = \frac{\mathrm{sen}^5x}{5} - \frac{\mathrm{sen}^7x}{7}+C$

29) $F(x) = \frac{\cos^9x}{9} - \frac{\cos^7x}{7}+C$

Soluzioni

1) Si osservi che

$$\int \frac{x}{\mathrm{sen}x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\mathrm{sen}x^2}\,d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{\mathrm{sen}t}\,dt\right)_{t=x^2}.$$

D'altro canto grazie al risultato dell'esercizio 3) del paragrafo 2.2 si ha

$$\int \frac{1}{\mathrm{sen}t}\,dt = \lg\left|\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}\right|+C.$$

Basta allora sostituire a t la quantità x^2 nell'espressione $\lg\left|\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}\right|$.

2) Si osservi che

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x^3}}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{\cos\sqrt{x^3}}\,d\left(\sqrt{x^3}\right).$$

D'altro canto grazie al risultato dell'esercizio 5) del paragrafo 2.2 si ha

$$\int \frac{1}{\cos t}\, dt = 2 \text{ setttgh } tg\frac{t}{2}+C.$$

Basta allora sostituire alla variabile t la quantità $\sqrt{x^3}$.

3) Si osservi che

$$\int e^x\, tge^x\, dx = \int tge^x\, d\left(e^x\right).$$

D'altro canto grazie al risultato dell'esercizio 7) del paragrafo 2.2 si ha

$$\int tgt\, dt = -\lg\left|\cos t\right|+C,$$

Basta allora sostituire alla variabile t la quantità e^x.

4) Si osservi che

$$\int \frac{1}{x}\,\frac{1}{\lg^2x+3\lg x-4}\, dx = \int \frac{1}{\lg^2x+3\lg x-4}\, d\left(\lg x\right).$$

D'altro canto grazie al risultato dell'esercizio 9) del paragrafo 2.2, poiché in questo caso $p^2-4q=25>0$

$$\int \frac{1}{t^2+3t-2}\, dt = -\frac{2}{5} \text{ setttgh } \left(\frac{2t+3}{5}\right)+C.$$

Basta allora sostituire alla variabile t l'espressione $\lg x$.

5) Si osservi che

$$\int \frac{1}{\cos^2x}\,\frac{1}{tg^2x+tgx+1}\, dx = \int \frac{1}{tg^2x+tgx+1}\, d\left(tgx\right).$$

D'altro canto grazie al risultato dell'esercizio 9) del paragrafo 2.2, poiché $p^2-4q=-3<0$

$$\int \frac{1}{t^2+t+1}\, dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ arctg } \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Basta allora sostituire alla variabile t l'espresione tgx.

6) Si osservi che

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+3e^x+2}}\, e^x\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(e^x\right)^2+3e^x+2}}\, d\left(e^x\right).$$

D'altro canto grazie al risultato dell'esercizio 10) del paragrafo 2.2

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2+3t+2}}\, dt = \lg\left(t+\frac{3}{2}+\sqrt{t^2+3t+2}\right)+C.$$

Basta allora sostituire alla variabile t l'espressione e^x.

7) Si osservi che

$$\int \frac{1}{\sqrt{\text{arcsen}^2x+4\text{arcsen}x+5}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{\text{arcsen}^2x+4\text{arcsen}x+5}}\, d\left(\text{arcsen}x\right).$$

D'altro canto grazie al risultato dell'esercizio 10) del paragrafo 2.2

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2+4t+5}}\, dt = \lg\left(t+2+\sqrt{t^2+4t+5}\right)+C.$$

Basta allora sostituire alla variabile t l'espressione arcsenx.

8) Si osservi che

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{-\text{sen}^2x-6\text{sen}x+7}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{-\text{sen}^2x-6\text{sen}x+7}}\, d\left(\text{sen}x\right).$$

Grazie al risultato dell'esercizio **11)** del paragrafo 2.2

$$\int \frac{1}{\sqrt{-t^2-6t+7}}\,dt = \operatorname{arcsen}\left(\frac{t+3}{4}\right)+C.$$

Basta allora sostituire alla variabile t l'espressione senx.

9) Si osservi che

$$\int \frac{x}{tg\left(x^2+1\right)}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{tg\left(x^2+1\right)}\,d\left(x^2+1\right).$$

Grazie al risultato dell'esercizio **1)** del paragrafo 2.2 si ha

$$\int \frac{1}{tgt}\,dt = lg\,|sent|+C.$$

Basta allora sostituire alla variabile t l'espressione x^2+1.

10) Si osservi che

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\,\cos\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int \frac{1}{\cos\sqrt{1-x^2}}\,d\left(\sqrt{1-x^2}\right).$$

Grazie al risultato dell'esercizio **5)** del paragrafo 2.2 si ha

$$\int \frac{1}{cost}\,dt = 2\ setttgh\ tg\,\frac{t}{2}+C.$$

Occorrerà allora sostituire alla variabile t l'espressione $\sqrt{1-x^2}$.

11) Osservato che

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-4e^x}\,dx = \int \frac{1}{\left(e^x\right)^2-4e^x}\,d\left(e^x\right)$$

si esegua la sostituzione $e^x=t$; il calcolo dell'integrale dato è così ricondotto al seguente (cfr. esercizio **9)** del par. 2.2)

$$\int \frac{1}{t^2-4t}\,dt = \frac{1}{4}\log\left|\frac{t-4}{t}\right|+C.$$

Ponendo $t=e^x$ si ha l'integrale cercato.

12) Osservato che

$$\int \frac{2\ arctgx+1}{arctgx+3}\,\frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{2arctgx+1}{arctgx+3}\,d\,(arctgx)$$

si esegua la sostituzione arctgx=t; il calcolo dell'integrale dato è così ricondotto al seguente (cfr. esercizio **15)** par. 2.2)

$$\int \frac{2t+1}{t+3}\,dt = 2t-5\ \log|t+3|+C.$$

Ponendo t=arctgx si ha il risultato.

13) Si segua il procedimento indicato nello svolgimento dell'esercizio **9)** di 2.2.

14) Si segua il procedimento indicato nello svolgimento dell'esercizio **12)** di 2.2.

15) Si segua il procedimento indicato nello svolgimento dell'esercizio **13)** di 2.2.

16) Si segua il procedimento indicato nello svolgimento dell'esercizio **15)** di 2.2.

17) Si segua il procedimento indicato nello svolgimento dell'esercizio **14)** di 2.2.

18) Si segua il procedimento indicato nello svolgimento dell'esercizio **13)** di 2.2.

19) Si segua il procedimento indicato nello svolgimento dell'esercizio **12)** di 2.2.

20) Come **19)**.

21) Si segua il procedimento indicato nello svolgimento dell'esercizio **15)** di 2.2.

22) Si segua il procedimento indicato nello svolgimento dell'esercizio **9)** di 2.2.

23) Si osservi che $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ e quindi dalla **6)** della tab. 2.1 segue

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{1}{2\cos^2 x/2}\,dx =$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x/2}\,d\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$$

24) Osservato che $1-\operatorname{sen}x=1+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ si può procedere come nell'esercizio precedente.

25) Osservato che $1-\cos x=2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$ si ha utilizzando la **1)** della tabella 2.1

$$\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x/2}\,d\left(\frac{x}{2}\right) = \int \left(1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x/2}\right)d\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x/2}\,d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\,x/2}+C=-\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+C.$$

26) Si osservi che

$$\operatorname{sen}3x\,\cos x = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(3x+x)+\operatorname{sen}(3x-x)\right] = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}4x+\operatorname{sen}2x\right]$$

e quindi utilizzando la **5)** della tab. 2.1 si ottiene

$$\int \operatorname{sen}3x\,\cos x\,dx = \frac{1}{2}\left[\int \operatorname{sen}4x\,dx + \int \operatorname{sen}2x\,dx\right] =$$
$$= -\left[\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 2x\right]+C.$$

27) Ricordando che $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ si ha:

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left[\int dx+\frac{1}{2}\int \cos 2x\,d(2x)\right] = \frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x\right]+C.$$

28) Osservato che

$$\operatorname{sen}^4 x\,\cos^3 x = \cos x\,(\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^6 x)$$

l'integrale si calcola utilizzando la **1)** della tab. 2.1.

N.B. Il lettore osservi che con la stessa tecnica si possono calcolare tutti gli integrali del tipo

$$\int \operatorname{sen}^m x\,\cos^{2n+1} x\,dx.$$

29) Osservato che

$$\cos^6 x\,\operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen}x\,(\cos^6 x-\cos^8 x)$$

l'integrale si calcola utilizzando la **1)** della tab.2.1.

N.B. Il lettore osservi che con la stessa tecnica si possono calcolare tutti gli integrali del tipo

$$\int \cos^m x\,\operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx.$$

3. Integrazione per parti

3.1 Alcuni casi notevoli di integrabilità per parti

Si calcolino i seguenti integrali indefiniti

1) $\int x\,e^{\alpha x}\,dx$ 2) $\int e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\,dx$

3) $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$

4) $\int e^{\alpha x}\,\mathrm{senh}\beta x\,dx \quad \alpha\neq\pm\beta$

5) $\int e^{\alpha x}\cosh\beta x\,dx \quad \alpha\neq\pm\beta$

6) $\int x\,\mathrm{sen}x\,dx$

7) $\int x\cos x\,dx$

8) $\int x\,\mathrm{senh}x\,dx$

9) $\int x\cosh x\,dx$

10) $\int x\,e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\beta x\,dx$

11) $\int x\,e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$

12) $\int x\,e^{\alpha x}\,\mathrm{senh}\beta x\,dx \quad \alpha\neq\pm\beta$

13) $\int x\,e^{\alpha x}\cosh\beta x\;x \quad \alpha\neq\pm\beta$

14) $\int \mathrm{arcsen}x\,dx$

15) $\int \mathrm{settsenh}x\,dx$

16) $\int \mathrm{settcosh}x\,dx$

17) $\int \mathrm{arctg}x\,dx$

18) $\int \lg|x|\,dx$

19) $\int x^{\alpha}\lg|x|\,dx \quad \alpha\neq-1$

20) $\int \sqrt{x^2+px+q}\,dx$

21) $\int \sqrt{-x^2+px+q}\,dx$

22) $\int \mathrm{sen}\alpha x\,\mathrm{sen}\beta x\,dx \quad \alpha\neq\pm\beta$

23) $\int \cos\alpha x\cos\beta x\,dx \quad \alpha\neq\pm\beta$

24) $\int \mathrm{sen}\alpha x\cos\beta x\,dx \quad \alpha\neq\pm\beta$

4)* $\int e^{x}\,\mathrm{senh}x\,dx$

5)* $\int e^{x}\cosh x\,dx$

12)* $\int x\,e^{x}\,\mathrm{senh}x$

13)* $\int x\,e^{x}\cosh x$

19)* $\int \frac{\lg|x|}{x}\,dx$

22)* $\int \mathrm{sen}^2x\,dx$

23)* $\int \cos^2x\,dx$

Risultati

1) $F(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)+C$

2) $F(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\,\mathrm{sen}\beta x-\beta\cos\beta x\right)+C$

3) $F(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cos\beta x+\beta\,\mathrm{sen}\beta x\right)+C$

4) $F(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha\,\mathrm{senh}\beta x-\beta\cosh\beta x\right)+C$

5) $F(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha\cosh\beta x-\beta\,\mathrm{senh}\beta x\right)+C$

6) $F(x) = -x\cos x+\mathrm{sen}x+C$

7) $F(x) = x\,\mathrm{sen}x+\cos x+C$

8) $F(x) = x\cosh x - \mathrm{senh}x+C$

9) $F(x) = x\,\mathrm{senh}x-\cosh x+C$

10) $F(x) = \frac{xe^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\,\mathrm{sen}\beta x-\beta\cos\beta x\right)+$
$+\frac{e^{\alpha x}}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\left[(\beta^2-\alpha^2)\,\mathrm{sen}\beta x+2\alpha\beta\cos\beta x\right]+C$

11) $F(x) = \frac{xe^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cos\beta x+\beta\,\mathrm{sen}\beta x\right)+$
$+\frac{e^{\alpha x}}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\left[(\beta^2-\alpha^2)\cos\beta x-2\alpha\beta\,\mathrm{sen}\beta x\right]+C$

12) $F(x) = \frac{xe^{\alpha x}}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha\,\mathrm{senh}\beta x-\beta\cosh\beta x\right)+$
$+\frac{e^{\alpha x}}{(\alpha^2-\beta^2)^2}\left[-(\alpha^2+\beta^2)\,\mathrm{senh}\beta x+2\alpha\beta\cosh\beta x\right]+C$

13) $F(x) = \frac{xe^{\alpha x}}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha\cosh\beta x-\beta\,\mathrm{senh}\beta x\right)+$
$+\frac{e^{\alpha x}}{(\alpha^2-\beta^2)^2}\left[-(\alpha^2+\beta^2)\cosh\beta x+2\alpha\beta\,\mathrm{senh}\beta x\right]+C$

14) $F(x) = x\,\mathrm{arcsen}x+\sqrt{1-x^2}+C$

15) $F(x) = x\ \text{settsenh}x - \sqrt{1+x^2} + C$

16) $F(x) = x\ \text{settcosh}x - \sqrt{x^2-1} + C$

17) $F(x) = x\,\text{arctg}x - \lg\sqrt{1+x^2} + C$

18) $F(x) = x\,(\lg|x| - 1) + C$

19) $F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\lg|x| - \dfrac{1}{\alpha+1}\right) + C$

20) $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{p}{2}\right)\sqrt{x^2+px+q} + \dfrac{4q-p^2}{8}\lg\left(x+\dfrac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right) + C$

21) $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{p}{2}\right)\sqrt{-x^2+px+q} + \dfrac{4q+p^2}{8}\arcsen\left(\dfrac{2x-p}{\sqrt{4q+p^2}}\right) + C$

22) $F(x) = \dfrac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left(\alpha\cos\alpha x\ \text{sen}\beta x - \beta\,\text{sen}\alpha x\ \cos\beta x\right) + C$

23) $F(x) = \dfrac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left(\beta\cos\alpha x\ \text{sen}\beta x - \alpha\,\text{sen}\alpha x\ \cos\beta x\right) + C$

24) $F(x) = \dfrac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left(\beta\,\text{sen}\alpha x\ \text{sen}\beta x + \alpha\cos\alpha x\ \cos\beta x\right) + C$

4)* $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{2x}}{2} - x\right) + C$

5)* $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{2x}}{2} + x\right) + C$

12)* $F(x) = -\dfrac{1}{8}e^{2x} + \dfrac{1}{4}x\,e^{2x} - \dfrac{1}{4}x^2 + C$

13)* $F(x) = -\dfrac{1}{8}e^{2x} + \dfrac{1}{4}x\,e^{2x} + \dfrac{1}{4}x^2 + C$

19)* $F(x) = \dfrac{1}{2}\lg^2|x| + C$

22)* $F(x) = \dfrac{x - \text{sen}x\ \cos x}{2} + C$

23)* $F(x) = \dfrac{x + \text{sen}x\ \cos x}{2} + C$

Soluzioni

1) Scegliendo come fattore differenziale $e^{\alpha x}$ e osservando che:

$$\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)' = e^{\alpha x},\quad (x)'=1$$

si ha

$$\int x\,e^{\alpha x}\,dx = \frac{x\,e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{x\,e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha x} + C.$$

2) Scegliendo come fattore differenziale $e^{\alpha x}$, osservando che

$$(\text{sen}\ \beta x)' = \beta\cos\beta x,\quad \left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)' = e^{\alpha x}$$

si ha

$$\int e^{\alpha x}\,\text{sen}\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\,\text{sen}\beta x - \frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx.$$

Scegliendo nuovamente come fattore differenziale $e^{\alpha x}$ e osservando che $(\cos\beta x)' = -\beta\,\text{sen}\beta x$ si ha

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\cos\beta x + \frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x}\,\text{sen}\beta x\,dx.$$

Si ottiene così

$$\int e^{\alpha x}\,\text{sen}\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\,\text{sen}\beta x - \frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha x}\cos\beta x - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\int e^{\alpha x}\,\text{sen}\beta x\,dx.$$

Da tale identità si ottiene

$$\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\int e^{\alpha x}\,\text{sen}\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\left(\text{sen}\beta x - \frac{\beta}{\alpha}\cos\beta x\right) + C$$

e quindi

$$\int e^{\alpha x}\,\text{sen}\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\,\text{sen}\beta x-\beta\cos\beta x)+C.$$

3) Scegliendo come fattore differenziale $e^{\alpha x}$, osservando che

$$\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)'=e^{\alpha x},\quad (\cos\beta x)'=-\beta\,\text{sen}\beta x$$

si ha

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\cos\beta x+\frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x}\,\text{sen}\beta x.$$

Scegliendo nuovamente come fattore differenziale $e^{\alpha x}$ e osservando che $(\text{sen}\beta x)'=\beta\cos\beta x$ si ha

$$\int e^{\alpha x}\,\text{sen}\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\,\text{sen}\beta x-\frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x}\cos\beta x.$$

Si ottiene così

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\cos\beta x+\frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha x}\,\text{sen}\beta x-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx.$$

Da tale identità si ricava

$$\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\left(\cos\beta x+\frac{\beta}{\alpha}\,\text{sen}\beta x\right)+C$$

e quindi

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\,\text{sen}\beta x)+C.$$

4) Scegliendo come fattore differenziale $e^{\alpha x}$, osservando che

$$(\text{senh}\beta x)'=\beta\cosh\beta x,\quad \left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)'=e^{\alpha x}$$

si ha

$$\int e^{\alpha x}\,\text{senh}\beta x dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\,\text{senh}\beta x-\frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x}\cosh\beta x dx.$$

Scegliendo nuovamente come fattore differenziale $e^{\alpha x}$ e osservando che $(\cosh\beta x)' = \beta\,\text{senh}\beta x$ si ha

$$\int e^{\alpha x}\cosh\beta x dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\cosh\beta x-\frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x}\,\text{senh}\beta x dx.$$

Si ottiene così

$$\int e^{\alpha x}\,\text{senh}\beta x dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\,\text{senh}\beta x-\frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha x}\cosh\beta x+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\int e^{\alpha x}\,\text{senh}\beta x dx.$$

Da tale identità si ottiene

$$\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\int e^{\alpha x}\,\text{senh}\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\left(\text{senh}\beta x-\frac{\beta}{\alpha}\cosh\beta x\right)+C$$

e quindi essendo $\beta\neq\pm\alpha$

$$\int e^{\alpha x}\,\text{senh}\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2-\beta^2}(\alpha\,\text{senh}\beta x-\beta\cosh\beta x)+C.$$

5) Scegliendo come fattore differenziale $e^{\alpha x}$, osservando che

$$\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)' = e^{\alpha x} \quad\text{e}\quad (\cosh\beta x)' = \beta\,\text{senh}\beta x$$

si ha

$$\int e^{\alpha x}\cosh\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\cosh\beta x - \frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x}\,\text{senh}\beta x\,dx.$$

Scegliendo nuovamente come fattore differenziale $e^{\alpha x}$ e osservando che $(\text{senh}\beta x)' = \beta\cosh\beta x$ si ha

$$\int e^{\alpha x}\, \mathrm{senh}\beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\, \mathrm{senh}\beta x - \frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x} \cosh\beta x\, dx.$$

Si ottiene così

$$\int e^{\alpha x}\cosh\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\cosh\beta x - \frac{\beta}{\alpha^2}\, e^{\alpha x}\mathrm{senh}\beta x + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\int e^{\alpha x}\cosh\beta x dx.$$

Da tale identità segue

$$\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\int e^{\alpha x}\cosh\beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\left(\cosh\beta x - \frac{\beta}{\alpha}\,\mathrm{senh}\beta x\right) + C.$$

Essendo $\beta \neq \pm\alpha$ si ha

$$\int e^{\alpha x}\cosh\beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2-\beta^2}(\alpha\cosh\beta x - \beta\,\mathrm{senh}\beta x) + C.$$

6) Scegliendo come fattore differenziale senx e osservando che

$$(-\cos x)' = \mathrm{sen} x,\ (x)' = 1,\ (\mathrm{sen} x)' = \cos x$$

si ha

$$\int x\, \mathrm{sen} x\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \mathrm{sen} x + C.$$

7) Scegliendo come fattore differenziale cosx e osservando che

$$(\mathrm{sen} x)' = \cos x,\ (x)' = 1,\ (-\cos x)' = \mathrm{sen} x$$

si ha

$$\int x\cos x\, dx = x\,\mathrm{sen} x - \int \mathrm{sen} x\, dx = x\,\mathrm{sen} x + \cos x + C.$$

8) Scegliendo come fattore differenziale senhx e osservando che

$$(\cosh x)' = \mathrm{senh} x,\ (x)' = 1,\ (\mathrm{senh} x)' = \cosh x$$

si ha

$$\int x\,\mathrm{senh} x\, dx = x\cosh x - \int \cosh x\, dx = x\cosh x - \mathrm{senh} x + C.$$

9) Scegliendo come fattore differenziale coshx e osservando che

$$(\mathrm{senh} x)' = \cosh x,\ (x)' = 1,\ (\cosh x)' = \mathrm{senh} x$$

si ha

$$\int x\cosh x\, dx = x\,\mathrm{senh} x - \int \mathrm{senh} x dx = x\,\mathrm{senh} x - \cosh x + C.$$

10) Scegliendo come fattore differenziale $e^{\alpha x}$ e osservando che

$$\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)' = e^{\alpha x},\ (x\,\mathrm{sen}\beta x)' = \mathrm{sen}\beta x + x\beta\cos\beta x$$

si ha

$$\int x\, e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\, x\,\mathrm{sen}\beta x - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\beta x dx -$$
$$-\frac{\beta}{\alpha}\int x e^{\alpha x}\cos\beta x dx.$$

Grazie al risultato dell'esercizio 2) si ha

$$\int e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\,\mathrm{sen}\beta x - \beta\cos\beta x) + C.$$

D'altro canto scegliendo nuovamente come fattore differenziale $e^{\alpha x}$ e osservando che $(x\cos\beta x)' = \cos\beta x - x\beta\,\mathrm{sen}\beta x$ si ha

$$\int x e^{\alpha x}\cos\beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\, x\cos\beta x - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\, dx +$$
$$+\frac{\beta}{\alpha}\int x e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\beta x\, dx.$$

Osservando che grazie all'esercizio 3)

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\operatorname{sen}\beta x)+C$$

si ottiene l'identità

$$\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\int x\,e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\,dx = \frac{x}{\alpha}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x -$$
$$-\frac{e^{\alpha x}}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}(\alpha\operatorname{sen}\beta x-\beta\cos\beta x) - \frac{\beta}{\alpha^2}xe^{\alpha x}\cos\beta x +$$
$$+\frac{\beta}{\alpha^2}\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\operatorname{sen}\beta x)+C$$
$$=\frac{1}{\alpha}xe^{\alpha x}\left(\operatorname{sen}\beta x-\frac{\beta}{\alpha}\cos\beta x\right)+$$
$$+\frac{e^{\alpha x}}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}\left(-\alpha\operatorname{sen}\beta x+2\beta\cos\beta x+\frac{\beta^2}{\alpha}\operatorname{sen}\beta x\right)+C.$$

Di qui si ha subito il risultato.
Si osservi che per $\alpha=0$ e $\beta=1$ si ottiene il risultato dell'esercizio **6)**. Il risultato puo essere ottenuto anche scegliendo all'inizio $\operatorname{sen}\beta x$ come fattore differenziale e poi $\cos\beta x$ nell'integrale dello stesso tipo ottenuto a secondo membro.

11) Scegliendo come fattore differenziale $e^{\alpha x}$ e osservando che

$$\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)' = e^{\alpha x},\quad (x\cos\beta x)' = \cos\beta x-x\beta\operatorname{sen}\beta x$$

si ha

$$\int x\,e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}x\cos\beta x - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}\cos\beta x +$$
$$+\frac{\beta}{\alpha}\int xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\,dx.$$

Grazie al risultato dell'esercizio **3)** si ha

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\operatorname{sen}\beta x)+C.$$

D'altro canto scegliendo nuovamente come fattore differenziale $e^{\alpha x}$ ed osservando che $(x\operatorname{sen}\beta x)'=\operatorname{sen}\beta x+x\beta\cos\beta x$ si ha

$$\int x\,e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}x\operatorname{sen}\beta x - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\,dx -$$
$$-\frac{\beta}{\alpha}\int x\,e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx.$$

Osservando che grazie all'esercizio **2)**

$$\int e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\operatorname{sen}\beta x-\beta\cos\beta x)+C$$

si ottiene l'identità

$$\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\int x\,e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{1}{\alpha}x\,e^{\alpha x}\cos\beta x -$$
$$-\frac{e^{\alpha x}}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}(\alpha\cos\beta x+\beta\operatorname{sen}\beta x) + \frac{\beta}{\alpha^2}xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x -$$
$$-\frac{\beta}{\alpha^2}\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\operatorname{sen}\beta x-\beta\cos\beta x)+C$$
$$=\frac{1}{\alpha}xe^{\alpha x}\left(\cos\beta x+\frac{\beta}{\alpha}\operatorname{sen}\beta x\right)-$$
$$-\frac{e^{\alpha x}}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}\left(\alpha\cos\beta x+2\beta\operatorname{sen}\beta x-\frac{\beta^2}{\alpha}\cos\beta x\right)+C.$$

Di qui si ha subito il risultato.
Si osservi che per $\alpha=0$ e $\beta=1$ si ottiene il risultato dell'esercizio **7)**. Il risultato può essere ottenuto anche scegliendo inizialmente $\cos\beta x$ come fattore differenziale e poi $\operatorname{sen}\beta x$ nell'integrale ottenuto a secondo membro.

12) Scegliendo come fattore differenziale $e^{\alpha x}$ e osservando che

$$\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)' = e^{\alpha x}, \quad (x\operatorname{senh}\beta x)' = \operatorname{senh}\beta x + x\beta\cosh\beta x,$$

si ha

$$\int x\, e^{\alpha x} \operatorname{senh}\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} x\operatorname{senh}\beta x - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}\operatorname{senh}\beta x dx -$$

$$-\frac{\beta}{\alpha}\int x e^{\alpha x}\cosh\beta x\, dx.$$

Grazie al risultato dell'esercizio 4) si ha

$$\int e^{\alpha x}\operatorname{senh}\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2-\beta^2}(\alpha\operatorname{senh}\beta x - \beta\cosh\beta x) + C.$$

D'altro canto scegliendo nuovamente come fattore differenziale $e^{\alpha x}$ ed osservando che $(x\cosh\beta x)' = \cosh\beta x + x\beta\operatorname{senh}\beta x$ si ha

$$\int x\, e^{\alpha x}\cosh\beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} x\cosh\beta x - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}\cosh\beta x -$$

$$-\frac{\beta}{\alpha}\int x\, e^{\alpha x}\operatorname{senh}\beta x\, dx.$$

Osservando che grazie all'esercizio 5)

$$\int e^{\alpha x}\cosh\beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2-\beta^2}(\alpha\cosh\beta x - \beta\operatorname{senh}\beta x) + C$$

si ottiene l'identità

$$\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\int x\, e^{\alpha x}\operatorname{senh}\beta x\, dx = \frac{1}{\alpha} x\, e^{\alpha x}\operatorname{senh}\beta x -$$

$$-\frac{e^{\alpha x}}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}(\alpha\operatorname{senh}\beta x - \beta\cosh\beta x) - \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} x\cosh\beta x +$$

$$+\frac{\beta}{\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)} e^{\alpha x}(\alpha\cosh\beta x - \beta\operatorname{senh}\beta x) + C$$

$$= \frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x}\left(\operatorname{senh}\beta x - \frac{\beta}{\alpha}\cosh\beta x\right) +$$

$$+\frac{e^{\alpha x}}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}\left(-\alpha\operatorname{senh}\beta x + 2\beta\cosh\beta x - \frac{\beta^2}{\alpha}\operatorname{senh}\beta x\right) + C.$$

Di qui si ha subito il risultato.
Si osservi che per $\alpha=0$ e $\beta=1$ si ottiene il risultato dell'esercizio 8).

13) Scegliendo come fattore differenziale $e^{\alpha x}$ e osservando che

$$(x\cosh\beta x)' = \cosh\beta x + x\beta\operatorname{senh}\beta x, \quad \left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)' = e^{\alpha x}$$

si ha

$$\int x\, e^{\alpha x}\cosh\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} x\cosh\beta x - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}\cosh\beta x dx -$$

$$-\frac{\beta}{\alpha}\int x e^{\alpha x}\operatorname{senh}\beta x\, dx.$$

Grazie al risultato dell'esercizio 5) si ha

$$\int e^{\alpha x}\cosh\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2-\beta^2}(\alpha\cosh\beta x - \beta\operatorname{senh}\beta x) + C.$$

D'altro canto scegliendo nuovamente come fattore differenziale $e^{\alpha x}$ ed osservando che $(x\operatorname{senh}\beta x)' = \operatorname{senh}\beta x + x\beta\cosh\beta x$ si ha

$$\int x\, e^{\alpha x}\operatorname{senh}\beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} x\operatorname{senh}\beta x - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}\operatorname{senh}\beta x -$$

$$-\frac{\beta}{\alpha}\int x\, e^{\alpha x}\cosh\beta x\, dx.$$

Osservando che grazie all'esercizio **4)** si ha

$$\int xe^{\alpha x}\,\mathrm{senh}\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha\,\mathrm{senh}\beta x-\beta\cosh\beta x\right)+C.$$

Si ottiene l'identità

$$\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\int x\,e^{\alpha x}\cosh\beta x\,dx = \frac{1}{\alpha}\,x\,e^{\alpha x}\cosh\beta x\,-$$

$$-\,\frac{e^{\alpha x}}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}\left(\alpha\cosh\beta x-\beta\,\mathrm{senh}\beta x\right)-\frac{\beta}{\alpha^2}\,xe^{\alpha x}\,x\,\mathrm{senh}\beta x\,+$$

$$+\,\frac{\beta}{\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)}\,e^{\alpha x}\left(\alpha\,\mathrm{senh}\beta x-\beta\cosh\beta x\right)+C$$

$$=\frac{1}{\alpha}\,xe^{\alpha x}\left(\cosh\beta x-\frac{\beta}{\alpha}\,\mathrm{senh}\beta x\right)+$$

$$+\,\frac{e^{\alpha x}}{\alpha\,(\alpha^2-\beta^2)}\left(-\alpha\cosh\beta x+2\beta\,\mathrm{senh}\beta x-\frac{\beta^2}{\alpha}\cosh\beta x\right)+C.$$

Di qui si ha subito il risultato.
Si osservi che per $\alpha=0$ e $\beta=1$ si ottiene il risultato dell'esercizio **9)**.

14) Scegliendo come fattore differenziale 1 e osservando che

$$(x)'=1,\quad (\mathrm{arcsen}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

e utilizzando infine l'esercizio **14)** di 2.3 si ha

$$\int \mathrm{arcsen}x\,dx = x\,\mathrm{arcsen}x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\,\mathrm{arcsen}x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

15) Scegliendo come fattore differenziale 1, osservando che

$$(\mathrm{settsenh}x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad (x)'=1$$

e utilizzando l'esercizio **13)** di 2.3 si ottiene

$$\int \mathrm{settsenh}x\,dx = x\,\mathrm{settsenh}x-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= x\,\mathrm{settsenh}x-\sqrt{1+x^2}+C.$$

16) Scegliendo come fattore differenziale 1, osservando che

$$(x)'=1,\quad (\mathrm{settcosh}x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\quad (x)'=1$$

e utilizzando infine l'esercizio **13)** di 2.3 si ottiene

$$\int \mathrm{settcosh}x\,dx = x\,\mathrm{settcosh}x\,-$$

$$-\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = x\,\mathrm{settcosh}x-\sqrt{x^2-1}+C.$$

17) Scegliendo come fattore differenziale 1, osservando che

$$(x)'=1\quad (\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

e utilizzando infine l'esercizio **13)** del paragrafo 2.2 si ha

$$\int \mathrm{arctg}x\,dx = x\,\mathrm{arctg}x-\int\frac{x}{1+x^2}\,dx = x\,\mathrm{arctg}x-\lg\sqrt{1+x^2}+C.$$

18) Scegliendo come fattore differenziale 1, osservando che

$$(x)'=1,\quad \left(\lg|x|\right)'=\frac{1}{x}$$

si ha

$$\int \lg |x|\, dx = x \lg |x| - \int 1\cdot dx = x\,(\lg |x| - 1)+C.$$

19) Scegliendo come fattore differenziale x^α e osservando che

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^\alpha, \quad (\lg |x|)' = \frac{1}{x}$$

si ha

$$\int x^\alpha \lg |x|\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \lg |x| - \frac{1}{\alpha+1} \int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\lg |x| - \frac{1}{\alpha+1}\right)+C.$$

Si osservi che per $\alpha=0$ si ottiene il risultato dell'esercizio 18).

20) Scegliendo come fattore differenziale 1 e osservando che

$$(x)'=1, \quad \left(\sqrt{x^2+px+q}\right)' = \frac{1}{2}\,\frac{2x+p}{\sqrt{x^2+px+q}}$$

si ottiene

$$\int \sqrt{x^2+px+q}\, dx = x\sqrt{x^2+px+q} - \frac{1}{2}\int \frac{x(2x+p)}{\sqrt{x^2+px+q}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+px+q} - \int \frac{x^2+px+q - \frac{px}{2} - q}{\sqrt{x^2+px+q}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+px+q} - \int \sqrt{x^2+px+q}\,dx + \int \frac{\frac{px}{2}+q}{\sqrt{x^2+px+q}}\, dx.$$

Si ottiene così l'identità

$$\int \sqrt{x^2+px+q}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+px+q} + \int \frac{\frac{px}{2}+q}{\sqrt{x^2+px+q}}\, dx\right)$$

e basta applicare il risultato dell'esercizio 13) del paragrafo 2.3.

21) Scegliendo come fattore differenziale 1 e osservando che

$$(x)'=1, \quad \left(\sqrt{-x^2+px+q}\right)' = \frac{1}{2}\,\frac{-2x+p}{\sqrt{-x^2+px+q}}$$

si ottiene

$$\int \sqrt{-x^2+px+q}\, dx = x\sqrt{-x^2+px+q} - \frac{1}{2}\int \frac{x(-2x+p)}{\sqrt{-x^2+px+q}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{-x^2+px+q} - \int \frac{-x^2+px+q - \frac{px}{2} - q}{\sqrt{-x^2+px+q}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{-x^2+px+q} - \int \sqrt{-x^2+px+q}\, dx + \int \frac{\frac{px}{2}+q}{\sqrt{x^2+px+q}}\, dx.$$

Si ottiene così l'identità

$$\int \sqrt{-x^2+px+q}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{-x^2+px+q} + \int \frac{\frac{px}{2}+q}{\sqrt{-x^2+px+q}}\, dx\right)$$

e basta applicare il risultato dell'esercizio 14) del paragrafo 2.3.

22) Scegliendo come fattore differenziale $\operatorname{sen}\alpha x$ e osservando che

$$\left(-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right)' = \operatorname{sen}\alpha x, \quad (\operatorname{sen}\beta x)' = \beta\cos\beta x$$

si ha

$$\int \operatorname{sen}\alpha x\, \operatorname{sen}\beta x\, dx = -\frac{\cos\alpha x\, \operatorname{sen}\beta x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\int \cos\alpha x\, \cos\beta x\, dx.$$

Scegliendo come fattore differenziale cosαx e osservando che

$$\left(\frac{\text{sen}\alpha x}{\alpha}\right)' = \cos\alpha x, \quad (\cos\beta x)' = -\beta\,\text{sen}\beta x$$

si ha

$$\int \cos\alpha x \cos\beta x \, dx = -\frac{\text{sen}\alpha x \cos\beta x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\int \text{sen}\alpha x\, \text{sen}\beta x\, dx.$$

Si ottiene così l'identità

$$\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\int \text{sen}\alpha x\,\text{sen}\beta x\, dx = \frac{1}{\alpha}\left(-\cos\alpha x\,\text{sen}\beta x + \frac{\beta}{\alpha}\text{sen}\alpha x \cos\beta x\right)+C$$

e di qui subito il risultato.

23) Scegliendo come fattore differenziale cosαx e osservando che

$$\left(\frac{\text{sen}\alpha x}{\alpha}\right)' = \cos\alpha x, \quad (\cos\beta x)' = -\beta\,\text{sen}\beta x$$

si ha

$$\int \cos\alpha x \cos\beta x \, dx = \frac{\text{sen}\alpha x}{\alpha}\cos\beta x + \frac{\beta}{\alpha}\int \text{sen}\alpha x\, \text{sen}\beta x\, dx.$$

Scegliendo nell'integrale sulla destra come fattore differenziale senαx e osservando che

$$\left(-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right)' = \text{sen}\alpha x, \quad (\text{sen}\beta x)' = \beta\cos\beta x$$

si ha

$$\int \cos\alpha x \cos\beta x \, dx = \frac{\text{sen}\alpha x \cos\beta x}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2}\cos\alpha x\,\text{sen}\beta x + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\int \cos\alpha x \cos\beta x\, dx.$$

Si ottiene così l'identità

$$\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\int \cos\alpha x \cos\beta x\, dx = \frac{1}{\alpha}\left(\text{sen}\alpha x \cos\beta x - \frac{\beta}{\alpha}\cos\alpha x\,\text{sen}\beta x\right)+C$$

e di qui subito il risultato.

24) Scegliendo come fattore differenziale senαx e osservando che

$$\left(-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right)' = \text{sen}\alpha x, \quad (\cos\beta x)' = -\beta\,\text{sen}\beta x$$

si ha

$$\int \text{sen}\alpha x \cos\beta x\, dx = -\frac{\cos\alpha x \cos\beta x}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\int \cos\alpha x\,\text{sen}\beta x\, dx.$$

Scegliendo nell'integrale sulla destra come fattore differenziale cosαx e osservando che

$$\left(\frac{\text{sen}\alpha x}{\alpha}\right)' = \cos\alpha x, \quad (\text{sen}\beta x)' = \beta\cos\beta x$$

si ha

$$\int \text{sen}\alpha x \cos\beta x\, dx = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x \cos\beta x - \frac{\beta}{\alpha^2}\text{sen}\alpha x\,\text{sen}\beta x + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\int \text{sen}\alpha x \cos\beta x\, dx.$$

Si ottiene così l'identità

$$\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\int \text{sen}\alpha x \cos\beta x\, dx = -\frac{1}{\alpha}\left(\cos\alpha x \cos\beta x + \frac{\beta}{\alpha}\text{sen}\alpha x\,\text{sen}\beta x\right)+C$$

e di qui subito il risultato.

4)* Si osservi che

$$e^x \operatorname{senh}x = e^x\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^{2x}-1}{2}$$

e dunque

$$\int e^x \operatorname{senh}x\,dx = \frac{1}{2}\left(\int e^{2x}\,dx - \int 1\cdot dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}}{2}-x\right)+C.$$

5)* Si osservi che

$$e^x \cosh x = e^x\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^{2x}+1}{2}$$

e dunque

$$\int e^x \cosh x\,dx = \frac{1}{2}\left(\int e^{2x}\,dx + \int 1\cdot dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}}{2}+x\right)+C.$$

12)* Essendo

$$e^x \operatorname{senh}x = \frac{e^{2x}-1}{2}$$

si ha, utilizzando il risultato dell'esercizio 1)

$$\int xe^x \operatorname{senh}x\,dx = \frac{1}{2}\left(\int xe^{2x}\,dx - \int x dx\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{x^2}{2}\right]+C.$$

13)* Essendo

$$e^x \cosh x = \frac{e^{2x}+1}{2}$$

si ha utilizzando il risultato dell'esercizio 1)

$$\int e^x \cosh x\,dx = \frac{1}{2}\left(\int xe^{2x}\,dx + \int x dx\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{x^2}{2}\right]+C.$$

19)* Scegliendo $1/x$ come fattore differenziale e osservando che $(\lg|x|)' = 1/x$, si ha

$$\int \frac{\lg|x|}{x}\,dx = \lg^2|x| - \int \frac{\lg|x|}{x}\,dx.$$

Di qui si ha subito l'identità

$$2\int \frac{\lg|x|}{x}\,dx = \lg^2|x|$$

e dunque il risultato.
Tale risultato si può ottenere subito anche utilizzando la formula che dà l'integrale **2)** nella tabella 2.1 (cfr. esercizio **6)** del paragrafo 2.2)

22)* Scegliendo come fattore differenziale senx, osservando che $(-\cos x)'=\operatorname{sen}x$, $(\operatorname{sen}x)'=\cos x$ e ricordando l'identità $\cos^2x+\operatorname{sen}^2x=1$, si ha

$$\int \operatorname{sen}^2x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}x + \int \cos^2x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}x - \int \operatorname{sen}^2x\,dx + \int 1\cdot dx.$$

Si ottiene così l'identità

$$2\int \operatorname{sen}^2x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}x + x + C$$

e di qui il risultato.

23)* Scegliendo come fattore defferenziale cosx, osservando che $(\operatorname{sen}x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\operatorname{sen}x$ e ricordando l'identità $\cos^2x+\operatorname{sen}^2x=1$, si ha

$$\int \cos^2x\,dx = \cos x \operatorname{sen}x + \int \operatorname{sen}^2x\,dx = \cos x \operatorname{sen}x - \int \operatorname{sen}^2x\,dx + \int 1\cdot dx.$$

Si ottiene così l'identità

$$2\int \cos^2x\,dx = \cos x \operatorname{sen}x + x + C$$

e di qui il risultato.

3.2 Ulteriori applicazioni della regola di integrazione per parti.

Si calcolino i seguenti integrali indefiniti

1) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$

2) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\, dx$

3) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arcsen} x\, dx$

4) $\int \sqrt{x^2-1}\, dx$

5) $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$

6) $\int x\sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen} x\, dx$

7) $\int \frac{\lg \lg x}{x}\, dx$

8) $\int x^2 \operatorname{arctg} x\, dx$

9) $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$

10) $\int x \operatorname{arcsen} x\, dx$

11) $\int x \operatorname{settsenh} x\, dx$

12) $\int x \operatorname{settcosh} x\, dx$

13) $\int x \operatorname{sen}^2 x\, dx$

14) $\int x \cos^2 x\, dx$

15) $\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$

16) $\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

17) $\int x \operatorname{arctg}^2 x\, dx$

18) $\int \sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen} x\, dx$

19) $\int x \operatorname{arcsen}^2 x\, dx$

20) $\int x \operatorname{tg}^2 x\, dx$

21) $\int x^2 \operatorname{arcsen}^2 x\, dx$

22) $\int x e^{2x}\, dx$

23) $\int e^{3x} \cos 2x\, dx$

24) $\int e^{x} \operatorname{sen} 2x\, dx$

25) $\int e^{2x} \operatorname{senh} x\, dx$

26) $\int x e^{2x} \operatorname{sen} 3x\, dx$

27) $\int x^3 \lg |x|\, dx$

28) $\int \sqrt{x^2+1}\, dx$

29) $\int \sqrt{-x^2+4}\, dx$

30) $\int \operatorname{sen} 2x \cos x\, dx$

31) $\int \cos 3x \cos 4x\, dx$

32) $\int x\, e^{4x} \cos 4x\, dx$

Risultati

1) $F(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x\right) + C$

2) $F(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen} x + C$

3) $F(x) = -\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x + x + C$

4) $F(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{settcosh} x\right) + C$

5) $F(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{settsenh} x\right) + C$

6) $F(x) = -\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{x}{3} + C$

7) $F(x) = \lg x\left(\lg \lg x - 1\right) + C$

8) $F(x) = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\lg\left(1+x^2\right) + C$

9) $F(x) = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$

10) $F(x) = \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{4}\operatorname{arcsen} x + C$

11) $F(x) = -\frac{1}{4}x\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{2}\operatorname{settsenh} x + \frac{1}{4}\operatorname{settsenh} x + C$

12) $F(x) = -\frac{1}{4}x\sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{2}\operatorname{settcosh} x - \frac{1}{4}\operatorname{settcosh} x + C$

13) $F(x) = -x\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 x + \frac{x^2}{4} + C$

14) $F(x) = \frac{x \operatorname{sen} x \cos x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 x + \frac{x^2}{4} + C$

15) $F(x) = x\,tgx + \lg|\cos x| + C$

16) $F(x) = -\dfrac{x}{tgx} + \lg|\operatorname{sen}x| + C$

17) $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg}^2x + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}^2x - x\operatorname{arctg}x + \lg\sqrt{1+x^2} + C$

18) $F(x) = \dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}x + \dfrac{\operatorname{arcsen}^2x}{4} - \dfrac{1}{4}x^2 + C$

19) $F(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{4}\right)\operatorname{arcsen}^2x - \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}x + C$

20) $F(x) = -\dfrac{x^2}{2} + x\,tgx + \lg|\cos x| + C$

21) $F(x) = \dfrac{x^3}{3}\operatorname{arcsen}^2x + \dfrac{2}{9}\sqrt{1-x^2}\left(x^2+2\right)\operatorname{arcsen}x - \dfrac{2}{27}x^3 - \dfrac{4}{9}x + C$

22) $F(x) = \dfrac{e^{2x}}{4}(2x-1) + C$

23) $F(x) = \dfrac{e^{3x}}{13}(3\cos 2x + 2\operatorname{sen}2x) + C$

24) $F(x) = \dfrac{e^{x}}{5}(\operatorname{sen}2x - 2\cos 2x) + C$

25) $F(x) = \dfrac{e^{2x}}{3}(2\operatorname{senh}x - \cosh x) + C$

26) $F(x) = \dfrac{xe^{2x}}{13}(2\operatorname{sen}3x - 3\cos 3x) + \dfrac{e^{2x}}{169}(5\operatorname{sen}3x + 12\cos 3x) + C$

27) $F(x) = \dfrac{x^4}{16}(4\lg|x| - 1)$

28) $F(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \dfrac{1}{2}\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C$

29) $F(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\operatorname{arcsen}\dfrac{x}{2} + C$

30) $F(x) = -\dfrac{1}{3}\left[\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x + 2\cos 2x\cos x\right] + C$

31) $F(x) = \dfrac{1}{7}\left[4\cos 3x\operatorname{sen}4x - 3\operatorname{sen}3x\cos 4x\right] + C$

32) $F(x) = \dfrac{xe^{4x}}{8}\left[\cos 4x + \operatorname{sen}4x\right] - \dfrac{e^{4x}}{32}\operatorname{sen}4x + C$

Soluzioni

1) Scegliendo 1 come fattore differenziale e osservando che

$$(x)'=1,\quad \left(\sqrt{1-x^2}\right)'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

si ha

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int\frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int\sqrt{1-x^2}\,dx$$

e quindi ricordando che $(\operatorname{arcsen}x)'=1/\sqrt{1-x^2}$ si ha

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen}x\right) + C.$$

Si osservi che si tratta di un caso particolare dell'esercizio **21)** del paragrafo 2.1.

2) Scegliendo $\dfrac{1}{x^2}$ come fattore differenziale e osservando che

$$\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2},\quad \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\quad (\operatorname{arcsen}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

si ottiene:

$$\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\sqrt{1-x^2} - \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}x + C.$$

3) Scegliendo $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ come fattore differenziale e osservando che

$$\left(-\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\quad (\operatorname{arcsen}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

si ha

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ arcsen } dx = -\sqrt{1-x^2} \text{ arcsenx} + \int 1 \cdot dx =$$

$$= -\sqrt{1-x^2} \text{ arcsenx}+x+C.$$

4) Scegliendo 1 come fattore differenziale, osservando che

$$\left(\sqrt{x^2-1}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (x)'=1$$

si ottiene

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = x\sqrt{x^2-1} -$$

$$- \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx - \int \sqrt{x^2-1}\, dx.$$

Ricordando che $(\text{settcoshx})' = 1/\sqrt{x^2-1}$ si ha

$$\int \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \text{settcoshx}\right)+C.$$

Si osservi che si tratta di un caso particolare dell'esercizio **20)** del paragrafo 3.1.

5) Scegliendo 1 come fattore differenziale, osservando che

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (x)'=1$$

si ha

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = x\sqrt{1+x^2} +$$

$$+ \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx - \int \sqrt{1+x^2}\, dx.$$

Ricordando che $(\text{settsenhx})' = 1/\sqrt{1+x^2}$ si ottiene

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \text{settsenhx}\right)+C.$$

6) Scegliendo $x\sqrt{1-x^2}$ come fattore differenziale, osservando che

$$\left(-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)' = x\sqrt{1-x^2}, \quad (\text{arcsenx})' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

si ha

$$\int x\sqrt{1-x^2} \text{ arcsenx}\, dx = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} \text{arcsenx} + \frac{1}{3}\int \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\, dx$$

$$= -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} \text{arcsenx} + \frac{1}{3}\int \left(1-x^2\right) dx$$

$$= -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} \text{arcsenx} - \frac{1}{9}x^3 + \frac{x}{3} + C.$$

7) Scegliendo $1/x$ come fattore differenziale e osservando che

$$(\lg \lg x)' = \frac{1}{x \lg x}, \quad (\lg x)' = \frac{1}{x}$$

si ottiene

$$\int \frac{\lg \lg x}{x}\, dx = \lg x \lg\lg x - \int \frac{1}{x}\, dx = \lg x\left(\lg\lg x - 1\right)+C.$$

8) Scegliendo x^2 come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2, \quad (\text{arctgx})' = \frac{1}{1+x^2}$$

si ottiene

$$\int x^2 \text{ arctgx}\, dx = \frac{x^3}{3} \text{ arctgx} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3+x-x}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \text{ arctgx} - \frac{1}{3} \int x dx + \frac{1}{3} \int \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \text{ arctgx} - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \int \frac{1}{1+x^2} d\left(1 + x^2\right).$$

Risulta così

$$\int x^2 \text{ arctgx } dx = \frac{x^3}{3} \text{ arctgx} - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \lg\left(1+x^2\right)+C.$$

9) Scegliendo x come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\text{arctgx}\right)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$$

si ha

$$\int x \text{ arctgx } dx = \frac{x^2}{2} \text{ arctgx} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \text{ arctgx} - \frac{1}{2} \int 1dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \text{ arctgx} - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \text{ arctgx}+C.$$

10) Scegliendo x come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\text{arcsenx}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$$

si ha

$$\int x \text{ arcsenx } dx = \frac{x^2}{2} \text{ arcsenx} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \text{ arcsenx} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} dx.$$

Ricordando il risultato dell'esercizio 1) si ha

$$\int x \text{ arcsenx } dx = \frac{x^2}{2} \text{ arcsenx} - \frac{1}{4} \text{ arcsenx} + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2}$$

11) Scegliendo x come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\text{settsenhx}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$$

si ha

$$\int x \text{ settsenhx } dx = \frac{x^2}{2} \text{ settsenhx} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \text{ settsenhx} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \sqrt{1+x^2} dx.$$

Ricordando il risultato dell'esercizio 5) si ha

$$\int x \text{ settsenhx } dx = \frac{x^2}{2} \text{ settsenhx} + \frac{1}{4} \text{ settsenhx} -$$

$$- \frac{1}{4} x \sqrt{1+x^2}+C.$$

12) Scegliendo x come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\text{settcoshx}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$$

si ha

$$\int x \text{ settcoshx } dx = \frac{x^2}{2} \text{ settcoshx} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \text{ settcoshx} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx - \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2-1} dx.$$

Ricordando il risultato dell'esercizio 4) si ha

$$\int x \operatorname{settcosh}x\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{settcosh}x - \frac{1}{4}x\sqrt{x^2-1} - $$
$$- \frac{1}{4}\operatorname{settcosh}+C.$$

13) Scegliendo senx come fattore differenziale, osservando che $(-\cos x)'=\operatorname{sen}x$, $(x\operatorname{sen}x)'=\operatorname{sen}x+x\cos x$ e ricordando che $\cos^2x=1-\operatorname{sen}^2x$ si ha

$$\int x\operatorname{sen}^2x\,dx=-x\cos x\operatorname{sen}x+\int \operatorname{sen}x\cos x\,dx+\int x\cos^2x\,dx$$
$$= -x\operatorname{sen}x\cos x+\int \operatorname{sen}x\,d(\operatorname{sen}x)+\int x\,dx-\int x\operatorname{sen}^2x\,dx$$

Ricordando la prima regola di integrazione per sostituzione, poiché $\left(\frac{x^2}{2}\right)'=x$, si ricava l'identità

$$2\int x\operatorname{sen}^2x\,dx = -x\operatorname{sen}x\cos x+\frac{\operatorname{sen}^2x}{2}+\frac{x^2}{2}+C$$

e dunque

$$\int x\operatorname{sen}^2x\,dx = -\frac{x\operatorname{sen}x\cos x}{2}+\frac{\operatorname{sen}^2x}{4}+\frac{x^2}{4}+C.$$

14) Scegliendo cosx come fattore differenziale, osservando che $(\operatorname{sen}x)'=\cos x$, $(x\cos x)'=\cos x-x\operatorname{sen}x$ e ricordando che $\operatorname{sen}^2x=1-\cos^2x$ si ha

$$\int x\cos^2x\,dx=x\operatorname{sen}x\cos x-\int \operatorname{sen}x\cos x\,dx+\int x\operatorname{sen}^2x\,dx=$$
$$= x\operatorname{sen}x\cos x-\int \operatorname{sen}x\,d(\operatorname{sen}x)+\int x\,dx-\int x\cos^2x\,dx$$

Ricordando la prima regola di integrazione per sostituzione, poiché $(x^2/2)'=x$, si ricava l'identità

$$2\int x\cos^2x\,dx = +x\operatorname{sen}x\cos x-\frac{\operatorname{sen}^2x}{2}+\frac{x^2}{2}+C$$

e dunque

$$\int x\cos^2x\,dx = +\frac{x\operatorname{sen}x\cos x}{2}-\frac{\operatorname{sen}^2x}{4}+\frac{x^2}{4}+C.$$

15) Scegliendo $1/\cos^2x$ come fattore differenziale, osservando che $(\operatorname{tg}x)'=1/\cos^2x$, $(x)'=1$ e ricordando il risultato dell'esercizio **7)** del paragrafo 2.3 si ha

$$\int \frac{x}{\cos^2x}\,dx = x\operatorname{tg}x-\int \operatorname{tg}x\,dx = x\operatorname{tg}x+\lg|\cos x|+C.$$

16) Scegliendo $1/\operatorname{sen}^2x$ come fattore differenziale, osservando che $\left(-\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)'=\frac{1}{\operatorname{sen}^2x}$, $(x)'=1$ e ricordando il risultato dell'esercizio **1)** del paragrafo 2.3 si ha

$$\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2x}\,dx = -\frac{x}{\operatorname{tg}x}+\int\frac{1}{\operatorname{tg}x}\,dx = -\frac{x}{\operatorname{tg}x}+\lg|\operatorname{sen}x|+C.$$

17) Scegliendo x come fattore differenziale, osservando che

$$(\operatorname{arctg}^2x)' = 2\operatorname{arctg}x\,\frac{1}{1+x^2},\quad \left(\frac{x^2}{2}\right)'=x$$

si ha

$$\int x\operatorname{arctg}^2x\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}^2x-\int\frac{x^2\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\,dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}^2x-\int\frac{(x^2+1-1)\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\,dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}^2x-\int\operatorname{arctg}x\,dx+\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\,dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}^2x-\int\operatorname{arctg}x\,dx+\int\operatorname{arctg}x\,d(\operatorname{arctg}x);$$

Ricordando la prima regola di integrazione per sostituzione e l'esercizio **17)** del paragrafo 3.1 si ha

$$\int x \operatorname{arctg}^2 x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}^2 x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x -$$

$$- x\operatorname{arctg}x + \lg \sqrt{1+x^2} + C.$$

18) Scegliendo come fattore differenziale $\sqrt{1-x^2}$, ricordando il risultato dell'esercizio 1) e che $(\operatorname{arcsen}x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ si ha

$$\int \sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen}x \, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen}x\right) \operatorname{arcsen}x -$$

$$- \frac{1}{2}\int x \, dx - \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen}x\right) \operatorname{arcsen}x - \frac{x^2}{4} -$$

$$- \frac{1}{2}\int \operatorname{arcsen}x \, d\left(\operatorname{arcsen}x\right)$$

e così, grazie alla prima regola di integrazione per sostituzione, si ottiene

$$\int \sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen}x \, dx = \frac{1}{2}\left(x \sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen}x\right) \operatorname{arcsen}x - \frac{x^2}{4} - \frac{\operatorname{arcsen}^2 x}{4} + C$$

19) Scegliendo x come fattore differenziale ed osservando che

$$\left(\operatorname{arcsen}^2 x\right)' = 2 \operatorname{arcsen}x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$$

si ha

$$\int x \operatorname{arcsen}^2 x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsen}^2 x - \int \frac{x^2 \operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsen}^2 x - \int \frac{\left(x^2-1+1\right) \operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsen}^2 x + \int \sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen}x \, dx - \int \frac{\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsen}^2 x + \int \sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen}x \, dx - \int \operatorname{arcsen}x \, d\left(\operatorname{arcsen}x\right) =$$

Ricordando la prima regola di integrazione per sostituzione e l'esercizio **18)** si ha

$$\int x \operatorname{arcsen}^2 x \, dx = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \operatorname{arcsen}^2 x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen}x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

20) Si osservi che

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

quindi

$$\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx - \int x \, dx.$$

Ricordando il risultato dell'esercizio **15)** e che $(x^2/2)' = 1$ si ha

$$\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx = x \operatorname{tg}x + \lg |\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$$

21) Scegliendo x^2 come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2, \quad \left(\operatorname{arcsen}^2 x\right)' = \frac{2\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

si ha

$$\int x^2 \operatorname{arcsen}^2 x \, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arcsen}^2 x - \frac{2}{3}\int \frac{x^3 \operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{arcsen}^2 x - \frac{2}{3}\int \frac{\left(x^3-x+x\right)}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arcsen}x \, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\,\text{arcsen}^2 x + \frac{2}{3}\int x\sqrt{1-x^2}\,\text{arcsen}x\,dx -$$

$$- \frac{2}{3}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\text{arcsen}x\,dx.$$

Utilizzando allora i risultati degli esercizi **3)** e **6)** si ottiene

$$\int x^2\,\text{arcsen}^2 x\,dx = \frac{x^3}{3}\,\text{arcsen}^2 x - \frac{2}{3}\,\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\,\text{arcsen}x - \frac{2}{27}\,x^3 +$$

$$+ \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}\,\text{arcsen}x - \frac{4}{9}x + C$$

$$= \frac{x^3}{3}\,\text{arcsen}^2 x - \frac{2}{27}\,x^3 - \frac{4}{9}\,x + \frac{2}{9}\sqrt{1-x^2}\,(x^2+2)\,\text{arcsen}x + C.$$

22) Seguire il procedimento usato nello svolgimento dell'es. **1)** di 3.1.

23) Seguire il procedimento usato nello svolgimento dell'es. **3)** di 3.1.

24) Seguire il procedimento usato nello svolgimento dell'es. **2)** di 3.1.

25) Seguire il procedimento usato nello svolgimento dell'es. **4)** di 3.1.

26) Seguire il procedimento usato nello svolgimento dell'es. **10)** di 3.1.

27) Seguire il procedimento usato nello svolgimento dell'es. **19)** di 3.1.

28) Seguire il procedimento usato nello svolgimento dell'es. **20)** di 3.1.

29) Seguire il procedimento usato nello svolgimento dell'es. **21)** di 3.1.

30) Seguire il procedimento usato nello svolgimento dell'es. **24)** di 3.1.

31) Seguire il procedimento usato nello svolgimento dell'es. **23)** di 3.1.

32) Seguire il procedimento usato nello svolgimento dell'es. **11)** di 3.1.

4. Integrazione con formule di riduzione

Le cosiddette formule di riduzione si basano su applicazioni eventualmente ripetute delle regole di integrazione per parti.

Con esse un integrale indefinito del tipo

$$\int g(x)\,(f(x))^n\,dx$$

con n naturale, viene ad essere espresso, talora attraverso funzioni elementari e un integrale indefinito del tipo

$$\int g(x)\,(f(x))^m\,dx$$

con $n<m$ (per lo più m sarà $n-1$) pervenendo così ad un abbassamento di "grado" nell'esponente cui è elevata la funzione f.

In linea di principio se iterando il ragionamento si perviene all'integrale indefinito

$$\int g(x)\,f(x)\,dx$$

e se esso è calcolabile elementarmente si potrebbero dare anche formule esplicite per l'integrale di partenza, formule, cioè, in cui non appaiono integrali indefiniti. Tali formule, tuttavia, sono spesso molto elaborate.

A titolo di esempio si esamini l'esercizio 1) del paragrafo 4.1.

4.1 Formule di riduzione notevoli

Si stabiliscano delle formule di riduzione per i seguenti integrali indefiniti

1) $\int x^n e^{\alpha x}\, dx$

2) $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$

3) $\int \cos^n x\, dx$

4) $\int \operatorname{tg}^n x\, dx$

5) $\int (\operatorname{senh} x)^n\, dx$

6) $\int (\cosh x)^n\, dx$

7) $\int (\operatorname{tgh} x)^n\, dx$

8) $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^n x}\, dx$

9) $\int \frac{1}{\cos^n x}\, dx$

10) $\int \frac{1}{(\operatorname{senh} x)^n}\, dx$

11) $\int \frac{1}{(\cosh x)^n}\, dx$

12) $\int x^n e^{\alpha x^2}\, dx$

13) $\int e^x \operatorname{sen}^n x\, dx$

14) $\int e^x \cos^n x\, dx$

15) $\int e^x (\operatorname{senh} x)^n\, dx$

16) $\int e^x (\cosh x)^n\, dx$

17) $\int x^n e^{\alpha x} \operatorname{sen}\beta x\, dx$

18) $\int x^n e^{\alpha x} \cos\beta x\, dx$

19) $\int x^n e^{\alpha x} \operatorname{senh}\beta x\, dx \quad \alpha\neq\pm\beta$

20) $\int x^n e^{\alpha x} \cosh\beta x\, dx \quad \alpha\neq\pm\beta$

21) $\int \operatorname{arcsen}^n x\, dx$

22) $\int (\operatorname{settsenh} x)^n\, dx$

23) $\int (\operatorname{settcosh} x)^n\, dx$

24) $\int x^\alpha \lg^n |x|\, dx \quad \alpha\neq -1$

25) $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$

19)* $\int x^n e^x \operatorname{senh} x\, dx$

20)* $\int x^n e^x \cosh x\, dx$

Risultati

1) $F(x) = \frac{x^n}{\alpha} e^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} e^{\alpha x}\, dx$

2) $F(x) = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1}x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2}x\, dx$

3) $F(x) = \frac{\cos^{n-1}x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}x\, dx$

4) $F(x) = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1}x - \int \operatorname{tg}^{n-2}x\, dx$

5) $F(x) = \frac{1}{n} \operatorname{senh}^{n-1}x \cosh x - \frac{n-1}{n} \int \operatorname{senh}^{n-2}x\, dx$

6) $F(x) = \frac{1}{n} \cosh^{n-1}x \operatorname{senh} x + \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2}x\, dx$

7) $F(x) = -\frac{1}{n-1} \operatorname{tgh}^{n-1}x + \int \operatorname{tgh}^{n-2}x\, dx$

8) $F(x) = -\frac{\cos x}{(n-1)\operatorname{sen}^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{\operatorname{sen}^{n-2}x}\, dx$

9) $F(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{\cos^{n-2}x}\, dx$

10) $F(x) = -\frac{\cosh x}{(n-1)(\operatorname{senh} x)^{n-1}} - \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{(\operatorname{senh} x)^{n-2}}\, dx$

11) $F(x) = \frac{1}{n-1} \frac{\operatorname{senh} x}{(\cosh x)^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{(\cosh x)^{n-2}}\, dx$

12) $F(x) = x^{n-1} \frac{e^{\alpha x^2}}{2\alpha} - \frac{n-1}{2\alpha} \int x^{n-2} e^{\alpha x^2}\, dx$

13) $F(x) = \frac{1}{n^2+1} e^x \operatorname{sen}^n x - \frac{n e^x}{n^2+1} \operatorname{sen}^{n-1}x \cos x +$

$+ \frac{n(n-1)}{n^2+1} \int e^x \operatorname{sen}^{n-2}x\, dx$

14) $F(x) = \frac{1}{1+n^2} e^x \cos^n x + \frac{n}{1+n^2} e^x \cos^{n-1}x \operatorname{sen} x +$

$+ \frac{n(n-1)}{1+n^2} \int e^x \cos^{n-2}x\, dx$

15) $F(x) = \frac{1}{1-n^2}\, e^x\, (\operatorname{senh}x)^n - \frac{n}{1-n^2}\, e^x\, (\operatorname{senh}x)^{n-1} \cosh x -$

$- \frac{n}{n+1} \int e^x\, (\operatorname{senh}x)^{n-2}\, dx$

16) $F(x) = \frac{1}{1-n^2}\, e^x\, (\cosh x)^n - \frac{n}{1-n^2}\, e^x\, (\cosh x)^{n-1} \operatorname{senh}x +$

$+ \frac{n}{n+1} \int e^x\, (\cosh x)^{n-2}\, dx$

17) $F(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\, e^{\alpha x} x^n \operatorname{sen}\beta x - \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\, e^{\alpha x} x^n \cos\beta x + \frac{n}{\alpha^2+\beta^2}\, e^{\alpha x} x^{n-1} \operatorname{sen}\beta x -$

$- \frac{2\alpha n}{\alpha^2+\beta^2} \int e^{\alpha x}\, x^{n-1} \operatorname{sen}\beta x\, dx - \frac{n\,(n-1)}{\alpha^2+\beta^2} \int e^{\alpha x} x^{n-2} \operatorname{sen}\beta x\, dx$

18) $F(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\, e^{\alpha x} x^n \cos\beta x + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\, e^{\alpha x}\, x^n \operatorname{sen}\beta x + \frac{n}{\alpha^2+\beta^2}\, e^{\alpha x} x^{n-1} \cos\beta x -$

$- \frac{2\alpha n}{\alpha^2+\beta^2} \int e^{\alpha x} x^{n-1} \cos\beta x\, dx - \frac{n\,(n-1)}{\alpha^2+\beta^2} \int e^{\alpha x}\, x^{n-2} \cos\beta x\, dx$

19) $F(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\, e^{\alpha x} x^n \operatorname{senh}\beta x - \frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}\, e^{\alpha x} x^n \cosh\beta x + \frac{n}{\alpha^2-\beta^2}\, e^{\alpha x} x^{n-1} \operatorname{senh}\beta x -$

$- \frac{2\alpha n}{\alpha^2-\beta^2} \int e^{\alpha x} x^{n-1} \operatorname{senh}\beta x\, dx - \frac{(n-1)\, n}{\alpha^2-\beta^2} \int e^{\alpha x}\, x^{n-2} \operatorname{senh}\beta x\, dx$

20) $F(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\, e^{\alpha x} x^n \cosh\beta x - \frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}\, e^{\alpha x} x^n \operatorname{senh}\beta x + \frac{n}{\alpha^2-\beta^2}\, e^{\alpha x} x^{n-1} \cosh\beta x -$

$- \frac{2\alpha n}{\alpha^2-\beta^2} \int e^{\alpha x} x^{n-1} \cosh\beta x\, dx - \frac{(n-1)\, n}{\alpha^2-\beta^2} \int e^{\alpha x}\, x^{n-2} \cosh\beta x\, dx$

21) $F(x) = x\,(\operatorname{arcsen}x)^n + n\sqrt{1-x^2}\,(\operatorname{arcsen}x)^{n-1} - n\,(n-1) \int (\operatorname{arcsen}x)^{n-2} dx$

22) $F(x) = x\,(\operatorname{settsenh}x)^n - n\sqrt{x^2+1}\,(\operatorname{settsenh}x)^{n-1} +$

$+ n\,(n-1) \int (\operatorname{settsenh}x)^{n-2} dx$

23) $F(x) = x\,(\operatorname{settcosh}x)^n - n\sqrt{x^2-1}\,(\operatorname{settcosh}x)^{n-1} +$

$+ n\,(n-1) \int (\operatorname{settcosh}x)^{n-2} dx$

24) $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\, \lg^n |x| - \frac{n}{\alpha+1} \int x^\alpha\, \lg^{n-1} |x|\, dx$

25) $F(x) = \frac{1}{2n-2}\, \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\, dx$

19)* $F(x) = -\frac{x^{n+1}}{2\,(n+1)} - \frac{x^n}{4} + \frac{1}{4}\, x^n\, e^{2x} - \frac{n}{2} \int x^{n-1}\, e^x \operatorname{senh}x\, dx$

20)* $F(x) = \frac{x^{n+1}}{2\,(n+1)} + \frac{x^n}{4} + \frac{1}{4}\, x^n\, e^{2x} - \frac{n}{2} \int x^{n-1}\, e^x \cosh x\, dx$

Soluzioni

1) Scegliendo $e^{\alpha x}$ come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)' = e^{\alpha x}, \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

si ha

$$\int x^n\, e^{\alpha x}\, dx = \frac{x^n}{\alpha}\, e^{\alpha x} - \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1}\, e^{\alpha x}\, dx.$$

2) Scegliendo senx come fattore differenziale, osservando che

$$(-\cos x)' = \operatorname{sen}x, \quad (\operatorname{sen}^{n-1}x) = (n-1)\, \operatorname{sen}^{n-2}x \cos x$$

e ricordando che $\cos^2x = 1 - \operatorname{sen}^2x$, si ha

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\cos x\, \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2}x \cos^2 x\, dx =$$

$$= -\operatorname{sen}^{n-1}x \cos x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2}x\, dx - (n-1) \int \operatorname{sen}^n x\, dx.$$

Si ottiene così l'identità

$$n \int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\operatorname{sen}^{n-1}x \cos x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2}x\, dx$$

e di qui subito il risultato.

3) Si scelga cosx come fattore differenziale e si proceda come in 2).

4) Poiché

$$\mathrm{tg}^n x = \frac{\mathrm{sen}x}{\cos^n x}\ \mathrm{sen}^{n-1}x,$$

scegliendo $\mathrm{sen}x/\cos^n x$ come fattore differenziale e osservando che

$$(\mathrm{sen}^{n-1}x)' = (n-1)\ \mathrm{sen}^{n-2}x\ \cos x,\quad \left(\frac{1}{\cos^{n-1}x}\right)' = (n-1)\ \frac{\mathrm{sen}x}{\cos^n x}$$

si ha

$$\int \mathrm{tg}^n x\ dx = \frac{1}{n-1}\ \frac{\mathrm{sen}^{n-1}x}{\cos^{n-1}x} - \int \frac{\mathrm{sen}^{n-2}x\ \cos x}{\cos^{n-1}x}\ dx =$$
$$= \frac{1}{n-1}\ \mathrm{tg}^{n-1}x - \int \mathrm{tg}^{n-2}x\ dx.$$

5) Scegliendo senhx come fattore differenziale, osservando che

$$(\cosh x)' = \mathrm{senh}x,\quad ((\mathrm{senh}x)^{n-1})' = (n-1)\ (\mathrm{senh}x)^{n-2}\cosh x$$

e ricordando che $(\cosh x)^2 = 1+(\mathrm{senh}x)^2$ si ha

$$\int (\mathrm{senh}x)^n\ dx = \cosh x\ (\mathrm{senh}x)^{n-1} - (n-1)\int (\mathrm{senh}x)^{n-2}\ (\cosh x)^2\ dx =$$
$$= (\mathrm{senh}x)^{n-1}\cosh x - (n-1)\int (\mathrm{senh}x)^{n-2}\ dx - (n-1)\int (\mathrm{senh}x)^n\ dx.$$

Si ottiene così l'identità

$$n\int (\mathrm{senh}x)^n\ dx = (\mathrm{senh}x)^{n-1}\cosh x - (n-1)\int (\mathrm{senh}x)^{n-2}\ dx$$

e di qui subito il risultato.

6) Si scelga coshx come fattore differenziale e si proceda come in 5).

7) Poiché

$$(\mathrm{tgh}x)^n = \frac{\mathrm{senh}x}{(\cosh x)^n}\ (\mathrm{senh}x)^{n-1},$$

scegliendo $\frac{\mathrm{senh}x}{(\cosh x)^n}$ come fattore differenziale e osservando che:

$$((\mathrm{senh}x)^{n-1})' = (n-1)\ (\mathrm{senh}x)^{n-2}\cosh x,$$

$$\left(\frac{1}{(\cosh x)^{n-1}}\right)' = -(n-1)\ \frac{\mathrm{senh}x}{(\cosh x)^n}$$

si ottiene

$$\int (\mathrm{tgh}x)^n\ dx = -\frac{1}{n-1}\ \frac{(\mathrm{senh}x)^{n-1}}{(\cosh x)^{n-1}} + \int \frac{(\mathrm{senh}x)^{n-2}}{(\cosh x)^{n-1}}\cosh x\ dx =$$
$$= -\frac{1}{n-1}\ (\mathrm{tgh}x)^{n-1} + \int (\mathrm{tgh}x)^{n-2}\ dx.$$

8) Poiché:

$$\frac{1}{\mathrm{sen}^n x} = \frac{1}{\mathrm{sen}^{n-2}x}\ \frac{1}{\mathrm{sen}^2 x},$$

scegliendo $1/\mathrm{sen}^2 x$ come fattore differenziale, osservando che

$$\left(\frac{1}{\mathrm{sen}^{n-2}x}\right)' = -(n-2)\ \frac{\cos x}{\mathrm{sen}^{n-1}x},\quad \left(\frac{1}{\mathrm{tg}x}\right)' = -\frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}$$

e ricordando che $\cos^2 x=1-\mathrm{sen}^2 x$, si ha

$$\int \frac{1}{\mathrm{sen}^n x}\ dx = -\frac{1}{\mathrm{tg}x}\ \frac{1}{\mathrm{sen}^{n-2}x} - (n-2)\int \frac{1}{\mathrm{tg}x}\ \frac{\cos x}{\mathrm{sen}^{n-1}x}\ dx =$$
$$= -\frac{\cos x}{\mathrm{sen}^{n-1}x} - (n-2)\int \frac{1}{\mathrm{sen}^n x}\ dx + (n-2)\int \frac{1}{\mathrm{sen}^{n-2}x}\ dx.$$

Si ottiene così l'identità

$$(n-1)\int \frac{1}{\mathrm{sen}^n x}\,dx = -\frac{\cos x}{\mathrm{sen}^{n-1}x} + (n-2)\int \frac{1}{\mathrm{sen}^{n-2}x}\,dx$$

e di qui subito il risultato.

9) Si scelga $1/\cos^2 x$ come fattore differenziale e si proceda come in **8)**.

10) Poiché

$$\frac{1}{(\mathrm{senh}x)^n} = \frac{1}{(\mathrm{senh}x)^2}\,\frac{1}{(\mathrm{senh}x)^{n-2}},$$

scegliendo come fattore differenziale $1/(\mathrm{senh}x)^2$, osservando che

$$\left(\frac{1}{(\mathrm{senh}x)^{n-2}}\right)' = -(n-2)\,\frac{\cosh x}{(\mathrm{senh}x)^{n-1}},\quad \left(\frac{1}{\mathrm{tgh}x}\right)' = -\frac{1}{(\mathrm{senh}x)^2}$$

e ricordando che $(\cosh x)^2 = 1 + (\mathrm{senh}x)^2$, si ha

$$\int \frac{1}{(\mathrm{senh}x)^n}\,dx = -\frac{1}{\mathrm{tgh}x\,(\mathrm{senh}x)^{n-2}} - (n-2)\int \frac{\cosh x}{\mathrm{tgh}x\,(\mathrm{senh}x)^{n-1}}\,dx =$$
$$= -\frac{\cosh x}{(\mathrm{senh}x)^{n-1}} - (n-2)\int \frac{1}{(\mathrm{senh}x)^n}\,dx - (n-2)\int \frac{1}{(\mathrm{senh}x)^{n-2}}\,dx.$$

Si ottiene così l'identità

$$(n-1)\int \frac{1}{(\mathrm{senh}x)^n}\,dx = -\frac{\cosh x}{(\mathrm{senh}x)^{n-1}} - (n-2)\int \frac{1}{(\mathrm{senh}x)^{n-2}}\,dx$$

e di qui subito il risultato.

11) Si scelga $1/(\cosh x)^2$ come fattore differenziale e si proceda come in **10)**.

12) Scegliendo $x\,e^{\alpha x^2}$ come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\frac{1}{2\alpha}\,e^{\alpha x^2}\right)' = x\,e^{\alpha x^2},\quad \left(x^{n-1}\right)' = (n-1)\,x^{n-2}$$

si ha

$$\int x^n e^{\alpha x^2}\,dx = \frac{x^{n-1}e^{\alpha x^2}}{2\alpha} - \frac{(n-1)}{2\alpha}\int x^{n-2}e^{\alpha x^2}\,dx.$$

13) Scegliendo e^x come fattore differenziale, osservando che

$$(e^x)' = e^x,\quad (\mathrm{sen}^n x)' = n\,\mathrm{sen}^{n-1}x\cos x$$

si ha

$$\int e^x\,\mathrm{sen}^n x\,dx = e^x\,\mathrm{sen}^n x - n\int e^x\,\mathrm{sen}^{n-1}x\cos x\,dx.$$

Scegliendo nuovamente, nell'integrale sulla destra, come fattore differenziale e^x, osservando che $(e^x)' = e^x$, che $(\mathrm{sen}^{n-1}x\cos x)' = (n-1)\,\mathrm{sen}^{n-2}x\cos^2 x - \mathrm{sen}^n x$ e ricordando che $\cos^2 x = 1 - \mathrm{sen}^2 x$, si ottiene

$$\int e^x\,\mathrm{sen}^n x\,dx = e^x\,\mathrm{sen}^n x - ne^x\,\mathrm{sen}^{n-1}x\cos x +$$
$$+ n(n-1)\int e^x\,\mathrm{sen}^{n-2}\cos^2 x\,dx - n\int e^x\,\mathrm{sen}^n x\,dx = e^x\,\mathrm{sen}^n x -$$
$$- ne^x\,\mathrm{sen}^{n-1}x\cos x + n(n-1)\int e^x\,\mathrm{sen}^{n-2}x\,dx - n^2\int \mathrm{sen}^n x\,dx.$$

Si ricava così l'identità

$$(1+n^2)\int e^x\,\mathrm{sen}^n x\,dx = e^x\,\mathrm{sen}^n x - n\,e^x\,\mathrm{sen}^{n-1}x\cos x +$$
$$+ n\,(n-1)\int e^x\,\mathrm{sen}^{n-2}x\,dx$$

e di qui subito il risultato.

14) Si proceda come in **13)**.

15) Scegliendo e^x come fattore differenziale, osservando che

$$((\mathrm{senh}x)^n)' = n(\mathrm{senh}x)^{n-1}\cosh x,\quad (e^x)' = e^x$$

si ha

$$\int e^x (\mathrm{senh}x)^n\, dx = e^x (\mathrm{senh}x)^n - n \int e^x (\mathrm{senh}x)^{n-1} \cosh x\, dx$$

Scegliendo nuovamente e^x come fattore differenziale nell'integrale sulla destra, osservando che $(e^x)'=e^x$, che inoltre

$$\left((\mathrm{senh}x)^{n-1} \cosh x\right)' = (n-1)\, (\mathrm{senh}x)^{n-2} \cosh^2 x + (\mathrm{senh}x)^n$$

e ricordando che $(\cosh x)^2 = 1+(\mathrm{senh}x)^2$, si ha

$$\int e^x (\mathrm{senh}x)^n\, dx = e^x (\mathrm{senh}x)^n - n\, e^x (\mathrm{senh}x)^{n-1} \cosh x +$$

$$+n\,(n-1) \int e^x (\mathrm{senh}x)^{n-2} (\cosh x)^2\, dx + n \int e^x (\mathrm{senh}x)^n\, dx =$$

$$= e^x (\mathrm{senh}x)^n - n e^x (\mathrm{senh}x)^{n-1} \cosh x + n(n-1) \int e^x (\mathrm{senh}x)^{n-2}\, dx +$$

$$+ n^2 \int e^x (\mathrm{senh}x)^n\, dx.$$

Si ottiene così l'identità

$$(1-n^2) \int e^x (\mathrm{senh}x)^n\, dx = e^x (\mathrm{senh}x)^n -$$

$$- n\, e^x (\mathrm{senh}x)^{n-1} \cosh x + n\,(n-1) \int e^x (\mathrm{senh}x)^{n-2}\, dx$$

e di qui subito il risultato.

16) Si proceda come in 15).

17) Scegliendo $e^{\alpha x}$ come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)' = e^{\alpha x},\quad (x^n\, \mathrm{sen}\beta x)' = n x^{n-1}\, \mathrm{sen}\beta x + \beta x^n \cos\beta x,$$

si ha

$$\int x^n e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} x^n\, \mathrm{sen}\beta x - \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\beta x\, dx -$$

$$- \frac{\beta}{\alpha} \int x^n e^{\alpha x} \cos\beta x\, dx.$$

Scegliendo $e^{\alpha x}$ nuovamente come fattore differenziale nel secondo integrale sulla destra e osservando che

$$\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)' = e^{\alpha x},\quad (x^n \cos\beta x)' = n x^{n-1} \cos\beta x - \beta x^n\, \mathrm{sen}\beta x$$

si ha

$$\int x^n e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} x^n\, \mathrm{sen}\beta x - \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} x^n \cos\beta x +$$

$$+ \frac{n\beta}{\alpha^2} \int e^{\alpha x} x^{n-1} \cos\beta x\, dx - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int x^n e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\beta x\, dx -$$

$$- \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\beta x\, dx.$$

Scegliendo nel primo integrale sulla destra $\cos\beta x$ come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\frac{\mathrm{sen}\beta x}{\beta}\right)' = \cos\beta x,\quad (x^{n-1} e^{\alpha x})' = (n-1)\, x^{n-2} e^{\alpha x} + \alpha x^{n-1} e^{\alpha x}$$

si ha

$$\int x^n e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} x^n\, \mathrm{sen}\beta x - \frac{\beta x^n}{\alpha^2} e^{\alpha x} \cos\beta x + \frac{n}{\alpha^2} x^{n-1} e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\beta x -$$

$$- \frac{n\,(n-1)}{\alpha^2} \int x^{n-2} e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\beta x\, dx - \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\beta x\, dx -$$

$$- \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int x^n e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\beta x\, dx - \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\beta x\, dx.$$

Si ricava così l'identità

$$\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \int x^n e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} x^n\, \mathrm{sen}\beta x - \frac{\beta}{\alpha^2} x^n e^{\alpha x} \cos\beta x +$$

$$+ \frac{n}{\alpha^2} x^{n-1} e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\beta x - \frac{2n}{\alpha} \int x^{n-1} e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\beta x\, dx -$$

$$- \frac{n\,(n-1)}{\alpha^2} \int x^{n-2} e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}\beta x\, dx$$

e di qui subito il risultato. A tale risultato si può pervenire anche scegliendo come fattore differenziale dapprima senβx e poi nei due integrali che si ottengono cosβx.

18) Si proceda come in **17)**.

19) Scegliendo $e^{\alpha x}$ come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)' = e^{\alpha x}, \quad \left(x^n \operatorname{senh}\beta x\right)' = nx^{n-1} \operatorname{senh}\beta x + \beta x^n \cosh\beta x$$

si ha

$$\int x^n e^{\alpha x} \operatorname{senh}\beta x \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} x^n \operatorname{senh}\beta x - \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} e^{\alpha x} \operatorname{senh}\beta x \, dx -$$

$$- \frac{\beta}{\alpha} \int x^n e^{\alpha x} \cosh\beta x \, dx.$$

Scegliendo $e^{\alpha x}$ nuovamente come fattore differenziale nel secondo integrale sulla destra e osservando che

$$\left(x^n \cosh\beta x\right)' = nx^{n-1} \cosh\beta x + \beta x^n \operatorname{senh}\beta x, \quad \left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)' = e^{\alpha x}$$

si ha

$$\int x^n e^{\alpha x} \operatorname{senh}\beta x \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} x^n \operatorname{senh}\beta x - \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} x^n \cosh\beta x +$$

$$+ \frac{n\beta}{\alpha^2} \int e^{\alpha x} x^{n-1} \cosh \beta x \, dx + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int x^n e^{\alpha x} \operatorname{senh}\beta x \, dx -$$

$$- \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} e^{\alpha x} \operatorname{senh} \beta x \, dx.$$

Scegliendo nel primo integrale sulla destra coshβx come fattore differenziale e osservando che

$$\left(x^{n-1} e^{\alpha x}\right)' = (n-1)\, x^{n-2} e^{\alpha x} + \alpha x^{n-1} e^{\alpha x}, \quad \left(\frac{\operatorname{senh}\beta x}{\beta}\right)' = \cosh\beta x$$

si ha

$$\int x^n e^{\alpha x} \operatorname{senh}\beta x \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} x^n \operatorname{senh}\beta x - \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} x^n \cosh\beta x + \frac{n}{\alpha^2} x^{n-1} e^{\alpha x} \operatorname{senh}\beta x -$$

$$- \frac{n(n-1)}{\alpha^2} \int x^{n-2} e^{\alpha x} \operatorname{senh}\beta x \, dx - \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} e^{\alpha x} \operatorname{senh}\beta x \, dx +$$

$$+ \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int x^n e^{\alpha x} \operatorname{senh}\beta x \, dx - \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1} e^{\alpha x} \operatorname{senh}\beta x \, dx.$$

Si ricava così l'identità

$$\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \int x^n e^{\alpha x} \operatorname{senh}\beta x \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} x^n \operatorname{senh}\beta x - \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} x^n \cosh\beta x +$$

$$+ \frac{n}{\alpha^2} x^{n-1} e^{\alpha x} \operatorname{senh}\beta x - \frac{2n}{\alpha} \int x^{n-1} e^{\alpha x} \operatorname{senh}\beta x \, dx -$$

$$- \frac{n(n-1)}{\alpha^2} \int x^{n-2} e^{\alpha x} \operatorname{senh}\beta x \, dx$$

e di qui subito il risultato.

20) Si proceda come in **19)**.

21) Scegliendo 1 come fattore differenziale ed osservando che

$$\left(\operatorname{arcsen}^n x\right)' = \frac{n \operatorname{arcsen}^{n-1} x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (x)' = 1$$

si ha

$$\int \operatorname{arcsen}^n x \, dx = x \operatorname{arcsen}^n x - n \int \frac{x \operatorname{arcsen}^{n-1} x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Scegliendo $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ come fattore differenziale ed osservando che

$$\left(-\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \left(\operatorname{arcsen}^{n-1} x\right)' = \frac{(n-1) \operatorname{arcsen}^{n-2} x}{\sqrt{1-x^2}}$$

si ha

$$\int \operatorname{arcsen}^n x \, dx = x \operatorname{arcsen}^n x + n\sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen}^{n-1} x -$$

$$- n(n-1) \int \operatorname{arcsen}^{n-2} x \, dx.$$

22) Scegliendo 1 come fattore differenziale ed osservando che

$$\left((\text{settsenh}x)^n\right)' = \frac{n\,(\text{settsenh}x)^{n-1}}{\sqrt{1+x^2}},\quad (x)'=1$$

si ha

$$\int (\text{settsenh}x)^n\,dx = x\,(\text{settsenh}x)^n - n\int \frac{x\,(\text{settsenh}x)^{n-1}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

Scegliendo $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ come fattore differenziale ed osservando che

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\quad \left((\text{settsenh}x)^{n-1}\right)' = \frac{(n-1)\,(\text{settsenh}x)^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

si ha

$$\int (\text{settsenh}x)^n\,dx = x\,\frac{(\text{settsenh}x)^{n-1}}{\sqrt{1+x^2}} -$$

$$- n\sqrt{1+x^2}\,(\text{settsenh}x)^{n-1} + (n-1)\,n\int (\text{settsenh}x)^{n-2}\,dx.$$

23) Si proceda come nell'esercizio 22).

24) Scegliendo x^2 come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^\alpha\ (\alpha\neq-1),\quad \left(\lg^n|x|\right)' = \frac{n\,\lg^{n-1}|x|}{x}$$

si ha

$$\int x^\alpha \lg^n|x|\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\lg^n|x| - \frac{n}{\alpha+1}\int \frac{x^{\alpha+1}\lg^{n-1}|x|}{x}\,dx$$

da cui subito il risultato.

25) Scegliendo 1 come fattore differenziale e osservando che

$$x'=1,\quad \left(\frac{1}{(1+x^2)^m}\right)' = -\frac{2mx}{(1+x^2)^{m+1}}$$

si ha

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^m}\,dx = \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{m+1}}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m\int \frac{1}{(1+x^2)^m}\,dx - 2m\int \frac{1}{(1+x^2)^{m+1}}\,dx.$$

Si ottiene così l'identità

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{m+1}}\,dx = \frac{1}{2m}\,\frac{x}{(1+x^2)^m} + \frac{2m-1}{2m}\int \frac{1}{(1+x^2)^m}\,dx.$$

Ponendo m=n-1 si ha il risultato.

19)* Poiché $e^x\,\text{senh}x=(e^{2x}-1)/2$ si ha

$$\int x^n e^x\,\text{senh}x\,dx = \int x^n\,\frac{e^{2x}-1}{2}\,dx = -\frac{x^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{1}{2}\int x^n e^{2x}\,dx.$$

Scegliendo e^{2x} come fattore differenziale ed osservando che

$$\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' = e^{2x},\quad \left(x^n\right)' = n\,x^{n-1}$$

si ha

$$\int x^n e^x\,\text{senh}x\,dx = -\frac{x^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{1}{4}x^n e^{2x} - \frac{n}{2}\int x^{n-1}\left(\frac{e^{2x}-1+1}{2}\right)dx =$$

$$= -\frac{x^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{1}{4}x^n e^{2x} - \frac{1}{4}x^n - \frac{n}{2}\int x^{n-1}e^x\,\text{senh}x\,dx.$$

20)* Si osservi che $e^x\cosh x=(e^{2x}+1)/2$ e si proceda come in 19)*.

4.2 Ulteriori formule di riduzione

Si stabiliscano delle formule di riduzione per i seguenti integrali indefiniti

1) $\int x \,\mathrm{sen}^n x \, dx$ 2) $\int x \cos^n x \, dx$

3) $\int x^m \,\mathrm{sen}^n x \, dx$ 4) $\int x^m \cos^n x \, dx$

5) $\int x \,\mathrm{arcsen}^n x \, dx$ 6) $\int \frac{\mathrm{sen}x}{x^n} \, dx$

7) $\int \frac{\cos x}{x^n} \, dx$ 8) $\int \frac{e^x}{x^n} \, dx$

Risultati

1) $F(x) = -\frac{x}{n} \cos x \,\mathrm{sen}^{n-1}x + \frac{\mathrm{sen}^n x}{n^2} + \frac{n-1}{n} \int x \,\mathrm{sen}^{n-2}x \, dx$

2) $F(x) = \frac{x}{n} \,\mathrm{sen}x \cos^{n-1}x + \frac{\cos^n x}{n^2} + \frac{n-1}{n} \int x \cos^{n-2}x \, dx$

3) $F(x) = -\frac{x^m}{n} \,\mathrm{sen}^{n-1}x \cos x + \frac{m}{n^2} x^{m-1} \,\mathrm{sen}^n x -$

$- \frac{m(m-1)}{n^2} \int x^{m-2} \,\mathrm{sen}^n x \, dx + \frac{n-1}{n} \int x^m \,\mathrm{sen}^{n-2}x \, dx$

4) $F(x) = \frac{x^m}{n} \,\mathrm{sen}x \cos^{n-1}x + \frac{m}{n^2} x^{m-1} \cos^n x -$

$- \frac{m(m-1)}{n^2} \int x^{m-2} \cos^n x \, dx + \frac{n-1}{n} \int x^m \,\mathrm{sen}^{n-2}x \, dx$

5) $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right) \mathrm{arcsen}^n x + \frac{n}{4} x\sqrt{1-x^2} \,\mathrm{arcsen}^{n-1}x -$

$- \frac{n(n-1)}{4} \int x \,\mathrm{arcsen}^{n-2}x \, dx$

6) $F(x) = -\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}} \,\mathrm{sen}x - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{\cos x}{x^{n-2}} -$

$- \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int \frac{\mathrm{sen}x}{x^{n-2}} \, dx$

7) $F(x) = -\frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{x^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{\mathrm{sen}x}{x^{n-2}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int \frac{\cos x}{x^{n-2}} \, dx$

8) $F(x) = -\frac{1}{n-1} \frac{e^x}{x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^x}{x^{n-1}} \, dx$

Soluzioni

1) Scegliendo senx come fattore differenziale, osservando che

$(-\cos x)' = \mathrm{sen}x, \quad (x\,\mathrm{sen}^{n-1})' = (n-1)\, x \,\mathrm{sen}^{n-2}x \cos x + \mathrm{sen}^{n-1}x$

e ricordando che $\cos^2 x = 1 - \mathrm{sen}^2 x$, si ottiene

$$\int x \,\mathrm{sen}^n x \, dx = -x \cos x \,\mathrm{sen}^{n-1}x + (n-1) \int x \,\mathrm{sen}^{n-2}x \cos^2 x \, dx +$$
$$+ \int \mathrm{sen}^{n-1}x \cos x \, dx = -x\cos x \,\mathrm{sen}^{n-1}x + (n-1) \int x\,\mathrm{sen}^{n-2}x \, dx -$$
$$- (n-1) \int x \,\mathrm{sen}^n x \, dx + \int \mathrm{sen}^{n-1}x \, d(\mathrm{sen}x).$$

Si ha così l'identità, grazie anche alla prima regola di sostituzione

$$n \int x \,\mathrm{sen}^n x \, dx = -x \cos x \,\mathrm{sen}^{n-1}x + \frac{\mathrm{sen}^n x}{n} + (n-1) \int x \,\mathrm{sen}^{n-2}x \, dx$$

2) Si proceda come in 1) scegliendo cosx come fattore differenziale.

3) Scegliendo senx come fattore differenziale e osservando che

$(-\cos x)' = \mathrm{sen}x, \quad (x^m \mathrm{sen}^{n-1}x)' = m x^{m-1} \,\mathrm{sen}^{n-1}x + (n-1)\, x^m \mathrm{sen}^{n-2}x \cos x$

si ha

$$\int x^m \,\mathrm{sen}^n x \, dx = -x^m \,\mathrm{sen}^{n-1}x \cos x + m \int x^{m-1} \,\mathrm{sen}^{n-1}x \cos x \, dx +$$
$$+ (n-1) \int x^m \,\mathrm{sen}^{n-2}x \cos^2 x \, dx.$$

Scegliendo, nel primo integrale a secondo membro $\mathrm{sen}^{n-1}x \cos x$ come fattore differenziale, osservando che $(\mathrm{sen}^n x)' = n\,\mathrm{sen}^{n-1}x \cos x$, $(x^{m-1})' = (m-1)\, x^{m-2}$ e utilizzando nel secondo integrale a secondo membro l'identità $\cos^2 x = 1 - \mathrm{sen}^2 x$, si ha

$$\int x^m \operatorname{sen}^n x \, dx = -x^m \operatorname{sen}^{n-1}x \cos x + \frac{m}{n} x^{m-1} \operatorname{sen}^n x -$$

$$- \frac{m(m-1)}{n} \int x^{m-2} \operatorname{sen}^n x \, dx +$$

$$+ (n-1) \int x^m \operatorname{sen}^{n-2}x \, dx - (n-1) \int x^m \operatorname{sen}^n x \, dx.$$

Si ottiene così l'identità

$$n \int x^m \operatorname{sen}^n x \, dx = -x^m \operatorname{sen}^{n-1}x \cos x + \frac{m}{n} x^{m-1} \operatorname{sen}^n x -$$

$$- \frac{m(m-1)}{n} \int x^{m-2} \operatorname{sen}^n x \, dx + (n-1) \int x^m \operatorname{sen}^{n-2}x \, dx$$

e di qui subito il risultato.

4) Si proceda come in 3) scegliendo cosx come fattore differenziale.

5) Scegliendo x come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\operatorname{arcsen}^n x\right)' = \frac{n \operatorname{arcsen}^{n-1}x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x,$$

si ha

$$\int x \operatorname{arcsen}^n x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsen}^n x - \frac{n}{2} \int \left(x^2-1+1\right) \frac{\operatorname{arcsen}^{n-1}x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsen}^n x + \frac{n}{2} \int \sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen}^{n-1}x \, dx -$$

$$- \frac{n}{2} \int \operatorname{arcsen}^{n-1}x \, d(\operatorname{arcsen}x).$$

Scegliendo come fattore differenziale nel primo integrale sulla destra $\sqrt{1-x^2}$ osservando che, grazie all'esercizio 1) di 3.2

$$\left(\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen}x\right)\right)' = \sqrt{1-x^2},$$

e poiché d'altro canto

$$\left(\operatorname{arcsen}^{n-1}x\right)' = (n-1) \frac{\operatorname{arcsen}^{n-2}x}{\sqrt{1-x^2}},$$

utilizzando nel secondo integrale a secondo membro la prima regola di sostituzione, si ottiene

$$\int x \operatorname{arcsen}^n x \, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \operatorname{arcsen}^n x + \left(\frac{n}{4} x\sqrt{1-x^2} + \frac{n}{4} \operatorname{arcsen}x\right) \times$$

$$\times \operatorname{arcsen}^{n-1}x - (n-1)\frac{n}{4} \int x \operatorname{arcsen}^{n-2}x \, dx -$$

$$- \frac{n}{4}(n-1) \int \frac{\operatorname{arcsen}^{n-1}x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{n}{4}\right) \operatorname{arcsen}^n x -$$

$$- \frac{n(n-1)}{4} \int x \operatorname{arcsen}^{n-2}x \, dx -$$

$$- \frac{n}{4}(n-1) \int \operatorname{arcsen}^{n-1}x \, d(\operatorname{arcsen}x) + \frac{n}{4} x \sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen}^{n-1}x.$$

Grazie alla prima regola di sostituzione applicata all'ultimo integrale si ha così

$$\int \operatorname{arcsen}^n x \, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{n}{4} - \frac{n-1}{4}\right) \operatorname{arcsen}^n x + \frac{n}{4} x\sqrt{1-x^2} \cdot$$

$$\cdot \operatorname{arcsen}^{n-1}x - \frac{n(n-1)}{4} \int x \operatorname{arcsen}^{n-2}x \, dx.$$

6) Scegliendo $1/x^n$ come fattore differenziale e osservando che

$$\left(-\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}\right)' = \frac{1}{x^n}, \quad (\operatorname{sen}x)' = \cos x$$

si ha

$$\int \frac{\operatorname{sen}x}{x^n} \, dx = -\frac{\operatorname{sen}x}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\cos x}{x^{n-1}} \, dx.$$

Scegliendo nell'integrale a secondo membro $1/x^{n-1}$ come fattore differenziale e osservando che

$$\left(-\frac{1}{n-2}\frac{1}{x^{n-2}}\right)'=\frac{1}{x^{n-1}},\ (\cos x)'=-\operatorname{sen}x$$

si ha

$$\int\frac{\operatorname{sen}x}{x^n}dx=-\frac{\operatorname{sen}x}{(n-1)x^{n-1}}-\frac{\cos x}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}-\frac{1}{(n-1)(n-2)}\int\frac{\operatorname{sen}x}{x^{n-2}}dx.$$

7) Si proceda come in 6) con la stessa scelta del fattore differenziale.

8) Scegliendo $1/x^n$ come fattore differenziale e osservando che

$$\left(-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}\right)'=\frac{1}{x^n},\ \left(e^x\right)'=e^x$$

si ha

$$\int\frac{e^x}{x^n}dx=-\frac{1}{n-1}\frac{e^x}{x^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{e^x}{x^{n-1}}dx.$$

5. Integrazione delle funzioni razionali

5.1 Il metodo di integrazione delle funzioni razionali

Per funzione razionale di una variabile si intende una qualsiasi funzione che risulti essere rapporto di due polinomi in una variabile.

Un risultato notevole della teoria della integrazione indefinita è che l'integrale indefinito di una funzione razionale di una variabile è esprimibile attraverso funzioni elementari.

Per stabilire tale risultato e indicare il metodo che consente di ottenere un tale integrale indefinito si può innanzitutto osservare che ovviamente se f è una funzione razionale di una variabile allora $f=P/Q$ con P e Q polinomi. Siano

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m,\ Q(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n$$

con a_m e b_n diversi da zero. Supponiamo dapprima che $m\geq n$, cioè che il grado di P sia maggiore del grado di Q.

Eseguendo allora la divisione tra i due polinomi si ha $P(x)=S(x)\cdot Q(x)+R(x)$ con R e S polinomi e R di grado strettamente minore del grado di Q.

Di conseguenza

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

e, poiché essendo S un polinomio il suo integrale indefinito è immediato, il problema si riduce a determinare l'integrale indefinito di R/Q, essendo il grado di R minore del grado di Q.

Basterà perciò descrivere come si ottiene l'integrale indefinito di $f=P/Q$ quando il grado di P è minore di quello di Q.

Si ricerchino allora le radici reali e $\beta_1\pm i\gamma_1,\ldots,\beta_r\pm i\gamma_r$ le radici complesse coniugate. Risultino esse di molteplicità rispettivamente $r_1,\ldots,r_k,\ s_1,\ldots,s_r$.

Ovviamente $n=r_1+\ldots+r_k+2(s_1+\ldots+s_r)$.

Vale allora la seguente formula di decomposizione

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{A_{i1}}{x-\alpha_i}+\frac{A_{i2}}{\left(x-\alpha_i\right)^2}+\ldots+\frac{A_{ir_i}}{\left(x-\alpha_i\right)^{r_i}}\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\left[\frac{B_{i1}x+C_{i1}}{\left(x-\beta_i\right)^2+\gamma_i^2}+\frac{B_{i2}x+C_{i2}}{\left[\left(x-\beta_i\right)^2+\gamma_i^2\right]^2}+\ldots+\frac{B_{is_i}x+C_{is_i}}{\left[\left(x-\beta_i\right)^2+\gamma_i^2\right]^{s_i}}\right]$$

Le costanti A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} risultano essere in numero di n e si possono determinare utilizzando il principio di identità dei polinomi.

Riduciamo infatti innanzitutto il secondo membro dell'identità precedente ad una sola frazione che denoteremo con $\widetilde{P}(x)/\widetilde{Q}(x)$.

Sarà

$$\widetilde{Q}(x)=(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}\cdot\left[(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2\right]^{s_1}\cdots\left[(x-\beta_\ell)^2+\gamma_\ell^2\right]^{s_\ell}$$

e pertanto si avrà

$$Q(x) = b_n\,\widetilde{Q}(x).$$

Affinché valga l'identità

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)},$$

si dovrà avere allora

$$P(x) - b_n\,\widetilde{P}(x)=0.$$

Annullando i coefficienti di tale polinomio si otterranno le costanti cercate.

Si veda a titolo di esempio per tale procedimento l'esercizio 1) di 5.2.

Grazie alla formula di decomposizione richiamata, il calcolo dell'integrale indefinito di $P(x)/Q(x)$ si riduce al calcolo di integrali indefiniti del seguente tipo

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx;\quad \int \frac{1}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]^n}\,dx;\quad \int \frac{x}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]^n}\,dx.$$

Si osservi ora che

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \lg|x-\alpha|;\quad \int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx = -\frac{1}{(n-1)\,(x-\alpha)^{n-1}}\quad (n\neq 1).$$

D'altro canto, con la sostituzione $(x-\beta)/\gamma=t$, si ottiene

$$\int \frac{1}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]^n}\,dx = \frac{1}{\gamma^{2n-1}}\left[\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}\right]_{t=(x-\beta)/\gamma}$$

e l'ultimo integrale può essere valutato per $n>1$ mediante una formula di riduzione (si confronti l'esercizio 25) di 4.1), mentre per $n=1$ si ha

$$\int \frac{1}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,dx = \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-\beta}{\gamma}.$$

Si osservi infine che

$$\int \frac{x}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,dx = \frac{1}{2}\lg\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right] + \beta\int \frac{1}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\lg\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right] + \frac{\beta}{\gamma}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-\beta}{\gamma} + C$$

e ancora

$$\int \frac{x}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]^n}\,dx = -\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{1}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]^{n-1}} + \beta\int \frac{1}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]^n}\,dx.$$

Nel caso di presenza effettiva di qualche radice multipla di $Q(x)$ si può anche seguire un procedimento un po' diverso.

Posto

$$Q_0(x)=(x-\alpha_1)^{r_1-1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k-1}\cdot\left[(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2\right]^{s_1-1}\cdots\left[(x-\beta_\ell)^2+\gamma_\ell^2\right]^{s_\ell-1}$$

e $p=n-(k+2\ell+1)$, vale la formula di decomposizione detta di Hermite

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k}\frac{A_i}{x-\alpha_i} + \sum_{i=1}^{\ell}\frac{B_i\,x+C_i}{(x-\beta_i)^2+\gamma_i^2} + \frac{d}{dx}\,\frac{N(x)}{Q_0(x)}$$

con $N(x)=D_0+D_1x+\ldots+D_px^p$. Le costanti A_i, B_i, C_i, D_i risultano determinate in base al principio di identità dei polinomi.

Poiché

$$\int \frac{d}{dx} \frac{N(x)}{Q_0(x)} = \frac{N(x)}{Q_0(x)} + C,$$

il calcolo dell'integrale indefinito di $P(x)/Q(x)$ è ricondotto agli integrali del tipo già esaminato

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx,\ \int \frac{1}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,dx,\ \int \frac{x}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,dx.$$

A titolo di esempio si veda l'esercizio **20)** di 5.2.

5.2 Applicazioni del metodo di integrazione delle funzioni razionali

Si calcolino i seguenti integrali indefiniti

1) $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

2) $\int \frac{1}{4x^2-1}\,dx$

3) $\int \frac{1}{x^3+x}\,dx$

4) $\int \frac{1}{x^3+x^2}\,dx$

5) $\int \frac{1}{x^3-x}\,dx$

6) $\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$

7) $\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$

8) $\int \frac{1}{x^4-x^2}\,dx$

9) $\int \frac{1}{x^4+x^2}\,dx$

10) $\int \frac{1}{(x-1)\,(x^2+1)^2}\,dx$

11) $\int \frac{1+x^2}{x^3+4x^2-x-4}\,dx$

12) $\int \frac{x^2}{x^2-5x+6}\,dx$

13) $\int \frac{1}{x^3+3x^2+2x}\,dx$

14) $\int \frac{4x^3+x^2+x-2}{4x^2-3x-1}\,dx$

15) $\int \frac{x^3+1}{x+x^2}\,\frac{1}{1+x^2}\,dx$

16) $\int \frac{x}{x^2+x-2}\,\frac{1}{1+x^2}\,dx$

17) $\int \frac{1+x}{8x^3+6x^2-11x-3}\,dx$

18) $\int \frac{1}{(x^2-1)\,(1+x^2)^2}\,dx$

19) $\int \frac{(1+x)^2}{(1+x^2)\,(x-1)^2}\,dx$

20) $\int \frac{2+x}{(4+x^2)\,(x-1)^3}\,dx$

21) $\int \frac{2x^3+5x^2+4x-4}{(x^2-4)\,(x^2+2x+2)}\,dx$

22) $\int \frac{x^4+x^3+4x+4}{(x^2+2)^2\,(x-2)^2}\,dx$

23) $\int \frac{2x^3+5x^2+2x}{(x^2-1)\,(x^2+x+1)^2}\,dx$

24) $\int \frac{x^2+2x+2}{x\,(x+1)\,(x+2)}\,dx$

25) $\int \frac{3x^4-4x^2-1}{x^3\,(x^4+4x^2+4x^3+1)}\,dx$

26) $\int \frac{x+1}{x^2\,(x-1)^2}\,dx$

27) $\int \frac{4-3x}{(x-3)^2\,(x^2+1)}\,dx$

28) $\int \frac{x^3}{(1+x^2)^2\,(x^4+1)}\,dx$

Risultati

1) $F(x) = \frac{1}{2}\lg\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

2) $F(x) = \frac{1}{4}\lg\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|+C$

3) $F(x) = \lg\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}+C$

4) $F(x) = \lg\left|\frac{1+x}{x}\right|-\frac{1}{x}+C$

5) $F(x) = \lg\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}+C$

6) $F(x) = \frac{1}{4}\lg\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}x+C$

7) $F(x) = -\frac{\sqrt{2}}{8}\lg\left(\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) +$
$+\frac{\sqrt{2}}{8}\lg\left(\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + C$

8) $F(x) = +\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\lg\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

9) $F(x) = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg}x + C$

10) $F(x) = \frac{1}{4}\lg|x-1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{8}\lg(1+x^2) +$
$+\frac{1}{4}\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4}\frac{x}{1+x^2} + C$

11) $F(x) = -\frac{1}{3}\lg|x+1| + \frac{1}{5}\lg|x-1| + \frac{17}{15}\lg|x+4| + C$

12) $F(x) = x+9\lg|x-3| - 4\lg|x-2| + C$

13) $F(x) = \frac{1}{2}\lg|x| - \lg|x+1| + \frac{1}{2}\lg|x+2| + C$

14) $F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{4}{5}\lg|x-1| + \frac{9}{20}\lg\left|x+\frac{1}{4}\right| + C$

15) $F(x) = \lg|x| - \operatorname{arctg}x + C$

16) $F(x) = \frac{1}{6}\lg|x-1| + \frac{2}{15}\lg|x+2| + \frac{1}{10}\operatorname{arctg}x - \frac{3}{20}\lg(1+x^2) + C$

17) $F(x) = \frac{2}{25}\lg|x-1| - \frac{3}{50}\lg\left|x+\frac{1}{4}\right| - \frac{1}{50}\lg\left|x+\frac{3}{2}\right| + C$

18) $F(x) = \frac{1}{8}\lg\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{4}\frac{x}{1+x^2} + C$

19) $F(x) = -2\frac{1}{x-1} - \operatorname{arctg}x + C$

20) $F(x) = -\frac{13}{125}\log|x-1| + \frac{9}{125}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{13}{250}\log|x^2+4| +$
$+\frac{1}{50}\cdot\frac{2x-17}{(x-1)^2} + C$

21) $F(x) = \log|x^2-4| + \operatorname{arctg}(x+1) + C$

22) $F(x) = -\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2)} + C$

23) $F(x) = -\frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \frac{x}{x^2+x+1} + C$

24) $F(x) = \log\left|\frac{x(x+2)}{x+1}\right| + C$

25) $F(x) = \left[2\operatorname{arctg}(x^2+2x) + \frac{1}{2x^2}\right| + C$

26) $F(x) = \frac{1-3x}{x(x-1)} + 3\log\left|\frac{x}{x-1}\right| + C$

27) $F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{2x-6} + C$

28) $F(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^2+1} + \operatorname{arctg}x^2\right] + C$

Soluzioni (da 1 a 20)

1) Le radici del polinomio $Q(x)=x^2-1$ risultano essere 1 e -1, varrà quindi una decomposizione del tipo

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

Deve essere quindi per ogni x

$$1 = (A+B)x + A-B$$

e dunque per il principio di identità dei polinomi tutti i coefficienti del polinomio $(A+B)x + A-B-1$ dovranno essere nulli risultando tale polinomio identicamente eguale a 0. Si ricava così, annullando i coefficienti del termine di grado 1 e quello del termine di grado 0, il sistema nelle incognite A e B.

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B-1=0 \end{cases}$$

Risolvendolo, ricavando A della prima equazione e sostituendola nella seconda, si ottengono le soluzioni A=1/2 e B=-1/2.
Risulterà pertanto

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

e dunque

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\lg\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

2) Le radici del polinomio $Q(x)=4x^2-1$, risultano essere $x=\pm\frac{1}{2}$, si avrà quindi una decomposizione del tipo

$$\frac{1}{4x^2-1} = \frac{A}{x-1/2} + \frac{B}{x+1/2}.$$

Deve essere quindi per ogni x

$$\frac{1}{4}\,\frac{1}{x^2-1/4} = \frac{A}{x-1/2} + \frac{B}{x+1/2}$$

e cioè

$$\frac{1}{4} = (A+B)x + \frac{1}{2}(A-B).$$

Dunque per il principio di identità dei polinomi, tutti i coefficienti del polinomio identicamente nullo

$$(A+B)\,x + \frac{1}{2}(A-B) - \frac{1}{4}$$

dovranno essere nulli. Si perviene così al sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \frac{1}{2}(A-B) - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$$

Risolvendolo, ricavando ad esempio A dalla prima equazione e sostituendola nella seconda, si ottengono le soluzioni A=1/4, B=-1/4
Risulterà pertanto

$$\int \frac{1}{4x^2-1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1/2}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1/2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\lg\left|\frac{x-1/2}{x+1/2}\right| + C = \frac{1}{4}\lg\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| + C.$$

3) Le radici del polinomio $Q(x)=x^3+x=x(x^2+1)$ risultano essere $x=0$ e $x=\pm i$, varrà quindi una decomposizione del tipo

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}.$$

Deve essere quindi per ogni x

$$1=(A+B)x^2+Cx+A$$

e dunque per il principio di identità dei polinomi tutti i coefficienti del polinomio, identicamente nullo, $(A+B)\,x^2+Cx+A-1$ dovranno essere nulli. Si ha così il sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A-1=0 \end{cases}$$

Si ricava allora subito A=1, B=-1, C=0.
Risulterà pertanto, grazie alla prima regola di sostituzione

$$\int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lg|x| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,d\left(1+x^2\right)$$

$$= \lg|x| - \frac{1}{2}\lg\left(1+x^2\right) + C = \lg\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

4) Le radici del polinomio $Q(x)=x^3+x^2=x^2(x+1)$ risultano essere $x=0$ (radice doppia) e $x=-1$; varrà allora una decomposizione del tipo

$$\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1+x}.$$

Deve essere quindi per ogni x

$$1 = (A+C)\,x^2 + (A+B)\,x+B.$$

Per il principio di identità di polinomi, tutti i coefficienti del polinomio identicamente nullo, $(A-C)\,x^2+(A+B)\,x+B-1$ dovranno essere identicamente nulli. Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} A+C = 0 \\ A+B = 0 \\ B-1 = 0 \end{cases}$$

Risolvendolo, (dalla terza equazione si ha subito $B=1$, dalla seconda allora $A=-1$ e dalla prima $C=1$) si ottengono le soluzioni $A=-1$, $B=1$, $C=1$. Risulterà pertanto

$$\int \frac{1}{x^3+x^2}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{1+x}\,dx =$$
$$= -\lg|x| - \frac{1}{x} + \lg|1+x| + C = \lg\left|\frac{1+x}{x}\right| - \frac{1}{x} + C.$$

5) Le radici del polinomio $Q(x)=x^3-x=x(x^2-1)$ sono $x=0$ e $x=\pm 1$, varrà quindi una decomposizione del tipo

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Deve essere quindi per ogni x

$$(A+B+C)\,x^2 + (B-C)\,x-A = 1$$

e dunque per il principio di identità dei polinomi tutti i coefficienti del polinomio $(A+B+C)\,x^2 + (B-C)\,x -A-1$ devono essere nulli. Si perviene così al sistema

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=0 \\ -A-1=0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A=-1$ $B=\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$.

Risulterà pertanto

$$\int \frac{1}{x^3-x}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$
$$= -\lg|x| + \frac{1}{2}\lg|x-1| + \frac{1}{2}\lg|x+1| + C = \lg\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} + C.$$

6) Le radici del polinomio $Q(x)=x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)$ sono $x=\pm 1$ e $x=\pm i$, vale quindi la decomposizione

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

e dunque deve essere per ogni x

$$(A+B+C)\,x^3 + (A-B+D)\,x^2 + (A+B-C)\,x + A-B-D=1.$$

Si perviene, così, annullando i coefficienti del polinomio identicamente nullo, grazie al principio di identità dei polinomi $(A+B+C)\,x^3 + (A-B+D)\,x^2 + (A+B-C)\,x+ A-B-D-1$ al sistema

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D-1=0 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema (addizionando per esempio le quattro equazioni si ha subito A=1/4, addizionando poi la prima e la terza si ricava B=-1/4, dalla terza si ottiene allora C=0 e dalla seconda D=-1/2) si ottengono A=1/4, B=-1/4, C=0, D=-1/2.
Si ha allora

$$\int \frac{1}{x^4-1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\lg|x-1| - \frac{1}{4}\lg|x+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C =$$

$$= \frac{1}{4}\lg\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C.$$

7) Applicando la regola di De Moivre si vede facilmente che le soluzioni dell'equazione $x^4+1=0$ sono

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vale pertanto la decomposizione

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{(x-\sqrt{2}/2)^2+1/2} + \frac{Cx+D}{(x+\sqrt{2}/2)^2+1/2}$$

e quindi per ogni x si deve avere

$$(A+C)\,x^3+(\sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D)\,x^2+(A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D)\,x+B+D=1.$$

Annullando i coefficienti del polinomio identicamente nullo

$$(A+C)\,x^3+(\sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D)\,x^2+(A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D)\,x+B+D-1,$$

grazie al principio di identità dei polinomi, si perviene al sistema

$$\begin{cases} A+C=0 \\ \sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D=0 \\ A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D=0 \\ B+D-1=0 \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema ad esempio per sostituzione (si sostituisce ad esempio A con -C e D con 1-B nella seconda e nella terza equazione) si hanno le soluzioni $A=-1/2\sqrt{2}$, $B=1/2$, $C=1/2\sqrt{2}$ $D=1/2$. Si ha allora

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}\,x+\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\,dx + \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}\,x+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{8}\lg\left(\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{8}\lg\left(\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{e}}\right)+C.$$

8) Le radici del polinomio $Q(x)=x^4-x^2=x^2(x^2-1)$ risultano essere $x=0$ (radice doppia) e $x=\pm1$. Si ha pertanto la decomposizione

$$\frac{1}{x^4-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

e quindi per ogni x

$$(A+C+D)\,x^3 + (B+C-D)\,x^2-Ax-B=1.$$

Annullando i coefficienti del polinomio identicamente nullo

$$(A+C+D)\,x^3 + (B+C-D)\,x^2 - Ax-B-1$$

in virtù del principio di identità dei polinomi, si perviene al sistema

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ B+C-D=0 \\ -A=0 \\ -B-1=0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono A=0 B=-1 C=1/2, D=-1/2.
Si ha pertanto

$$\int \frac{1}{x^4-x^2}\,dx = -\int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\lg\frac{|x-1|}{|x+1|} + C.$$

9) Le radici del polinomio $Q(x)=x^4+x^2=x^2(x^2+1)$ sono $x=0$ (radice doppia) e $x=\pm i$. Si ha pertanto la decomposizione

$$\frac{1}{x^4+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

e quindi per ogni x

$$(A+C)\;x^3 + (B+D)\;x^2+Ax+B=1.$$

Annullando i coefficienti del polinomio identicamente nullo

$$(A+C)\;x^3 + (B+D)\;x^2 + Ax+B-1$$

in virtù del principio di identità dei polinomi, si perviene al sistema

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A=0 \\ B-1=0 \end{cases}$$

che ammette come soluzioni $A=0$ $B=1$, $C=0$, $D=-1$.
Si ha pertanto

$$\int \frac{1}{x^4+x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{x} - \mathrm{arctg}x+C.$$

10) Le radici del polinomio $Q(x)=(x-1)\;(x^2+1)^2$ risultano ovviamente essere $x=1$, $x=\pm i$ (radici doppie).

Si ha pertanto la decomposizione

$$\frac{1}{(x-1)\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}$$

e dunque per ogni x

$$(A+B)\,x^4+(-B+C)\,x^3+(2A+D+B-C)\,x^2+(-D+E-B+C)\,x+(A-E-C)=1.$$

Annullando, in virtù del principio di identità dei polinomi, tutti i coefficienti del polinomio identicamente nullo

$$(A+B)\,x^4+(-B+C)\,x^3+(2A+D+B-C)\,x^2+(-D+E-B+C)\,x+A-E-C-1$$

si perviene al sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=0 \\ 2A+D+B-C=0 \\ -D+E-B+C=0 \\ A-E-C-1=0 \end{cases}$$

che (come risulta ad esempio ricavando dapprima A e C in funzione di B dalle prime due equazioni e sostituendo nelle rimanenti) ha come soluzioni:

$$A=\frac{1}{4},\quad B=-\frac{1}{4},\quad C=-\frac{1}{4},\quad D=-\frac{1}{2},\quad E=-\frac{1}{2}.$$

Si ha pertanto

$$\int\frac{1}{(x-1)\;(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{4}\int\frac{x+1}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\,\lg|x-1| - \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}x - \frac{1}{8}\int\frac{1}{1+x^2}\,d\left(1+x^2\right) -$$

$$- \frac{1}{4}\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\,d\left(1+x^2\right) - \frac{1}{2}\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Grazie alla formula iterativa 25) del paragrafo 4.1 si ha

$$\int\frac{1}{(x-1)\;(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\,\lg|x-1| - \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}x - \frac{1}{8}\,\lg\left(1+x^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4}\,\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}x+C.$$

11) Le radici del polinomio $Q(x)=x^3+4x^2-x-4$ risultano essere $x=-4$ e $x=\pm1$. (Si osservi infatti che dividendo ad esempio con la regola di Ruffini x^3+4x^2-x+4 per $x+4$, si ha come quoziente esatto il polinomio x^2-1 che ha come radici $x=\pm1$). Vale allora la decomposizione

$$\frac{1+x^2}{x^3+4x^2-x+4}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+4};$$

si ha quindi per ogni x

$$1+x^2=(A+B+C)\ x^2+(5B+3A)x+4B-4A-C.$$

Annullando, per il principio di identità dei polinomi, i coefficienti del polinomio identicamente nullo

$$(-1+A+B+C)\ x^2+(5B+3A)x+4B-4A-C-1$$

si perviene al sistema

$$\begin{cases} A+B+C-1=0 \\ 5B+3A=0 \\ 4B-4A-C-1=0\,. \end{cases}$$

Tale sistema ammette le soluzioni $A=-1/3$, $B=1/5$, $C=17/15$ (risolvendolo per sostituzione, si può ad esempio ricavare B dalla seconda equazione). Si ha così

$$\int\frac{1+x^2}{x^3+4x^2-x+4}\,dx=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\,dx+\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-1}\,dx+\frac{17}{15}\int\frac{1}{x+4}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{3}\lg|x+1|+\frac{1}{5}\lg|x-1|+\frac{17}{15}\lg|x+4|+C.$$

12) Il polinomio al numeratore $P(x)=x^2$ e quello a denominatore $Q(x)=x^2-5x+6$ risultano dello stesso grado: effettuando la divisione si ottiene subito $P(x)=1\cdot Q(x)+R(x)$ con $R(x)=5x-6$. Si ha pertanto

$$\int\frac{x^2}{x^2-5x+6}\,dx=\int 1\cdot dx+\int\frac{5x-6}{x^2-5x+6}\,dx.$$

Per quanto concerne l'ultimo integrale, si può osservare che le radici del polinomio $Q(x)=x^2-5x+6$ risultano essere $x=3$ e $x=2$; vale allora la decomposizione

$$\frac{5x-6}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

e cioè, per ogni x

$$(A+B)x-2A-3B=5x-6.$$

Imponendo che i coefficienti del polinomio identicamente nullo $(A+B-5)x-2A-3B+6$ risultino nulli, in virtù del principio di identità dei polinomi, si ha il sistema

$$\begin{cases} A+B-5=0 \\ -2A-3B+6=0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A=9$, $B=-4$. Si ha così

$$\int\frac{5x-6}{x^2-5x+6}\,dx=\int\frac{9}{x-3}\,dx-\int\frac{4}{x-2}\,dx=9\lg|x-3|-4\lg|x-2|+C$$

e quindi

$$\int\frac{x^2}{x^2-5x+6}\,dx=x+9\lg|x-3|-4\lg|x-2|+C.$$

13) Le radici del polinomio $Q(x)=x^3+3x^2+2x$ sono $x=0$ $x=-1$, $x=-2$. Vale allora la decomposizione

$$\frac{1}{x^3+3x^2+2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$$

e quindi per ogni x

$$(A+B+C)\ x^2+(3A+2B+C)x+2A=1.$$

Imponendo che siano nulli i coefficienti del polinomio identicamente nullo

$$(A+B+C)x^2+(3A+2B+C)x+2A-1,$$

in virtù del principio di identità dei polinomi, si ha il sistema

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=0 \\ 2A-1=0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A=1/2$, $B=-1$, $C=1/2$.
Si ha pertanto

$$\int \frac{1}{x^3+3x^2+2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\lg|x| - \lg|x+1| + \frac{1}{2}\lg|x+2| + C.$$

14) Il polinomio $P(x)=4x^3+x^2+x-12$ è di grado superiore al polinomio $Q(x)=4x^2-3x-1$ effettuando la divisione si ha

$$\begin{array}{l|l} 4x^3+x^2+x-2 & 4x^2-3x-1 \\ \cline{2-2} -4x^3+3x^2+x & x+1 \\ \hline \quad 4x^2+2x-2 & \\ \quad -4x^2+3x+1 & \\ \hline \quad\quad 5x-1 & \end{array}$$

e dunque $P(x)=(x+1)Q(x)+(4x-1)$ sicché

$$\int \frac{4x^3+x^2+x-2}{4x^2-3x-1}\,dx = \int (x+1)\,dx + \int \frac{5x-1}{4x^2-3x-1}\,dx.$$

Per calcolare l'ultimo integrale si può osservare che le radici del polinomio $4x^2-3x-1$ sono $x=-1/4$, $x=1$. Si ha pertanto la decomposizione

$$\frac{1}{4}\,\frac{5x-1}{x^2-3x/4-1/4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1/4}$$

e quindi, per ogni x

$$(A+B)x + \frac{A}{4} - B = \frac{1}{4}(5x-1).$$

Annullando i coefficienti del polinomio identicamente nullo, in virtù del principio di identità del polinomio

$$\left(-\frac{5}{4}+A+B\right)x + \frac{A}{4} - B + \frac{1}{4}$$

si ha il sistema

$$\begin{cases} A+B-\dfrac{5}{4}=0 \\ \dfrac{A}{4}-B+\dfrac{1}{4}=0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A=4/5$, $B=9/20$. Si ha così

$$\int \frac{4x^3+x^2+x-2}{4x^2-3x-1}\,dx = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{4}{5}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{9}{20}\int \frac{1}{x+1/4}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{4}{5}\lg|x-1| + \frac{9}{20}\lg\left|x+\frac{1}{4}\right| + C.$$

15) Le radici del polinomio $Q(x)=(x+x^2)(1+x^2)$ risultano essere $x=0$, $x=-1$, $x=\pm i$. Si osservi che il polinomio $P(x)=x^3+1$ è di grado inferiore al polinomio $Q(x)$ ed ha anch'esso come radice $x=-1$, ed inoltre $P(x)=(x+1)(x^2-x+1)$; si avrà pertanto la decomposizione

$$\frac{x^3+1}{(x+x^2)(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{x^2-x+1}{x(1+x^2)}.$$

Si avrà per ogni x

$$(A+B)x^2 + Cx + A = x^2-x+1$$

e quindi annullando i coefficienti del polinomio identicamente nullo

$$(A+B-1)x^2 + (C+1)x + A-1$$

in virtù del principio di identità dei polinomi, si ha il sistema

$$\begin{cases} A+B-1=0 \\ C+1=0 \\ A-1=0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni A=1, B=0, C=−1. Si ha pertanto

$$\int \frac{x^3+1}{\left(x+x^2\right)\left(1+x^2\right)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lg|x| - \operatorname{arctg}x + C.$$

16) Si osservi che le radici del polinomio x^2+x-2 risultino essere $x=1$, $x=-2$. D'altro canto il polinomio $1+x^2$ ha radici $x=\pm i$. Si ha pertanto la decomposizione

$$\frac{x}{\left(1+x^2\right)\left(x^2+x-2\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

e quindi per ogni x

$$(A+B+C)x^3+(2A-B+C+D)x^2+(A+B+D-2C)x+2A-B-2D=x.$$

Annullando i coefficienti del polinomio identicamente nullo

$$(A+B+C)x^3+(2A-B+C+D)x^2+(A+B+D-2C-1)x+2A-B-2D$$

in virtù del principio di identità dei polinomi si ha il sistema

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 2A-B+C+D=0 \\ A+B-2C+D-1=0 \\ 2A-B-2D=0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$A=\frac{1}{6},\quad B=\frac{2}{15},\quad C=-\frac{3}{10},\quad D=\frac{1}{10}.$$

Si ha così

$$\int \frac{x}{\left(x^2+x-2\right)\left(1+x^2\right)}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{2}{15}\int \frac{1}{x+2}\,dx -$$

$$-\frac{3}{10}\int \frac{x}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{10}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{6}\lg|x-1| + \frac{2}{15}\lg|x+2| +$$

$$+\frac{1}{10}\operatorname{arctg}x - \frac{3}{20}\lg\left(1+x^2\right) + c.$$

17) Il polinomio $Q(x)=8x^3+6x^2-11x-3$ ha come soluzione $x=1$; si ha così applicando ad esempio la regola di Ruffini:

	8	+6	−11	−3
1		+8	+14	+3
	8	14	+3	0

che $Q(x)=(x-1)(8x^2+14x+3)$. Il polinomio di secondo grado $8x^2+14x+3$ ha come radici $x=-1/4$, $x=-3/2$.
Vale pertanto la decomposizione

$$\frac{1}{8}\,\frac{1+x}{x^3+6x^2/8-11x/8-3/8} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1/4} + \frac{C}{x+3/2}.$$

Si ottiene così per ogni x

$$(A+B+C)\,x^2 + \left(\frac{7}{4}A+\frac{1}{2}B-\frac{3}{4}C\right)x+\frac{3}{8}A-\frac{3}{2}B-\frac{C}{4} = \frac{1}{8}+\frac{x}{8}.$$

Annullando i coefficienti del polinomio identicamente nullo

$$(A+B+C)\,x^2 + \left(\frac{7}{4}A+\frac{1}{2}B-\frac{3}{4}C-\frac{1}{8}\right)x+\frac{3}{8}A-\frac{3}{2}B-\frac{1}{4}C-\frac{1}{8}$$

in virtù del principio di identità dei polinomi, si ha il sistema

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ \frac{7}{4}A+\frac{1}{2}B-\frac{3}{4}C-\frac{1}{8}=0 \\ \frac{3}{8}A-\frac{3}{2}B-\frac{1}{4}C-\frac{1}{8}=0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A=2/25$, $B=-3/50$, $C=-1/50$. Si ha pertanto

$$\int \frac{1+x}{8x^3+6x^2-1/x+3}\,dx = \frac{2}{25}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{3}{50}\int \frac{1}{x+\frac{1}{4}}\,dx -$$

$$-\frac{1}{50}\int \frac{1}{x+\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{25}\lg|x-1| - \frac{3}{50}\lg\left|x+\frac{1}{4}\right| - \frac{1}{50}\lg\left|x+\frac{3}{2}\right| +C.$$

18) Si osservi che il polinomio $Q(x)=(x^2-1)\ (1+x^2)^2$ ha radici $x=\pm1$, $x=\pm i$; vale pertanto la decomposizione

$$\frac{1}{(x^2-1)\,(1+x^2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{1+x^2} + \frac{Ex+F}{(1+x^2)^2}$$

e quindi per ogni x deve essere

$$(A+B+C)\ x^5 + (A-B+D)\ x^4 + (2A+2B+E)\ x^3 + (2A-2B+F)\ x^2 + (A+B-C-E)\ x + A-B-D-F=1.$$

Annullando i coefficienti del polinomio identicamente nullo

$$(A+B+C)\ x^5 + (A-B+D)\ x^4 + (2A+2B+E)\ x^3 + (2A-2B+F)\ x^2 + (A+B-C-E)\ x + A-B-D-F-1$$

grazie al principio di identità dei polinomi, si perviene al sistema

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ 2A+2B+E=0 \\ 2A-2B+F=0 \\ A+B-C-E=0 \\ A-B-D-F=1\ . \end{cases}$$

Risolvendolo (ad esempio sommando alla quinta equazione la prima si ha $2A+2B-E=0$ che unitamente alla terza equazione

$2A+2B+E=0$ fornisce $E=0$ $A=-B$; la prima equazione dà allora $C=0$, la seconda $D=2B$ la quarta $F=4B$ e la sesta, sostituendo, $B=-\frac{1}{8}$) si hanno le soluzioni $A=\frac{1}{8}$, $B=-\frac{1}{8}$, $C=0$, $D=-\frac{1}{4}$, $E=0$, $F=-\frac{1}{2}$.

Si ha allora

$$\int \frac{1}{(x^2-1)\,(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{8}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Si ottiene allora

$$\int \frac{1}{(x^2-1)\,(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{8}\lg\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

D'altro canto, grazie alla formula di riduzione dell'esercizio **25)** del paragrafo 4.1, si ha

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Si ottiene così

$$\int \frac{1}{(x^2-1)\,(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{8}\lg\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{4}\,\frac{x}{1+x^2} +C.$$

19) Le radici del polinomio $Q(x)=(1+x^2)\ (x-1)^2$ sono $x=1$ (radice doppia) e $x=\pm i$. Vale pertanto la decomposizione

$$\frac{(1+x)^2}{(1+x^2)\,(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Si avrà pertanto per ogni x

$$1+x^2+2x=(A+C)\,x^3+(B-A-2C+D)\,x^2+(A+C-2D)\,x-A+B+D.$$

Annullando in virtù del principio di identità di polinomi i coefficienti del polinomio identicamente nullo

$$(A+B)x^3+(B-A-2C+D-1)x^2+(A+C-2D-2)x-A+B+D-1$$

si perviene al sistema

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B-A-2C+D-1=0 \\ A+C-2D-2=0 \\ -A+B+D-1=0 \end{cases}$$

Tale sistema ha come soluzioni A=0, B=2, C=0, D=-1 (si osservi che la prima equazione dà A=-C e la terza allora D=-1, delle due rimanenti, effettuate la sostituzione si ha subito B=2 e C=0).
Si ha pertanto

$$\int \frac{(1+x)^2}{(1+x^2)\,(x-1)^2}\,dx = 2\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = -2\,\frac{1}{x-1} - \operatorname{arctg} x + C.$$

20) Le radici del polinomio $Q(x)=(4+x^2)\ (x-1)^3$ sono x=1 di molteplicità 3 ed x=±2i di molteplicità 1. Applicando la formula di Hermite si trova

$$\frac{2+x}{(x^2+4)\,(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{d}{dx}\,\frac{Dx+E}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{D\,(x-1) - 2\,(Dx+E)}{(x-1)^3};$$

pertanto per ogni x si avrà

$$2+x = A(x^2+4)\,(x-1)^2+(Bx+C)\,(x-1)^3 - (Dx+D+2E)\ (x^2+4).$$

Allora dal principio di identità dei polinomi si ricava il sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-3B+C-D=0 \\ 5A+3B-3C-D-2E=0 \\ -8A-B+3C-4D=1 \\ +4A-C-4D-8E=2 \end{cases}$$

risolvendo il quale si trova

$$A=-13/125,\ B=13/125,\ C=18/125\ D=5/125,\ E=-85/250.$$

Quindi

$$\int \frac{2+x}{(x^2+4)\,(x-1)^3}\,dx = -\frac{13}{125}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{125}\int \frac{13x+18}{x^2+4}\,dx +$$

$$+ \int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{250}\,\frac{10x-85}{(x-1)^2}\right)dx.$$

Si ottiene allora con facili calcoli

$$\int \frac{2+x}{(x-1)^3\,(x^2+4)}\,dx = -\frac{13}{125}\log|x-1| + \frac{9}{125}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} +$$

$$+ \frac{13}{250}\log|x^2+4| + \frac{1}{50}\,\frac{2x-17}{(x-1)^2} + C.$$

6. Integrazione con la seconda regola di sostituzione

6.1 Alcune classi di funzioni il cui integrale è razionalizzabile

Nel seguito la funzione f denoterà una funzione razionale in tutti i suoi argomenti cioè una funzione rapporto di due polinomi in una o più variabili.
Si diano formule di integrazione per i seguenti integrali indefiniti riconducendo il loro calcolo a quello di integrali di funzioni razionali.

1) $\int f\,(e^x)\,dx$

2) $\int f\,(\operatorname{senh} x,\ \cosh x)\,dx$

3) $\int f\,(\operatorname{sen} x,\ \cos x)\,dx$

4) $\int f\,(\operatorname{tg} x)\,dx$

5) $\int f\left(x,\ \sqrt[n]{ax+b}\right)dx,\ a\neq 0$

6) $\int f\left(x,\ \sqrt[n_1]{ax+b},\ \sqrt[n_2]{ax+b},\ \ldots\ \sqrt[n_k]{ax+b},\ \right)dx$

7) $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \quad ad-cb\neq 0$ 8) $\int f\left(x, \sqrt{x^2+px+q}\right) dx$

9) $\int f\left(x, \sqrt{-x^2+px+q}\right) dx$

10) $\int f\left(x, \sqrt{a_1x+b_1}, \sqrt{a_2x+b_2}\right) dx$

11) $\int x^m \left(ax^n+b\right)^p dx$ m, n, p razionali

Risultati

1) $F(x) = \left(\int f(y) \frac{1}{y}\, dy\right)_{y=e^x}$

2) $F(x) = \left(\int f\left(\frac{2y}{1-y^2}, \frac{1+y^2}{1-y^2}\right) \frac{2}{1-y^2}\, dy\right)_{y=\mathrm{tgh}\, x/2}$

3) $F(x) = \left(\int f\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right) \frac{2}{1+y^2}\, dy\right)_{y=\mathrm{tg}\, x/2}$

4) $F(x) = \left(\int f(y) \frac{1}{1+y^2}\, dy\right)_{y=\mathrm{tg}x}$

5) $F(x) = \left(\int f\left(\frac{y^n-b}{a}, y\right) \frac{n\, y^{n-1}}{a}\, dy\right)_{y=\sqrt[n]{ax+b}}$

6) $F(x) = \left(\int f\left(\frac{y^n-b}{a}, y^{p_1}, \dots, y^{p_k}\right) \frac{n\, y^{n-1}}{a}\, dy\right)_{y=\sqrt[n]{ax+b}}$

ove n é il minimo comune multiplo tra $n_1 \dots n_k$ e $p_i=\frac{n}{n_i}$.

7) $F(x) = \left(\int f\left(\frac{dy^n-b}{a-cy^n}, y\right) \frac{n\,(ad-bc)}{(a-cy^n)^2}\, y^{n-1}\, dy\right)_{y=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}$

8) $F(x) = \left(\int f\left(\frac{y^2-q}{p+2y}, \frac{y^2+py+q}{p+2y}\right) \frac{2\,(y^2+py+q)}{(p+2y)^2}\, dy\right)_{y=\sqrt{x^2+px+q}+x}$

9) $F(x) = \left(\int f\left(\frac{\beta+\alpha y^2}{1+y^2}, (\beta-\alpha)\frac{y}{1+y^2}\right) \frac{(\alpha-\beta)\, 2y}{(1+y^2)^2}\, dy\right)_{y=\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}}$

ove α e β sono le radici dell'equazione $-x^2+px+q=0$ con $\alpha<\beta$.

10) $F(x) = \left(\int f\left(\frac{y^2-b_1}{a_1}, y, \sqrt{a_2\left(\frac{y^2-b_1}{a_1}\right)+b_2}\right) \cdot \frac{2y}{a_1}\, dy\right)_{y=\sqrt{a_1x+b_1}}$

e la funzione integranda é del tipo esaminato in 8) e 9).

11) a) p intero: l'integrale è del tipo 6)

b) $\frac{m+1}{n}$ intero: $F(x) = \frac{1}{n a^{\frac{m+1}{n}}} \left(\int (y-b)^{\frac{m+1}{n}-1}\, y^p dy\right)_{y=ax^n+b}$

e la funzione integranda é del tipo 6)

c) $\frac{m+1}{n}+p$ intero: $F(x) = -\frac{1}{n}\left(b^{\frac{m+1}{n}+p}\right)\int\left((y-a)^{-\left(\frac{m+1}{n}+p+1\right)}\, y^p\, dy\right)_{y=a+bx^{-n}}$

e la funzione integranda é del tipo 6).

Soluzioni

1) Con la sostituzione $y=e^x$, osservando che $x=\lg y$ e $(\lg y)'=1/y$, si ha, grazie alla seconda regola di sostituzione,

$$\int f\left(e^x\right) dx = \left(\int f(y) \frac{1}{y}\, dy\right)_{y=e^x}.$$

La funzione $y\rightarrow f(y)/y$ essendo f razionale è ancora razionale.

2) Utilizzando la formula di bisezione si ha

$$\mathrm{senh}x = \frac{2\mathrm{tgh}\, x/2}{1-(\mathrm{tgh}\, x/2)^2} \qquad \cosh x = \frac{1+(\mathrm{tgh}\, x/2)^2}{1-(\mathrm{tgn}\, x/2)^2}.$$

Pertanto vale l'identità

$$\int f(\mathrm{senh}x, \cosh x)\, dx = \int f\left(\frac{2\mathrm{tgh}\, x/2}{1-(\mathrm{tgh}\, x/2)^2}, \frac{1+(\mathrm{tgh}\, x/2)^2}{1-(\mathrm{tgh}\, x/2)^2}\right) dx.$$

Con la sostituzione $y=\text{tgh}\, x/2$, osservando che $x=2$ settgh$y$ e $(\text{settgh}y)' = 1/(1-y^2)$, si ottiene

$$\int f\,(\text{senh}x,\ \cosh x)\,dx = \left(\int f\left(\frac{2y}{1-y^2},\ \frac{1+y^2}{1-y^2}\right)\frac{2}{1-y^2}\,dy\right)_{y=\text{tgh}\,x/2}.$$

La funzione

$$y\to f\left(\frac{2y}{1-y^2},\ \frac{1+y^2}{1-y^2}\right)\frac{2}{1-y^2}$$

è ancora razionale essendo f razionale.

3) Utilizzando la formula di bisezione si ha

$$\text{sen}x=\frac{2\ \text{tg}x/2}{1+\text{tg}^2\ x/2}\qquad \cos x=\frac{1-\text{tg}^2x/2}{1+\text{tg}^2x/2}.$$

Pertanto vale l'identità

$$\int f\,(\text{sen}x,\ \cos x)\,dx = \int f\left(\frac{2\ \text{tg}\ x/2}{1+\text{tg}^2\ x/2},\ \frac{1-\text{tg}^2x/2}{1+\text{tg}^2x/2}\right)dx.$$

Con la sostituzione $y=\text{tg}\ x/2$, osservando che $x=2\ \text{arctg}y$, $(\text{arctg}y)'=1/(1+y^2)$ si ha

$$\int f\,(\text{sen}x,\ \cos x)\,dx = \left(\int f\left(\frac{2y}{1+y^2},\ \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\frac{2}{1+y^2}\,dy\right)_{y=\text{tg}\,x/2}.$$

La funzione $y\to f\left(\frac{2y}{1+y^2},\ \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\frac{2}{1+y^2}$ è ancora razionale essendo f razionale.

4) Con la sostituzione $y=\text{tg}x$, osservando che $x=\text{arctg}\ y$ e $(\text{arctg}y)'=1/(1+y^2)$, si ha

$$\int f(\text{tg}x)\,dx = \left(\int f(y)\,\frac{1}{1+y^2}\,dy\right)_{y=\text{tg}x}.$$

La funzione $y\to f(y)/(1+y^2)$ è ancora razionale, essendo f razionale.

5) Con la sostituzione

$$y = \sqrt[n]{ax+b},$$

osservando che

$$x=\frac{y^n-b}{a},\quad \left(\frac{y^n-b}{a}\right)' = \frac{ny^{n-1}}{a},$$

si ha

$$\int f\left(x,\ \sqrt[n]{ax+b}\right)dx = \left(\int f\left(\frac{y^n-b}{a},\ y\right)\frac{ny^{n-1}}{a}\,dy\right)_{y=\sqrt[n]{ax+b}}.$$

La funzione:

$$y\to f\left(\frac{y^n-b}{a},\ y\right)\frac{ny^{n-1}}{a}$$

è razionale essendo f razionale.

6) Si indichi con n il minimo comune multiplo tra $n_1, n_2, \ldots, n_k$ e con p_i la quantità n/n_i. Con la sostituzione

$$y=\sqrt[n]{ax+b},$$

osservando che

$$x=\frac{y^n-b}{a},\quad \sqrt[n_i]{ax+b} = y^{p_i},\quad \left(\frac{y^n-b}{a}\right)' = \frac{ny^{n-1}}{a},$$

si ottiene

$$\int f\left(x,\ \sqrt[n_1]{ax+b},\ \sqrt[n_2]{ax+b},\ \ldots\ \sqrt[n_k]{ax+b}\right)dx =$$
$$= \left(\int \left(\frac{y^n-b}{a},\ y^{p_1},\ y^{p_2},\ \ldots,\ y^{p_k}\right)\frac{ny^{n-1}}{a}\,dy\right)_{y=\sqrt[n]{ax+b}}.$$

La funzione:

$$y \to f\left(\frac{y^n-b}{a},\ y^{p_1},\ y^{p_2},\ \dots\ y^{p_k}\right)\frac{ny^{n-1}}{a}$$

è ancora razionale tale risultando f.

7) Con la sostituzione

$$y=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

osservando che

$$x=\frac{b-dy^n}{cy^n-a}, \quad \left(\frac{b-dy^n}{cy^n-a}\right)'=\frac{ny^{n-1}}{(cy^n-a)^2}(ad-bc),$$

si ottiene

$$\int f\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \left(\int f\left(\frac{b-dy^n}{cy^n-a},\ y\right)\frac{ny^{n-1}}{(cy^n-a)^2}(ad-bc)\ dy\right)_{y=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}$$

La funzione

$$y\to f\left(\frac{b-dy^n}{cy^n-a},\ y\right)\frac{ny^{n-1}}{(cy^n-a)^2}(ad-bc)$$

è razionale essendo tale f.

8) Si effettui la sostituzione $y=\sqrt{x^2+px+q}+x$ e si osservi che $(y-x)^2=x^2+px+q$, sicché risolvendo rispetto a x si ha $x=\frac{y^2-q}{p+2y}$. D'altro canto si ha allora anche

$$\sqrt{x^2+px+q}+x = y-\frac{y^2-q}{p+2y}=\frac{y^2+py+q}{p+2y}, \quad \left(\frac{y^2-q}{p+2y}\right)'=\frac{2(y^2+py+q)}{(p+2y)^2},$$

vale pertanto l'identità

$$\int f\left(x,\ \sqrt{x^2+px+q}\right)dx = \left(\int f\left(\frac{y^2-q}{p+2y},\ \frac{y^2+py+q}{p+2y}\right)\frac{2(y^2+py+q)}{(p+2y)^2}\right)_{y=\sqrt{x^2+px+q}+x}$$

La funzione

$$y\to f\left(\frac{y^2-q}{p+2y},\ \frac{y^2+py+q}{p+2y}\right)\frac{2\,(y^2+py+q)}{(p+2y)^2}$$

è razionale essendo tale f.
Si osservi che se $p^2-4q>0$ si ha

$$x^2+px+q=\left[\left(\frac{x+p/2}{\sqrt{p^2/4-q}}\right)^2-1\right]\left(\frac{p^2}{4}-q\right).$$

Pertanto con la sostituzione:

$$z=\left(x+\frac{p}{2}\right)\Big/\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=\varphi(x),$$

osservando che

$$x=\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)z-\frac{p}{2}, \quad \left(\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)z-\frac{p}{2}\right)'=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

grazie alla seconda regola di sostituzione si ha

$$\int f\left(x,\ \sqrt{x^2+px+q}\right)dx =$$
$$=\left(\int f\left(\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)z-\frac{p}{2},\ \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\cdot\sqrt{z^2-1}\right)\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\ dz\right)_{z=\varphi(x)}$$

Grazie allora alla sostituzione z=coshy, osservando che (coshy)'=senhy, y=settcoshz grazie alla relazione $(\cosh y)^2-(\operatorname{senh} y)^2=1$ e alla seconda regola di sostituzione, si ottiene

$$\int f\left(x,\ \sqrt{x^2+px+q}\right)\,dx =$$

$$= \left(\int f\left(\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\cosh y-\frac{p}{2},\ \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\cdot \operatorname{senh} y\right)\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\ \operatorname{senh} y\ dy\right)_{y=\psi(x)}$$

ove con $\psi(x)$ si è indicata la funzione

$$\Psi\ (x) = \operatorname{settcosh}\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)\Big/\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right].$$

Si osservi che l'ultimo integrando ottenuto è del tipo esaminato nell'esercizio **2)**.
Si osservi che se $p^2-4q<0$ si ha

$$x^2+px+q = \left[1+\left(\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\right)^2\right]\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Pertanto con la sostituzione:

$$z = \left(x+\frac{p}{2}\right)\Big/\sqrt{q-\frac{p^2}{4}} = \varphi(x),$$

osservando che

$$x=z\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}-\frac{p}{2},\quad \left(z\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}-\frac{p}{2}\right)' = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}},$$

grazie alla seconda regola di sostituzione si ha

$$\int f\left(x,\ \sqrt{x^2+px+q}\right)\,dx =$$

$$= \left(\int f\left(z\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}-\frac{p}{2},\ \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\cdot\sqrt{z^2+1}\right)\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\ dz\right)_{z=\varphi(x)}.$$

Grazie alla sostituzione z=senhy, osservando che (senhy)'= coshy e y=settsenhz, grazie alla relazione $(\cosh y)^2-(\operatorname{senh} y)^2=1$ e alla seconda regola di sostituzione si ottiene

$$\int f\left(x,\ \sqrt{x^2+px+q}\right)\,dx =$$

$$= \left(\int f\left(\operatorname{senh} y\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}-\frac{p}{2},\ \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\cosh y\right)\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\cosh y\ dz\right)_{y=\psi(x)}$$

ove con $\psi(x)$ si è indicata la funzione

$$\Psi\ (x) = \operatorname{settsenh}\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)\Big/\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right].$$

Si osservi che l'ultimo integrando ottenuto è del tipo esaminato nell'esercizio **2)**.

9) Ovviamente affinché l'integrale abbia senso le radici dell'equazione $x^2-px-q=0$ devono essere reali e distinte. Indichiamole con α e β e sia più precisamente $\alpha<\beta$.
Sarà allora

$$\sqrt{-x^2+px+q} = \sqrt{-(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}.$$

Si avrà allora

$$\int f\left(x,\ \sqrt{-x^2+px+q}\right)dx = \int f\left(x,\ (x-\alpha)\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}\right)dx$$

e dunque l'integrando sarà del tipo esaminato nell'esercizio **7)**. Ponendo $y = \sqrt{(\beta-x)/(x-\alpha)}$ e osservando che

$$x = \frac{\beta+\alpha y^2}{1+y^2},\quad \sqrt{-x^2+px+q} = y\left(\frac{\beta+\alpha y^2}{1+y^2}-\alpha\right) = \frac{y}{1+y^2}(\beta-\alpha)$$

$$\left(\frac{\beta+\alpha y^2}{1+y^2}\right)' = \frac{(\alpha-\beta)\ 2y}{(1+y^2)^2},$$

si ha

$$\int f\left(x,\ \sqrt{-x^2+px+q}\right)dx =$$

$$= \left(\int f\left(\frac{\beta+\alpha y^2}{1+y^2},\ (\beta-\alpha)\frac{y}{1+y^2}\right)\frac{(\alpha-\beta)\ 2y}{(1+y^2)^2}\ dy\right)_{y=\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}}.$$

Si osservi che dovendo essere le radici reali e distinte sarà $p^2+4q>0$. Si ha allora

$$-x^2+px+q = \left[1-\left(\frac{x-p/2}{\sqrt{p^2/4+q}}\right)^2\right]\left(\frac{p^2}{4}+q\right).$$

Pertanto con la sostituzione

$$z = \left(x-\frac{p}{2}\right)\Big/\sqrt{\frac{p^2}{4}+q} = \varphi(x),$$

osservando che

$$x=z\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}+\frac{p}{2}, \quad \left(z\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}+\frac{p}{2}\right)' = \sqrt{\frac{p^2}{4}+q},$$

grazie alla seconda regola di sostituzione si ha

$$\int f\left(x, \sqrt{-x^2+px+q}\right) dx =$$
$$= \left(\int f\left(z\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}+\frac{p}{2}, \sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\sqrt{1-z^2}\right)\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\, dz\right)_{z=\varphi(x)}$$

ove con $\varphi(x)$ si è indicata la funzione $\varphi(x)= \dfrac{x-\frac{p}{2}}{\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}}$.

Grazie alla sostituzione $z=\operatorname{sen}y$, osservando che $(\operatorname{sen}y)'=\cos y$, $y=\arcsin z$, grazie alla relazione $\operatorname{sen}^2y+\cos^2y=1$ e alla seconda regola di sostituzione, si ottiene:

$$\int f\left(x, \sqrt{-x^2+px+q}\right) dx =$$
$$= \left(\int f\left(\operatorname{sen}y\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}+\frac{p}{2}, \sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\cos y\right)\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\cos y\, dz\right)_{y=\psi(x)}$$

ove con $\psi(x)$ si è indicata la funzione

$$\Psi(x) = \arcsin\left[\left(x-\frac{p}{2}\right)\Big/\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\right].$$

Si osservi che l'ultimo integrando ottenuto è del tipo esaminato nell'esercizio **3)**.

10) Con la sostituzione $y=\sqrt{a_1x+b_1}$, osservando che

$$x=\frac{y^2-b_1}{a_1}, \quad \left(\frac{y^2-b_1}{a_1}\right)' = \frac{2y}{a_1},$$

grazie alla seconda regola di sostituzione si ottiene

$$\int f\left(x, \sqrt{a_1x+b_1}, \sqrt{a_2x+b_2}\right) dx =$$
$$\left(\int f\left(\frac{y^2-b_1}{a_1}, y, \sqrt{a_2\left(\frac{y^2-b_1}{a_1}\right)+b_2}\right)\frac{2y}{a_1}\, dy\right)_{y=\sqrt{a_1x+b_1}}.$$

L'integrando è allora del tipo esaminato negli esercizi **8)** e **9)**.

11) Gli integrandi del tipo proposto sono detti differenziali binomi. Per p intero, ovviamente l'integrale rientra nel tipo esaminato nell'esercizio **6)**.
Se $(m+1)/n$ è razionale, si effettua la sostituzione $y=ax^n+b$.
Si ha ovviamente

$$x=\left(\frac{y-b}{a}\right)^{1/n}, \quad \left[\left(\frac{y-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right]' = \frac{1}{na}\left(\frac{y-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}.$$

Si ha così grazie alla regola di sostituzione

$$\int x^m\left(ax^n+b\right)^p dx = \left(\int\left(\frac{y-b}{a}\right)^{\frac{m}{n}+\frac{1}{n}-1} y^p\cdot\frac{1}{na}\, dy\right)_{y=ax^n+b}$$
$$= \left(\frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}}\int (y-b)^{\frac{m+1}{n}-1} y^p dy\right)_{y=ax^n+b}.$$

Si osservi allora che l'integrando $(y-b)^{\frac{m+1}{n}-1}\, y^p$ rientra nel tipo esaminato nell'esercizio **6)**.
Se invece è razionale $p+(m+1)/n$ si effettua la sostituzione

$$y=a+b\ x^{-n}.$$

Si ha ovviamente

$$x=\left(\frac{y-a}{b}\right)^{-\frac{1}{n}},\qquad \left[\left(\frac{y-a}{b}\right)^{-\frac{1}{n}}\right]' = -\frac{1}{nb}\left(\frac{y-a}{b}\right)^{-\frac{1}{n}-1}.$$

Si ha così grazie alla seconda regola di sostituzione

$$\begin{aligned}\int x^m\,(ax^n+b)^p\,dx &= \int x^{m+np}\,(a+bx^{-n})^p\,dx = \\ &= -\frac{1}{nb}\left(\int \left(\frac{y-a}{b}\right)^{-\frac{m+np}{n}-\frac{1}{n}-1} y^p\,dy\right)_{y=a+bx^{-n}} \\ &= -\frac{1}{n}\,b^{\frac{m+1}{n}+p}\left(\int (y-a)^{-\frac{m+1}{n}-p-1}\,y^p\,dy\right)_{y=a+bx^{-n}}\end{aligned}$$

Si osservi allora che l'integrando

$$y^p\,(y-a)^{-\frac{m+1}{n}-p-1}$$

è del tipo esaminato nell'esercizio **6)**.
Si osservi ancora che, sia nel caso $(m+1)/n$ intero che in quello $p+(m+1)/n$ intero, la sostituzione $y=x^n$, osservando che

$$x=y^{\frac{1}{n}},\qquad \left(y^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}\,y^{\frac{1}{n}-1},$$

fornisce

$$\begin{aligned}\int x^m\,(ax^n+b)^p\,dx &= \frac{1}{n}\left(\int (ay+b)^p\,y^{\frac{m}{n}+\frac{1}{n}-1}\,dy\right)_{y=x^n} \\ &= \frac{1}{n}\left(\int (ay+b)^p\,y^{\frac{m+1}{n}-1}\,dy\right)_{y=x^n}.\end{aligned}$$

L'integrando

$$(ay+b)^p\,y^{\frac{m+1}{n}-1}$$

rientra tra quelli esaminati nell'esercizio **5)** se $(m+1)/n$ è intero; se invece è intero $p+(m+1)/n$, osservato che

$$(ay+b)^p\,y^{\frac{m+1}{n}-1} = \left(\frac{ay+b}{y}\right)^p y^{\frac{m+1}{n}+p-1},$$

esso rientra tra quelli esaminati nell'esercizio **7)**.

6.2 Ulteriori applicazioni della seconda regola di sostituzione

Si calcolino i seguenti integrali indefiniti

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **2)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$ **4)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$ **6)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}\,dx$ **8)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-5e^x+6}\,dx$ **10)** $\displaystyle\int \frac{1+tg^2x}{2-tg^2x-tgx}\,dx$

11) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}x+\cos x}\,dx$ **12)** $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh x}\,\frac{\operatorname{senh}x+\cosh x}{\operatorname{senh}x-\cosh x}\,dx$

13) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ **14)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}+1}\,dx$

15) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}}\,dx$ **16)** $\displaystyle\int x^5\,\sqrt[3]{1-x^3}\,dx$

17) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}\,dx$

18) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2\,(e^{2x}+2e^x+2)}\,dx$

19) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x\,(\operatorname{tg}^2 x+1)}{\operatorname{sen}^2 x\,(\operatorname{tg} x-1)^2}\,dx$

20) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\,dx$

21) $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{sen} x+\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)\,(1+\cos x)}\,dx$

22) $\displaystyle\int \frac{2}{(x+1)\,(\sqrt{x}+1)}\,dx$

23) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)\,(x^2+2)}\,dx$

24) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x+1)\,\sqrt{2x+1}}\,dx$

25) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{x-x^2}\,(x-x^2)\,(x+1-x^2)}\,dx$

26) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)}\,\left(\sqrt[3]{x+1}-x-1\right)}\,dx$

Risultati

1) $F(x) = \lg \dfrac{\sqrt{(1-x)/(1+x)}-1}{\sqrt{(1-x)/(1+x)}+1} + C = \dfrac{1}{2}\lg \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + C$

2) $F(x) = \lg \dfrac{\sqrt{(1-x)/(1+x)}-1}{\sqrt{(1-x)/(1+x)}+1}+\sqrt{1-x^2}+C = \dfrac{1}{2}\lg \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1-x^2}+C$

3) $F(x) = \dfrac{1}{2}\lg \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}+C = \lg \dfrac{\sqrt{1-x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}+C$

4) $F(x) = \dfrac{1}{2}\lg \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}+\sqrt{1+x^2}+C =$

$= \lg \dfrac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}+\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}+x+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)+C$

5) $F(x) = 2\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+C$

6) $F(x) = \sqrt{x^2-1}-2\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C = \sqrt{x^2-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+C$

7) $F(x) = -\sqrt{2}\lg \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-x}}+C$

8) $F(x) = \dfrac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}+C$

9) $F(x) = e^x+\dfrac{5}{2}\lg(e^{2x}-5e^x+6)-13\operatorname{sett\,tgh}(2e^x+5)+C$

10) $F(x) = \dfrac{2}{3}\operatorname{sett\,tgh}\left(\dfrac{2\operatorname{tg} x+1}{3}\right)+C$

11) $F(x) = \lg\left(1+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)+C$

12) $F(x) = -2\dfrac{1}{\operatorname{tgh}\dfrac{x}{2}-1}-\operatorname{arctg}\operatorname{tgh}\dfrac{x}{2}+C$

13) $F(x) = 6\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+\sqrt{1-x^2}+C$

14) $F(x) = 6\operatorname{arctg}(1+x)^{\frac{1}{6}}+\dfrac{6}{7}(1+x)^{\frac{7}{6}}-\dfrac{1}{5}(1+x)^{\frac{5}{6}}+\dfrac{1}{3}(1+x)^{\frac{1}{2}}-(1+x)^{\frac{1}{6}}+C$

15) $F(x) = 12\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}+\sqrt{1-x}+C$

16) $F(x) = -\dfrac{1}{4}(1-x^3)^{\frac{4}{3}}+\dfrac{1}{7}(1-x^3)^{\frac{7}{3}}+C$

17) $F(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}+C$

18) $F(x) = \dfrac{1}{1+e^x}-\operatorname{arctg}(1+e^x)+C$

19) $F(x) = \log|\operatorname{tg} x|-\dfrac{2}{\operatorname{tg} x-1}+C$

20) $F(x) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}+\operatorname{arctg} e^x\right]+C$

21) $F(x) = \log\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}+C$

22) $F(x) = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\log\left|\dfrac{x+1}{(\sqrt{x}+1)^2}\right|+C$

23) $F(x) = -\left[\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right]+C$

24) $F(x) = 2\operatorname{arctg}\sqrt{2x+1} + \dfrac{1}{3}\sqrt{2x+1}\,(x-1) + C$

25) $F(x) = 2\left[\operatorname{arctg}\sqrt{x-x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}\right] + C$

26) $F(x) = \dfrac{3}{2}\log\dfrac{1+\sqrt[3]{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}} + C$

Soluzioni

1) L'integrale proposto è un caso particolare dell'integrale esaminato nell'esercizio **9)** del paragrafo 6.1.
Le radici dell'equazione $1-x^2=0$ risultano essere $x=\pm 1$. Con la sostituzione $t = \sqrt{(1-x)/(x+1)}$ si ottiene

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{x\,(1+x)\sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}}}\,dx =$$

$$= \left(\int \frac{1}{t\left(\dfrac{2}{1+t^2}\right)\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt\right)_{t=\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}} =$$

$$= -2\left(\int \frac{1}{1-t^2}\,dt\right)_{t=\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}}.$$

D'altro canto utilizzando, ad esempio, il risultato dell'esercizio **1)** del paragrafo 5.2 si ha

$$\int \frac{1}{1-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\lg\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

e pertanto

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lg\left|\frac{\sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}}-1}{\sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}}+1}\right| + C.$$

Si osservi che con la sostituzione $x=\operatorname{sen}t$, poiché $(\operatorname{sen}t)'=\cos t$, si ha subito

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left(\int \frac{1}{\operatorname{sen}t\,\cos t}\cos t\,dt\right)_{t=\operatorname{arcsen}x} =$$

$$= \left(\int \frac{1}{\operatorname{sen}t}\,dt\right)_{t=\operatorname{arcsen}x}$$

e grazie all'esercizio **3)** del paragrafo 2.3 si ha

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}t}\,dt = \lg\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C$$

e dunque essendo grazie alle formule di bisezione

$$\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}$$

si ha

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}t}\,dt = \lg\left|\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}\right| + C = \frac{1}{2}\lg\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\lg\left|\frac{1-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}{1+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}\right| + C.$$

Si ha pertanto

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\lg\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + C.$$

I due risultati coincidono grazie all'identità

$$\left(\frac{\sqrt{(1-x)/(1+x)}-1}{\sqrt{(1-x)/(1+x)}+1}\right)^2 = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

(Tale relazione segue subito dall'identità

$$\frac{1-t}{t+1} = \sqrt{\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2} = \sqrt{\left(1-\frac{2t}{1+t^2}\right)\Big/\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)}$$

grazie alla posizione $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ che dà $\sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2}$).

2) L'integrale proposto è un caso particolare dell'integrale esaminato nell'esercizio **9)** del paragrafo 6.1.
Le radici dell'equazione $1-x^2=0$ risultano essere $x=\pm 1$.
Con la sostituzione

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{x+1}},$$

si ottiene

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \int \frac{(1+x)\sqrt{(1-x)/(x+1)}\,dx}{x} =$$

$$= \left(\int \frac{2t/(1+t^2)}{(1-t^2)/(1+t^2)} \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt\right)_{t=\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}}$$

$$= -8\left(\int \frac{t^2}{(1-t^2)(1+t^2)^2}\,dt\right)_{t=\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}}.$$

Si osservi ora che

$$\int \frac{t^2}{(1-t^2)(1+t^2)^2}\,dt = \int \frac{t^2-1+1}{(1-t^2)(1+t^2)^2}\,dt =$$

$$= -\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt - \int \frac{1}{(t^2-1)(1+t^2)^2}\,dt.$$

D'altro canto grazie alla formula di riduzione dell'esercizio **25)** del paragrafo 4.1 si ha

$$\int\frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt=\frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,t.$$

Grazie poi all'esercizio **18)** del paragrafo 5.2 si ha

$$\int\frac{1}{(t^2-1)(1+t^2)^2}\,dt = \frac{1}{8}\,\lg\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,t - \frac{1}{4}\,\frac{t}{1+t^2} + C.$$

Si ottiene così

$$\int\frac{t^2}{(1-t^2)(1+t^2)^2} = -\frac{1}{8}\,\lg\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{4}\,\frac{t}{1+t^2} + C$$

e dunque

$$\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \lg\left|\frac{\sqrt{(1-x)/(1+x)}-1}{\sqrt{(1-x)/(1+x)}+1}\right| + \frac{2\sqrt{(1-x)/(1+x)}}{1+(1-x)/(1+x)} + C$$

$$= \lg\left|\frac{\sqrt{(1-x)/(1+x)}-1}{\sqrt{(1-x)/(1+x)}+1}\right| + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\,\lg\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + C.$$

(La relazione

$$\frac{2\sqrt{(1-x)/(1+x)}}{1+(1-x)/(1+x)} = \sqrt{1-x^2}$$

è immediata).
Si osservi inoltre che con la sostituzione $x=\mathrm{sen}\,t$ si ha, poiché $(\mathrm{sen}\,t)'=\cos t$,

$$\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \left(\int\frac{\cos t}{\mathrm{sen}\,t}\cos t\,dt\right)_{t=\mathrm{arcsen}\,x} =$$

$$= \left(\int\frac{1}{\mathrm{sen}\,t}\,dt\right)_{t=\mathrm{arcsen}\,x} - \left(\int \mathrm{sen}\,t\,dt\right)_{t=\mathrm{arcsen}\,x} =$$

$$= \left(\int\frac{1}{\mathrm{sen}\,t}\,dt\right)_{t=\mathrm{arcsen}\,x} + (\cos t)_{t=\mathrm{arcsen}\,x}.$$

Grazie all'esercizio **3)** del paragrafo 2.2 si ha

$$\int\frac{1}{\mathrm{sen}\,t}\,dt = \lg\left|\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}\right| + C$$

e dunque, (si confronti lo svolgimento del precedente esercizio)

$$\int \frac{1}{\mathrm{sen}\,t}\,dt = \frac{1}{2}\lg\left|\frac{1-\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 t}}{1+\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 t}}\right| + c.$$

Si ha pertanto

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\lg\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right) + \sqrt{1-x^2} + c.$$

Si osservi ancora che l'integrale può anche essere calcolato osservando che

$$\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

e pertanto

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Si ha così,

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,d\left(-x^2\right).$$

Utilizzando la prima regola di sostituzione si ottiene

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx + \sqrt{1-x^2}$$

grazie all'esercizio **1)** si perviene al risultato.

3) L'integrale proposto è un caso particolare dell'integrale esaminato nell'esercizio **8)** del paragrafo 6.1.
Con la sostituzione

$$t = \sqrt{x^2+1} + x$$

si ha

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left(\int \frac{2t}{t^2-1}\cdot\frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt\right)_{t=\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$= 2\left(\int \frac{1}{t^2-1}\,dt\right)_{t=\sqrt{1+x^2}+x}$$

Grazie all'esercizio **1)** del paragrafo 5.2 si ha

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \lg\frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1} + c.$$

Si osservi ancora che con la sostituzione $x=\mathrm{senh}\,t$, osservando che $(\mathrm{senh}\,t)'=\mathrm{cosh}\,t$ e tenendo conto inoltre che $(\mathrm{cosh}\,t)^2-(\mathrm{senh}\,t)^2=1$, si ha

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left(\int \frac{1}{\mathrm{senh}\,t\;\mathrm{cosh}\,t}\,\mathrm{cosh}\,t\,dt\right)_{t=\mathrm{settsenh}\,x} =$$
$$= \left(\int \frac{1}{\mathrm{senh}\,t}\,dt\right)_{t=\mathrm{settsenh}\,x}.$$

Grazie all'esercizio **4)** del paragrafo 2.3 si ha

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left(\lg\left|\mathrm{tgh}\,\frac{t}{2}\right|\right)_{t=\mathrm{settsenh}\,x} + c.$$

D'altro canto grazie alla formula di bisezione si ha

$$\mathrm{tgh}\,\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{cosh}\,t-1}{\mathrm{cosh}\,t+1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{1+(\mathrm{senh}\,t)^2}-1}{\sqrt{1+(\mathrm{senh}\,t)^2}+1}}$$

e pertanto

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\lg\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} + c.$$

I due risultati coincidono in quanto vale l'identità

$$\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}-1}{x+\sqrt{1+x^2}+1}\right)^2 - \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} = 0$$

(Si osservi infatti che:

$$\frac{t-1}{t+1} = \sqrt{\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{-1+(t^2+1)/2t}{1+(t^2+1)/2t}}.$$

Con la posizione

$$t = x+\sqrt{1+x^2},$$

risultando

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{(t^2+1)}{2t},$$

si ottiene l'identità cercata).

4) L'integrale proposto è un caso particolare dell'integrale esaminato nell'esercizio 8) del paragrafo 6.1.
Con la sostituzione

$$t = x+\sqrt{1+x^2}$$

si ottiene

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx = \left(\int \frac{2t}{t^2-1}\cdot\frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt\right)_{t=x+\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{(t^2+1)^2}{(t^2-1)\,t^2}\,dt\right)_{t=x+\sqrt{1+x^2}}.$$

Si osservi ora che sviluppando il quadrato $(t^2+1)^2$ si ha

$$\int\frac{(t^2+1)^2}{(t^2-1)\,t^2}\,dt = \int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,dt + 2\int\frac{1}{t^2-1}\,dt + \int\frac{1}{(t^2-1)\,t^2}\,dt$$
$$= \int 1\cdot dt + 3\int\frac{1}{t^2-1}\,dt + \int\frac{1}{(t^2-1)\,t^2}\,dt.$$

Grazie agli esercizi 1) e 8) del paragrafo 5.2 si ha allora

$$\int\frac{(t^2+1)^2}{(t^2-1)\,t^2}\,dt = t+2\,\lg\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{t} + C.$$

Si ricava pertanto l'espressione

$$\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \lg\left|\frac{x+\sqrt{1+x^2}-1}{x+\sqrt{1+x^2}+1}\right| + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Si osservi che con la sostituzione $x=\operatorname{senh}t$, osservando che $(\operatorname{senh}t)'=\cosh t$ e che $(\cosh t)^2=1+(\operatorname{senh}t)^2$, si ha

$$\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx = \left(\int\frac{1}{\operatorname{senh}t}(\cosh t)^2\,dt\right)_{t=\operatorname{settsenh}x} =$$
$$= \left(\int\frac{1}{\operatorname{senh}t}\,dt\right)_{t=\operatorname{settsenh}x} + \left(\int\operatorname{senh}t\,dt\right)_{t=\operatorname{settsenh}x}.$$

Grazie all'esercizio 4) del paragrafo 2.2 si ha

$$\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx = (\cosh t)_{t=\operatorname{settsenh}x} + \left(\lg\left|\operatorname{tgh}\frac{t}{2}\right|\right)_{t=\operatorname{settsenh}x} + C.$$

Grazie ancora alle relazioni

$$\operatorname{tgh}\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\cosh t-1}{\cosh t+1}},\quad \cosh t = \sqrt{1+(\operatorname{senh}t)^2}$$

si ottiene

$$\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\,\lg\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right| + C.$$

Si osservi ancora che

$$\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Si ha pertanto grazie all'esercizio 3) e alla prima regola di sostituzione

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx = \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\lg\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,d\left(x^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\lg\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} + \sqrt{1+x^2} + c.$$

I due risultati coincidono in quanto

$$\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) = \sqrt{1+x^2}$$

(si osservi che $t+1/t=(t^2+1)/t$ e con la posizione

$$t = x+\sqrt{1+x^2}$$

si ha

$$\frac{(t^2+1)}{t} = 2\sqrt{x^2+1}$$

sicché

$$t+\frac{1}{t} = 2\sqrt{x^2+1}$$

e inoltre

$$\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}-1}{x+\sqrt{1+x^2}+1}\right)^2 - \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} = 0$$

si confronti a tal proposito la fine dell'esercizio 3)).

5) L'integrale proposto è un caso particolare dell'integrale esaminato nell'esercizio 8) del paragrafo 6.1.
Con la sostituzione

$$t=x+\sqrt{x^2-1}$$

si ottiene

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \left(\int \frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{2t}{t^2-1}\cdot\frac{t^2-1}{2t^2}\,dt\right)_{t=x+\sqrt{x^2-1}}$$
$$= 2\left(\int \frac{1}{1+t^2}\,dt\right)_{t=x+\sqrt{x^2-1}} = 2\,\mathrm{arctg}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + c.$$

Si osservi ancora che con la sostituzione $x=\cosh t$, ricordando che $(\cosh t)'=\mathrm{senh}\,t$ e che $(\cosh t)^2-(\mathrm{senh}\,t)^2=1$, si ha

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \left(\int \frac{1}{\cosh t\ \mathrm{senh}\,t}\ \mathrm{senh}\,t\,dt\right)_{t=\mathrm{settcosh}\,x} =$$
$$= \left(\int \frac{1}{\cosh t}\,dt\right)_{t=\mathrm{settcosh}\,x}.$$

Grazie al risultato dell'esercizio 6) del paragrafo 2.2 si ha

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = 2\left(\mathrm{arctgtgh}\,\frac{t}{2}\right)_{t=\mathrm{settcosh}\,x} + c.$$

Ricordando le formule di bisezione si ha

$$\mathrm{tgh}\,\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\cosh t-1}{\cosh t+1}}$$

e pertanto

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + c.$$

Per stabilire l'identità dei due risultati si noti innanzitutto che per ogni t

$$\mathrm{arctg}\,\frac{t-1}{t+1} = \mathrm{arctg}\,t - \frac{\pi}{4}$$

come si può ad esempio verificare osservando l'identità delle derivate delle funzioni $\mathrm{arctg}(t-1)/(t+1)$ e $\mathrm{arctg}\,t-\pi/4$ e la loro coincidenza nel punto $t=0$.

Si osservi che

$$\frac{t-1}{t+1} = \sqrt{\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{-1+(t^2+1)/2t}{1+(t^2+1)/2t}}.$$

Si ponga poi

$$t=x+\sqrt{x^2-1}.$$

Si ha allora

$$\frac{t^2+1}{2t} = x$$

e dunque

$$\frac{t-1}{t+1} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Si ottiene così

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \frac{\pi}{4}.$$

6) L'integrale proposto è un caso particolare dell'integrale esaminato nell'esercizio 8) del paragrafo 6.1.
Con la sostituzione

$$t=x+\sqrt{x^2-1}$$

si ha

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \left(\int \frac{1}{\frac{t^2+1}{2t}} \cdot \frac{t^2-1}{2t} \cdot \frac{t^2-1}{2t^2}\,dt\right)_{t=x+\sqrt{x^2-1}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)\,t^2}\,dt\right)_{t=x+\sqrt{x^2-1}}.$$

Sviluppando il quadrato $(t^2-1)^2$ si ha

$$\int \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)\,t^2}\,dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt - 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int \frac{1}{(t^2+1)\,t^2}\,dt$$
$$= \int 1dt - 3\int \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int \frac{1}{(t^2+1)\,t^2}\,dt.$$

Grazie al risultato dell'esercizio 9) del paragrafo 5.2 si ha

$$\int \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)\,t^2}\,dt = t-4\operatorname{arctg}t - \frac{1}{t} + C$$

e dunque

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) -2\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$$
$$= \sqrt{x^2-1} - 2\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + C.$$

(Per l'ultima identità si osservi che con la posizione

$$t=x+\sqrt{x^2-1}$$

si ha

$$\frac{t^2-1}{t} = 2\sqrt{x^2-1}$$

e quindi

$$t-\frac{1}{t} = 2\sqrt{x^2-1}).$$

Si osservi che con la sostituzione $x=\cosh t$ poiché

$$(\cosh t)'=\operatorname{senh} t,\quad (\cosh t)^2-1 = (\operatorname{senh} t)^2$$

si ha

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \left(\int \frac{(\operatorname{senh} t)^2}{\cosh t}\,dt\right)_{t=\operatorname{settcosh}x}$$
$$= \left(\int \cosh t\,dt\right)_{t=\operatorname{settcosh}x} - \left(\int \frac{1}{\cosh t}\,dt\right)_{t=\operatorname{settcosh}x}.$$

Utilizzando il risultato dell'esercizio **6)** del paragrafo 2.2 si ha

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = (\operatorname{senh} t)_{t=\operatorname{settcosh} x} - 2\left(\operatorname{arctg}\operatorname{tgh}\frac{t}{2}\right)_{t=\operatorname{settcosh} x} + C.$$

Grazie alla formula di bisezione si ha

$$\operatorname{tgh}\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\cosh t-1}{\cosh t+1}}$$

e quindi, poiché $\operatorname{senh} t=\sqrt{(\cosh t)^2-1}$, si ottiene

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C.$$

Si osservi infine che

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

e quindi grazie al risultato dell'esercizio **5)**

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx - \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,d\left(x^2\right) - 2\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) =$$
$$= \sqrt{x^2-1} - 2\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

7) L'integrale proposto è un caso particolare dell'integrale esaminato nell'esercizio **5)** del paragrafo 6.1. Con la sostituzione

$$y=\sqrt{1-x}$$

essendo

$$x=1-y^2,\quad (1-y^2)'=-2y,$$

si ottiene

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}\,dx = \left(\int \frac{-2y}{y\cdot(2-y^2)}\,dy\right)_{y=\sqrt{1-x}} =$$
$$= -\left[\sqrt{2}\int \frac{1}{1-\left(y/\sqrt{2}\right)^2}\,d\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\right]_{y=\sqrt{1-x}}.$$

Grazie all'integrale **15)** della tabella 1.1 si ha

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}\,dx = -\sqrt{2}\,\lg\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-x}}\right| + C.$$

8) L'esercizio proposto è un caso particolare dell'integrale esaminato nell'esercizio **5)** del paragrafo 6.1 Effettuando la sostituzione

$$y=\sqrt{1+x}$$

e osservando che

$$x=y^2-1,\quad (y^2-1)'=2y,$$

si ha grazie alla seconda regola di sostituzione

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx = \left[\int \frac{y^2-1}{y}\,2y\,dy\right]_{y=\sqrt{1+x}}.$$

D'altro canto si ha

$$\int \frac{y^2-1}{y}\,2y\,dy=2\int y^2dy - \int dy=\frac{2}{3}\,y^3-2y + C,$$

sicché

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 2\sqrt{x+1} + C.$$

Si osservi anche che grazie alla prima regola di sostituzione si ha

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{1+x}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int \sqrt{1+x}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

$$= \int \sqrt{1+x}\,d(1+x) - \int \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,d(1+x) =$$

$$= \frac{2}{3}(1+x)^{2/3} - 2\sqrt{1+x} + C.$$

9) L'esercizio proposto è un caso particolare dell'integrale esaminato nell'esercizio 1) del paragrafo 6.1.
Con la trasformazione $t=e^x$, osservando che

$$x = \lg t, \qquad (\lg t)' = \frac{1}{t},$$

si ottiene

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-5e^x+6}\,dx = \left(\int \frac{t^2}{t^2-5t+6}\,dt\right)_{t=e^x} = \left(\int 1\,dt\right)_{t=e^x} + \left(\int \frac{5t-6}{t^2-5t+6}\,dt\right)_{t=e^x}.$$

Utilizzando il risultato dell'esercizio **12)** del paragrafo 2.2 si ottiene

$$\int \frac{5t-6}{t^2-5t+6}\,dt = \frac{5}{2}\lg\left(t^2-5t+6\right) - 13\,\text{setttgh}\,(2t+5) + C.$$

Si ha pertanto

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-5e^x+6}\,dx = e^x + \frac{5}{2}\lg\left(e^{2x}-5e^x+6\right) - 13\,\text{setttgh}\,(2e^x+5) + C.$$

10) L'esercizio proposto è un caso particolare dell'integrale esaminato nell'esercizio **4)** del paragrafo 6.1.
Con la sostituzione $t=\text{tg}x$, osservando che

$$x = \text{arctg}t, \quad (\text{arctg}t)' = \frac{1}{1+t^2},$$

si ottiene

$$\int \frac{1+\text{tg}^2x}{2-\text{tg}^2x-\text{tg}x}\,dx = -\left(\int \frac{1+t^2}{t^2+t-2}\,\frac{dt}{1+t^2}\right)_{t=\text{tg}x}$$

Utilizzando il risultato dell'esercizio **9)** del paragrafo 2.3 si ottiene

$$\int \frac{1}{t^2+t-2}\,dt = -\frac{2}{3}\,\text{setttgh}\left(\frac{2t+1}{3}\right) + C.$$

Si ha pertanto

$$\int \frac{1+\text{tg}^2x}{2-\text{tg}^2x-\text{tg}x}\,dx = -\frac{2}{3}\,\text{setttgh}\left(\frac{2\text{tg}x+1}{3}\right) + C.$$

11) L'integrale proposto è un caso particolare dell'integrale esaminato nell'esercizio **3)** del paragrafo 6.1.
Con la sostituzione $t=\text{tg}\,(x/2)$, osservando che

$$x = 2\,\text{arctg}t, \quad (2\text{arctg}t)' = \frac{2}{1+t^2}$$

e che grazie alla formula di bisezione

$$\text{sen}x = \frac{2\text{tg}\,x/2}{1+\text{tg}^2\,x/2} \qquad \cos x = \frac{1-\text{tg}^2x/2}{1+\text{tg}^2x/2}$$

si ottiene, in virtù della seconda regola di sostituzione,

$$\int \frac{1}{1+\text{sen}x+\cos x}\,dx = \left[\int \frac{2}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+2t/(1+t^2)+(1-t^2)/(1+t^2)}\,dt\right]_{t=\text{tg}x/2}$$

$$= \left[\int \frac{1}{1+t}\,dt\right]_{t=\text{tg}x/2}.$$

12) L'integrale proposto è un caso particolare dell'integra[le] esaminato nell'esercizio **2)** del paragrafo 6.1.

Con la sostituzione t=tghx/2, osservando che

$$x=2\ \text{setttght}, \qquad (2\,\text{setttght})'=\frac{2}{1-t^2}$$

e che grazie alla formula di bisezione

$$\text{senhx}=\frac{2\text{tgh}\ x/2}{1-(\text{tghx}/2)^2} \qquad \cosh x=\frac{1+(\text{tghx}/2)^2}{1-(\text{tghx}/2)^2},$$

si ottiene in virtù della seconda regola di sostituzione

$$\int\frac{1}{\cosh x}\ \frac{\text{senhx}+\cosh x}{\text{senhx}-\cosh x}\,dx =$$
$$=\left[\int\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2t/(1-t^2)+(1+t^2)/(1-t^2)}{2t/(1-t^2)-(1+t^2)/(1-t^2)}\ \frac{2}{1-t^2}\,dt\right]_{t=\text{tghx}/2}$$
$$=\left[-2\int\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{(1+t)^2}{(t-1)^2}\,dt\right]_{t=\text{tghx}/2}.$$

Grazie al risultato dell'esercizio **19)** del paragrafo 5.2 si ha

$$\int\frac{1}{\cosh x}\ \frac{\text{senhx}+\cosh x}{\text{senhx}-\cosh x}\,dx = -2\,\frac{1}{\text{tghx}/2-1} - \text{arctg tgh}\frac{x}{2} + C.$$

13) L'integrale proposto è un caso particolare dell'integrale esaminato nell'esercizio **7)** del paragrafo 6.1.
Con la sostituzione $t=\sqrt{(1+x)/(1-x)}$, osservando che

$$\left(\frac{t^2-1}{1+t^2}\right)'=\frac{4t}{(1+t^2)^2},\quad x=\frac{t^2-1}{1+t^2},$$

si ottiene

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = 4\left(\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt\right)_{t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}.$$

D'altro canto grazie alla formula di iterazione **25** del paragrafo 4.1 si ha

$$\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \int\frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2}\,dt = \int\frac{1}{1+t^2}\,dt - \int\frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt =$$
$$= \text{arctgt} + \frac{1}{2}\,\frac{t}{(1+t^2)} + \frac{1}{2}\,\text{arctgt} =$$
$$= \frac{3}{2}\,\text{arctgt} + \frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2}.$$

Si ottiene così

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = 6\ \text{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{1-x^2} + C.$$

14) L'integrale proposto è un caso particolare dell'integrale esaminato nell'esercizio **6)** del paragrafo 6.1.
Con la sostituzione

$$t = \sqrt[6]{1+x}$$

osservando che

$$x=t^6-1,\ (t^6-1)'=6t^5,\ \sqrt{1+x}=t^3,\ \sqrt[3]{1+t}=t^2$$

si ottiene

$$\int\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}+1}\,dx = 6\left(\int\frac{t^3}{t^2+1}\cdot t^5dt\right)_{t=\sqrt[6]{1+x}}$$

D'altro canto poiché

$$t^8=(t^8-1)+1=(t^4+1)\ (t^4-1)+1=(t^4+1)\,(t^2-1)\,(t^2+1)+1,$$

si ha subito

$$\int\frac{t^8}{t^2+1}\,dt = \int(t^4+1)\,(t^2-1)\,dt + \int\frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \operatorname{arctg} t + \int (t^6-t^4+t^2-1)\, dt =$$

$$= \operatorname{arctg} t + \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + C.$$

Si ottiene così

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}+1}\, dx = 6 \operatorname{arctg} (1+x)^{1/6} + \frac{6}{7} (1+x)^{7/6} -$$

$$- \frac{6}{5} (1+x)^{5/6} - 6 (1+x)^{1/6} + 2 (1+x)^{1/2} + C.$$

15) L'integrale proposto è un caso particolare dell'integrale esaminato nell'esercizio 10) del paragrafo 6.1
Con la sostituzione $\sqrt{x}=t$, osservando che $x=t^2$, $(t^2)'=2t$ si ha

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}}\, dx = \left(\int \frac{\sqrt{1-t^2}}{(1-t)\, t} \cdot 2t\, dt\right)_{t=\sqrt{x}} = 2 \left(\int \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\, dt\right)_{t=\sqrt{x}}$$

e grazie al risultato dell'esercizio 13) si ottiene

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}}\, dx = 12 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} + \sqrt{1-x} + C.$$

16) L'esercizio proposto è un caso particolare dell'integrale esaminato nell'esercizio 11) del paragrafo 6.1.
Con la sostituzione

$$t=\sqrt[3]{1-x^3},$$

osservando che

$$x=\sqrt[3]{1-t^3}, \quad \left(\sqrt[3]{1-t^3}\right)' = - t^2 (1-t^3)^{-\frac{2}{3}}$$

si ha

$$\int x^5 \sqrt[3]{1-x^3}\, dx = -\left(\int (1-t^3)^{\frac{5}{3}} \cdot t \cdot \frac{t^2}{(1-t^3)^{\frac{2}{3}}}\, dt\right)_{t=\sqrt[3]{1-x^3}}$$

$$= -\left(\int (1-t^3)\, t^3\, dt\right)_{t=\sqrt[3]{1-x^3}} =$$

$$= - \frac{1}{4} (1-x^3)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{7} (1-x^3)^{\frac{7}{3}} + C.$$

17) Si effettui la sostituzione $\operatorname{tg} \frac{x}{2}=t$ (cfr. esercizio 3) del par. 6.1).

18) Si effettui la sostituzione $e^x=t$

19) Si effettui la sostituzione $\operatorname{tg}x=t$ o $\operatorname{tg} \frac{x}{2}=t$

20) Si effettui la sostituzione $e^x=t$

21) Si effettui la sostituzione $\operatorname{tg} \frac{x}{2}=t$

22) Si effettui la sostituzione $\sqrt{x+1}=t$

23) Si effettui la sostituzione $\sqrt{x^2+1}+x=t$

24) Si effettui la sostituzione $\sqrt{2x+1}=t$

25) Si effettui la sostituzione $\sqrt{\frac{1-x}{x}}=t$

26) Si effettui la sostituzione $\sqrt[3]{x+1}=t$

7. Esercizi di ricapitolazione

7.1 Calcolo di integrali indefiniti

Si calcolino i seguenti integrali indefiniti.

1) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}^3x-4\cos^3x+4\operatorname{sen}^2x\cos x-\operatorname{sen}x\cos^2x}\, dx$

2) $\int \operatorname{arcsen}x \lg x\, dx$ 3) $\int \operatorname{settsenh}x \lg x\, dx$

4) $\int \text{settcosh}x \ \lg x \, dx$

5) $\int \frac{\text{arcsen}x}{x^2} \, dx$

6) $\int \frac{1}{(\lg^3 x+3\lg^2 x+2\lg x)x} \, dx$

7) $\int \frac{1}{(4\lg^2 x+3\lg x-1)x} \, dx$

8) $\int x^3 \ \text{arctg}^2 x \, dx$

9) $\int \frac{1}{\text{sen}^4 x+1} \cos x \, dx$

10) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,(\text{arcsen}^4 x-1)} \, dx$

11) $\int \text{arctg} \sqrt{x} \, dx$

12) $\int \sqrt{1+\text{sen}x} \, dx$

13) $\int \frac{1}{\sqrt{1+\text{sen}x}} \, dx$

14) $\int \text{arcsen}\left(\sqrt{x}+1\right) dx$

15) $\int \frac{\lg(1+x)}{x^3} \, dx$

16) $\int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \, dx$

17) $\int \lg\left(1+\sqrt{x}\right) dx$

18) $\int \sqrt{e^x+1} \, dx$

19) $\int x \sqrt{e^{x^2}+1} \, dx$

20) $\int \sqrt{\text{tg}x} \, dx$

21) $\int \sqrt{1+\text{sen}^2 x} \, \cos x \, dx$

22) $\int \frac{\sqrt{1+\text{sen}\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

23) $\int \frac{1}{(1+x^2)^3} \, dx$

24) $\int \frac{1}{x^2+x+5} \, dx$

25) $\int \frac{1}{x^2-x-30} \, dx$

26) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-5e^x+4} \, dx$

27) $\int \cos x \ \text{sensen}x \, dx$

28) $\int \frac{\text{arctg}x}{x^2} \, dx$

29) $\int \frac{\text{settsenh}\ x}{x^2} \, dx$

30) $\int \frac{\text{settcosh}\ x}{x^2} \, dx$

31) $\int \frac{1}{x^3+6x^2+11x+6} \, dx$

32) $\int \frac{1}{x^3+x^2-x-1} \, dx$

33) $\int \frac{1}{x^2+2x+5} \, dx$

34) $\int \frac{4x+3}{4x^2+4x+2} \, dx$

35) $\int \frac{2x-5}{x^2-6x+10} \, dx$

36) $\int \frac{4x-1}{4x^2-1} \, dx$

37) $\int \frac{1}{(1+\text{tg}^2 x)\sqrt{\text{tg}x}\ \text{tg}x} \, dx$

38) $\int \frac{1}{(3-2x)^4} \, dx$

39) $\int \frac{3x+1}{5x+4} \, dx$

40) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}} \, dx$

41) $\int x\, e^{5x} \, dx$

42) $\int \text{sen}2x \ \cos 3x \, dx$

43) $\int \cos 2x \ \cos 3x \, dx$

44) $\int x\, e^x \ \text{sen}x \, dx$

45) $\int \text{sen}^3 x \, dx$

46) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$

47) $\int \frac{x^2}{(x+1)(x+2)(x-5)} \, dx$

48) $\int \frac{1}{x+x^2\sqrt{x}} \, dx$

49) $\int \frac{x}{(x^2+2)(x^2+3)\sqrt{x^2+1}} \, dx$

50) $\int \frac{e^{4x}}{(1+e^{2x})^2 (e^{4x}+1)} \, dx$

Risultati

1) $F(x) = -\frac{1}{3} \lg|\text{tg}x+1| + \frac{1}{5} \lg|\text{tg}x-1| + \frac{17}{15} \lg|\text{tg}x+4| + C$

2) $F(x) = \left(x \ \text{arcsen}+\sqrt{1-x^2}\right) \lg x - x\,\text{arcsen}x -$
$- \frac{1}{2} \lg \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} - 2\sqrt{1-x^2} + C$

3) $F(x) = \left(x \ \text{settsenh}x-\sqrt{1+x^2}\right) \lg x - x \ \text{settsenh}x +$
$+ 2\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \lg \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} + C$

4) $F(x) = \left(x\ \mathrm{settcosh}x - \sqrt{x^2-1}\right) \lg x - x\,\mathrm{settcosh}x + 2\sqrt{x^2-1} - \mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1} + C$

5) $F(x) = -\frac{1}{x} \mathrm{arcsen}x + \frac{1}{2} \lg \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + C$

6) $F(x) = \frac{1}{2} \lg |\lg x| - \lg |\lg x+1| + \frac{1}{2} \lg |\lg x+2| + C$

7) $F(x) = -\frac{2}{5} \mathrm{setttgh} \frac{(8\lg x+3)}{5} + C$

8) $F(x) = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\right) \mathrm{arctg}^2 x - \frac{1}{3} \lg (1+x^2) + \frac{1}{12} x^2 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{6}\right) \mathrm{arctg}x + C$

9) $F(x) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \lg \left(\left(\mathrm{sen}x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \mathrm{arctg}\left(\frac{2\mathrm{sen}x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \lg \left(\left(\mathrm{sen}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \mathrm{arctg}\left(\frac{2\mathrm{sen}x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + C$

10) $F(x) = \frac{1}{4} \lg \frac{\mathrm{arcsen}x-1}{\mathrm{arcsen}x+1} - \frac{1}{2} \mathrm{arctgarcsen}x + C$

11) $F(x) = (x+1)\ \mathrm{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$

12) $F(x) = -2\sqrt{1-\mathrm{sen}x}+C$

13) $F(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \lg \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-\mathrm{sen}x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-\mathrm{sen}x}} + C$

14) $F(x) = 2\left(\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2} - (\sqrt{x}+1) - \frac{1}{4}\right) \mathrm{arcsen}(\sqrt{x}+1) + 2\left(\frac{1}{4}(\sqrt{x}+1)-1\right) \sqrt{1-(\sqrt{x}+1)^2} + C$

15) $F(x) = -\frac{1}{2x^2} \lg (1+x) + \frac{1}{2} \lg \frac{1+x}{x} - \frac{1}{2x} + C$

16) $F(x) = \frac{4}{3} (\sqrt{x}+1)^{\frac{3}{2}} - 4 (\sqrt{x}+1)^{\frac{1}{2}} + C$

17) $F(x) = (\sqrt{x}+1)^2 \left(\lg (\sqrt{x}+1) - \frac{1}{2}\right) - 2 (\sqrt{x}+1) \left(\lg (\sqrt{x}+1) - 1\right) + C$

18) $F(x) = 2\sqrt{e^x+1} + \lg \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} + C$

19) $F(x) = \sqrt{e^{x^2}+1} + \frac{1}{2} \lg \frac{\sqrt{e^{x^2}+1}-1}{\sqrt{e^{x^2}-1}+1} + C$

20) $F(x) = 2\sqrt{\mathrm{tg}x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \lg \left(\left(\sqrt{\mathrm{tg}x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right) - 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \mathrm{arctg} \left(\frac{2\sqrt{\mathrm{tg}x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \lg \left(\left(\sqrt{\mathrm{tg}x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right) + 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \mathrm{arctg} \left(\frac{2\sqrt{\mathrm{tg}x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + C$

21) $F(x) = \frac{1}{2} \mathrm{sen}x \sqrt{1+\mathrm{sen}^2x} + \frac{1}{2} \lg \left(\mathrm{sen}x+\sqrt{1+\mathrm{sen}^2x}\right) + C$

22) $F(x) = -4 \sqrt{1-\mathrm{sen}\sqrt{x}} + C$

23) $F(x) = \frac{1}{4} \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{8} \frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8} \mathrm{arctg}x + C$

24) $F(x) = \frac{2}{\sqrt{19}} \mathrm{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{19}} + C$

25) $F(x) = -\frac{2}{11} \mathrm{setttgn} \left(\frac{2x-1}{11}\right) + C$

26) $F(x) = -\frac{2}{3} \mathrm{setttgh} \left(\frac{2e^x-5}{3}\right) + C$

27) $F(x) = -\mathrm{cossen}x + C$

28) $F(x) = -\frac{1}{x} \mathrm{arctg}x + \lg |x| - \frac{1}{2} \lg (1+x^2)$

29) $F(x) = -\frac{1}{x} \mathrm{settsenh}x + \frac{1}{2} \lg \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} + C$

30) $F(x) = -\frac{1}{x} \mathrm{settcosh}x + 2\ \mathrm{arctg} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$

31) $F(x) = -\lg|x+2| + \frac{1}{2}\lg|(x+1)(x+3)| + C$

32) $F(x) = \frac{1}{4}\lg\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + C$

33) $F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C$

34) $F(x) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}(2x+1)+\log(4x^2+4x+2)\right] + C$

35) $F(x) = \operatorname{arctg}(x-3) + \log(x^2-6x+10) + C$

36) $F(x) = \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+2x}{1-2x}\right| + \frac{1}{2}\log|1-4x^2| + C$

37) $F(x) = \frac{-2}{\sqrt{\operatorname{tg}x}} + C$

38) $F(x) = \frac{1}{6(3-2x)^3}$

39) $F(x) = \frac{3}{5}x - \frac{7}{25}\log|5x+4|$

40) $F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^{2x} + C$

41) $F(x) = \frac{1}{5}e^{5x}\left(x-\frac{1}{5}\right) + C$

42) $F(x) = \frac{1}{5}(3\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}3x + 2\cos 2x\cos 3x) + C$

43) $F(x) = \frac{1}{5}(3\cos 2x\operatorname{sen}3x - 2\operatorname{sen}2x\cos 3x) + C$

44) $F(x) = \frac{x}{2}e^x(\operatorname{sen}x-\cos x) + \frac{e^x}{2}\cos x + C$

45) $F(x) = -\frac{1}{3}\left[\operatorname{sen}^2x\cos x+2\cos x\right] + C$

46) $F(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg}x\right] + C$

47) $F(x) = -\frac{1}{6}\log|x+1| + \frac{4}{7}\log|x+2| + \frac{25}{42}\log|x-5|$

48) $F(x) = \log|x| - \frac{2}{3}\log(1+x\sqrt{x}) + C$

49) $F(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2+1}{2}} + C$

50) $F(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{e^{2x}+1} + \operatorname{arctg} e^{2x}\right) + C$

Soluzioni (da 1 a 32)

1) Si osservi che

$$\int\frac{-\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}^3x-4\cos^3x+4\operatorname{sen}^2x\cos x-\operatorname{sen}x\cos^2x}\,dx =$$
$$= \int\frac{1}{\cos^2x}\,\frac{1+\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^3x+4\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}x-4}\,dx =$$
$$= \int\frac{1+\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^3x+4\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}x-4}\,d(\operatorname{tg}x).$$

D'altro canto grazie all'esercizio **11)** del paragrafo 5.2 si ha

$$\int\frac{1+y}{y^3+4y^2-y-4}\,dy = \frac{1}{5}\lg|y-1| - \frac{1}{5}\lg|y+4| + C.$$

(Si osservi che si tratta dell'integrale di una funzione razionale; grazie alla prima regola di sostituzione si ritrova così

$$\int\frac{1+\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^3x+4\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}x-4}\,d(\operatorname{tg}x) = \frac{1}{5}\lg|\operatorname{tg}x-1| - \frac{1}{5}\lg|\operatorname{tg}x+4| + C$$

e di qui il risultato.

2) Si osservi che, grazie all'esercizio **14)** del paragrafo 3.1, si ha

$$\int\operatorname{arcsen}x\,dx = x\operatorname{arcsen}x+\sqrt{1-x^2} + C.$$

Integrando per parti con la scelta di arcsenx come fattore differenziale e osservando che $(\lg x)'=1/x$, si ricava

$$\int \operatorname{arcsen} x \lg x \, dx = \left(x \operatorname{arcsen} x+\sqrt{1-x^2}\right) \lg x -$$
$$- \int \operatorname{arcsen} x \, dx - \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \, dx.$$

Grazie ancora all'esercizio **14)** del paragrafo 3.1 e all'esercizio **2)** del paragrafo 6.2 si ha

$$\int \operatorname{arcsen} x \lg x \, dx = \left(x \operatorname{arcsen} x+\sqrt{1-x^2}\right) \lg x - x\operatorname{arcsen} x-\sqrt{1-x^2}$$
$$- \frac{1}{2} \lg \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1-x^2} + c.$$

3) Si osservi che, grazie all'esercizio **15)** del paragrafo 3.1, si ha

$$\int \operatorname{settsenh} x \, dx = x\operatorname{settsenh} x - \sqrt{1+x^2} + c.$$

Integrando per parti con la scelta di settsenhx come fattore differenziale e osservando che $(\lg x)'=1/x$ si ricava

$$\int \operatorname{settsenh} x \, dx = \left(x\operatorname{settsenh} x - \sqrt{1+x^2}\right) \lg x -$$
$$- \int \operatorname{settsenh} x \, dx + \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \, dx.$$

Grazie ancora all'esercizio **15)** del paragrafo 3.1 e all'esercizio **4)** del paragrafo 6.2 si ha

$$\int \operatorname{settsenh} x \lg x \, dx = \left(x\operatorname{settsenh} x-\sqrt{1+x^2}\right) \lg x-x\operatorname{settsenh} x +$$
$$+ \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \lg \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} + \sqrt{1+x^2} + c.$$

4) Si osservi che, grazie all'esercizio **16)** del paragrafo 3.1, si ha

$$\int \operatorname{settcosh} x \, dx = x\operatorname{settcosh} x-\sqrt{x^2-1} + c.$$

Integrando per parti con la scelta di settcoshx come fattore differenziale e osservando che $(\lg x)'=1/x$ si ricava

$$\int \operatorname{settcosh} x \lg x \, dx = \left(x\operatorname{settcosh} x-\sqrt{x^2-1}\right) \lg x -$$
$$- \int \operatorname{settcosh} x dx + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \, dx.$$

Grazie ancora all'esercizio **16)** del paragrafo 3.1 e all'esercizio **6)** del paragrafo 6.2 si ha

$$\int \operatorname{settcosh} x \lg x \, dx = \left(x\operatorname{settcosh} x-\sqrt{x^2-1}\right) \lg x-x\operatorname{settcosh} x +$$
$$+ \sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} + c.$$

5) Si scelga $1/x^2$ come fattore differenziale e si osservi che

$$(\operatorname{arcsen} x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \left(-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}.$$

Si ottiene così

$$\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} \operatorname{arcsen} x + \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Grazie al risultato dell'esercizio **1)** del paragrafo 6.2 si ricava allora

$$\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2} \lg \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + c.$$

6) Grazie alla prima regola di sostituzione si ha

$$\int \frac{1}{(\lg^3 x+3\lg^2 x+2\lg x)x} \, dx = \left(\int \frac{1}{y^3+3y^2+2y} \, dy\right)_{y=\lg x}.$$

Grazie all'esercizio **13)** del paragrafo 5.2 si ha

$$\int \frac{1}{y^3+3y^2+2y} \, dt = \frac{1}{2} \lg|y| - \lg|y+1| + \frac{1}{2} \lg|y+2| + c.$$

Si ottiene così

$$\int \frac{1}{(\lg^3 x+3\lg^2 x+2\lg x)x}\,dx = \frac{1}{2}\lg|\lg x| - \lg|\lg x+1| + \frac{1}{2}\lg|\lg x+2| + C.$$

7) Grazie alla prima regola di sostituzione si ha

$$\int \frac{1}{x(4\lg^2 x+3\lg x-1)}\,dx = \left(\int \frac{1}{4y^2+3y-1}\,dy\right)_{y=\lg x}.$$

Grazie all'esercizio 9) del paragrafo 2.2 si ha

$$\int \frac{1}{4y^2+3y-1}\,dy = \frac{1}{4}\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}y-\frac{1}{4}}\,dy = -\frac{2}{5}\operatorname{settt gh}\left(\frac{8y+3}{5}\right) + C.$$

Si ottiene così

$$\int \frac{1}{x(4\lg^2 x+3\lg x-1)}\,dx = -\frac{2}{5}\operatorname{settt gh}\left(\frac{8\lg x+3}{5}\right) + C.$$

8) Scegliendo x^3 come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3,\quad (\operatorname{arctg}^2 x)' = 2\,\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$$

si ottiene

$$\int x^3 \operatorname{arctg}^2 x\,dx = \frac{x^4}{4}\operatorname{arctg}^2 x - \frac{1}{2}\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\operatorname{arctg}^2 x - \frac{1}{2}\int \frac{x^4+x^2}{x^2+1}\operatorname{arctg} x\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\operatorname{arctg} x\,dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\operatorname{arctg}^2 x - \frac{1}{2}\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{arctg} x\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\operatorname{arctg}^2 x - \frac{1}{2}\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{arctg} x\,dx - \frac{1}{2}\int \operatorname{arctg} x\,d(\operatorname{arctg} x).$$

Grazie alla prima regola di sostituzione e all'esercizio 17) del paragrafo 3.1 e all'esercizio 8) del paragrafo 3.2 si ha

$$\int x^3 \operatorname{arctg}^2 x\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\right)\operatorname{arctg}^2 x - \frac{1}{3}\lg(1+x^2) + $$
$$+ \left(\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{6}\right)\operatorname{arctg} x + \frac{1}{12}x^2.$$

9) Grazie alla prima regola di sostituzione si ha

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x+1}\cos x\,dx = \left(\int \frac{1}{y^4+1}\,dy\right)_{y=\operatorname{sen} x}.$$

D'altro canto grazie all'esercizio 7) del paragrafo 5.2 si ha

$$\int \frac{1}{y^4+1}\,dy = -\frac{\sqrt{2}}{2}\lg\left(\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{2y+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) +$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}\lg\left(\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{2y+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Si ottiene così

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x+1}\cos x\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{4}\lg\left(\left(\operatorname{sen} x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right) +$$
$$+ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{sen} x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\lg\left(\left(\operatorname{sen} x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right) +$$
$$+ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{sen} x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

10) Grazie alla prima regola di sostituzione si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,(\operatorname{arcsen}^4 x-1)}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{arcsen}^4 x-1}\,d(\operatorname{arcsen} x) =$$
$$= \left(\int \frac{1}{y^4-1}\,dy\right)_{y=\operatorname{arcsen} x}.$$

D'altro canto, grazie all'esercizio **6)** del paragrafo 5.2, si ha

$$\int \frac{1}{y^4-1}\,dy = \frac{1}{4}\lg\frac{y-1}{y+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} y + C.$$

Si ottiene così:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,(\operatorname{arcsen}^4 x-1)}\,dx = \frac{1}{4}\lg\frac{\operatorname{arcsen}x-1}{\operatorname{arcsen}x+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\operatorname{arcsen} x + C.$$

11) Con la sostituzione $y=\sqrt{x}$ osservando che $x=y^2$ $(y^2)'=2y$ si ottiene:

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = \left(2\int y\operatorname{arctg}y\,dy\right)_{y=\sqrt{x}}.$$

Grazie all'esercizio 9) del paragrafo 3.2 si ha

$$\int y\operatorname{arctg}y\,dx = \left(\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}y - \frac{1}{2}y + C.$$

Si ottiene così

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = (x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$$

12) Con la sostituzione $y=\operatorname{sen}x$ essendo

$$x=\operatorname{arcsen}y,\quad (\operatorname{arcsen}y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

si ottiene

$$\int \sqrt{1+\operatorname{sen}x}\,dx = \left(\int\frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\right)_{y=\operatorname{sen}x} = \left(\int\frac{1}{\sqrt{1-y}}\,dy\right)_{y=\operatorname{sen}x}$$

D'altro canto si ha subito $\left(-2\sqrt{1-y}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-y}}$ e quindi

$$\int \sqrt{1+\operatorname{sen}x}\,dx = -2\sqrt{1-\operatorname{sen}x} + C.$$

13) Con la sostituzione $y=\operatorname{sen}x$, essendo $x=\operatorname{arcsen}y$

$$(\operatorname{arcsen}y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

si ottiene

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}}\,dx = \left(\int\frac{1}{\sqrt{1+y}\,\sqrt{1+y^2}}\,dy\right)_{y=\operatorname{sen}x} = \left(\int\frac{1}{(1+y)\sqrt{1-y}}\,dy\right)_{y=\operatorname{sen}x}.$$

Grazie all'esercizio 7) del paragrafo 6.2 si ha

$$\int\frac{1}{(1+y)\sqrt{1-y}}\,dy = -\frac{1}{\sqrt{2}}\lg\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-y}} + C$$

e quindi

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}\lg\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-\operatorname{sen}x}} + C.$$

14) Con la sostituzione $y=\sqrt{x}+1$ essendo $x=(y-1)^2$ $((y-1)^2)'=2(y-1)$ si ha

$$\int\operatorname{arcsen}(\sqrt{x}+1)\,dx = \left(\int 2(y-1)\operatorname{arcsen}y\,dy\right)_{y=\sqrt{x}+1} =$$
$$= 2\left(\int y\operatorname{arcsen}y\,dy\right)_{y=\sqrt{x}+1} - 2\left(\int\operatorname{arcsen}y\,dy\right)_{y=\sqrt{x}+1}.$$

Grazie all'esercizio 14) del paragrafo 3.1 e all'esercizio 10) del paragrafo 3.2 si ha

$$\int y\operatorname{arcsen}y\,dy - \int\operatorname{arcsen}y\,dy = \left(\frac{y^2}{2}-y-\frac{1}{4}\right)\operatorname{arcsen}y +$$
$$+ \left(\frac{1}{4}y-1\right)\sqrt{1-y^2} + C$$

e quindi

$$\int \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{x}+1\right) dx = 2\,\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{2} - \left(\sqrt{x}+1\right) - \frac{1}{4}\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{x}+1\right) +$$
$$+\,2\left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{x}+1\right)-1\right)\sqrt{1-\left(\sqrt{x}+1\right)^2} + C.$$

15) Scegliendo $\frac{1}{x^3}$ come fattore differenziale, osservando che

$$\left(-\frac{1}{2x^2}\right)' = \frac{1}{x^3}, \quad \left(\lg\left(1+x\right)\right)' = \frac{1}{1+x}$$

e integrando per parti, si ha

$$\int \frac{\lg\left(1+x\right)}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2}\lg\left(1+x\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(1+x\right)x^2}\,dx.$$

Grazie al risultato dell'esercizio **4)** del paragrafo 5.2 si ottiene

$$\int \frac{\lg\left(1+x\right)}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2}\lg\left(1+x\right) + \frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x} + C.$$

16) Effettuando la sostituzione $1+\sqrt{x}=y$, osservando che

$$x=(y-1)^2 \qquad ((y-1)^2)'=2(y-1),$$

si ottiene grazie alla seconda regola di sostituzione

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx = 2\left(\int \frac{y-1}{\sqrt{y}}\,dy\right)_{y=\sqrt{x}+1} = 2\left(\int \sqrt{y}\,dy\right)_{y=\sqrt{x}+1} -$$
$$-\,2\left(\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy\right)_{y=\sqrt{x}+1} = \frac{4}{3}\left(\sqrt{x}+1\right)^{\frac{3}{2}} - 4\left(\sqrt{x}+1\right)^{\frac{1}{2}} + C.$$

17) Effettuando la sostituzione $1+\sqrt{x}=y$, osservando che

$$x=(y-1)^2 \qquad ((y-1)^2)'=2(y-1),$$

si ottiene grazie alla seconda regola di sostituzione

$$\int \lg\left(1+\sqrt{x}\right) dx = \left(2\int \left(y-1\right)\lg y\,dy\right)_{y=\sqrt{x}+1} =$$
$$= 2\left(\int y\lg y\,dy\right)_{y=\sqrt{x}+1} - 2\left(\int \lg y\,dy\right)_{y=\sqrt{x}+1}.$$

Grazie ai risultati degli esempi **18)** e **19)** del paragrafo 3.1 si ha

$$\int \lg\left(1+\sqrt{x}\right) dx = \left(\sqrt{x}+1\right)^2\left(\lg\left|\sqrt{x}+1\right| - \frac{1}{2}\right) -$$
$$-\,2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\lg\left|\sqrt{x}+1\right| - 1\right) + C.$$

18) Effettuando la sostituzione $y=\sqrt{e^x+1}$ e osservando che

$$x=\lg\left(y^2-1\right) \qquad \left(\lg\left(y^2-1\right)\right)' = \frac{2y}{y^2-1},$$

grazie alla seconda regola di sostituzione, si ha

$$\int \sqrt{e^x+1}\,dx = 2\left(\int \frac{y^2}{y^2-1}\,dy\right)_{y=\sqrt{e^x+1}} =$$
$$= 2\left(\int dy\right)_{y=\sqrt{e^x+1}} + 2\left(\int \frac{1}{y^2-1}\,dy\right)_{y=\sqrt{e^x+1}}.$$

Grazie al risultato dell'esercizio **1)** del paragrafo 5.2 si ha

$$\int \sqrt{e^x+1}\,dx = 2\sqrt{e^x+1} + \lg\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} + C.$$

19) Utilizzando la prima regola di sostituzione si ha

$$\int x\sqrt{e^{x^2}+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \sqrt{e^t+1}\,dt\right)_{t=x^2}$$

e quindi grazie all'esercizio **18)** si ha

$$\int x\sqrt{e^{x^2}+1}\,dx = \sqrt{e^{x^2}+1} + \frac{1}{2}\lg\frac{\sqrt{e^{x^2}+1}-1}{\sqrt{e^{x^2}+1}+1} + C.$$

20) Effettuando la sostituzione $\sqrt{tgx}=y$, osservando che

$$x=\text{arctg } y^2 \qquad (\text{arctg } y^2)' = \frac{2y}{1+y^4}$$

grazie alla seconda regola di sostituzione si ottiene

$$\int \sqrt{(tgx)^3}\, dx = 2\left(\int \frac{y^4}{1+y^4}\, dy\right)_{y=\sqrt{tgx}} =$$
$$= -2\left(\int \frac{1}{1+y^4}\, dy\right)_{y=\sqrt{tgx}} + 2\left(\int dy\right)_{y=\sqrt{tgx}}.$$

Grazie all'esercizio 7) del paragrafo 5.2, si ha

$$\int \sqrt{(tgx)^3}\, dx = 2\sqrt{tgx} - \frac{\sqrt{2}}{2}\lg\left(\left(\sqrt{tgx}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right) +$$
$$-2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\text{arctg}\left(\frac{2\sqrt{tgx}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) +$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\lg\left(\left(\sqrt{tgx}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\text{arctg}\left(\frac{2\sqrt{tgx}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

21) Effettuando la sostituzione t=senx, grazie alla prima regola di sostituzione, si ha

$$\int\sqrt{1+\text{sen}^2x}\,\cos x\, dx = \int \sqrt{1+\text{sen}^2x}\, d(\text{sen}x) = \left(\int\sqrt{1+t^2}\, dt\right)_{t=\text{sen}x}.$$

Grazie all'esercizio 20) del paragrafo 3.1 si ha

$$\int\sqrt{1+\text{sen}^2x}\,\cos x\, dx = \frac{1}{2}(\text{sen}x)\sqrt{1+\text{sen}^2x} +$$
$$+\frac{1}{2}\lg\left(\text{sen}x+\sqrt{1+\text{sen}^2x}\right) + C.$$

22) Con la sostituzione $y=\sqrt{x}$, grazie alla prima regola di sostituzione si ha

$$\int\frac{\sqrt{1+\text{sen}\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int\sqrt{1+\text{sen}\sqrt{x}}\, d(\sqrt{x}) = 2\left(\int\sqrt{1+\text{sen}y}\, dy\right)_{y=\sqrt{x}}.$$

Grazie all'esercizio **12)** si ottiene

$$\int\frac{\sqrt{1+\text{sen}\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = -4\sqrt{1-\text{sen}\sqrt{x}} + C.$$

23) Grazie alla formula di riduzione **25)** del paragrafo 4.1 si ottiene

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^3}\, dx = \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

D'altro canto riapplicando la stessa formula si ha

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^3}\, dx = \frac{1}{2}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\text{arctg}+C.$$

Si ha quindi

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^3}\, dx = \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8}\text{arctg}x+C.$$

24) Grazie all'esercizio 9) del paragrafo 2.2 risultando $\rho^2-4q=1-20=-19<0$ si ha

$$\int\frac{1}{x^2+x+5}\, dx = \frac{2}{\sqrt{19}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{19}} + C.$$

25) Grazie all'esercizio 9) del paragrafo 2.2 risultando $\rho^2-4q=121>0$ si ha

$$\int\frac{1}{x^2-x-30}\, dx = -\frac{2}{11}\,\text{setttgh}\left(\frac{2x-1}{11}\right) + C.$$

26) Grazie alla sostituzione $e^x=y$, osservando che

$$x=\lg y \qquad (\lg y)'=\frac{1}{y},$$

grazie alla seconda regola di sostituzione

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-5e^x+4}\,dx = \left(\int \frac{1}{y^2-5y+4}\,dy\right)_{y=e^x}.$$

Grazie all'esercizio **9)** del paragrafo 2.2 si ottiene, essendo $p^2-4q=9>0$,

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-5e^x+4}\,dx = -\frac{2}{3}\ \text{sett tgh}\left(\frac{2e^x-5}{3}\right) + c.$$

27) Grazie alla prima regola di sostituzione, con la sostituzione $y=\text{sen}x$ si ha

$$\int \cos x\ \text{sen}\,\text{sen}x\,dx = \int \text{sen}\,\text{sen}x\ d(\text{sen}x) = \left(\int \text{sen}y\,dy\right)_{y=\text{sen}x} =$$
$$= -\cos\text{sen}x + c.$$

28) Integrando per parti, con la scelta di $1/x^2$ come fattore differenziale e osservando che

$$\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2},\quad (\text{arctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

si ha

$$\int \frac{\text{arctg}x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ \text{arctg}x + \int \frac{1}{x\,(1+x^2)}\,dx.$$

Grazie al risultato dell'esercizio **4)** del paragrafo 5.2 si ottiene

$$\int \frac{\text{arctg}x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ \text{arctg}x + \lg|x| - \frac{1}{2}\lg\left(1+x^2\right) + c.$$

29) Integrando per parti con la scelta di $\frac{1}{x^2}$ come fattore differenziale e osservando che

$$\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2},\quad (\text{settsenh}x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

si ha

$$\int \frac{\text{settsenh}x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ \text{settsenh}x + \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

Grazie al risultato dell'esercizio **3)** del paragrafo 6.2 si ha allora

$$\int \frac{\text{settsenh}x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ \text{settsenh}x + \frac{1}{2}\lg\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} + c.$$

30) Integrando per parti con la scelta di $\frac{1}{x^2}$ come fattore differenziale e osservando che

$$\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2},\quad (\text{settcosh}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

si ha

$$\int \frac{\text{settcosh}x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ \text{settcosh}x + \int \frac{1}{x\ \sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

Grazie al risultato dell'esercizio **5)** del paragrafo 6.2 si ha

$$\int \frac{\text{settcosh}x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ \text{settcosh}x + 2\ \text{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + c.$$

31) Si osservi che il polinomio $Q(x)=x^3+6x^2+11x+6$ ha come radice $x=-1$, $x=-2$, $x=-3$. Vale quindi la decomposizione

$$\frac{1}{x^3+6x^2+11x+6} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}.$$

Deve aversi quindi per ogni x

$$(A+B+C)\cdot x^2 + (5A+4B+3C)\,x + 6A+3B+2C=1.$$

Annullando, in virtù del principio di identità di polinomi, i coefficienti del polinomio identicamente nullo

$$(A+B+C)\,x^2 + (5A+4B+3C)\,x + 6A+3B+2C-1$$

si ottiene il sistema

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+4B+3C=0 \\ 6A+3B+2C=1 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A=1/2$, $B=-1$, $C=1/2$ (si addizioni ad esempio alla seconda equazione la prima moltiplicata per -3 e alla terza equazione la prima moltiplicata per -2; si ha così il sistema $A+B+C=0$ $2A+B=0$ $4A+B=1$ di immediata risolubilità).
Si ha pertanto

$$\int \frac{1}{x^3+6x^2+11x+6} = \frac{1}{2}\int x+1 \; dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\lg|x+1| - \lg|x+2| + \frac{1}{2}\lg|x+3| + c.$$

32) Il polinomio $Q(x)=x^3+x^2-x-1$ ha come radici $x=1$ e $x=-1$ quest'ultima essendo doppia (dividendo infatti $Q(x)$ per $(x-1)$ si ha, applicando ad esempio la regola di Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & +1 & -1 & -1 \\ 1 & & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

cioè x^2+2x+1 e dunque $(x+1)^2$).
Vale pertanto la decomposizione

$$\frac{1}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Annullando, in virtù del principio di identità dei polinomi, i coefficienti del polinomio identicamente nullo

$$(A+B)\,x^2 + (2A+C)\,x + A-B-C-1$$

si perviene al sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+C=0 \\ A-B-C=1 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A=\frac{1}{4}$ $B=-\frac{1}{4}$ $C=-\frac{1}{2}$.
Si ha pertanto

$$\int \frac{1}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\lg|x-1| - \frac{1}{4}\lg|x+1| + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} + c.$$

7.2 Integrazione elementare

Una funzione si dice elementarmente integrabile quando il suo integrale indefinito può esprimersi attraverso un numero finito di funzioni ottenute dalle funzioni elementari grazie alle seguenti operazioni:

a) composizione

b) operazioni algebriche.

Si dirà allora anche che l'integrale indefinito è elementarmente esprimibile.
Si dimostri che i seguenti integrali indefiniti sono elementarmente esprimibili

1) $\int x^n \operatorname{arctg} x \, dx$ n naturale

2) $\int x^n \operatorname{arcsen} x \, dx$ n naturale

3) $\int x^n \,\text{settsenh}x \, dx \quad n$ naturale

4) $\int x^n \,\text{settcosh}x \, dx \quad n$ naturale

5) $\int x\,(\text{senh}x)^m \, dx \quad m$ naturale

6) $\int x\,(\text{settsenh}x)^m \, dx \quad m$ naturale

7) $\int x\,(\text{settcosh}x)^m \, dx \quad m$ naturale

8) $\int f\left(\sqrt[n]{ae^x+b}\right) dx \quad f$ razionale

9) $\int f\left(e^{\sqrt[n]{ax+b}}\right) dx \quad f$ polinomio

10) $\int f\left(\sqrt[n]{a\,\text{tg}x+b}\right) dx \quad f$ razionale

11) $\int f\left(\text{sen}\,\sqrt[n]{ax+b}\right) dx \quad f$ polinomio

12) $\int f\left(\lg\left(1+\sqrt[n]{x}\right)\right) dx \quad f$ polinomio

13) $\int f\left(\sqrt[n]{1+\sqrt[m]{ax+b}}\right) dx \quad f$ razionale

Soluzioni

1) Integrando per parti con la scelta di x^n come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n, \quad (\text{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

si ha

$$\int x^n \,\text{arctg}\, x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,\text{arctg}x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\, dx.$$

Si osservi che l'integrando $x^{n+1}/(1+x^2)$ è una funzione razionale e dunque il suo integrale indefinito è elementarmente esprimibile.

2) Integrando per parti con la scelta di x^n come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n, \quad (\text{arcsen}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

si ha

$$\int x^n \,\text{arcsen}x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,\text{arcsen}x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Si osservi che l'integrando $x^{n+1}/\sqrt{1-x^2}$ è del tipo esaminato nell'esercizio **9)** del paragrafo 6.1 e pertanto è elementarmente esprimibile.

3) Integrando per parti con la scelta di x^n come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n, \quad (\text{settsenh}x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

si ha

$$\int x^n \,\text{settsenh}x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,\text{settsenh}x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\, dx.$$

Si osservi poi che l'integrando

$$\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}$$

è del tipo esaminato nell'esercizio **8)** del paragrafo 6.1 e pertanto è elementarmente esprimibile.

4) Integrando per parti con la scelta di x^n come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n \qquad (\text{sett cosh}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

si ha

$$\int x^n \,\text{sett cosh}x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,\text{sett cosh}x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

Si osservi poi che l'integrando

$$\frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

è del tipo esaminato nell'esercizio 8) di 6.1 e pertanto è elementarmente esprimibile.

5) Integrando per parti con la scelta di senhx come fattore differenziale e osservando che (coshx)'=senhx si ha

$$(x(\text{senh}x)^{m-1})' = (\text{senh}x)^{m-1} + x(\text{senh}x)^{m-2}\cosh x \,(m-1)$$

si ha

$$\int x\,(\text{senh}x)^m\,dx = x\,(\text{senh}x)^{m-1}\cosh x - \int (\text{senh}x)^{m-1}\cosh x\,dx - (m-1)\int x\,(\text{senh}x)^{m-2}(\cosh x)^2\,dx.$$

Utilizzando la prima regola di integrazione e la relazione $(\cosh x)^2-(\text{senh}x)^2=1$ si ha

$$\int x\,(\text{senh}x)^m\,dx = x\,(\text{senh}x)^{m-1}\cosh x - \frac{(\text{senh}x)^m}{m} - (m-1)\int x\,(\text{senh}x)^{m-2}\,dx - (m-1)\int x\,(\text{senh}x)^m\,dx.$$

Da tale identità si ottiene la seguente formula di riduzione

$$\int x\,(\text{senh}x)^m\,dx = \frac{x}{m}(\text{senh}x)^{m-1}\cosh x - \frac{(\text{senh}x)^m}{m^2} - \frac{m-1}{m}\int x\,(\text{senh}x)^{m-2}\,dx$$

Poiché grazie all'esercizio 8) del paragrafo 3.1, l'inte-

grale indefinito che appare sulla destra risulta elementarmente integrabile per m=3, un'applicazione ripetuta della formula di riduzione ottenuta prova l'integrabilità elementare dell'integrale proposto.

6) Scegliendo x come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x, \quad ((\text{settsenh}x)^m)' = m\,\frac{(\text{settsenh}x)^{m-1}}{\sqrt{1+x^2}},$$

integrando per parti si ha che

$$\int x\,(\text{settsenh}x)^m\,dx = \frac{x^2}{2}(\text{settsenh}x)^m - \frac{m}{2}\int (x^2+1-1)\frac{(\text{settsenh}x)^{m-1}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{x^2}{2}(\text{settsenh}x)^m - \frac{m}{2}\int \sqrt{1+x^2}\,(\text{settsenh}x)^{m-1}\,dx + \frac{m}{2}\int (\text{settsenh}x)^{m-1}\,d\,(\text{settsenh}x).$$

Scegliendo come fattore differenziale nel primo integrale sulla destra $\sqrt{1+x^2}$, osservando che grazie all'esercizio 5) del paragrafo 3.2 si ha

$$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \text{settsenh}x\right)' = \sqrt{1+x^2}$$

e che

$$((\text{settsenh}x)^{m-1})' = (m-1)\,\frac{(\text{settsenh}x)^{m-2}}{\sqrt{1+x^2}},$$

integrando per parti il primo integrale sulla destra e utilizzando la prima regola di sostituzione nel secondo integrale sulla destra, si ottiene

$$\int x\,(\text{settsenh}x)^m\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right)(\text{settsenh}x)^m -$$

$$-\frac{m}{4}\left(x\sqrt{1+x^2}+\text{settsenh}x\right)(\text{settsenh}x)^{m-1}+$$

$$+\frac{(m-1)m}{4}\int x(\text{settsenh}x)^{m-2}\,dx+\frac{(m-1)m}{4}\int\frac{(\text{settsenh}x)^{m-1}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{m}{4}\right)(\text{settsenh}x)^m+\frac{(m-1)m}{4}\int x\,(\text{settsenh}x)^{m-2}\,dx+$$

$$+\frac{(m-1)m}{4}\int(\text{settsenh}x)^{m-1}\,d(\text{settsenh}x)-\frac{m}{4}x\sqrt{1+x^2}\,(\text{settsenh}x)^{m-1}.$$

Grazie alla prima regola di sostituzione applicata all'ultimo integrale si ottiene la seguente formula di riduzione

$$\int x\,(\text{settsenh}x)^m\,dx=\left(x^2+\frac{1}{4}\right)(\text{settsenh}x)^m-\frac{m}{4}\,x\sqrt{1+x^2}\,-$$

$$-\,(\text{settsenh}x)^{m-1}+\frac{(m-1)m}{4}\int x\,(\text{settsenh}x)^{m-2}\,dx.$$

Poiché grazie all'esercizio **11)** del paragrafo 3.2 l'integrale indefinito che appare sulla destra risulta elementarmente integrabile per $m=3$, un'applicazione ripetuta della formula di riduzione ottenuta prova l'integrabilità elementare dell'integrale proposto.

7) Scegliendo x come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)'=x,\quad\left((\text{settcosh}x)^m\right)'=m\,\frac{(\text{settcosh}x)^{m-1}}{\sqrt{x^2-1}},$$

integrando per parti si ha

$$\int x\,(\text{settcosh}x)^m\,dx=\frac{x^2}{2}(\text{settcosh}x)^m-\frac{m}{2}\int\frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}(\text{settcosh}x)^{m-1}\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}(\text{settcosh}x)^m-\frac{m}{2}\int\sqrt{x^2-1}\,(\text{settcosh}x)^{m-1}\,dx-$$

$$-\frac{m}{2}\int(\text{settcosh}x)^{m-1}\,d\,(\text{settcosh}x).$$

Scegliendo come fattore differenziale nel primo integrale sulla destra $(x^2-1)^{1/2}$, osservando che grazie all'esercizio **4)** del paragrafo 3.2 si ha

$$\left(\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}-\text{settcosh}x\right)\right)'=\sqrt{x^2-1}$$

e che

$$\left((\text{settcosh}x)^{m-1}\right)'=(m-1)\,\frac{(\text{settcosh}x)^{m-2}}{\sqrt{x^2-1}},$$

integrando per parti il primo integrale sulla destra e utilizzando la prima regola di sostituzione nel secondo integrale sulla destra si ottiene

$$\int x\,(\text{settcosh}x)^m\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)(\text{settcosh}x)^m-$$

$$-\frac{m}{4}\left(x\sqrt{x^2-1}-\text{settcosh}x\right)(\text{settcosh}x)^{m-1}+$$

$$+\frac{(m-1)m}{4}\int x\,(\text{settcosh}x)^{m-2}\,dx-\frac{(m-1)m}{4}\int\frac{(\text{settcosh}x)^{m-1}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{m}{4}\right)(\text{settcosh}x)^m+\frac{(m-1)m}{4}\int x\,(\text{settcosh}x)^{m-2}\,dx-$$

$$-\frac{(m-1)m}{4}\int(\text{settcosh}x)^{m-1}\,d\,(\text{settcosh}x)-\frac{m}{4}\,x\sqrt{x^2-1}\,(\text{settcosh}x)^{m-1}.$$

Grazie alla prima regola di sostituzione applicata all'ultimo integrale sulla destra si ottiene la seguente formula di riduzione

$$\int x\,(\text{settcosh}x)^m\,dx=\left(x^2-\frac{1}{4}\right)(\text{settcosh}x)^m-\frac{m}{4}\,x\sqrt{x^2-1}\,\times$$

$$\times\,(\text{settcosh}x)^{m-1}+\frac{(m-1)m}{4}\int x\,(\text{settcosh}x)^{m-2}\,dx.$$

Poiché grazie all'esercizio **12)** del paragrafo 3.2 l'integrale indefinito che appare sulla destra risulta elementarmente integrabile per m=3, un'applicazione ripetuta della formula di riduzione ottenuta prova l'integrabilità elementare dell'integrale proposto.

8) Si effettui la sostituzione

$$y=\sqrt[n]{ae^x+b}$$

si ha

$$x=\lg\left(\frac{y^n-b}{a}\right) \qquad \left(\lg\left(\frac{y^n-b}{a}\right)\right)'=\frac{ny^{n-1}}{y^n-b}.$$

Pertanto grazie alla seconda regola di sostituzione si ottiene

$$\int f\left(\sqrt[n]{ae^x+b}\right)dx=\left(\int f(y)\frac{ny^{n-1}}{y^n-b}\right)_{y=\lg\left(\frac{y^n-b}{a}\right)}.$$

L'integrando $f(y)\dfrac{ny^{n-1}}{y^n-b}$ è una funzione razionale e pertanto il suo integrale è elementarmente esprimibile.

9) Si effettui la sostituzione

$$y=\sqrt[n]{ax+b}.$$

Si ha

$$x=\frac{y^n-b}{a} \quad \left(\frac{y^n-b}{a}\right)'=\frac{ny^{n-1}}{a}.$$

Pertanto grazie alla seconda regola di sostituzione si ottiene

$$\int f\left(e^{\sqrt[n]{ax+b}}\right)dx=\left(\int f(e^y)\frac{ny^{n-1}}{a}\,dy\right)_{y=\sqrt[n]{ax+b}}.$$

L'integrando

$$f(e^y)\frac{ny^{n-1}}{a},$$

essendo f un polinomio, è combinazione lineare di addendi del tipo $e^{my}\cdot y^{n-1}$ (m numero naturale).
Gli integrali di tali addendi sono elementarmente esprimibili grazie a un'applicazione ripetuta della formula di riduzione dell'esercizio **1)** del paragrafo 4.1 e al risultato dell'esercizio **1)** del paragrafo 3.1.

10) Si effettui la sostituzione

$$y=\sqrt[n]{a\,tg\,x+b}.$$

Si ha:

$$x=\mathrm{arctg}\,\frac{y^n-b}{a}, \quad \left(\mathrm{arctg}\,\frac{y^n-b}{a}\right)'=na\,\frac{y^{n-1}}{a^2+(y^n-b)^2}.$$

Pertanto, grazie alla seconda regola di sostituzione si ha

$$\int f\left(\sqrt[n]{a\,tg\,x+b}\right)dx=\left(\int f(y)\frac{nay^{n-1}}{a^2+(y^n-b)^2}\,dy\right)_{y=\mathrm{arctg}\,\frac{y^n-b}{a}}$$

L'integrando

$$f(y)\frac{nay^{n-1}}{a^2+(y^n-b)^2}$$

è una funzione razionale e pertanto risulta elementarmente integrabile.

11) Si effettui la sostituzione

$$y=\sqrt[n]{ax+b}$$

si ha

$$x=\frac{y^n-b}{a}\qquad\left(\frac{y^n-b}{a}\right)'=\frac{ny^{n-1}}{a}.$$

Pertanto grazie alla seconda regola di sostituzione si ottiene

$$\int f\left(\operatorname{sen}\sqrt[n]{ax+b}\right)dx=\left(\int f(\operatorname{sen}y)\,\frac{ny^{n-1}}{a}\,dy\right)_{y=\sqrt[n]{ax+b}}.$$

L'integrando $f(\operatorname{sen}y)\,ny^{n-1}/a$ essendo f un polinomio, risulta essere combinazione lineare di addendi del tipo $(\operatorname{sen}^m y)\cdot y^{n-1}$ (m numero naturale). Gli integrali di tali addendi sono elementarmente esprimibili grazie ad applicazioni ripetute della formula di riduzione dell'esercizio **3)** del paragrafo 4.2, dell'esercizio **1)** del paragrafo 4.2 e dell'esercizio **13)** del paragrafo 4.1 e al risultato dell'esercizio **6)** del paragrafo 3.1.

12) Si effettui la sostituzione

$$y=1+\sqrt[n]{x}$$

si ha

$$x=(y-1)^n\qquad((y-1)^n)'=n\,(y-1)^{n-1}.$$

Pertanto grazie alla seconda regola di sostituzione si ottiene

$$\int f\left(\lg\left(1+\sqrt[n]{x}\right)\right)dx=\left(\int f(\lg y)\;n\;(y-1)^{n-1}\,dy\right)_{y=1+\sqrt[n]{x}}.$$

L'integrando $f(\lg y)\,n\,(y-1)^{n-1}$ essendo f un polinomio risulta una combinazione lineare di addendi del tipo $(\lg y)^m y^k$ (m e k naturali). Gli integrali di tali addendi sono elementarmente esprimibili grazie ad applicazioni ripetute della formula di riduzione dell'esercizio **24)** del paragrafo 4.1 e al risultato dell'esercizio **19)** del paragrafo 3.1.

13) Si effettui la sostituzione:

$$y=\sqrt[m]{ax+b}$$

si ha

$$x=\frac{y^m-b}{a}\qquad\left(\frac{y^m-b}{a}\right)'=\frac{my^{m-1}}{a}.$$

Pertanto grazie alla seconda regola di sostituzione si ottiene

$$\int f\left(\sqrt[n]{1+\sqrt[m]{ax+b}}\right)dx=\left(\int f\left(\sqrt[n]{1+y}\right)\frac{my^{m-1}}{a}\,dy\right)_{y=\sqrt[m]{ax+b}}.$$

L'integrando

$$f\left(\sqrt[n]{1+y}\right)\frac{my^{m-1}}{a}$$

risulta essere del tipo esaminato nell'esercizio **5)** del paragrafo 6.1 e risulta pertanto essere elementarmente esprimibile.

CAPITOLO 4

INTEGRAZIONE DEFINITA ED IMPROPRIA

1. Nota introduttiva all'integrazione definita

Una volta noto l'integrale indefinito di una funzione continua f il calcolo del suo integrale definito esteso ad un intervallo di estremi a e b è immediato.

Se infatti F è una primitiva di f relativamente ad un intervallo contenente a e b varrà la formula

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Per tutto il capitolo il simbolo $[F(x)]_a^b$ denoterà la differenza $F(b) - F(a)$: analogamente il simbolo

$$\left[\int f(x)\ dx\right]_a^b$$

denoterà la differenza $F(b) - F(a)$ dove $F(x)$ è una qualsiasi primitiva di $f(x)$. In sintesi

$$\int_a^b f(x)\ dx = \left[\int f(x)\ dx\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Avvertiamo esplicitamente il lettore che nel calcolo degli integrali definiti un uso meccanico delle tabelle (e delle regole) di integrazione indefinita può condurre a gravi errori. Ad esempio dalla formula

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$$

e dal teorema fondamentale del calcolo integrale *non segue*

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x}\,dx = \log|2| - \log|-2| = 0$$

poiché $\log|x|$ è una primitiva di $\frac{1}{x}$ su $]0,+\infty[$ e su $]-\infty,0[$ e non su $[-2,2]$ e d'altro canto l'integrale definito di $\frac{1}{x}$ su $[-2,2]$ non ha senso essendo $\frac{1}{x}$ discontinua in 0 (più precisamente presentando in 0 un infinito di ordine 1!).

Occorre anche osservare che in taluni casi non è nota una forma esplicita dell'integrale indefinito di una funzione f mentre è possibile calcolare il valore esatto dell'integrale definito per determinati valori degli estremi di integrazione (sia pure attraverso l'uso di strumenti analitici più complessi).

Accade anche spesso che mentre l'integrale indefinito pur essendo noto si presenta sotto forma assai complessa, l'integrale definito invece per determinati valori degli estremi di integrazione ha un valore assai significativo (a titolo di esempio si veda l'esercizio **1)** del paragrafo 2).

Richiamiamo brevemente alcune proprietà o regole relative all'integrale definito.

1. Siano f(x) e g(x) continue su un intervallo I;

α) **proprietà distributiva** - detti h e k due numeri reali ed a, b due punti di I vale l'eguaglianza

$$\int_a^b [h\,f(x) + k\,g(x)]\,dx = h\int_a^b f(x)\,dx + k\int_a^b g(x)\,dx$$

β) **proprietà additiva** - detti a, b, c tre punti di I vale l'eguaglianza

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Come semplici esempi delle proprietà α) e β) il lettore osservi che

$$\int_0^1 [2x+3e^x]\,dx = 2\int_0^1 x\,dx + 3\int_0^1 e^x\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + 3\,[e^x]_0^1 = 1+3e-3 = 3e-2$$

Inoltre:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \int_0^{2\pi} \cos x\,dx + \int_{2\pi}^{\pi/2} \cos x\,dx;$$

infatti

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = [\operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\,dx + \int_{2\pi}^{\pi/2} \cos x\,dx = [\operatorname{sen} x]_0^{2\pi} + [\operatorname{sen} x]_{2\pi}^{\pi/2} = 0+1 = 1$$

2) Regola d'integrazione per parti - Supposte f(x) e g(x) derivabili con derivata continua in I si ha con $a,b \in I$:

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx =$$

$$= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

Ad esempio assumendo $f(x)=x$ e $g'(x)=e^x$ si ottiene

$$\int_0^1 x\,e^x\,dx = [x\,e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - [e^x]_0^1 = e-e+1 = 1$$

3) Regola d'integrazione per sostituzione - Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$ e $\varphi(t)$ continua con la sua derivata prima in $[\alpha,\beta]$ se $\alpha<\beta$, in $[\beta,\alpha]$ se $\alpha>\beta$; se $f(\varphi(t))$ ha senso e se $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ si ha:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Illustriamo tale regola con qualche semplice esempio

$$\int_1^2 2x\,e^{x^2}\,dx = \int_1^4 e^t\,dt = e^4-e.$$

In tale caso si è usata la regola con $f(x)=2xe^{x^2}$ $[a,b]=[1,2]$, $\varphi(t)=\sqrt{t}$ $[\alpha,\beta]=[1,4]$.

Così se si vuol calcolare

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

si può porre $x=\operatorname{sen}t$, $t\in[0,\pi/2]$ ed applicando la regola di sostituzione si trova

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left[1+\cos 2t\right] dt = \frac{\pi}{4}$$

Avvertiamo il lettore esplicitamente che un'applicazione formale e meccanica della regola di sostituzione, senza un'attenta verifica della validità delle ipotesi che la rendono lecita, può facilmente condurre a risultati errati o paradossali. Illustriamo ciò con qualche esempio.

i) Si voglia calcolare

$$\int_4^5 \frac{2x}{1-x^2}\,dx \text{ od anche } \int_6^7 \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^2}}\,dx$$

in tali casi **non è lecita la sostituzione** $x=\operatorname{sen}t$ dal momento che in qualunque intervallo $[\alpha,\beta]$ si faccia variare t **non accade mai che** $\operatorname{sen}\alpha=4$ e $\operatorname{sen}\beta=5$ o $\operatorname{sen}\alpha=6$ e $\operatorname{sen}\beta=7$.

ii) Si voglia calcolare

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^4}\,dx;$$

Eseguendo in modo formale la sostituzione $x=\frac{1}{t^3}$ si trova

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = -3\int_{-1}^1 \frac{t^2}{1+t^{12}}\,dt$$

e tale eguaglianza è manifestamente assurda poiché

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^4}\,dx > 0 \text{ e } -3\int_{-1}^1 \frac{t^2}{1+t^{12}}\,dt < 0.$$

Ciò è dovuto al fatto che la sostituzione $x=\varphi(t)=t^{-3}$ **non è lecita dal momento che $\varphi(t)$ ha in $t=0$ una discontinuità.**

Ricordiamo infine che se $f(x)$ è continua in I l'unica primitiva di $f(x)$ nulla in un assegnato punto x_o di I è data dalla funzione integrale

$$F(x) = \int_{x_o}^x f(t)\,dt$$

2. Integrazione definita

2.1 Integrali definiti notevoli

Si stabilisca la validità delle seguenti formule

1) $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

2) $\displaystyle \int_0^1 (1-x)^n x^m \, dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$

3) $\displaystyle \int_0^\pi \operatorname{sen}^n x \, dx = \begin{cases} \pi \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & n \text{ pari} \\ 2 \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & n \text{ dispari} \end{cases}$

4) $\displaystyle \int_0^\pi \cos^n x \, dx = \begin{cases} \pi \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$

5) $\displaystyle \int_0^\pi \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & m+n \text{ pari} \\ -\dfrac{2m}{n^2-m^2} & m+n \text{ dispari} \end{cases}$

6) $\displaystyle \int_0^\pi \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2} & m=n \end{cases}$

7) $\displaystyle \int_0^\pi \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2} & m=n \end{cases}$

Ricordiamo esplicitamente che col simbolo $n!!$ si intende il prodotto di tutti i numeri fino ad n aventi la stessa parità di n, cioè il prodotto di tutti i pari sino ad n se n è pari, di tutti i dispari sino ad n se n è dispari.

Svolgimenti

1) Integrando per parti con la scelta di 1 come fattore differenziale e osservando che

$$(x)'=1, \quad ((1-x^2)^n)'=-2nx\,(1-x^2)^{n-1}$$

si ha

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx = \left[x\,(1-x^2)^n + 2n\int x^2\,(1-x^2)^{n-1}\,dx\right]_0^1 = 2n\int_0^1 x^2\,(1-x^2)^{n-1}\,dx.$$

Iterando il procedimento con la scelta di x^2 come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2, \quad \left(\left(1-x^2\right)^{n-1}\right)' = -2\,(n-1)\,x\,\left(1-x^2\right)^{n-2}$$

si ha

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx = \frac{2n\cdot 2(n-1)}{3} \int_0^1 x^4\,(1-x^2)^{n-2}\,dx$$

iterando n volte il procedimento si ottiene

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \int_0^1 x^{2n} \, dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

2) Integrando per parti con la scelta di x^m come fattore differenziale e osservando che

$$\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)' = x^m, \quad \left((1-x)^n\right)' = -n\,(1-x)^{n-1}$$

si ha

$$\int_0^1 x^m\,(1-x)^n \, dx = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\,(1-x)^n\right]_0^1 + \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}\,(1-x)^{n-1}\,dx =$$

$$= \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1} (1-x)^{n-1}\, dx$$

e iterando n volte si ha

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n\, dx = \frac{n!}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)} \int_0^1 x^{m+n}\, dx =$$

$$= \frac{n!}{(m+1)\ldots(m+n+1)} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

3) Utilizzando la formula di riduzione dell'esercizio 2) del paragrafo 4.1 del capitolo precedente si ha

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^n x\, dx = \left[-\frac{\operatorname{sen}^{n-1}x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2}x\, dx\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{n-1}{n} \int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-2}x\, dx$$

Iterando l'applicazione della formula si ha, se n è pari

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} \int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-4}x\, dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \int_0^\pi dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \pi$$

e se n é dispari

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} \int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-4}x\, dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \int_0^\pi \operatorname{sen}x\, dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot 2$$

4) Utilizzando la formula di riduzione dell'esercizio 3) del paragrafo 4.1 del capitolo precedente si ha

$$\int_0^\pi \cos^n x\, dx = \left[\frac{\cos^{n-1}x \operatorname{sen}x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}x\, dx\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{n-1}{n} \int_0^\pi \cos^{n-2}x\, dx$$

iterando si ha, se n è pari

$$\int_0^\pi \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\frac{(n-3)}{(n-2)} \int_0^\pi \cos^{n-4}x\, dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \int_0^\pi dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\, \pi$$

e se n é dispari

$$\int_0^\pi \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\frac{(n-3)}{(n-2)} \int_0^\pi \cos^{n-4}x\, dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \int_0^\pi \cos x\, dx = 0.$$

5) Utilizzando l'esercizio 24) del paragrafo 3.1 del capitolo precedente si ha $(m\neq n)$ poiché $\operatorname{sen}m\pi = 0$ per ogni m intero

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}mx \cos nx\, dx = \left[\frac{1}{n^2-m^2}(n\operatorname{sen}nx \operatorname{sen}mx + m\cos mx \cos nx)\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{n^2-m^2}(m\cos m\pi \cos n\pi - m).$$

Allora se m ed n sono entrambi pari o entrambi dispari (cioè se m+n è pari) si avrá $\cos m\pi\cdot\cos n\pi=1$ e dunque $m\cos m\pi\cdot\cos n\pi-m=0$. Se invece m ed n sono l'uno pari e l'altro dispari (cioe se m+n è dispari) si avrá $\cos m\pi\cdot\cos n\pi=-1$ e dunque $m\cos m\pi\cdot\cos n\pi-m=-2m$.
Sia ora m=n si ha allora

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}mx \cos mx\, dx = \frac{1}{m}\left[\int \operatorname{sen}mx\, d(\operatorname{sen}mx)\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{m}\left[\frac{\operatorname{sen}^2 mx}{2}\right]_0^\pi = 0.$$

6) Utilizzando l'esercizio 22) del paragrafo 3.1 del capitolo precedente si ha $(m\neq n)$, poiché $\operatorname{sen}m\pi=\operatorname{sen}n\pi=0$ per ogni m, n interi

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}mx \operatorname{sen}nx\, dx = \frac{1}{n^2-m^2}\left[m\cos mx \operatorname{sen}nx - \right.$$

$$\left. - n\operatorname{sen}mx \cos nx\right]_0^\pi = \frac{1}{n^2-m^2}\cdot 0.$$

Se n=m, grazie al risultato dell'esercizio 22)* del paragrafo 3.1 del capitolo precedente si ha

$$\int_0^{\pi} \text{senmx senmx}dx = \frac{1}{m}\int_0^{\pi} \text{sen}^2 mx \; d(mx) =$$

$$= \frac{1}{m}\left[\left(\int \text{sen}^2 y \; dy\right)_{y=mx}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{m}\left[\frac{mx-\text{senmx cosmx}}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

7) Utilizzando l'esercizio **23)** del paragrafo 3.1 del capitolo precedente si ha $(m\neq n)$, poiché $\text{sen}m\pi=\text{sen}n\pi=0$ per ogni m, n interi

$$\int_0^{\pi}\text{cosmx cosnx dx} = \frac{1}{n^2-m^2}[\text{ncosmx sennx}-\text{msenmx cosnx}]_0^{\pi} = 0.$$

Se m=n, grazie al risultato dell'esercizio **23)*** del paragrafo 3.1 del capitolo precedente si ha

$$\int_0^{\pi}\text{cosmx cosmx dx} = \frac{1}{m}\int_0^{\pi}\cos^2 mx \; d(mx) =$$

$$= \frac{1}{m}\left[\left(\int \cos^2 y \; dy\right)_{y=mx}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{m}\left[\frac{mx+\text{senmx cosmx}}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

2.2 Calcolo di integrali definiti

Calcolare i seguenti integrali definiti

1) $\int_0^1 x^4 \, dx$

2) $\int_{-2}^{3} e^{3x} \, dx$

3) $\int_0^{-1} \frac{x}{1+x^2} \, dx$

4) $\int_{\pi/2}^{\pi} \text{senx} \, dx$

5) $\int_0^{2\pi} \cos 4x \, dx$

6) $\int_0^1 \text{senhx} \, dx$

7) $\int_{-1}^{0} \frac{1}{1+x^2} \, dx$

8) $\int_0^{\pi/3} \sqrt{\cos x} \; \text{senx} \, dx$

9) $\int_0^{\pi/6} \text{tgx} \, dx$

10) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

11) $\int_{e^2}^{e} \frac{1}{x\log x} \, dx$

12) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} \, dx$

13) $\int_1^0 \frac{x-1}{x+1} \, dx$

14) $\int_0^1 \frac{2x-4}{x^2-x+1} \, dx$

15) $\int_2^3 \frac{1}{(x-1)^2} \, dx$

16) $\int_0^{\pi/2} e^{\text{senx}} \cos x \, dx$

17) $\int_{-1}^{0} \frac{3x^2}{1+x^6} \, dx$

18) $\int_1^e \frac{\log|x|}{x} \, dx$

19) $\int_0^2 |x^2-1| \, dx$

20) $\int_2^{-2} (|x|+1) \, dx$

21) $\int_0^{2\pi} (|\text{senx}|+|\cos x|) \, dx$

22) $\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^6} \, dx$

23) $\int_{-2}^{2} \text{arctgx} \, dx$

24) $\int_0^{2\pi} (\text{senx}-|\text{senx}|) \, dx$

Risposte

1) $\frac{1}{5}$

2) $\frac{1}{3}\left[e^9 - \frac{1}{e^6}\right]$

3) $\log\sqrt{2}$

4) 1

5) 0

6) $\frac{1}{2}\left[e + \frac{1}{e} - 2\right]$

7) $\frac{\pi}{4}$

8) $\frac{2}{3}\left[1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$

9) $\log \frac{2}{\sqrt{3}}$

10) $2(e^2-e)$

11) $\log \frac{1}{2}$

12) $\frac{1}{3}\left[2\sqrt{2}-1\right]$

13) $\log 4 - 1$

14) $-4\sqrt{3}\ \mathrm{arctg}\ \frac{1}{\sqrt{3}}$

15) $\frac{1}{2}$

16) $e-1$

17) $\frac{\pi}{4}$

18) $\frac{1}{2}$

19) 2

20) 8

21) 8

22) 0

23) 0

24) -4

Svolgimento

1) Osservato che $x^5/5$ è una primitiva di x^4 si ha

$$\int_0^1 x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

2) Tenuto conto che

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

si ha

$$\int_{-2}^{3} e^{3x}\,dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_{-2}^{3} = \frac{1}{3}\left[e^9 - \frac{1}{e^6}\right]$$

3) Tenuto conto che

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$$

si ha

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1 = \log\sqrt{2}$$

4) Osservato che $-\cos x$ è una primitiva di $\mathrm{sen}x$ si ha

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{sen}x\,dx = \left[-\cos x\right]_{\pi/2}^{\pi} = 1$$

5) Si ha

$$\int_0^{2\pi} \cos 4x \, dx = \left[\frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x\right]_0^{2\pi} = 0$$

6) Si ha

$$\int_0^1 \operatorname{senh} x \, dx = [\cosh x]_0^1 = \frac{1}{2}\left[e+\frac{1}{e} - 2\right]$$

7) Si ha

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{1+x^2} \, dx = [\operatorname{arctg} x]_{-1}^0 = \frac{\pi}{4}$$

8) Si ha

$$\int_0^{\pi/3} \sqrt{\cos x} \operatorname{sen} x \, dx = \left[-\frac{2}{3} (\cos x)^{3/2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3}\left[1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$$

9) Si ha

$$\int_0^{\pi/6} \operatorname{tg} x \, dx = \left[-\log|\cos x|\right]_0^{\pi/6} = -\log\frac{\sqrt{3}}{2} = \log\frac{2}{\sqrt{3}}$$

10) Si ha

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = \left[2e^{\sqrt{x}}\right]_1^4 = 2\left[e^2-e\right]$$

11) Si ha

$$\int_{e^2}^{e} \frac{1}{x\log x} \, dx = \left[\log|\log x|\right]_{e^2}^{e} = -\log 2 = \log\frac{1}{2}$$

12) Si ha

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} (x^2+1)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left[2\sqrt{2}-1\right]$$

13) Si ha

$$\int_1^0 \frac{x-1}{x+1} \, dx = \left[x-2\log|x+1|\right]_1^0 = 2\log 2-1$$

14) Si ha (cfr. esercizio **19)** paragrafo 2.3 del capitolo precedente)

$$\int_0^1 \frac{2x-4}{x^2-x+1} \, dx = \left[\log|x^2-x+1| - 2\sqrt{3} \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = -4\sqrt{3} \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

15) Si ha

$$\int_2^3 \frac{1}{(x-1)^2} \, dx = \left[-\frac{1}{x-1}\right]_2^3 = \frac{1}{2}$$

16) Si ha

$$\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx = \left[e^{\operatorname{sen} x}\right]_0^{\pi/2} = e-1$$

17) Si ha

$$\int_{-1}^0 \frac{3x^2}{1+x^6} \, dx = \left[\operatorname{arctg} x^3\right]_{-1}^0 = 0-\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

18) Si ha

$$\int_1^e \frac{\log|x|}{x} \, dx = \left[\frac{\log^2 |x|}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}-0 = \frac{1}{2}$$

19) Si osservi che

$$|x^2-1| = \begin{cases} 1-x^2 & x\in[0,1] \\ x^2-1 & x\in[1,2] \end{cases};$$

pertanto dalla proprietà additiva segue

$$\int_0^2 |x^2-1|\,dx = \int_0^1 |x^2-1|\,dx + \int_1^2 |x^2-1|\,dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x^2)\,dx + \int_1^2 (x^2-1)\,dx = 2$$

20) Poiché l'integrando è pari si ha

$$\int_{-2}^{2} (|x|+1)\,dx = \int_{-2}^{2} |x|\,dx + \int_{-2}^{2} 1\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} (-x)\,dx + \int_0^2 x\,dx + 4 = 8$$

21) Osservato che

$$|senx|+|cosx| = \begin{cases} senx+cosx & [0,\pi/2] \\ senx-cosx & [\pi/2,\ \pi] \\ -senx-cosx & \left[\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right] \\ -senx+cosx & \left[\frac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right] \end{cases}$$

dalla proprietà additiva segue:

$$\int_0^{2\pi} (|senx|+|cosx|)\,dx = \int_0^{\pi/2} (senx+cosx)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (senx-cosx)\,dx +$$

$$- \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (senx+cosx)\,dx - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} (cosx-senx)\,dx = 2+2+2+2=8$$

22) Osservato che $f(x)=x/(1+x^6)$ è dispari si ha subito con la sostituzione $x=-t$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^6}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{x}{1+x^6}\,dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^6}\,dx =$$

$$= -\int_1^0 \frac{-t}{1+t^6}\,dt + \int_0^1 \frac{x}{1+x^6}\,dx = 0$$

23) Osservato che $f(x)=arctgx$ è dispari si ha ragionando come nell'esercizio 22)

$$\int_{-1}^{1} arctgx\,dx=0$$

Il lettore ritrovi tale risultato integrando per parti

24) Osservato che

$$senx-|senx| = \begin{cases} 0 & [0,\pi] \\ 2senx & [\pi,\ 2\pi] \end{cases}$$

si ha per la proprietà additiva

$$\int_0^{2\pi} (senx-|senx|)\,dx = \int_0^{\pi} (senx-|senx|)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (senx-|senx|)\,dx$$

$$= 2\int_{\pi}^{2\pi} senx\,dx = -2\,[cosx]_{\pi}^{2\pi} = -4$$

2.3 Altri integrali definiti

Si calcolino i seguenti integrali definiti

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x \, dx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$

3) $\int_0^{2\pi} \text{sen}mx \cos nx \, dx$

4) $\int_0^{2\pi} \text{sen}mx \, \text{sen}nx \, dx$

5) $\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx$

6) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{7+5\cos x} \, dx$

7) $\int_{-1}^{1} |x|^\alpha \, dx \quad \alpha>0$

8) $\int_{\pi/3}^{\pi/4} \frac{\text{sen}x}{\cos^2 x+\cos x} \, dx$

9) $\int_2^1 x^3 \log|x| \, dx$

10) $\int_1^2 \frac{1}{x^3+x} \, dx$

11) $\int_2^3 \frac{1}{x^3+x^2} \, dx$

12) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen}x}{(1+\cos^2 x)} (1+x^4) \, dx$

13) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} \, dx$

14) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\text{sen}x+\cos x} \, dx$

Soluzioni

1) $\begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{(n-1)!!}{n!!} & n \text{ pari} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & n \text{ dispari} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{(n-1)!!}{n!!} & n \text{ pari} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & n \text{ dispari} \end{cases}$

3) 0

4) $\begin{cases} 0 & m\neq n \\ \pi & m=n \end{cases}$

5) $\begin{cases} 0 & m\neq n \\ \pi & m=n \end{cases}$

6) $\frac{2}{\sqrt{6}} \text{arctg} \sqrt{6} - \frac{1}{\sqrt{6}} \text{arctg} \frac{5}{2} \frac{1}{\sqrt{6}}$

7) $\frac{2}{\alpha+1}$

8) $\log \frac{2+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$

9) $\frac{15}{16} - 4\log 2$

10) $\log \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

11) $\frac{1}{6} + \log \frac{8}{9}$

12) 0

13) $\frac{2}{3}(2-\sqrt{2})$

14) $\log 2$

Svolgimenti

1) Si osservi che

$$\int_0^\pi \text{sen}^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{sen}^n x \, dx$$

Grazie al cambiamento di variabili $x=\pi-t$ si ha

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{sen}^n x \, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \text{sen}^n (\pi-t) \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n t \, dt$$

Pertanto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \text{sen}^n x \, dx$$

e grazie al risultato dell'esercizio 3) del paragrafo 2.1 si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x \, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{se n è pari} \\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{se n è dispari} \end{cases}$$

2) Si osservi che con la sostituzione $x=\frac{\pi}{2}-t$ si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n \left(\frac{\pi}{2}-t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n t \, dt$$

e quindi grazie al risultato dell'esercizio precedente

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{se n è pari} \\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{se n è dispari} \end{cases}$$

3) Utilizzando l'esercizio 24) del paragrafo 3.1 del capitolo precedente si ha ($m \neq n$)

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}mx \cos nx \, dx = \left[\frac{1}{n^2-m^2}\left(n \operatorname{sen}mx \operatorname{sen}nx + m\cos mx \cos nx\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{n^2-m^2} \cdot 0 = 0$$

Per m=n si ha invece

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}mx \cos mx \, dx = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}mx \, d(\operatorname{sen}mx) = \frac{1}{m}\left[\frac{\operatorname{sen}^2 mx}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

4) Utilizzando l'esercizio 22) del paragrafo 3.1 del capitolo precedente si ha ($m \neq n$)

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}mx \operatorname{sen}nx \, dx = \left[\frac{1}{n^2-m^2}\left(m\cos mx \operatorname{sen}nx - n \operatorname{sen}mx \cos nx\right)\right]_0^{2\pi} = 0$$

Per m=n invece si ha grazie al risultato dell'esercizio 22)* del paragrafo 3.1 del capitolo precedente

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}mx \operatorname{sen}mx \, dx = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 mx \, d(mx) =$$

$$= \frac{1}{m}\left[\left(\int \operatorname{sen}^2 y \, dy\right)_{y=mx}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{m}\left[\frac{mx-\operatorname{sen}mx \cos mx}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

5) Utilizzando l'esercizio 23) del paragrafo 3.1 del capitolo precedente si ha ($m \neq n$)

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{n^2-m^2}\left[n\cos mx \operatorname{sen}nx - m \operatorname{sen}mx \cos nx\right]_0^{2\pi} = 0$$

Se m=n grazie al risultato dell'esercizio 23)* del paragrafo 3.1 del capitolo precedente si ha

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos mx \, dx = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi} \cos^2 mx \, d(mx) = \frac{1}{m}\left[\left(\int \cos^2 y \, dy\right)_{y=mx}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{m}\left[\frac{mx+\operatorname{sen}mx \cos mx}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

6) Gli integrali di funzioni razionali nel seno e nel coseno si calcolano con la sostituzione $t=\operatorname{tg}x/2$ cioè $x=2 \operatorname{arctg}t$. Si osservi ora che applicando tale sostituzione

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x/2}{1+\operatorname{tg}^2 x/2}, \quad (\operatorname{arctg}t)' = \frac{1}{1+t^2}$$

si ha

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{7+5\cos x} \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x/2}{12+2\operatorname{tg}^2 x/2} \, dx = \left[\left(\int \frac{1+t^2}{6+t^2} \quad \frac{1}{1+t^2}\right)_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right]_0^{2\pi}$$

Poiché tg0=0, tgπ=0 il risultato cui si perviene è 0, risultato palesemente assurdo in quanto l'integrando è sempre positivo.
Fonte d'errore è l'applicazione della seconda regola di integrazione per sostituzione in maniera impropria.
Si osservi infatti che la funzione t→2 arctgt è una applicazione biunivoca, continua con la derivata prima da (−∞, +∞) a (−π, π).
Per poter utilizzare in questo caso tale regola è opportuno osservare che col cambiamento di variabili x=y+π si ha

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{7+5\cos x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{7+5\cos(y+\pi)}\,dy = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{7-5\cos y}\,dy$$

poiché cos(y+π)=−cosy e la funzione coseno è pari.
Si osservi ancora che

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{7+5\cos x}\,dx = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{7-5\cos y}\,dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{7-5\cos y}\,dy\right)$$

ed effettuando il cambiamento di variabile $y=y-\frac{\pi}{2}$ si ha ancora

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{7+5\cos x}\,dx = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{7-5\cos y}\,dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{7-5\cos(t+\pi/2)}\right)$$

$$= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{7-5\cos y}\,dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{7+5\operatorname{sen} t}\,dt\right).$$

Poiché ora i punti 0 e $\frac{\pi}{2}$, estremi di integrazione, cadono nell'insieme dei valori di 2arctgt si può applicare tale sostituzione. Si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{7-5\cos y}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{7-5\left(1-tg^2x/2\right)/\left(1+tg^2x/2\right)}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+tg^2x/2}{2+12tg^2x/2}\,dx$$

Si ha ora

$$\int \frac{1+tg^2x/2}{2+12tg^2x/2}\,dx = \left(\int \frac{1+t^2}{2+12t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt\right)_{t=tgx/2} = \left(\int \frac{1}{1+6t^2}\,dt\right)_{t=tgx/2}$$

D'altro canto

$$\int \frac{1}{1+6t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{1}{1+(\sqrt{6}t)^2}\,d(\sqrt{6}t) = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{6}t + C$$

e dunque

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+tg^2x/2}{2+12tg^2x/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{6}\,tg\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

Ancora essendo $\operatorname{sen}x=\dfrac{2tgx/2}{1+tg^2x/2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{7+5\operatorname{sen}t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{7+\left(10tgx/2\right)/\left(1+tg^2x/2\right)}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+tg^2x/2}{7+10tgx/2+7tg^2x/2}\,dx$$

Si ha ora

$$\int \frac{1+tg^2x/2}{7+10tgx/2+7tg^2x/2}\,dx = \left(\int \frac{1+t^2}{7+10t+7t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt\right)_{t=tgx/2} =$$

$$= \frac{2}{7}\left(\int \frac{1}{1+10t/7+t^2}\,dt\right)_{t=tgx/2}$$

D'altro canto grazie all'esercizio 9) del paragrafo 2.2 del capitolo precedente

$$\int \frac{1}{1+10t/7+t^2}\,dt = \frac{14}{\sqrt{96}}\operatorname{arctg}\frac{14t+10}{\sqrt{96}} + C$$

e dunque

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+tg^2x/2}{7+10tgx/2+7tg^2x/2}\,dx = \frac{2}{7}\,\frac{14}{\sqrt{96}}\left[arctg\,\frac{14tgx/2+10}{\sqrt{96}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\,arctg\,\frac{24}{\sqrt{96}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,arctg\,\frac{10}{\sqrt{96}}$$

Si conclude così che

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{7+5\cos x}\,dx = \frac{arctg\sqrt{6}}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\,arctg\sqrt{6} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,arctg\,\frac{5}{\sqrt{24}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}}\,arctg\sqrt{6} - \frac{1}{\sqrt{6}}\,arctg\,\frac{5}{\sqrt{24}}$$

7) Si osservi che non si può, per la presenza del modulo, applicare immediatamente l'integrale notevole 1 della tabella 1 del paragrafo 1 del capitolo precedente. D'altro canto però con la sostituzione $\tau=-x$

$$\int_{-1}^{1} |x|^\alpha\,dx = \int_{-1}^{0} |x|^\alpha\,dx + \int_0^1 |x|^\alpha\,dx = \int_{-1}^{0} (-x)^\alpha\,dx + \int_0^1 x^\alpha\,dx =$$

$$= -\int_1^0 (\tau)^\alpha\,d\tau + \int_0^1 x^\alpha\,dx = 2\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{2}{\alpha+1}\left[x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{2}{\alpha+1}$$

8) Con la sostituzione $x=\arccos t$ si trova

$$\int_{\pi/3}^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2x+\cos x}\,dx = -\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{t^2+t}\,dt = \int_{\sqrt{2}/2}^{1/2} \frac{1}{t^2+t}\,dt =$$

$$= \left[\log\frac{t}{t+1}\right]_{\sqrt{2}/2}^{1/2} = \log\frac{\sqrt{2}+2}{3\sqrt{2}}$$

9) Integrando per parti con x^3 come fattore differenziale e $\log|x|$ come fattore finito si ha

$$\int_2^1 x^3\log|x|\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\log|x|\right]_2^1 - \frac{1}{4}\int_2^1 x^3\,dx =$$

$$= -4\log2-\frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_2^1 = -4\log2-\frac{1}{16}+1 = \frac{15}{16} - 4\log2$$

10) Si ha (cfr. es. **3**) par. 5.2 cap. precedente)

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3+x}\,dx = \left[\log\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]_1^2 = \log\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

11) Si ha (cfr. es. **4**) par. 5.2 cap. precedente)

$$\int_2^3 \frac{1}{x^3+x^2}\,dx = \left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right]_2^3 = \frac{1}{6}+\log\frac{8}{9}$$

12) Poiché la funzione integranda è dispari l'integrale vale 0

13) Con la sostituzione $x=t^2-1$, $t\in\left[1,\sqrt{2}\right]$ si trova

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx = 2\int_1^{\sqrt{2}} \left(t^2-1\right)dt = 2\left[\frac{t^3}{3} - t\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$$

14) Con la sostituzione $x=2\,arctg\,t$ si trova (cfr. es. **11**) par. 6.2 cap. precedente):

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{sen}x+\cos x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \left[\log|1+t|\right]_0^1 = \log2$$

3. Nota introduttiva all'integrazione impropria

Ricordiamo innanzitutto il concetto di integrabilità impropria.

Per ogni $x\in[a,b)$ risulti integrabile secondo Riemann su $[a,x]$ la funzione f non limitata su $[a,b[$.

Tale funzione si dirà integrabile in senso improprio (*o impropriamente o in senso generalizzato*) su $[a,b[$ se esiste finito il limite

$$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt$$

A tale limite si dà il nome di *integrale improprio* di f su $[a,b]$ e lo si denota ancora con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

Se il limite su indicato esiste ma non è un numero reale si scriverà talora

$$\int_a^b f(x)\ dx = +\infty\ \left(\text{risp. } -\infty\right)$$

Analogamente se per ogni $x\in(a,b]$ la funzione f non limitata su $[a,b]$, risulta integrabile secondo Riemann su $[x,b]$, la diremo *integrabile in senso improprio su* $]a,b]$ se esiste finito il limite

$$\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\ dt$$

e a tale limite daremo ancora il nome di *integrale improprio* di f su $]a,b]$ denotandolo col simbolo

$$\int_a^b f(x)\ dx.$$

Si osservi a titolo di esempio che la funzione $1/\sqrt{x}$ risulta impropriamente integrabile su $]0,1]$. Si ha infatti per $x>0$

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt = \lim_{x\to 0^+}\left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = \lim_{x\to 0^+} 2\left(1-\sqrt{x}\right) = 2$$

La funzione $1/x$ non è invece impropriamente integrabile su $]0,1]$. Infatti si ha per $x>0$

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{1}{t}\ dx = \lim_{x\to 0^+}\left[\lg t\right]_x^1 = \lim_{x\to 0^+}\left(-\lg x\right) = +\infty$$

In maniera analoga si può definire l'integrabilità impropria su intervalli illimitati del tipo $[a,+\infty)$ e

$(-\infty,a]$ per una funzione f integrabile secondo Riemann (o anche impropriamente) su ogni intervallo del tipo $[a,x]$ o $[x,b]$.

Si osservi così a titolo di esempio che la funzione $1/x^2$ è integrabile impropriamente su $[1,+\infty)$.

Si ha infatti

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2}\ dt = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1$$

La funzione senx invece non è integrabile impropriamente su $[1,+\infty)$; non esiste infatti il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \text{sen}t\ dt = \lim_{x\to+\infty}\left[-\cos t\right]_1^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\cos 1-\cos x\right)$$

Se poi una funzione f è integrabile secondo Riemann su ogni intervallo $[x,y]$ contenuto nell'intervallo $]a,b[$ e non è limitata sia su intervalli del tipo $[x,b[$ che $]a,x]$, essa sarà detta *integrabile in senso improprio* su $]a,b[$ se fissato un punto x_0 interno all'intervallo $]a,b[$ esistono finiti i due limiti

$$\lim_{x\to b^-}\int_{x_0}^x f(t)\ dt,\quad \lim_{x\to a^+}\int_x^{x_0} f(t)\ dt;$$

alla quantità

$$\lim_{x\to b^-}\int_{x_0}^x f(t)\ dt + \lim_{x\to a^+}\int_x^{x_0} f(t)\ dt$$

si dà il nome di *integrale improprio* di f su $]a,b[$ e la si denota ancora col simbolo

$$\int_a^b f(x)\ dx.$$

Se uno dei limiti in considerazione risulta essere $+\infty$ (risp. $-\infty$) mentre l'altro esiste e non vale $-\infty$ (risp. $+\infty$) si scriverà talora

$$\int_a^b f(x)\, dx = +\infty \left(\text{risp. } -\infty\right)$$

In maniera analoga si può definire l'integrabilità impropria su $(-\infty, +\infty)$.

Sia infine x_0 un punto interno all'intervallo $[a,b]$ ed f risulti integrabile secondo Riemann su ogni intervallo del tipo $[a,x]$ (per $x<x_0$) e $[y,b]$ per $y>x_0$, non essendo limitata né su $[a,x_0]$ né su $[x_0,b]$.

Diremo allora che f è *integrabile in senso improprio* su $[a,b]$ se esistono finiti i due limiti

$$\lim_{x\to x_0^-}\int_a^x f(t)\, dt,\ \lim_{x\to x_0^+}\int_x^b f(t)\, dt$$

Alla quantità

$$\lim_{x\to x_0^-}\int_a^x f(t)\, dt + \lim_{x\to x_0^+}\int_x^b f(t)\, dt$$

si darà ancora il nome di *integrale improprio* di f su $[a,b]$ e la si denoterà col simbolo

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Anche in questo caso si scriverà

$$\int_a^b f(x)\, dx = +\infty \left(\text{risp. } -\infty\right)$$

se uno dei due limiti in esame è $+\infty$ (risp. $-\infty$) risultando l'altro finito o eguale a $+\infty(-\infty)$.

Una funzione f si dirà poi *sommabile* su un intervallo I se è integrabile impropriamente su I la funzione $|f|$.

È utile ricordare che *se una funzione è sommabile essa è anche integrabile impropriamente*.

Per la sommabilità vale il seguente criterio

Criterio di confronto - Sia I un intervallo e risulti

$$|f(x)| \le g(x) \text{ per ogni } x\in I$$

Allora se g *è sommabile su* I *anche f è sommabile; se invece* f *non è sommabile allora anche* g *non è sommabile*.

In virtù della sua definizione lo studio dell'integrale improprio di una funzione f è ricondotto allo studio di un limite e come di frequente accade per i limiti può spesso essere utile prima stabilire l'esistenza del limite in questione, poi eseguire quando è possibile il calcolo.

Il criterio di confronto enunciato, una volta nota la sommabilità di un certo numero di funzioni consente di dedurre, spesso facilmente, quella di altre anche quando non è noto o è di studio diretto complicato il loro integrale definito.

A tale scopo esso viene utilizzato per lo più in forme lievemente modificate.

Sia, ad esempio, f(x) definita e continua per ogni $x\in[a,b[$ (con b eventualmente $+\infty$) e si supponga che $|f(x)| \le g(x)$ non su tutto $[a,b[$ ma ad esempio in $[c,b[$ con $c\in]a,b[$. Allora per stabilire la sommabilità di f su tutto $[a,b[$ è sufficiente che g sia sommabile su $[c,b[$ mentre per stabilire che g non è sommabile su $[a,b[$ basta sapere che f non lo è su $[c,b[$.

Per stabilire le necessarie diseguaglianze di confronto del tipo $|f(x)| \le g(x)$ per $x\in[c,b[$ si procede spesso a studiare il limite

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}$$

con un'opportuna scelta della funzione g e si tratterà per lo più di valutare ordini di infiniti o di infinitesimi rispetto a opportuni infiniti o infinitesimi campione.

La procedura descritta, con la scelta per g di funzioni del tipo $1/|x-x_0|^\alpha$ e $1/|x|^\alpha$ conduce ai seguenti criteri

α) Sia I un intervallo limitato ed f una funzione continua in I privato del punto x_0, allora:

i) se f è un infinito di ordine $\alpha<1$ rispetto all'infinito campione $1/|x-x_0|$, essa è sommabile su I;

ii) se f è un infinito di ordine $\alpha\geq 1$, essa non è sommabile su I.

β) Sia f continua in un intervallo I del tipo $[a,+\infty)$ o $(-\infty,a]$; allora

i) se f all'infinito è infinitesima di ordine $\alpha>1$, rispetto all'infinitesimo campione $1/|x|$, f è sommabile su I;

ii) se f all'infinito è infinitesima di ordine $\alpha\leq 1$, f non è sommabile su I.

4. Integrazione impropria

4.1 Integrali impropri notevoli

Si stabilisca la validità delle seguenti formule

1) $$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \alpha<1 \\ +\infty & \alpha\geq 1 \end{cases}$$

1 bis) $$\int_a^{a+1} \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \alpha<1 \\ +\infty & \alpha\geq 1 \end{cases}$$

2) $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & \alpha\leq 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \alpha>1 \end{cases}$$

3) $$\int_0^1 \frac{\lg x}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{(\alpha-1)^2} & \alpha<1 \\ -\infty & \alpha\geq 1 \end{cases}$$

4) $$\int_1^{+\infty} \frac{\lg x}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & \alpha\leq 1 \\ \dfrac{1}{(\alpha-1)^2} & \alpha>1 \end{cases}$$

5) $$\int_0^{1/2} \frac{1}{x|\lg x|^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & \alpha\leq 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1}\left|\lg \dfrac{1}{2}\right|^{1-\alpha} & \alpha>1 \end{cases}$$

6) $$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x|\lg x|^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & \alpha\leq 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1}(\lg 3)^{1-\alpha} & \alpha>1 \end{cases}$$

7) $$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x|\lg x|^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left|\lg \dfrac{1}{2}\right|^{1-\alpha} & \alpha<1 \\ +\infty & \alpha\geq 1 \end{cases}$$

8) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

9) $$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x}\,dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \quad (\alpha>0)$$

10) $$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \quad (\alpha>0)$$

11) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,\mathrm{sen}\beta x\;dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$

12) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\,\frac{\pi}{2}$

13) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

14) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{2^{(n+2)/2}}\sqrt{\pi} & n \text{ pari} \\ \frac{(n-1)!!}{2^{(n+1)/2}} & n \text{ dispari} \end{cases}$

15) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

16) $\int_0^{+\infty} \mathrm{sen}x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

17) $\int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Risoluzioni

1) Si osservi che per ogni α positivo si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty$$

e dunque per $\alpha \neq 1$

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)$$

Dunque, poiché per $\alpha<1$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = 0$$

si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha}$$

Poiché invece per $\alpha>1$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = +\infty$$

si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = +\infty$$

Infine per $\alpha=1$

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = [\lg t]_x^1 = -\lg x$$

e dunque passando al limite per $x\to 0$ si ha che l'integrale improprio vale $+\infty$

1)bis Il cambiamento di variabile $t-a=\tau$ dà

$$\int_x^{a+1} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt = \int_{x-a}^1 \frac{1}{\tau^\alpha}\,d\tau$$

si può allora applicare il risultato dell'esercizio 1).

2) Si osservi che per ogni α positivo si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$$

e per $\alpha \neq 1$

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}-1\right).$$

Poiché per $\alpha<1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = +\infty$$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = +\infty$$

Poiché invece per $\alpha>1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = 0$$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha-1}$$

Per $\alpha=1$ infine

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \left[\lg t\right]_1^x = \lg x$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = +\infty$$

3) Per qualsivoglia α positivo si ha

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\lg x}{x^\alpha} = -\infty$$

D'altro canto per $\alpha\neq1$ grazie all'esercizio 19) del paragrafo 3.1 del capitolo precedente (si osservi che il valore α nel presente esercizio corrisponde al valore $-\alpha$ nell'esercizio richiamato) si ha

$$\int_x^1 \frac{\lg t}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\left(\lg t - \frac{1}{-\alpha+1}\right)\right]_x^1 =$$

$$= -\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2 - \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\left(\lg x - \frac{1}{1-\alpha}\right)$$

Se $\alpha<1$ si ha

$$\lim_{x\to0^+} x^{-\alpha+1} = 0, \quad \lim_{x\to0^+} x^{-\alpha+1}\lg|x| = 0$$

e dunque

$$\lim_{x\to0^+} \int_x^1 \frac{\lg t}{t^\alpha}\,dt = -\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2$$

Se $\alpha>1$ si ha

$$\lim_{x\to0^+} x^{-\alpha+1}\left(\lg x - \frac{1}{1-\alpha}\right) = -\infty$$

e quindi

$$\lim_{x\to0^+} \int_x^1 \frac{\lg t}{t^\alpha} = -\infty$$

Se $\alpha=1$ si ha grazie all'esercizio 19)* del paragrafo 3.1 del capitolo precedente

$$\int_x^1 \frac{\lg t}{t}\,dt = \left[\frac{1}{2}(\lg t)^2\right]_x^1 = -\frac{1}{2}(\lg x)^2$$

e quindi

$$\lim_{x\to0^+} \int_x^1 \frac{\lg t}{t}\,dt = -\infty.$$

4) Per qualsivoglia $\alpha>0$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{x^{\alpha}} = +\infty.$$

D'altro canto per $\alpha\neq 1$ grazie all'esercizio **19)** del paragrafo 3.1 del capitolo precedente (si osservi che il valore α nel presente esercizio corrisponde al valore $-\alpha$ nell'esercizio richiamato) si ha

$$\int_1^x \frac{\lg t}{t^{\alpha}}\, dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\left(\lg t - \frac{1}{-\alpha+1}\right)\right]_1^x =$$

$$= \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\left(\lg x - \frac{1}{1-\alpha}\right) + \frac{1}{(\alpha-1)^2}.$$

Se $\alpha<1$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha+1}\left(\lg x - \frac{1}{1-\alpha}\right) = +\infty$$

e dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\lg t}{t^{\alpha}}\, dt = +\infty.$$

Se $\alpha>1$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha+1} = 0;$$

si ricordi anche che

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha+1} \lg x = 0$$

sicché si ricava

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\lg t}{t^{\alpha}}\, dt = \frac{1}{(1-\alpha)^2}.$$

Se infine $\alpha=1$ si ha

$$\int_1^x \frac{\lg t}{t} = \left[\frac{1}{2}(\lg t)^2\right]_1^x = \frac{1}{2}(\lg x)^2$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0\infty} \int_1^x \frac{\lg t}{t}\, dt = +\infty.$$

5) Si osservi innanzi tutto che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\,|\lg x|^{\alpha}} = +\infty$$

in quanto

$$\lim_{x\to 0^+} x\,|\lg x|^{\alpha} = 0.$$

Si ha poi per $\alpha\neq 1$ $(x<1/2)$

$$\int_x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t\,|\lg t|^{\alpha}}\, dt = \frac{1}{1-\alpha}\left[-|\lg t|^{1-\alpha}\right]_x^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{1-\alpha}\left|\lg \frac{1}{2}\right|^{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}|\lg x|^{1-\alpha}$$

Pertanto se $\alpha<1$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t\,|\lg t|^{\alpha}}\, dt = +\infty$$

se invece $\alpha>1$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t\,|\lg t|^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha-1}\left|\lg \frac{1}{2}\right|^{1-\alpha}.$$

Sia infine $\alpha=1$ si ha allora

$$\int_x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t\,|\lg t|}\,dt = \left[-\lg|\lg t|\right]_x^{\frac{1}{2}} = -\lg\left|\lg\frac{1}{2}\right| + \lg|\lg x|$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t\,|\lg t|}\,dt = +\infty$$

6) Si osservi innanzi tutto che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\,(\lg x)^\alpha} = 0$$

Si ha poi per $\alpha\neq 1$ $(x>3)$

$$\int_3^x \frac{1}{t\,(\lg t)^\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha}\left[(\lg t)^{1-\alpha}\right]_3^x = \frac{1}{1-\alpha}(\lg x)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}(\lg 3)^{1-\alpha}.$$

Pertanto se $\alpha<1$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\int_3^x \frac{1}{t\,(\lg t)^\alpha}\,dt = +\infty;$$

se invece $\alpha>1$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\int_3^x \frac{1}{t\,(\lg t)^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}(\lg 3)^{1-\alpha}.$$

Se infine $\alpha=1$ si ha

$$\int_3^x \frac{1}{t\,\lg t}\,dt = \left[\lg\lg t\right]_3^x = \lg\lg x - \lg\lg 3$$

e dunque

$$\lim_{x\to+\infty}\int_3^x \frac{1}{t\,\lg t}\,dt = +\infty.$$

7) Si osservi innanzi tutto che

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x\,|\lg x|^\alpha} = +\infty;$$

si ha poi per $\alpha\neq 1$ $\left(x>\frac{1}{2}\right)$

$$\int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{t\,|\lg t|^\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha}\left[-|\lg t|^{1-\alpha}\right]_{\frac{1}{2}}^x =$$
$$= \frac{1}{1-\alpha}\left|\lg\frac{1}{2}\right|^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}|\lg x|^{1-\alpha}.$$

Pertanto se $\alpha<1$ si ha

$$\lim_{x\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{t\,|\lg t|^\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha}\left|\lg\frac{1}{2}\right|^{1-\alpha};$$

se invece $\alpha>1$ si ha

$$\lim_{x\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{t\,|\lg t|^\alpha}\,dt = +\infty.$$

Sia poi $\alpha=1$ si ha

$$\int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{t\,|\lg t|}\,dt = \left[-\lg|\lg t|\right]_{\frac{1}{2}}^x = \lg\left|\lg\frac{1}{2}\right| - \lg|\lg x|$$

e dunque

$$\lim_{x\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{t\,|\lg t|}\,dt = +\infty.$$

8) Si osservi che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\Big/\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

Pertanto si avrà per $a>0$ sufficientemente grande $1/(1+x^2) \leq 2/x^2$ per ogni $x \in [a,+\infty[$.

Ne segue grazie al criterio del confronto e ai risultati contenuti nell'esercizio 2) che la funzione $1/(1+x^2)$ è integrabile impropriamente su $[a,+\infty[$.

Poiché per $x>a$ si ha

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^a \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_a^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

si ricava subito che la funzione $1/(1+x^2)$ è integrabile impropriamente su $[0,+\infty[$.

Per calcolare il valore esatto dell'integrale si osservi che

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \left[\operatorname{arctg} t\right]_0^x = \operatorname{arctg} x$$

e dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

9) Si osservi innanzi tutto che, supposto $\alpha>0$, si ha per ogni n

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-\alpha x} = 0$$

(applicando la regola dell'Hôpital si ha infatti

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-\alpha x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^{\alpha x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{n x^{n-1}}{\alpha e^{\alpha x}} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{\alpha^n e^{\alpha x}} = 0\Big).$$

Ne segue subito allora ad esempio che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n e^{-\alpha x}}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^{n+2} e^{-\alpha x} = 0.$$

Quindi per $x>a$ con a sufficientemente grande si ha

$$0 \leq x^n e^{-\alpha x} \leq \frac{1}{x^2}$$

e grazie al criterio di confronto e ai risultati contenuti nell'esercizio **2)** si può dedurre l'esistenza dell'integrale improprio della funzione in esame esteso all'intervallo $[a,+\infty[$.

Poiché per $x>a$

$$\int_0^x t^n e^{-\alpha t}\,dt = \int_0^a t^n e^{-\alpha t}\,dt + \int_a^x t^n e^{-\alpha t}\,dt$$

si può allora concludere che la funzione $x^n e^{-\alpha x}$ è integrabile impropriamente sull'intervallo $[0,+\infty[$.

Per calcolare il valore esatto dell'integrale si può utilizzare il risultato dell'esercizio **1)** del paragrafo 4.1 del capitolo precedente (si osservi che l'α che figura in quell'esercizio va sostituito con $-\alpha$). Si ha così se $n\geq 1$ (il caso $n=0$ è banale)

$$\int_0^x t^n e^{-\alpha t}\,dt = \left[\frac{t^n}{-\alpha} e^{-\alpha t} - \frac{n}{-\alpha}\int t^{n-1} e^{-\alpha t}\,dt\right]_0^x =$$

$$= \frac{x^n e^{-\alpha x}}{-\alpha} + \frac{n}{\alpha}\int_0^x t^{n-1} e^{-\alpha t}\,dt$$

Applicando ripetutamente la formula si ottiene

$$\int_0^x t^n e^{-\alpha t}\,dt = -\frac{x^n e^{-\alpha x}}{\alpha} - n\frac{x^{n-1}}{\alpha^2} e^{-\alpha x} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2}\int_0^x t^{n-2} e^{-\alpha t}\,dt$$

$$= -\frac{x^n e^{-\alpha x}}{\alpha} - \frac{n x^{n-1}}{\alpha^2} e^{-\alpha x} - \frac{n(n-1)}{\alpha^3} x^{n-2} e^{-\alpha x} \ldots$$

$$\ldots - \frac{n(n-1)\ldots 2}{\alpha^n} x e^{-\alpha x} + \frac{n!}{\alpha^n}\int_0^x e^{-\alpha t}\,dt$$

$$= -e^{-\alpha x}\left(\frac{x^n}{\alpha} + \frac{n}{\alpha^2} x^{n-1} + \ldots + \frac{n!}{\alpha^n} x + \frac{n!}{\alpha^{n+1}}\right) + \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

Di conseguenza passando al limite per x che tende a$+\infty$ si ricava

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x t^n e^{-\alpha t}\,dt = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

10) Si osservi innanzitutto che

$$\left|e^{-\alpha x}\cos\beta x\right| \le e^{-\alpha x}.$$

Ne segue che la funzione $e^{-\alpha x}\cos\beta x$ è sommabile, (e quindi integrabile) su $[0,+\infty[$ grazie al criterio del confronto essendo tale $e^{-\alpha x}$ (cfr. esercizio **9**)). Per calcolare il valore esatto dell'integrale si può utilizzare l'esercizio **3)** del paragrafo 3.1 del capitolo precedente (si osservi che l'α che figura in quell'esercizio va sostituito con $-\alpha$). Si ottiene così

$$\int_0^x e^{-\alpha t}\cos\beta t\,dt = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\left(-\alpha\cos\beta t+\beta\operatorname{sen}\beta t\right)\right]_0^x =$$

$$= \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(-\alpha\cos\beta x+\beta\operatorname{sen}\beta x\right) + \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

e dunque passando al limite per $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-\alpha x}\cos\beta t\,dt = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}.$$

11) Lo studio dell'integrale proposto ricalca esattamente quello eseguito per l'integrale esaminato nell'esercizio **10)**, utilizzando l'esercizio **2)** del paragrafo 3.1 del capitolo precedente invece dell'esercizio **3)**.

12) Si osservi che per $n>1$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n} = 0$$

e quindi per $x>a>0$ con a sufficientemente grande

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n \le \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2}.$$

La funzione $1/(1+x^2)^n$ risulta pertanto impropriamente integrabile grazie al criterio del confronto e ai risultati dell'esercizio **2)** su $[a,+\infty)$. Poiché per $x>a$

$$\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt = \int_0^a \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt + \int_a^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$$

si desume subito che esiste finito il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt.$$

Per calcolare il valore esatto dell'integrale occorre utilizzare l'esercizio **25)** del paragrafo 4.1 del capitolo precedente.
Si ha così

$$\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt = \left[\frac{1}{2n-2}\,\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}\,dt\right]_0^x =$$

$$= \frac{1}{2n-2}\,\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}\,dt.$$

Passando al limite per $x\to+\infty$ si ha

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{2n-3}{2n-2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx;$$

iterando $(n-1)$ volte si trova utilizzando anche il risultato dell'esercizio **8)**:

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\,\frac{\pi}{2}.$$

13) Si osservi che, applicando la regola dell'Hôpital, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x\,e^{x^2}} = 0$$

e dunque per $x>a>0$ con a sufficientemente grande

$$e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

Grazie al risultato dell'esercizio **2)** si ricava subito che la funzione integranda è integrabile impropriamente sull'intervallo $[a,+\infty[$.
Poiché per $x>a$

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \int_0^a e^{-t^2}\,dt + \int_a^x e^{-t^2}\,dt$$

si ricava che la funzione in esame è integrabile impropriamente sull'intervallo $[0,+\infty[$.
Il calcolo del valore esatto dell'integrale richiede considerazioni più delicate e complesse. Esso verrà pertanto omesso.

14) Si osservi che grazie alla regola dell'Hôpital applicata ripetutamente per ogni n si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{2xe^{x^2}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-2}}{2xe^{x^2}} = \ldots = 0$$

Di conseguenza per $x>a>0$ con a sufficientemente grande si avrà (si ponga nella relazione di limite prima stabilita $n+2$ al posto di n)

$$x^n e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Si deduce allora subito che l'integrando in esame è integrabile impropriamente su $[a,+\infty[$, grazie al criterio del confronto e al risultato dell'esercizio **2)**.
L'integrabilità impropria su $[0,+\infty)$ segue subito dalla relazione $(x>a)$

$$\int_0^x t^n e^{-t^2}\,dt = \int_0^a t^n e^{-t^2}\,dt + \int_a^x t^n e^{-t^2}\,dt$$

Per calcolare il valore esatto dell'integrale occorre utilizzare l'esercizio **12)** del paragrafo 4.1 del capitolo precedente ripetutamente.

Si ha così

$$\int_0^x t^n e^{-t^2}\,dt = \left[-\frac{t^{n-1}e^{-t^2}}{2} + \frac{n-1}{2}\int t^{n-2}e^{-t^2}\,dt\right]_0^x =$$
$$= -\frac{x^{n-1}e^{-x^2}}{2} + \frac{n-1}{2}\int_0^x t^{n-2}e^{-t^2}\,dt$$

al limite per $x\to+\infty$ si ha

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt = \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} t^{n-2}e^{-t^2}\,dt.$$

Si ottiene per n dispari, iterando $(n-1)/2$ volte

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt = \frac{(n-1)}{2^2}(n-3)\int_0^{+\infty} t^{n-4}e^{-t^2}\,dt =$$
$$\ldots = \frac{(n-1)!!}{2^{(n-1)/2}}\int_0^{+\infty} t\,e^{-t^2}\,dt$$

L'ultimo integrale essendo

$$\int_0^x t\,e^{-t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}$$

vale 1/2 e pertanto

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt = \frac{(n-1)!!}{2^{(n+1)/2}}.$$

Per n pari iterando n/2 volte si ottiene

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt = \frac{(n-1)\,(n-3)}{2^2}\int_0^{+\infty} t^{n-4}e^{-t^2}\,dt =$$
$$\ldots = \frac{(n-1)!!}{2^{n/2}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

Utilizzando il risultato dell'esercizio **13)** si ha così

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt = \frac{(n-1)!!}{2^{(n+2)/2}}\sqrt{\pi}$$

15) Si osservi che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}x}{x} = 1$$

D'altro canto la funzione senx/x è continua per ogni $x\neq 0$. Pertanto ha senso per ogni $x>0$ l'integrale

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt = F(x)$$

Di tale integrale definito bisognerà studiare il limite per $x\to+\infty$ per stabilire l'esistenza e il valore dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx.$$

Non è nota un'espressione esplicita di F(x) in termini di funzioni elementari.
Si può innanzi tutto osservare che grazie ad una integrazione per parti si ha (si scelga senx come fattore differenziale e si osservi che $(-\cos x)'=\operatorname{sen}x$, $(-1/x)'=1/x^2$)

$$\int_1^x \frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt = -\frac{\cos x}{x} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt.$$

Si osservi ora che esiste finito il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

in quanto la funzione $\cos x/x^2$ è sommabile risultando vera la maggiorazione (per $x>1$)

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$$

ed essendo la funzione $1/x^2$ sommabile su $[1,+\infty[$.
D'altro canto si ha anche

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

Ne segue subito, poiché per $x>1$

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt + \int_1^x \frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt$$

l'esistenza e la finitezza del limite

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\operatorname{sen}t}{t}\,dt$$

e quindi l'esistenza dell'integrale improprio in studio. Si può facilmente provare poi che la funzione senx/x non è sommabile su $[0,+\infty[$.
Si osservi infatti che per ogni n intero positivo si ha grazie al cambiamento di variabili $t=i\pi+\tau$ per $0\le i<n$

$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\operatorname{sen}t}{t}\right| dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}t|}{t}\,dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\operatorname{sen}(\tau+i\pi)|}{\tau+i\pi}\,d\tau$$

D'altro canto la funzione $|\operatorname{sen}\tau|$ è periodica di periodo π quindi per $i>0$

$$\int_0^{\pi} \frac{|\operatorname{sen}(\tau+i\pi)|}{\tau+i\pi}\,d\tau \ge \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\tau}{(i+1)\pi}\,d\tau = \frac{2}{(i+1)\pi}$$

Si ottiene così

$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\operatorname{sen}t}{t}\right| dt \ge \frac{2}{\pi}\left(1 +\ldots+ \frac{1}{n}\right)$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{2} +\ldots+ \frac{1}{n}\right) = +\infty$$

si ha subito

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \left|\frac{\operatorname{sen}t}{t}\right| dt = +\infty$$

Poiché l'integrando è non negativo si ha

$$\int_0^{\left[\frac{x}{\pi}\right]\pi} \left|\frac{\text{sen}t}{t}\right| dt \le \int_0^x \left|\frac{\text{sen}t}{t}\right| dt \le \int_0^{\left(\left[\frac{x}{\pi}\right]+1\right)\pi} \left|\frac{\text{sen}t}{t}\right| dt$$

$\left(\left[\frac{x}{\pi}\right]\right.$ è la parte intera di $\left.\frac{x}{\pi}\right)$ e pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \left|\frac{\text{sen}t}{t}\right| dt = +\infty$$

Il calcolo del valore esatto dell'integrale improprio in esame, risulta richiedere qualche strumento un po' più complesso. Esso, pertanto, viene omesso.

16) Si osservi innanzitutto che non esiste il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \text{sen } x^2,$$

Scegliendo ad esempio infatti

$$x_k = \sqrt{2k\pi}$$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \text{sen } x_k^2 = 0$$

mentre scegliendo

$$y_k = \sqrt{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$$

si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \text{sen } y_k^2 = 1.$$

La funzione $\text{sen}x^2$ è continua per ogni x reale. Pertanto l'integrale

$$\int_0^x \text{sen } t^2 \, dt = F(x)$$

ha senso per ogni x.

Di tale integrale definito occorre studiare il limite per $x\to+\infty$ per stabilire l'esistenza e il valore dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \text{sen } x^2 \, dx.$$

Non è nota un'espressione esplicita di F(x) in termini di funzioni elementari.
Per stabilire innanzitutto l'esistenza del limite si può cominciare con l'osservare che esiste il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \text{sen } t^2 \, dt.$$

Infatti utilizzando il cambiamento di variabile $t^2=y$ ed essendo

$$\sqrt{y} = t, \ (\sqrt{y})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}$$

si ha

$$\int_1^x \text{sen } t^2 \, dt = \frac{1}{2}\int_1^{x^2} \frac{\text{sen } y}{\sqrt{y}} dy.$$

Integrando poi per parti (si scelga seny come fattore differenziale) si ottiene allora

$$\int_1^x \text{sen}t^2 \, dt = -\frac{1}{2}\frac{\cos x^2}{x} + \frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{4}\int_1^{x^2} \frac{\text{sen } y}{y^{3/2}} dy.$$

Si osservi ora che la funzione

$$y \to \frac{\text{sen } y}{y^{3/2}}$$

è sommabile su $[1,+\infty[$. Infatti si ha

$$\left|\frac{\text{sen } y}{y^{\frac{3}{2}}}\right| \le \frac{1}{y^{3/2}}$$

e $1/y^{3/2}$ è sommabile (esercizio 2)) e si può applicare il criterio di confronto.

Ne segue che esiste finito il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\operatorname{sen} y}{y^{3/2}}\,dy$$

e da ciò, grazie ad esempio ai teoremi di composizione dei limiti, si può subito dedurre che esiste finito il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^{x^2} \frac{\operatorname{sen} y}{y^{3/2}}\,dy.$$

D'altro canto

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x^2}{x} = 0.$$

Si può così dedurre che esiste finito il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \operatorname{sen} t^2\,dt.$$

Poiché per $x>1$ si ha

$$\int_0^x \operatorname{sen} t^2\,dt = \int_0^1 \operatorname{sen} t^2\,dt + \int_1^x \operatorname{sen} t^2\,dt$$

si ricava subito allora l'esistenza e la finitezza dell'integrale improprio in esame.
Si può anche facilmente provare che la funzione $\operatorname{sen} x^2$ non è sommabile su $[0,+\infty[$.
Si osservi infatti che ancora,

$$\int_0^{\sqrt{n\pi}} |\operatorname{sen} t^2|\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{n\pi}\left|\frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}}\right| dy = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}\left|\frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}}\right| dy.$$

D'altro canto col cambiamento di variabile $\tau=y-i\pi$ si ha

$$\int_0^{n\pi}\frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}}\,dy = \sum_{i=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\operatorname{sen}(\tau+i\pi)|}{\sqrt{\tau+i\pi}}\,d\tau \ge \sum_{i=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\tau}{\sqrt{(1+i)\pi}}\,d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{i}}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\tau\,d\tau = \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{i}}.$$

Si ottiene così la disuguaglianza

$$\int_0^{\sqrt{n\pi}} |\operatorname{sen} t^2|\,dt \ge \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$$

si ottiene allora

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n\pi}} |\operatorname{sen} t^2|\,dt = +\infty.$$

Poiché l'integrando è non negativo per ogni x si ha

$$\int_0^{\left(\left[\frac{x^2}{\pi}\right]\pi\right)^{1/2}} |\operatorname{sen} t^2|\,dt \le \int_0^x |\operatorname{sen} t^2|\,dt \le \int_0^{\left(\left(\left[\frac{x^2}{\pi}\right]+1\right)\pi\right)^{1/2}} |\operatorname{sen} t^2|\,dt$$

(si osservi infatti che

$$\left(\left[\frac{x}{\pi}\right]^2 \pi\right)^{\frac{1}{2}} \le x \le \left(\left(\left[\frac{x^2}{\pi}\right]+1\right)\pi\right)^{\frac{1}{2}}$$

con $[x^2/\pi]$ parte intera di x^2/π). Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x |\operatorname{sen} t^2|\,dt = +\infty.$$

Il calcolo del valore esatto dell'integrale improprio in esame, richiede qualche strumento un po' più complesso. Esso, pertanto, viene omesso.

17) Lo studio dell'integrale proposto ricalca esattamente quello eseguito per l'integrale proposto nell'esercizio **16)**. Anche in questo caso il calcolo del valore esatto richiede qualche strumento un po' più complesso e pertanto verrà omesso.

4.2 Altri integrali impropri

Si studi l'esistenza dei seguenti integrali impropri calcolandone il valore esatto laddove segnalato con asterisco

1)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \cos x \, dx$

2)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen} x \, dx$

3)* $\int_0^{+\infty} \frac{\lg x}{1+x^2} \, dx$

4)* $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x} \, dx$

5)* $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{1+x}} \, dx$

6) $\int_1^2 \frac{1}{(\lg x)^\alpha} \, dx \quad \alpha>0$

7) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\lg x)^\alpha} \, dx \quad \alpha>0$

8) $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{x}-\operatorname{sen} x} \, dx$

9) $\int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^2 dx}{2+\operatorname{sen} x}$

10) $\int_0^1 \frac{x \lg x}{(1-x^2)^{3/2}} \, dx$

11)* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{2x}+1} \, dx$

12) $\int_1^{+\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) \cdot \operatorname{arctg} x \, dx$

13)* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3+x^2} \, dx$

14) $\int_0^{\pi} \frac{1}{1-\cos x} \, dx$

15)* $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

Soluzioni

1)* L'integrale esiste e vale $-\frac{\pi}{2} \lg 2$

2)* L'integrale esiste e vale $-\frac{\pi}{2} \lg 2$

3)* L'integrale esiste e vale 0

4)* L'integrale esiste e vale $\frac{\pi}{4}$

5)* L'integrale esiste e vale $\frac{4}{e}$

6) L'integrale esiste per $\alpha<1$; non esiste (e vale $+\infty$) per $\alpha\geq 1$

7) L'integrale non esiste (vale $+\infty$) per ogni α

8) L'integrale esiste

9) L'integrale esiste

10) L'integrale esiste

11) L'integrale esiste e vale $\frac{1}{2} \lg (1+e^2)-1$

12) L'integrale non esiste (vale $+\infty$)

13) L'integrale esiste e vale $1-\lg 2$

14) L'integrale non esiste

15) L'integrale esiste e vale π

Svolgimento

1)* Poiché

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \lg \cos x = -\infty$$

l'integrale può esistere solo impropriamente.
Per stabilire se l'integrale esiste, occore valutare l'andamento a $-\infty$ della funzione $\lg \cos x$. A tale scopo è utile confrontare la funzione in esame con $1/(x-\pi/2)^\alpha$.

Si ha allora

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\lg \cos x}{1/(\pi/2-x)^\alpha} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{(\pi/2-x)^\alpha}{(\cos x)^\alpha} \cdot (\cos x)^\alpha \lg \cos x.$$

Si osservi ora che, grazie al teorema di composizione dei limiti, si ha

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\cos x)^\alpha \lg \cos x = \lim_{y\to 0^+} y^\alpha \lg y$$

e, grazie all'esercizio **2)** del paragrafo 3.3 del capitolo 6, parte 1, tale limite vale 0 per ogni $\alpha>0$.
D'altro canto, grazie all'esercizio **4)** del paragrafo 3.2 del capitolo 6, parte 1, si ha

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{(\pi/2-x)}{\cos x} = +1$$

Pertanto per ogni $\alpha>0$ il limite in esame è nullo.
Ne segue allora subito che per $x>a$ con a sufficientemente vicino a $\pi/2$ si ha, ad esempio con $\alpha=1/2$

$$|\lg \cos x| < \frac{1}{(\pi/2-x)^{\frac{1}{2}}}$$

Si desume allora subito che $\lg \cos x$ è sommabile (e dunque integrabile) su $[a,\pi/2)$ $a>0$ grazie al criterio del confronto e all'esercizio **1)bis** del paragrafo 4.1.
Poiché per $a<x<\pi/2$

$$\int_0^x \lg \cos t\, dt = \int_0^a \lg \cos t\, dt + \int_a^x \lg \cos t\, dt$$

si ricava che l'integrale proposto esiste impropriamente.
Per calcolare il valore esatto si osservi che per $0<x<\pi/2$ grazie al cambiamento di variabili $t=\pi/2-\tau$

$$\int_0^x \lg \cos t\, dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} \lg \cos\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right) d\tau = \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen}\tau\, d\tau$$

e dunque al limite per $x\to(\pi/2)^-$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \cos x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen} x\, dx.$$

D'altro canto si ha

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}-\tau} \lg \operatorname{sen}2t\, dt = \int_x^{\frac{\pi}{2}-\tau} \lg 2 \operatorname{sen}t \cos t\, dt =$$

$$= \int_x^{\frac{\pi}{2}-\tau} \lg 2\, dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}-\tau} \lg \operatorname{sen}t\, dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}-\tau} \lg \cos t\, dt,$$

sicché al limite per $x\to 0^+$ e $\tau\to 0^+$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen}2x\, dx = \frac{\pi}{2} \lg 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen}x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \cos x\, dx$$

e quindi

$$(1) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen}2x\, dx = \frac{\pi}{2} \lg 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen}x\, dx.$$

Col cambiamento di variabile $2t=y$ si ha

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}-\tau} \lg \operatorname{sen}2t\, dt = \frac{1}{2}\int_{2x}^{\pi-2\tau} \lg \operatorname{sen}y\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{2x}^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen}y\, dy + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-2\tau} \lg \operatorname{sen}y\, dy.$$

D'altro canto col cambiamento di variabile $z=\pi-y$ si ha

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-2\tau} \lg \operatorname{sen}y\, dy = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\tau} \lg \operatorname{sen}z\, dz = \int_{2\tau}^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen}z\, dz.$$

Al limite per $x\to 0^+$ e $\tau\to 0^+$ si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen}2t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen}x\, dx$$

Si perviene così all'equazione, utilizzando la formula (1),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen}x\, dx = \frac{\pi}{2} \lg 2+2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen}x\, dx$$

e facilmente allora all'identità

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen}x\, dx = -\frac{\pi}{2} \lg 2$$

2) Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \lg \operatorname{sen}x = -\infty$$

l'integrale può esistere solo impropriamente.
Per stabilire se l'integrale esiste, occorrerà valutare l'andamento a $-\infty$ della funzione lg senx confrontandola ad esempio con funzioni del tipo $1/x^\alpha$
Si ha allora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\lg \operatorname{sen}x}{1/x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{(\operatorname{sen}x)^\alpha} (\operatorname{sen}x)^\alpha \lg \operatorname{sen}x$$

Si osservi che, grazie al teorema di composizione dei limiti, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}x)^\alpha \lg \operatorname{sen}x = \lim_{y\to 0^+} y^\alpha \lg y$$

e grazie all'esercizio **2)** del paragrafo 3.3 del capitolo 6, parte 1, tale limite vale 0 per ogni $\alpha>0$.
D'altro canto grazie al limite (f)(1) del paragrafo 2) del capitolo 6, parte 1, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}x}{x} = 1.$$

Pertanto per ogni $\alpha>0$ il limite in esame è nullo, sicché per $x<a$ con a sufficientemente vicino a 0 si ha ad esempio con $\alpha=1/2$

$$|\lg \operatorname{sen}x| < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Si desume allora che lg senx è sommabile (e quindi integrabile) su $(0, a]$ $a>0$ grazie al criterio del confronto e all'esercizio **1)** del paragrafo 4.1. Poiché per $0<x<a$

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen}t\, dt = \int_a^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen}t\, dt + \int_x^a \lg \operatorname{sen}t\, dt$$

si desume allora subito l'esistenza dell'integrale improprio. Per calcolare il valore esatto si osservi che, per $0<x<\pi/2$ grazie al cambiamento di variabile $t=\pi/2-\tau$, si ha

$$\int_0^x \lg \cos t\, dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} \lg \cos\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right) d\tau = \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen}\tau\, d\tau.$$

Al limite per $x\to\pi/2$ si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \cos x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen}x\, dx$$

e si può applicare il risultato dell'esercizio **2)***.

3)* Si osservi che $\lim_{x\to 0^+} \frac{\lg x}{1+x^2} = -\infty$. L'integrale proposto è dunque improprio sia perché l'integrando è illimitato intorno allo 0, sia perché l'intervallo di integrazione è illimitato. Per stabilirne l'esistenza, fissato un qualsiasi punto $c>0$ si tratterà di provare l'esistenza finita dei due limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \int_c^x \frac{\lg t}{1+t^2}\, dt \qquad \lim_{x\to 0^+} \int_x^c \frac{\lg t}{1+t^2}\, dt.$$

Si avrà allora

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lg x}{1+x^2}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_c^x \frac{\lg t}{1+t^2}\,dt + \lim_{x\to 0^+} \int_x^c \frac{\lg t}{1+t^2}\,dt.$$

Per quanto concerne il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \int_c^x \frac{\lg t}{1+t^2}\,dt,$$

si osservi innanzitutto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\,(2x)} = 0$$

(grazie all'Hôpital). La funzione integranda è pertanto un infinitesimo.
Si può provare allora a confrontarla con una funzione del tipo $1/x^\alpha$, $\alpha>0$. Si ha così per $\beta>0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{1+x^2}\Big/\frac{1}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha \lg x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha \lg x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^{2-\beta}}\,\frac{\lg x}{x^\beta}.$$

Poiché grazie al risultato dell'esercizio 3) del paragrafo 3.3 del capitolo 6, parte 1, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{x^\beta} = 0 \quad 0<\beta,$$

si desume allora che per $\alpha\leq 2-\beta$, il limite proposto è 0.
Scegliendo ad esempio $\beta=1/2$ e $\alpha=3/2$ si ricava allora subito che, per $x>a$ con a sufficientemente grande,

$$\frac{\lg x}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^{3/2}},$$

Grazie all'esercizio **2)** del paragrafo 4.1 si deduce, utilizzando il criterio di confronto, l'integrabilità in senso improprio di $(\lg x)/(1+x^2)$ su $[a,+\infty)$ e quindi su $[c,+\infty)$ grazie all'identità $(x>a>c)$

$$\int_c^x \frac{\lg t}{1+t^2}\,dt = \int_c^a \frac{\lg t}{1+t^2}\,dt + \int_a^x \frac{\lg t}{1+t^2}\,dt.$$

Per quanto concerne il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^c \frac{\lg t}{1+t^2}\,dt$$

si osservi che per ogni $\alpha>0$, grazie all'esercizio **2)** del paragrafo 3.3 del capitolo 6, parte 1

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\lg x}{(1+x^2)/x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha\,\frac{\lg x}{1+x^2} = 0.$$

Scegliendo quindi ad esempio per α il valore $1/2$, utilizzando l'esercizio **1)** del paragrafo 4.1 ed il criterio del confronto, dalla disuguaglianza, vera per $x<a$ con a sufficientemente vicino a 0,

$$\left|\frac{\lg x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{x^{1/2}}$$

si può desumere la sommabilità della funzione $(\lg x)/(1+x^2)$ su $]0,a]$.
Dall'identità $(c>a>x)$

$$\int_x^c \frac{\lg t}{1+t^2}\,dt = \int_a^c \frac{\lg t}{1+t^2}\,dt + \int_x^a \frac{\lg t}{1+t^2}\,dt$$

segue subito la sommabilità di $(\lg x)/(1+x^2)$ su $]0,c]$.
Per stabilire il valore dell'integrale si effettua il cambiamento di variabile $t=\operatorname{tg} y$. Si ha allora

$$y=\operatorname{arctg} t \qquad (\operatorname{tg} y)'=\frac{1}{\cos^2 y}=1+\operatorname{tg}^2 y$$

e dunque

$$\int_c^x \frac{\lg t}{1+t^2}\,dt = \int_{\operatorname{arctg} c}^{\operatorname{arctg} x} \frac{\lg \operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg}^2 y}\left(1+\operatorname{tg}^2 y\right) dy$$

$$= -\int_{\operatorname{arctg} c}^{\operatorname{arctg} x} \lg \cos y\,dy + \int_{\operatorname{arctg} c}^{\operatorname{arctg} x} \lg \operatorname{sen} y\,dy.$$

Dunque al limite per $x\to+\infty$ si ha

$$\int_c^{+\infty} \frac{\lg t}{1+t^2}\,dt = -\int_{\operatorname{arctg} c}^{\frac{\pi}{2}} \lg \cos y\,dy + \int_{\operatorname{arctg} c}^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen} y\,dy.$$

Analogamente

$$\int_0^c \frac{\lg t}{1+t^2}\,dt = -\int_0^{\operatorname{arctg} c} \lg \cos y\,dy + \int_0^{\operatorname{arctg} c} \lg \operatorname{sen} y\,dy.$$

Si puó quindi concludere che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lg x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen} y\,dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \cos y\,dy.$$

D'altro canto se $0<x$ con il cambiamento di variabile $y=\pi/2-z$ si ha

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \lg \cos y\,dy = -\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{0} \lg \cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right) dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \lg \operatorname{sen} z\,dz$$

sicché al limite per $x\to0^+$ si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \cos y\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \operatorname{sen} z\,dz.$$

4) Si osservi che

$$\int_1^x \frac{\operatorname{sen} t^2}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^x \frac{2t\operatorname{sen} t^2}{t^2}\,dt.$$

Integrando allora per parti scegliendo $2t\operatorname{sen}^2 t$ come fattore differenziale e osservando che

$$(-\cos t^2)' = 2t \operatorname{sen} t^2 \qquad \left(\frac{1}{t^2}\right)' = -\frac{2}{t^3},$$

si ottiene

$$\int_1^x \frac{\operatorname{sen} t^2}{t}\,dt = \left[-\frac{1}{2}\frac{\cos t^2}{t^2} - \int \frac{\cos t^2}{t^3}\,dt\right]_1^x =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\cos x^2}{x^2} + \frac{1}{2}\cos 1 - \int_1^x \frac{\cos t^2}{t^3}\,dt.$$

Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}\frac{\cos x^2}{x^2} = 0$$

e poiché dalla disuguaglianza

$$\left|\frac{\cos x^2}{x^3}\right| \le \frac{1}{x^3}$$

segue la sommabilità della funzione $\cos x^2/x^3$ su $[1,+\infty)$, esiste l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}\,dx.$$

Poiché per $x>1$

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t^2}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} t^2}{t}\,dt + \int_1^x \frac{\operatorname{sen} t^2}{t}\,dt$$

si ricava subito che esiste l'integrale improprio proposto. Per calcolarne il valore esatto si può effettuare il cambiamento di variabili $t^2=y$. Si ha allora $t=\sqrt{y}$ $(\sqrt{y})'=$ $=1/(2\sqrt{y}))$ e

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t^2}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen} y}{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy.$$

Poiché, grazie al risultato dell'esercizio **15)** del paragrafo 4.1 si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}$$

grazie al teorema sulla composizione dei limiti si avrà

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2}.$$

Si ottiene così

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} \frac{\operatorname{sen} t^2}{t}\, dt = \frac{\pi}{4}.$$

5)* Si osservi che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\sqrt{1+x}}}{1/x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+x}\right)^{2\alpha} e^{-\sqrt{1+x}} \frac{x^\alpha}{\left(\sqrt{1+x}\right)^{2\alpha}}$$

Grazie al risultato dell'esercizio **1)** del paragrafo 3.3 del capitolo 6, parte 1 e al teorema di composizione dei limiti, si ha per ogni α

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+x}\right)^{2\alpha} e^{-\sqrt{1+x}} = \lim_{y\to+\infty} y^{2\alpha} e^{-y} = 0.$$

D'altro canto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\left(\sqrt{1+x}\right)^{2\alpha}} = 1.$$

Pertanto per ogni $\alpha>0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\sqrt{1+x}}}{1/x^\alpha} = 0.$$

Scegliendo ad esempio $\alpha=2$ si ha per $x>a>0$ con a sufficientemente grande

$$e^{-\sqrt{1+x}} < \frac{1}{x^2}$$

e dunque l'integrale improprio esiste su $[a,+\infty)$ grazie al criterio del confronto e al risultato dell'esercizio **2)** del paragrafo 4.1. Dall'identità $(x>a>0)$

$$\int_0^x e^{-\sqrt{1+t}}\, dt = \int_0^a e^{-\sqrt{1+t}}\, dt + \int_a^x e^{-\sqrt{1+t}}\, dt$$

segue subito l'esistenza su tutto $[0,+\infty)$.
Per calcolarne il valore esatto si effettui il cambiamento di variabile $\sqrt{1+t}=\tau$. Si ha $t=\tau^2-1$ $(\tau^2-1)'=2\tau$

$$\int_0^x e^{-\sqrt{1+t}}\, dt = 2\int_1^{\sqrt{1+x}} \tau e^{-\tau}\, d\tau$$

Grazie all'esercizio **1)** del paragrafo 3.1 del capitolo precedente si ha

$$\int \tau e^{-\tau}\, d\tau = -e^{-\tau}(\tau+1) + C$$

e quindi

$$\int_0^x e^{-\sqrt{1+t}}\, dt = -2 e^{-\sqrt{1+x}}\left(\sqrt{1+x}+1\right) + \frac{4}{e}.$$

Poiché grazie all'esercizio **1)** del paragrafo 3.3 del capitolo 6, parte 1

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\sqrt{1+x}} \cdot \sqrt{1+x} = \lim_{y\to+\infty} e^{-y}\, y = 0$$

si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{1+x}}\, dx = \frac{4}{e}.$$

6) Si osservi che $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{\lg x}{x-1} = \lim\limits_{y\to0^+} \frac{\lg(1+y)}{y} = 1$ grazie al risultato esercizio **6)** del paragrafo 3.3 del capitolo 6, parte 1.
Di conseguenza per $1<x<a$ con a sufficientemente vicino a 1 si ha

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)^\alpha \le \frac{1}{(\lg x)^\alpha} \le 2\left(\frac{1}{x-1}\right)^\alpha.$$

Pertanto per il criterio del confronto essendo la funzione $1/(x-1)^\alpha$ sommabile o no sull'intervallo [1,2] a seconda che risulti $\alpha<1$ o $\alpha\geq 1$ (grazie al risultato dell'esercizio **1)bis** del paragrafo 4.1) anche la funzione $1|(\lg x)^\alpha$ è sommabile o no su [1,a] a seconda che risulti $\alpha<1$ o $\alpha\geq 1$. Essendo inoltre non negativa risulta anche integrabile o no su [1,a] e di conseguenza su [1,2] a seconda che risulti $\alpha<1$ o $\alpha\geq 1$.

7) Si osservi che grazie al risultato dell'esercizio **3)** del paragrafo 3.3 del capitolo 6, parte 1 qualsivoglia sia α si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x/(\lg x)^\alpha = \lim_{x\to+\infty} \left(x^{\frac{1}{\alpha}}/\lg x\right)^\alpha = +\infty.$$

Pertanto per x>a con a sufficientemente grande si ha

$$x > (\lg x)^\alpha \Rightarrow \frac{1}{x} < (\lg x)^{-\alpha}.$$

Poiché la funzione 1/x non è sommabile su $[1,+\infty)$ grazie all'esercizio **2)** del paragrafo 4.1, essa non è sommabile su $[a,+\infty)$ (a>1).
Grazie al criterio del confronto la funzione $1/(\lg x)^\alpha$ non sarà integrabile allora su $[a,+\infty)$ e di conseguenza su $[1,+\infty)$.

8) Si osservi che per x=0 $\sqrt{x}-\operatorname{sen}x=0$. D'altro canto per $x\neq 0$

$$(\sqrt{x}-\operatorname{sen}x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \cos x$$

e tale derivata è positiva per $x\in[0,1/4]$, sicché la funzione $\sqrt{x}-\operatorname{sen}x$ risulta sempre positiva su tale intervallo. Ne segue che $1/(\sqrt{x}-\operatorname{sen}x)$ è illimitato solo intorno allo zero. Si osservi ancora che

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{1-\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}}} = 1$$

in quanto

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\,\frac{\operatorname{sen}x}{x} = 0$$

grazie al limite (f)(1) del paragrafo 2 del capitolo 6, parte 1.
Si desume allora subito che per x<a con a sufficientemente prossima a 0 si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\operatorname{sen}x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Poiché la funzione $1/\sqrt{x}$ è sommabile su [0,1] grazie al risultato dell'esercizio **1)** del paragrafo 4.1, per il criterio del confronto anche $1/(\sqrt{x}-\operatorname{sen}x)$ sarà sommabile su [0,a] (a<1/4) e dunque integrabile, in senso improprio. L'integrabilità su [0,1/4] segue dall'ovvia relazione (x<a<1/4)

$$\int_x^{1/4} \frac{1}{\sqrt{t}-\operatorname{sen}t}\,dt = \int_a^{1/4} \frac{1}{\sqrt{t}-\operatorname{sen}t}\,dt + \int_x^a \frac{1}{\sqrt{t}-\operatorname{sen}t}\,dt.$$

9) La funzione $(\pi/2-\operatorname{arctg}x)^2/(2+\operatorname{sen}x)$ non negativa e infinitesima in $+\infty$: sarà opportuno valutarne l'ordine. Si osservi che per $\alpha<2$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\pi/2-\operatorname{arctg}x)^2}{(2+\operatorname{sen}x)/x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-2}\,\frac{[x\,(\pi/2-\operatorname{arctg}x)]^2}{2+\operatorname{sen}x} = 0$$

grazie all'esercizio **10)** del paragrafo 3.2 del capitolo 6, parte 1. Pertanto per x>a con a sufficientemente grande si avrà, scegliendo ad esempio $\alpha=3/2$

$$0 \leq \frac{(\pi/2-\operatorname{arctg}x)^2}{2+\operatorname{sen}x} < 2\,\frac{1}{x^{3/2}}.$$

Poiché la funzione $1/x^{3/2}$ è sommabile su $[1,+\infty)$ (esercizio **2)** del paragrafo 4.1) la funzione $(\pi/2-\operatorname{arctg}x)^2/(2+\operatorname{sen}x)$ sarà sommabile grazie al criterio del confronto su $[a,+\infty)$ e dunque integrabile in senso improprio.

L'integrabilità su $[0,+\infty)$ segue dalla relazione $(x>a)$

$$\int_0^x \frac{(\pi/2-\operatorname{arctg}t)^2}{2+\operatorname{sen}t}\,dt = \int_0^a \frac{(\pi/2-\operatorname{arctg}t)^2}{2+\operatorname{sen}t}\,dt + \int_a^x \frac{(\pi/2-\operatorname{arctg}t)^2}{2+\operatorname{sen}t}\,dt.$$

10) Si osservi innantitutto che

$$\lim_{x\to 0^+} x\,\lg x = 0$$

grazie all'esercizio **2)** del paragrafo 3.3 del capitolo 6, parte 1 mentre la funzione

$$x\to\frac{x\,\lg x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

è illimitata intorno a 1. Si tratta di valutare l'ordine di infinito. Si osservi che

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)^\alpha x\,\lg x}{(1-x^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x\,\lg x\,(1-x)^\alpha}{(1-x)^{3/2}\,(1+x)^{3/2}} =$$

$$= \lim_{y\to 0^+}\frac{\lg(1-y)}{y^{3/2-\alpha}}\,\frac{1-y}{(2-y)^{3/2}} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\lg 1-y}{-y}\,\frac{-1}{y^{3/2-\alpha-1}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

e quindi grazie al risultato dell'esercizio **6)** del paragrafo 3.3 del capitolo 6, parte 1 tale limite vale $(1/2)^{3/2}$ per $\alpha=1/2$.
Si ricava così per $x>a$ con a sufficientemente vicino a 1

$$\left|\frac{x\,\lg x}{(1-x^2)^{3/2}}\right| \le 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}\frac{1}{(1-x)^{1/2}}$$

Poiché la funzione $1/(\sqrt{1-x})$ è sommabile (esercizio **1)bis** di 4.1) la funzione

$$x\to\frac{x\lg x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

è sommabile su $[a,1]$. L'identità (vera per $x>a$)

$$\int_0^x \frac{t\,\lg t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt = \int_0^a \frac{t\,\lg t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt + \int_a^x \frac{t\,\lg t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt$$

assicura la sommabilità su $[0,1]$ e quindi l'integrabilità in senso improprio

11) Si osservi che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}+1}\Big/\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{2x}+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)^2 = 0$$

grazie al risultato dell'esercizio **1)** del paragrafo 3.3 del capitolo 6, parte 1.
Pertanto per $x>a$ con a sufficientemente grande si ha

$$0 \le \frac{1}{e^{2x}+1} \le \frac{1}{x^2}$$

e dunque grazie alla sommabilità di $1/x^2$ (esercizio **2)** del paragrafo 4.1) e al criterio del confronto si ha la sommabilità di $1/(e^{2x}+1)$ su $[a,+\infty)$ e quindi la sua integrabilità.
L'integrabilità su $[1,+\infty)$ segue dall'ovvia relazione $(x>a)$

$$\int_1^x \frac{1}{e^{2t}+1}\,dt = \int_1^a \frac{1}{e^{2t}+1}\,dt + \int_a^x \frac{1}{e^{2t}+1}\,dt.$$

Per il calcolo esatto si osservi che con il cambiamento di variabile $e^x=y$ si ha, essendo $x=\lg y$, $(\lg y)'=1/y$

$$\int \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx = \left(\int \frac{1}{y^2+1}\cdot\frac{1}{y}\,dy\right)_{y=e^x}.$$

Grazie al risultato dell'esercizio **3)** del paragrafo 5.2 del capitolo precedente si ha

$$\int \frac{1}{y^2+1}\cdot\frac{1}{y}\,dy = \lg\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + C.$$

Si ha pertanto

$$\int_1^x \frac{1}{e^{2t}+1}\,dt = \left[\lg\frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}}\right]_1^x = \lg\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} - 1 + \frac{1}{2}\lg(1+e^2).$$

Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \lg \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} = 0$$

si ha pertanto

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx = \frac{1}{2}\lg\left(1+e^2\right) - 1.$$

12) Per valutare l'ordine di infinitesimo per $x\to+\infty$ della funzione si osservi che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}y}{y}\operatorname{arctg}\frac{1}{y} = \frac{\pi}{2}$$

grazie al limite (f)(1) del paragrafo 2 del capitolo 6, parte 1.
Si ha pertanto, per $x>a$ con a sufficientemente grande:

$$\operatorname{sen}\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x > \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\frac{1}{x}$$

Grazie al criterio del confronto dalla non sommabilità di $1/x$ segue subito quella di $\operatorname{arctg}x \operatorname{sen} 1/x$.

13) La funzione integranda è infinitesima per $x\to+\infty$.
L'ordine rispetto all'infinito campione $1/x$ è chiaramente 3.
Si ha d'altro canto per ogni $x>0$

$$\frac{1}{x^3+x^2} < \frac{1}{x^3}$$

Dalla sommabilità di $1/x^3$ si deduce subito allora quella di $1/(x^3+x^2)$.
Per calcolare il valore esatto si può utilizzare l'esercizio 4) del paragrafo 5.2 del capitolo precedente. Si ha così

$$\int_1^x \frac{1}{t^3+t^2}\,dt = \left[\lg\frac{1+t}{t} - \frac{1}{t}\right]_1^x = \lg\frac{1+x}{x} - \frac{1}{x} - \lg 2+1.$$

Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \lg\frac{1+x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \lg\frac{1}{x} = 0$$

si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3+x^2}\,dx = 1-\lg 2$$

14) La funzione integranda è illimitata intorno a $x=0$. Per valutarne l'ordine di infinito si può utilizzare l'esercizio 2) del paragrafo 3.2 del capitolo 6, parte 1. Si ha così

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos x}\Big/\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x} = 2.$$

Si ha così per $0<x<a$ con $a>0$ sufficientemente vicino a 0

$$\frac{1}{1-\cos x} > \frac{1}{x^2}.$$

Poiché $1/x^2$ non è sommabile, anche la funzione $1/(1-\cos x)$ sarà non sommabile e poiché è non negativa, risulterà anche non integrabile.

15) La funzione integranda è illimitata sia intorno al punto $x=1$ che al punto $x=-1$. L'ordine di infinito è in entrambi i casi 1/2. Si avrà così per $-1<x<a$ con a sufficientemente vicino a -1 con c opportuna costante positiva

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < c\,\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}$$

e per $b<x<1$ con b sufficientemente vicino a 1 con d opportuna costante positiva

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < d\,\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}$$

Poiché

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{x\to 1} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \lim_{x\to -1} \int_x^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

e poiché le due stime trovate grazie al criterio del confronto e all'esercizio 1) del paragrafo 4.1 assicurano l'esistenza dei due limiti a secondo membro, si può dedurre che esiste l'integrale improprio.
Per calcolarne il valore, basterà osservare che

$$(\mathrm{arcsen}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lim_{x\to\pm 1} \mathrm{arcsen}x = \pm\frac{\pi}{2}$$

per dedurre

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi.$$

4.3 Sommabilità

Si studi la sommabilità delle seguenti funzioni negli intervalli indicati e al variare, laddove siano presenti, dei parametri α, β, γ.

1) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|x-1|}\,\sqrt[3]{|x+1|}}$ $[-2,2]$

2) $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^3\,\sqrt{|x-2|}}$ $[1,+\infty[$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x-1|}\,\sqrt[3]{|x+1|}}$ $[-2,+\infty[$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x\,\lg x}$ $[3,+\infty[$

5) $f(x) = \dfrac{e^{-1/x^2}}{x^2\,(x^2+1)}$ $[-1,+\infty[$

6) $\dfrac{1}{|x-1|^\alpha\,|x-2|^\beta}$ $[0,3]$

7) $\dfrac{x^\gamma}{|x-1|^\alpha\,|x-2|^\beta}$ $[0,+\infty[$

8) $\dfrac{\mathrm{sen}x}{x^\alpha\,|x-2|^\beta\,|x-3|^\gamma}$ $[0,4]$

9) $\dfrac{1}{x^\gamma\,|x+1|^\beta\,|x-2|^\alpha}$ $[0,+\infty[$

10) $f(x) = \dfrac{e^x-1}{|x|^\alpha\,|x+\pi|^\gamma\,|x-2|^{\sqrt{2}}}$ $]-\infty,0]$

11) $f(x) = \dfrac{1+|x|^{\sqrt{2}}}{|x-3|^\alpha\,|x+2|^{\gamma+2}}$ $]-\infty,+\infty[$

12) $f(x) = \dfrac{(1-\cos x)^\pi}{|\mathrm{sen}x|^\gamma\,|1+x|^\beta\,|x-2|^\alpha}$ $[-2,3]$

13) $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha\,\log x}$ $[3,+\infty[$

Soluzioni

1) sommabile
2) sommabile
3) non sommabile
4) non sommabile
5) sommabile
6) sommabile $\Leftrightarrow$ $\alpha<1$, $\beta<1$
7) sommabile $\Leftrightarrow$ $\alpha<1$, $\beta<1$, $\gamma>-1$, $\alpha+\beta-\gamma>1$
8) sommabile $\Leftrightarrow$ $\alpha<2$, $\beta<1$, $\gamma<1$
9) sommabile $\Leftrightarrow$ $\alpha<1$, $\gamma<1$, $\alpha+\beta+\gamma>1$
10) sommabile $\Leftrightarrow$ $\alpha<2$, $\gamma<1$
11) sommabile $\Leftrightarrow$ $\alpha<1$, $\gamma<-1$, $\alpha+\beta+\gamma>-1+\sqrt{2}$
12) sommabile $\Leftrightarrow$ $\alpha<1$, $\beta<1$, $\gamma<1+2\pi$
13) sommabile $\Leftrightarrow$ $\alpha>1$

1) La funzione data è sommabile in $[-2,2]$ in quanto presenta in tale intervallo due punti di discontinuità -1 ed 1 e nel primo ha un infinito di ordine $1/3$ (<1) e nel secondo di ordine $1/2$ (<1).

2) Nell'intervallo $[1,+\infty[$ la funzione data ha il solo punto di discontinuità $x=2$: poiché in tale punto ha un infinito di ordine $1/2$ (<1) essa è sommabile in ogni intervallo compatto $[1,b]$. D'altro canto $|f(x)|$ all'infinito è infinitesima di ordine $3+1/2-1=5/2>1$ e quindi è sommabile in $[b,+\infty[$. Quindi $f(x)$ è sommabile in $[1,+\infty[$.

3) Nell'intervallo considerato cadono due punti d'infinito di $|f(x)|$: -1 di ordine $1/3$ (<1) ed 1 di ordine $\frac{1}{2}$ (<1). Quindi $f(x)$ è sommabile in ogni intervallo $[-2,b]$ con $b>1$. D'altro canto $|f(x)|$ all'infinito è infinitesima di ordine $1/2+1/3-1/2=1/3<1$ e quindi non e sommabile in $[b,+\infty[$. Pertanto $f(x)$ non è sommabile in $[-2,+\infty[$.

4) La funzione è continua su tutto l'intervallo $[3,+\infty[$ e pertanto dobbiamo occuparci solo del suo comportamento all'infinito.
Pur essendo $|f(x)|$ all'infinito infinitesima di ordine superiore ad $1/|x|$ (e quindi infinitesima di ordine maggiore di 1) non esiste alcun $\alpha>1$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} |x|^\alpha |f(x)| = \ell \in [0,+\infty[$$

Quindi non è utilizzabile il criterio dato nel paragrafo 3.
D'altro canto

$$\lim_{p\to+\infty} \int_3^p \frac{1}{x\ \lg x}\,dx = \lim_{p\to+\infty} [\lg\ \lg p - \lg\ \lg 3] = +\infty$$

e quindi $f(x)$ non è sommabile.

5) La funzione data presenta in $x=0$ una discontinuità eliminabile avendosi

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Quindi è sommabile in ogni intervallo $[-1,b]$.
D'altro canto all'infinito è infinitesima di ordine $4>1$ e quindi è sommabile su $[b,+\infty[$. Pertanto $f(x)$ è sommabile su $[-1,+\infty[$.

6) Si osservi che la funzione presenta al più due punti di discontinuità 1 e 2.
Per garantire la sommabilità di $f(x)$ basterà supporre $\alpha<1$ e $\beta<1$. In tal caso infatti nel punto 1 $|f(x)|$ è continua se $\alpha\leq 0$ od ha un infinito di ordine $\alpha<1$ se $\alpha>0$.

Analogamente si ragiona nel punto 2.
Ovviamente se è $\alpha\geq 1$ o $\beta\geq 1$ $f(x)$ non è sommabile.

7) Ragionando come nell'esercizio **6)** si osservi che al più la funzione presenterà una discontinuità nei tre punti 0, 1, 2.
Quindi:
$f(x)$ sommabile in $[0,b]$, con $b>2 \Leftrightarrow \alpha<1,\ \beta<1,\ -\gamma<1$.
D'altro canto all'infinito $|f(x)|$ si comporta come $1/\left(|x|^{\alpha+\beta-\gamma}\right)$ e quindi:
$f(x)$ sommabile in $[b,+\infty[\Leftrightarrow \beta+\alpha-\gamma>1$
In definitiva
$f(x)$ sommabile in $[0,+\infty[\Leftrightarrow \alpha<1,\ \beta<1, -\gamma<1\ \beta+\alpha-\gamma>1$.

8) Si osservi che la funzione presenta al più tre punti di discontinuità nei punti 0, 2, 3.
Si ha procedendo come nell'esercizio **6)**
$f(x)$ sommabile $\Leftrightarrow \alpha<2,\ \beta<1,\ \gamma<1$.
Per quanto attiene al comportamento di $|f(x)|$ in 0 si osservi esplicitamente che avendosi

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\mathrm{sen}x|}{|x|^\alpha\ |x-2|^\beta\ |x-3|^\gamma} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left|\frac{\mathrm{sen}x}{x}\right| \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|^{\alpha-1}} \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x-2|^\beta} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x-3|^\gamma} =$$

$$= \frac{1}{2^\beta}\ \frac{1}{3^\gamma} \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|^{\alpha-1}}$$

tale comportamento dipende da $\alpha-1$ e quindi ne discende la condizione $\alpha-1<1$.

9) La funzione in $[0,+\infty[$ presenta al più due punti di discontinuità 0 e 2. Si osservi esplicitamente che $-1 \notin [0,+\infty[$.
Pertanto detto b un numero reale maggiore di 2 si ha $f(x)$ sommabile in $[0,b] \Leftrightarrow \gamma<1,\ \alpha<1$.
La funzione, d'altro canto, si comporta all'infinito come $1/\left(|x|^{\alpha+\beta+\gamma}\right)$; ne segue
$f(x)$ sommabile in $[b,+\infty[\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma>1$.
Quindi in definitiva
$f(x)$ sommabile su $[0,+\infty[\Leftrightarrow \gamma<1,\ \alpha<1,\ \alpha+\beta+\gamma>1$.

10) In $]-\infty,0]$ f(x) ha al più due punti di discontinuità: 0 e $-\pi$. Detto b un numero reale minore di $-\pi$ si ha procedendo come nell'esercizio 9) tenendo conto che

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

f(x) sommabile in $[b,0]\Leftrightarrow \alpha<2,\ \gamma<1$.

Al tendere di x a $-\infty$ la funzione si comporta come $e^x/\left(|x|^{\alpha+\gamma+\sqrt{2}}\right)$ che è infinitesima di ordine infinitamente grande.
Quindi
f(x) è sommabile in $]-\infty,\beta]$ $\forall\alpha,\gamma\in R$.
Ne segue:
f(x) sommabile in $]-\infty,0[\ \Leftrightarrow \alpha<2,\ \gamma<1$.

11) Procedendo come negli esercizi precedenti si ha che f(x) è sommabile in $[a,b]$ con $a<-2$ e $b>3$ se e solo se $\alpha<1,\ \gamma+2<1$.
Al tendere di x a $\pm\infty$ la funzione si comporta come $1/\left(|x|^{\alpha+\gamma+2-\sqrt{2}}\right)$ e quindi essa è sommabile in $]\infty,a]$ ed in $[b,+\infty[$ se e solo se è $\alpha+\gamma+2-\sqrt{2}>1$.

12) Essendo $[-2,3]$ un intervallo compatto bisogna occuparsi solo del "comportamento al finito" di f(x).
Gli eventuali punti di discontinuità di f(x) sono -1,0,2.
Ricordando che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$$

si ha che la funzione in 0 va come $1/\left(|x|^{\gamma-2\pi}\right)$ inoltre in -1 e 2 la funzione si comporta come $1/|1+x|^{\beta}$ ed $1/|x-2|^{\alpha}$. Quindi f(x) sommabile $\Leftrightarrow \gamma-2\pi<1,\ \beta<1,\ \alpha<1$.

13) Poiché la funzione è continua su $[3,+\infty[$ dobbiamo occuparci solo del suo comportamento all'infinito.
Ricordando (cfr. esercizio 4)) che $1/x\log x$ non è sommabile si ha:

$$\alpha\le 1\ \Rightarrow\ \frac{1}{x^{\alpha}\log x}\ge\frac{1}{x\log x}\ \Rightarrow\ f(x)\ \text{non sommabile.}$$

Sia $\alpha>1$ e sia $\beta\in]1,\alpha[$; si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}|x|^{\beta}|f(x)|=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|^{\alpha-\beta}\log|x|}=0$$

poiché $\alpha-\beta>0$ e

$$\lim_{x\to+\infty}|x|^{\alpha-\beta}\log|x|=+\infty.$$

Allora per $x\in[a,+\infty[$ con a abbastanza grande si ha

$$|f(x)|\le\frac{1}{|x|^{\beta}};$$

poiché è $\beta>1$, $1/|x|^{\beta}$ è sommabile in $[a,+\infty[$ e quindi anche f(x) è tale. Ne segue f(x) sommabile su $[3,+\infty[$.

5. Nota introduttiva al calcolo delle aree

Siano f e g due funzioni reali definite entrambe su un intervallo $[a,b]$ integrabili secondo Riemann e verificanti la diseguaglianza

$$f(x)\ge g(x)\qquad \forall x\in[a,b]$$

allora all'integrale definito

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

può darsi l'interpretazione di area dell'insieme del piano A così determinato

$$A=\{(x,y): a\le x\le b\ \ g(x)\le y\le f(x)\}$$

Un insieme di tale tipo sarà detto insieme (o dominio) normale.

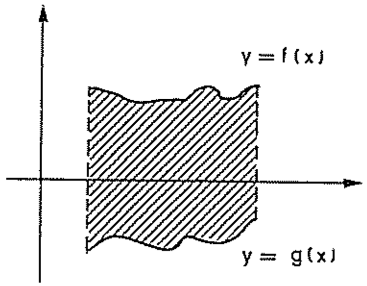


Figura 4.1

L'area di un insieme A viene spesso detta misura dell'insieme A e denotata col simbolo misA.

Sia ad esempio A il dominio normale definito dalle limitazioni

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases}$$

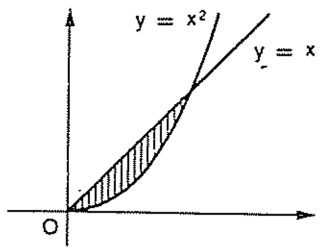


Figura 4.2

Si ha:

$$\text{area di A} = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Nel caso in cui $g(x)=0$ l'insieme normale prende il nome di rettangoloide di base $[a,b]$ relativo ad $f(x)$ e l'area di tale insieme è data da

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Così l'area del rettangoloide di base $[0,1]$ relativo alla funzione $f(x)=x^2$ è data da

$$\int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

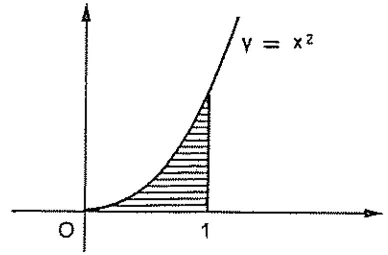


Figura 4.3

Sia d'altro canto A un insieme unione di un numero finito di insiemi $A_1 \dots A_k$ normali e supponiamo che tali insiemi presi a due a due non abbiano punti interni in comune (ricordiamo che un punto si dice interno ad un insieme di R^2 se esiste tutto un cerchio di raggio positivo e di centro nel punto, contenuto nell'insieme).

In tali condizioni si può assumere come area di A la somma delle aree degli insiemi $A_1 \dots A_k$.

In simboli avremo:

$$\text{misA} = \text{misA}_1 + \dots + \text{misA}_k$$

Analogamente se $A=A_1-A_2$ con A_1 e A_2 entrambi normali e $A_2 \subseteq A_1$ l'area di A sarà la differenza delle aree di A_1 e A_2.

In simboli

$$misA = misA_1 - misA_2$$

Siano ora f e g due funzioni reali definite su un intervallo illimitato I e risulti

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in I$$

Se esiste l'integrale improprio esteso a I di $f(x)-g(x)$ esso lo si puó assumere ancora come l'area dell'insieme illimitato del piano cosi determinato:

$$A = \{(x,y): x \in I \quad g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

che sará di area finita.

Se l'integrale improprio di $f(x)-g(x)$ esteso a I vale $+\infty$, si dirá invece che l'insieme ha area infinita

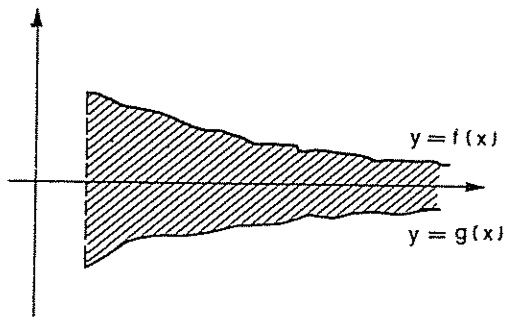


Figura 4.4

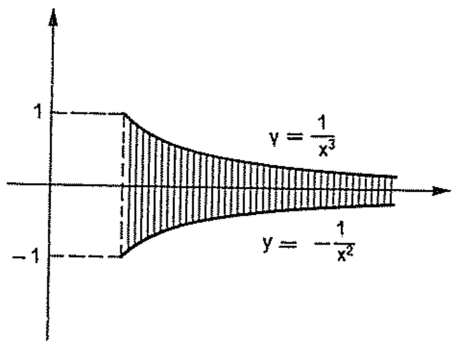


Figura 4.5

Cosi ad esempio l'area dell'insieme definito dalle limitazioni

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq +\infty \\ -\frac{1}{x^2} \leq y \leq \frac{1}{x^3} \end{cases}$$

é data da

$$\int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{x^3} - \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] dx = \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right] dx = \left[-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = \frac{3}{2};$$

Analogamente se f e g sono tali che la loro differenza é integrabile impropriamente su un intervallo limitato $[a,b]$ e

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

l'integrale improprio

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

puó essere interpretato come l'area dell'insieme A (illimitato) cosi definito

$$A = \{(x,y): x \in [a,b] \quad g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

che sará allora detto di area finita.

Se l'integrale improprio di f−g esteso ad $[a,b]$ vale $+\infty$, si dirá invece che l'insieme ha area infinita

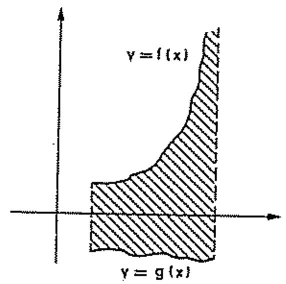


Figura 4.6

Ad esempio l'area dell'insieme definito dalle limitazioni

$$\begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ x^2\leq y\leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

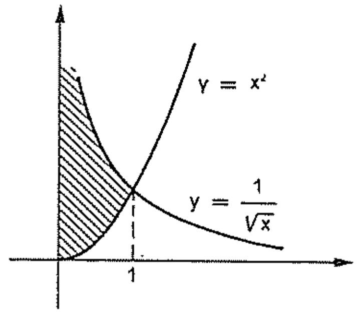


Figura 4.7

è data da

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{x}} - x^2\right] dx = \left[2\sqrt{x}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{3}$$

6. Calcolo di aree

6.1 Calcolo di alcune aree notevoli

Si calcolino le aree dei seguenti insiemi

1) $A=\{(x,y)\ \ 0\leq x\leq a,\ x^2+y^2\leq r\}\ \ r>0,\ 0\leq a\leq r$

2) $A=\{(x,y)\ \ 0\leq x\leq c\ \ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1\}\ \ 0<c<a$

3) $A=\{(x,y)\ \ a<x\leq b\ \ 0\leq xy\leq 1\}\ \ 0\leq a<b$

4) $A=\{(x,y)\ \ 0\leq x\leq b\ \ y^2-2ax\leq 0\}\ \ a>0,\ b>0$

5) $A=\{(x,y)\ \ a\leq x\leq c\ \ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\geq 1\}\ \ a<c$

6) $A=\{(x,y)\ \ a\leq x<+\infty\ \ 0\leq y<\dfrac{1}{x^2}\}\ \ 0<a$

Soluzioni

1) $\text{mis } A = a\sqrt{r^2-a^2} + r^2 \operatorname{arcsen}\dfrac{a}{r}$

2) $\text{mis } A = \dfrac{b}{a}\, c\sqrt{a^2-c^2} + ab \operatorname{arcsen}\dfrac{c}{a}$

3) $\text{mis } A = \lg b - \lg a$

4) $\text{mis } A = \dfrac{4}{3}\, b\sqrt{2ab}$

5) $\text{mis } A = bc\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}-1} - b\lg\left(c+\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}-1}\right) + b\lg a$

6) $\text{mis } A = \dfrac{1}{a}$

Svolgimenti

1) Si osservi che l'insieme A, è la porzione di cerchio di raggio r e centro nell'origine compreso tra le rette di equazione x=0 e x=a.

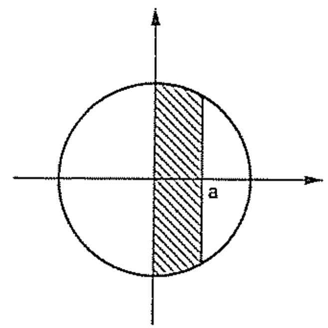


Figura 4.8

Tale insieme può considerarsi normale. Esso può infatti scriversi sotto la forma

$$A=\{(x,y)\ 0\le x\le a,\ -\sqrt{r^2-x^2}\le y\le \sqrt{r^2-x^2}\}$$

La sua area è pertanto data dalla formula

$$\text{mis } A=\int_0^a \left(\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{r^2-x^2}\right) dx = 2\int_0^a \sqrt{r^2-x^2}\ dx$$

L'integrale a secondo membro può essere calcolato grazie all'esercizio **21)** del paragrafo 3.1 del capitolo precedente. Si ha

$$\text{mis } A=2\int_0^a \sqrt{r^2-x^2}\ dx = 2\left[\frac{1}{2}(x)\sqrt{r^2-x^2}+\frac{4r^2}{8}\text{ arcsen }\frac{2x}{\sqrt{4r^2}}\right]_0^a$$

$$= a\sqrt{r^2-a^2}+r^2\text{ arcsen }\frac{a}{r}$$

Per a=2, si ha ovviamente mis $A=\frac{\pi}{2}r^2$.

Si osservi ancora che detta $S(x_0)$ la porzione di piano coincidente con l'insieme A relativo al cerchio di raggio unitario e al valore $a=x_0$, privato del triangolo di vertice

$$O=(0,0)\quad P=\left(x_0,\sqrt{1-x_0^2}\right)\quad V=\left(x_0,-\sqrt{1-x_0^2}\right)$$

L'insieme $S(x_0)$ risulta unione di due insiemi normali. La sua area sarà data della formula

$$\text{mis } S(x_0)=\left(\text{arcsen } x_0+x_0\sqrt{1-x_0^2}\right)-x_0\sqrt{1-x_0^2}=\text{arcsen } x_0$$

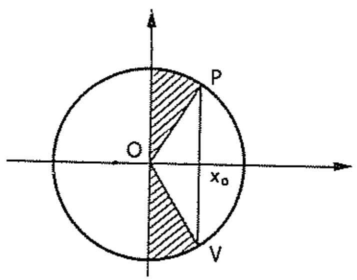


Figura 4.9

(Si sottragga all'area di A quella del triangolo in questione).
Si ottiene così un'interpretazione in termini di aree delle funzioni arcsen x.

2) Si osservi che l'insieme A, è la porzione di ellisse di semiassi a e b, di centro nell'origine e assi coincidenti con l'asse x e l'asse y, compresa tra le rette di equazione x=0 e x=c.
Tale insieme può considerarsi normale.
Esso può infatti scriversi sotto la forma.

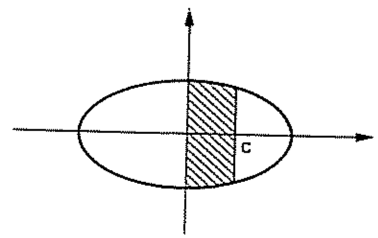


Figura 4.10

$$A=\left\{(x,y)\ 0\le x\le c,\ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\le y\le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right\}$$

La sua area è pertanto data dalla formula

$$\text{mis } A=\int_0^c \left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right) dx =$$

$$=2b\int_0^c \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ dx$$

L'integrale a secondo membro può essere calcolato grazie all'esercizio **21)** del paragrafo 3.1 del capitolo precedente. Si ha

$$\text{mis } A=\frac{2b}{a}\int_0^c \sqrt{a^2-x^2}\ dx = \frac{2b}{a}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{4a^2}{8}\text{ arcsen }\frac{2x}{\sqrt{4a^2}}\right]_0^c$$

$$=\frac{b}{a}c\sqrt{a^2-c^2}+ba\text{ arcsen }\frac{c}{a}$$

Per c=a si ha mis A = $\frac{\pi}{2}$ ab.

Ovviamente il doppio di tale misura sarà l'area dell'ellisse

3) L'insieme A è la porzione di piano compresa tra l'iperbole equilatera di equazione xy=1, l'asse della x e le rette di equazione x=a, x=b.

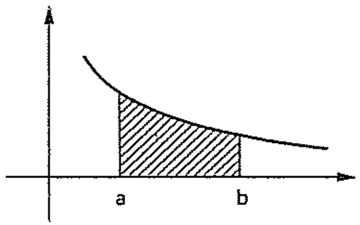


Figura 4.11

Tale insieme può considerarsi normale esso può infatti scriversi sotto la forma

$$A=\left\{(x,y)\ a\le x\le b\ \ 0\le y\le \frac{1}{x}\right\}$$

La sua area è data allora dalla formula

$$\text{mis } A=\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = [\lg x]_a^b = \lg b-\lg a$$

Si osservi che se a=0 allora si ha

$$\text{mis } A= \lim_{x\to 0^+} \int_x^b \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0^+} (\lg b-\lg x) = +\infty$$

Analogamente se a>0 e b=+∞ si avrà

$$\text{mis } A= \lim_{x\to +\infty} \int_a^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to +\infty} (\lg x-\lg a) = +\infty$$

4) Si osservi che l'insieme A e la porzione di piano compresa tra la parabola di equazione $y^2=2ax$ e la retta x=b.

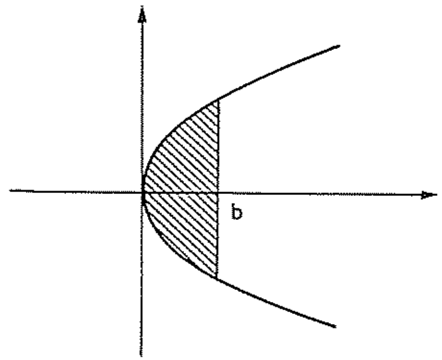


Figura 4.12

Tale insieme può considerarsi normale; esso può infatti scriversi sotto la forma

$$A = \{(x,y):\ 0\le x\le b\ \ -\sqrt{2ax}\ \le y\le \sqrt{2ax}\}$$

La sua area è data allora dalla formula

$$\text{mis } A = \int_0^b (\sqrt{2ax}+\sqrt{2ax})\,dx = 2\sqrt{2a}\int_0^b \sqrt{x}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{2a}\left[\frac{2}{3}\ x^{\frac{3}{2}}\right]_0^b = \frac{4}{3}\ b\cdot\sqrt{2ab}$$

5) L'insieme A rappresenta la porzione di piano compresa tra l'iperbole di equazione $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ e la retta di equazione x=c.
L'insieme è ovviamente normale. Esso può infatti scriversi sotto la forma

$$A=\left\{(x,y): a\le x\le c,\ \ -b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\le y\le b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right\}$$

La sua area è pertanto data dalla formula

$$\text{mis } A=\int_a^c \left(b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}+b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right) dx = 2b\int_a^c \sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\, dx$$

Grazie all'esercizio **20)** del paragrafo 3.1 del capitolo precedente si ha.

$$\text{mis } A= 2b\left[\frac{1}{2}\, x\cdot\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}-\frac{4}{8}\,\lg\left(x+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)\right]_a^c =$$

$$= cb\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1} - b\lg\left(c+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}\right) + b\lg a$$

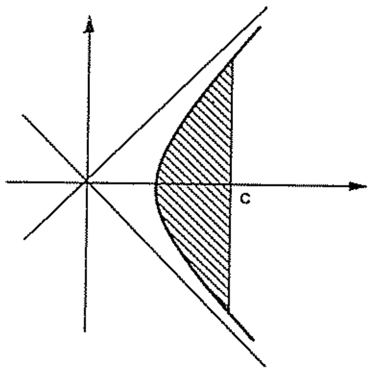


Figura 4.13

Si osservi ora che se $a=b=1$ la formula dà

$$\text{mis } A = c\sqrt{c^2-1} - \lg\left(c+\sqrt{c^2-1}\right)$$

Si ricordi ora che dicesi settore iperbolico $S(x_0)$ relativo all'iperbole $x^2-y^2=1$ e di altezza x_0 la porzione di piano coincidente col triangolo di vertici

$$O=(0,0)\quad P=\left(x_0,\ \sqrt{x_0^2-1}\right),\quad V=\left(x_0, -\sqrt{x_0^2-1}\right)$$

e non appartenente all'insieme A (per $c=x_0$) (fig. 4.14)

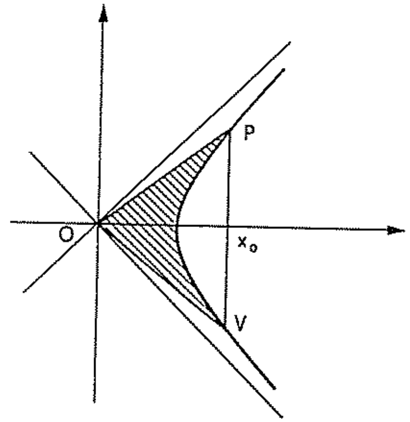


Figura 4.14

Si osservi che, per quanto stabilito

$$\text{mis } S(x_0) = x_0\sqrt{x_0^2-1} - x_0\sqrt{x_0^2-1} + \lg\left(x_0+\sqrt{x_0^2-1}\right)$$
$$= \lg\left(x_0+\sqrt{x_0^2-1}\right)$$

Si ottiene così un'interpretazione in termini di aree della funzione cosh$x$.

6) L'insieme A è ovviamente normale e illimitato.

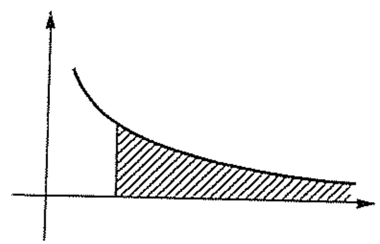


Figura 4.15

Per la sua area varrà allora la formula:

$$\text{mis } A = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{a}\right] = \frac{1}{a}$$

in quanto ovviamente $(-1/x)' = 1/x^2$.

6.2 Ulteriori calcoli di aree

Si calcolino le aree dei seguenti insiemi

1) $A=\{(x,y):\ 0\le x\le\pi,\ 0\le y\le \text{sen}x\}$
2) $A=\{(x,y):\ -1\le x\le 2,\ x\le y\le e^x\}$
3) $A=\{(x,y):\ 0\le x\le e,\ 0\le y\le \lg x\}$
4) $A=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le \sqrt{x}\}$
5) $A=\left\{(x,y):\ \frac{\pi}{4}\le x\le\pi,\ \cos x\le y\le \text{sen}x\right\}$
6) $A=\{(x,y):\ 2\le x<+\infty,\ 0\le y\le x\lg x\}$
7) $A=\left\{(x,y):\ 1\le x\le 2,\ 0\le y\le \frac{1}{(x-1)^2}\right\}$

Soluzioni

1) mis $A = 1$
2) mis $A = e^2 - \frac{1}{e} - \frac{3}{2}$
3) mis $A = 2$
4) mis $A = \frac{1}{3}$
5) mis $A = 1+\sqrt{2}$
6) mis $A = +\infty$
7) mis $A = +\infty$

Svolgimento

1) A rappresenta il rettangoloide di base $[0,\pi]$ relativo a senx, pertanto

$$\text{mis } A = \int_0^{\pi} \text{sen}x = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$$

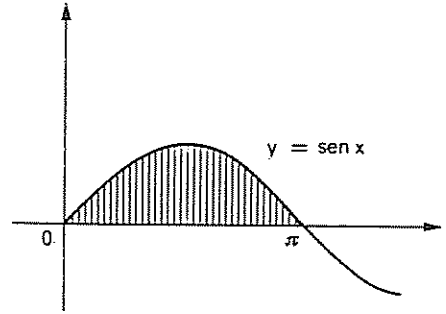


Figura 4.16

2) A rappresenta la parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni x ed e^x e dalle rette $x=-1$, $x=2$; poichè l'insieme A è normale si ha

$$\text{mis } A = \int_{-1}^{2} [e^x - x]\, dx =$$

$$= \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = e^2 - \frac{1}{e} - 2 + \frac{1}{2} = e^2 - \frac{1}{e} - \frac{3}{2}$$

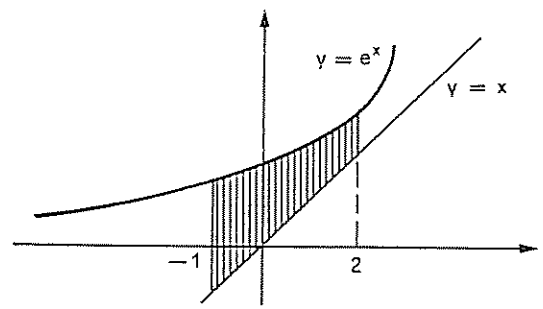


Figura 4.17

3) A rappresenta il rettangoloide di base [0,e] relativo alla funzione $|\log x|$ che è integrabile su [0,e].

$$\text{mis } A = \int_0^e |\log x|\, dx = -\int_0^1 \log x\, dx + \int_1^e \log x\, dx =$$
$$[x - x\log x]_0^1 + [x\log x - x]_1^e = 1+1=2$$

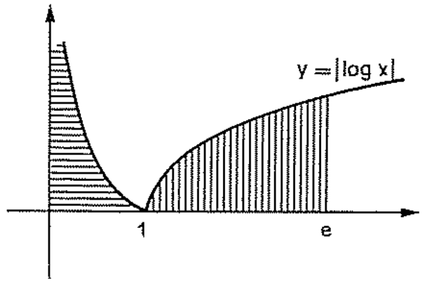


Figura 4.18

4) A è un dominio normale; pertanto

$$\text{mis } A = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right] dx = \left[\frac{2}{3}\, x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

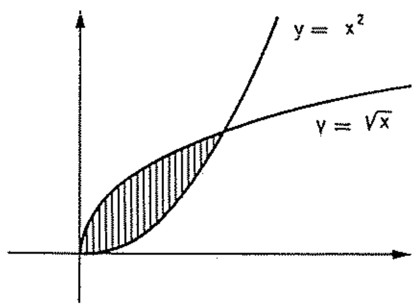


Figura 4.19

5) A è il dominio normale indicato in figura: pertanto

$$\text{mis } A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\text{sen}x - \cos x)\, dx = [-\cos x - \text{sen}x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = 1+\sqrt{2}$$

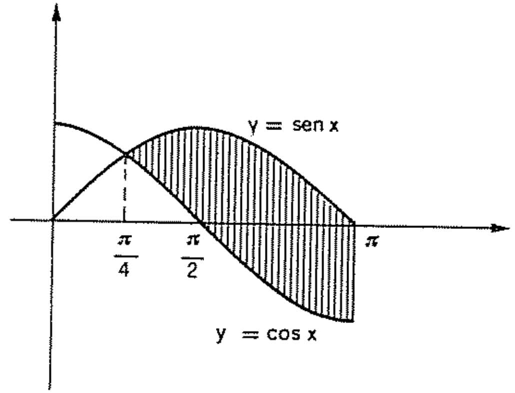


Figura 4.20

6) L'insieme A è quello indicato in figura, poichè la funzione $x\log x$ non è integrabile su [2,+∞[(ed è ivi non negativa) si ha

$$\text{mis } A = \int_2^{+\infty} x \log x\, dx = +\infty$$

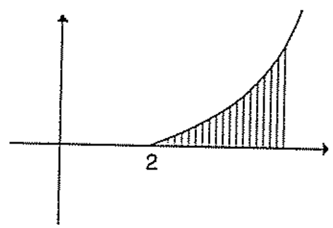


Figura 4.21

7) L'insieme A è il rettangoloide di base $[1,2]$ relativo alla funzione $\frac{1}{(x-1)^2}$ che non è sommabile

$$\operatorname{mis} A = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x-1}\right]_1^2 = +\infty$$

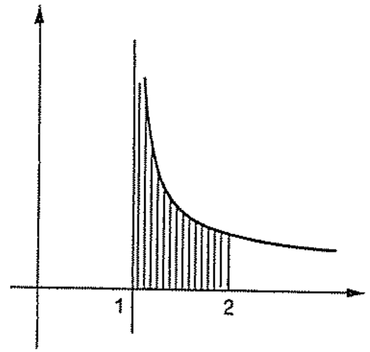


Figura 4.22

7. Ulteriori applicazioni

7.1 Derivate di funzioni integrali

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

1) $\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 \log(|t|+1)\, dt$ 2) $\int_1^x \operatorname{sen}^8 t \cos^6 t\, dt$

3) $\int_x^3 e^{(1+t^4)}\, dt$ 4) $\int_0^{x^4} \operatorname{sen}^2 t\, e^t\, dt$

5) $\int_{-1}^x \sqrt{1-t^2} \operatorname{sen} t\, dt$ 6) $\int_{x^2}^{e^x} (1+\cos t)\sqrt{1+t^2}\, dt$

Risposte

1) $(\operatorname{arctg} x)^2 (\log|x|+1)$
2) $\operatorname{sen}^8 x \cos^6 x \quad x\in R$
3) $-e^{1+x^4}, \quad x\in R$
4) $4x^3 e^{x^4} (\operatorname{sen} x^4)^2, \quad x\in R$
5) $\sqrt{1-x^2} \operatorname{sen} x, \quad x\in[-1,1]$
6) $e^x \sqrt{1+e^{2x}} (1+\cos e^x) - 2x \sqrt{1+x^4} (1+\cos x^2)$

Svolgimento

1) La funzione data è una funzione integrale; ricordando che se $f(x)$ è continua in un intervallo I per ogni $x_0\in I$ si ha

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^x f(t)\, dt = f(x), \quad \forall x\in I$$

ne segue per ogni $x\in R$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 \log(|t|+1)\, dt = (\operatorname{arctg} x)^2 (\log|x|+1)$$

2) Procedendo come in 1) si ha

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \operatorname{sen}^8 t \cos^6 t\, dt = \operatorname{sen}^8 x \cos^6 x, \quad \forall x\in R$$

3) Osservato che

$$\int_x^3 e^{1+t^4}\, dt = -\int_3^x e^{1+t^4}\, dt$$

si ha procedendo come in 1)

$$\frac{d}{dx}\int_x^3 e^{1+t^4}\, dt = -e^{1+x^4} \quad \forall x\in R$$

4) La funzione data è la funzione composta da

$$F(y) = \int_0^y \operatorname{sen}^2 t \; e^t \, dt$$

e

$$\varphi(x) = x^4.$$

Pertanto dal teorema di derivazione delle funzioni composte segue

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^4} \operatorname{sen}^2 t \; e^t \, dt = (\operatorname{sen} x^4)^2 \, e^{x^4} \, (4x^3), \quad \forall x \in R$$

5) La funzione data è definita in $[-1,1]$ ed è ivi derivabile poiché è una funzione integrale di una funzione continua. Pertanto

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x} \sqrt{1-t^2} \, \operatorname{sen} t \, dt = \sqrt{1-x^2} \, \operatorname{sen} x, \quad \forall x \in [-1,1]$$

6) Si osservi che

$$\int_{x^2}^{e^x} (1+\cos t) \sqrt{1+t^2} \, dt = \int_0^{e^x} (1+\cos t) \sqrt{1+t^2} \, dt - \int_0^{x^2} (1+\cos t) \sqrt{1+t^2} \, dt$$

Dalla regola di derivazione delle funzioni composte, ragionando su ciascuno degli integrali a secondo membro come fatto nell'esercizio **4)**, segue che la derivata cercata è per ogni $x \in R$

$$(1+\cos e^x) \sqrt{1+e^{2x}} \cdot (e^x) - (1+\cos x^2) \sqrt{1+x^4} \cdot 2x$$

7.2 Limiti di funzioni integrali

Calcolare i seguenti limiti di funzioni integrali

1) $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}\frac{1}{1+t^2}\,dt \Big/ x$ 2) $\lim_{x\to 0} \int_0^x (1-\cos t)^2 \cdot \operatorname{sen}^2 dt \Big/ x^7$

3) $\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1+|\cos t|}{\log t}\,dt \Big/ x\sqrt{x}$

4) $\lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{1}{(t-1)^2\,(t^2+4)}\,dt \Big/ (x-1)^2$

5) $\lim_{x\to 0^-} x \cdot \int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2\,(t^2+4)}\,|\cos t|\,dt$ 6) $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x te^{-1/t^2} \Big/ x^2$

Soluzioni

1) 0
2) 1/28
3) 0
4) $+\infty$
5) $-1/4$
6) 1/2

Svolgimento

1) La funzione

$$f(t) = \frac{1}{t^2}\,\frac{1}{1+t^2}$$

è sommabile su $[1,+\infty[$ poiché infinitesima di ordine 4 all'infinito. Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2\,(1+t^2)}\,dt = \ell \in]0,+\infty[.$$

Ne segue

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt \Big/ x = \ell/\infty = 0$$

2) Il limite dato si presenta nella forma indeterminata 0/0 dal momento che

$$\lim_{x\to 0} \int_0^x (1-\cos t)^2 \operatorname{sen}^3 t\,dt = 0;$$

tale relazione di limite discende dalla continuità della funzione integrale di una funzione continua. Pertanto dalla regola de l'Hopital segue

$$\lim_{x\to 0} \int_0^x (1-\cos t)^2 \operatorname{sen}^2 t\,dt/x^7 = \lim_{x\to 0} (1-\cos x)^2 \operatorname{sen}^2 x/7x^6 = \frac{1}{28}$$

dove nel calcolo dell'ultimo limite si sono utilizzati i limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

3) Ricordando che (cfr. esercizio 13 del paragrafo 4.3) $1/t\log t$ non è sommabile su $[2,+\infty[$ ed osservando che

$$\frac{1}{t\log t} \le \frac{1+|\cos t|}{t\,\log t} \quad \forall t\in[2,+\infty[$$

segue che

$$\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1+|\cos t|}{t\,\log t}\,dt = +\infty;$$

pertanto il limite dato si presenta nella forma ∞/∞. Dalla regola de l'Hopital segue allora che tale limite è dato da

$$\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+|\cos x|)}{x\sqrt{x}\,\log x} = 0$$

4) Tenuto conto che la funzione non negativa

$$f(t) = \frac{1}{(t-1)^2\,(t^2+4)}$$

non è sommabile su $[0,1[$ si ha

$$\lim_{x\to 1^-}\int_0^x \frac{1}{(t-1)^2\,(t^2+4)}\,dt = +\infty$$

e quindi il limite dato vale $+\infty$.

5) Tenuto conto che la funzione non negativa

$$f(t) = \frac{|\cos t|}{t^2\,(t^2+4)}$$

non è sommabile su $[-1,0]$ si ha che il limite dato si presenta nella forma indeterminata $0\cdot(+\infty)$. Dalla regola de l'Hopital si ha:

$$\lim_{x\to 0^-} x\int_1^x \frac{|\cos t|}{t^2\,(t^2+4)}\,dt = \lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{|\cos x|}{x^2\,(x^2+4)}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\frac{1}{4}$$

6) Il limite si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Segue da l'Hopital

$$\lim_{x\to 0^-}\int_0^x t\,e^{-1/t^2}\,dt/x^2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{-1/x^2}}{2x} = \frac{1}{2}$$

7.3 Grafici di funzioni integrali

Si studi il grafico delle seguenti funzioni

1) $f(x) = \int_0^x e^{-1/t^2}\, dt$ 2) $f(x) = \int_0^x t e^{-1/t^2}\, dt$

3) $f(x) = \int^x \dfrac{t}{t^6+1}\, dt$

Svolgimento

1) Osserviamo innanzituto che la funzione integranda puó essere prolungata in 0 per continuitá avendosi

$$\lim_{t\to 0} e^{-1/t^2} = 0.$$

Ció posto la funzione

$$f(x) = \int_0^x e^{-1/t^2}\, dt$$

ha senso (ed è continua) per ogni $x\in R$.

i) La funzione è dispari; infatti effettuando la sostituzione $t=-\tau$ si trova

$$f(x) = \int_0^x e^{-1/t^2}\, dt = -\int_0^{-x} e^{-1/\tau^2}\, d\tau = -f(-x).$$

Basterà quindi studiare $f(x)$ in $[0,+\infty[$.

ii) $f(x)\geq 0 \ \forall x\in [0,+\infty[$

iii) $f'(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

e quindi $f(x)$ è strettamente crescente in $[0,+\infty[$. Che sia $f'(0)=0$ si ottiene facilmente dal teorema de l'Hopital applicato al rapporto incrementale:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{-1/t^2}\, dt}{x} = \lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$$

iv) $f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

e quindi $f(x)$ è convessa strettamente su $]0,+\infty[$.

v) Poiché $f(x)$ è continua non vi sono asintoti verticali; inoltre e^{-1/t^2} non è sommabile su $[0,+\infty[$ perché è convergente ad 1 a $+\infty$.
Ricerchiamo gli eventuali asintoti obliqui utilizzando ancora l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x e^{-1/t^2}\, dt}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} e^{-1/t^2} = 1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\int_0^x e^{-1/t^2}\, dt - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \left(e^{-1/t^2}-1\right) dt$$

La funzione $e^{-1/t^2}-1$ è infinitesima all'infinito di ordine 2 e quindi è sommabile in $[0,+\infty[$; pertanto il limite cercato esiste finito e si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \int_0^{+\infty} \left(e^{-1/t^2}-1\right) dt = n<0$$

Pertanto il grafico di f(x) ha l'asintoto obliquo a$+\infty$ $y=x+n$. In sintesi il grafico di f(x) è quello riportato in figura

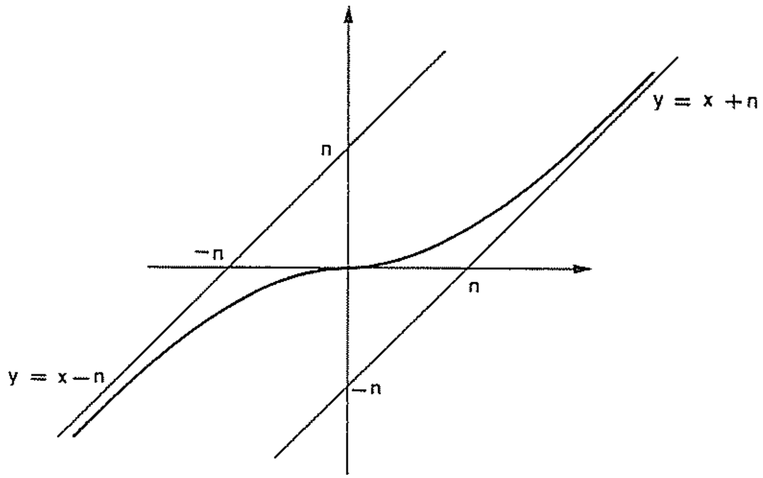


Figura 4.23

Si osservi che dal fatto che f(x) è dispari si ricava, per simmetria, che in $]-\infty,0[$ è strettamente crescente e strettamente concava; inoltre ha $y=x-n$ come asintoto obliquo a$-\infty$. Si noti anche che $x=0$ è un punto di flesso.

2) Come nell'es. **13)** tenuto conto che la funzione te^{-1/t^2} può essere prolungata a 0 in 0 perché

$$\lim_{t\to 0} te^{-1/t^2}=0,$$

si ha che

$$f(x) = \int_0^x t\, e^{-1/t^2}\, dt$$

è definita (e continua) per ogni $x\in R$.

Si ha:

i) f(x) è pari; infatti con la sostituzione $t=-\tau$ si ha:

$$f(x) = \int_0^x t\, e^{-1/t^2}\, dt = \int_0^{-x} \tau\, e^{-1/\tau^2}\, d\tau = f(-x).$$

Pertanto basterà studiare f(x) su $[0,+\infty[$.

ii) $$f'(x) = \begin{cases} x\, e^{-1/x^2} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

e quindi f(x) è strettamente crescente su $[0,+\infty[$. (Per provare che è $f'(0)=0$ si proceda come nell'esercizio **13)**.

iii) $$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}\, e^{-1/x^2} + e^{-1/x^2} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

Quindi f(x) è convessa su $[0,+\infty[$.

iv) Essendo f(x) continua non vi sono asintoti verticali; inoltre tenendo presente che te^{-1/t^2} non è sommabile su $[0,+\infty[$ si ha dalla regola de l'Hopital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x te^{-1/t^2}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-1/x^2} = +\infty$$

e quindi non vi sono asintoti obliqui.
In sintesi il grafico della funzione è quello riportato in figura.

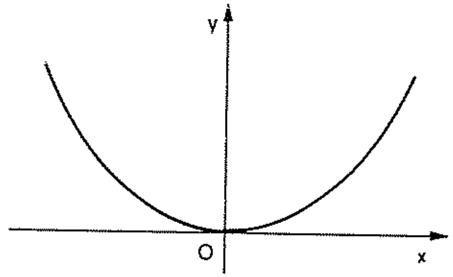


Figura 4.24

Che $f(x)$ sia strettamente decrescente in $]-\infty,0]$ e strettamente convessa su tutto R si ricava dal fatto che $f(x)$ è pari. Il punto $x=0$ è di minimo assoluto.

3) La funzione è definita e continua su tutto R.

i) $f(1)=0$. Inoltre con la sostituzione $t=-\tau$ si trova

$$\int_1^{-1} \frac{t}{1+t^6}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{t}{1+t^6}\,dt;$$

d'altro canto

$$\int_1^{-1} \frac{t}{1+t^6}\,dx = -\int_{-1}^{1} \frac{t}{1+t^6}\,dt$$

e quindi

$$f(-1) = \int_1^{-1} \frac{t}{1+t^6}\,dt = 0$$

ii) $f'(x)\ x/(x^6+1)$; quindi la funzione è strettamente crescente in $[0,+\infty[$ e decrescente in $]-\infty,0]$;

iii) $f''(x) = \dfrac{1-5x^6}{(x^6+1)^2} > 0 \Leftrightarrow |x| < \dfrac{1}{\sqrt[6]{5}}$.

Quindi $f(x)$ è strettamente convessa in $]-1/\sqrt[6]{5},\ 1/\sqrt[6]{5}[$ strettamente concava in $]-\infty,-1/\sqrt[6]{5}[$ ed in $]1/\sqrt[6]{5},+\infty[$. I punti $\pm 1/\sqrt[6]{5}$ sono di flesso.

iv) La funzione $t/(1+t^6)$ è sommabile su $]-\infty,+\infty[$ e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t}{t^6+1}\,dt = \alpha \in\ ]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \int_1^{-\infty} \frac{t}{t^6+1} = \beta$$

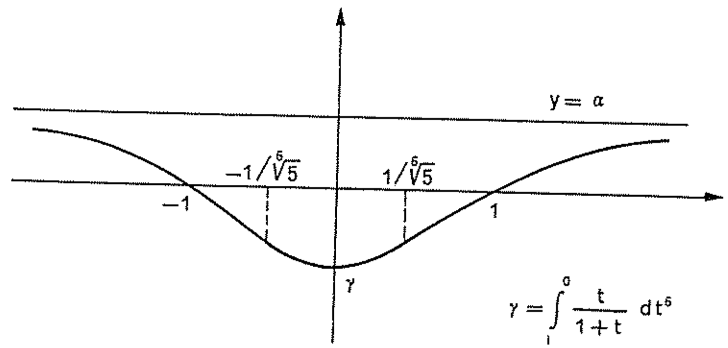


Figura 4.25

Si osservi che

$$\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^6}\,dt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^6}$$

$$\beta = \int_0^{-\infty} \frac{t}{1+t^6}\,dt + \int_1^0 \frac{t}{1+t^6}\,dt = \int_0^{-\infty} \frac{t}{1+t^6} - \int_0^1 \frac{t}{1+t^6}\,dt;$$

con la sostituzione $t=-\tau$ si ha

$$\int_0^{-\infty} \frac{t}{1+t^6}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\tau}{1+\tau^6}\,d\tau$$

e quindi $\alpha=\beta$. In definitiva $y=\alpha$ è un asintoto orizzontale a$\pm\infty$. Pertanto l'andamento del grafico è quello indicato in figura.

CAPITOLO 5

SERIE NUMERICHE

1. Introduzione

Consideriamo una successione $\{a_n\}$ e, a partire da essa, costruiamo la successione il cui termine generale è

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Se tale successione converge ad un valore S si dice che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente ed ha per somma S; in tal caso si pone

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$$

Se la successione $\{S_n\}$ diverge positivamente (negativamente) si dice che la serie è divergente positivamente (negativamente) e si scrive

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty\ (-\infty).$$

Infine una serie si dice oscillante se tale è la successione $\{S_n\}$.

Ricordiamo che S_n prende il nome di somma parziale n-ma della serie e che, se la serie converge ed ha per somma S, la quantità

$$r_n = S-S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

si chiama resto parziale n-mo.

Un primo classico esempio di serie è dato dalla serie geometrica di ragione h

$$\sum_{k=0}^{+\infty} h^k = 1+h+h^2 +\ldots+ h^k +\ldots$$

Si ha

$$S_n = \begin{cases} 1+h+\ldots+h^{n-1}= \dfrac{1-h^n}{1-h} & \text{se } h\neq 1 \\ \underbrace{1+1 +\ldots+ 1}_{n \text{ volte}} = n & \text{se } h=1\,; \end{cases}$$

tenuto conto che la successione $\{h^n\}$ è infinitesima se $|h|<1$, divergente positivamente se $h>1$, oscillante se $h\leq -1$ si ottiene

$$\sum_{k=0}^{+\infty} h^k = \begin{cases} \dfrac{1}{1-h} & \text{se } |h|<1 \\ +\infty & \text{se } h\geq 1\,; \end{cases}$$

inoltre la serie geometrica risulta oscillante se $h\leq -1$.

Non sempre, quando si ha a che fare con una serie, è possibile calcorare la somma come nel caso della serie geometrica; per lo più ci si deve accontentare di studiarne il *carattere*: stabilire cioè se la serie converge, diverge o è oscillante. Se si verifica la prima circostanza può essere inoltre utile stimare ilresto n-mo cioè, in altre

parole, valutare l'errore che si commette quando si approssima la somma effettiva della serie con una sua somma parziale.

Di grande ausilio in tale questione sono alcuni risultati teorici che saranno richiamati nel prossimo paragrafo. Limitiamoci qui a ricordare la seguente condizione:

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA - Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge allora la successione $\{a_n\}$ è infinitesima.

Tale risultato può per esempio venire utile per dimostrare che una serie non converge ove si verifichi che il suo termine generale non sia infinitesimo. A tale proposito se si osserva che una serie a termini non negativi è convergente o divergente positivamente dal momento che la successione delle sue somme parziali è crescente, si può concludere che una tale serie diverge positivamente se il suo termine generale non è infinitesimo. È questo per esempio il caso della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$$

la cui somma è $+\infty$ dal momento che il suo termine generale tende ad 1. C'è da osservare che se invece il termine è infinitesimo nulla si può dire a priori. Infatti se si considera la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+1}{n},$$

il suo termine generale è infinitesimo ma la serie diverge in quanto

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \log \frac{k+1}{k} = \log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} +\ldots+ \log \frac{n+1}{n} =$$
$$= \log 2-\log 1+\log 3-\log 2 +\ldots+ \log(n+1)-\log n = \log(n+1).$$

Esercizi

i) Studiare il carattere delle seguenti serie calcolandone la somma nei casi in cui c'è convergenza:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, 2) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{\frac{3n}{2}}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, 2^{\frac{4}{3}n}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-\frac{2}{3}n}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n+2}}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}}$ 8) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + (-1)^n\right]$

ii) Studiare il carattere delle seguenti serie al variare del parametro α

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\operatorname{sen}\alpha)^n$, 2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha^n$,

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha + \frac{(-1)^n}{2}\right)^n$

iii) Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$$

a seconda del comportamento della successione $\{a_n\}$; se ne calcoli la somma nel caso in cui risulta convergente.

iv) Si calcoli la somma delle seguenti serie (si faccia uso dell'es. iii)):

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\,(n+2)}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$

Risposte

i)

1) La serie ha per somma 1.
2) La serie diverge positivamente.
3) La serie è oscillante.
4) La serie ha per somma $(5^{2/3}-1)^{-1}$.
5) La serie ha per somma 3/4.
6) La serie ha per somma 6.
7) La serie diverge positivamente.
8) La serie diverge positivamente.
9) La serie è oscillante.

ii)

1) La serie ha per somma $-\operatorname{sen}\alpha(1+\operatorname{sen}\alpha)^{-1}$ per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, diverge positivamente per $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, è oscillante per $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

2) La serie diverge positivamente per $\alpha \leq -1$, è oscillante per $\alpha \geq 1$, ha per somma $(1+\alpha)^{-1}$ per $\alpha \in]-1,1[$.

3) La serie diverge positivamente per $\alpha \geq 1/2$, negativamente per $\alpha \leq -1/2$, ha per somma

$$\frac{1}{1-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{1-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2}$$

per $\alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

iii) se $l = \lim_{n\to+\infty} a_n$ la serie ha per somma $l - a_1$; inoltre la serie è oscillante se tale è la successione $\{a_n\}$.

iv)

1) La serie ha per somma 1.

2) La serie ha per somma $\frac{1}{4}$.

3) La serie ha per somma $\frac{1}{2}$.

2) La serie ha per somma $\frac{25}{48}$.

Svolgimenti

i)

1) Ricordando il comportamento della serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

2) La serie diverge in quanto diverge il suo termine generale:

$$\lim_{n\to+\infty} 3^{\frac{3}{2}n} = +\infty.$$

Si tenga presente anche che essa è la serie geometrica di ragione $3^{3/2}>1$.

3) La serie è oscillante in quanto coincide con la serie geometrica di ragione $-2^{4/3}<-1$.

4) Risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-\frac{2}{3}n} = \frac{1}{5^{2/3}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5^{2/3}}\right)^n = \frac{1}{5^{2/3}} \frac{1}{1-5^{-2/3}} = \frac{1}{5^{2/3}-1}.$$

5) Si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n+2}} = \frac{3}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{3}{16} \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}.$$

6) Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2 \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 6.$$

7) La serie diverge in quanto è a termini positivi e il suo termine generale è divergente.

8) La serie diverge in quanto è a termini positivi e il suo termine generale tende ad 1.

9) La serie è oscillante; infatti l'espressione delle somme parziali è

$$S_n = \begin{cases} 1-2^{-n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ -2^{-n} & \text{se } n \text{ è dispari;} \end{cases}$$

e tale successione è oscillante.

ii)

1) Tenendo presente che si tratta della serie geometrica di ragione $-\operatorname{sen}\alpha$, la serie è convergente per $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, diverge per $\alpha=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, è oscillante per $\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi$. Nel primo caso la somma è $\frac{-\operatorname{sen}\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}$.

2) La serie coincide con la serie geometrica di ragione $-\alpha$; quindi essa converge per $\alpha\in]-1,1[$: la somma è $\frac{1}{1+\alpha}$; diverge per $\alpha\leq-1$, è oscillante per $\alpha\geq1$.

3) Si ha

$$\left(\alpha+\frac{(-1)^n}{2}\right)^n = \begin{cases}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } n \text{ è pari;}\\ \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } n \text{ è dispari;}\end{cases}$$

Siano

$$b_n = \begin{cases}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } n \text{ è pari}\\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari}\end{cases} \qquad c_n = \begin{cases}0 & \text{se } n \text{ è pari}\\ \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } n \text{ è dispari.}\end{cases}$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha+\frac{(-1)^n}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2\right]^k.$$

Tale serie geometrica converge se $-\frac{3}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$ con somma $S_1 = \frac{1}{1-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2}$, altrimenti diverge positivamente.

Analogamente

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^{2k+1} = \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\right]^k.$$

Tale serie converge se $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{3}{2}$ con somma $S_2 = \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2}$, diverge positivamente se $\alpha\geq\frac{3}{2}$, diverge negativamente se $\alpha\leq-\frac{1}{2}$.

Pertanto la serie proposta converge se $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$ con somma S_1+S_2, diverge positivamente se $\alpha\geq\frac{1}{2}$, diverge negativamente se $-\frac{3}{2}<\alpha\leq-\frac{1}{2}$. Infine si verifica che la serie diverge negativamente anche quando $\alpha\leq-\frac{3}{2}$.

iii) Poiché la somma parziale S_n della serie coincide con $a_{n+1}-a_1$ la serie ha lo stesso comportamento della successione $\{a_n\}$; pertanto se quest'ultima è regolare e tende ad $l\in\overline{\mathbb{R}}$ la serie ha per somma $l-a_1$.

iv)

1) Risulta

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1};$$

in base al risultato contenuto nell'es. iii) la somma della serie è 1.

2) Risulta

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right];$$

sempre per il risultato dell'es. iii) la somma della serie è $\frac{1}{4}$.

3) Si ha

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right];$$

per il risultato dell'es. iii) la somma della serie è $\frac{1}{2}$.

4) Si ha

$$\frac{1}{n\,(n+4)} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4}\right)\right];$$

se si applica il risultato dell'es. iii) con

$$a_n = -\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)$$

si ha che la somma della serie é

$$-\frac{1}{4}\,a_1 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{48}.$$

2 - Serie a termini positivi: criteri del rapporto e della radice

In questo paragrafo considereremo serie a termini positivi che, in base a quanto detto nel precedente paragrafo, risultano o divergenti positivamente o convergenti.
Si ha

CRITERIO DEL RAPPORTO - Se

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

la serie di termine generale a_n converge; se invece

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

la serie diverge. Più in generale il risultato sussiste se, al posto di **(1)** e **(2)**, si suppone rispettivamente

(1)' $\lim\limits_{n\to+\infty}'' \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

(2)' $\lim\limits_{n\to+\infty}' \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1.$

CRITERIO DELLA RADICE - Se

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$

la serie di termine generale a_n converge; se invece

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$

la serie diverge. Più in generale il risultato sussiste se, al posto di **(3)**, **(4)**, si suppone rispettivamente

(3)' $\lim\limits_{n\to+\infty}'' \sqrt[n]{a_n} < 1$

(4)' $\lim\limits_{n\to+\infty}' \sqrt[n]{a_n} > 1.$

Osserviamo esplicitamente che, in base alla proprietà $(\alpha)'$ del cap. VI, par. 1.4, pg. 323 Parte 1, il verificarsi della **(1)** o **(2)** implica rispettivamente **(3)** o **(4)**. Ciò suggerisce che il criterio della radice ha maggiore possibilità di applicazione del criterio del rapporto; e infatti se si considera la serie

(5) $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{5^4} + \ldots + \dfrac{1}{3^{2n-1}} + \dfrac{1}{5^{2n}} + \ldots$

denotato con a_n il suo termine generale risulta

$$\lim_{n\to+\infty}{}'' \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3} < 1$$

quindi, in base a (3)', la serie converge. Se si prova ad applicare il criterio del rapporto si ottengono le seguenti informazioni

$$\lim_{n\to+\infty}{}'' \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^{2n}}{3^{2n-1}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^{2n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}{}' \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n+1}}{5^{2n}} = 3 \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{2n} = 0$$

che non sono di alcuna utilità.
Le precedenti considerazioni non devono però far ritenere inessenziale il criterio del rapporto; in realtà la scelta fra l'uno e l'altro criterio può essere dettata anche da considerazioni legate alle minori complessità di calcolo.

Ad esempio la serie

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

risulta convergente in quanto in base al criterio del rapporto risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)!} \Big/ \frac{1}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Il risultato poteva ovviamente essere ottenuto anche tramite il criterio della radice; basta a tale proposito osservare che $\{\sqrt[n]{n!}\}$ diverge positivamente. A proposito della serie (6) faremo vedere in un successivo capitolo che la sua somma è il numero di Neper e.
Osserviamo inoltre che quando il limite in (1) o (3) è uguale ad 1 nulla può dirsi sul comportamento della serie;

infatti se si considerano le serie di termine generale $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ e $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ per entrambe risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1;$$

come vedremo nel prossimo paragrafo la prima serie diverge mentre la seconda converge.
Per concludere questa prima parte di richiami ricordiamo i seguenti risultati utili per valutare il carattere di serie nei cui termine generale compare il fattoriale di n

$$(7) \quad n! = \sqrt{2\pi n}\; n^n\, e^{-n}\, e^{\theta_n/12n} \qquad \theta_n \in (0,1).$$

La (7) è nota come "Formula di Stirling" e da essa discende

$$(8) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\; e^n}{n^{n+1/2}} = \sqrt{2\pi}$$

da cui anche (cfr. cap. VI, par. 1.4, es. 8), Parte 1)

$$(9) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e,$$

→ Limite notevole

Posto

$$n!! = n(n-2)\,(n-4)\ldots$$

sussiste il seguente risultato noto come "formula di Wallis"

$$(10) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2\,(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

da cui discende

$$(11) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2\, 2^{2n}}{(2n)!\, \sqrt{n}} = \sqrt{\pi},$$

Da (10) si ha anche

$$(12)\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n-1)!!\ \sqrt{2n}}{(2n)!!} = \sqrt{\frac{2}{\pi}},\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!!\ \sqrt{2n+1}}{(2n+1)!!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ovvero

$$(12)'\quad \lim_{n\to+\infty}{}' \frac{(n-1)!!\ \sqrt{n}}{n!!} = \sqrt{\frac{2}{\pi}},\quad \lim_{n\to+\infty}{}'' \frac{(n-1)!!\ \sqrt{n}}{n!!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

e quindi

$$(13)\quad \frac{H}{\sqrt{n}} \le \frac{(n-1)!!}{n!!} \le \frac{K}{\sqrt{n}}$$

con H, K costanti positive. Da (13) discende

$$(14)\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)!!}{n!!} = 0.$$

Esercizi

i) Utilizzando il criterio del rapporto e/o della radice studiare il carattere delle seguenti serie di cui riportiamo per semplicità solo il termine generale

1) $\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ 2) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

3) $\frac{n!}{n^n}$ 4) $\frac{2^n}{n!}$

5) $\frac{n}{3^n}$ 6) $\frac{n!}{4^n}$

7) $\frac{e^n}{n!}$ 8) $\frac{n^{n+1}}{(n-1)!}$

9) $\frac{n^n}{3^n\ n!}$ 10) $\frac{n^{\sqrt{n}}}{3^n}$

11) $\frac{n^{\pi}}{n!}$ 12) $\frac{e^{\sqrt{n}}}{n!}$

13) $\frac{1}{n\pi^n}$ 14) $\frac{n!\ 2^n}{n^n}$

15) $\frac{n^{n/2}}{n!}$ 16) $\frac{1}{n^n}$

17) $\frac{3^n}{n^n}$ 18) $\frac{n^3}{2^n}$

19) $\frac{n^n}{2^{n+1}}$ 20) $\frac{n^n}{3^{n^2}}$

21) $\frac{5^{\sqrt{n}}}{4^n}$ 22) $2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

23) $\frac{n!!}{n^n}$ 24) $\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

25) $\left(\frac{9n^2+3}{7n^2+1}\right)^n$ 26) $\frac{1}{(n^2+5n+2)^n}$

27) $\left(\frac{n}{2}\ \mathrm{sen}\ \frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+1}{n+2}}$ 28) $\frac{2^{\sqrt{n}}\ n^n}{n!}$

29) $4^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n^3+1}{n+1}}$ 30) $\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n^2\ \mathrm{sen}\ \frac{1}{n}}$

31) $\frac{(n!)^{n+1}\ e^{n^2}}{n^{n^2+\frac{3n}{2}}}$ 32) $\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^n n^{n/2}$

33) $\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^n n^{n/2}$

ii) Calcolare la somma della serie

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^4}+\ldots+\frac{1}{3^{2n-1}}+\frac{1}{5^{2n}}+\ldots$$

iii) Si studi, al variare del parametro α positivo il carattere delle seguenti serie di cui riportiamo il solo termine generale

1) $\left(\dfrac{n}{\alpha n+1}\right)^n$ 2) $\dfrac{\alpha^n}{n^n}$

3) $\dfrac{n!\ \alpha^n}{n^n}$ 4) $\dfrac{n^{\alpha n}}{(n!)^3}$

5) $\dfrac{n\ \alpha^n}{n+1}$ 6) $\dfrac{e^{\sqrt{n}}}{\alpha^n n}$

7) $\dfrac{n^{n^\alpha}}{n!}$ 8) $\dfrac{n^{n^\alpha}}{2^n}$

9) $\dfrac{e^{n^\alpha}}{n!}$

Risposte

i) Convergono le serie 1-5, 7, 9-18, 20-23, 26, 27, 30-33, divergono tutte le altre.

ii) la somma è 17/12.

iii)

1) La serie converge per $\alpha>1$, diverge per $\alpha\in]0,1]$.
2) La serie converge per ogni $\alpha>0$.
3) La serie converge per $\alpha\in]0,e[$, diverge per $\alpha\geq e$.
4) La serie converge per $\alpha<3$, diverge per $\alpha\geq 3$.
5) La serie converge per $\alpha<1$, diverge per $\alpha\geq 1$.
6) La serie converge per $\alpha>1$, diverge per $\alpha\leq 1$.
7) La serie converge per $\alpha<1$, diverge per $\alpha\geq 1$.
8) La serie converge per $\alpha<1$, diverge per $\alpha\geq 1$.
9) La serie converge per $\alpha\leq 1$, diverge per $\alpha>1$.

Svolgimenti (i): 1-4, 8-10, 14, 15, 22, 23, 28, 30-32; ii): iii): 1-4, 6-8))

i)

1) Risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1;$$

quindi il criterio della radice assicura la convergenza della serie.

2) Si ragiona come nel caso del precedente esercizio una volta osservato che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}<1.$$

3) Tenendo presente la (9) si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}<1;$$

la serie converge.

4) La serie converge in quanto

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{n!}}=0<1.$$

8) Facendo uso del criterio del rapporto si può concludere che la serie diverge; infatti

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{n+2}}{n!}\frac{(n-1)!}{n^{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e>1.$$

9) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{3^n n!}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{e}{3} < 1;$$

pertanto la serie converge.

10) Volendo utilizzare il criterio della radice si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\sqrt{n}}}{3^n}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} n^{1/\sqrt{n}}.$$

D'altra parte risulta

$$\lim_{n\to+\infty} n^{1/\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log n/\sqrt{n}} = e^0 = 1.$$

Quindi la serie converge.

14) Dal criterio del rapporto segue

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\ 2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} = 2 \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1;$$

quindi la serie converge. Si ritrovi il risultato con il criterio della radice.

15) Si può ancora una volta usare il criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{n/2}}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{e} \cdot 0 = 0 < 1.$$

La serie converge.

22) Risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}} = 2 \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{2}{e} < 1;$$

la serie pertanto converge.

23) Si usi il criterio del rapporto e la (14)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!!} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)!!}{n!!} =$$

$$= \frac{1}{e} \cdot 0 = 0 < 1;$$

la serie converge.

28) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{\sqrt{n}}\ n^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} 2^{1/\sqrt{n}} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = 1 \cdot e = e > 1.$$

La serie diverge.

30) Denotato con a_n il termine generale risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n \operatorname{sen}\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} < 1$$

La serie converge.

31) Si applichi il criterio della radice. Risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^{n+1}\ e^{n^2}}{n^{n^2+\frac{3}{2}n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\ e^n}{n^{n+1/2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{e} < 1$$

in base alle formule (8) e (9). La serie pertanto converge.

32) Si usi ancora il criterio della radice. Si ha (cfr. (12))

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^n n^{n/2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} < 1$$

quindi la serie converge.

ii) Riscriviamo le somme parziali nel modo seguente:

$$1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{(5^2)^2}+\ldots+\frac{1}{(5^2)^n}+$$
$$+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{(3^2)^2}+\ldots+\frac{1}{(3^2)^n}\right).$$

La somma della serie è pertanto

$$\frac{1}{1-\frac{1}{5^2}}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}=\frac{17}{12}.$$

iii)

1) Applicando il criterio della radice si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{\alpha n+1}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\alpha n+1}=\frac{1}{\alpha};$$

quindi la serie converge per $\alpha>1$, diverge per $\alpha\in]0,1[$. Inoltre per $\alpha=1$ la serie diverge in quanto il suo termine generale tende a e^{-1}.

2) La serie converge per ogni $\alpha>0$ in quanto

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{\alpha^n}{n^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha}{n}=0<1.$$

3) Risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n!\ \alpha^n}{n^n}}=\alpha\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{\alpha}{e};$$

pertanto la serie converge per $\alpha\in]0,e[$, diverge per $\alpha>e$. Cosa succede se $\alpha=e$? In questo caso il criterio della radice non è di alcun aiuto. Si osservi però che

$$\frac{(n+1)!\ e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}>\frac{n!\ e^n}{n^n};$$

tale diseguaglianza equivale infatti alla nota relazione

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e.$$

Ciò comporta che la successione dei termini della serie non può essere infinitesima in quanto crescente e a termini positivi; quindi la serie diverge per $\alpha=e$.

4) Sempre per il criterio della radice si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{\alpha n}}{(n!)^3}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)^3\lim_{n\to+\infty}n^{\alpha-3};$$

tale limite è nullo se $\alpha<3$, è e^3 se $\alpha=3$, è $+\infty$ se $\alpha>3$. Quindi la serie converge per $\alpha<3$, diverge per $\alpha\geq3$.

6) Risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{\sqrt{n}}}{\alpha^n\ n}}=\frac{1}{\alpha}\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{1/\sqrt{n}}}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{\alpha};$$

quindi la serie diverge per $\alpha\in]0,1[$, converge per $\alpha>1$. Per $\alpha=1$ la serie diverge in quanto diverge il suo termine generale.

8) Risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{n^\alpha}}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}n^{n^{\alpha-1}}=\begin{cases}+\infty & \text{se } \alpha\geq1\\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha<1\end{cases}.$$

Quindi la serie converge per $\alpha<1$, diverge per $\alpha\geq1$.

3. - Serie a termini positivi: criterio integrale e criteri di confronto

Ricordiamo il seguente utile

CRITERIO INTEGRALE - Sia f una funzione positiva decrescente in $[1,+\infty[$; se f è sommabile e $0<a_n\le f(n)$ la serie di termine generale a_n converge. Se invece f è non sommabile e $a_n\ge f(n)$ la serie diverge. Inoltre, nella prima eventualità, sussiste la seguente valutazione per il resto n-mo

$$(15)\quad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \le \int_n^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Come prima applicazione di tale criterio si può studiare la cosiddetta serie armonica generalizzata di esponente α.

$$(16)\quad 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Con riferimento all'enunciato del criterio integrale, posto $f(t) = t^{-\alpha}$, il carattere della serie **(16)** risulta legato alla sommabilità della funzione f; pertanto la serie **(16)** converge se $\alpha>1$, diverge se $\alpha\in]0,1]$. Diversamente dal caso della serie geometrica il valore numerico della somma della serie **(16)** è noto solo per particolari valori di α; per esempio, per $\alpha=2$, tale somma è $\pi^2/6$. È però possibile in generale, tramite la **(15)** darne una valutazione (cf. es. iii)), stimandone il resto n-mo.

Ricordiamo infine i seguenti risultati

CRITERI DI CONFRONTO - Date due serie a termini positivi

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, si ha

$$(17)\quad a_n\le b_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ convergente} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente}$$

$$(18)\quad a_n\le b_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergente} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergente.}$$

Da **(17)**, **(18)** si deduce

$$(19)\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in]0,+\infty[\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ \text{hanno lo stesso carattere} \end{array} \right\}$$

$$(20)\quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ convergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente}$$

$$(21)\quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergente.}$$

Combinando **(19)**, **(20)**, **(21)** con i risultati relativi alla serie armonica generalizzata si ottiene il seguente

CRITERIO DEGLI INFINITESIMI - Sia

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a_n = l;$$

$$(22)\quad l\in [0,+\infty[\text{ e } \alpha>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge;}$$

(23) $l \in]0,+\infty]$ e $\alpha \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

A proposito di quest'ultimo criterio si può osservare che, mediante tale criterio, lo studio del carattere di una serie è ricondotto alla valutazione dell'ordine di infinitesimo del suo termine generale.

Per illustrarne l'uso proponiamo alcuni esempi. Consideriamo la serie

(24) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 7n + 3};$$

"confrontiamo" tale serie con la serie armonica generalizzata di esponente 2, cioè con la serie

(25) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2+7n+3}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

quindi, in base alla (19) o anche (22), la serie (24) converge in quanto converge la serie (25). Analogamente, se si considera la serie

(26) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lg (n+1)},$$

dal confronto con la serie (25), osservato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2 \lg (n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\lg (n+1)} = 0$$

da (20) o (22) si ottiene la convergenza della serie (26).

Esercizi

i) Facendo uso dei criteri di confronto studiare il carattere delle seguenti serie di cui riportiamo il solo termine generale

1) $|\text{sen } n| \left(\frac{2}{3}\right)^n$

2) $|\cos n| \frac{3^n}{4^{n+1}}$

3) $\frac{1 + \text{sen } n}{n^n}$

4) $\frac{n \sqrt{1+\cos^2 n}}{3^n}$

5) $\frac{(1+\lg^2 n)^{3/2}}{n}$

6) $\sqrt[n]{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n$

7) $\text{sen } \frac{1}{n} \frac{(n+1)!}{4^n}$

8) $\frac{3^n}{(1+\lg n)\ n!}$

9) $\lg n \left(\frac{2n^2+3}{3n^2+1}\right)^n$

10) $\left(\text{arcsen}^2 \frac{1}{n}\right) \frac{n^2}{3^n}$

11) $\left(1-\cos \frac{1}{n}\right) \frac{n!}{n^n}$

12) $\frac{\text{arctg } n}{1+\arccos \frac{1}{n}} \frac{1}{n!}$

ii) Facendo uso del criterio degli infinitesimi stabilire il carattere delle seguenti serie di cui è riportato il solo termine generale

1) $\frac{1}{n^3+2n+1}$

2) $\frac{n^2+1}{3n^4+5n-2}$

3) $\frac{n}{n^2+2}$

4) $\frac{\sqrt{n}+1}{n\sqrt{n}+3}$

5) $\frac{\sqrt[3]{n}+2}{n\sqrt{n}+2n+1}$

6) $\frac{(n^2+1) \lg (n+1)}{n^3+2}$

7) $\dfrac{n+3}{\lg n\,(n^4+5)}$

8) $\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$

9) $1-\cos\dfrac{1}{n}$

10) $\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^2}$

11) $\sqrt{n}\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$

12) $\dfrac{1}{5^{\sqrt{n}}}$

13) $\dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt{n}}$

14) $\dfrac{(n-1)!!}{n!!}$

15) $\dfrac{(n-1)!\ e^n}{n^n}$

16) $n^{3/2}\left(\dfrac{1}{n}-\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}\right)$

17) $\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-e\right]^2$

18) $\dfrac{2^{1/\lg n}-1}{\sqrt{n}}$

19) $\dfrac{(n-1)!\ e^n}{n^{n+1/2}}$

20) $\dfrac{1}{n^2}\,\dfrac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2}$

21) $1-n\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$

22) $\left[\dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\right]\sqrt{n}$

23) $\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n+3)!!}\right]\sqrt{n}$

24) $\dfrac{1}{n^{2/3}}-\dfrac{1}{(n+\sqrt{n})^{2/3}}$

iii) Dare una valutazione del resto della serie armonica generalizzata di esponente $\alpha>1$ utilizzando la **(15)**.

iv) Verificare che se $\alpha\in\,]0,1[$, esiste un $\beta>0$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\dfrac{1}{3^\alpha}+\ldots+\dfrac{1}{n^\alpha}}{n^\beta}=1\in\,]0,+\infty[.$$

Cosa si può dire nel caso $\alpha=1$?

v) Facendo uso del criterio integrale si studi il comportamento delle seguenti serie di cui si riporta il solo termine generale:

1) $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{\lg(n+1)}}$

2) $\dfrac{1}{(n+2)\lg(n+2)\,[\lg\lg(n+2)]}$

3) $\dfrac{1}{(n+1)\lg^2(n+1)}$

4) $\dfrac{n}{(n^2+1)\lg(n+1)}$

vi) Studiare al variare del parametro β il comportamento delle seguenti serie di cui riportiamo il solo termine generale.

1) $\dfrac{n^\beta}{n^3+1}$

2) $\dfrac{(n^2+1)^\beta}{n^4+3n}$

3) $n^\beta\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$

4) $\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^\beta}$

5) $1-\cos\dfrac{1}{n^\beta}$

6) $n^\beta\,\dfrac{(n-5)!!}{n!!}$

7) $\dfrac{(n+1)!\ e^n}{n^{n+\beta}}$

8) $\left[\dfrac{(n-3)!!}{n!!}\right]^\beta$

9) $n^\beta\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^2+1}\right)$

10) $\dfrac{1}{2^{n\beta}}$

11) $n^\beta\left(1-\sqrt{\cos\dfrac{1}{n}}\right)$

12) $\dfrac{n^n\,|\beta|^n}{n!}$

vii) Studiare al variare del parametro α il carattere delle seguenti serie

1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\,(\lg n)^\alpha}$

2) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\lg n\,[\lg\lg n]^\alpha}$

viii) Usando la formula di Stirling si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(e\sqrt[n]{n!}-n\right)^2}{n}$$

Risposte

i) A parte le serie **5**, **7** che divergono, tutte le altre convergono.

ii) Convergono le serie **1**, **2**, **5**, **7**, **9-13**, **16**, **17**, **21**, **24**, divergono tutte le altre.

iii) Si ha: $r_n \leq (\alpha-1)^{-1}\, n^{1-\alpha}$.

iv) Risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}}{n^{1-\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha} \qquad \alpha<1,$$

e, nel caso $\alpha=1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\lg(n+1)} = 1.$$

v) Divergono le serie **1**, **2**, **4**, converge la serie **3**.

vi) Si riportano per ciascun esercizio gli insiemi dei valori β per cui la serie converge

1) $]-\infty, 2[$	2) $]-\infty, \frac{3}{2}[$
3) $]-\infty, 0[$	4) $]1, +\infty[$
5) $]\frac{1}{2}, +\infty[$	6) $]-\infty, \frac{3}{2}[$
7) $]\frac{5}{2}, +\infty[$	8) $]\frac{2}{3}, +\infty[$
9) $]-\infty, 3[$	10) $],0+\infty[$
11) $]-\infty, 1[$	12) $[-e^{-1}, e^{-1}[$.

vii) Le due serie convergono per $\alpha>1$.

viii) La serie diverge.

Svolgimenti (i): 1, 3, 5-7, 9, 11; ii): 1, 4, 6, 8, 11-15, 17, 19, 20, 22, 24; iii): iv): v): 1, 2, 4; vi): 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12; vii): 1, 2; viii))

i)

1) Si ha

$$|\text{sen } n| \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

e quindi la serie data converge, in base alla proprietà **(17)**, in quanto maggiorata dalla serie geometrica di ragione 2/3 che è convergente.

3) La serie data è convergente perché maggiorata da una serie convergente; risulta infatti

$$\frac{1+\text{sen } n}{n^n} \leq \frac{2}{n^n}$$

e la serie di termine generale $2/n^n$ converge (cfr. es. i), **16)** par. 2).

5) Risulta

$$(1+\lg^2 n)^{1/2}\, \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n};$$

la serie data diverge in base alla proprietà **(18)** in quanto minorata dalla serie armonica che è divergente.

6) Si usi la proprietà **(19)** con a_n termine generale della serie data e $b_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$; si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

La serie pertanto converge dal momento che converge la serie $\sum b_n$.

7) Si applica il criterio **(19)** con $a_n = \operatorname{sen}\frac{1}{n}\,\frac{(n+1)!}{4^n}$ e $b_n = \frac{n!}{4^n}$; si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} (n+1) \operatorname{sen}\frac{1}{n} = 1.$$

Quindi la serie data diverge dal momento che diverge la serie $\sum \frac{n!}{4^n}$ (cfr. es. **i)**. **6)** par. 2).

9) Si ha

$$(\lg n)\left(\frac{2n^2+3}{3n^2+1}\right)^n < n\left(\frac{2n^2+3}{3n^2+1}\right)^n = b_n .$$

Applicando il criterio della radice alla serie il cui termine generale è b_n si deduce che tale serie converge; quindi per la proprietà **(17)** è convergente anche la serie data.

11) Risulta

$$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\frac{n!}{n^n} < \frac{n!}{n^n}$$

da cui la convergenza della serie data essendo convergente la serie di termine generale $\frac{n!}{n^n}$ (cfr. es. **3)** del par. 2).

ii)

1) Essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^3+2n+1} = 1$$

la serie data in base alla proprietà **(22)** è convergente.

4) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\sqrt{n}+1}{n\sqrt{n}+3}\right) = 1,$$

quindi la serie diverge in base a **(23)**.

6) Risulta

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{(n^2+1)\lg(n+1)}{n^3+3}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+n}{n^3+3}\lim_{n\to+\infty}\lg(n+1) = +\infty;$$

la serie pertanto diverge in base alla **(23)**.

8) Essendo

$$\lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}\frac{1}{n} = 1$$

la serie diverge sempre per la **(23)**.

11) Risulta

$$\lim_{n\to+\infty} n^{3/2}\left[\sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

quindi la serie converge in base alla **(22)**.

12) Osserviamo innanzitutto che in questo caso, così come del resto nei precedenti esercizi, non è applicabile né il criterio del rapporto né quello della radice. In relazione a quest'ultimo si ha infatti

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{5^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to+\infty} 5^{-1/\sqrt{n}} = 1.$$

D'altra parte essendo, $\forall\alpha>0$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\frac{1}{5^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{5^{-\sqrt{n}}}{n^{-\alpha}} = 0$$

per una nota proprietà degli esponenziali, la serie converge in quanto è applicabile il criterio (22).

13) Per dimostrare che tale serie converge basta determinare un numero $\alpha>1$ tale che risulti (cfr. (22))

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} \frac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} \frac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\lg n/n}-1}{\frac{\lg n}{n}} n^{\alpha-3/2} \lg n.$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\lg n/n}-1}{\frac{\lg n}{n}} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{y}-1}{y} = 1$$

affinché il limite iniziale sia zero basta prendere $\alpha<3/2$.

14) La serie diverge in quanto, in base alla (13), la serie data si "comporta" come la serie armonica di esponente 1/2. A tale proposito il lettore farebbe un utile esercizio dimostrando che (22) sussiste se la quantità l che vi compare rappresenta il $\lim''_{n\to+\infty} n^{\alpha} a_n$ e che la (23) vale ancora se $l=\lim'_{n\to+\infty} n^{\alpha} a_n$.

15) È necessario in questo caso ricorrere alla formula di Stirling (8)

$$\lim_{n\to+\infty} n^{1/2} \frac{(n-1)!\ e^{n}}{n^{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\ e^{n}}{n^{n+1/2}} = \sqrt{2\pi};$$

quindi la serie diverge in base al criterio (23).

17) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n^{2}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-e\right]^{2} = \lim_{n\to+\infty} n^{2} e^{2}\left[e^{n\lg(1+1/n)-1}-1\right]^{2} =$$

$$= e^{2} \lim_{n\to+\infty} \left\{\frac{e^{n\lg(1+1/n)-1}-1}{n\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}\right\}^{2} \left[n\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]^{2} n^{2} = \frac{e^{2}}{4}$$

dal momento che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\lg(1+x)}{x}-1}{x} = -\frac{1}{2}.$$

La serie quindi converge in base a (22).

19) Si ha (cfr. (8))

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{(n-1)!\ e^{n}}{n^{n+1/2}}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\ e^{n}}{n^{n+1/2}} = \sqrt{2\pi}$$

quindi, in base a (23), la serie diverge.

20) Ricorrendo alla (10) si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n\left\{\frac{1}{n^{2}} \frac{[(2n)!!]^{2}}{[(2n-1)!!]^{2}}\right\} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{[(2n)!!]^{2}}{[(2n-1)!!]^{2}(2n+1)} \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = \frac{\pi}{2}\, 2 = \pi,$$

quindi la serie diverge in base al criterio (23).

22) Risulta (cfr. (12))

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \sqrt{n}\, n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sqrt{2n} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1+1/2}}{(2n-1)\sqrt{2n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}};$$

quindi la serie diverge in base al criterio (23).

24) Per individuare l'ordine di infinitesimo del termine generale della serie bisogna determinare α in modo tale che risulti

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n^{2/3}}-\frac{1}{(n+\sqrt{n})^{2/3}}\right]n^{\alpha}=l>0.$$

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n^{2/3}}-\frac{1}{(n+\sqrt{n})^{2/3}}\right]n^{\alpha}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\alpha}}{(n+\sqrt{n})^{2/3}}\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right]=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{2}{3}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\quad\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{2/3}}{(n+\sqrt{n})^{2/3}}\quad\lim_{n\to+\infty}n^{\alpha-7/6}$$

Per $\alpha=7/6$ si ha pertanto

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n^{2/3}}-\frac{1}{(n+\sqrt{n})^{2/3}}\right]n^{7/6}=\frac{2}{3};$$

la serie quindi converge in base al criterio (22).

iii) Basta applicare il criterio integrale con $f(t)=t^{-\alpha}$. Dalla (15) si ha

$$(27)\qquad r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}\le\int_n^{+\infty}t^{-\alpha}\,dt=\frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}.$$

Osserviamo qui esplicitamente che se una serie di termine generale a_n è maggiorata da una serie armonica di esponente α, se cioè risulta

$$a_n\le\frac{H}{n^{\alpha}}$$

con H costante opportuna allora la (27) porta ad una valutazione del resto n-mo della serie $\sum a_n$.

iv) Bisogna in definitiva calcolare l'ordine di infinito della successione delle somme parziali di una serie armonica di esponente $\alpha\in]0,1[$. Se $\alpha<1$, osservato che

$$\frac{1}{(k+1)^{\alpha}}\le\frac{1}{t^{\alpha}}\le\frac{1}{k^{\alpha}}\quad\text{se}\quad k\le t\le k+1$$

risulta

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}\le\int_1^n\frac{1}{t^{\alpha}}\,dt\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{\alpha}}$$

da cui

$$\int_1^n\frac{dt}{t^{\alpha}}+\frac{1}{n^{\alpha}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}\le\int_1^n\frac{dt}{t^{\alpha}}+1$$

ovvero

$$\frac{1}{(1-\alpha)}\left[n^{1-\alpha}-1\right]+n^{-\alpha}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}\le\frac{1}{(1-\alpha)}\left[n^{1-\alpha}-1\right]+1.$$

Da quest'ultima relazione discende

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}}{n^{1-\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}\ne 0.$$

Se $\alpha=1$, ricordato che (cfr. Cap. VI, par. 1.3, Parte I)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\lg(n+1)}=1,$$

si ottiene che le somme parziali della classica serie armonica hanno una crescita logaritmica.

v)

1) Si applichi il criterio integrale con

$$f(t) = \frac{1}{(t+1)\sqrt{\lg(t+1)}}$$

e si tenga presente che tale funzione é non sommabile in $[1,+\infty[$.

2) Si applichi il criterio integrale con

$$f(t) = \frac{1}{(t+2)\lg(t+2)\lg\lg(t+2)}.$$

Poiché

$$\int_1^r f(t)\,dt = [\lg\lg\lg(t+2)]_1^r =$$

$$= \lg\lg\lg(r+2) - \lg\lg\lg 3$$

la funzione é non sommabile e quindi la serie diverge.

4) Si applichi il criterio integrale con

$$f(t) = \frac{t}{(t^2+1)\lg(t+1)};$$

poiché tale funzione non é sommabile risulta non convergente la serie data.

vi)

1) Il termine generale é infinitesimo per $\beta<3$ con ordine di infinitesimo pari a $3-\beta$. Pertanto in base ai criteri (22) e (23) la serie diverge per $\beta\geq 2$, converge per $\beta<2$.

3) Poiché la successione $\left\{\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right\}$ é infinitesima di ordine 1, il termine generale risulta infinitesimo per $\beta<1$ e il suo ordine é $1-\beta$; pertanto, in base ai criteri (22), (23) la serie converge per $\beta<0$, diverge per $\beta\geq 0$.

5) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n^\beta}\right)n^{2\beta} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$$

quindi per il criterio degli infinitesimi la serie converge se $2\beta>1$ cioé se $\beta>\frac{1}{2}$.

6) Osservato che

$$n^\beta\frac{(n-5)!!}{n!!} = \frac{n^\beta}{(n-1)(n-3)}\frac{(n-1)!!}{n!!}$$

ricordando la (13) si ha

$$\text{(28)}\quad \frac{H\,n^{\beta-1/2}}{(n-1)(n-3)} \leq n^\beta\frac{(n-5)!!}{n!!} \leq \frac{K\,n^{\beta-1/2}}{(n-1)(n-3)}.$$

In base al criterio (22) la serie il cui termine generale é l'ultimo membro della (28) converge se $\beta-\frac{1}{2}-2<-1$ ovvero se $\beta<\frac{3}{2}$; pertanto in tal caso, per il criterio (17) la serie data converge. In modo analogo si ottiene che la serie diverge per $\beta\geq\frac{3}{2}$.

7) Ricordando la formula di Stirling (8) si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\beta-3/2}\frac{(n+1)!\,e^n}{n^{n-\beta}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}\lim_{n\to+\infty}\frac{n!\,e^n}{n^{n+1/2}} = \sqrt{2\pi}.$$

Quindi la serie converge (cfr. criterio (22)) se $\beta-\frac{3}{2}>1$, ovvero se $\beta>\frac{5}{2}$.

9) Per rispondere al quesito è sufficiente valutare l'ordine di infinitesimo del termine generale della serie. Se si osserva che, poiché $\frac{1}{n^2} \to 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \frac{x}{x+1}}{x^2} = 1$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n^{4-\beta}\left[n^{\beta}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+1}\right)\right] = 1;$$

quindi la serie converge se

$$4-\beta > 1 \Leftrightarrow \beta < 3.$$

10) Sia α un qualsiasi numero reale più grande di 1; si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\alpha}}{2^{n^{\beta}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha/\beta}}{2^{x}} = 0.$$

In base al criterio **(22)** la serie converge qualunque sia $\beta>0$.

12) Per $\beta\neq e^{-1}$ si può far uso del criterio della radice; risulta infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n\,|\beta|^n}{n!}} = |\beta| \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = |\beta|\, e$$

quindi la serie converge per $|\beta| < e^{-1}$, diverge per $|\beta| > e^{-1}$. Nel caso in cui $|\beta| = e^{-1}$ si può usare la formula di Stirling:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^n}{n!\; e^n}\right) n^{1/2} = (2\pi)^{-1/2}.$$

In base al criterio **(23)** la serie diverge.

vii)

1) Basta applicare il criterio integrale con $f(t) = \frac{1}{t\,(\lg t)^{\alpha}}$.

Poiché tale funzione è sommabile se $\alpha>1$ la serie converge solo per tali valori del parametro α.

2) Si applichi il criterio integrale con

$$f(t) = \frac{1}{t\,\lg t\,[\lg \lg t]^{\alpha}} \qquad (t>3).$$

Tale funzione è sommabile per $\alpha>1$; in corrispondenza di tali valori del parametro α la serie risulterà convergente.

viii) Ricorrendo alla formula di Stirling **(7)** si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(e\sqrt[n]{n!} - n\right)^2}{n}\, n\,(\lg n)^{-2} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left[(2\pi)^{1/(2n)}\, n^{1/(2n)}\, e^{\theta_n/(12n^2)} - 1\right]^2 n^2\,(\lg n)^2.$$

Posto

$$y_n = \frac{\lg(2\pi)}{2n} + \frac{\lg n}{2n} + \frac{\theta_n}{12n^2}$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(e\sqrt[n]{n!} - n\right)^2}{n}\, n\,(\lg n)^{-2} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(e^{y_n}-1)^2}{y_n^2}\, y_n^2\, n^2\,(\lg n)^{-2} = \frac{1}{4}.$$

Pertanto la serie data, in base al criterio **(19)**, ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lg n)^2}{n}.$$

Quest'ultima serie diverge (cfr. es. **vii)** n° 1) e quindi diverge anche la serie data.

4. - Serie alternanti. Serie assolutamente convergenti

Nel precedente paragrafo abbiamo preso in considerazione esclusivamente serie a termini positivi; proviamo a prescindere da tale ipotesi cominciando dal caso delle cosiddette "serie alternanti": con tale terminologia si intende una serie del tipo

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n a_n \tag{28}$$

con $\{a_n\}$ successione a termini non negativi. Per tali serie sussiste il seguente criterio di convergenza:

CRITERIO DI CONVERGENZA DI LEIBNITZ. - Se la successione $\{a_n\}$ è decrescente ed infinitesima la serie (28) converge; inoltre sussiste la seguente stima per il resto n-mo

$$|r_n| \leq a_n . \tag{29}$$

A titolo di esempio consideriamo la seguente serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots; \tag{30}$$

tale serie converge in forza del suddetto criterio. Proviamo però ad ottenere tale risultato per altra strada che con-sente di calcolare anche la somma della serie. Se denotiamo con $\{S_n\}$ la successione delle somme parziali della serie (30) e con $\{A_n\}$ la successione delle somme parziali della serie armonica si ha

$$\begin{aligned} S_{2k+1} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k+1} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k+1} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k}\right) = \\ &= A_{2k+1} - A_k \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S_{2k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2k} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k}\right) = \\ &= A_{2k} - A_k . \end{aligned}$$

Essendo (cfr. Cap. VI, par. 1.3, Parte 1)

$$\lim_{n \to \infty} \{A_n - \lg (n+1)\} = C$$

con C costante di Eulero-Mascheroni, si ha

$$\lim_{k \to \infty} S_{2k+1} =$$

$$\lim_{k \to \infty} [A_{2k+1} - \lg(2k+2)] - \lim_{k \to \infty} [A_k - \lg(k+1)] + \lim_{k \to \infty} \lg \frac{2k+2}{k+1} =$$

$$= C - C + \log 2 = \log 2$$

e, analogamente

$$\lim_{k \to \infty} S_{2k} = \log 2 .$$

Risulta quindi

$$\lim_{k \to \infty} S_k = \log 2$$

pertanto la serie (30) ha per somma log2.

Riordiniamo i termini della serie (30) disponendoli nel seguente ordine

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots \tag{31}$$

Se $\{\overline{S}_n\}$ denota la successione delle somme parziali della serie (31) risulta

$$\overline{S}_{3k} = A_{4k} - \frac{1}{2} A_k - \frac{1}{2} A_{2k}$$

da cui

$$\lim_{k\to\infty} \overline{S}_{3k} =$$
$$\lim_{k\to\infty} [A_{4k} - \lg(4k+1)] - \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty} [A_k - \lg(k+1)] -$$
$$-\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty} [A_{2k} - \lg(2k+1)] + \lim_{k\to\infty} \lg \frac{4k+1}{\sqrt{(k+1)(2k+1)}} =$$
$$= C - \frac{C}{2} - \frac{C}{2} + \lg 2\sqrt{2} = \lg 2\sqrt{2}.$$

Quindi la somma della serie (30) cambia se se ne altera l'ordine dei termini. Se si vuole che tale fenomeno non si presenti bisogna prendere in considerazione le *serie assolutamente convergenti*.

DEFINIZIONE - La serie di termine generale a_n si dice assolutamente convergente se converge la serie a termini non negativi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|.$$

Sussiste il seguente risultato: ogni serie assolutamente convergente è anche convergente. Il viceversa non è vero; la serie (30) infatti è convergente ma non è assolutamente convergente.

Esercizi

i) Studiare il carattere delle seguenti serie

1) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+2} - \frac{1}{3k+3} + \ldots$

2) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots$

ii) Studiare il carattere delle seguenti serie alternanti.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}}$,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$,

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\pi - 2\operatorname{arctg} n]$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arcsen} \frac{1}{n}$,

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[1 - n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right]$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lg\left(1 + \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right)$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n - n}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \lg n}$,

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n+1}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}-1}$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lg(n+1)}$

iii) Quali serie nel precedente esercizio sono assolutamente convergenti?

Risposte

i) La prima serie diverge negativamente, la seconda converge.

ii) Tutte le serie sono convergenti in quanto verificano le ipotesi del criterio di Leibnitz.

iii) Sono assolutamente convergenti le serie 3, 6, 8, 10.

Svolgimento (i); ii): 1, 4, 8, 11; iii): 1, 4, 8)

i)

1) La serie può considerarsi come la somma della serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+2}+\dots$$

convergente in base al criterio di Leibnitz e della serie divergente negativamente

$$-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\dots-\frac{1}{3(k+1)}-\dots=-\frac{1}{3}\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

La serie pertanto diverge negativamente.

2) La serie converge in quanto somma delle due serie convergenti

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\dots$$

ii)

1) La serie verifica le ipotesi del criterio di Leibnitz; infatti la successione $\left\{\text{sen}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ è infinitesima e decrescente.

4) Osservato che la successione $\{\pi-2\text{arctg}n\}$ è decrescente e infinitesima si conclude invocando il criterio di Leibnitz.

8) La successione $\left\{\frac{1}{3^n-n}\right\}$ è infinitesima; inoltre essa è decrescente in quanto la funzione $\frac{1}{3^x-x}$ è decrescente per $x>1$. La serie pertanto converge sempre per il criterio di Leibnitz.

11) La successione $\left\{\frac{1}{2\sqrt{n}-1}\right\}$ è infinitesima; inoltre essa è decrescente quindi la serie converge per il criterio di Leibnitz.

iii)

1) La serie non è assolutamente convergente in quanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\text{sen}\,\frac{1}{n}$$

diverge per il criterio degli infinitesimi **(23)** (cfr. es. **ii8)** del precedente paragrafo).

4) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\pi-2\text{arctg }n]$$

diverge in base al criterio degli infinitesimi **(23)**; risulta infatti

$$\lim_{n\to+\infty} n\,[\pi-2\text{arctg }n]=\lim_{x\to+\infty} x\,[\pi-2\text{arctg }x]=2.$$

La serie data non è quindi assolutamente convergente.

8) La serie è assolutamente convergente dal momento che, per il criterio della radice, converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}.$$

CAPITOLO 6

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

1. Nota introduttiva

Data una successione di funzioni $\{f_n\}$ definite su un sottoinsieme $A \subseteq R$ e a valori in R, diremo insieme di convergenza puntuale (e lo denoteremo spesso con C) l'insieme dei punti x di A tali che esiste finito il limite

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

Si dirà anche che f_n converge su C puntualmente.

Diremo poi che la successione $\{f_n\}$ di funzioni converge su un insieme I ad una funzione f se per ogni x in I si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x).$$

Si dirà anche che f è limite puntuale su I della successione f_n o che f_n converge puntualmente su I a f.

Si consideri a titolo di esempio la successione di funzioni definite su tutto R

$$f_n(x) = \frac{e^{-x^2}}{n}$$

studiando *a x fissato* il limite della successione numerica che così si determina:

$$\frac{e^{-x^2}}{n};$$

si ha per ogni x in R

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$

e quindi la funzione f identicamente nulla è limite puntuale della successione f_n su tutto R.

Diremo ancora che la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente ad una funzione f su un insieme J contenuto nell'insieme di convergenza puntuale se per ogni $\varepsilon>0$ esiste un indice ν_ε tale che per ogni x in J e per ogni $n\geq\nu_\varepsilon$ si ha

$$|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon.$$

Ovviamente (e questa è la forma che viene più usata nello studio della convergenza uniforme) tale condizione equivale a dire che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in J} |f_n(x)-f(x)| = 0.$$

Si osservi così sempre a titolo di esempio che la successione di funzioni già esaminata

$$f_n(x) = \frac{e^{-x^2}}{n}$$

converge uniformemente a 0 su tutto R.

Infatti

$$\sup_{x\in R} |f(x)-f_n(x)| = \sup_{x\in R} \left|0 - \frac{e^{-x^2}}{n}\right| = \sup_{x\in R} \left|\frac{e^{-x^2}}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

e dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in R} |f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

La convergenza uniforme è assai utile in tre importanti questioni: la continuità della funzione limite di una successione di funzioni, il passaggio al limite sotto il segno di integrale, lo scambio del segno di limite col segno di derivata; valgono a tale proposito i tre importanti teoremi seguenti (che comunque non daremo nella massima generalità possibile).

I. Teorema di continuità della funzione limite: Se la successione $\{f_n\}$ di funzioni definite su $[x_0, b]$ (risp. $[a, x_0]$), continue in x_0 converge uniformemente su $[x_0, b]$ (risp. $[a, x_0]$) ad una funzione f allora f è continua in x_0.

Si noti che la sola convergenza puntuale non è sufficiente a garantire la continuità della funzione limite (a titolo di esempio si esamini l'esercizio 9) del paragrafo 2).

D'altro canto invece, la funzione identicamente nulla limite della successione di funzioni, uniformemente convergente

$$f_n(x) = \frac{e^{-x^2}}{n}$$

è chiaramente continua.

II. Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale: Se la successione $\{f_n\}$ di funzioni definite e continue su $[a,b]$ converge ivi uniformemente ad f allora

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Considerata così ad esempio ancora la successione

$$f_n(x) = \frac{e^{-x^2}}{n}$$

si ha subito per ogni a e b in R

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \frac{e^{-x^2}}{n}\, dx = 0 .$$

III. Teorema di scambio del segno di limite con quello di derivata. La successione $\{f_n\}$ di funzioni definite su $[a,b]$ e ivi dotate di derivate prime continue converga puntualmente su $[a,b]$ ad una funzione f. La successione $\{f_n'\}$ delle derivate delle funzioni f_n converga uniformemente ad una funzione φ.

Allora la funzione f è derivabile su $[a,b]$ e $f'(x)=\varphi(x)$ per ogni x in $[a,b]$.

Così considerando la successione di funzioni già esaminata a titolo di esempio si ha

$$f_n'(x) = \frac{-2x\, e^{-x^2}}{n}.$$

La successione f_n' converge puntualmente su tutto R alla funzione 0. Inoltre la convergenza è uniforme su tutti gli intervalli del tipo $[-a,a]$ in quanto

$$\sup_{x\in[-a,a]} \left|\frac{-2xe^{-x^2}}{n}\right| \le \frac{2a}{n}$$

(in effetti qualche considerazione più precisa stabilisce che la convergenza è uniforme su tutto R) e dunque si rientra nella ipotesi del teorema.

I concetti su esposti si trasportano alla serie di funzioni di termine generale f_n considerando la successione delle somme parziali n-esime $\{S_n(x)\}$ ove

$$S_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x).$$

Così ad esempio l'insieme di convergenza puntuale di una serie di funzioni sarà costituito da tutti quei punti nei quali converge la successione delle somme parziali.

Osserviamo esplicitamente che in generale col simbolo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

si indica, se esiste, la somma della serie in x, il limite cioè in x della successione $S_n(x)$ delle somme parziali.

I teoremi prima enunciati assumono per la serie di funzioni la seguente forma assai espressiva

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0);$$

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x);$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\, dx .$$

Alla seconda formula si dà il nome di derivazione termine a termine, alla terza quello di integrazione termine a termine.

Per la serie di funzioni si può dare anche il concetto di converenza assoluta in un punto x; si dirà infatti che la serie di funzioni di termine generale f_n converge assolutamente nel punto x se la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$$

converge.

Ovviamente una serie di funzioni convergente assolutamente in un punto vi converge anche puntualmente.

Una serie di funzioni si dirà convergente totalmente su un intervallo $[a,b]$ quando converge la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

La convergenza totale su $[a,b]$ assicura la convergenza puntuale e quella uniforme su $[a,b]$ stesso.

2. Convergenza puntuale ed uniforme

Si studi la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni e serie di funzioni.

1) $\left\{\dfrac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}\right\}$

2) $\left\{x\dfrac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}\right\}$

3) $\left\{\dfrac{2}{\pi}\,|\mathrm{arctg}\ nx|\right\}$

4) $\left\{n\ \mathrm{sen}\ \dfrac{x}{n}\right\}$

5) $\{nx\ e^{-nx}\}$

6) $\left\{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right\}$

7) $\left\{n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)\right\}$

8) $\left\{x\ \mathrm{sen}\ \dfrac{1}{nx}\right\}$

9) $\{x^n\}$

10) $\{nx\ (1-x)^n\}$

11) $\{e^{-nx^2}\}$

12) $\{n^2x\ (1-x^2)^n\}$

13) $\left\{e^{-\left(\frac{x}{n}\right)^2}\right\}$

14) $\{xe^{-nx^2}\}$

15) $\{nxe^{-nx^2}\}$

16) $\{\mathrm{sen}^n x\}$

17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$

18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\lg\left(1+\frac{|x|}{n^2}\right)$

19) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{sen}\ e^{-(nx)^2}$

20) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-|\mathrm{arctg}\ nx|\right)^2$

21) $\left\{\dfrac{n}{x^n}\right\}$

22) $\left\{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{n}}\right\}$

23) $\{x^n\ \lg x\}$

24) $\{x^{\sqrt{n}}\ \mathrm{arctg}\ (1-x)\}$

25) $\{\sqrt{n}\ e^{-nx^2}\}$

26) $\left\{\dfrac{n^k x}{n^h x^2+1}\right\}$, $k,\ h\in\mathbb{N}_0$

27) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1+nx^2}-\frac{1}{1+(n-1)\ x^2}\right]$

28) $\left\{\dfrac{e^{-n|x|}}{n^2+x^2}\right\}$

29) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\ \lg\left(1+\frac{x^2}{n}\right)$

30) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\ \lg\left(1+\frac{x^2}{n}\right)$

31) $\left\{\dfrac{1}{1+nx}\right\}$

Soluzioni

1) Si ha convergenza verso la funzione $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ puntuale su tutto R, uniforme negli insiemi del tipo $]-\infty,-\alpha]\cup[\alpha,+\infty[$ con $\alpha>0$.

2) Si ha convergenza verso la funzione $|x|$ puntuale su tutto R, uniforme su tutto R.

3) Si ha convergenza verso la funzione $f(x)=\begin{cases}1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ puntuale su tutto R, uniforme negli insiemi del tipo $]-\infty,-\alpha]\cup[\alpha,+\infty[$ con $\alpha>0$.

4) Si ha convergenza verso la funzione x puntuale su tutto R uniforme su insiemi del tipo $]-\alpha,\alpha[$ $\alpha>0$.

5) Si ha convergenza verso la funzione identicamente nulla puntuale per $x\geq 0$, uniforme sugli insiemi del tipo $[\alpha,+\infty[$ con $\alpha>0$.

6) Si ha convergenza verso la funzione e^x puntuale su tutto R uniforme su ogni intervallo del tipo $]-\alpha,\alpha[$ con $\alpha>0$.

7) Si ha convergenza verso la funzione $\lg x$ puntuale per $x>0$, uniforme su ogni intervallo del tipo $]a,b[$ con $a>0$ e $b<+\infty$.

8) Si ha convergenza verso la funzione identicamente nulla puntuale su R, uniforme su tutto R.

9) Si ha convergenza verso la funzione $f(x)=\begin{cases}1 & x=1\\ 0 & |x|<1\end{cases}$, puntuale su $]-1,1]$, uniforme su ogni intervallo del tipo $]-\alpha,\alpha[$ con $0<\alpha<1$.

10) Si ha convergenza verso la funzione identicamente nulla su $[0,2[$ puntuale, uniforme su intervalli $]1-\delta,\ 1+\delta[$ con $0<\delta<1$.

11) Si ha convergenza verso la funzione $f(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$, puntuale su tutto R, uniforme su ogni insieme del tipo $]-\infty,-\alpha]\cup[\alpha,+\infty[$ con $\alpha>0$.

12) Si ha convergenza verso la funzione identicamente nulla puntuale su $]-\sqrt{2},\ \sqrt{2}[$, uniforme su ogni intervallo del tipo $]-b,\ -a[\cup]a,b[$ con $0<a<b<\sqrt{2}$.

13) Si ha convergenza verso la funzione che vale identicamente 1, puntuale su R, uniforme su intervalli del tipo $(-a,a)$ $a>0$.

14) Si ha convergenza verso la funzione identicamente nulla su tutto R, uniforme su tutto R.

15) Si ha convergenza verso la funzione identicamente nulla su tutto R, uniforme su ogni insieme del tipo $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$ con $a>0$.

16) Si ha convergenza verso la funzione

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=\pi/2+2k\pi \quad k\in Z\\ 0 & x\neq\pi/2+k\pi \quad k\in Z\end{cases},$$

puntuale su tutto R, uniforme su ogni intervallo del tipo $]\pi/2+k\pi+\sigma,\pi/2+(k+1)\pi-\sigma[$ con $0<\sigma<\pi$, $k\in Z$.

17) Si ha convergenza totale su ogni intervallo del tipo $]-a,a[$ con $a>0$.

18) Si ha convergenza totale su ogni intervallo del tipo $]-a,a[$ con $a>0$.

19) Si ha convergenza totale su ogni insieme del tipo $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$ con $a>0$.

20) Si ha convergenza totale su ogni insieme del tipo $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$ con $a>0$.

21) Si ha convergenza puntuale verso la funzione identicamente nulla per $|x|>1$, uniforme su ogni insieme del tipo $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$ con $a>1$, divergenza per $0<x\leq 1$. Non vi è limite per $-1\leq x<0$.

22) Si ha convergenza puntuale su tutto R verso la funzione che vale identicamente 1, uniforme sui limitati.

23) Si ha convergenza puntuale a 0 su $[0,1]$, uniforme sullo stesso insieme, divergenza per $x>1$.

24) Si ha convergenza puntuale e uniforme verso 0 su $[0,1]$, divergenza per $x>1$.

25) Si ha convergenza puntuale verso 0 su $R-\{0\}$, uniforme su insiemi del tipo $]-\infty,a]\cup[a,+\infty[$ con $a>0$, divergenza positiva in 0.

26) Se $k<h$ si ha convergenza puntuale verso $f(x)=0$ su tutto R; se è $k<\frac{h}{2}$ la convergenza è uniforme. La convergenza è uniforme su ogni insieme del tipo $]-\infty,-a[\cup[a,+\infty[$ con $a>0$. Se $k=h=0$ si ha conv. unif. in tutto R verso $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$; se $k=h\neq 0$ $f_n(x)$ converge puntualmente ad

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ 1/x & x\neq 0\end{cases}$$

La convergenza è uniforme negli insiemi del tipo $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$ con $a>0$.
Se è $k>h$ c'è convergenza solo per $x=0$.

27) La serie converge in ogni punto di R ad

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ -1 & x\neq 0\end{cases}$$

la conv. è unif. in ogni insieme del tipo $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$ con $a>0$.

28) Converge uniformemente alla funzione identicamente nulla in tutto R.

29) Converge solo per $x=0$.

30) Converge per ogni $x\in R$; la convergenza è totale su ogni intervallo $[-a,a]$ con $a>0$.

31) Converge puntualmente su $[0,+\infty[$ ad

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases};$$

la convergenza è uniforme su ogni intervallo $[a,+\infty[$ con $a>0$.

Svolgimento

1) Per x fissato e diverso da zero si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{x}{|x|}\,\frac{1}{n}\,\frac{n}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2x^2}}} = \frac{x}{|x|}$$

mentre per $x=0$ e per ogni n si ha ovviamente

$$\frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}} = 0.$$

La successione di funzioni in esame pertanto converge puntualmente alla funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases}\dfrac{x}{|x|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

per ogni $x\in R$.
Poiché la funzione limite non è continua nello zero non è possibile che la convergenza sia uniforme su un qualsiasi intervallo aperto contenente lo zero o tale da avere uno degli estremi nello zero in quanto se tale fosse la convergenza, essendo le funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}$$

continue su tutto R la funzione limite dovrebbe essere continua nello 0.
Sia allora J un intervallo del tipo $[a,+\infty[$, con $0<a$.
Si deve calcolare il

$$\sup_{x\in[a,+\infty[}\left|\frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}} - \frac{x}{|x|}\right| = M_n.$$

Poiché $x>0$, $|x|=x$ pertanto $x/|x|=1$, inoltre si osservi che

$$n\,|x| \le \sqrt{1+n^2x^2}.$$

Pertanto si ha

$$\left|\frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}} - \frac{x}{|x|}\right| = 1 - \frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}.$$

D'altro canto

$$\left(1-\frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}\right)' = -\frac{n\left(1+n^2x^2\right) - n^3x^2}{\left(1+n^2x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{n}{\left(1+n^2x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

La funzione

$$1-\frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}$$

avendo derivata negativa è decrescente e pertanto assume il suo massimo nell'estremo inferiore dell'intervallo $[a,+\infty[$. Si ha così:

$$M_n = 1-\frac{na}{\sqrt{1+n^2a^2}}.$$

Tale quantità per quanto già provato converge a 0 per n che tende a $+\infty$.
E così pertanto provata la convergenza uniforme su J.
Si osservi che allo stesso modo si può provare la convergenza uniforme su ogni intervallo del tipo $]-\infty,b]$ con $b<0$.

2) Si osservi che ad x fissato non negativo

$$\lim_{n\to+\infty} x\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}} = x\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{nx}}{e^{nx}}\frac{1-e^{-2nx}}{1+e^{-2nx}} = x,$$

Analogamente per x non positivo

$$\lim_{n\to+\infty} x\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}} = x\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-nx}}{e^{-nx}}\frac{e^{+2nx}-1}{e^{-2nx}+1} = -x,$$

Pertanto la successione di funzioni f in esame converge su tutto R alla funzione $|x|$.
Poiché le funzioni che costituiscono la successione sono pari basterà studiare la convergenza uniforme su $[0,+\infty[$.
Proviamo a tale scopo che vi è convergenza uniforme su tutto $[0,+\infty[$.
Si tratta, posto

$$M_n = \sup_{x\in[0,+\infty[}\left||x| - x\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}\right|,$$

di provare che

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = 0.$$

Si osservi che $0\le\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}\le 1$, $|x|=x$ per $x\ge0$ quindi si osservi ancora che se a è un numero reale positivo posto

$$M_n'(a) = \sup_{x\in[0,a]} x\left(1-\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}\right)$$

$$M_n''(a) = \sup_{x\in[a,+\infty[} x\left(1-\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}\right)$$

si ha

$$M_n \le M_n'(a) + M_n''(a)$$

e ancora

$$M_n'(a) \le a.$$

Si osservi ancora che

$$\operatorname{tgh} nx = \frac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}},$$

e si ricordi che $(\operatorname{tgh} x)'=1/(\cosh x)^2$.
Pertanto per $x\ge0$

$$(f(x)-f_n(x))' = (x(1-\operatorname{tgh} nx))' = 1-\operatorname{tgh} nx-\frac{nx}{(\cosh nx)^2}$$

$$=\frac{(\cosh nx)^2 - \operatorname{senh} nx\cosh nx - nx}{(\cosh nx)^2} = \frac{1+e^{-2nx}-2nx}{2(\cosh nx)^2}.$$

D'altro canto

$$(1+e^{-2nx}-2nx)' = -2n\,(e^{-2nx}+1) \le 0$$

pertanto la funzione

$$\psi(x) = 1+e^{-2nx}-2nx$$

risulta decrescente essendo a derivata non positiva.

Il suo massimo su $[a,+\infty[$ è dunque raggiunto in a e vale

$$1+e^{-2na}-2na.$$

Poiché ad a fissato (a>0)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+e^{-2na}-2na\right) = -\infty$$

per il teorema di permanenza del segno esiste un indice n(a) tale che per $n\geq n(a)$

$$1+e^{-2na}-2na \leq -1.$$

Per $n\geq n(a)$ la funzione $f(x)-f_n(x)$ avendo derivata negativa è decrescente e avrà il suo valore massimo su $[a,+\infty[$ in a sicché in definitiva per $n\geq n(a)$

$$M_n''(a) \leq f(a) - f_n(a) = a\left(1-\frac{e^{na}-e^{-na}}{e^{na}+e^{-na}}\right).$$

Pertanto fissato a>0 per $n\geq n(a)$ si ha

$$M_n \leq M_n'(a) + M_n''(a) \leq a + a\left(1-\frac{e^{na}-e^{-na}}{e^{na}+e^{-na}}\right).$$

Fissato così $\varepsilon>0$ e scelto $a=\varepsilon/2$ e per ogni n tale che $n\geq n(a)$ e tale che

$$1-\frac{e^{na}-e^{-na}}{e^{na}+e^{-na}} < \frac{1}{2}$$

si ha

$$M_n \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2} < \varepsilon.$$

Si può così desumere che la successione M_n è infinitesima.

3) Si osservi che per $x\neq0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty}|\text{arctg } nx| = \frac{\pi}{2}$$

laddove arctg nx=0 per x=0.

La successione di funzioni $\{f_n\}$ in esame converge allora puntualmente alla funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases}1 & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

per ogni x in R.
Poiché la funzione limite non è continua nello zero, non è possibile che la convergenza sia uniforme su qualsiasi intervallo aperto contenente lo zero o tale da avere uno degli estremi nello zero in quanto se ciò accadesse essendo f_n continua su R la f dovrebbe essere continua in 0.
Sia allora J un intervallo del tipo $[a,+\infty[$ con 0<a.
Si deve provare che la quantità

$$M_n = \sup_{x\in[a,+\infty[}|f(x) - f_n(x)|$$

è infinitesima se si vuol mostrare che la convergenza è uniforme su $[a,+\infty[$. Si osservi che

$$|\text{arctg } nx|\,\frac{2}{\pi} < 1$$

dunque per $x\geq0$

$$|f(x) - f_n(x)| = 1-\frac{2}{\pi}\text{ arctg } nx.$$

Si ha ancora

$$|f(x) - f_n(x)|' = -\frac{2}{\pi}\,\frac{n}{1+n^2x^2}.$$

Pertanto la funzione $f(x)-f_n(x)$ risulta, essendo a derivata negativa, decrescente e il suo massimo nell'intervallo $[a,+\infty[$ è preso nel punto x=a. Si ha così (a>0)

$$M_n = 1-\frac{2}{\pi}\text{ arctg } na$$

e pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = 0.$$

In modo analogo (o anche utilizzando la parità di f_n) si può provare che si ha convergenza uniforme su ogni intervallo del tipo $]-\infty,b]$ con $b<0$.

4) Si osservi che per $x\neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} n \,\mathrm{sen}\,\frac{x}{n} = x \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{sen}\, x/n}{x/n} = x$$

laddove per $x=0$ sen $x/n=0$.
Pertanto la successione di funzioni $\{f_n\}$ in esame converge puntualmente alla funzione $f(x)=x$ su tutto R.
Per studiare la convergenza uniforme su intervalli del tipo $]-a,a[$ $a>0$, essendo f_n dispari, basterà studiarla su intervalli del tipo $[0,a[$ $a>0$.
A questo scopo si tratta di studiare la quantità

$$M_n = \sup_{x\in[0,a[} |f_n(x)-f(x)| = \left|x-n\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{n}\right|.$$

Si osservi che per $x=0$ si ha $f_n(x)-f(x)=0$ mentre per $x>0$ essendo

$$\frac{\mathrm{sen}\, x/n}{x/n} < 1$$

si ha

$$|f_n(x)-f(x)| = x\left(1-\frac{\mathrm{sen}\, x/n}{x/n}\right).$$

D'altro canto grazie alla formula di Taylor col resto di Lagrange di punto iniziale 0 si ha

$$\mathrm{sen}y=y - \frac{(\mathrm{sen}\bar{y})}{2}\, y^2 \qquad 0<\bar{y}<y$$

e pertanto con $0<\bar{y}_n<x/n$ si ha

$$|f_n(x)-f(x)| = x\left[1-\frac{\frac{x}{n} - \frac{1}{2}(\mathrm{sen}\ \bar{y}_n)\left(\frac{x}{n}\right)^2}{x/n}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{n}\cdot \mathrm{sen}\ \bar{y}_n \le \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{n}.$$

Si può pertanto concludere, che

$$M_n \le \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{n}$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = 0.$$

La convergenza è pertanto uniforme su $[0,a[$ e di conseguenza su $]-a,a[$ per ogni a.
La convergenza non può essere uniforme su $[0,+\infty[$.
Infatti se lo fosse si dovrebbe avere che la quantità

$$M_n = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)-f(x)|$$

dovrebbe essere infinitesima, laddove scegliendo $x_m=mn\pi$ si ha subito

$$|f_n(x_m)-f(x_m)| = mn\pi$$

e pertanto $M_n=+\infty$ per ogni n.

5) Si osservi che a x fissato non negativo si ha, applicando ad esempio il risultato dell'esercizio 1) del paragrafo 3 del capitolo

$$\lim_{n\to+\infty} nxe^{-nx} = x \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^{nx}} = +\infty.$$

La successione di funzioni $\{f_n\}$ converge pertanto alla funzione identicamente nulla per $x\geq 0$.
Per studiare la convergenza uniforme su intervalli del tipo $[0,a[$ con $a>0$ si deve valutare la quantità

$$M_n = \sup_{x\in[0,a[} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,a[} nxe^{-nx}$$

A tale scopo si osservi che $f_n'(x) = ne^{-nx}(1-nx)$.
Pertanto f_n è crescente per $0\leq x\leq 1/n$ e decrescente per $x\geq 1/n$. Il punto $x_n=1/n$ sarà pertanto punto di massimo per

f_n; il valore massimo sarà

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1}.$$

Poiché per n tale che $n>1/a$ si ha $1/n\in[0,a[$ si può concludere che per tale n $M_n=e^{-1}$. Pertanto M_n non è una successione infinitesima e la convergenza non può essere uniforme.
Per studiare la convergenza uniforme su intervalli del tipo $[a,+\infty[$ con $a>0$ si ponga ora

$$M_n' = \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)|.$$

Per quanto già osservato per $n>1/a$ la funzione f_n è decrescente su $[a,+\infty[$ e dunque $M_n' = f_n(a) = nae^{-na}$ sicché si può subito concludere $(a>0)$ che M_n' è una successione infinitesima e che quindi si ha convergenza uniforme su $[a,+\infty[$ per ogni $a>0$.

6) Si osservi che ad esempio grazie al limite fondamentale f) della tabella del paragrafo 2 del capitolo VI si ha per $x\neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = e^x$$

laddove per $x=0$ $(1+x/n)^n=1$ e dunque la successione di funzioni in esame converge puntualmente su tutto R alla funzione $f(x)=e^x$.
Per studiare la convergenza uniforme si osservi innanzitutto che grazie alla formula di Taylor col resto di Lagrange di punto iniziale 0 si ha

$$e^y = 1+y+\frac{e^{\bar{y}}}{2}\,y^2 \qquad |\bar{y}|<|y|$$

e quindi per ogni x

$$e^{\frac{x}{n}} \geq 1+\frac{x}{n}$$

$$e^{-\frac{x}{n}} \geq 1-\frac{x}{n}$$

sicché per $x\geq -n$, essendo ambo i membri della disuguaglianza non negativi

$$e^x \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 0$$

e per $x\leq n$ similmente

$$e^{-x} \geq \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \geq 0.$$

Si ha così che per $-n\leq x\leq n$

$$|f_n(x)-f(x)| = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x\left[1-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\right]$$

$$\leq e^x\left[1-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right] = e^x\left[1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right].$$

Ricordato ora che

$$a^n-b^n = (a-b)\ (a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b)$$

si ha

$$1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = \frac{x^2}{n^2}\left[\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{n-1}+\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{n-2}+\ldots+1\right]$$

e per $-n\leq x\leq n$

$$1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq \frac{x^2}{n^2}\quad n = \frac{x^2}{n}.$$

Si ottiene così la diseguaglianza valida per $-n\leq x\leq n$

$$|f_n(x)-f(x)| \leq e^x\ \frac{x^2}{n}.$$

Grazie a tale disuguaglianza si può subito stabilire che vi è convergenza uniforme su ogni intervallo del tipo $]-a,a[$ $(a>0)$. Infatti posto

$$M_n = \sup_{x\in]-a,a[} |f_n(x)-f(x)|$$

si ha subito per $n>a$

$$M_n \le \sup_{x\in[-a,a]} e^x \frac{x^2}{n}.$$

Posto

$$L = \sup_{x\in[-a,a]} e^x x^2 < +\infty$$

si ottiene allora

$$M_n \le \frac{L}{n}$$

e la successione M_n risulta pertanto infinitesima.
Si può anche verificare che la convergenza non può essere uniforme su tutto $[0,+\infty[$. Infatti scelto $x_n=n$ si ha

$$|f_n(x_n)-f(x_n)| = e^n-2^n.$$

D'altro canto ovviamente posto

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)-f(x)| = M_n'$$

si ha subito

$$e^n-2^n \le M_n'$$

e poiché

$$\lim_{n\to+\infty} e^n - 2^n = +\infty,$$

la successione M_n' non può essere infinitesima.
Analogamente la convergenza non può essere uniforme su $]-\infty,0]$. Infatti posto $x_n=-3n$ si ha

$$|f_n(x_n)-f(x_n)| = |e^{-3n}-(-2)^n|$$

e posto dunque

$$\sup_{x\in]-\infty,0]} |f_n(x)-f(x)| = M_n''$$

si ha

$$M_n'' \ge |e^{-3n}-(-2)^n|.$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} |e^{-3n}-(-2)^n| = +\infty$$

la successione M_n'' non può essere infinitesima.

7) Si osservi che l'insieme comune di definizione delle funzioni $f_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$ è $A=\{x:x\ge 0\}$.
Per $x=0$ si ha $f_n(0)=-n$ e pertanto la successione di funzioni diverge negativamente per $x=0$.
Per $x\ne 0$ si osservi che grazie all'esercizio **9)** del paragrafo 3.3 del capitolo VI

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{1/n} = \lim_{y\to 0^+} \frac{x^y-1}{y} = \lg x.$$

Pertanto f_n converge per $x\ne 0$ alla funzione $f(x)=\lg x$.
Per studiare la convergenza uniforme della successione f_n si cominci con l'osservare che grazie al teorema di Lagrange applicato alla funzione $y\to x^y$ $(x\ne 0)$ sull'intervallo $[0,1/n]$ si ha, osservando che $(x^y)'=(\lg x)x^y$, per un opportuno y_n

$$\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{1/n} = (\lg x)\, x^{y_n} \qquad 0<y_n<\frac{1}{n}$$

(ovviamente y_n dipende da x ma non ne indicheremo l'esplicita dipendenza).

Si ha allora per ogni n $(0<y_n<1/n)$ e per ogni $x>0$

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{1/n}-\lg x\right| = |(\lg x)\cdot x^{y_n}-\lg x| = (\lg x)\ |1-x^{y_n}|.$$

Si ponga allora con $0<a<1$ e $b>1$

$$M_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)|;$$
$$M_n' = \sup_{x\in[a,1]} |f_n(x)-f(x)|;$$
$$M_n'' = \sup_{x\in[1,b]} |f_n(x)-f(x)|.$$

Ovviamente

$$M_n \le M_n'+M_n''.$$

Si osservi allora che

$$M_n' = \sup_{x\in[a,1]} |\lg x|\,|1-x^{y_n}|.$$

Ovviamente

$$\sup_{x\in[a,1]} |\lg x| = |\lg a|.$$

D'altro canto poiché $0<x\le 1$, $0<y_n<1/n$ si ha

$$|1-x^{y_n}| = 1-x^{y_n} < 1-x^{\frac{1}{n}}$$

e

$$\sup_{x\in[a,1]} 1-x^{\frac{1}{n}} = 1-a^{\frac{1}{n}}$$

essendo la funzione $x\to x^{\frac{1}{n}}$ crescente.
Pertanto

$$M_n' \le |\lg a| \left(1-a^{\frac{1}{n}}\right).$$

Analogamente

$$M_n'' \le \sup_{x\in[1,b]} |\lg x|\,|1-x^{y_n}|;$$
$$\sup_{x\in[1,b]} |\lg x| = |\lg b|.$$

Ancora poiché $1\le x<b$ $0<y_n<1/n$ si ha

$$|1-x^{y_n}| = x^{y_n}-1<x^{\frac{1}{n}}-1$$

e

$$\sup_{x\in[1,b]} x^{\frac{1}{n}}-1 = b^{\frac{1}{n}}-1.$$

In conclusione

$$M_n \le M_n' + M_n'' \le |\lg b|\,|b^{\frac{1}{n}}-1| + |\lg a|\,|a^{\frac{1}{n}}-1|$$

e dunque la successione M_n risulta infinitesima.
La convergenza è pertanto uniforme su ogni intervallo del tipo $[a,b]$ con $a>0$.
La convergenza non può essere uniforme su un intervallo del tipo $[a,+\infty[$ $(a>0)$. Si osservi infatti che posto $x_n=n^n$ si ha

$$|f_n(x_n)-f(x_n)| = n(n-1) - n\lg n$$

e dunque, posto

$$M_n''' = \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)-f(x)|$$

essendo

$$M_n''' \ge |f_n(x_n)-f(x_n)| = n(n-1) - n\lg n$$

si ha $\lim_{n\to+\infty} M_n''' = +\infty$.

Analogamente la convergenza non può essere uniforme su un intervallo del tipo $]0,b]$ $(b>0)$. Infatti posto $x_n=(1/n)^n$ si ha: $|f_n(x_n)-f(x_n)| = n\lg n+1-n$

e dunque posto

$$M_n^{iv} = \sup_{x\in]0,b]} |f_n(x)-f(x)|$$

essendo

$$M_n^{iv} \ge |f_n(x_n)-f(x_n)| = n\lg n+1-n$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} M_n^{iv} = +\infty.$$

8) Si osservi che le funzioni $f_n(x)=x$ sen $1/nx$ non sono definite nello 0, tuttavia esse risultano ivi infinitesime, pertanto è possibile pensarle prolungate per continuità nello 0 col valore 0 e ciò noi faremo. Si osservi che per $x\neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{nx} = 0.$$

Pertanto la successione f_n converge puntualmente alla funzione f identicamente nulla.
Per studiare la convergenza uniforme si osservi innanzitutto che

$$\left|x \operatorname{sen} \frac{1}{nx}\right| = \frac{1}{n}\left|\frac{\operatorname{sen} 1/nx}{1/nx}\right|.$$

D'altro canto la funzione $y\to(\operatorname{sen} y)/y$ (prolungata per continuità nello 0 col valore 1) è una funzione limitata su R. Infatti essa è continua e

$$\lim_{y\to\pm\infty} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 0.$$

Pertanto

$$\sup_{x\in R}\left|x \operatorname{sen} \frac{1}{nx}\right| \leq \frac{1}{n}\sup_{y\in R}\left|\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right|$$

e dunque si ha convergenza uniforme su tutto R.

9) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |x|<1 \\ 1 & \text{se } x=1 \\ +\infty & \text{se } x>1 \end{cases}$$

se invece $x\leq -1$ ovviamente non esiste il limite per n che tende a $+\infty$ di x^n.
Dunque la successione di funzioni f_n in esame converge puntualmente su $]-1,1]$ alla funzione f così definita

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=1 \\ 0 & \text{se } |x|<1. \end{cases}$$

La convergenza non può essere uniforme su intervalli del tipo $[a,1]$ (o anche $[a,1[$) con $-1<a$ in quanto se lo fosse essendo la f_n continua in 1 tale dovrebbe risultare la funzione f, cosa questa chiaramente non vera. Per analoghi motivi la convergenza non può essere uniforme neanche su intervalli del tipo $]-1,a]$ con $a<1$. Si osservi comunque che scegliendo $n=2k$ e $x_n=-1+1/2k$ si ha allora

$$f_n(x_n) = f_n(-x_n) = \left(1-\frac{1}{2k}\right)^{2k}.$$

Si può allora dedurre utilizzando l'esercizio 7) del paragrafo 3.3 del capitolo VI (parte prima)

$$\lim_{k\to+\infty} \lg f_{2k}(x_{2k}) = \lim_{k\to+\infty} -\frac{\lg(1-1/2k)}{-1/2k} = -\lim_{y\to 0}\frac{\lg(1+y)}{y} = -1.$$

Pertanto

$$\lim_{k\to+\infty} f_{2k}(x_{2k}) = e^{-1}.$$

Poiché, allorché k è sufficientemente grande

$$\sup_{x\in]-1,a]} |f_{2k}(x)| \geq |f_{2k}(x_{2k})|$$

ne segue che la successione

$$\left\{\sup_{x\in]-1,a]} |f_{2k}(x)|\right\}$$

non può essere infinitesima.

La convergenza è infine uniforme su ogni insieme del tipo $]-a,a[$ $0<a<1$. Infatti si ha subito

$$\sup_{x\in]-a,a[} |f_n(x)-f(x)| = a^n$$

e ovviamente $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$ essendo $0<a<1$.

10) Si osservi che posto $f_n(x)=nx(1-x)^n$, grazie al limite notevole (i) del paragrafo 1.4 del capitolo VI si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0\le x<2 \\ +\infty & x<0 \end{cases}$$

mentre tale limite non esiste per $x\ge 2$.
Per studiare la convergenza uniforme su intervalli del tipo $]1-\delta,\ 1+\delta[$ con $0<\delta<1$ si osservi che

$$(nx(1-x)^n)'=n(1-x)^{n-1}\ [1-(n+1)x].$$

Pertanto $f_n'(x) = 0$ per $x=1$ e $x=1/(n+1)$.
Se n è dispari solo per $x\le 1/(n+1)$ si ha $f_n'(x)\ge 0$ sicché per $n+1>1/(1-\delta)$, f_n è decrescente su $]1-\delta,1+\delta[$, e risulta allora

$$M_n = \sup_{x\in]1-\delta,\ 1+\delta[} |f_n(x)| \le |f_n(1-\delta)| + |f_n(1+\delta)|$$

Se n è pari $f_n'(x)\ge 0$ per $x\le 1/(n+1)$ e per $x\ge 1$ sicché per $n+1>1/(1-\delta)$ f_n è decrescente su $]1-\delta,1[$ ed è crescente per $x\ge 1$. Si ha pertanto ancora

$$M_n = \sup_{x\in]1-\delta,\ 1+\delta[} |f_n(x)| \le |f_n(1-\delta)| + |f_n(1+\delta)|.$$

Si può concludere che la successione M_n è infinitesima e la convergenza è dunque uniforme.
La convergenza non può essere uniforme su intervalli del tipo $]0,a[$ con $a<2$ né su intervalli del tipo $]a,2[$ con $0<a$. Verifichiamolo per intervalli del tipo $]a,2[$. Se lo fosse

si avrebbe, per $\varepsilon>0$ e per ogni n più grande di un opportuno n_ε

$$\sup_{x\in]a,2[} |f_n(x)| < \varepsilon$$

e dunque essendo le funzioni f_n continue in 2 si avrebbe $|f_n(2)| < \varepsilon$ per $n\ge n_\varepsilon$ e ciò è ovviamente impossibile.
Per verificarlo invece su intervalli del tipo $]0,a[$ si scelga come suggerito dalla discussione precedente $x_n=1/(n+1)$; si ha

$$f_n(x_n) = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Ovviamente

$$M_n = \sup_{x\in]0,a[} |f_n(x)| \ge \frac{n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

ma grazie all'esercizio **5)** del paragrafo 3 del capitolo VI si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1}.$$

Pertanto la successione M_n non può risutare infinitesima.

11) Ovviamente per $x\ne 0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-nx^2} = 0$$

mentre per $x=0$

$$e^{-nx^2} = 1.$$

Pertanto la successione di funzioni f_n in esame converge puntualmente su tutto R alla funzione f così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x\ne 0 \\ 1 & x=0. \end{cases}$$

La convergenza non può essere uniforme in nessun intervallo cui appartenga lo zero o uno degli estremi del quale sia lo zero in quanto se ciò accadesse f dovrebbe essere continua in zero, cosa che ovviamente non è.
Si consideri ora un qualsiasi intervallo del tipo $[a,+\infty[$ con $a>0$. Posto

$$M_n = \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)-f(x)|$$

si ha

$$M_n = \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)|.$$

Si osservi ora che la funzione $x\to e^{-nx^2}$ è decrescente per $x\geq 0$ pertanto

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = e^{-na^2}$$

e dunque la successione M_n risulta infinitesima e la convergenza è uniforme.
Si osservi che per studiare la successione di funzioni in esame si poteva utilizzare l'esercizio **9)** ponendo

$$y=\frac{1}{e^{x^2}}.$$

12) Si osservi che grazie al limite notevole (i) del paragrafo 1.4 del capitolo VI si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n^2x\left(1-x^2\right)^n = 0$$

per ogni x tale che $|1-x^2| < 1$ cioè per gli x tali che $x\in]-\sqrt{2},0[\ \cup\ ]0,\sqrt{2}[$.
D'altro canto per $x=0$ si ha $nx(1-x^2)^n=0$ sicché la successione di funzioni f_n in esame converge puntualmente su $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ alla funzione f identicamente nulla. La successione di funzioni non converge per $|x| > \sqrt{2}$.
Si osservi che ogni funzione è dispari.

Per studiare la convergenza uniforme si osservi che

$$f_n'(x)=n^2(1-x^2)^{n-1}[1-(2n+1)x^2]$$

sicché $f_n'(x)=0$ per $x=\pm 1$ e $x=\pm 1/\sqrt{2n+1}$.
Per n dispari si osservi che $f_n'(x)\geq 0$ per $|x| \leq 1/\sqrt{2n+1}$; per n pari invece $f_n'(x)\geq 0$ per $|x| \leq 1/\sqrt{2n+1}$ e per $|x| \geq 1$.
Si ha così che il punto $x_n = 1/\sqrt{2n+1}$ è punto di massimo relativo.
Si può allora facilmente provare che la convergenza non può essere uniforme su nessun intervallo del tipo $]-b,b[$ con $0<b<\sqrt{2}$. Infatti posto

$$M_n = \sup_{x\in]-b,b[} |f_n(x)-f(x)|$$

si ha ad esempio

$$M_n \geq f_n(x_n) = \frac{n^2}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$$

e poiché

$$\lim_{n\to+\infty} n\lg\frac{2n}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}\,\frac{\lg(1-1/(2n+1))}{1/(2n+1)} = -\frac{1}{2}$$

la successione $f_n(x_n)$ diverge positivamente, la successione M_n non può allora essere infinitesima e dunque la convergenza non può essere uniforme.
Sia invece I un intervallo del tipo $[a,b]$ con $a>0$ e $b<\sqrt{2}$, allora, posto

$$M_n' = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)|$$

non appena n verifica $1/\sqrt{2n+1}\leq a$ si ha

$$M_n' \leq |f_n(a)| + |f_n(b)|$$

(per n dispari f_n decresce in $[a,b[$, per n pari decresce su $[a,1]$, cresce su $[1,b[$ e $f_n(1)=0$). Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(a) = \lim_{n\to+\infty} f_n(b) = 0,$$

M_n' risulta infinitesima e la convergenza dunque uniforme. La convergenza non può essere uniforme su $[a,\sqrt{2}[$ $(a>0)$ poiché la funzione limite (la funzione identicamente nulla) è continua in $\sqrt{2}$, continua per ogni n è f_n, quindi se la con-vergenza fosse uniforme si dovrebbe avere

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(\sqrt{2}) = 0$$

e ciò è assurdo.

13) Si osservi che la successione di funzioni in esame converge puntualmente su tutto R alla funzione f che vale identicamente 1 in quanto

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\left(\frac{x}{n}\right)^2} = 1 \ \forall x\in R.$$

Per studiare la convergenza uniforme della successione f_n si osservi che $1\geq f_n(x)$ per ogni x e inoltre

$$f_n'(x) = \left(\left(e^{-\left(\frac{x}{n}\right)}\right)^2\right)' = e^{-\left(\frac{x}{n}\right)^2} \cdot \left(\frac{-2x}{n^2}\right).$$

Pertanto f_n è una funzione (pari) crescente per $x\leq 0$ e decrescente per $x\geq 0$.
È facile allora provare la convergenza uniforme su ogni intervallo del tipo $]-a,a[$ $a>0$. Infatti posto

$$M_n = \sup_{x\in]-a,a[} |f_n(x)-f(x)|$$

si ha

$$M_n = 1-e^{-\frac{a^2}{n^2}}$$

e dunque $\{M_n\}$ è infinitesima.

La convergenza non può essere uniforme su tutto R in quanto posto

$$M_n' = \sup_{x\in R} |f_n(x)-f(x)|$$

si ha

$$M_n' = \lim_{a\to-\infty} 1-e^{-\frac{a^2}{n^2}} = 1$$

e dunque $\{M_n'\}$ non è infinitesima.

14) Si osservi che per ogni x si ha

$$\lim_{n\to+\infty} x\ e^{-nx^2} = 0.$$

Pertanto la successione di funzioni f_n in esame converge puntualmente su tutto R alla funzione identicamente nulla. Per studiarne la convergenza uniforme si osservi che la funzione f_n è dispari e inoltre

$$f_n'(x) = e^{-nx^2}\left(1-2nx^2\right)$$

sicché il punto $x_n=+\sqrt{1/2n}$ è un punto di massimo assoluto. Si ha allora, posto

$$M_n = \sup_{x\in R} |f_n(x)-f(x)|$$

che

$$M_n = f_n\left(x_n\right) = \sqrt{\frac{1}{2n}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}.$$

La successione M_n è così infinitesima e la convergenza è uniforme su tutto R.

15) Si osservi che per ogni x grazie al limite notevole i) del paragrafo 1.4 del capitolo VI

$$\lim_{n\to+\infty} nx\ e^{-nx^2} = 0.$$

Pertanto la successione di funzioni $\{f_n\}$ in esame converge puntualmente su tutto R alla funzione f identicamente nulla. Per studiarne la convergenza uniforme si osservi che f_n è dispari e che

$$f_n'(x) = ne^{-nx^2}(1-2nx^2)$$

sicché il punto $x_n = 1/\sqrt{2n}$ è di massimo assoluto. Si ha allora posto

$$M_n = \sup_{x\in R} |f_n(x)-f(x)|$$

che

$$M_n = f_n(x_n) = \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}$$

e dunque la successione M_n diverge positivamente sicché la convergenza non è uniforme su tutto R.
Si fissi ora un a>0. È facile provare che la convergenza è uniforme in $[a,+\infty[$. Infatti, posto

$$M_n' = \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)-f(x)|$$

poiché non appena $n>\frac{1}{2a^2}$, f_n è decrescente e non negativa su $[a,+\infty[$ si ha

$$M_n' = f_n(a) = na\ e^{-na^2}$$

sicché $\{M_n'\}$ risulta infinitesima.

16) Si osservi che la successione di funzioni in esame può essere studiata utilizzando l'esercizio 9).
Infatti posto y=senx essa si riduce alla successione di funzioni $\{y^n\}$. Pertanto essa convergerà puntualmente alla funzione f così definita

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad k\in Z \\ 0 & x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad k\in Z \end{cases}$$

La convergenza sarà uniforme su ogni intervallo del tipo $]\pi/2+k\pi+\sigma, \pi/2+(k+1)\pi-\sigma[$ con $0<\sigma<\pi$.

17) Grazie alla formula di Taylor col resto di Lagrange di punto iniziale 0 si ha

$$\cos y = 1-\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6}\operatorname{sen}\overline{y} \qquad \text{con } |\overline{y}| < |y|$$

e dunque

$$\left|1-\cos\frac{x}{n}\right| \le \frac{1}{2}\frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{6}\frac{|x|^3}{n^3}.$$

Pertanto fissato a>1 si ha

$$\sup_{x\in]-a,a[} \left|1-\cos\frac{x}{n}\right| \le \frac{1}{2}\frac{a^2}{n^2} + \frac{1}{6}\frac{a^3}{n^3} \le \frac{a^3}{n^2}.$$

Poiché la serie di termine generale $1/n^2$ è una serie armonica generalizzata di ragione 2 essa converge. Pertanto la serie di funzioni in esame converge totalmente (e quindi uniformemente) su ogni intervallo del tipo $]-a,a[$.
La convergenza non può essere totale su tutto R. Infatti se lo fosse, posto

$$M_n = \sup_{R} \left|1-\cos\frac{x}{n}\right|$$

la successione M_n dovrebbe essere infinitesima laddove $M_n=1$ per ogni n.

18) Grazie alla formula di Taylor col resto di Lagrange di punto iniziale 0 si ha per y>0

$$\lg(1+y) = y-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\overline{y}}\right)^2 y^2 \qquad \text{con } 0<\overline{y}<y$$

e quindi

$$\left|\lg\left(1+\frac{|x|}{n^2}\right)\right| \le \frac{1}{2}\frac{x^2}{n^4} + \frac{|x|}{n^2}.$$

Pertanto fissato a>1 si ha

$$\sup_{x\in]-a,a[} \left|\lg\left(1+\frac{|x|}{n^2}\right)\right| \leq 2\,\frac{a^2}{n^2}.$$

Poiché la serie di termine generale $1/n^2$ è una serie armonica generalizzata di ragione 2 essa converge.
Pertanto la serie di funzioni in esame converge totalmente (e quindi uniformemente) su ogni intervallo del tipo $]-a,a[$.
La convergenza non può essere totale su tutto R, in quanto

$$\sup_{x\in R} \left|\lg\left(10+\frac{|x|}{n^2}\right)\right| = +\infty.$$

19) Grazie alla formula di Taylor con punto iniziale 0 e resto di Lagrange si ha

$$\operatorname{sen} y = y - \frac{y^2}{2}\operatorname{sen}\bar{y} \qquad |\bar{y}| < |y|$$

si ha

$$\left|\operatorname{sen} e^{-(nx)^2}\right| \leq e^{-(nx)^2} + \frac{e^{-3(nx)^2}}{2}.$$

Fissato allora a>0 e posto $I=]-\infty,-a[\cup]a,+\infty[$ si ha

$$\sup_{x\in I} \left|\operatorname{sen} e^{-(nx)^2}\right| \leq 2e^{-(na)^2}.$$

Si osservi ora che

$$e^{-(na)^2} = \left(\frac{1}{e^{a^2}}\right)^{n^2} \leq \left(\frac{1}{e^{a^2}}\right)^{n}$$

e la serie di termine generale $(1/e^{a^2})^n$ essendo una serie geometrica di ragione $1/e^{a^2}<1$ converge.
Pertanto la serie in esame converge totalmente e quindi uniformemente su I.

Si osservi che per x=0

$$e^{-(nx)^2} = 1$$

e quindi la serie in esame diverge positivamente in 0.

20) Si osservi che per x=0 arctg nx=0 e quindi la serie non può convergere in quanto il termine generale non è infinitesimo.
Si fissi ora $\sigma>0$. Per $|x|>\sigma>0$ si osservi che

$$\left(\frac{\pi}{2} - |\operatorname{arctg} nx|\right)^2 < \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\sigma\right)^2.$$

Si ricordi ora che

$$\lim_{y\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y\right) y=1.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi/2 - \operatorname{arctg} n\sigma}{1/n\sigma} = 1$$

e dunque la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - |\operatorname{arctg} nx|\right)^2$$

risulta avere lo stesso comportamento dalla serie di termine generale $1/n^2$ cioè dalla serie armonica generalizzata di ordine 2.
Essa pertanto converge totalmente per $|x|\geq\sigma$.

21) Si ha convergenza puntuale verso la funzione identicamente nulla per $|x|\geq 1$. La successione diverge positivamente per $0<x\leq 1$, non ha limite per $-1\leq x<0$.
Se a>1 e $|x|>a$ allora

$$\left|\frac{n}{x^n}\right| = \frac{n}{|x|^n} < \frac{n}{a^n}, \quad \sup_{|x|>a}\left|\frac{n}{x^n}\right| < \frac{n}{a^n}$$

e poiché la successione n/a^n è infinitesima si ha subito la convergenza uniforme sull'insieme $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$.
La convergenza non può essere uniforme su $]1,+\infty[$ in quanto

$$M_n = \sup_{x>1} \left|\frac{n}{x^n}\right| = n$$

e pertanto $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = +\infty$.
Analoga considerazione vale per l'intervallo $]-\infty,-1[$.

22) Si ha convergenza puntuale verso la funzione che vale identicamente 1 su R.
Sia $a>0$. Si osservi che per $|x|\le a$

$$0 \le \sqrt{1+\frac{x^2}{n}}-1 \le \sqrt{1+\frac{a^2}{n}}-1.$$

Pertanto

$$M_n = \sup_{|x|\le a}\left|\sqrt{1+\frac{x^2}{n}}-1\right| \le \sqrt{1+\frac{a^2}{n}}-1$$

sicché $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$ e la convergenza è uniforme su $[-a,a]$.
La convergenza non può essere uniforme su R in quanto

$$\sup_{x\in R} \sqrt{1+\frac{x^2}{n}}-1 = +\infty.$$

23) Le funzioni della successione non sono definite nell'origine. D'altro canto poiché

$$\lim_{x\to 0} x^n \lg x = 0$$

possiamo ritenerle estese per continuità nello 0 assegnando ad esse proprio il valore 0.
Si ha allora convergenza puntuale verso la funzione identicamente nulla su $[0,1]$ e divergenza positiva per $x>1$.
La convergenza è inoltre uniforme su $[0,1]$.

Infatti per calcolare

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |x^n \lg x| = \sup_{x\in[0,1]} (-x^n \lg x) = -\inf_{x\in[0,1]} x^n \lg x$$

si osservi che

$$(x^n \lg x)' = nx^{n-1}\left(\lg x+\frac{1}{n}\right).$$

La funzione $x^n \lg x$ (negativa) sarà decrescente per $x\le e^{-1/n}$ e crescente per $x\ge e^{-1/n}$, nulla in $x=0$ e $x=1$.
Pertanto

$$M_n = -(e^{-1/n})^n \lg (e^{-1/n})$$

e dunque $M_n=e^{-1}/n$.
La successione M_n risulta pertanto infinitesima.

24) Si ha convergenza puntuale verso la funzione identicamente nulla su $[0,1]$ e divergenza negativa per $x>1$.
La convergenza è inoltre uniforme su $[0,1]$.
Si osservi infatti che per la continuità della funzione $\operatorname{arctg}(1-x)$, fissato $\varepsilon>0$ esisterà un δ_ε $(0<\delta_\varepsilon<1)$ tale che per $1-\delta_\varepsilon<x\le 1$ si ha

$$|\operatorname{arctg}(1-x)| < \varepsilon;$$

d'altro canto

$$\sup_{x\in[0,1]} |\operatorname{arctg}(1-x)| = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

sicché per ogni n

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |x^{\sqrt{n}} \operatorname{arctg}(1-x)| \le (\delta_\varepsilon)^{\sqrt{n}}\,\frac{\pi}{4} + \varepsilon.$$

Poiché essendo $\delta_\varepsilon<1$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \delta_\varepsilon^{\sqrt{n}} = 0$$

si può scegliere n sufficientemente grande sicché allora si abbia

$$(\delta_\varepsilon)^{\sqrt{n}}\,\frac{\pi}{4} < \varepsilon.$$

Risulterà allora $M_n < 2\varepsilon$.
La successione M_n è così infinitesima e la convergenza pertanto uniforme.

25) Si osservi che per $x=0$ la successione di funzioni diverge positivamente, per $x\neq 0$ essa tende a 0 (si ricordi che $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0$).
Sia a un numero positivo; poiché per $x\geq 0$ la funzione

$$f_n(x) = \sqrt{n}\; e^{-nx^2}$$

è decrescente si ha

$$M_n = \sup_{|x|>a} \sqrt{n}\; e^{-nx^2} = \sqrt{n}\; e^{-na^2}.$$

Pertanto M_n risulta infinitesima e la convergenza è uniforme sugli insiemi del tipo $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$, $a>0$.

26) Sia

$$f_n(x) = \frac{n^k x}{n^h x^2+1}.$$

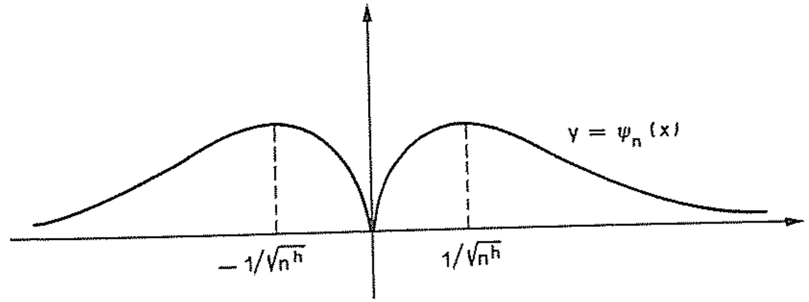
I caso: k<h L'ipotesi $k<h$ comporta che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0 \ \forall x\in R.$$

Per studiare la convergenza uniforme in $[0, +\infty[$ tracciamo il grafico della funzione

$$\psi_n(x) = |f_n(x)|;$$

tale grafico ha l'andamento disegnato in figura.



Pertanto

$$\max_{[0,+\infty[} \psi_n(x) = \max_{[0,+\infty[} |f_n(x)| = \left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n^h}}\right)\right| = \frac{n^{k-h/2}}{2}$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{[0,+\infty[} |f_n(x)| = \begin{cases} 0 & k<h/2 \\ 1/2 & k=h/2 \\ +\infty & k>h/2 \end{cases}$$

Ne segue che $f_n(x)$ *converge uniformemente solo nel caso* $k<h/2$.
Analogo risultato vale in $]-\infty,0]$ od in tutto R.
Si noti che la funzione limite ($f(x)=0$) *è continua in tutto R pur non essendoci convergenza uniforme.*
Sia adesso I un intervallo del tipo $[a,b]$, od anche $[a,+\infty[$ con $a>0$.
Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^h}} = 0$$

per n abbastanza grande (cfr. il grafico di $\psi_n(x)$) il massimo di $y_n(x)$ cade in $[0,a[$ e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \max_I \psi_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \max_I |f_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} |f_n(a)| = 0;$$

pertanto in I la convergenza è uniforme.
Analogo risultato vale in intervalli del tipo $[a,b]$ o $]-\infty,b]$ con $b<0$.
In definitiva vi è convergenza uniforme su tutti gli insiemi $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$ con $a>0$.

II caso k>h. In questo caso la successione converge solo per $x=0$; infatti si ha

$$f_n(x) = 0 \quad \forall n$$

ed inoltre per $x \neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x\cdot(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x>0 \\ -\infty & \text{se } x<0 \end{cases}$$

III caso k=h. In questo caso la successione converge per ogni $x\in R$; infatti se $h=k=0$ la successione si riduce a

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad \forall x\in R$$

e quindi

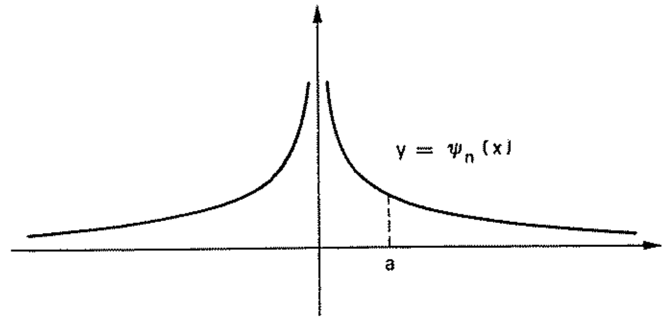
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

e banalmente la convergenza è uniforme.
Se è $h=k\neq 0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1/x & x\neq 0 \\ 0 & x=0. \end{cases}$$

Pertanto la successione converge in tutto R; la convergenza non può essere uniforme in R perché se lo fosse la funzione limite dovrebbe essere continua in ogni punto di R (teorema sulla continuità della funzione limite) mentre è discontinua in $x_0=0$.
Dimostriamo che la convergenza è uniforme in $[a,+\infty[$ con $a>0$. A tal fine tracciamo il grafico di

$$\psi_n(x) = |f(x)-f_n(x)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{n^k x}{1+n^k x^2}\right| = \frac{1}{|x|}\,\frac{1}{(1+n^k x^2)}.$$



Essendo $\psi_n(x)$ decrescente in $[a,+\infty[$ si ha

$$\psi_n(x) \le \frac{1}{a}\,\frac{1}{(1+n^k a^2)}, \quad \forall x\in [a,+\infty[$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{[a,+\infty[} \psi_n(x) = 0.$$

Analogamente si ha la convergenza uniforme in $]-\infty,b]$ con $b<0$.
Quindi c'è convergenza uniforme in tutti gli insiemi I del tipo $I=]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$ con $a>0$.

27) La somma parziale k-ma ha l'espressione seguente

$$S_k(x) = \left[\frac{1}{1+x^2}-1\right] + \left[\frac{1}{1+2x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right] + \dots + \left[\frac{1}{1+kx^2}-\frac{1}{1+(k-1)x^2}\right] = \frac{1}{1+kx^2}-1;$$

pertanto si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1+nx^2}-\frac{1}{1+(n-1)x^2}\right] = \lim_{k\to\infty} S_k(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ -1 & x\neq 0. \end{cases}$$

La convergenza non può essere uniforme in R (né in alcun intervallo contenente lo zero) perché la funzione $f(x)$, somma della serie, è discontinua in $x_0=0$.

Sia $a>0$; studiamo l'uniforme convergenza in $[a,+\infty[$; si ha facilmente

$$|f(x)-S_k(x)| = \frac{1}{1+kx^2} \le \frac{1}{1+ka^2}$$

e pertanto

$$\lim_{k\to\infty} \max_{[a,+\infty[} |f(x)-S_k(x)| = 0$$

cosicché la serie converge uniformemente in $[a,+\infty[$. Analogo comportamento si ha in $]-\infty,-a]$ e quindi in $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$.

28) Si ha subito che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$

uniformemente in R. Infatti

$$0 \le f_n(x) \le \frac{1}{n^2}$$

e quindi

$$\sup_{x\in R} |f_n(x)| \le \frac{1}{n^2}.$$

Ne segue

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in R} |f_n(x)| = 0.$$

29) Per $x=0$ la serie converge a zero; per $x\neq0$ ricordando che

$$\lim_{y\to0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n\log\left(1+\frac{x^2}{n}\right) = x^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{x^2} \log\left(1+\frac{x^2}{n}\right) = x^2\neq0$$

e quindi la serie data non può convergere.
Ne segue che la serie assegnata è convergente solo per $x=0$.

30) La serie data è convergente per ogni x poiché dalla relazione

$$\log(1+y) \le y$$

discende

$$\frac{1}{n} \log\left(1+\frac{x^2}{n}\right) \le \frac{x^2}{n^2}$$

e quindi la serie data converge perché maggiorata dalla serie convergente

$$x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Da tale relazione discende anche che la convergenza è totale in ogni intervallo $[-a,a]$ con $a>0$ poiché

$$\frac{1}{n} \log\left(1+\frac{x^2}{n}\right) \le \frac{a^2}{n^2} \qquad \forall x\in[-a,a].$$

31) La successione assegnata $\{f_n(x)\}$ con

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$$

ha senso per ogni n se $x\in[0,+\infty[$. Osservato inoltre che $f_n(0)=1$ si ha che

$$\lim_{n} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & x>0 \end{cases}$$

e la convergenza è puntuale in $[0,+\infty[$ ma non uniforme giacché la funzione limite è discontinua in $x=0$ mentre se la convergenza fosse uniforme la funzione limite $f(x)$ dovrebbe essere continua.
Sia adesso $x\in[a,+\infty[$ con $a>0$. Si ha

$$\max_{[a,+\infty[} |f_n(x)-f(x)| = \max_{[a,+\infty[} \left|\frac{1}{1+nx}\right| = \frac{1}{1+na}$$

e quindi la successione converge uniformemente in $[a,+\infty)$ poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+na} = 0.$$

3. Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Si calcolino i limiti al tendere di n all'infinito delle seguenti successioni

1) $\int_0^1 \frac{e^{-n|x|}}{n^2+x^2}\,dx$

2) $\int_1^2 \frac{nx}{(1+x^4)\,(n^3x^2+1)}\,dx$

3) $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{1+\operatorname{arctg} x}\,dx$

4) $\int_0^1 x^n\, e^{x^2}\,dx$

5) $\int_0^1 n^2\,(\cos x)\,x\,(1-x^2)^n\,dx$

6) $\int_0^{+\infty} e^{-(x/n)^2}\,dx$

7) $\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,dx$

8) $\int_0^1 nx\, e^{-nx^2}\,dx$

9) $\int_0^{+\infty} \left(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx\right)^2 dx$

10) $\int_0^1 \lg x\,\sqrt{1+\frac{x^2}{n}}\,dx$

11) $\int_0^{+\infty} \sqrt{n}\, e^{-n^4x^2}\,dx$

12) $\int_0^{+\infty} n\,\operatorname{arctg} x\, e^{-n\,x^2}\,dx$

Soluzioni

1) 0
2) 0
3) 0
4) 0
5) $+\infty$
6) $+\infty$
7) 0
8) 1/2
9) 0
10) -1
11) 0
12) 1/2

Svolgimenti

1) A norma dell'esercizio **28)** del par. 2 la successione $\left\{\frac{e^{-n|x|}}{n^2+x^2}\right\}$ converge uniformemente alla funzione identicamente nulla. Pertanto è lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrale e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{-n|x|}}{n^2+x^2}\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n|x|}}{n^2+x^2}\,dx = \int_0^1 0dx = 0.$$

2) A norma dell'esercizio **26)** del par. 2 (con k=1, h=3) la successione $\left\{\frac{nx}{1+n^3x^2}\right\}$ tende uniformemente a zero su $[1,2]$; ne consegue che la successione sotto il segno d'integrale tende a zero uniformemente in $[1,2]$ poiché

$$\left|\frac{nx}{(1+x^4)\,(n^3x^2+1)}\right| \le \left|\frac{nx}{n^3x^2+1}\right|;$$

è allora lecito passare al limite sotto il segno d'integrale e si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 \frac{nx}{(1+x^4)\,(n^3x^2+1)}\,dx = \int_1^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{(1+x^4)\,(n^3x^2+1)}\,dx = \int_1^2 0dx=0.$$

3) A norma dell'esercizio **16)** del paragrafo 2 la successione di funzioni $\{\operatorname{sen}^n x/(1+\operatorname{arctg} x)\}$ converge puntualmente su $[0,\pi/2[$ alla funzione identicamente nulla e per $x=\frac{\pi}{2}$ converge al valore $1/(1+\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2})$. La convergenza è uniforme su

ogni intervallo del tipo $[0,b]$ con $b<\pi/2$, non lo è su $[0,\pi/2]$. Pertanto il teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale non può essere applicato.
Si osservi però che si può subito provare che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}^n x}{1+\operatorname{arctg}x}\,dx=0.$$

Infatti si osservi che per ogni b tale che $0<b<\pi/2$ si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}^n x}{1+\operatorname{arctg}x}\,dx=\int_0^{b}\frac{\operatorname{sen}^n x}{1+\operatorname{arctg}x}\,dx+\int_b^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}^n x}{1+\operatorname{arctg}x}\,dx.$$

Ora per il teorema della media

$$\left|\int_b^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}^n x}{1+\operatorname{arctg}x}\,dx\right|\le\sup_{x\in[b,\pi/2]}\left|\frac{\operatorname{sen}^n x}{1+\operatorname{arctg}x}\right|\left(\frac{\pi}{2}-b\right).$$

D'altro canto essendo la funzione arctgx crescente

$$\sup_{x\in[b,\pi/2-b]}\left|\frac{\operatorname{sen}^n x}{1+\operatorname{arctg}x}\right|\le\frac{1}{1+\operatorname{arctg}b}\le 1$$

e dunque

$$\left|\int_b^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}^n x}{1+\operatorname{arctg}x}\,dx\right|\le\left(\frac{\pi}{2}-b\right).$$

Si osservi infine che essendo $b<\frac{\pi}{2}$ si ha per il teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{b}\frac{\operatorname{sen}^n x}{1+\operatorname{arctg}x}\,dx=0.$$

Pertanto fissato $\varepsilon>0$ e scelto b tale che $\pi/2-b<\varepsilon/2$ si può determinare n_ε tale che per $n\ge n_\varepsilon$

$$\left|\int_0^{b}\frac{\operatorname{sen}^n x}{1+\operatorname{arctg}x}\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

ottenendo complessivamente per $n\ge n_\varepsilon$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}^n x}{1+\operatorname{arctg}x}\,dx\right|<\varepsilon.$$

4) A norma dell'esercizio **9)** del paragrafo 2 la successione di funzioni $\{x^n\}$ converge puntualmente su $[0,1)$ alla funzione identicamente nulla e per $x=1$ al valore 1. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[0,b]$ con $b<1$ non lo è su $[0,1)$. Non può pertanto applicarsi il teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale.
È facile però provare che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx=0.$$

Infatti per ogni b con $0<b<1$ si ha

$$\int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx=\int_0^b x^n e^{x^2}\,dx+\int_b^1 x^n e^{x^2}\,dx.$$

Ora per il teorema della media si ha

$$\left|\int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx\right|\le\sup_{x\in[b,1]}\left|e^{x^2}x^n\right|(1-b)\le e\,(1-b).$$

Essendo poi $b<1$ per il teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^b e^{x^2}x^n\,dx=0.$$

Fissato così $\varepsilon>0$ e scelto b tale che $1-b<\varepsilon/2$ si può determinare n_ε tale che per $n\ge n_\varepsilon$

$$\left|\int_0^b x^n e^{x^2}\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

ottenendo complessivamente per $n\ge n_\varepsilon$.

$$\left|\int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx\right|<\varepsilon.$$

5) Si osservi che la convergenza della successione di funzioni $\{n^2(\cos x)x\ (1-x^2)^n\}$ non è uniforme a norma dell'esercizio 12) del paragrafo 2 sull'intervallo $[0,1]$, ma solo puntuale alla funzione identicamente nulla. Non può applicarsi pertanto il teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale.
Si può comunque facilmente verificare che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n(\cos x)\cdot x\ (1-x^2)^n\ dx = +\infty.$$

Si osservi infatti che essendo $\cos x$ funzione decrescente su $[0,1]$ si ha

$$n^2x\ (\cos x)(1-x^2)^n \geq n^2(\cos 1)x\ (1-x^2)^n \geq 0.$$

Pertanto per ogni n

$$\int_0^1 n^2x\ (\cos x)(1-x^2)^n\ dx \geq \cos 1\int_0^1 n^2x\ (1-x^2)^n\ dx.$$

Ovviamente

$$\left((1-x^2)^{n+1}\right)' = -2\ (n+1)x\ (1-x^2)^n$$

sicché si ha:

$$\left(-\frac{n^2}{2(n+1)}\ (1-x^2)^{n+1}\right)' = n^2x\ (1-x^2)^n$$

e dunque

$$\int_0^1 nx\ (1-x^2)^n\ dx = \frac{n^2}{2(n+1)}.$$

Da tale identità si deduce subito quanto si voleva provare.

6) Si osservi che a norma dell'esercizio 13) del paragrafo 2 la successione

$$f_n(x) = e^{-(x/n)^2}$$

converge uniformemente su ogni intervallo del tipo $(-a,a)$ $a>0$ verso la funzione che vale identicamente 1. Pertanto grazie al teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale si ha per ogni $a>0$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^a e^{-\left(\frac{x}{n}\right)^2}\ dx = a.$$

Poiché per ogni n e ogni a

$$\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{n}\right)^2}\ dx \geq \int_0^a e^{-\left(\frac{x}{n}\right)^2}\ dx$$

ne segue che fissato a positivo esiste un n_a tale che per $n\geq n_a$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{n}\right)^2}\ dx \geq a.$$

Si può allora subito concludere che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{n}\right)^2}\ dx = +\infty.$$

7) A norma dell'esercizio 11) del paragrafo 2 la successione di funzioni

$$f_n(x) = e^{-nx^2}$$

converge puntualmente alla funzione che vale 0 per $x\neq 0$ e 1 per $x=0$. La convergenza è uniforme su tutti gli intervalli del tipo $[b,+\infty)$ con $b>0$.
Si può però provare che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\ dx = 0.$$

Si osservi innanzitutto che per a tale che $0<a<1$ si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\ dx = \int_0^a e^{-nx^2}\ dx + \int_a^1 e^{-nx^2}\ dx + \int_1^{+\infty} e^{-nx^2}\ dx,$$

Poiché per ogni $x\geq 1$ si ha $x^2\geq x$ si ottiene subito per $b>1$

$$\int_1^b e^{-nx^2}\,dx \leq \int_1^b e^{-nx}\,dx = -\left[\frac{e^{-nx}}{n}\right]_1^b = \frac{e^{-n}}{n} - \frac{e^{-nb}}{n}$$

e dunque al limite per $b\to+\infty 0$

$$\int_1^{+\infty} e^{-nx^2}\,dx \leq \frac{e^{-n}}{n}.$$

D'altro canto si ha

$$0 \leq e^{-nx^2} \leq 1$$

sicché grazie al teorema della media

$$\int_0^a e^{-nx^2}\,dx \leq \left(\sup_{x\in[a,1]} e^{-nx^2}\right) a \leq a.$$

Sull'intervallo $[a,1]$ é applicabile infine il teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale sicché per $\varepsilon>0$ fissato a tale che $a<\varepsilon/3$ si può scegliere n_ε in maniera tale da verificare per $n\geq n_\varepsilon$

$$\int_a^1 e^{-nx^2}\,dx < \frac{\varepsilon}{3},\quad \frac{e^{-n}}{n} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si ottiene allora per $n\geq n_\varepsilon$

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,dx < \varepsilon.$$

8) A norma dell'esercizio 15) del paragrafo 2 la successione di funzioni

$$f_n(x) = nx\, e^{-nx^2}$$

converge puntualmente su tutto R alla funzione identicamente nulla. La convergenza è uniforme su ogni intervallo del tipo $[a,+\infty)$ $a>0$, non lo è su intervalli del tipo $[0,a]$

$a>0$. Non è applicabile pertanto il teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale e si ha

$$\int_0^1 nx\, e^{-nx^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\, e^{-nx^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, e^{-n}$$

sicché al limite per $n\to+\infty$ si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nx\, e^{-nx^2}\,dx = \frac{1}{2}.$$

9) Si osservi che grazie all'esercizio 3) del paragrafo 2 la successione di funzioni

$$f_n(x) = \left(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx\right)^2$$

converge uniformemente a 0 su ogni intervallo del tipo $[a,+\infty)$ con $a>0$.
Inoltre per ogni n, per $x=0$ si ha

$$1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx = 0.$$

Si può provare allora che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx\right)^2 dx = 0.$$

Si fissino ora $a>0$ e $b>a$ e si osservi che, per ogni $x\geq 0$

$$1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx \geq 0.$$

Si ha allora

$$\int_0^c \left(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx\right)^2 dx = \int_0^a \left(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx\right)^2 dx + $$
$$+ \int_a^b \left(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx\right)^2 dx + \int_b^c \left(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx\right)^2 dx$$

e risulta

$$\int_0^a \left(1-\frac{2}{\pi} \text{ arctgnx}\right)^2 dx \le a.$$

Inoltre grazie all'esercizio **10)** del paragrafo 3.2 del capitolo VI (parte prima) si ha

$$\lim_{y\to+\infty} y^2 \left(1-\frac{2}{\pi} \text{ arctgy}\right)^2 = \frac{4}{\pi^2}$$

sicché esiste un $\bar{K}$ tale che per $y>\bar{K}$

$$\left(1-\frac{2}{\pi} \text{ arctgy}\right)^2 < \frac{4}{\pi} \frac{1}{y^2}.$$

Fissato allora $b>\bar{K}$ e $b>1$ si ha per ogni n e per $t\ge b$

$$\int_b^t \left(1-\frac{2}{\pi.} \text{ arctgnx}\right)^2 dx \le \int_b^t \frac{4}{\pi} \frac{1}{(nx)^2} dx = \frac{4}{3\pi} \left(\frac{1}{(nb)^3} - \frac{1}{(nt)^3}\right)$$

e per $n\ge\bar{n}_\varepsilon$ si ha ancora

$$\int_b^t \left(1-\frac{2}{\pi} \text{ arctgnx}\right)^2 dx \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'altro canto data la convergenza uniforme fissato $a<\varepsilon/3$ $(\varepsilon>0)$ esisterà un $\tilde{n}_\varepsilon$ tale che per $n\ge\tilde{n}_\varepsilon$

$$\int_a^b \left(1-\frac{2}{\pi} \text{ arctgnx}\right)^2 dx \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si ricava così per $n\ge\max(\bar{n}_\varepsilon,\tilde{n}_\varepsilon)$ e per $t\ge b/\bar{K}$.

$$\int_0^t \left(1-\frac{2}{\pi} \text{ arctgnx}\right)^2 dx < \varepsilon.$$

10) Grazie all'esercizio **22)** del paragrafo 2 la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt{1+\frac{x^2}{n}}$$

converge uniformemente a 1 su ogni intervallo limitato e la funzione lgx è sommabile su $[0,1]$ ma non limitata.
Si ha allora

$$\left|\int_0^1 \text{lgx } dx - \int_0^1 \text{lgx} \sqrt{1+\frac{x^2}{n}}\, dx\right| \le \int_0^1 |\text{lgx}| \left|1-\sqrt{1+\frac{x^2}{n}}\right| dx$$

$$\le \left(\int_0^1 |\text{lgx}|\, dx\right) \cdot \sup_{[0,1]} \left(\sqrt{1+\frac{x^2}{n}}-1\right).$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{[0,1]} \left(\sqrt{1+\frac{x^2}{n}}-1\right) = 0$$

si ha subito

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \text{lgx} \sqrt{1+\frac{x^2}{n}}\, dx = \int_0^1 \text{lgx } dx.$$

D'altro canto un'integrazione per parti dà

$$\int_0^1 \text{lgx } dx = [x\text{lgx}-x]_0^1 = -1.$$

11) Si osservi che la successione di funzioni in esame converge (es. 25 par. 2) uniformemente solo su insiemi del tipo $(-\infty,-a) \cup (a,+\infty)$ con $a>0$. Si ha però

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{n}\, e^{-n^4x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{n}\, e^{-n^4x^2} dx + \int_1^{+\infty} \sqrt{n}\, e^{-n^4x^2} dx.$$

D'altro canto da un lato si ha

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{n}\, e^{-n^4x^2} dx \le \int_1^{+\infty} \sqrt{n}\, e^{-n^4x} dx = \frac{\sqrt{n}}{n^4} e^{-n^4} = n^{-7/2} e^{-n^4}$$

dall'altro

$$\int_0^1 \sqrt{n}\ e^{-n^4x^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{n}\ e^{-n^4x^2}\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \sqrt{n}\ e^{-n^4x^2}\,dx \le$$

$$\le \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{n}} dx + \sqrt{n}\ \ e^{-n^4\frac{1}{n^2}} \int_{\frac{1}{n}}^1 dx \le \frac{\sqrt{n}}{n} + \sqrt{n}\cdot e^{-n^2}.$$

Pertanto al limite per $n \to +\infty$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sqrt{n}\ e^{-n^4x^2}\,dx = 0.$$

12) Si osservi che

$$\int_0^{+\infty}(\operatorname{arctg}x)\ ne^{-nx^2}\,dx \le \int_0^1(\operatorname{arctg}x)\ ne^{-nx^2}\,dx + \int_1^{+\infty}(\operatorname{arctg}x)\ ne^{-nx^2}\,dx.$$

Si osservi ora anche che

$$\int_1^{+\infty}(\operatorname{arctg}x)\ ne^{-nx}\,dx \le \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty} ne^{-nx}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[-e^{-nx}\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\ e^{-n}.$$

Si osservi ora che per $x>0$ grazie al teorema di Lagrange si ha

$$\operatorname{arctg}x = \frac{1}{1+(\xi)^2}\ x \qquad 0<\xi<x$$

e dunque per ogni δ tale che $0<\delta<1$

$$\frac{x}{1+\delta^2} \le \operatorname{arctg}x \le x \qquad 0<x<\delta.$$

Pertanto per ogni $0<\delta<1$

$$\int_0^\delta \frac{n}{1+\delta^2}\ xe^{-nx^2}\,dx \le \int_0^1 n\ \operatorname{arctg}x\ e^{-nx^2}\,dx \le \int_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx.$$

Si osservi ora che

$$\int_0^\delta nxe^{-nx^2}\,dx = \left[-\frac{e^{-nx^2}}{2}\right]_0^\delta = \frac{1}{2} - \frac{e^{-n\delta^2}}{2}.$$

Si ottiene allora

$$\left(\frac{1}{1+\delta^2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-n\delta^2}}{2}\right) \le \int_0^{+\infty} n\ \operatorname{arctg}x\ e^{-nx^2}\,dx \le \frac{1}{2} - \frac{e^{-n}}{2} + \frac{\pi}{2}\ e^{-n}.$$

Si fissi ora $\varepsilon>0$ e si determini un δ tale che $\left(\frac{1}{1+\delta^2}\right) > 1-\varepsilon$; si fissi allora un n_ε tale che per $n>n_\varepsilon$

$$\frac{e^{-n\delta^2}}{2} < \varepsilon,\ \frac{\pi}{2}\ e^{-n} < \varepsilon.$$

Si avrà allora per $n \ge n_\varepsilon$

$$(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right) \le \int_0^{+\infty} n\ \operatorname{arctg}x\ e^{-nx^2}\,dx \le \frac{1}{2} + 2\varepsilon$$

e dunque il limite cercato vale $\frac{1}{2}$.

4. Nota introduttiva alle serie di potenze.

Una serie di potenze di coefficienti a_n e di centro (o punto iniziale) x_0 è quella particolare serie di funzioni nella quale la funzione n-sima (o termine generale) è $a_n\,(x-x_0)^n$.

Com'è noto lo studio delle serie di potenze si riconduce a quello delle serie di centro in 0.

La struttura dell'insieme di convergenza di una serie di potenze è molto semplice, vale infatti il seguente teorema.

Teorema del raggio di convergenza. Data una serie di potenze di coefficienti a_n e di centro 0 esiste un numero

$r \geq 0$ tale che la serie converge totalmente su ogni intervallo del tipo $[-\delta, \delta]$ con $\delta < r$ e non converge per ogni x con $|x| > r$.

Il numero r si dice raggio di convergenza, l'intervallo $(-r, r)$ intervallo di convergenza.

Un semplice esempio di serie di potenze di punto iniziale 0 è la **serie geometrica** ($a_n = 1$ per ogni n)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

È ben noto che tale serie converge se e solo se $x \in (-1, 1)$ e si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

pertanto r=1 è il raggio di convergenza della serie geometrica.

Per il raggio di convergenza vale la seguente caratterizzazione.

Criterio (o teorema) di Hadamard. Il raggio di convergenza r di una serie di potenze di coefficienti a_n è dato dalla formula

$$r = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}$$

ove valgono le condizioni che r=0 se

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$$

e $r=+\infty$ se

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Da tale teorema si possono desumere i seguenti corollari di più frequente utilizzo.

Criterio della radice. Se esiste il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

allora il raggio di convergenza r della serie di potenze di coefficienti a_n è dato dalla formula

$$r = \frac{1}{\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

con le convenzioni r=0 e $r=+\infty$ rispettivamente se

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty, \quad \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Criterio del rapporto. Se $a_n \neq 0$ per ogni n e se esiste il seguente limite

$$r = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|$$

allora il raggio di convergenza r della serie di potenze di coefficienti a_n è dato dalla formula

$$r = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|.$$

Ad esempio per il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$$

applicando il criterio della radice si ha

$$r = \frac{1}{\sum\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\sum\limits_{n\to+\infty} (2^n)^{1/n}} = \frac{1}{2}$$

e per il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \;(=e^x)$$

applicando il criterio del rapporto si ha

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n-1)!}\bigg/\frac{1}{n!} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty.$$

La somma di una serie di potenze è una funzione continua nell'intervallo (aperto) di convergenza. Il seguente teorema consente di stabilire la sua continuità anche negli estremi dell'intervallo di convergenza purché in essi la serie converga.

Teorema di Abel. Se una serie di potenze converge in r (risp. $-r$) allora essa converge uniformemente nell'intervallo $[-\delta, r]$ (risp. $[-r, \delta]$) per qualsivoglia δ con $0\le\delta<r$.

Le funzioni che risultano somma di una serie di potenze sono ovviamente derivabili infinite volte.

Il teorema che segue chiarifica le proprietà di derivabilità della somma.

Teorema (derivabilità della serie di potenze). Una serie di potenze è derivabile termine a termine infinite volte all'interno del suo intervallo di convergenza; vale inoltre la formula

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)\; a_n\, x^{n-k}$$

e il raggio di convergenza della serie derivata k-sima coincide con quello della serie stessa.

Così ad esempio ricordando che per ogni $x\in(-1,1)$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=k}^{+\infty} x^n$$

si ha ancora per ogni $x\in(-1,1)$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

Si osservi che grazie al teorema appena ricordato se una funzione f è somma di una serie di potenze di centro x_o e di coefficienti a_n in un intervallo $(x_o-\delta, x_o+\delta)$ allora per la sua derivata n-sima nel punto x_o vale la formula

$$f^{(n)}(x_o) = n!\, a_n$$

(per ogni n). Data allora una funzione le cui derivate di qualsiasi ordine esistono in un punto x_o si può costruire la serie di Taylor ad essa associata di punto iniziale x_o, la serie di potenze cioè di centro x_o

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!} (x-x_o)^n.$$

Così la serie di Taylor di punto iniziale $x_o=0$ associata alla funzione esponenziale $f(x)=e^x$ è

$$\sum_{n=0}^{-\infty} \frac{x^n}{n!}$$

in quanto $f^{(n)}(0)=e^0=1$.

Il seguente teorema dà un criterio di "sviluppabilità" di una funzione in termini della sua serie di Taylor.

Teorema (di sviluppabilità in serie di Taylor). Sia f una funzione definita nell'intervallo $(x_o-\delta,\ x_o+\delta)$ ed esistano ivi le sue derivate di un qualsiasi ordine.

Valga per un $r>0$ e un'opportuna costante M

$$\sup_{x\in(x_0-r,\ x_0+r)} |f^n(x)| \le \frac{Mn!}{r^n}$$

allora per ogni $x\in(x_0-r,\ x_0+r)$ si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Tale condizione è certamente verificata in un intervallo $(x_0-r,\ x_0+r)$ se $f(x)$ ha ivi le derivate equilimitate, cioè se esiste una costante positiva K tale che:

$$|f^{(n)}(x)| \le K \ \forall x\in (x_0-r,\ x_0+r).$$

Ad esempio con $f(x)=e^x$ si ha con $a>0$:

$$|f^{(n)}(x)| = e^x \le e^a \ \forall x\in[-a,a]$$

e quindi la funzione esponenziale è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale $x_0=0$ e si ha

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

in ogni intervallo $[-a,a]$ e quindi in tutto R.

Tabella 4.1 Sviluppi notevoli in serie di Taylor

1) $\displaystyle \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad |x|<1$

2) $\displaystyle e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ per ogni x

3) $\displaystyle \operatorname{sen}x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+)!}+\ldots = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

per ogni x

4) $\displaystyle \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

per ogni x

5) $\displaystyle \lg(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

$-1<x\le1$

6) $\displaystyle (1+x)^\rho = 1+\binom{\rho}{1}x+\binom{\rho}{2}x^2+\ldots+\binom{\rho}{n}x^n+\ldots = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\rho}{n}x^n$

$-1<x<1$

L'ultimo sviluppo è valido ancora in $x=1$ per $\rho>-1$ e in $x=-1$ per $\rho>0$.

Si ricordi che il coefficiente binomiale generalizzato $\binom{\rho}{n}$ è dato dalla formula

$$\binom{\rho}{0} = 1 \qquad \binom{\rho}{n} = \frac{\rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+1)}{n!}.$$

Si osservi che lo sviluppo **1)** (serie geometrica) può considerarsi contenuto nello sviluppo **6)** ($\rho=-1$ e $-x$ invece di x).

5. Sviluppi in serie di Taylor

5.1 Sviluppi in serie

Si sviluppino in serie di Taylor di centro nello 0 (serie di Mc Laurin) le seguenti funzioni e si discuta la validità dello sviluppo.

1) $f(x)=a^x$

2) $f(x)=\mathrm{senh}x$

3) $f(x)=\cosh x$

4) $f(x)=xe^{-x}$

5) $f(x)=x^2\mathrm{sen}x$

6) $f(x)=x5^x$

7) $f(x)=\sqrt{1+x}$

8) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

9) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

10) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

11) $f(x)=\mathrm{arcsen}x$

12) $f(x)=\dfrac{1}{2}\,\lg\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=\mathrm{setttgh}x$

13) $f(x)=\mathrm{sen}^2x$

14) $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$

15) $f(x)=\dfrac{1}{1-x+x^2}$

16) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{sen}x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$

17) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & x=0\end{cases}$

18) $f(x)=\dfrac{1}{4-x}$

19) $f(x)=\mathrm{arctg}x$

20) $f(x)=\mathrm{settsenh}x$

21) $f(x)=e^{x^2}$

22) $f(x)=\mathrm{sen}x^4$

23) $f(x)=x\log(1+x)$

24) $f(x)=\log(e^2+e^2x)$

25) $f(x)=\mathrm{arctg}x+\mathrm{arctg}2x$

26) $f(x)=e^{3x}+\log(1+3x)$

Soluzioni

1) $a^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(\lg a)^n}{n!}\,x^n$ $\quad x\in\mathbb{R}$

2) $\mathrm{senh}x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\quad x\in\mathbb{R}$

3) $\cosh x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ $\quad x\in\mathbb{R}$

4) $xe^{-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n!}$ $\quad x\in\mathbb{R}$

5) $x^2\mathrm{sen}x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+3}}{(2n+1)!}$ $\quad x\in\mathbb{R}$

6) $x5^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(\lg 5)^n}{n!}\,x^{n+1}$ $\quad x\in\mathbb{R}$

7) $\sqrt{1+x}=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\,x^n$ $\quad x\in[-1,1]$

(con la convenzione che $(-3)!!=(-1)!!=1$)

8) $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ $\quad x\in(-1,1)$

9) $\dfrac{1}{(1+x)^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)\,x^n$ $\quad x\in(-1,1)$

10) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,x^{2n}$ $\quad x\in(-1,1]$

(con la convenzione che $(-1)!!=1$)

11) $\mathrm{arcsen}x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\quad x\in(-1,1]$

(con la convenzione che $(-1)!!=1$)

12) $\dfrac{1}{2}\,\lg\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\quad x\in(-1,1)$

13) $\mathrm{sen}^2x=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\,2^{2n-1}\,x^{2n}$ $\quad x\in\mathbb{R}$

14) $\dfrac{1}{x^2+x+1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{sen}\left(2\pi\,\dfrac{(n+1)}{3}\right)x^n$ $\quad |x|<1$

15) $\dfrac{1}{x^2-x+1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{3}\right]}\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left|\mathrm{sen}\left(2\pi\,\dfrac{(n+1)}{3}\right)\right|x^n$ $\quad |x|<1$

16) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!!}$ $\qquad x \in R$

17) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2[n+1])!!}$ $\qquad x \in R$

18) $\frac{1}{4-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{n+1}} x^n$ $\qquad x \in (-4,4)$

19) $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ $\qquad x \in [-1,1]$

20) $\operatorname{settsenh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\qquad x \in]-1,1[$

21) $e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ $\qquad x \in R$

22) $\operatorname{sen} x^4 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{8n+4}}{(2n+1)!}$ $\qquad x \in R$

23) $x \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n+2}$ $\qquad x \in]-1,1]$

24) $\log(e^2+e^2x) = 2+x-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\ldots+(-1)^m \frac{x^{m+1}}{m+1}$ $\qquad x \in]-1,1]$

25) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(1+2^{2n+1}\right) x^{2n+1}$ $\qquad x \in]-1/2,1/2]$

26) $e^{2x}+\log(1+3x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n!}+(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n}\right) x^n$ $\qquad x \in]-1/3,1/3]$

Si ricordi che data l'unicità della serie di Taylor, spesso invece di costruire questa direttamente attraverso il calcolo delle derivate della funzione è più semplice con qualche artificio trovare una serie di potenze che converge alla funzione stessa e concludere allora che essa è la serie di Taylor della funzione in esame.

Svolgimento

1) Si osservi che $f(x)=a^x=e^{x\lg a}$ e dunque utilizzando lo sviluppo 2) della tabella del paragrafo 4 si ha per ogni x in R

$$a^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\lg a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lg a)^n}{n!} x^n.$$

2) Si ricordi che $\operatorname{senh} x=(e^x-e^{-x})/2$ e dunque utilizzando lo sviluppo 2) della tabella del paragrafo 4 due volte (una volta con $-x$ invece di x) si ha per ogni x in R

$$2\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1-(-1)^n\right) \frac{x^n}{n!}$$

e quindi per ogni x in R

$$\operatorname{senh} x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

3) Si ricordi che $\cosh x=(e^x+e^{-x})/2$ e dunque utilizzando lo sviluppo 2) della tabella del paragrafo 4 due volte (una volta con $-x$ invece di x) si ha per ogni x in R

$$2\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1+(-1)^n\right) \frac{x^n}{n!}$$

e quindi per ogni x in R

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

4) Utilizzando lo sviluppo 2) della tabella del paragrafo 4 con $-x$ in luogo di x si ha per ogni x in R

$$xe^{-x} = x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}.$$

5) Utilizzando lo sviluppo 3) della tabella del paragrafo 4 si ha per ogni x in R

$$x^2 \operatorname{sen} x = x^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!}.$$

6) Utilizzando lo sviluppo stabilito nell'esercizio 1) si ottiene per ogni x in R

$$x5^x = x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lg 5)^n}{n!}x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lg 5)^n}{n!}x^{n+1}.$$

7) Si tratta di un caso particolare dello sviluppo 6) della tabella del paragrafo 4 con $\rho=1/2$. Si ha allora per ogni x in [-1,1]

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{1/2}{n}x^n.$$

Si tratta dunque semplicemente di calcolare il coefficiente di x^n. Si osservi che

$$\binom{1/2}{n} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1-2}{2}\right)\left(\frac{1-4}{2}\right)\cdots\left(\frac{1-2n+2}{2}\right)}{n!} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ \cdots\ (2n-3) = (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$$

e dunque per ogni x in [-1,1]

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n$$

(con la convenzione che $(-3)!!=(-1)!!=1$).

8) Utilizzando lo sviluppo 1) della tabella del paragrafo 4 con $-x$ invece di x si ha subito per $x\in(-1,1)$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n.$$

9) Si osservi che $(1/1+x)'=-1/(1+x)^2$ e quindi derivando termine a termine lo sviluppo visto nell'esercizio 8) si ha per $x\in(-1,1)$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n.$$

10) Si tratta di un caso particolare dello sviluppo 6) della tabella del paragrafo 4 ma vale anche la formula $(\sqrt{1+x})'=1/(2\sqrt{1+x})$.
Quindi derivando termine a termine lo sviluppo dell'esercizio 7) si ha per $x\in(-1,1]$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 2\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n\right)' = 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}nx^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2[n-1]-1)!!}{(2[n-1])!!}x^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k.$$

11) Si osservi che $(\operatorname{arcsen} x)'=1/\sqrt{1-x^2}$. Si ha allora, utilizzando lo sviluppo stabilito nell'esercizio 10) con $-x^2$ invece di x

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2k!!}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2k-1)!!}{2k!!}x^{2k}.$$

Integrando allora termine a termine si ha (arcsen0=0)

$$\operatorname{arcsen} x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

12) Utilizzando lo sviluppo 5) della tabella del paragrafo 4 due volte (una volta con $-x$ invece di x) si ha per ogni $x \in (-1,1)$

$$\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lg(1+x) - \lg(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} -$$

$$- \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} (-1)^n \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^{n-1} - (-1)^{2n-1}\right) \frac{x^n}{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^{n-1} + 1\right) \frac{x^n}{n} = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

13) Si osservi che $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ quindi $\operatorname{sen}^2 x = (1-\cos 2x)/2$. Utilizzando allora lo sviluppo 4) della tabella del paragrafo 4 si ha per ogni x in R

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}.$$

14) Si può osservare che $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ e quindi $\frac{1}{x^2+x+1} =$
$= (x-1)\frac{(-1)}{1-x^3}$. Utilizzando allora lo sviluppo 1) della tabella del paragrafo 4 con x^3 invece di x si ha per $|x|<1$

$$\frac{1}{x^2+x+1} = (x-1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)\, x^{3n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^{3n} - x^{3n+1}).$$

Si ottiene così una serie di potenze di centro nello zero ove mancano le potenze di esponente k tale che il resto della divisione di k per 3 dà 2, hanno coefficiente 1 quelle tali che il resto della divisione di k per 3 dà 0 e coefficiente -1 quelle tali che il resto dà 1.
Osservando che (m intero)

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} 2\pi \frac{(k+1)}{3} = \begin{cases} 0 & k/3=m+2/3 \\ 1 & k/3=m+0 \\ -1 & k/3=m+1/3 \end{cases}$$

si può allora scrivere per $|x|<1$

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} 2\pi \frac{(k+1)}{3} x^k.$$

15) Si può osservare che $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ e quindi $\frac{1}{x^2-x+1} =$
$= (x-1)\frac{1}{x^3+1}$. Utilizzando allora lo sviluppo 1) della tabella del paragrafo 4 con $-x^3$ invece di x si ha per $|x|<1$

$$\frac{1}{x^2-x+1} = (x+1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^{3n+1} + x^{3n}).$$

Si ottiene così una serie di potenze di centro nello zero ove mancano le potenze di esponente k tale che il resto della divisione di k per 3 dà 2, hanno coefficiente 1 quelle tali che il resto della divisione per 3 dà 0 oppure 1 e il quoziente è pari, e coefficiente -1 quelle tali che il resto dà 0 oppure 1 e il quoziente è dispari. Osservando che (m intero)

$$(-1)^{[k/3]} \frac{2}{\sqrt{3}} \left|\operatorname{sen}\pi \frac{(k+1)}{3}\right| = \begin{cases} 0 & \text{se } k/3=m+2/3 \\ 1 & \text{se } k/3=m \text{ o } k/3=m+1/3 \text{ con } m \text{ pari} \\ -1 & \text{se } k/3=m \text{ o } k/3=m+1/3 \text{ con } m \text{ dispari} \end{cases}$$

Si può allora scrivere ($|x|<1$)

$$\frac{1}{x^2-x+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{[k/3]} \frac{2}{\sqrt{3}} \left|\operatorname{sen} \frac{\pi(k+1)}{3}\right| x^k.$$

16) Si osservi che grazie allo sviluppo 3) della tabella del paragrafo 4 si ha per $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Essendo sia la funzione a primo membro che quella a secondo continue in $x=0$ l'identità vale anche per $x=0$.

17) Si osservi che grazie allo sviluppo 4) della tabella del paragrafo 4 si ha per $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{2n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2[k+1])!}.$$

Essendo sia la funzione a primo membro che quella a secondo continue in $x=0$ l'identità vale anche per $x=0$.

18) Si osservi che:

$$\frac{1}{4-x} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{x}{4}}$$

e utilizzando lo sviluppo 1) della tabella del paragrafo 4 con $x/4$ invece di x si ha per $|x|<4$

$$\frac{1}{4-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{n+1}}\, x^n.$$

19) Si osservi che $(\mathrm{arctg}x)'=1/(1+x^2)$. Utilizzando allora lo sviluppo 1) della tabella del paragrafo 4 con $-x^2$ invece di x si ha per $|x|<1$

$$(\mathrm{arctg}x)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Integrando allora termine a termine si ha ($\mathrm{arctg}0=0$) $|x|<1$

$$\mathrm{arctg}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}.$$

Poiché la funzione arctgx è continua in -1 e in 1 e poiché la serie in tali punti converge (per $x=1$ e per $x=-1$ la serie proposta si riduce rispettivamente alle serie numeriche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{2n+1}$$

tali serie sono a segni alterni e di termine generale infinitesimo) grazie al teorema di Abel lo sviluppo vale anche per $x=\pm1$.

20) Si osservi che $(\mathrm{settsenh}x)' = \left(\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Utilizzando allora lo sviluppo 10) con x^2 invece di x si ha ($x\in(-1,1)$)

$$(\mathrm{settsenh}x)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, x^{2n}.$$

Integrando termine a termine (sett senh $0=0$) si ha

$$\mathrm{settsenh}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \int_0^x t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

La funzione sett senhx è continua in -1; la serie in tale punto converge in quanto si riduce alla serie numerica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{3n+1} \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\, \frac{1}{2n+1}$$

e dunque a una serie a segni alterni a termine generale infinitesimo e decrescente (si osservi che

$$\frac{(2[n+1]-1)!!}{(2[n+1])!!}\,\frac{1}{2(n+1)+1}\,\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}(2n+1) =$$

$$= \frac{(2n+1)}{2n+2}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+3}\,\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}(2n+1) =$$

$$= \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} < 1).$$

Grazie al teorema di Abel si può concludere che lo sviluppo vale in $[-1,1]$.

21) Ricordando che per ogni $y\in\mathbb{R}$ si ha

$$e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$$

ne segue ponendo $y=x^2$:

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

22) Ricordando che

$$\text{sen}y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall y \in R$$

si ha ponendo $y=x^4$

$$\text{sen}x^4 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{8n+4}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in R.$$

23) Ricordando che

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \forall x \in]-1,1]$$

si ha

$$x\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n+2} \quad \forall x \in]-1,1].$$

24) Osservato che

$$\log(e^2+e^2x) = \log e^2+\log(1+x) = 2+\log(1+x)$$

e ricordando lo sviluppo di $\log(1+x)$ si ha

$$\log(e^2+e^2x) = 2+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \quad \forall x \in]-1,1].$$

25) Osservato che

$$\text{arctg}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad x \in [-1,1]$$

$$\text{arctg}2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

e l'ultimo sviluppo, ottenuto dal precedente sostituendo x con 2x, converge per $2x \in [-1,1]$ e cioè per $x \in [-1/2,1/2]$, ne segue

$$\text{arctg}x+\text{arctg}2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \left[1+2^{2n+1}\right] x^{2n+1}, \quad x \in [-1/2,1/2].$$

26) Si ha dallo sviluppo di e^x sostituendo 2x ad x

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in R$$

e dallo sviluppo di $\log(1+x)$ sostituendo 3x ad x

$$\log(1+3x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 3^n \frac{x^n}{n} \quad x \in]-1/3, 1/3].$$

Pertanto

$$e^{2x}+\log(1+3x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n}\right) x^n \quad x \in]-1/3,1/3].$$

5.2 Sviluppi accorciati

Si scrivano n termini dello sviluppo di Mac Laurin delle funzioni seguenti

1) $f(x)=e^{\text{arctg}x}$ $n=2$

2) $f(x)=\log(\cos x)$ $n=3$

3) $f(x)=e^{\text{arctg}x}$ $n=3$

4) $f(x)=\cos\log(1+x)$ $n=3$

Risposte

1) $1+x+o(x)$

2) $1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

3) $-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

4) $1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

Svolgimento

1) Si ha

$$e^y=1+y+o(y)$$

e quindi con y=arctgx

$$f(x)=e^{\operatorname{arctg}x}=1+\operatorname{arctg}x+o(\operatorname{arctg}x);$$

se si osserva che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1\Rightarrow o(\operatorname{arctg}x)=o(x)$$

e che

$$\operatorname{arctg}x=x+o(x^2)$$

si ha

$$f(x)=e^{\operatorname{arctg}x}=1+x+o(x^2)+o(x)=1+x+o(x)$$

Si ritrovi il risultato calcolando direttamente f(0), f'(0).

2) Si ha

$$e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2)$$

e quindi

$$e^{\operatorname{arctg}x}=1+\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+o((\operatorname{arctg}x)^2);$$

d'altro canto

$$\operatorname{arctg}x=x+o(x^2)$$

e quindi

$$f(x)=e^{\operatorname{arctg}x}=1+x+o(x^2)+\frac{1}{2}(x^2+o(x^4)+2xo(x^2)+0((\operatorname{arctg}x)^2)=$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

Si ritrovi il risultato calcolando direttamente f(0), f'(0), f"(0).

3) Si ha

$$\log(1+y)=y+o(y)$$

e quindi con y=cosx-1

$$\log\cos x=\log(1+(\cos x-1)=\cos x-1+o(\cos x-1);$$

ricordando che

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

e quindi $o(\cos x-1)=o(x^2)$ e tenuto conto che

$$\cos x-1=-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

si ha

$$f(x)=\log\cos x=-\frac{x^2}{2}+o(x^3)+o(x^2)=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

(si osservi che i primi due termini dello sviluppo sono nulli) si ritrovi il risultato calcolando f(0), f'(0), f"(0).

4) Da

$$\cos y=1-\frac{y^2}{2}+o(y^2)$$

segue

$$\cos(\log(1+x))=1-\frac{1}{2}(\log(1+x))^2+o((\log(1+x))^2);$$

tenuto conto che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1\Rightarrow o((\log(1+x))^2)=o(x^2)$$

e che

$$\log(1+x)=x+o(x)$$

si ha

$$f(x)=\cos\log(1+x) = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

Si ritrovi il risultato calcolando direttamente $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$.

6. Serie di potenze

Si calcolino i raggi di convergenza e, laddove indicato con asterisco la somma delle seguenti serie di potenze.

1)* $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$

2)* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$

3)* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$

4)* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$

5)* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$

6)* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$

7)* $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$

8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$

9) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} x^n$

10) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n} x^n$

11) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{\lg n} x^n$

12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathrm{sen}\ \frac{1}{n}\right) x^n$

13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

14) $\sum_{n=1}^{+\infty} \lg\left(1+\frac{1}{n}\right) x^{2n}$

15) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n}$

16) $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n x^{3n}$

17) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{1/n}}{n^2} x^{4n}$

18) $\sum_{n=1}^{+\infty} (2)^{n^2} x^n$

19) $\sum_{n=1}^{+\infty} (2)^{\lg n} x^n$

20) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n^2} x^{n^2}$

21) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n x^{n^2}$

22) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^{n^2}$

23) $\sum_{n=1}^{+\infty} (n!)^n x^{n^2}$

24) $\sum_{n=1}^{+\infty} (n!)^n x^{2^n}$

Soluzioni

Con r si indicherà nel seguito il raggio di convergenza.

1) $r=1$; $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

2) $r=+\infty$; $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!} = \frac{e^x-1-x}{x^2}$

3) $r=+\infty$; $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = \frac{\cosh x+\cos x}{2}$

4) $r=+\infty$; $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} = \frac{\mathrm{senh}x+\mathrm{sen}x}{2}$

5) $r=1$; $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \frac{\mathrm{setttgh}x+\mathrm{arctg}x}{2}$

6) $r=+\infty$; $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = 1+xe^x(1+x)$

7) $r=1$; $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{2x^2-x+1}{(1-x)^3}$

8) $r=+\infty$
9) $r=+\infty$
10) $r=1$
11) $r=1/2$
12) $r=1$
13) $r=1/e$
14) $r=1$
15) $r=1$
16) $r=1/\sqrt[3]{3}$

17) r=1
18) r=0
19) r=1
20) r=1/2
21) r=1
22) r=1
23) r=0
24) r=1

Svolgimenti

1) Si osservi innanzitutto che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Pertanto il raggio di convergenza è 1. Per calcolare la somma si derivi termine a termine la serie geometrica; si ottiene

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

e tale serie ovviamente è molto simile a quella in esame. Si osservi allora che moltiplicando ambo i membri per x si ha

$$\frac{1}{(1-x)^2}\, x = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n.$$

2) Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+3)!}{(n+2)!} = +\infty$$

il raggio di convergenza della serie in esame è $+\infty$. Per calcolare la somma si osservi innanzitutto che il termine generale della serie in esame moltiplicato per x^2 coincide con quello della serie esponenziale.

Moltiplicando allora la serie per x^2 e dettane $f(x)$ la somma si ha

$$x^2 f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Sommando ad entrambi i membri 1+x si ha

$$x^2 f(x) + 1 + x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

e quindi

$$f(x) = \frac{e^x-1-x}{x^2}.$$

3) Si osservi che per calcolare il raggio di convergenza della serie in esame è sufficiente calcolare quello della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{4n!}.$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{[4(n+1)]!}{(4n)!} = +\infty$$

il raggio di convergenza è $+\infty$ grazie al criterio del rapporto.
Per calcolarne la somma si osservi che la serie contiene solo potenze il cui esponente è multiplo di 4 con coefficiente $1/(4n)!$.
Si ricordi che la serie che fornisce lo sviluppo di coshx contiene solo potenze il cui esponente è multiplo di 2 con coefficiente $1/(2n)!$ mentre la serie che fornisce lo sviluppo di cosx contiene solo potenze con esponente multiplo di 2 e coefficiente $(-1)^n/(2n)!$.
Si ha allora

$$\cosh x+\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] =$$

$$= 2\left[1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots + \frac{x^{4n}}{(4n)!} + \ldots\right]$$

e pertanto

$$\frac{\cosh x+\cos x}{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$

4) Si osservi che

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}=x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x^4)^n}{(4n+1)!}.$$

Per calcolare allora il raggio di convergenza della serie basterà calcolare quello della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{(4n+1)!}.$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{[4(n+1)+1]!}{(4n+1)!}=+\infty$$

per il criterio del rapporto tale raggio è $+\infty$.
Per calcolarne la somma si consideri che la serie contiene solo potenze il cui esponente diviso per 4 dà resto 1 con coefficiente $1/(4n+1)!$.
Si ricordi che la serie che fornisce lo sviluppo di senhx contiene solo potenze di esponente dispari con coefficiente $1/(2n+1)!$, mentre la serie che fornisce lo sviluppo di senx contiene solo potenze dispari con coefficiente $(-1)^n/(2n+1)!$. Si ha allora

$$\operatorname{sen}x+\operatorname{senh}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]=$$
$$=2\left[x+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^9}{9!}+\ldots+\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}+\ldots\right]$$

e pertanto

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}=\frac{\operatorname{senh}x+\operatorname{sen}x}{2}.$$

5) Si osservi che

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}=x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x^4)^n}{4n+1}.$$

Per calcolare dunque il raggio di convergenza della serie basterà calcolare quello della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{4n+1}.$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4(n+1)+1}{4n+1}=1$$

per il criterio del rapporto il raggio di convergenza di tale serie è 1 e pertanto 1 sarà quello della serie in esame.
Per calcolarne la somma si consideri che la serie contiene solo potenze il cui esponente diviso per 4 dà resto 1 con coefficiente $1/(4n+1)$.
Si ricordi che la serie che fornisce lo sviluppo di setttghx contiene solo potenze di esponente dispari con coefficienti $1/(2n+1)$ mentre la serie che fornisce lo sviluppo di arctgx contiene solo potenze di esponente dispari con coefficienti $(-1)^n/(2n+1)$. Si ha allora

$$\operatorname{setttgh}x+\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)=$$
$$=2\left(x+\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{9}+\ldots+\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\ldots\right)$$

e dunque

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\frac{\operatorname{setttgh}x+\operatorname{arctg}x}{2}.$$

6) Si osservi che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n!}\;\frac{(n-1)!}{n}=0.$$

Pertanto il raggio di convergenza della serie è $+\infty$.

Per calcolarne la somma si osservi innanzitutto la somiglianza del termine generale della serie con la derivata prima di quello della serie esponenziale. Allora usando il teorema di derivazione termine a termine e lo sviluppo di e^x si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n = 1+x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) =$$

$$= 1+x\left[\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{x^n}{n!}\right] = 1+x\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n!}\right)'\right] =$$

$$= 1+x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}\right)' = 1+x\left(x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' =$$

$$= 1+x\ (xe^x)' = 1+x^2e^x+xe^x.$$

7) Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

il raggio di convergenza della serie sarà 1.
Per calcolarne la somma si osservi la somiglianza del termine generale della serie con la derivata seconda di quello della serie geometrica. Allora grazie all'esercizio 1, allo sviluppo di $\frac{1}{1-x}$ e ad una doppia applicazione del teorema di derivazione termine a termine si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n)\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)\, x^n - \frac{x}{(1-x)^2} = x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)\, x^{n-1}\right) - \frac{x}{(1-x)^2} + 1$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)\,(n+1)\, x^n\right) - \frac{x}{(1-x)^2} + 1 =$$

$$= x\left[\sum_{n=0}^{+\infty} (x^{n+2})''\right] - \frac{x}{(1-x)^2} + 1 = x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+2}\right)'' - \frac{x}{(1-x)^2} + 1$$

$$= x\left(x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)'' - \frac{x}{1-x^2} + 1 = x\left(x^2\frac{1}{1-x}\right)'' - \frac{x}{(1-x)^2} + 1 = \frac{2x^2-x+1}{(1-x)^3}.$$

8) Applicando il criterio della radice si ha subito

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

e pertanto il raggio di convergenza cercato è $+\infty$.

9) Applicando il criterio del rapporto si ha subito

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \frac{n!}{n^3} = 0$$

e pertanto il raggio di convergenza creato è $+\infty$.

10) Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2+1}{n+1} \frac{n}{n^2+1} = 1$$

e pertanto il raggio di convergenza richiesto è 1.

11) Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{\lg\,(n+1)} \frac{\lg n}{2^n} = 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{\lg n}{\lg\,(n+1)},$$

L'ultimo limite vale 1 (si applichi ad esempio la regola dell'Hopital). Pertanto il raggio di convergenza richiesto vale 1/2.

12) Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n+1}}{\operatorname{sen} 1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n+1}}{1/(n+1)} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\operatorname{sen} 1/n} = 1.$$

Pertanto il raggio di convergenza cercato vale 1.

13) Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

e pertanto il raggio di convergenza della serie in esame vale 1/e.

14) Lo studio del raggio di convergenza della serie in esame si riconduce a quello relativo alla serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lg\left(1+\frac{1}{n}\right) t^n.$$

Tale raggio grazie al criterio del rapporto vale 1 in quanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lg\,[1+1/(n+1)]}{\lg\,(1+1/n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\lg\,[1+1/(n+1)]}{1/(n+1)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)}{\lg\,(1+1/n)} = 1.$$

15) Si osservi che per $|x|\leq 1$ si ha

$$\left|\frac{x^{n^n}}{n^n}\right| < \frac{1}{n^n}$$

e dunque la serie converge. Per $x>1$ si ha invece

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n} = +\infty$$

(si ricordi che

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{a^y}{y} = +\infty$$

per $a>1$). Non essendo dunque il termine generale infinitesimo ne segue che la serie non può convergere.
Resta così stabilito che il raggio di convergenza è 1.

16) Si osservi 3^n è il coefficiente della potenza di esponente $3n$ mentre i coefficienti delle potenze di ordine $3n+1$ e $3n+2$ sono nulli. Applicando allora il criterio di Hadamard e osservando che

$$\lim_{n\to+\infty} (3^n)^{1/3n} = 3^{1/3}$$

il raggio di convergenza risulterà $1/\sqrt[3]{3}$.

Se si vuole evitare l'applicazione del criterio di Hadamard, basta osservare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n x^{3n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (3x^3)^n.$$

Il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$$

(serie geometrica) è 1.
Pertanto l'intervallo di convergenza della serie in esame è individuato dalla condizione

$$|3x^3| < 1$$

e quindi il raggio risulta essere $1/\sqrt[3]{3}$.

17) Si osservi che sono presenti solo le potenze di ordine $4n$. D'altro canto si può notare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{1/n}}{n^2} x^{4n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{1/n}}{n^2} (x^4)^n$$

e il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{1/n}}{n^2} t^n$$

è facilmente calcolabile. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{1/(n+1)}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^{1/n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \lim_{n\to+\infty} 2^{-1/n(n+1)} = 1$$

(si ricordi che:

$$\lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1 \text{ per } 0<a)$$

e dunque grazie al criterio del rapporto il raggio di convergenza è 1. L'intervallo di convergenza della serie in esame sarà individuato dalla condizione $|x^4|<1$ e il suo raggio di convergenza sarà pertanto 1.

18) Applicando il criterio della radice ci si riporta alla valutazione del limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left[(2)^{n^2}\right]^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} (2)^n = +\infty.$$

Pertanto il raggio di convergenza della serie in esame è 0.

19) Applicando il criterio della radice ci si riporta alla valutazione del limite

$$\lim_{n\to+\infty} (2^{\lg n})^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} 2^{\lg n/n} = 1$$

(si ricordi che

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\lg y}{y} = 0).$$

Pertanto il raggio di convergenza della serie in esame è 1.

20) Applicando il teorema di Hadamard e osservando che le potenze che non siano quadrati perfetti hanno coefficiente 0, ci si riconduce a calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(2^{n^2}\right)^{1/n^2} = 2$$

e dunque il raggio di convergenza della serie è 1/2. Volendo evitare l'applicazione del teorema di Hadamard si può osservare che per $|x|>1/2$ risulta

$$2^{n^2} |x|^{n^2} = |2x|^{n^2}>1$$

e dunque il termine generale della serie non è infinitesimo, mentre per $|x|<1/2$ risulta

$$2^{n^2} |x|^{n^2} = |2x|^{n^2} < |2x|^n$$

con $|2x|<1$ e pertanto la serie è maggiorata da una serie geometrica di ragione minore di 1.

21) Si osservi che per $|x|>1$ risulta

$$2^n |x|^{n^2} \geq 1$$

e pertanto il termine generale della serie non è infinitesimo e la serie non può convergere.
Per $|x|<1$ invece poiché:

$$\lim_{n\to+\infty} |x|^n = 0$$

per n sufficientemente grande si avrà

$$2 |x|^n < \delta < 1$$

con δ opportuno e pertanto sarà

$$2^n |x|^{n^2} < \delta^n.$$

La serie risulta allora maggiorata definitivamente da una serie geometrica di ragione minore di 1 e pertanto risulterà convergente.
Il raggio di convergenza pertanto vale 1.

22) Si osservi che per ogni $|x| \geq 1$ il termine generale della serie non è infinitesimo e pertanto la serie non converge mentre per $|x| < 1$, con $0 \leq \sigma < 1$ opportunamente fissato e per n sufficientemente grande si ha $n |x|^n < \sigma$ (si ricordi che

$$\lim_{n\to+\infty} ny^n = 0 \text{ per } |y|<1)$$

e pertanto $n^n |x|^{n^2} < \sigma^n$ sicché la serie è maggiorata da una serie geometrica di ragione σ con $0 \leq \sigma < 1$. Essa pertanto converge e il suo raggio di convergenza risulta pertanto essere uguale a 1.

23) Si fissi $x \neq 0$ e si ricordi che

$$\lim_{n\to+\infty} n!\,|x|^n = +\infty$$

per ogni $x \neq 0$. Il termine generale della serie non è pertanto infinitesimo e la serie ha 0 come raggio di convergenza.

24) Per $|x| \geq 1$ il termine generale della serie non è infinitesimo. Per $|x| < 1$ studiamo il limite della successione

$$a_n = n!\,|x|^{2^n/n};$$

valutiamo il rapporto a_{n+1}/a_n. Si ha subito

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1)\,|x|^{2^n(n-1)/n(n+1)}.$$

Si osservi ora che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n(n-1)}{n(n+1)}\ \frac{1}{n} = +\infty$$

(si ricordi che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$$

se $a>1$ per ogni $\alpha>0$). Pertanto

$$\frac{2^n(n-1)}{n(n+1)} > n$$

per n sufficientemente grande sicché essendo $|x|<1$ per gli stessi n si avrà

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < (n+1)\,|x|^n.$$

Ricordando allora che

$$\lim_{n\to+\infty} na^n = 0$$

per $|a|<1$ si può concludere che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

Da ciò segue subito che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Dunque per n sufficientemente grande, fissato $0 \leq \sigma < 1$ si ha $a_n < \sigma$ sicché

$$\left(n!\,|x|^{2^n}\right)^n < \sigma^n.$$

La serie risulta allora maggiorata dalla serie geometrica di ragione σ con $0 \leq \sigma < 1$ e pertanto il suo raggio di convergenza è 1.

7. Esercizi riassuntivi

Si studino le seguenti successioni e serie di funzioni

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{[\sqrt{n}]}$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{[\lg n]}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lg n\ x^{[\sqrt{n}]}$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\, x^{[\lg n]}$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\, x^{e^n}$

6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{x^n}$

7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(\mathrm{tg}\,x)^n$

8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{arctg}\,x^n$

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x)^n}{n(n+1)}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4+|x|}-\sqrt{n^4-1}\right)$

13) $\left\{e^{-x^2 n}\right\}$

14) $\left\{e^{-nx^{2n}}\right\}$

15) $\left\{e^{-x^{2n}/n}\right\}$

16) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n}\left(e^x+2\right)^n$

17) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(1+x^2)^n}$

18) $\sum_{n=0}^{\infty} (x^2-2)^n$

19) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4\,\mathrm{arctg}\,x}{\pi}\right)^n$

20) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{2^n}(\log x)^n$

21) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+2)^n}{n}$

22) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n}\left(\frac{6\arccos x}{\pi}\right)^{2n}$

23) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-2nx^2}}{(2n)!}$

24) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(n+1)/2}}{n+1}$

25) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\;x^{2n+1}}$

26) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$

27) $\left\{\frac{\log\left(1+n^2x^2\right)}{n^3}\right\}$

28) $\left\{\sqrt{x(n+1)}-\sqrt{xn}\right\}$

29) $\left\{\frac{e^{x^2}}{n+e^{2x^2}}\right\}$

30) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{sen}^2\,\frac{x}{n}$

31) $\left\{\sqrt[n]{1-x^n}\right\}$

Soluzioni

1) Si ha convergenza totale su $[-\sigma,\sigma]$ con $\sigma<1$, non convergenza per $|x|\geq 1$.

2) Si ha convergenza totale su $[-\sigma,\sigma]$ con $\sigma<\frac{1}{e}$, non convergenza per $|x|\geq\frac{1}{e}$.

3) Si ha convergenza totale su $[-\sigma,\sigma]$ con $\sigma<1$, non convergenza per $|x|\geq 1$.

4) La serie converge solo per $x=0$.

5) Si ha convergenza totale su $[0,\sigma]$ con $\sigma<1$, non convergenza per $x>1$.

6) Si ha convergenza totale su $]-\infty,-\sigma] \cup [\sigma,+\infty[$ $\sigma>1$, non convergenza per $|x|\leq 1$. La somma è $x/(x-1)^2$.

7) Si ha convergenza totale su $\bigcup_{k\in Z}\left[k\pi-\frac{\pi}{2}+\sigma,\ k\pi+\frac{\pi}{2}-\sigma\right]$ con $0<\sigma<1$.
La somma vale e^{tgx}.

8) Si ha convergenza totale su $[-\sigma,\sigma]$ con $\sigma<1$, non convergenza per $|x|\geq 1$.

9) Il raggio di convergenza è 1, la somma $-\lg(1-x)$.

10) Il raggio di convergenza è 1, la somma $\left(\frac{1-x}{x}\right)\lg(1-x)+1$.

11) Il raggio di convergenza è 1, la somma $-\int_0^x \frac{\lg(1-t)}{t}\,dt$.

12) Si ha convergenza totale su $[-\sigma,\sigma]$ per ogni $\sigma\geq 0$.

13) Si ha convergenza puntuale a 0 per $|x|>1$, a 1, per $|x|<1$ a e^{-1} per $|x|=1$, uniforme su ogni insieme del tipo $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$ con $a>1$ e $[-a,a]$ con $0<a<1$.

14) Si ha convergenza puntuale a 0 per $|x|\geq 1$, a 1 per $|x|<1$, uniforme su $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ e su $[-a,a]$ con $0<a<1$.

15) Si ha convergenza puntuale a 0 per $|x|>1$, a 1 per $|x|\leq 1$, uniforme su $[-1,1]$ e su $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$ con $a>1$.

16) Convergenza puntuale in $]-\infty,\ \log 2[$, totale in $]-\infty,a]$ con $a<\log 2$.

17) La serie converge totalmente a $e^{1/(1+x^2)}$ in R.

18) La serie converge puntualmente in $]-\sqrt{3},\ -1[\ \cup\ ]1,\sqrt{3}[$ e totalmente in $[a,b] \cup [c,d]$ con $[a,b] \subset]-\sqrt{3},-1[$ e $[c,d] \subset]1,\sqrt{3}[$; la somma è $1/(3-x^2)$.

19) Convergenza puntuale in $]-1,1[$ e totale in $[-a,a]$ con $0<a<1$; la somma è $\pi/(\pi-4 \operatorname{arctg} x)$.

20) Convergenza puntuale in $]e^{-2}, e^{2}[$, totale in $[e^{-a}, e^{a}]$ con $0<a<2$.

21) Convergenza puntuale in $]-1,-1/3[$, uniforme in $[-1,b] \subset]-1,-1/3[$, totale in $[a,b] \subset]-1,-1/3[$.

22) Convergenza puntuale in $]0,1]$, totale in $[b,1] \subset]0,1]$.

23) Convergenza totale su R a $\cos\left(e^{-x^2}\right)$.

24) Convergenza uniforme in $[0,1]$ e totale in $[0,b]$ con $b<1$; la somma è $\log\left(1+\sqrt{x}\right)$.

25) Convergenza puntuale in $R-\{0\}$ e totale in $]-\infty,-b] \cup [b,+\infty[$ con $b>0$; la somma è $\operatorname{sen} 1/x$.

26) Convergenza totale in R.

27) Convergenza puntuale a $f(x)=0$ in R; uniforme in $[-a,a]$ con $a>0$.

28) Convergenza puntuale a $f(x)=0$ in $[0,+\infty[$; uniforme in $[0,a]$ con $a>0$.

29) Convergenza puntuale a $f(x)=0$ su tutto R.

30) Convergenza puntuale su R, totale su $[-a,a]$ con $a>0$.

31) Convergenza puntuale su $]-1,1]$, uniforme su $[a,b] \subset]-1,1[$; il limite è 0 per $x=1$ e 1 per $x\neq 1$.

Svolgimento

1) Si osservi che per $|x| \geq 1$ il termine generale della serie non è infinitesimo.
D'altro canto, se i è un intero, $\left[\sqrt{n}\right] = i$ per tutti quegli interi naturali n tali che $i^2 \leq n < (i+1)^2$ e dunque esattamente per $2i+1$ interi naturali. Pertanto

$$\sum_{n=1}^{(k+1)^2-1} |x|^{[\sqrt{n}]} = \sum_{i=1}^{k} (2i+1)\,|x|^i$$

cioè la somma parziale di indice $(k+1)^2-1$ della serie di termine generale $|x|^{[\sqrt{n}]}$ coincide con la somma parziale di indice k della serie

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (2i+1)\,|x|^i.$$

Quest'ultima serie converge per $|x| < 1$ come si vede subito applicando il criterio del rapporto e quindi totalmente su $(-\sigma,\sigma)$ con $0\leq\sigma<1$.
La serie in esame pertanto converge totalmente su $(-\sigma,\sigma)$ per ogni σ tale che $0\leq\sigma<1$.

2) Se i è un intero naturale allora $[\lg n]=i$ per tutti quegli interi naturali n tali che $e^i \leq n < e^{i+1}$ e detto n_i il numero di tali interi si avrà la stima

$$e^{i+1}-e^i-1 < n_i < e^{i+1}+1-e^i.$$

Pertanto

$$\sum_{i=0}^{k} \left(e^{i+1}-e^i-1\right) |x|^i < \sum_{n=1}^{[e^{k+1}]} |x|^{[\lg n]} < \sum_{i=0}^{k} \left(e^{i+1}+e^i-1\right) |x|^i.$$

Poiché le due serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(e^{i+1}+1-e^i\right) |x|^i, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \left(e^{i+1}-e^i-1\right) |x|^i$$

convergono, come si verifica subito col criterio del rapporto per $|x| < 1/e$ e divergono per $|x| \geq 1/e$ ne segue che la serie in esame converge per $|x| < 1/e$ e diverge per $x \geq 1/e$.
La non convergenza nel caso $x \leq -1/e$ si ottiene dall'eguaglianza

$$\sum_{n=1}^{[e^{k+1}]} x^{[\lg n]} = \sum_{i=0}^{k} n_i\,|x|^i\,(-1)^i.$$

3) Si osservi che

$$\lim_{n\to+\infty} (\lg n)^{1/[\sqrt{n}]} = \lim_{n\to+\infty} e^{\lg \lg n/[\sqrt{n}]} = 1$$

in quanto

$$\frac{\lg \lg n}{[\sqrt{n}]} \le \frac{\lg n}{\sqrt{n}-1}$$

(si ricordi che

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\lg y}{y^{\alpha}} = 0$$

per $\alpha>0$).
Pertanto se $|x| > 1$ allora per n sufficientemente grande si avrà

$$|x| \, (\lg n)^{1/[\sqrt{n}]} \ge 1$$

sicché il termine generale della serie non può essere infinitesimo e la serie non convergerà.
Per $|x| < \delta < 1$, fissato opportunamente σ con $0\le\sigma<1$, per n sufficientemente grande si ha

$$(\lg n) \, |x|^{[\sqrt{n}]} \le (\lg n) \, \delta^{[\sqrt{n}]} < \sigma^{[\sqrt{n}]}.$$

Poiché la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{[\sqrt{n}]}$$

converge totalmente su $[-\sigma,\sigma]$ con $0\le\sigma<1$ (esercizio 1) anche la serie in esame convergerà totalmente su $[-\delta,\delta]$ per ogni δ tale che $0\le\delta<1$.

4) Si osservi che

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n/[\lg n]} = \infty$$

in quanto

$$\frac{n}{[\lg n]} > \frac{n}{\lg n}$$

(si ricordi anche che

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\lg y}{y} = 0).$$

Pertanto per n sufficientemente grande fissato $x\neq0$ si ha

$$\left(2^{n/[\lg n]}\right) |x| > 1$$

sicché sarà

$$2^{n} \, |x|^{[\lg n]} \ge 1.$$

Non essendo così il termine generale della serie infinitesimo, la serie risulterà non convergente per ogni $x\neq0$.

5) Si osservi che le funzioni della successione risultano definite solo per $x\ge0$.
Si ha

$$2^{n} \, x^{e^{n}} = e^{n\lg 2+e^{n}\lg x} = e^{\left(\lg 2+\frac{e^{n}\lg x}{n}\right) n}.$$

Per $x>1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n}\lg x}{n} = \infty$$

e pertanto il termine generale della serie non è infinitesimo.
Per $0<x<\delta<1$ si ha

$$\lg 2 + \frac{e^{n}\lg x}{n} < \lg 2 + \frac{e^{n}\lg\delta}{n}.$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n}}{n} = \infty, \quad \lg\delta<0$$

per n sufficientemente grande si ha

$$\lg 2 + \frac{e^{n}\lg\delta}{n} < -1$$

sicché per ogni $0<x<\delta<1$

$$\lg 2 + \frac{e^n \lg x}{n} < -1.$$

La serie in esame è allora maggiorata dalla serie geometrica di ragione e^{-1} per $0\le x<\delta$. Da ciò si desume subito la convergenza totale su ogni intervallo del tipo $[0,\delta)$ con $0\le\delta<1$.
Per $x=1$ la serie si riduce alla serie di termine generale 2^n che non converge

6) Si osservi che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{x}\right)^n.$$

Pertanto lo studio della serie si riconduce a quello della serie di termine generale nt^n. Tale serie di potenze (esercizio 1 del paragrafo 6) ha 1 come raggio di convergenza pertanto la serie in esame convergerà totalmente per $|1/x| < \sigma < 1$ cioè per $|x| > 1/\sigma$ e non convergerà per $|x| < 1$.
Una semplice osservazione prova che la serie non converge per $x=\pm 1$.
Si può dare una forma esplicita alla somma della serie. Poiché infatti per $|t|<1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nt^n = \frac{t}{(1-t)^2}$$

si avrà per $|x|>1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{1}{x^n} = \frac{1}{x}\Big/\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

7) Si osservi che lo studio della serie in esame si riconduce a quello della serie di termine generale $t^n/n!$. Pertanto la serie data converge totalmente su ogni insieme del tipo $\left[k\pi-\frac{\pi}{2}+\sigma,\ k\pi+\frac{\pi}{2}-\sigma\right]$ con k in $\mathbb{Z}$ e $0\le\sigma<1$ e la sua somma vale $e^{\operatorname{tg} x}$.

8) Si osservi che (per $|x|>1$)

$$\lim_{n\to\infty} |x|^n = \infty, \quad \lim_{y\to\pm\infty} \operatorname{arctg} y = \pm\frac{\pi}{2}$$

sicché il termine generale della serie non può essere infinitesimo. Analogamente non può essere infinitesima per $x=\pm 1$.
Per $|x|<\sigma<1$ si osservi che $|x|^n < \sigma^n$. D'altro canto grazie ad esempio al teorema di Lagrange

$$\operatorname{arctg} y = \frac{1}{1+\bar{y}^2}\, y \quad 0<|\bar{y}|<y$$

e pertanto $|\operatorname{arctg} y| < |y|$ sicché $|\operatorname{arctg} x^n| < \sigma^n$.
La serie risulta allora maggiorata dalla serie geometrica di ragione σ con $0\le\sigma<1$ e quindi converge totalmente su $[-\sigma,\sigma]$.

9) Ovviamente applicando il criterio del rapporto si vede subito che il raggio di convergenza della serie (di potenze) è 1.
Si osservi d'altro canto che

$$\lg(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

e quindi

$$\lg(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+n+1}\frac{x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

e quindi la somma della serie è $-\lg(1-x)$.

10) Si tratta di una serie di potenze. Il suo raggio di convergenza è 1 come si rileva subito applicando il criterio del rapporto.
Per calcolarne la somma, si osservi che

$$\left[\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right]' = \frac{x^n}{n}.$$

Pertanto grazie al teorema di derivazione termine a termine e all'esercizio **9)** si ha per $|x| < 1$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\lg(1-x).$$

Poiché ovviamente la serie di termine generale $x^n/n(n+1)$ vale 0 per $x=0$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = -\int_0^x \lg(1-t)\,dt.$$

D'altro canto grazie al cambiamento di variabile $1-t=\tau$ e a un'integrazione per parti si ha

$$-\int_0^x \lg(1-t)\,dt = \int_1^{1-x} \lg\tau\,d\tau = \left[\tau\lg\tau-\tau\right]_1^{1-x} =$$
$$= (1-x)\left[\lg(1-x)-1\right] + 1 = (1-x)\lg(1-x)+x.$$

Si ricava così per $|x|<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \left(\frac{1-x}{x}\right)\lg(1-x)+1.$$

Lo sviluppo vale anche per $x=\pm1$ in quanto la serie converge in tali punti (può maggiorarsi con la serie armonica di ordine 2) e dunque è applicabile il teorema di Abel. (Nel punto 1 si osservi che

$$\lim_{x\to1} \frac{(1-x)}{x}\lg(1-x)+1=1).$$

11) Il raggio di convergenza della serie di potenze è 1 come risulta da una semplice applicazione del criterio del rapporto.
La serie converge anche per $x=\pm1$ (per $x=1$ coincide con la serie armonica generalizzata di ordine 2, per $x=-1$ è da questa maggiorata).
Si osservi per valutarne la somma che $(x^n/n^2)'=x^{n-1}/n$.

Pertanto grazie al teorema di derivazione termine a termine

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n^2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{\lg(1-x)}{x}.$$

Alla somma si può pertanto dare la forma (osservando che per $x=0$ la serie vale 0)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = -\int_0^x \frac{\lg(1-t)}{t}\,dt.$$

12) Si osservi che razionalizzando il numeratore si ha

$$\sqrt{n^4+|x|} - \sqrt{n^4-1} = \frac{|x|+1}{\sqrt{n^4+|x|}+\sqrt{n^4-1}} \le \frac{|x|+1}{n^2}.$$

Si ha pertanto, confrontando con la serie armonica generalizza di ordine 2, convergenza totale su ogni intervallo del tipo $[-a,a]$ con $0\le a$.

13) Si osservi che per $|x|>1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} x^{2n} = \infty$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} e^{-x^{2n}} = 0$$

mentre per $|x|<1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} e^{-x^{2n}} = 1.$$

Per $x=\pm1$ si ha infine

$$e^{-x^{2n}} = e^{-1}.$$

La successione di funzioni in esame converge pertanto verso la funzione f così definita

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x|>1 \\ e^{-1} & |x|=1 \\ 1 & |x|<1 \end{cases} .$$

La convergenza non può essere uniforme su un intervallo aperto cui appartenga o un cui estremo sia uno dei punti 1 e -1 in quanto la funzione limite non è in tali punti continua. È facile convincersi che la convergenza è però uniforme su ogni insieme del tipo $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$ con a>1 e $[-a,a]$ con 0<a<1.
Infatti sia a>1, allora

$$M_n = \sup_{|x|>a} \left|e^{-x^{2n}}\right| = e^{-a^{2n}}$$

è dunque la successione M_n risulta infinitesima.
Sia ora a<1. Allora

$$M_n = \sup_{|x|<a} \left|e^{-x^{2n}}-1\right| = \sup_{|x|<a} 1-e^{-a^{2n}}$$

e ancora la successione M_n risulta infinitesima.

14) Si osservi che per $|x|>1$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} nx^{2n} = \infty$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-nx^{2n}} = 0.$$

Per $|x|<1$ si ha invece

$$\lim_{n\to+\infty} nx^{2n} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} e^{-nx^{2n}} = 1.$$

Per $|x|=1$, infine si ha

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-nx^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0.$$

Pertanto la successione di funzioni converge verso la funzione f così definita

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x|\geq 1 \\ 1 & |x|<1 \end{cases} .$$

La convergenza non può essere uniforme su $[-1,1]$ in quanto la funzione limite non è continua da sinistra in 1 e da destra in -1. Sia allora 0<a<1. Si ha

$$M_n = \sup_{|x|\leq a} \left|e^{-nx^{2n}}-1\right| = 1-e^{-na^{2n}}$$

e quindi M_n è infinitesima sicché la convergenza risulta uniforme su $[-a,a]$.
Sia ora

$$M_n = \sup_{|x|\geq 1} e^{-nx^{2n}} = e^{-n}.$$

La successione M_n risulta infinitesima e dunque la convergenza è uniforme su $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

15) Si osservi che per $|x|>1$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n}}{n} = \infty$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-x^{2n}/n} = 0.$$

Per $|x|<1$ si ha invece

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n}}{n} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} e^{-x^{2n}/n} = 1.$$

Per $|x|=1$ si ha infine

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-x^{2n}/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{-1/n} = 1.$$

Pertanto la successione di funzioni $\{f_n\}$ in esame converge verso la funzione f così definita

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x|>1 \\ 1 & |x|\le 1 \end{cases}.$$

La convergenza è uniforme su $[-1,1]$. Infatti

$$M_n = \sup_{|x|\le 1} \left|1-e^{-x^{2n}/n}\right| = 1-e^{-1/n}$$

e pertanto M_n è infinitesima.
La convergenza non può essere uniforme né su $]-\infty,-1]$ né su $[1,+\infty[$ in quanto la funzione limite non è continua in -1 da sinistra né in 1 da destra. Sia $a>1$. Si ha allora

$$M_n = \sup_{|x|>a} e^{-x^{2n}/n} = e^{-a^{2n}/n}$$

e pertanto M_n è infinitesima sicché la convergenza è uniforme su $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$.

16) Se poniamo $e^x+2=y$ la nostra serie si scrive nella forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n} y^n$$

che è una serie di potenze di raggio di convergenza

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n(n+1)}{4^n} \cdot \frac{4^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\right) = 4$$

cosicché la serie converge in $]-4,4[$ puntualmente ed in ogni intervallo del tipo $[-a,a]\subset]-4,4[$ totalmente; si osservi anche che tale serie non converge per $y=\pm 4$.

Pertanto la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n} (e^x+2)^n$$

converge puntualmente per

$$-4<e^x+2<4 \iff -6<e^x<2 \iff x\in]-\infty,\log 2[$$

e, fissato $a\in]2,4[$, totalmente per

$$-a\le e^x+2\le a \iff x\in]-\infty,\log(a-2)],$$

cioè per $x\in]-\infty,b]\subset]-\infty,\log 2[$.

17) Ricordando che

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = e^y, \qquad \forall y\in R$$

si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(1+x^2)^n} = e^{1/(1+x^2)} \quad \forall x\in R.$$

D'altro canto la serie esponenziale (*) converge totalmente per $y\in[-a,a]$ con $a>0$; osservando allora che

$$0 < \frac{1}{1+x^2} \le 1 \ \forall x\in R$$

si ha che la serie data converge totalmente su tutto R. La convergenza totale può ottenersi, in questo caso, immediatamente ove si osservi che

$$\frac{1}{n!(1+x^2)^n} \le \frac{1}{n!} \qquad \forall x\in R.$$

18) Si ricordi che la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$$

converge in $]-1,1[$ puntualmente e totalmente in ogni intervallo $[-a,a]\subset]-1,1[$.
Pertanto la serie data converge puntualmente se e solo se

$$-1 < x^2-2 < 1 \iff -\sqrt{3}<x<-1,\ 1<x<\sqrt{3}.$$

La convergenza è totale in ogni insieme del tipo

$$[a,b] \cup [c,d] \text{ con } [a,b] \subset]-\sqrt{3},-1[\text{ e } [c,d] \subset]1,\sqrt{3}[.$$

La somma della serie data è ovviamente

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x^2-2)^n = \frac{1}{3-x^2}.$$

19) Procedendo come nell'esercizio precedente si ha che la serie converge a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4\operatorname{arctg}x}{\pi}\right)^n = \frac{\pi}{\pi-4\operatorname{arctg}x}$$

se e solo se

$$-1<\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}x<1 \iff -1<x<1.$$

La convergenza è totale in ogni intervallo $[-a,a] \subset]-1,1[$.

20) Si osservi che ponendo $\log x=y$ la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{2^n} y^n$$

che è una serie di potenze di raggio di convergenza

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{2n} \quad \frac{2^{n+1}}{3(n+1)} = 2;$$

tale serie converge puntualmente in $]-2,2[$ e totalmente in ogni intervallo $[-a,a] \subset]-2,2[$; è facile verificare, inoltre, che essa non converge per $y=\pm2$.

Pertanto la serie data converge puntualmente per

$$-2<\log x<2 \iff x\in]e^{-2},e^2[$$

e totalmente per

$$-a\le\log x\le a \iff x\in [e^{-a},e^a]$$

con $0<a<2$.

21) Ponendo $y=3x+2$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}$$

che ha raggio di convergenza 1; osservato che per $y=1$ tale serie diverge mentre per $y=-1$ converge si ha che essa converge puntualmente in $[-1,1[$, uniformemente in $[-1,a[\subset [-1,1[$ e totalmente in $[-a,a] \subset]-1,1[$.
Pertanto la serie data converge puntualmente per

$$-1\le3x+2<1 \iff x\in [-1,\ -1/3[$$

uniformemente in $[-1,b] \subset [-1,-1/3[$ e totalmente in $[a,b] \subset]-1,-1/3[$.

22) Ponendo $y = \dfrac{6\arccos x}{\pi}$ la serie diviene

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{9^n}$$

che è una serie di potenze di raggio di convergenza 3; osservato che tale serie non converge per $y=\pm3$ si ha convergenza puntuale in $]-3,3[$ e totale in $[-a,a] \subset]-3,3[$.
Pertanto la serie data converge puntualmente per

$$-3<\frac{6}{\pi} \arccos x<3 \iff x\in]0,1].$$

È facile osservare poi che la convergenza è totale per $x\in [b,1]$ con $b>0$; infatti

$$b\le x\le1 \iff 0\le\arccos x\le\arccos b<\frac{\pi}{2} \iff 0\le\frac{6}{\pi} \arccos x\le\frac{6}{\pi}\arccos b<3$$

e nell'intervallo $[0, \frac{6}{\pi}\arccos b]$ la serie (*), come già osservato, converge totalmente.

23) Si osservi che posto $y=e^{-x^2}$ si ottiene la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} = \cos y \quad \forall y\in R$$

che converge totalmente in ogni intervallo $[-a,a]\subset R$.
Pertanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-2nx^2}}{(2n)!} = \cos e^{-x^2} \quad \forall x\in R;$$

inoltre essendo

$$0<e^{-x^2}\leq 1 \quad \forall x\in R$$

ne segue che la convergenza è totale in tutto R.

24) Posto $\sqrt{x}=y$ si ottiene la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1} = \log(1+y)$$

che converge puntualmente in $]-1,1]$, uniformemente in $[-a,1] \subset]-1,1]$ e totalmente in $[-a,a] \subset]-1,1[$.
Pertanto la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} = \log\left(1+\sqrt{x}\right)$$

converge uniformemente in $[0,1]$ e totalmente in $[0,b]$ con $b<1$.

25) Posto $y=\frac{1}{x}$ si ha la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen} y, \quad \forall y\in R$$

che converge totalmente in ogni intervallo $[-a,a]$ con $a>0$; pertanto la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\, x^{2n+1}} = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

converge puntualmente in $R-\{0\}$ è totalmente in ogni insieme del tipo $]-\infty,-b] \cup [b,+\infty[$ con $b>0$.
Infatti

$$x\in]-\infty,-b] \cup [b,+\infty[\iff -\frac{1}{b}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{b}.$$

26) La serie converge totalmente in R poiché

$$\left|\frac{\cos nx}{n(n+1)}\right| \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

27) La successione converge alla funzione identicamente nulla poiché si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+n^2x^2\right)}{n^3} = 0 \qquad \forall x\in R.$$

Inoltre fissato $a>0$ si ha

$$\max_{[-a,a]} \frac{\log\left(1+n^2x^2\right)}{n^3} = \frac{\log\left(1+n^2a^2\right)}{n^3}$$

e quindi la convergenza è uniforme in ogni intervallo $[-a,a]$ con $a>0$.

28) Si ha

$$\sqrt{x(n+1)} - \sqrt{xn} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

e quindi la successione tende ad $f(x)=0$ per ogni $x\in [0,+\infty[$; si ha poi

$$\max_{[0,a]} \left|\sqrt{x(n+1)}-\sqrt{xn}\right| = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$