A. Alvino G. Trombetti

ELEMENTI DI MATEMATICA I

Liguori Editore

Seconda edizione italiana Giugno 1996
Liguori Editore, Srl
Via Posillipo 394
I 80123 Napoli

Alvino, Angelo :
Elementi di Matematica I/Angelo Alvino, Guido Trombetti
Napoli : Liguori, 1996
ISBN 88 - 207 - 1621 - 6

1. Numeri reali, limiti 2. Calcolo differenziale I. Titolo

Ristampe:

9 8 7 6 5 4 3 2 1 2001 2000 1999 1998 1997 1996

Questo volume è stato stampato in Italia dalle Officine Grafiche Liguori - Napoli su carta inalterabile, priva di acidi a pH neutro, conforme alle norme Iso 9706 ∞.

CAPITOLO I

ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

§ 1. Nozioni preliminari.

Per dare un'idea di ciò che intendiamo per insieme è utile richiamare la cosiddetta "definizione" data dal matematico G. Cantor (1845-1918) nel secolo scorso:
" Per insieme si intende ogni riunione M in un tutto di oggetti determinati e distinti della nostra intuizione o del nostro pensiero (chiamati elementi di M)"

In realtà più che di una definizione si tratta di una precisazione su ciò che bisogna intendere per insieme. In particolare la locuzione "determinato" sta ad indicare che deve essere sempre possibile stabilire (almeno in linea di principio) se un oggetto appartiene o meno all'insieme M, mentre l'aggettivo "distinto" significa che, se un oggetto appartiene ad M, esso è contenuto in M senza ripetizioni.

Di norma indichiamo con lettere latine maiuscole gli insiemi, con lettere latine minuscole gli elementi. Per indicare che a è un elemento di A si scrive:

$$a \in A$$

e si legge a *appartiene ad* A. Se a non è elemento di A si scrive

$$a \notin A$$

e si legge a *non appartiene ad* A.

Siano A e B due insiemi; se ogni elemento di A è anche elemento di B si dice che A *è contenuto (incluso) in* B o che A *è un sottoinsieme di* B e si scrive:

$$A \subseteq B .$$

Se A è incluso in B ed esiste un elemento di B che non appartiene ad A, si dice che A *è un sottoinsieme proprio di* B e si scrive:

$$A \subset B .$$

Spesso un sottoinsieme A di un insieme M viene individuato da una proprietà che ne caratterizza gli elementi. Per esempio se

$$N = \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$$

è l'insieme dei numeri naturali, la proprietà

$$\text{« } n \text{ è dispari »}$$

individua il sottoinsieme di $\mathbb{N}$

$$D = \{1,3,5,\ldots,2k+1,\ldots\} .$$

Ovviamente saranno ammissibili le proprietà "definite" in M, cioè le proprietà per le quali si può sempre stabilire se un qualsiasi elemento di M la soddisfi o meno. Gli elementi di M per i quali una certa proprietà α è vera costituiscono un sottoinsieme di M che sinteticamente si indica nel seguente modo:

$$\{x \in M : \alpha\}.$$

Per fare in modo che a qualsiasi proprietà definita in M corrisponda un insieme è utile inoltre introdurre un insieme privo di elementi detto insieme vuoto che si indica con il simbolo ϕ. In tal modo una proprietà falsa per ogni $x \in M$ individua tale insieme.

Per convenzione si assume che qualunque sia lo insieme M ϕ è un sottoinsieme di M.

L'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di un insieme M si indica con P(M) e si chiama *insieme delle parti di* M.

Siano ora α e β due proprietà definite in M; la scrittura:

$$\alpha \Longrightarrow \beta \quad (\text{in } M)$$

si legge α *implica* β ed esprime il fatto che dato x in M vale la seguente alternativa:

1) x non gode della proprietà α

oppure

2) x gode della proprietà α ed in tal caso x gode anche della proprietà β.

In concreto ciò significa che:

$$\{x \in M : \alpha\} \subseteq \{x \in M : \beta\}.$$

Osserviamo che, con tale definizione, una proprietà falsa per ogni $x \in M$ implica una qualsiasi altra proprietà definita in M. A titolo di esempio consideriamo le seguenti proprietà definite nello insieme N dei naturali:

$$\alpha = \ll n \text{ è primo}, n \neq 2 \gg \quad , \beta = \ll n \text{ è dispari} \gg ;$$

risulta allora chiaramente

$$\alpha \Longrightarrow \beta .$$

Se $\alpha \Rightarrow \beta$ e $\beta \Rightarrow \alpha$, essendo α,β due proprietà definite in M, si dice che α e β sono equivalenti e si scrive:

$$\alpha \Longleftrightarrow \beta ;$$

in concreto ciò significa che

$$\{x \in M : \alpha\} = \{x \in M : \beta\} .$$

Richiamiamo alcuni simboli utili per sintetizzare frasi di uso corrente. La frase: "per ogni $x \in M$ per cui è vera la proprietà α" si scrive più sinteticamente

$$\forall x \in M : \alpha ;$$

il simbolo $\forall$ si legge "per ogni" e si chiama *quantificatore universale*.
La frase: "esiste un $x \in M$ per cui è vera la proprietà α" si scrive

$$\exists x \in M : \alpha ;$$

il simbolo $\exists$ si legge "esiste" e si chiama *quantificatore esistenziale*.

Infine la frase "esiste un unico $x \in M$ tale che.." si scrive

$$\exists !\, x \in M : .$$

Le scritture $\not\Rightarrow$, $\not\Leftrightarrow$, $\nexists$ si leggono rispettivamente "non implica", "non equivalente", "non esiste" ed hanno un ovvio significato.

Infine precisiamo che con i simboli N, Z, Q indichiamo rispettivamente l'insieme dei numeri naturali, relativi e razionali.

Complementi ed esercizi

1.1 - Considerate le seguenti proprietà in N

α = « n è somma di due numeri pari »

β = « n è somma di due numeri dispari » ;

verificare se una delle due proprietà implica l' altra.

1.2 - Considerato l'insieme A = {a,b,c}; verificare che l'insieme P(A) delle parti di A contiene 2^3 elementi. A partire da tale dato sapreste dimostrare che se A = {a,b,c,d}, P(A) contiene 2^4 elementi?

1.3 - Consideriamo in N (insieme dei numeri naturali) le seguenti proprietà:

α = « x è maggiore di 10 »

β = « x è divisibile per 2 »

γ = « x è divisibile per 10 »

dire quali delle seguenti scritture sono corrette:

$\alpha \Rightarrow \gamma$, $\gamma \Rightarrow \alpha$, $\alpha \overset{\text{NO}}{\not\Rightarrow} \beta$, $\beta \Rightarrow \alpha$, $\gamma \Rightarrow \alpha$, $\gamma \Rightarrow \beta$

$\beta \not\Rightarrow \gamma$.

1.4 Considerate le due proprietà:

α = « x è divisibile per 2 »

β = « x è maggiore di 1 »

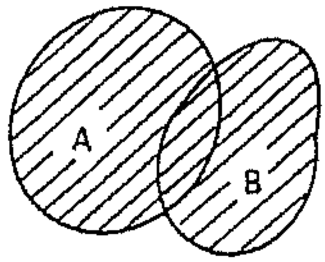
verificare che $\alpha \Rightarrow \beta$ (in N)

$\alpha \not\Rightarrow \beta$ (in Z)

§ 2 - Operazioni sugli insiemi

Siano A, B due sottoinsieme di M; si definisce *unione di* A *e* B e si indica con $A \cup B$ l'insieme costituito dagli elementi di M che appartengono almeno ad uno dei due insiemi A e B; precisamente:

$$A \cup B = \{x \in M : x \in A \text{ o } x \in B\} .$$



$A \cup B$

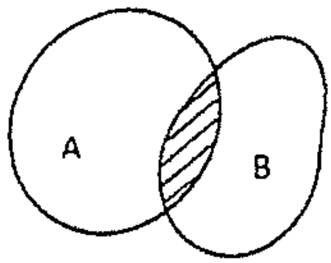
Si definisce *intersezione di* A *e* B e si indica con $A \cap B$ il sottoinsieme di M costituito dagli elementi comuni ad A e B; precisamente

$$A \cap B = \{x \in M : x \in A \text{ ed } x \in B\} .$$

Se A,B non hanno elementi in comune risulta allora:

$$A \cap B = \phi$$

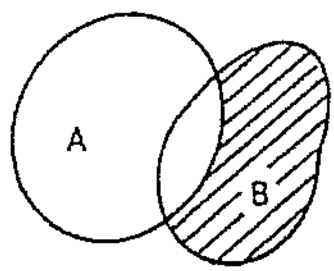
e gli insiemi A,B si dicono *disgiunti*



$A \cap B$

Chiamiamo infine *complemento di* A *rispetto a* B il sottoinsieme di M i cui elementi appartengono a B ma non ad A; tale insieme si indica con

$$B - A = \{x \in M : x \in B \text{ ed } x \notin A\} .$$



$B - A$

L'insieme M - A si indica semplicemente con - A.

Sussistono inoltre le seguenti relazioni:

i) $A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$

ii) $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$ $\qquad$ (proprietà commutativa)

iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $\qquad$ (proprietà associativa)

iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\qquad$ (proprietà distributiva)

v) $-(A \cup B) = (-A) \cap (-B)$

$-(A \cap B) = (-A) \cup (-B)$ $\qquad$ (leggi di de Morgan).

Allo scopo di illustrare il metodo da seguire per verificare tali relazioni diamo la dimostrazione della prima delle iv), lasciando al lettore il compito di ottenere in modo analogo le rimanenti.
Se $x \in A \cup (B \cap C)$, allora x appartiene ad A od x appartiene a B e a C. Nell'uno come nell'altro caso $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Quindi

(1) $\qquad A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Se ora consideriamo un generico elemento $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ allora x appartiene ad $A \cup B$ e ad $A \cup C$; ne segue che appartiene ad A oppure appartiene a B e C; pertanto $x \in A \cup (B \cap C)$ e quindi

(2) $\qquad (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Da (1) e (2) discende ovviamente la prima delle relazioni iv).

Complementi ed esercizi

2.1 - Considerati gli insiemi

$$A = \{1,2,3,4,5\} \quad , \quad B = \{4,5,6,7\}$$

determinare gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$, $A-B$, $B-A$.

2.2 - Se $A,B \in P(M)$ verificare che

$$A \cup B = -[(-A) \cap (-B)] \quad ; \quad A \cap B = -[(-A) \cup (-B)] .$$

2.3 - Verificare che, qualunque siano $A,B,C \in P(M)$ si ha:

$A - (B - A) = A$

$A - (A \cap B) = A - B$

$(A-B) \cup (A \cap B) = A$

$(A - B) - C = A - (B \cup C)$

$(A \cup B) \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$

§ 3. Funzioni

Siano X e Y due insiemi non vuoti. Si chiama *funzione o applicazione di* X *in* Y una legge che ad ogni $x \in X$ fa corrispondere uno ed un solo elemento $y \in Y$. Comunemente una funzione si indica nel modo seguente

$$f : X \to Y ;$$

l'elemento $y \in Y$ che corrisponde ad $x \in X$ si denota con $f(x)$ e si chiama immagine mediante f di x .

L'insieme X prende il nome di *insieme di definizione* o *dominio* di f, mentre il sottoinsieme di Y:

$$f(X) = \{ y \in Y : \ll \exists x \in X : f(x) = y \gg \}$$

si chiama *immagine di* X *mediante* f o anche *codominio di* f.

Ad esempio:

$$f : x \in N \to f(x) = x^2 \in \mathbb{N}$$

ha per codominio l'insieme $\{1,4,9,16,25\ldots\}$

Più in generale, se $A \subseteq X$, si chiama *immagine di* A *mediante* f,

$$f(A) = \{ y \in Y : \ll \exists x \in A ; f(x)=y \gg \} .$$

Se $B \subseteq Y$ si chiama *immagine inversa di* B *mediante* f il sottoinsieme di X

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X : f(x) \in B \} .$$

Facendo riferimento all'esempio precedente:

$$f^{-1}(\{1,9,121\}) = \{1,3,11\} \quad f^{-1}(\{5,8\}) = \phi .$$

In altri termini $f^{-1}(B)$ contiene tutti quegli elementi di X, se esistono, la cui immagine è in B. L'insieme $f^{-1}(B)$ si chiama anche *controimmagine di* B mediante f. Se il codominio f(X) di f coincide con tutto l'insieme Y la funzione f è detta *suriettiva* o *funzione di* X *su* Y.

Indicati con x_1, x_2 due generici elementi di X, se

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

la funzione f si dice *iniettiva*.
La funzione f dell'esempio precedente è iniettiva ma non suriettiva.
Se f è contemporaneamente suriettiva ed iniettiva, essa si dice *biunivoca*. In tal caso comunque si fissi $y \in Y$ esiste un unico elemento $x \in X$ tale che $f(x)=y$. Resta pertanto individuata una funzione di Y in X

$$f^{-1}: Y \to X$$

detta *funzione inversa di* f: tale funzione è ovviamente biunivoca e inoltre, per ogni $x \in X$ e $y \in Y$ risulta

(3) $\qquad f^{-1}(f(x)) = x \qquad\qquad f(f^{-1}(y)) = y.$

Ad esempio data la funzione

$$f: x \in N \to x+20 \in \{21,22,23,...\} = Y$$

si ha

$$f^{-1} : y \in Y \to y-20 \in N$$

Dati tre insiemi X,Y,T e due funzioni

$$f:X \to Y \qquad\qquad g : Y \to T ,$$

preso x in X, consideriamo $f(x) \in Y$: a quest'ultimo elemento applichiamo la funzione g; si ottiene l'elemento $g(f(x)) \in T$. Abbiamo in tal modo costruito una nuova funzione, questa volta di X in T, che si indica nel seguente modo

$$g \circ f : X \to T$$

e si chiama *funzione composta di* f *e* g.
Ad esempio se

$$f : x \in Z \to x+6 \in Z$$
$$g : x \in Z \to x^3 \in Z$$

si ha:

$$g \circ f : x \in Z \to (x+6)^3 \in Z$$
$$f \circ g : x \in Z \to x^3+6 \in Z$$

Il lettore compirà un utile esercizio costruendo un esempio in cui abbia senso $f \circ g$ e non $g \circ f$.

Se S è un insieme e si indica con i_S *l'applicazione identica* di S cioè l'applicazione che ad ogni $x \in S$ associa x stesso, le (3) si scrivono

$$f^{-1} \circ f = i_X \quad , \quad f \circ f^{-1} = i_Y$$

Sia f una funzione di X in Y e A un sottoinsieme di X; la funzione che ad $x \in A$ associa $f(x) \in Y$ prende il nome di *restrizione di f ad A* e si indica col simbolo $f_{/A}$. Se invece g è una funzione di A in Y, una funzione f di X in Y tale che

$$f(x) = g(x) \quad \forall \ x \in A$$

si dice "*prolungamento di g da A su X*".

Una funzione definita nell'insieme N dei naturali prende il nome di *successione:*

$$f : n \in N \to f(n) \in T$$

E' d'uso comune rappresentare una successione con una notazione del tipo $\{a_n\}_{n \in N}$ od anche

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots$$

In sostanza con tale notazione si indica con a_n lo elemento $f(n)$.

Così la funzione $f : x \in N \to x^2 \in N$ si rappresenta anche con la notazione $\{n^2\}_{n \in N}$.

Data una successione $\{a_n\}$ di elementi di X, si dirà *sostegno* della successione l'insieme

$$\{x \in X : \exists n : a_n = x\}$$

Ad esempio il sostegno di $\{(-1)^n\}_{n \in N}$ è l'insieme $\{-1, 1\}$ mentre quello di $\{2n\}_{n \in N}$ è l'insieme dei numeri pari.

Complementi ed esercizi

3.1 - Sia A un insieme; consideriamo un'applicazione che ad ogni $a \in A$ associa un sottoinsieme X_a di X:, si dice allora che $\{X_a\}_{a \in A}$ costituisce una *famiglia* di sottoinsiemi di X con insieme di indici A. Se si definisce:

$$\bigcup_{a \in A} X_a = \{x \in X : \ll \exists\, a \in A : x \in X_a \gg \}$$

$$\bigcap_{a \in A} X_a = \{x \in X : \ll x \in X_a \ \forall a \in A \gg \}$$

dimostrare che

$$- \bigcup_{a \in A} X_a = \bigcap_{a \in A} (-X_a)$$

(leggi di de Morgan)

$$- \bigcap_{a \in A} X_a = \bigcup_{a \in A} (-X_a) .$$

3.2 - Se $f: X \to Y$ dimostrare che

$f^{-1}(Y_1 - Y_2) = f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$ $\qquad$ $f(X_1 - X_2) \supseteq f(X_1) - f(X_2)$

$f^{-1}(\bigcup_{a \in A} Y_a) = \bigcup_{a \in A} f^{-1}(Y_a)$ $\qquad$ $f(\bigcup_{a \in A} X_a) = \bigcup_{a \in A} f(X_a)$

$f^{-1}(\bigcap_{a \in A} Y_a) = \bigcap_{a \in A} f^{-1}(Y_a)$ $\qquad$ $f(\bigcap_{a \in A} X_a) \subseteq \bigcap_{a \in A} f(X_a)$

$f(f^{-1}(Y_1)) \subseteq Y_1$ $\qquad$ $f^{-1}(f(X_1)) \supseteq X_1$

Per quelle relazioni per le quali non c'è uguaglianza, costruire degli esempi in cui c'è inclusione propria.

3.3 - Considerata l'applicazione

$$f : x \in N \to f(x) = 2x \in N$$

dire

a) se f è iniettiva

b) se f è suriettiva

c) se ha senso parlare di funzione inversa.

3.4 - Considerate le applicazioni

$$f : x \in Z \to x + 1 \in Z$$

$$g : x \in Z \to x^2 \in Z$$

rispondere alle questioni a), b) e c) poste in 3.3

3.5 - Dimostrare che una funzione $f : X \to Y$ è iniettiva se e solo se

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

3.6 - Se $A \subseteq X$ chiamiamo *funzione caratteristica* di A l'applicazione di X in {0,1} così definita:

$$\chi_A : x \in X \to \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Indicato con 2^X l'insieme delle funzioni caratteristiche di sottoinsiemi di X dimostrare che l'applicazione di P(X) in 2^X che ad ogni sottoinsieme $A \subseteq X$

associa la funzione χ_A è biunivoca.

3.7 - Se $f : X \to Y$ e $B \subset Y$, l'applicazione $\chi_B \circ f$ è caratteristica di qualche sottoinsieme di X?

§ 4 - Relazioni binarie.

Un insieme è un "aggregato caotico" di elementi, non interessa cioè l'ordine con cui i suoi elementi sono elencati. Per esempio se un'insieme contiene due soli elementi a,b non ha senso distinguere l'insieme {a,b} dall'insieme {b,a}; se però si vuole tener conto dell'ordine bisogna introdurre la nozione di coppia. Pertanto se a,b sono elementi, non necessariamente distinti, di un insieme X chiamiamo *coppia ordinata*, di prima componente a e di seconda componente b, il simbolo (a,b). Due coppie (a,b) e (a',b') sono uguali se e solo se a=a', b=b'. Quindi se $a \neq b$ risulta $(a,b) \neq (b,a)$.

L'insieme delle coppie ordinate di elementi di un insieme non vuoto X si indica con il simbolo $X \times X$ o anche X^2 e si chiama *prodotto cartesiano*.

Ad esempio se $X = \{1,2\}$ si avrà:

$$X \times X = X^2 = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$$

Ogni qualvolta si fissa un sottoinsieme non vuoto R di $X \times X$ si dice che è assegnata in X una *relazione binaria* che con un abuso di linguaggio indichiamo con R. Diciamo che

R è riflessiva <=> « $\forall x \in X\ (x,x) \in R$ »

R è simmetrica <=> « $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$ »

R è transitiva <=> « $(x,y) \in R, (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$ »

$$R \text{ è antisimmetrica} \iff \ll (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R \gg$$

Per esempio se si considera la cosiddetta *diagonale* di X x X, cioè

$$D = \{(x,x) \text{ con } x \in X\}$$

si ha

$$(x,y) \in D \iff x = y$$

cioè la relazione D coincide con la classica relazione di uguaglianza. Si può facilmente verificare che tale relazione è riflessiva, simmetrica e transitiva. In generale una relazione R che sia riflessiva, simmetrica e transitiva si dice *relazione di equivalenza*

Una relazione binaria R in X che sia transitiva e antisimmetrica dicesi *relazione d'ordine* e l'insieme X, dotato di tale relazione, si chiama *insieme ordinato*. Prendendo spunto dalla notazione adottata per la usuale relazione d'ordine tra grandezze numeriche, da ora in poi, se R è una relazione d'ordine, per indicare che x è in relazione R con y, scriveremo

$$x < y \ (R)$$

o più semplicemente

$$x < y$$

se non c'è possibilità di equivoco. La precedente scrittura si legge x *precede* y *nella relazione* R o più semplicemente x è *minore di* y. Per il seguito adotteremo anche la notazione

$$x \leq y \ (R)$$

per indicare che o $x < y$ o $x = y$.

Un esempio di relazione d'ordine è l'usuale relazione d'inclusione tra sottoinsiemi di un insieme S, cioè, se $A, B \in P(S)$

$$A < B \Longleftrightarrow A \subset B$$

In relazione a tale esempio osserviamo che se S non è costituito da un unico elemento, non è detto che due sottoinsiemi distinti A,B siano tra loro *confrontabili*, cioè che o $A < B$ o $B < A$. Ciò suggerisce la seguente definizione: diremo che una relazione di ordine R in X è *totale* se comunque si fissi una coppia (x,y) con $x \neq y$ vale una delle due relazioni

$$x < y \qquad , \qquad y < x$$

Ad esempio l'usuale relazione d'ordine tra grandezze numeriche è una relazione d'ordine totale. Un insieme in cui sia assegnata una relazione d'ordine totale dicesi *totalmente ordinato*.

Finora abbiamo considerato coppie di elementi di uno stesso insieme X. Più in generale, dati due insiemi non vuoti X e Y, consideriamo le coppie (x,y) con $x \in X$ e $y \in Y$. L'insieme di tali coppie si chiama prodotto cartesiano di X e Y e si indica col simbolo $X \times Y$.

Se f è una funzione di X in Y, il sottoinsieme di $X \times Y$

$$G = \{(x, f(x)),\ x \in X\}$$

si chiama *grafico della funzione* f. Il grafico gode della seguente proprietà:

$$\ll \forall x \in X \ \exists !\ y \in Y : (x,y) \in G\} .$$

Viceversa se G è un sottoinsieme di X x Y che go de di tale proprietà, esiste una funzione di X in Y di cui G è il grafico; tale funzione è quella che ad ogni $x \in X$ associa l'unico y tale che $(x,y) \in G$.

Sia adesso n un numero naturale più grande di 2 e siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n insiemi non vuoti; se $a_1 \in A_1, \ldots a_i \in A_i, \ldots, a_n \in A_n$ diciamo *n-pla di i-ma componente* a_i il simbolo

$$(a_1, a_2 \ldots a_i \ldots a_n) .$$

L'insieme di tali n-ple si indica con la scrittura

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n .$$

Se $A_i = A$ per ogni i tale insieme si indica anche col simbolo A^n.

Complementi ed esercizi

4.1 - Dati gli insiemi

$$A = \{1,2,3\} \quad , \quad B = \{a,b,c,d\}$$

scrivere gli elementi dell'insieme A x B.

4.2 - Dati gli insiemi

$$A = \{1,2,3,4\} \quad , \quad B = \{1,4,9,10,11,16\}$$

e considerato il sottoinsieme di $A \times B$

$$G = \{(1,1),\ (2,4),\ (3,9),\ (4,16)\}$$

sapreste dire qual'è la funzione di A in B che ha come grafico G?

4.3 - Sia R una relazione di equivalenza in S. Indicato con $[x]_R$ (*classe di equivalenza di* x) l'insieme degli $y \in S$ che sono nella relazione R con x, dimostrare che

a) $[x]_R = [y]_R$ ovvero $[x] \cap [y] = \phi$ a seconda che $(x,y) \in R$ o che $(x,y) \notin R$.

b) $\bigcup_{x \in S} [x]_R = S$.

4.4 - Fissato un numero naturale k, consideriamo in $\mathbb{Z}$ la seguente relazione detta congruenza modulo R.

$$n \equiv m \ (\mathrm{mod}\ k) \iff \ll \exists\, p \in \mathbb{Z} : n-m = p \cdot k \gg .$$

Dimostrare che tale relazione è una relazione di equivalenza e verificare che l'insieme $\mathbb{Z}$ è ripartito, in k classi di equivalenza.

4.5 - Sia $A = \{a,b,c\}$, $B = \{d,e,f,g\}$; verificare che $A \times B$ ha dodici elementi. Verificare inoltre che lo insieme delle funzioni di A in B, indicato con B^A, ha 4^3 elementi.

4.6 - Se $n \in N$ sia $p(n)$ il numero dei fattori primi di n.
Consideriamo la seguente relazione R in N : se $p(n)<p(m)$ poniamo

$$n < m \ (R) \ ,$$

se $p(n) = p(m)$ poniamo

$$n < m \ (R) \iff n < m \text{ nella relazione usuale in } N .$$

Dimostrare che R è una relazione d'ordine totale.

4.7 - Se l'insieme S contiene 4 elementi, quante relazioni d'ordine totale è possibile introdurre in S?

4.8 - Consideriamo il sottoinsieme R di Z x Z

$$(n,m) \in R \iff \begin{cases} n<0,\ m>0 \\ n,m>0 \text{ e } n>m \text{(nella relazione usuale)} \\ n,m<0 \text{ e } n>m \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \end{cases}$$

Dimostrare che R è una relazione d'ordine. E' anche una relazione d'ordine totale?

4.9 - Se l'insieme S contiene n elementi e l'insieme T contiene m elementi quanti elementi possiede SxT?

§ 5. Massimo, minimo, estremo inferiore e superiore.

Sia S un insieme ordinato e X un sottoinsieme di S. Se esiste un elemento $m' \in X$ tale che

$$\forall x \in X \qquad m' \leq x$$

si dice che m' è il *minimo* di X e si scrive

$$m' = \min X .$$

Analogamente, se esiste un elemento $m'' \in X$ tale che

$$\forall x \in X \qquad x \leq m''$$

si dice che m'' è il *massimo* di X e si scrive

$$m'' = \max X.$$

E' facile verificare che il massimo (minimo) di X, se esiste, è unico.

Supponiamo ora che esista un elemento $a \in S$ tale che

$$\forall x \in X \qquad a \leq x .$$

L'insieme X si dice allora *limitato inferiormente* e a è detto *minorante* di X. Se X è dotato di minimo, X è ovviamente limitato inferiormente. Il massimo, se esiste, dell'insieme dei minoranti di X prende il nome di *estremo inferiore* di X e si indica col simbolo

$$\inf X .$$

Analogamente se esiste un elemento $b \in S$ tale che

$$\forall x \in X \qquad x \leq b$$

si dice che X è *limitato superiormente* e che b è un *maggiorante* di X. Il minimo, se esiste, dell'insieme dei maggioranti di X si chiama *estremo superiore* di X e si indica con il simbolo

$$\sup X.$$

E' evidente che se X ammette massimo (minimo) si ha

$$\sup X = \max X \qquad (\inf X = \min X)$$

OSSERVAZIONE. Volendo schematizzare quanto detto precedentemente si ha « X ha massimo » => « X è dotato di estremo superiore » => « X è lim.sup.», e analogamente
« X ha minimo » => « X è dotato di estremo inferiore » => « X è lim. inf. ».
Tali implicazioni non sono invertibili.

Se S è totalmente ordinato l'estremo superiore ed inferiore possono essere caratterizzati dalle seguenti proprietà:

$$e' = \inf X \iff \begin{cases} \text{i)}' \quad \forall x \in X \qquad e' \leq x \\ \\ \text{ii)}' \quad \forall y \in S \text{ tale che } e' < y, \quad \exists x \in X \text{ tale} \\ \qquad \text{che } x < y, \end{cases}$$

$$e'' = \sup X \iff \begin{cases} \text{i)}'' \quad \forall x \in X \qquad x \leq e'' \\ \\ \text{ii)}'' \quad \forall y \in S \text{ tale che } y < e'', \quad \exists x \in X \text{ tale} \\ \qquad \text{che } y < x. \end{cases}$$

Dimostriamo solo la prima equivalenza; la seconda si dimostra in modo analogo.

Se $e' = \inf X$, la i)' è banalmente vera essendo e' un minorante di X.

Fissato ora $y \in S$ se $e' < y$, y non è un minorante; quindi, essendo la relazione d'ordine totale, esiste un $x \in X$ tale che $x < y$ cioè la ii)'. Viceversa, se valgono le i)', ii)' allora, per i)', e' è un minorante; inoltre, per ii)' un qualsiasi y tale che $e' < y$ non è un minorante; d'altro canto detto y un minorante pochè la relazione d'ordine è totale:

$$y \leq e' \quad \text{oppure} \quad y > e' .$$

Per quanto detto in precedenza dovrà essere necessariamente $y \leq e'$ e quindi e' è il massimo dei minoranti

Complementi ed esercizi

5.1 - Consideriamo il sottoinsieme di Q.

$$A = \{1, 1/2, 1/3, \ldots 1/n, \ldots\}$$

Dimostrare che

$$\sup A = \max A = 1$$

$$\inf A = 0$$

5.2 - Il sottoinsieme di N costituito dai numeri pari è limitato superiormente? E' limitato inferiormen te?

5.3 - Considerato il sottoinsieme A di Q costituito dai numeri

$$\frac{2n - 1}{n + 2}$$

al variare di $n \in N$, verificare che sup A = 2

5.4 - Se S è un insieme ordinato e X,Y due sottoinsiemi di S dotati di estremo inferiore e superiore, allora

$$X \subseteq Y \Rightarrow \inf Y \leq \inf X \leq \sup X \leq \sup Y .$$

5.5 - Sia M un insieme e sia P(M) ordinato con l'usuale relazione di inclusione. Dimostrare che un qualsiasi sottoinsieme F di P(M) è dotato di estremo superiore ed inferiore.

5.6 - Consideriamo l'insieme degli interi relativi Z dotato della relazione R dell'esercizio 4.8. Dimostrare che il sottoinsieme N è inferiormente limitato ma non ha estremo inferiore.

5.7 - Dimostrare che ogni sottoinsieme di Z limitato superiormente (inferiormente) rispetto alla relazione d'ordine usuale ammette massimo (minimo).

§ 6 - Operazioni

Dato un insieme S si chiama *operazione interna* in S ogni funzione σ di $S \times S$ in S.

Data una operazione interna σ, l'elemento di S che σ associa alla coppia (x,y) si indica con $x \sigma y$ e si chiama risultato dell'operazione σ eseguita sulla coppia (x,y).

Esempi di operazioni interne sono le usuali operazioni di somma e di prodotto in N , Z, Q .

Se esiste un elemento ω di S tale che:

$$\forall x \in S \qquad \omega \sigma x = x \sigma \omega = x$$

ω si dirà *elemento neutro.*

Se in S esiste l'elemento neutro esso è unico. Infatti detti ω' ed ω due elementi neutri, si ha:

$$\omega' \sigma \omega = \omega \quad \text{ed} \quad \omega' \sigma \omega = \omega' ;$$

quindi $\omega = \omega'$

Sia σ un'operazione dotata di elemento neutro. Fissato $x \in S$, esso si dirà dotato di *simmetrico* se esiste un elemento x' tale che:

$$x' \sigma x = x \sigma x' = \omega$$

Un'operazione si dirà:

commutativa se $x \sigma y = y \sigma x \qquad x, y \in S$

associativa se $(x \sigma y) \sigma z = x \sigma (y \sigma z) \qquad x, y, z \in S$

E' facile provare che se σ è associativa, il simmetrico di un elemento, quando esiste, è unico. Infatti se x' e x'' sono simmetrici di x si ha

$$x'=x'\sigma\omega=x'\sigma(x\sigma x'')=(x'\sigma x)\sigma x'' = \omega\sigma x'' = x''$$

Complementi ed esercizi

6.1 - L'operazione di somma in Z è dotata di elemento neutro? e quella di prodotto?
Esiste il simmetrico di un elemento di Z rispetto all'operazione di prodotto? e rispetto a quella di somma?

6.2 - Sia X un insieme non vuoto; considerata l'operazione in $P(X)$

$$A \sigma B = A \cup B$$

dire se esiste l'elemento neutro rispetto a σ. Esiste il simmetrico di un elemento $A \in P(X)$?
Se invece si definisce

$$A \sigma B = A \cap B$$

dire se esiste l'elemento neutro ed il simmetrico di un generico elemento di $P(X)$.

§ 7 - Insiemi finiti ed infiniti. Il principio di induzione.

Un insieme S si dice *finito* se esiste un numero naturale n tale che S contiene esattamente n elementi; altrimenti S si dice *infinito*.

Ci chiediamo se esiste una definizione di insieme infinito non espressa mediante una negazione(cioè tutto ciò che non è finito!) ma che faccia riferimento ad una proprietà caratteristica.

Prendiamo l'insieme N dei numeri naturali e consideriamo la seguente funzione definita in N:

$$\phi: n \in N \rightarrow 2n \in N .$$

Tale funzione è ovviamente una applicazione biunivoca tra N e una sua parte propria, cioè l'insieme P dei numeri pari: con una terminologia universalmente adottata in teoria degli insiemi si dice che " N è *equipotente* a P".
Possiamo aspettarci che tale proprietà

α) « S è equipotente ad una sua parte propria T, cioè esiste una applicazione biunivoca di S su T »

sia la proprietà giusta per caratterizzare gli insiemi infiniti?

Ovviamente, come primo passo, dobbiamo verificare che tale proprietà non è soddisfatta dagli insiemi finiti. Benchè il buon senso ci dica che ciò è vero, proviamo a dare una dimostrazione rigorosa.

Indichiamo con β la negazione di α. Cioè:

β) « S non è equipotente ad alcuna sua parte propria ».

Se S è costituito da un solo elemento ovviamente S gode della proprietà β. Infatti l'unico sottoinsieme proprio di S è il vuoto

Supponiamo ora che la proprietà β sia verificata dagli insiemi che contengono (n-1) elementi e dimostriamo che ne godono anche gli insiemi che contengono n elementi con $n \geq 2$.

Sia infatti S un insieme contenente n elementi ; se ϕ è una applicazione biunivoca di S su una sua parte propria S' e se $s \in S-S'$, allora la restrizione di ϕ a $S - \{s\}$ è ovviamente una applicazione biunivoca dell'insieme $S - \{s\}$ (avente n-1 elementi) in una sua parte propria $S' - \phi(s)$, il che è contro l'ipotesi.

Adesso per poter concludere la dimostrazione bisogna invocare il

PRINCIPIO DI INDUZIONE MATEMATICA

Se T è un sottoinsieme di N con le seguenti proprietà:

1) $1 \in T$

2) $n-1 \in T \Rightarrow n \in T$;

allora $T = N$

Infatti se diciamo T l'insieme dei numeri naturali n tali che ogni insieme di n elementi goda della proprietà β abbiamo provato che

$1 \in T$

$n-1 \in T \Rightarrow n \in T$

Ne segue $T = N$ e quindi l'asserto.

Ritorniamo ora alla questione della caratterizzazione degli insiemi infiniti; per poter concludere che ogni insieme infinito soddisfa la proprietà α) è necessario ricorrere ad un ulteriore assioma della teoria degli insiemi, detto *assioma della scelta*(*).

Se si accetta tale assioma si ha

i) S è infinito <=> S verifica la proprietà α)

ii) Ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme che è equipontente a N .

Tra gli insiemi infiniti diremo *numerabili* quelli equipotenti all'insieme N dei naturali, cioè quegli insiemi infiniti i cui elementi siano "ordinabili in successione".

Si può dimostrare, ma ce ne asteniamo per brevità:

PROP. 1 *Ogni sottoinsieme di un insieme numerabile o è finito o, se è infinito, è numerabile.*

PROP. 2 *Se* $X_1, X_2 \ldots X_n$ *sono insiemi finiti o numerabili di cui almeno uno infinito allora il prodotto cartesiano* $X_1 \times X_2 \ldots \times X_n$ *è numerabile.*

PROP. 3 *Se* $\{X_n\}_{n \in N}$ *è una successione di insiemi numerabili la loro unione è numerabile.*

(*)

ASSIOMA DELLA SCELTA

Data una famiglia S di insiemi non vuoti esiste una applicazione f di S in $\bigcup_{X \in S} X$ tale che per ogni $X \in S$: $f(X) \in X$

Come conseguenza di tali proposizioni si ha che, *l'insieme Q dei razionali è numerabile*. Infatti se x è un razionale, x può essere rappresentato sotto forma di frazione $\frac{m}{n}$ dove m ed $n > 0$ sono primi tra loro. Quindi Q può essere identificato con un sotto-insieme infinito di Z x Z. Poichè Z x Z è numerabile per la PROP. 2, allora Q è numerabile per la PROP.1.

Osserviamo che esistono insiemi infiniti che non sono numerabili. Un esempio di tale tipo di insieme sarà dato al n. 7 del cap. II.

Complementi ed esercizi.

7.1 - Riprendendo l'esercizio 1.2 e facendo uso de principio di induzione dimostrare che se S h n elementi allora P(S) contiene 2^n elementi.

7.2 - Ricorrendo al principio di induzione dimostrare che ogni insieme finito totalmente ordinat ha massimo e minimo. Usando tale risultato, fa vedere che un qualsiasi sottoinsieme non vuot di N, dotato della usuale relazione d'ordin ammette minimo.

7.3 - L'insieme dei numeri razionali compresi tra (e 1 è numerabile?

§ 8 - Gli insiemi e la probabilità.

Supponiamo di compiere un esperimento il cui risultato sia del tutto casuale e non prevedibile: si pensi ad esempio al lancio di una moneta che può dare come risultato testa o croce, al lancio di un dado che può dare come risultato 1,2,3,4,5,6, all'estrazione di un numero tra 1 e 90.

L'insieme S dei risultati possibili di un dato esperimento sarà detto *spazio campione*.

Ad esempio nel lancio di un dato avremo $S=\{1,2,3,4,5,6\}$, nel caso dell'estrazione di un numero tra 1 e 90 avremo $S = \{1,2,3,\ldots,89,90\}$, nel caso del lancio di una moneta $S = \{0,1\}$ dove 0 sta per il risultato "croce" ed 1 per "testa".

Particolare attenzione bisogna porre nella scelta dello spazio campione. Ad esempio se consideriamo l'esperimento che consiste nel lanciare n volte un dado lo spazio campione sarà costituito dalle ennuple ordinate

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

con $a_i \in \{1,\ldots,6\}$; in altri termini

$$S = \{a_1, \ldots, a_6\}^n.$$

Ma lo spazio campione di un dato esperimento è sempre finito? La risposta a tale quesito è negativa. E' infatti, spesso utile (a volte indispensabile) considerare spazi campione infiniti. Si pensi ad esempio al seguente esperimento. Una biglia, obbligata a scorrere su di una guida AB, viene lanciata dal punto A; essa si fermerà, eventualmente dopo aver rimbalzato su B, in un punto C. Il risultato dell'esperimento è la lunghezza AC. Se si suppone che la guida AB sia lunga due metri e che gli strumenti di misura da noi adoperati siano di una precisione assoluta, è allora sensato assumere che il risultato sia un "qualunque numero compreso tra zero e due". Sul concetto di numero torneremo in dettaglio nel prossimo capitolo; ci limitiamo qui ad osservare che "l'insieme dei numeri compresi tra zero e due" (così come "l'insieme dei punti del segmento AB") è infinito.

Supponiamo che S sia finito. Ogni elemento di S può riguardarsi come il risultato di un esperimento. Molte volte, però, più che a conoscere l'esatto valore del risultato siamo interessati a sapere se il risultato stesso gode di una fissata proprietà e cioè se si verifica un dato *evento*. Ad esempio, nel caso del lancio di un dado, potremmo essere interessati al verificarsi di uno dei seguenti eventi:

T : il risultato è un numero pari;

U : il risultato è un numero maggiore di 4;

V : il risultato è un numero primo.

Ognuno di questi eventi può identificarsi con un sottoinsieme di S:

$$T = \{2,4,6\},\ U = \{5,6\},\ V = \{1,2,3,5\}\ .$$

Diremo pertanto "evento" ogni sottoinsieme di S.
In questo ambito le operazioni tra insiemi acquistano un significato particolare; detti infatti A e B due sottoinsiemi di S:

$A \cup B$ significa che si verifica l'evento A o l'evento B;

$A \cap B$ significa che si verifica l'evento A e l'evento B;

$A - B$ significa che si verifica l'evento A senza che si verifichi B;

$A \subseteq B$ significa che il verificarsi dell'evento A comporta il verificarsi anche di B.

Due eventi si dicono *incompatibili* quando non possono verificarsi simultaneamente. Ad esempio nel caso del lancio di un dado gli eventi

$T = \{2,4,6\}$, $V' = \{1,3,5\}$

sono incompatibili. Con il linguaggio della teoria degli insiemi due eventi A e B si diranno incompatibili se

$$A \cap B = \phi .$$

Sia dato adesso uno spazio campione

$$S = \{a_1, \dots, a_n\} .$$

Ci poniamo il problema seguente: che cosa bisogna intendere esattamente per *probabilità* di un dato evento?

Se si fa riferimento al solito esempio del lancio di un dado sembra naturale definire la "probabilità" dell'evento $A = \{b_1, \dots, b_n\} \subset \{1,2,3,4,5,6\} = S$, cioè la "probabilità che il lancio dia come risultato uno dei numeri $b_1, \dots b_n$" come il rapporto n/6 (rapporto dei "casi favorevoli" sui "casi possibili"). Resta definita in tal modo una funzione

$$p : A \in P(S) \to p(A)$$

che gode delle seguenti proprietà:

i) $0 \leq p(A) \leq 1$, $A \in P(S)$;

ii) $p(S) = 1$

iii) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ se $A \cap B = \phi$.

Per convenzione si pone inoltre $p(\phi) = 0$.

Che tale modo di definire la probabilità non sia sempre il più opportuno risulta chiaro dal seguente esempio.
Supponiamo che il dado sia sbilanciato (volgarmente truccato) in modo tale che su un gran numero di lanci il risultato "6" appaia un numero doppio di volte rispetto a ciascuno degli altri risultati.
E' allora naturale porre:

$$p(6) = \frac{2}{7}, \quad p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = \frac{1}{7}$$

ed inoltre se $A = \{b_1, \ldots, b_k\} \subseteq S$

$$p(A) = \sum_{i=1}^{k} p(b_i).$$

E' semplice verificare che valgono ancora le proprietà i), ii), iii).
In generale diremo che è assegnata una *probabilità* sul generico spazio campione $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ogni qual volta è assegnata una funzione

$$p : A \in P(S) \to p(A)$$

tale che

1) $p(A) \geq 0$

2) $p(S) = 1$

3) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ se $A \cap B = \phi$

dove A e B sono generici sottoinsiemi di S.
E' semplice verificare che

a) $A \subseteq B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$.

Infatti per la 3)

$B = A \cup (B-A) \Rightarrow p(B)=p(A)+p(B-A)$

e quindi per la 1) si ha $p(A) \leq p(B)$.

b) $p(A) \leq 1$.

Infatti da 2) e a)

$A \subseteq S \Rightarrow p(A) \leq p(S) = 1$.

c) $p(\phi) = 0$

Infatti per la 3)

$p(A)=p(A \cup \phi)=p(A)+p(\phi) \Rightarrow p(\phi) = 0$

Per terminare questo paragrafo daremo una definizione di particolare interesse in probabilità: due eventi A e B si dicono *indipendenti* se

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B).$$

Tale definizione corrisponde all'idea intuitiva che il verificarsi di uno dei due eventi non altera la probabilità che si verifichi l'altro.

§ 9 - Il fattoriale ed il coefficiente binomiale.

Sia S l'insieme finito

$$S = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Immaginiamo di effettuare un esperimento (sorteggio) che dia come risultato un elemento di S. Se ripetiamo k volte, con $k \in N$, l'esperimento il risultato sarà una *k-pla ordinata*

$$(b_1, b_2, \dots, b_k)$$

dove ogni b_i è un elemento di S e può anche aversi $b_i = b_j$ con $i \neq j$. Infatti nulla vieta che due o più esperimenti (sorteggi) successivi diano lo stesso risultato. Una k-pla ordinata si dice anche *disposizione di n elementi su k posti (con ripetizione)*.

Un esempio di disposizione di 3 elementi su 13 posti è la colonna dei risultati di calcio riportati su di una schedina.

Ci chiediamo adesso quale sia la probabilità di ottenere $(b_1, \dots, b_k)$ come risultato di k esperimenti successivi tutti eseguiti nelle stesse condizioni.

E' naturale rispondere

$$1/P_{n,k}$$

dove $P_{n,k}$ è il numero totale delle possibili disposizioni di n elementi su k posti, cioè il numero degli elementi di S^k.

E' pertanto necessario calcolare $P_{n,k}$

Dimostriamo che

$$P_{n,k} = n^k .$$

Il risultato è evidente per $k = 1$.

Supposto che sia vero per $k = h-1$ facciamo vedere che è vero per $k = h$. Dopo di ciò sarà vero per tutti i $k \in N$ in forza del principio di induzione.

All'uopo osserviamo che data una disposizione di n elementi su h-1 posti

$$\{b_1, b_2, \ldots, b_{h-1}\}$$

da essa si ottengono esattamente n disposizioni distinte di n elementi su h posti:

$$\{b_1, \ldots, b_{h-1}, a_1\}, \ \{b_1, \ldots, b_{n-1}, a_2\}, \ldots,$$
$$\{b_1, \ldots, b_{h-1}\, a_n\}$$

D'altro canto è ovvio che ogni disposizione di n elementi su h posti può pensarsi ottenuta nel modo esposto.

Pertanto tenendo conto che per ipotesi $P_{n,h-1} = n^{h-1}$ si ha:

$$P_{n,h} = n \cdot n^{h-1} = n^h .$$

Ne segue che per essere certi di vincere al totocalcio "basta" giocare esattamente 3^{13} colonne.

Supponiamo adesso che la k-pla ordinata di elementi di S

(4) $$(b_1, \ldots, b_k)$$

non contenga ripetizioni, cioè che per $i \neq j$ sia $b_i \neq b_j$.

Ovviamente dovremo supporre $k \leq n$. Diremo in tal caso che (4) è una *disposizione semplice di n elementi su k posti*. Se $k=n$ si dirà che (4) è una *permutazione degli n elementi di S*.

Vogliamo calcolare il numero $D_{n,k}$ delle disposizioni, semplici di n elementi su k posti. Si ha precisamente:

$$D_{n,k} = n(n-1)\dots(n-k+1) \ .$$

Il risultato è ovvio per $k = 1$.

Proviamolo in generale procedendo per induzione. Sia pertanto vero per $k=h-1$; faremo vedere che è vero per $k = h$.

Se fissiamo una disposizione semplice di n elementi su h-1 posti

$$(5) \qquad (b_1, \dots, b_{h-1})$$

da essa si ottengono esattamente $n-(h-1)$ disposizioni semplici distinte di n elementi su h posti:

$$(b_1, \dots, b_{h-1}, c_h), (b_1, \dots, b_{h-1}, c_{h+1}), \dots, (b_1, \dots, b_{h-1}, c_n)$$

dove $c_h, c_{h+1}, \dots, c_n$ sono gli $n-(h-1)$ elementi di S

che non compaiono in (5).

E' d'altro canto ovvio che ogni disposizione di n elementi su h posti può pensarsi ottenuta in tal modo. Pertanto, ricordando che per ipotesi

$D_{n,h-1} = n(n-1)\dots(n-h+2)$, si ha:

$$D_{n,h} = n(n-1)\dots(n-h+1).$$

Il numero delle permutazioni di S

$$D_{n,n} = n(n-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1$$

si chiama *fattoriale di n* e si indica con il simbolo "n!".
Per convenzione si pone : 0! = 1. E' facile controllare che:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} .$$

Restando nell'ipotesi $k \leq n$ fissiamo un sottoinsieme

$$\{b_1,\dots,b_k\}$$

di k elementi di S ; tale sottoinsieme è anche detto *combinazione di n elementi su k posti*.

Un esempio di combinazione di 90 elementi su 5 posti si ottiene pensando alle estrazioni del lotto.
Vogliamo calcolare il numero $C_{n,k}$ delle combinazioni di n elementi su k posti.

Tale numero si calcola facilmente. Se k=1 esso è banalmente n. Sia k > 1. Se fissiamo una combinazione, di n elementi su k posti:

$$\{b_1,\dots,b_k\}$$

è possibile, per quanto visto prima, riordinare tali k elementi in k! modi distinti ottenendo k! disposizioni semplici di n elementi su k posti.
Quindi ogni combinazione "produce" k! disposizioni semplici. D'altro canto ogni disposizione semplice può pensarsi ottenuta in tal modo; ma allora

$$k!\, C_{n,k} = D_{n,k}$$

e pertanto

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Tale numero si indica con il simbolo $\binom{n}{k}$ e si chiama "coefficiente binomiale".
Per convenzione si pone $\binom{n}{o} = 1$

Complementi ed esercizi.

9.1 - Qual'è la probabilità nell'estrazione di un numero tra 1 e 10 dei seguenti eventi?

A-esce un numero pari [1/2]
B-esce un numero primo [1/2]
C-esce un multiplo di 3 [3/10]

9.2 - Qual'è la probabilità che due lanci successivi di un dado diano nell'ordine risultato (4,3)? [1/36]

9.3 - Consideriamo un bersaglio formato da un cerchio di centro 0 e raggio 1 ed indichiamo con A_1 il cerchio di centro 0 e raggio i/4 i=1,2,3,4.

Posto $A_1=B_1$, $A_2-A_1=B_2$, $A_3-A_2=B_3$, $A_4-A_3=B_4$

consideriamo equivalente colpire un punto qualunque di un fissato B_i. Come si può ragionevolmente definire la probabilità di colpire B_1?

9.4 Se si estrae due volte un numero dallo stesso insieme S = {1,2,3,...,10} qual'è la probabilità dei seguenti eventi:

A-E' estratta una coppia di numeri pari [1/4]
B-E' estratta una coppia in cui il primo numero è minore del secondo [0.45].

9.5 - Se si estraggono contemporaneamente due numeri dallo stesso insieme S = {1,2,...,10} quale è la probabilità dei seguenti eventi:

A - E' estratto una coppia di numeri pari [2/9];

B - E' estratta una coppia in cui il primo numero è minore del secondo [1/2];

C - E' estratta una fissata coppia di numeri [1/90].

N.B. In tale esercizio, a differenza del precedente, non può accadere che il risultato sia una coppia di numeri eguali.

9.6 - Nelle ipotesi dell'esercizio 9.4 (9.5)dire se i seguenti eventi sono indipendenti

A - Il primo estratto è 5 [Prob. 1/10 (1/10)]

B - Il secondo estratto è 7 [Prob. 1/10 (1/10)]

[SI] ([NO])

9.7 - Se si considera una combinazione A di tre elementi dell'insieme $S = \{1,2,...,10\}$ qual'è la probabilità che 1 appartenga ad A? [0.3].

9.8 - Scrivere le combinazioni, le disposizioni semplici e quelle con ripetizione dei quattro elementi, $\{0,1,a,b\}$ su due posti.

CAPITOLO II

I NUMERI REALI

§ 1 - Introduzione.

A partire dall'insieme N dei numeri naturali dato come ente primitivo è possibile definire in modo rigoroso sia l'insieme Z dei numeri relativi sia lo insieme Q dei numeri razionali; l'introduzione di Z e Q è giustificata sostanzialmente dall'esigenza di rendere sempre possibile rispettivamente l'operazione di differenza e quella di divisione per un numero diverso da zero.

Supporremo qui note tutte le proprietà dei numeri razionali allo scopo di metter in luce quali esigenze comportino la necessità di un ulteriore ampliamento del concetto di numero.

A tale fine consideriamo il seguente:

Problema P - Fissato un numero razionale positivo a determinare un razionale positivo x tale che: $x^2=a$.

In altri termini ci siamo posti il problema dell' estrazione di radice di un numero razionale positivo.

Posto

$$A_a = \{r \in Q : r > 0 \text{ e } r^2 \leq a\}$$

si osserva subito che A_a è limitato superiormente.

Vogliamo dimostrare che:

PROP. 1 - *Il problema* P *ammette una soluzione* c *in* Q *se e solo se* A_a *ammette un estremo superiore appartenente a* Q. *In tal caso risulta:*

$$c = \sup A_a .$$

Supponiamo che A_a ammetta un estremo superiore $c \in Q$. Ovviamente $c > 0$.

Se $c^2 < a$ detto ε un razionale positivo tale che

$$\varepsilon \leq \min \{c, (a-c^2)/3c\}$$

risulta:

$$(c+\varepsilon)^2-c^2= \varepsilon(2c+\varepsilon) \leq 3\varepsilon c \leq a-c^2$$

e quindi $(c+\varepsilon)^2 \leq a$. Ne segue che $c+\varepsilon$ appartiene ad A_a e ciò è assurdo poichè $c = \sup A_a$.

Se $c^2 > a$ detto ε un razionale positivo tale che:

$$\varepsilon \leq \min \{c, (c^2-a)/2c\}$$

si ha:

$$c^2-(c-\varepsilon)^2 = \varepsilon(2c-\varepsilon) \leq 2 c \varepsilon \leq c^2-a$$

e quindi

$$a \leq (c - \varepsilon)^2 ;$$

ne segue che per ogni $r \in A_a$ riesce:

$$r^2 \leq a \leq (c-\varepsilon)^2 \Rightarrow r \leq c - \varepsilon .$$

Pertanto $c-\varepsilon$ è un maggiorante di A_a e ciò è assurdo poichè c è il minimo dei maggioranti.

In definitiva non potendo essere $c^2 < a$ nè $c^2 > a$ si ha

$$c^2 = a .$$

Viceversa se esiste $c \in Q$ tale che $c^2=a$ si ha subito

$$c = \sup A_a = \max A_a .$$

La proposizione è quindi completamente provata.

Fissiamo adesso $a=2$; se esistesse un razionale positivo p/q tale che:

$$p^2/q^2 = 2$$

si avrebbe

$$p^2 = 2q^2 .$$

Tale eguaglianza non può sussistere in quanto, scomposti p e q in fattori primi, il fattore primo 2 comparrebbe un numero pari di volte (eventualmente zero volte) a primo membro ed un numero dispari di volte a secondo membro. Da tale esempio consegue che in Q non è sempre possibile l'operazione di estrazione di radice di un numero positivo; inoltre dalla PROP.1 si ricava che l'insieme

$$A_2 = \{r \in Q : r > 0 \text{ e } r^2 \leq 2\}$$

pur essendo limitato superiormente è privo di estremo superiore in Q.
Tutto ciò (l'esempio e la PROP. 1) suggerisce la seguente considerazione: se esiste una "estensione (ampliamento) di Q "che oltre a conservare le proprietà di calcolo valide in Q ha la proprietà che *ogni insieme limitato superiormente è dotato di estremo superiore*, allora l'estremo superiore di A_2 è "quel numero il cui quadrato è 2".

E' possibile "costruire" tale estensione (l' insieme R dei numeri reali) partendo dall'insieme dei numeri razionali. Per far ciò si possono seguire più strade; ne indicheremo una nel paragrafo 5.

Un modo diverso di definire i numeri reali consiste nel pensare ad R come ad un insieme in cui si introducono due operazioni interne, dette somma e prodotto, ed una relazione d'ordine totale le quali verifichino una lista di "enunciati primitivi" detti assiomi. Tale *metodo assiomatico* presenta il vantaggio di chiarire una volta per tutte quali sono le "regole del gioco" (gli assiomi) che devono costituire gli ingredienti attraverso i quali dedurre tutte le proprietà (i teoremi). Va poi ovviamente precisato in che senso N, Z e Q sono contenuti in R. Del metodo assiomatico ci occuperemo nel paragrafo 2.

§ 2 - Il sistema degli assiomi dei numeri reali

Sia R un insieme.

Assumeremo che:

Assiomi A - Sono definite in R due operazioni

$$+ : (a,b) \in R \times R \to a + b \in R$$

$$\cdot : (a,b) \in R \times R \to a \cdot b \in R$$

dette rispettivamente somma e prodotto, verificanti le seguenti proprietà:

A_1 - $a+b=b+a$, $a \cdot b=b \cdot a$ *proprietà commutativa*

A_2 - $(a+b)+c=a+(b+c)$
$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$ " *associativa*

A_3 - $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$ " *distributiva*

A_4 - Esistono due elementi distinti 0 e 1, detti rispettivamente "zero" e "unità", tali che

$$a + 0 = a \quad , \quad 1 \cdot a = a \quad \forall a \in R$$

A_5 - $\forall x \in R \quad \exists x' \in R \quad : \quad x + x' = 0$

x' è detto *opposto* di x e si indica con $-x$;

$\forall x \neq 0 \quad \exists x'' \in R \quad : \quad x \cdot x'' = 1$

x'' è detto *inverso* di x e si indica con x^{-1} .

L'insieme R, così strutturato, si dice *campo*.

Assiomi B - Esiste in R una relazione d'ordine totale <, compatibile con le operazioni di somma e prodotto, tale cioè che

B_1 - $x < y \implies \quad \forall z \in R \quad x+z<y+z$

B_2 - $x < y \implies \quad \forall z>0 \quad x \cdot z<y \cdot z$

L'insieme R si dice *campo ordinato.*

Assioma C. Ogni sottoinsieme di R non vuoto e limitato superiormente è dotato di estremo superiore.

L'insieme R dicesi allora *campo ordinato completo.*

Diremo campo dei numeri reali un qualsiasi campo ordinato completo

Vedremo più avanti (cfr. par. 8) che esiste sostanzialmente un unico campo ordinato completo.

Usando in modo opportuno gli assiomi su esposti è possibile dimostrare, come già visto, l'unicità dello zero, dell'unità, dell'opposto e dell'inverso.

Possiamo pertanto definire le operazioni di differenza e quoziente nel modo seguente

$$a - b = a + (-b)$$

e, se $b \neq 0$

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} .$$

Se a,b sono numeri reali e $a < b$ introduciamo le seguenti notazioni:

$[a,b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ (1)

$]a,b[= \{x \in R : a < x < b\}$

$[a,b[= \{x \in R : a \leq x < b\}$

$]a,b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$.

---

(1) Se $a = b$ si pone $[a,b] = \{a\}$.

Tali insiemi si chiamano rispettivamente *intervallo chiuso, intervallo aperto, intervallo aperto a destra*, *intervallo aperto a sinistra;* a,b sono detti estremi dell' intervallo; gli elementi di un intervallo distinti dagli estremi si dicono *interni*.

Si chiama insieme esteso dei numeri reali e si indica con $\overline{R}$ l'insieme R con l'aggiunta dei simboli $+\infty$ e $-\infty$:

$$\overline{R} = R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} .$$

Si conviene che per ogni $x \in R$ risulti:

$$-\infty < x < +\infty .$$

Sia $a \in R$; gli insiemi:

$$\{x \in R : x < a\},\ \{x \in R : x \leq a\},\ \{x \in R : x > a\},\ \{x \in R : x \geq a\}$$

si indicano rispettivamente con i simboli $]-\infty,a[$, $]-\infty,a]$, $]a,+\infty[$, $[a,+\infty[$ ed ognuno di essi è detto essere un intervallo non limitato.
Si usa spesso anche il simbolo $]-\infty,+\infty[$ per indicare l'intero insieme R dei numeri reali.

§ 3 - Prime proprietà dei numeri reali.

Dagli assiomi A,B,C si deducono tutte le classiche regole di calcolo. Ci limiteremo qui ad elencarne alcune.

1) $a \cdot 0 = 0$

Infatti

$$a \cdot 0 = (a \cdot 0 + a) - a = a(1+0) - a = a \cdot 1 - a = a - a = 0$$

ii) *Legge di annullamento del prodotto:* $a \cdot b=0 \iff a=0$ o $b=0$.

Tenendo conto di i) basterà provare che:

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a=0 \quad \text{o} \quad b=0.$$

Se $a = b = 0$ la cosa segue subito da i). Sia allora $a \neq 0$; si ha, tenendo conto che $b \cdot a=a \cdot b=0$:

$$b = (b \cdot a) \cdot a^{-1} = 0 \cdot a^{-1} = 0 .$$

iii) $(-1) \cdot a =- a$

Infatti

$a+(-1) \cdot a=(1-1) \cdot a=0 \cdot a=0$.

Quindi, per l'unicità dell'opposto, si ha:

$$(-1)a = - a$$

Da iii) si ricava banalmente:

$$-(a+b)=-a-b \qquad (-a) \cdot b=-a \cdot b, \qquad (-a) \cdot (-b)=a \cdot b.$$

iv) Risulta

$a > 0 \iff -a < 0$

$a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$ dove $a^2 = a \cdot a$

$a > 0 \iff a^{-1} > 0$

$a < b, \; c < 0 \Rightarrow ac > bc$

$a,b < 0 \Rightarrow ab > 0$

$a < 0, \; b > 0 \Rightarrow ab < 0$

$$0 < a < b \implies a^{-1} > b^{-1}$$

La verifica di tali proprietà è lasciata per esercizio al lettore. E' altresì evidente che, come conseguenza dell'assioma C, ogni insieme limitato inferiormente ammette estremo inferiore.

Consideriamo adesso la seguente funzione di R in R:

(1) $$x \in R \to \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$

L'immagine di x mediante tale funzione si indica con $|x|$ e si chiama *modulo* o *valore assoluto di* x. Poichè due numeri diversi hanno lo stesso valore assoluto se e solo se sono l'uno l'opposto dell'altro, la controimmagine mediante la funzione (1) dell'intervallo $[0,a]$ è costituita dall'intervallo $[-a,a]$; in sintesi se a è un numero reale non negativo:

(2) $$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a .$$

Si ha inoltre:

(3) $$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad \forall\, x,y \in R$$

(4) $$\big|\,|x|-|y|\,\big| \leq |x-y| \qquad \forall\, x,y \in R$$

(5) $$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \qquad \forall\, x,y \in R$$

Dimostriamo (3). Tenendo conto che qualunque sia il numero reale a

$$-|a| \leq a, \qquad a \leq |a|$$

si ha, applicando tra l'altro l'assioma B_1:

$$-(|x|+|y|)=-|x|-|y| \leq x-|y| \leq x+y \leq |x|+y \leq$$
$$\leq |x|+|y|.$$

Si ha allora l'asserto poichè per la (2):

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y| \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y| .$$

Dimostriamo ora la (4). In forza di (2) basterà provare che:

$$(6) \qquad -|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$$

Ebbene dalla (3) segue:

$$|x|=|(x-y)+y| \leq |x-y|+|y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|$$

$$|y|=|(y-x)+x| \leq |x-y|+|x| \Rightarrow |x|-|y| \geq -|x-y|$$

e quindi la (6).

La dimostrazione della (5), per altro assai facile, è lasciata al lettore per esercizio.

A partire dalla (3) si prova facilmente, procedendo per induzione, che dati n numeri reali $x_1,x_2,\ldots,x_n$ si ha:

$$(5') \qquad |x_1+x_2+\ldots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|.$$

Sia adesso A un sottoinsieme di R limitato superiormente e sia

$$c = \sup A .$$

Riportiamo qui, per comodità del lettore, il seguente risultato facile conseguenza di quanto detto nel paragrafo 5 del cap. I.

PROP. 2 - *Il numero reale* c *è l'estremo superiore di* A *se e solo se gode delle due seguenti proprietà:*

α) $\forall x \in A,\ x \leq c$

β) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x \in A\ :\ x > c - \varepsilon$.

Analogamente se A è limitato inferiormente

PROP. 2' - *Il numero reale* c' *è l'estremo inferiore, di* A *se e solo se gode delle due seguenti proprieta:*

α') $\forall x \in A,\ \ x \geq c'$

β') $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ x \in A : x < c' + \varepsilon$.

Inoltre se A non è limitato superiormente si pone

$$\sup A = +\infty;$$

se non è limitato inferiormente si pone

$$\inf A = -\infty$$

Si prova facilmente che

$\sup A = +\infty \iff \forall K > 0\ \exists\ a \in A : a > K$

$\inf A = -\infty \iff \forall K > 0\ \exists\ a \in A : a < -K.$

Introduciamo ora una nozione che sarà spesso ado perata nel seguito.

DEF. 1 - Dati due sottoinsiemi A e B di R essi si diranno:

i) *separati* se ogni elemento di A è minore od uguale di ogni elemento di B; in sintesi

$$A \text{ e } B \text{ sono separati} \iff \forall a \in A, \forall b \in B \ . \ a \leq b;$$

ii) *contigui* (se sono separati e) se per ogni $\varepsilon > 0$, esistono un elemento a di A ed un elemento b di B tali che

$$b - a < \varepsilon \ .$$

PROP. 3 - *A e B sono (separati e) contigui se e solo se*

$$\sup A = \inf B \ .$$

Siano A e B separati e contigui.
Dal fatto che A e B sono separati segue che A è limitato superiormente e B inferiormente: inoltre posto

$$e = \sup A, \ e' = \inf B$$

si ha

$$e \leq e' \ .$$

D'altronde fissato $\varepsilon > 0$ siano $a \in A$ e $b \in B$ tali che

$$b - a < \varepsilon .$$

Si ha subito

$$0 \leq e' - e \leq b-a < \varepsilon \ ;$$

ne segue che

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad 0 \leq e' - e < \varepsilon .$$

D'altronde l'unico numero non negativo minore di tutti i numeri positivi è lo zero e quindi

$$e' - e = 0 \Rightarrow e' = e .$$

Se viceversa vale

$$e = \sup A = \inf B = e'$$

si ha subito che A e B sono separati.
Fissato inoltre $\varepsilon > 0$ per la seconda proprietà dello estremo superiore esiste $a \in A$ tale che

$$a > e - \varepsilon/2 ;$$

per la seconda proprietà dell'estremo inferiore esiste $b \in B$ tale che

$$b < e' + \varepsilon/2 ;$$

quindi

$$b - a < e' - e + \varepsilon = \varepsilon ,$$

e pertanto A e B sono contigui.

Il numero reale

$$c = \sup A = \inf B$$

dicesi *elemento di separazione* dei due insiemi A e B.

§ 4 - I naturali, gli interi, i razionali, l'estrazione di radice.

Se si accetta l'impostazione assiomatica descritta nel paragrafo 2 sorge spontaneo il problema di chiarire in che senso R è un "ampliamento di Q", cioè di "localizzare" in qualche modo in R i numeri naturali, i numeri interi, i numeri razionali.

Ispirandosi al principio di induzione si può pensare di *identificare l'insieme* N *dei naturali di* R *come il più piccolo sottoinsieme di* R *che contenga l'unità ed il successivo di ogni suo elemento:* in parole povere i naturali sono

$$1 < 1 + 1 < (1+1)+1 < \ldots .$$

Una volta identificato N *gli interi di* R (cioè gli elementi di Z) *saranno i naturali, i loro opposti e lo zero.* Infine *i razionali di* R (cioè gli elementi di Q) saranno quei numeri reali che si possono scrivere sotto la forma $\frac{m}{n}$[2] con m, n interi ed $n \neq 0$. Gli elementi di R - Q si diranno *numeri irrazionali.*

Vogliamo adesso dimostrare una importante proprietà nota come *densità di* Q *in* R. Tale proprietà esprime sostanzialmente il fatto che dato un numero reale esso può essere approssimato con un numero razionale commettendo un errore arbitrariamente piccolo. Precisamente:

PROP. 3 - (*Densità di* Q *in* R) *Dati due numeri reali a,b con a < b esiste un numero razionale r tale che*

----

(2) Detti a e b due numeri reali di cui b diverso due zero con il simbolo $\frac{a}{b}$ si intende al solito il numero reale $a \cdot b^{-1}$.

$$a < r < b .$$

Alla dimostrazione di tale proposizione premettiamo, le seguenti:

PROP. 4 - *Ogni sottoinsieme di Z limitato superiormente (inferiormente) ammette massimo (minimo).*

Sia S un sottoinsieme di Z limitato superiormente; se S è finito la proposizione è banale. In caso contrario per l'assioma di completezza S è dotato di estremo superiore s. Per la seconda proprietà dell'estremo superiore esisterà un intero h appartenente ad S tale che

$$s-1 < h \leq s. \tag{7}$$

Sia ora h' un intero appartenente ad S e diverso da h; se fosse

$$s-1 < h' \leq s \tag{8}$$

supposto per fissare le idee $h > h'$ si avrebbe:

$$0 < h-h' < s-(s-1) = 1.$$

Pertanto h-h' sarebbe un intero positivo e minore di 1; ma ciò è assurdo per come è stato costruito N. Allo stesso modo si perviene ad un assurdo supponendo, $h < h'$. Ne segue che la (8) non può aver luogo. Ma allora deve essere:

$$h' \leq s - 1.$$

Poichè h' è un elemento arbitrario di S diverso da h dall'ultima diseguaglianza e dalla (7) segue che h è il massimo di S.

PROP. 5 (*Proprietà di Archimede*). *Dato un numero reale positivo* x, *per ogni* $y \in \mathbb{R}$ *esiste* $n \in \mathbb{Z}$ *tale che*

$$(9) \qquad n\,x \leq y < (n+1)\,x\ .$$

Se per ogni $m \in \mathbb{Z}$ risulta $mx > y$ allora y/x è un minorante di $\mathbb{Z}$. Per la prop. 4 $\mathbb{Z}$ è allora dotato di minimo m' e ciò è assurdo poichè a $\mathbb{Z}$ appartiene anche $m'-1$ che è minore di m'.
Quindi l'insieme

$$\{m \in \mathbb{Z} \ :\ mx \leq y\}$$

è non vuoto. Tale insieme è inoltre limitato superiormente essendo y/x un maggiorante e quindi, per la prop. 4, ammette un massimo n. Ovviamente n verifica la (9).

Dimostrazione della prop. 3.

Per la proprietà di Archimede (con $x = 1$ ed $y = (b-a)^{-1}$) esiste un intero $m \geq 0$ tale che:

$$(b-a)^{-1} < m;$$

ne segue

$$b-a > \frac{1}{m}\ .$$

D'altra parte ancora per la proprietà di Archimede (con $y=a$ ed $x = \frac{1}{m}$) esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che:

$$\frac{n-1}{m} \leq a < \frac{n}{m}$$

da cui

$$a < \frac{n}{m} = \frac{n-1}{m} + \frac{1}{m} < a + (b-a) = b,$$

pertanto $\frac{n}{m}$ è il numero razionale r cercato.

Osserviamo esplicitamente che se si applica la proprietà appena dimostrata all'intervallo $]a,r[$ si ottiene un nuovo numero razionale r_1 appartenente all'intervallo $]a,r[$ e quindi anche all'intervallo $]a,b[$. Ripetute applicazioni della precedente proposizione ci portano, pertanto, alla conclusione che, *comunque si scelgano due numeri reali* $a < b$, *esistono infiniti razionali compresi tra essi.*

Sia ora x un numero reale; per ogni naturale n definiamo per induzione la "potenza n-ma di x" nel modo seguente:

$$x^1 = x, \quad x^n = x^{n-1} \cdot x. \text{ (*)}$$

E' facile verificare che:

(10) $\quad 0 < x < y \Leftrightarrow x^n < y^n, \; x>0, \; y>0.$

Dimostriamo dapprima che

(11) $\quad 0 < x < y \Rightarrow x^n < y^n, \; x>0, \; y>0.$

Tale implicazione è ovvia se n=1; se essa è vera per

(*) Per convenzione si pone : $x^0 = 1 \quad \forall x \neq 0$

$n = k - 1$ si ha:

$$x^k = x^{k-1} \cdot x < y^{k-1} \cdot x < y^{k-1} \cdot y = y^k .$$

e quindi è vera anche per $n=k$. Dal principio di induzione segue che è vera per ogni $n \in N$. Sia adesso

$$x > 0,\ y > 0,\ x^n < y^n.$$

Se fosse $x \geq y$ dalla (11) seguirebbe $x^n \geq y^n$ contro l'ipotesi; ne segue che: $0<x<y$ e quindi la (10).

Terminiamo questo paragrafo mostrando come in R (a differenza che in Q!) sia sempre possibile l'estrazione di radice di un numero positivo.

PROP. 6 - *Sia* $n \in N$, $n \geq 2$. *Dato un numero reale positivo* a *esiste un unico numero reale positivo* x *tale che:*

$$x^n = a . \tag{12}$$

Tale numero x prende il nome di *radice n-ma* di a e si indica indifferentemente con uno dei due simboli $\sqrt[n]{a}$ o $a^{\frac{1}{n}}$.

Per dimostrare la proposizione consideriamo il sottoinsieme di R:

$$A = \{0 \leq y \in R \ ;\ y^n < a\} \ ;$$

ovviamente A non è vuoto poichè $0 \in A$.

Se $a > 1$ per la (10) risulta $a^{n-1} > 1$ e quindi per ogni $y \in A$:

$$y^n < a = a \cdot 1 < a \cdot a^{n-1} = a^n \ ;$$

da qui, ancora per la (10), si ha:

$$\forall y \in A \ , \ y < a$$

e quindi A è limitato superiormente.

Se $a \leq 1$ si ha per ogni $y \in A$

$$y^n < a \leq 1$$

e quindi, ancora per la (10), $y \leq 1$; ne segue che anche in tal caso A è limitato superiormente.
Sia x l'estremo superiore di A che esiste per l' assioma di completezza.
Ovviamente sarà $x > o$. Infatti se $a > 1$ allora $1 \in A$ e quindi $x \geq 1$; se $0<a<1$ si ha:

$$a^n = a \cdot a^{n-1} < 1 \cdot a^{n-1} = a^{n-1} < a^{n-2} < \ldots < a$$

da cui $a \in A$ e quindi $x \geq a$. Se poi $a=1$ si ha $\frac{1}{2} \in A$ e quindi $x \geq \frac{1}{2}$.

Mostriamo che

(13) $$x^n = \sup \{y^n : y \in A\} .$$

Si ha subito

i) $\forall y \in A, \ \ 0 \leq y \leq x \ \ \Rightarrow \ \ \forall y \in A, \ \ y^n \leq x^n$;

inoltre fissato $\varepsilon > 0$ per la seconda proprietà dell'estremo superiore esisterà $y \in A$ tale che

$$x-y < \frac{\varepsilon}{n\ x^{n-1}} \quad ;$$

allora dalla classica eguaglianza

$$(14) \quad x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

tenendo conto che $y \leq x$ segue che

$$\text{ii)} \quad x^n-y^n \leq n\ x^{n-1}\ (x-y) < n\ x^{n-1} \cdot \frac{\varepsilon}{n\ x^{n-1}} = \varepsilon$$

Quindi il numero reale x^n gode delle due proprietà che caratterizzano l'estremo superiore e la (13) è provata.
Poichè per ogni $y\in A$ si ha $y^n < a$ si avrà anche $x^n \leq a$.

D'altro canto se fosse $x^n < a$ fissato ad arbitrio $\varepsilon \in]0,x[$ si avrebbe dalla (14):

$$(x+\varepsilon)^n-x^n=\varepsilon((x+\varepsilon)^{n-1}+(x+\varepsilon)^{n-2}\cdot x+\ldots+(x+\varepsilon)x^{n-2}+x^{n-1})$$

$$\leq n\ \varepsilon\ (x+\varepsilon)^{n-1} \leq n\ \varepsilon(2x)^{n-1} \quad ;$$

da qui se, come è possibile, si sceglie $\varepsilon < \dfrac{a-x^n}{n(2x)^{n-1}}$

si ha:

$$(x+\varepsilon)^n - x^n < a-x^n \Rightarrow (x+\varepsilon)^n < a$$

e ciò è assurdo poichè x è l'estremo superiore di A.
Pertanto $x^n = a$.

Che poi x sia l'unico numero reale positivo che soddisfa la (12) si ottiene come segue.

Sia $z \in R$, $z > 0$ tale che $z^n = a$; allora, a fortiori si ha

$$z^n = x^n .$$

D'altro conto per la (10) non può essere $z < x$ né $z > x$ e quindi sarà necessariamente $z = x$.

§ 5 - Una costruzione di R.

In questo paragrafo vogliamo accennare alla costruzione dell'insieme dei numeri reali a partire da Q. Assumeremo note al lettore le proprietà fondamentali degli insiemi N,Z,Q la cui conoscenza sarà assunta come punto di partenza nella nostra costruzione. L'insieme a cui perverremo sarà un particolare campo ordinato completo che pertanto potrà essere interpretato come "un modello di R".

Essenziale per i nostri fini è la cosiddetta *rappresentazione decimale dei numeri razionali* e qui brevemente la richiamiamo.

Consideriamo i dieci simboli {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} che denotano rispettivamente lo zero ed i primi nove numeri naturali, denotiamo inoltre con il simbolo 10 il numero dieci. Se n è un numero naturale si prova facilmente per induzione che esiste un inte ro k tale che

$$10^k \leq n < 10^{k+1} ;$$

è allora noto che n può essere rappresentato mediante una (k+1)-pla $(\alpha_k, \alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0)$ con $\alpha_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$; sinteticamente si pone

$$n = \alpha_k \; \alpha_{k-1} \ldots \alpha_1 \alpha_0$$

ad indicare che

$$(15) \qquad n = \alpha_k 10^k + \alpha_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + \alpha_1 10^1 + \alpha_0 \; 10^0$$

(dove per convenzione $10^0 = 1$).

Se n è un intero relativo non nullo il simbolo (15) va completato premettendo ad esso il segno + o - a seconda che sia $n > 0$ od $n < 0$ e prende il nome di "rappresentazione decimale di n".

La rappresentazione decimale dello zero è, ovviamente, il simbolo 0.

Vogliamo ora ottenere una analoga rappresentazione nel caso dei numeri razionali.

All'uopo sia $x \in Q$, $x \geq 0$; denotiamo con $[x]$ (si legge "parte intera di x") il più grande intero minore, od eguale ad x. Ad esempio

$$[7/4] = 1 \; , \quad [1/2] = 0 \; , \quad [10/3] = 3 \; .$$

Risulta

$$x = [x] + x_d$$

dove $x_d \in [0,1[$. Poichè $[x]$ in quanto intero è suscettibile di rappresentazione decimale basta limitarsi a considerare i razionali appartenenti all'intervallo $]0,1[$.

Sia dato pertanto un numero razionale m/n, con m,n numeri naturali tali che $m < n$. Eseguiamo la divisione euclidea tra gli interi $10m$ ed n: determiniamo in tal modo due interi non negativi q_1, r_1 (quoziente e resto) con $0 \leq r_1 < n$ tali che:

$$10m = nq_1 + r_1$$

Ovviamente: $m < n \Rightarrow 10m < 10n \Rightarrow 0 \leq q_1 < 10$; q_1 è detto la prima cifra decimale di m/n.

Se $r_1 \neq 0$ dividiamo $10r_1$ per n:

$$10r_1 = nq_2 + r_2$$

con $0 \leq q_2 < 10$, $0 \leq r_2 < n$: q_2 è detto la seconda cifra decimale di m/n. E' evidente che così procedendo o si verifica che ad un certo punto il resto è zero oppure si ottiene (al massimo dopo n passi) un resto già ottenuto in una precedente divisione. Nel primo caso si ottiene per $x = m/n$ una rappresentazione decimale con un numero finito di cifre decimali diverse da zero:

$$x = + 0, q_1 q_2 \ldots q_h ;$$

e si dirà allora che x è un numero decimale finito; nel secondo caso si ottiene una rappresentazione de cimale con un numero infinito di cifre decimali diverse da zero ma con un gruppo finito di cifre, detto *periodo*, che si ripete indefinitamente a partire da una certa cifra decimale:

$$x = +\,0,\ q_1 \ldots q_h \underbrace{\overline{q_{h+1} \ldots q_{h+1}}}_{\text{periodo}} .$$

In quest'ultimo caso si dice che x è un numero decimale periodico.

Osserviamo che il procedimento appena illustrato non può mai condurre ad un numero periodico di periodo nove. Infatti, in caso contrario, detto r_o il resto che si è ottenuto eseguendo la divisione che ha permesso di ottenere l'ultima cifra decimale diversa da nove si ha:

$$10r_o = 9n+r_1$$

e ancora, se $r_1 \neq r_o$

$$10r_1 = 9n + r_2$$

e così via fino ad ottenere dopo un numero finito di passi un resto r_k che risulti eguale ad uno dei resti $r_o, r_1, \ldots, r_{k-1}$. Se per esempio è $r_k = r_o$, sommando le precedenti relazioni si ottiene

$$10(r_o+r_1+\ldots r_{k-1})=9n\cdot k+(r_1+\ldots+r_{k-1}+r_o)$$

da cui

$$r_0+r_1+\dots+r_{k-1} = k\cdot n$$

il che è assurdo poichè ogni resto r_i è minore di n. In definitiva ogni numero razionale non negativo si può rappresentare con un simbolo del tipo

$$+\alpha_k\alpha_{k-1}\dots\alpha_0,\ q_1q_2\dots q_h\dots$$

dove: $x=[x]+x_d$, $[x]=+\alpha_k\dots\alpha_0$, $x_d=+0,q_1q_2\dots q_h\dots$.

Se $x\in Q$ ed $x<0$ la rappresentazione decimale di x si ottiene da quella di $-x$ sostituendo al segno + il segno −. Pertanto ogni numero razionale si può rappresentare con un simbolo del tipo

$$\pm\alpha_k\alpha_{k-1}\dots\alpha_0,q_1\dots q_h \qquad \alpha_i,q_i\in\{0,1,2,\dots 9\} \tag{16}$$

dove, se si conviene di considerare periodici di periodo zero i numeri decimali finiti, la successione dei simboli $\{q_i\}$ è, a partire da una certa cifra, periodica. E' inoltre esclusa l'eventualità che il periodo si riduca alla sola cifra 9.

Si può d'altro canto provare che dato un qualunque allineamento decimale periodico (con periodo diverso da nove) esiste un numero razionale m/n che lo ammette come rappresentazione decimale (frazione generatrice): precisamente dato l'allineamento:

$$\pm\ \alpha_k\ \alpha_{k-1}\dots\alpha_0,\ q_1\dots q_h\ \overline{q_{h+1}\dots q_r} \tag{17}$$

si ha:

$$(18) \qquad \frac{m}{n} = \pm \left[a_k a_{k-1} \ldots a_0 + \frac{q_1 \ldots q_h}{10^h} + \frac{1}{10^h} \cdot \frac{q_{h+1} \ldots q_r}{\underbrace{9 \ldots 9}_{r-h \text{ volte}}} \right]$$

Ad esempio

$$0,23 = \frac{23}{10^2}, \qquad 0,23\overline{14} = \frac{23}{10^2} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{14}{99}$$

La dimostrazione della (18) sarà data nel cap. VIII.
In definitiva, quindi, la corrispondenza tra Q e lo insieme degli allineamenti decimali periodici (con periodo diverso da 9) è biunivoca.
Da ora in poi identificheremo i due insiemi suddetti.
Osserviamo adesso che utilizzando la (18) si ottiene lo stesso risultato $\frac{m}{n}$ partendo da un allineamento periodico di periodo nove e da quello che si ottiene da esso ponendo uguali a zero tutte le cifre del periodo ed aumentando di una unità l'ultima cifra diversa da nove; ad esempio

$$0,23 = \frac{23}{10^2}, \qquad 0,22\overline{9} = \frac{22}{10^2} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{9}{9} = \frac{23}{10^2}$$

Si conviene pertanto di considerare eguali due allineamenti siffatti.
A tal punto appare naturale ampliare l'insieme dei numeri razionali con la seguente:

DEF. 2 - Si dice *numero reale* un simbolo del tipo (16) in cui la successione delle cifre decimali $q_1 q_2 \ldots q_h \ldots$ sia del tutto arbitraria.

Più sinteticamente indicheremo un numero reale x con la scrittura

$$x = \pm\, a, q_1 q_2 \ldots q_h \ldots$$

dove $a \in N \cup \{0\}$ e $q_i \in \{0,1,\ldots,9\}$. L'intero a sarà detto parte intera di x e la successione $q_1, q_2, \ldots, q_h \ldots$ parte decimale.

L'insieme dei numeri reali sarà, al solito, denotato con R.

E' evidente che con tale definizione si ha:

$$Q \subset R \ ;$$

i numeri irrazionali, cioè gli elementi di R-Q, saranno quelli in cui la successione delle cifre decimali non è periodica.

Dati due numeri reali a,b li diremo uguali se essi sono entrambi razionali ed uguali o se, essendo irrazionali, hanno lo stesso segno, la stessa parte intera e la stessa successione di cifre decimali.

Dato un numero reale $a \neq 0$ lo diremo positivo $(a>0)$ se gli compete il segno + negativo $(a<0)$ se gli compete il segno - Dato inoltre un numero reale a indicheremo con -a (opposto di a):

i) lo zero se $a = 0$,
ii) il numero reale che ha la stessa parte intera e le stesse cifre decimali di a ma segno cambiato se $a \neq 0$.

Per verificare che tale insieme R fornisce un modello del campo dei numeri reali bisogna introdurre in esso:

a) una relazione d'ordine;

b) le operazioni di somma e prodotto.

La relazione d'ordine si introduce in modo del tutto naturale.

Dati due numeri reali non negativi e non uguali:

$$x = + q_o,\ q_1 \ \dots\ q_n \dots$$

$$y = + r_o,\ r_1 \ \dots\ r_n \ \dots$$

si pone

$$x<y \iff \exists k \text{ tale che}: q_i = r_i \text{ per } i=0,1,\dots k-1, q_k < r_k ;$$

se $x < 0$, $y < 0$ si pone

$$x < y \iff -x > -y ;$$

se $x \leq 0$ ed $y \geq 0$ si pone

$$x < y .$$

E' ovvio che R con la relazione d'ordine introdotta risulta totalmente ordinato.
Definiamo adesso l'operazione di somma in R.
Siano dati due numeri reali x ed y che, per fissare le idee, supporremo non negativi:

$$x = q_o,q_1q_2\dots q_n \dots \quad , \quad y = r_o,r_1r_2\dots r_n \dots ,$$

posto

$$x_o = q_o,\ x_1 = q_o,q_1 \ , \ \dots\dots,\ x_n = q_o,q_1 \ \dots\ q_n ,\ \dots\dots$$

$$y_o = r_o,\ y_1 = r_o,r_1 \ , \ \dots\dots,\ y_n = r_o,r_1 \ \dots\ r_n ,\ \dots\dots$$

definiamo la successione $s_o, s_1, \dots, s_n, \dots$ come segue:

$$s_0 = x_0 + y_0$$
$$s_1 = x_1 + y_1$$
$$-----------$$
$$s_n = x_n + y_n$$
$$-----------$$

dove il simbolo "+" indica l'ordinaria addizione tra numeri razionali.
E' ovvio che

(19) $$s_n \leq s_{n+1} \qquad n = 0,1,2....$$

ed inoltre

(20) $$x_0+y_0 \leq s_n < x_0 + y_0 + 2 .$$

Da (19) e (20) segue che sono possibili due sole eventualità.

1) $[s_n] = x_0 + y_0$ per ogni n;

2) esiste $n_0 \in N$ tale che per $n \geq n_0$ si ha $[s_n]=x_0+y_0+1$.

Si può quindi concludere che, a partire da un certo indice n_0 in poi, la parte intera delle somme parziali s_n è sempre la stessa: diciamola t_0.
Sia

$$s_{n_0} = t_0,\sigma_1\sigma_2\sigma_3... \; .$$

Tenendo conto della (19) si ha che per $n \geq n_0$

1) la prima cifra decimale di s_n è un intero compreso tra σ_1 e 9;

2) se $n > m$ ($>n_0$) la prima cifra decimale di s_n è maggiore od eguale a quella di s_m;

ne segue che esiste un indice $n_1 \geq n_0$ a partire dal quale tutte le somme s_n hanno la stessa prima cifra decimale: diciamola t_1.

Così procedendo si prova agevolmente, per induzione, che: per ogni $k \in N$ esiste un indice n_k ($\geq n_{k-1}$) tale che le somme s_n con $n \geq n_k$ hanno la stessa k-esima cifra decimale t_k.

Si ottiene pertanto un numero reale

$$s = t_0, t_1 t_2 \dots t_k \dots$$

che per definizione si chiama somma di x ed y e si indica con "x+y".

Osservazione - Partendo dalla diseguaglianza

$$x_p + y_p \leq s_n \leq x_p + y_p + \frac{q_{p+1} + r_{p+1} + 2}{10^{p+1}} \leq x_p + y_p + \frac{2}{10^p},$$

$$p = 0, 1 \dots n$$

si potrebbe dimostrare che in realtà ogni cifra decimale (così come visto per la parte intera)"cambia al più una volta crescendo di una unità"; così, ad esempio, per $n \geq n_0$ la prima cifra decimale di s_n è σ_1 o $\sigma_1 + 1$. Il lettore compirà un utile esercizio verificando ciò.

Con un procedimento del tutto analogo a quello usato per la somma, dati due numeri reali x ed y si definiscono

a) il prodotto $x \cdot y$;
b) il reciproco $1/x$ di x se $x \neq 0$.

Si può provare che, definite in tal modo le operazioni e la relazione d'ordine valgono le proprietà A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B_1, B_2 del paragrafo 2.
Resta da verificare che vale l'assioma C.
Dimostriamo, pertanto, la seguente

PROP. 7 - Ogni sottoinsieme di R *limitato superiormente (inferiormente) ammette estremo superiore (inferiore).*

Sia A un sottoinsieme di R limitato superiormente. Sia inoltre B l'insieme dei maggioranti di A. Dobbiamo dimostrare che B ammette minimo. Consideriamo, all'uopo, il sottoinsieme dei numeri relativi contenuti in B cioè $B \cap Z$. Tale sottoinsieme ammette un minimo m_o+1(cfr. esercizio 5.7 cap. I). Tra i numeri

$$m_o,0 \quad m_o,1 \; \ldots\ldots \; m_o,9 \;\; m_o+1$$

sia $m_o,m_1 + \frac{1}{10}$ il più piccolo tra quelli appartenenti a B. Tra i numeri

$$m_o,m_1 0 \quad m_o,m_1 1 \ldots \;\; \ldots m_o,m_1 9 \quad m_o,m_1 + \frac{1}{10}$$

sia $m_o,m_1 m_2 + \frac{1}{10^2}$ il più piccolo tra quelli appartenenti a B. Così procedendo si costruisce un numero reale

$$x = m_o,m_1 m_2 \ldots . \overline{m_k} \ldots$$

che è il minimo di B.

Che x sia un elemento di B segue subito osservando che se così non fosse esisterebbe un elemento $a \in A$ tale che $a > x$; adesso se è $x \geq 0$:

$$a > x \Rightarrow \exists k: a > x + \frac{1}{10^k}$$

ne segue $a > m_o, m_1 \ldots m_k + \frac{1}{10^k}$ e ciò è un assurdo poichè $m_o, m_1 \ldots m_k + \frac{1}{10^k}$ appartiene a B (e cioè è un maggiorante di A) per costruzione. Se è $x < 0$ si procede in modo analogo.

Che x sia il più piccolo degli elementi di B si ricava osservando che in caso contrario esisterebbe un elemento $b = b_o, b_1 b_2 \ldots$ di B tale che:

$$b < x \, .$$

Supponiamo, per fissare le idee, $b \geqslant 0$; in tal caso

$$b<x \Rightarrow \exists k: \quad b_i = m_i \quad \text{per} \quad i=0,1,\ldots,k-1, \; b_k < m_k \; .$$

Ne segue che si ha anche

$$b < m_o, m_1 \ldots m_k \, .$$

Ma ciò è assurdo poichè $m_o, m_1 \ldots m_k$ non può essere un maggiorante di A (ricorda la definizione di x). In modo analogo si procede se $b < 0$. Pertanto non può esistere un elemento di B minore di x e quindi x è il minimo di B.

In definitiva l'insieme R introdotto in questo paragrafo con le operazioni di somma e prodotto e la relazione d'ordine introdotte in esso è *un campo ordinato completo*.

§ 6 - Unicità del campo dei numeri reali.

La definizione da noi data al n. 2 di campo dei numeri reali potrebbe apparire ambigua; sorge, infatti, spontaneo porre la seguente domanda: detti R_1 ed R_2 due insiemi in ognuno dei quali si sia introdotta una operazione di somma, una di prodotto ed una relazione d'ordine rispetto alle quali sia verificato il sistema di assiomi $A_1, \ldots, A_5, B_1, B_2, C$ quale è il "vero campo dei numeri reali"?
In realtà ambiguità non c'è in virtù del seguente risultato che consente di identificare R_1 ed R_2:

PROP. 8 - *Esiste un unico isomorfismo* ϕ *tra* $(R_1, +, \cdot, <)$ *ed* $(R_2, +, \cdot, <)$ (3) , *cioè un'unica applicazione biunivoca di* R_1 *su* R_2 *tale che*

---

(3) Per non appesantire le notazioni useremo gli stessi simboli $+, \cdot, <$ per denotare le operazioni e la relazione d'ordine tanto in R_1 quanto in R_2. Indicheremo inoltre con gli stessi simboli 0 ed 1 lo zero e l'unità tanto di R_1 che di R_2.

i) $a < b \Rightarrow \phi(a) < \phi(b)$

ii) $\phi(a+b) = \phi(a)+\phi(b)$

iii) $\phi(a\cdot b) = \phi(a)\cdot\phi(b)$.

Diamo qui un cenno della dimostrazione.
Indichiamo con N_1, Z_1, Q_1 i sottoinsiemi dei naturali, dei relativi e dei razionali di R_1. Analogo significato avranno N_2, Z_2, Q_2.
Cominciamo con il definire ϕ su N_1; poniamo

$\phi(0) = 0$
$\phi(1) = 1$
e per ogni $n\in N$, $n \geq 2$
$\phi(n) = \phi(n-1)+1$

Ovviamente valgono i), ii), iii) con a, b in N_1.
Sia adesso $x = \frac{m}{n}$ con m ed n appartenenti ad N_1 ed $n\neq 0$.

Poniamo

$$\phi(x) = \phi(m)/\phi(n) \ .$$

Tale posizione è lecita poichè $\phi(n) \neq 0$.
Se $x=-\frac{m}{n}$ con $m, n\in N_1$, $n \neq 0$ poniamo invece

$$\phi(x) = -\phi\left(\frac{m}{n}\right) = -\phi(m)/\phi(n).$$

Pertanto ϕ è definita su tutto Q_1.
Tale definizione non è ambigua; infatti se $x\in Q$ e

$$x = \frac{p}{q} = \frac{m}{n}$$

si ha

$$np = mq$$

e dunque

$$\phi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\phi(m)}{\phi(mq)} \cdot \frac{\phi(np)}{\phi(n)} = (\text{per la iii})) =$$

$$= \frac{\phi(m)}{\phi(m)\phi(q)} \cdot \frac{\phi(n)\phi(p)}{\phi(n)} = \frac{\phi(p)}{\phi(q)} .$$

E' facile verificare che valgono i), ii), iii)con a, b in Q_1.
Pertanto in tal modo possiamo identificare Q_1 e Q_2.
Sia adesso $x \in R_1$; poniamo

$$\phi(x) = \sup_{\substack{y<x \\ y \in Q_1}} \phi(y) .$$

Bisogna verificare che ϕ è suriettiva e che valgono i),ii),iii).
Mostriamo ad esempio che vale i).
Se $a < b$ in R_1 per la densità di Q_1 in R_1 (PROP. 3) esistono x_1 ed y_1 in Q_1 tali che

$$a < x_1 < y_1 < b ;$$

d'altro canto i) vale su Q_1 e quindi:

$$\phi(a) \leq \phi(x_1) < \phi(y_1) \leq \phi(b) .$$

Facciamo vedere, adesso, che ϕ è unico. Supponiamo che

esiste un altro isomorfismo $\overline{\phi}$ di R_1 su R_2.
Si ha subito da ii)

$$\overline{\phi}(0) = \overline{\phi}(0+0) = \overline{\phi}(0)+\overline{\phi}(0) \Rightarrow \overline{\phi}(0)=0=\phi(0).$$

Ovviamente inoltre

$$0 < \overline{\phi}(1)$$

e quindi

$$\overline{\phi}(1)=\overline{\phi}(1\cdot 1)=\overline{\phi}(1)\cdot\overline{\phi}(1) \Rightarrow \overline{\phi}(1)= 1 = \phi(1).$$

E' allora facile provare per induzione che

$$\overline{\phi}(n) = \phi(n) \qquad \forall\, n\in N_1$$

e quindi

$$\overline{\phi}(x) = \phi(x) \qquad \forall\, x\in Q_1 \quad .$$

Sia adesso $x\in R_1$; da i) segue subito:

$$\overline{\phi}(x) \geq \sup_{Q_1\ni y<x} \overline{\phi}(y)=\sup_{Q_1\ni y<x} \phi(y)=\phi(x).$$

Se fosse $\overline{\phi}(x) > \phi(x)$ per la densità di Q_2 in R_2 esisterebbe un elemento $z\in Q_2$ tale che

$$\phi(x) < z < \overline{\phi}(x) \quad .$$

D'altro canto poichè $\overline{\phi}$ è suriettiva si ha facilmente che esiste $\overline{x}\in Q_1$ tale che

$$\overline{\phi}(\overline{x}) = z.$$

Quindi

$$\phi(x)<\overline{\phi}(\overline{x})=\phi(\overline{x}) < \overline{\phi}(x)$$

Ma allora per la i):

$$\phi(x) < \phi(\overline{x}) \Rightarrow x < \overline{x}$$

$$\overline{\phi}(\overline{x}) < \overline{\phi}(x) \Rightarrow \overline{x} < x$$

e quindi siamo giunti ad un assurdo; ne segue che

$$\phi(x) = \overline{\phi}(x) \quad \forall x\in R_1$$

§ 7 - La rappresentazione decimale.

Ogni qual volta si fissi un insieme R_1 con due operazioni interne $+,\cdot$ ed una relazione d'ordine $<$ rispetto alle quali sia verificato il sistema di assiomi $A_1,\ldots,A_5,B_1,B_2,C$ si dirà che si è fissato un modello $(R_1,+,\cdot,<)$ del campo dei numeri reali.
Fissato adesso un tale modello $(R,+,\cdot,<)$ ci poniamo

il problema della rappresentazione decimale degli elementi di R; in altri termini vogliamo rappresentare gli elementi di R usando solo dieci simboli {0,1,...,9}. Tale problema può rapidamente risolversi; detto, infatti, $(R_1,+,\cdot,<)$ il modello decimale costruito al n. 5 e ϕ l'unico isomorfismo tra R ed R_1 la cui esistenza è garantita dalla prop. 8, per ogni $x\in R$ si dirà "rappresentazione decimale di x" l'elemento di R_1 (allineamento decimale)

$$\phi(x) = \pm\, q_0, q_1 q_2 \dots \ .$$

Preferiamo, però, qui indicare un algoritmo per la costruzione della rappresentazione decimale di x.
Se $x\in Q$ (insieme dei razionali di R) si utilizza lo algoritmo della divisione euclidea come già fatto al n. 5.
Se $x\in R-Q$ ci si può sempre ricondurre, come già osservato per i razionali, al caso $x\in]0,1[$.
Ciò posto, fissato $x\in]0,1[$ risulta

$$10x = [10x] + r_1$$

dove, essendo $0 < 10x < 10$, $[10x]$ è uno degli interi {0,1,...,9} e $0 \leq r_i < 1$; poniamo $q_1=[10x]$.

Ripetendo lo stesso ragionamento con r_1 al posto di x si ottiene

$$10r_1=[10r_1]+r_2 \ ;$$

poniamo $q_2 = [10r_1]$.

In generale noti $q_1, q_2, \dots, q_{i-1}$ si ottiene q_i osservando che:

$$x = \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \ldots + \frac{q_{i-1}}{10^{i-1}} + \frac{r_{i-1}}{10^{i-1}}, \quad 0 \leq r_{i-1} < 1$$

e ponendo

$$q_i = [10 r_{i-1}] .$$

Si determina in tal modo una successione di cifre q_1 $q_2, \ldots, q_h, \ldots$ tutte appartenenti all'insieme dei simboli $\{0,1,\ldots,9\}$; x allora si rappresenta mediante il simbolo (rappresentazione decimale di x):

$$x = 0, q_1 q_2 \ldots q_h \ldots .$$

Osserviamo che lo stesso procedimento può essere seguito se invece di dieci simboli $\{0,1,2,\ldots,9\}$ se ne sceglie un numero $b \in N$ $(b>1)$ per rappresentare il generico elemento di R. Basterà far svolgere al numero b il ruolo svolto nel precedente algoritmo dal numero dieci.

Ad esempio se $b=2$ si ha la cosiddetta rappresentazione binaria dei numeri reali, cioè quella che utilizza solo due simboli ad esempio $\{0,1\}$. Per esercizio il lettore provi che nel sistema binario:

$$7=111, \quad 11=1011, \quad \frac{1}{2} = 0,1, \quad \frac{1}{3} = 0,\overline{01} .$$

Concludiamo questo paragrafo osservando che $[0,1[$ (e quindi R) non è numerabile.
Sia S l'insieme delle successioni $\{q_i\}_{i \in N}$ con $q_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Sia S_1 l'insieme delle successioni $\{q_i\}_{i\in N}$ con $q_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ e periodiche di periodo 9. Ovviamente S_1 è numerabile. Quindi se $[0,1[$ fosse numerabile per la prop. 3 del cap. I tale sarebbe anche $[0,1[\cup S_1$ e quindi anche S che per quanto visto fin'ora è in corrispondenza biunivoca con $[0,1[\cup S_1$.

Sia allora S numerabile e sia $\{s_n\}_{n\in N}$ la successione degli elementi di S:

$$s_1 = x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1 \ldots$$
$$s_2 = x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2, \ldots$$
$$-----------------$$
$$s_n = x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n, \ldots$$
$$-----------------$$

Posto $s = (9-x_1^1,\ 9-x_2^2, \ldots,\ 9-x_k^k, \ldots)$ ovviamente $s \in S$ d'altro canto, però, $s \neq s_n \quad \forall n$. Siamo allora giunti ad un assurdo e pertanto S non è numerabile. Quindi $[0,1[$ non è numerabile.

Complementi ed esercizi

7.1 - Dati gli insiemi

$$A_1 = \{x\in R : \ x^2-1 > 0\}, \quad A_2 = Q \cap]0,1[$$

$$A_3 = \{x\in R : \ x^2+1 \leq 5\}, \quad A_4 = \{x\in R : x>0 \text{ e } \frac{1}{x} \leq 3\}$$

provare che

$\sup A_1=+\infty$, $\inf A_1=-\infty$, $\sup A_2=1$, $\inf A_2=0$
$\sup A_3=\max A_3=2$, $\inf A_3 = \min A_3 = -2$
$\sup A_4=+\infty$, $\inf A_4 = \min A_4 = 1/3$.

7.2 - Dimostrare che le seguenti coppie di insiemi sono separate e contigue

$A = \{x\in R: x< \sqrt{2}\}$, $B=\{x\in R : x> \sqrt{2}\}$

$A = [-1,0)$, $B = \{1/n\}_{n\in N}$

7.3 - Provare che dati a e b in R si ha per $n\in N$:

$$a^n-b^n= (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+ b^{n-1})$$

Traccia:

$$a^n-b^n=(a^n-a^{n-1}b)+(a^{n-1}b-a^{n-2}b^2)+\ldots+(ab^{n-1}-b^n)=\ldots$$

7.5 - Provare (per induzione) la seguente *formula del binomio di Newton:*

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b+ \binom{n}{2} a^{n-2}b^2+\ldots+ \binom{n}{n-1} ab^{n-1}+ b^n$$

dove a, b sono numeri reali ed $n\in N$.

Tale formula si può scrivere sinteticamente usando il simbolo "Σ" di sommatoria:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b .$$

Più in generale dati n numeri reali $x_1, x_2, \ldots x_n$ porremo:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

7.5 - Provare che

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

per ogni $n \in N$ e per ogni $x \in R$, $x \geq -1$.

7.6 - Provare che per $x, y \in R$ si ha:

$$|x|,\ |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq |x| + |y|$$

7.7 - Provare che se $n \in N$ è un numero primo $\sqrt{n}$ è irrazionale.

7.8 - Quali numeri reali risolvono le seguenti disequazioni

$$2x-3 \geq 4\ ,\quad |x+1|<5,\quad |3x-1|>2$$

$$|7x-4| < -2 \qquad |x-1| \geq x \qquad |x-2| \leq |x-3|$$

7.9 - Provare che se m ed n sono numeri naturali con $m \leq n$ si ha:

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}, \qquad m\binom{n}{m} = n\binom{n-1}{m-1}$$

§ 8 - Sistemi di riferimento cartesiani sulla retta e nel piano.

Siano dati un segmento u (unità di misura) che non si riduca ad un unico punto ed un segmento s; si chiama *misura di s rispetto* ad u l'estremo superiore delle misure dei segmenti contenuti in s e commensurabili con u; sinteticamente posto

$$X = \{ \frac{m}{n} \in Q \; ; \text{ esiste un segmento } s_1 \subset s \text{ con } s_1 = \frac{m}{n} u \}$$

si ha

$$\text{misura di } s \text{ risp. ad } u = |s|_u = \sup X .$$

E' possibile, ricorrendo ai postulati della geometria euclidea, dimostrare che:

a) $\sup X < +\infty$ qualunque sia s ;

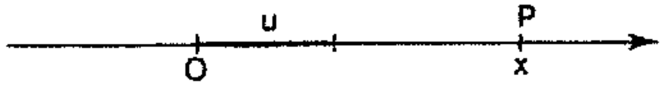
b) se $s = \frac{m}{n} u$ si ha $|s|_u = \frac{m}{n}$;

c) dati due segmenti s_1 ed s_2 si ha

$$|s_1+s_2|_u = |s_1|_u + |s_2|_u$$

Sia r una retta. Fissati su r un punto 0 detto *origine*, un verso di percorrenza v detto *verso positivo* ed un segmento *u* detto *unità di misura* si dirà che si è assegnato su r un (sistema di) *riferimento cartesiano* (0, u, v).
Delle due semirette aperte in cui 0 divide r chiameremo positiva (r_+) quella i cui punti seguono 0 nel verso positivo, negativa (r_-) l'altra.
Vogliamo mostrare come sia possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei punti di r.
Sia $P \in r$. Chiameremo *ascissa di P* nel riferimento (0, *u*, v) il numero reale x così definito:

$$x = \begin{cases} |\overline{OP}|_u^{(4)} & \text{se } P \in r_+ \\ 0 & \text{se } P = 0 \\ -|\overline{OP}|_u & \text{se } P \in r_- \end{cases}$$



E' evidente che punti distinti hanno ascisse distinte e pertanto l'applicazione:

---

(4) Dati due punti A e B con il simbolo $\overline{AB}$ si indica il segmento di estremi A e B.

$$P \in r \to x \in R$$

è iniettiva. Per verificare che essa è suriettiva e cioè che assegnato un numero reale α esiste un punto $P \in r$ la cui ascissa è α bisogna ricorrere, almeno nel caso in cui α è irrazionale, al "postulato di continuità della retta": *assegnate sulla retta due classi di punti* A' *ed* A'' *separate* (cioè tali che ogni punto di A' preceda ogni punto di A'') *e contigue* (cioè tali che per ogni $n \in N$ esistano un punto $A'_n \in A'$ ed un punto $A''_n \in A''$ tali che $|\overline{A'_n A''_n}|_u < 1/n$) *esiste un ed un sol punto* P *che separa le due classi.*

Osserviamo, infine, che se P_1 e P_2 sono due punti di r di ascisse rispettivamente x_1 ed x_2 si ha:

$$|\overline{P_1 P_2}|_u = |x_1 - x_2| .$$

La verifica di ciò è lasciata al lettore.

Consideriamo adesso un piano γ ed in esso due rette distinte r_1 ed r_2 intersecantesi in un punto O. Siano dati sulle due rette i sistemi di riferimento (O, u, v_1) ed (O, u, v_2). Si dirà allora che è stato introdotto nel piano un (sistema di) *riferimento cartesiano monometrico* (O, u, v_1, v_2)(5); il riferimento si dirà *ortogonale* se tali sono le due rette r_1 ed r_2.

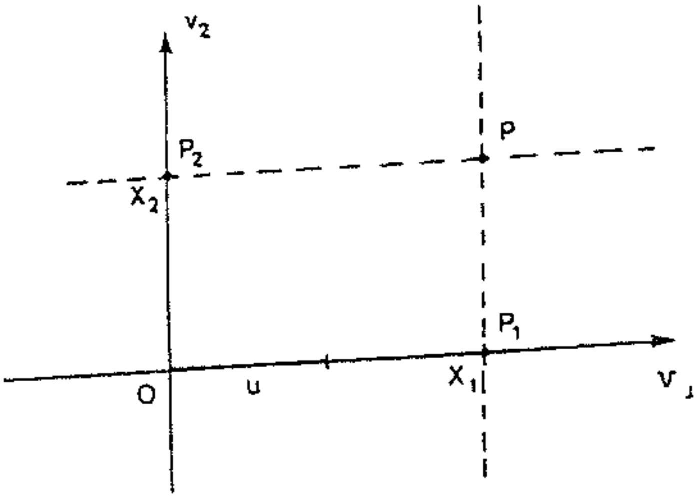
Detto P un punto di γ siano P_1 il punto d'intersezione tra r_1 e la parallela per P ad r_2 e P_2 il punto

----

(5) Spesso indicheremo il riferimento con la semplice scrittura Or_1r_2 .

d'intersezione tra r_2 e la parallela per P ad r_1. Indicata con x_1 l'ascissa di P_1 nel riferimento $(0, u, v_1)$ e con x_2 l'ascissa di P_2 nel riferimento $(0, u, v_2)$ si ottiene una applicazione

$$P\in\gamma \to (x_1, x_2)\in R\times R.$$



Tale applicazione si prova essere biunivoca e mette in luce che così come *ogni punto di una retta può essere identificato con un numero reale, ogni punto del piano può essere identificato con una coppia ordinata di numeri reali.*
Con locuzione usuale x_1 ed x_2 saranno dette le *coordinate di* P nel sistema di riferimento $(0, u, v_1, v_2)$; precisamente x_1 si dirà *l'ascissa di* P ed x_2 *l'ordinata di* P.
Fissato nel piano γ un sistema di riferimento $(0, u, v_1, v_2)$ dicesi *verso positivo di rotazione* quello in cui deve ruotare la semiretta positiva di r_1 per sovrapporsi alla semiretta positiva di r_2 descrivendo un angolo di misura(6) $\theta\in]0,\pi[$.
Supporremo sempre che il verso di rotazione positivo associato ad un riferimento cartesiano sia quello antiorario.
Supposto adesso che il sistema di riferimento adotta

---

(6) Cfr. cap. III n. 5.

to sia ortogonale diciamo P e Q due punti del piano di coordinate rispettivamente (x_1, x_2), (y_1, y_2). Il lettore compirà un utile esercizio dimostrando che: (*formula della "distanza di due punti"*)

$$|\overline{PQ}|_u = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2};$$

il punto medio M del segmento $\overline{PQ}$ ha coordinate

$$\frac{x_1 + y_1}{2}, \quad \frac{x_2 + y_2}{2}.$$

Complementi ed esercizi

Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale:

8.1 - Calcolare la distanza tra le seguenti coppie di punti:

$(1,1)$, $(0,0)$; $(2,-4)$, $(-3,1)$; $(\sqrt{2},-1)$, $(1/\sqrt{3},4)$

8.2 - Calcolare il punto medio dei segmenti di estremi

$(2,0)$, $(4,0)$; $(0,-3)$, $(5,9)$; (-21), $(7,-4)$

8.3 - Determinare gli insiemi (luoghi) di punti del piano le cui coordinate (x,y) sono tali che:

a) $x = 0$, $y \in R$

b) $y = 0$, $x \in R$

c) $y = x$

d) $|x| \leq a$, $|y| \leq b$; $a > 0$, $b > 0$

e) $|x| \geq a$, $y \in R$, $a > 0$

f) $x \cdot y \geq 0$

g) $x^2 + y^2 = 1$

CAPITOLO III

FUNZIONI ELEMENTARI

§ 1 - Funzioni numeriche.

Diremo *funzione numerica* ogni funzione definita in un sottoinsieme A di R e che assume valori in R:

$$f : x\in A \subseteq R \to f(x)\in R.$$

Si dirà che f è *limitata superiormente* (risp. *limitata inferiormente*) se tale è il suo codominio f(A) e si scriverà:

$$\sup f(A) = \sup_{x\in A} f(x) \qquad (\text{risp. } \inf f(A)= \inf_{x\in A} f(x)).$$

Si ha subito (cfr. cap. II n.3 prop. 2 e 2')

$$e' = \inf_{x\in A} f(x) \iff \left| \begin{array}{l} \forall x\in A \quad f(x) \geq e' \\ \forall \varepsilon>0 \ \exists x_\varepsilon \in A : f(x_\varepsilon)<e'+\varepsilon \end{array} \right.$$

$$e'' = \sup_{x\in A} f(x) \iff \begin{cases} \forall x\in A & f(x)\le e'' \\ \forall \varepsilon>0 \ \exists x_\varepsilon \in A : f(x_\varepsilon)>e''-\varepsilon \ . \end{cases}$$

Quando il codominio f(A) non è limitato superiormente (risp. inferiormente) si pone, secondo quanto già convenuto nel § 3 del Cap. II,

$$\sup_{x\in A} f(x) = +\infty \qquad (\inf_{x\in A} f(x) = -\infty) \ .$$

Si ottiene facilmente

$$\sup_{x\in A} f(x)=+\infty \iff \forall K>0 \quad \exists x_K\in A : f(x_K)> K$$

$$\inf_{x\in A} f(x)=-\infty \iff \forall K>0 \quad \exists x_K\in A : f(x_K)<-K \ .$$

Se il codominio f(A) è dotato di massimo (risp. minimo) si dice che f ha *massimo* (risp. *minimo*) in A e si scrive

$$\max f(A) = \max_{x\in A} f(x) \qquad \min f(A)=\min_{x\in A} f(x) \ .$$

Ovviamente dire che f(x) ha massimo (risp. minimo) in A equivale a dire che esiste un $\bar{\bar{x}}\in A$ (risp. $\bar{x}\in A$) tale che

$$f(\bar{\bar{x}}) = \sup_{x\in A} f(x) = \max_{x\in A} f(x)$$

$$\left(f(\bar{x}) = \inf_{x \in A} f(x) = \min_{x \in A} f(x) \right) .$$

Si dice che f è *monotòna* in A se si verifica una delle seguenti eventualità:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ [funzione *strettamente crescente*]

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ [funzione *crescente*]

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ [funzione *strettamente decrescente*]

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_2)$ [funzione *decrescente*] .

Ovviamente una funzione strettamente crescente (risp decrescente) é iniettiva; la sua inversa, definita nel codominio f(A), è essa stessa strettamente crescente (risp. decrescente).
Si può inoltre facilmente dimostrare:

PROP. 1 - *Sia* $h = g \circ f$, *allora*

a) *se* f, g *sono entrambe (strettamente) crescenti o (strettamente) decrescenti,* h *é (strettamente) crescente;*

b) *se una delle due funzioni* g, f *è (strettamente) crescente e l'altra è (strettamente) decrescente,* h *è (strettamente) decrescente.*

La dimostrazione di tale proposizione è lasciata al lettore per esercizio.

Sia $A \subset R$ un insieme tale che se $x \in A$ allora $-x \in A$; diremo che f, definita in A, è *pari* se

$$f(x) = f(-x) \qquad \forall x \in A ,$$

che f è *dispari* se

$$f(x) = - f(-x) \qquad \forall x \in A.$$

Infine, se $T>0$, sia A un sottoinsieme di R tale che, se $x \in A$ allora $x+T \in A$; una funzione f definita in A si dice *periodica* di periodo T se

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in A.$$

I prossimi paragrafi saranno dedicati allo studio delle proprietà di alcune funzioni numeriche di uso corrente dette *funzioni elementari*.

Complementi ed esercizi

1.1 - Sia f una funzione definita in $]-a,a[$, dispari; dimostrare che f è strettamente crescente se e solo se

a) la restrizione di f a $[0,a[$ è strettamente crescente

b) $f(0) = 0$.

1.2 - Dimostrare che una funzione pari non costante non è monotòna.

1.3 - Consideriamo la funzione che ad ogni $x \geq 0$ associa la sua prima cifra decimale. Dimostrare che tale funzione è periodica di periodo 1. Se si toglie la restrizione $x \geq 0$ la funzione risultante è ancora periodica?

1.4 - La funzione

$$x \in [0,+\infty[\;\to\; [x] \in [0,+\infty[$$

è monotona? Quale è il suo codominio?

1.5 - La funzione

$$x \in [0,+\infty[\;\to\; x-[x] \in [0,+\infty[$$

è monotona? Quale è il suo codominio?

1.6 - Determinare l'estremo superiore ed inferiore delle funzioni considerate negli esercizi 1.4 e 1.5.

§ 2 - Funzione potenza n-ma e radice n-ma

Fissato un numero naturale n consideriamo la funzione

$$x \in]-\infty, +\infty[\;\to\; x^n \in R$$

detta *funzione potenza n-ma*. Abbiamo già osservato(cfr. cap. II n.4) che

$$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n$$

e che, $\forall y \in [0,+\infty[$, esiste un unico $x \in [0,+\infty[$ tale che $x^n = y$. Ciò vuol dire che la restrizione della funzione potenza n-ma a $[0,+\infty[$ è un'applicazione strettamente crescente, e quindi biunivoca, di $[0,+\infty[$ in sè.

Risulta inoltre

$$(-x)^n = x^n \quad \text{se } n \text{ è pari}$$

$$(-x)^n = -x^n \quad \text{se } n \text{ è dispari} \quad ;$$

quindi la funzione potenza è dispari o pari a seconda che n sia dispari o pari.
Sfruttando tale proprietà si ha facilmente che:

n dispari => la funzione potenza è strettamente crescente su tutto R, ha per codominio tutto R e pertanto

$$\sup_{x\in R} x^n = +\infty \quad , \quad \inf_{x\in R} x^n = -\infty \quad ;$$

n pari => la restrizione della funzione potenza all'intervallo $]-\infty,0]$ è strettamente decrescente, la restrizione all'intervallo $[0,+\infty[$ è strettamente crescente, il codominio della funzione è $[0,+\infty[$ e pertanto

$$\sup_{x\in R} x^n = +\infty \quad , \quad \inf_{x\in R} x^n = \min_{x\in R} x^n = 0 \; .$$

Tali proprietà possono essere visualizzate attraverso i grafici illustrati nelle figure 1,2,3.

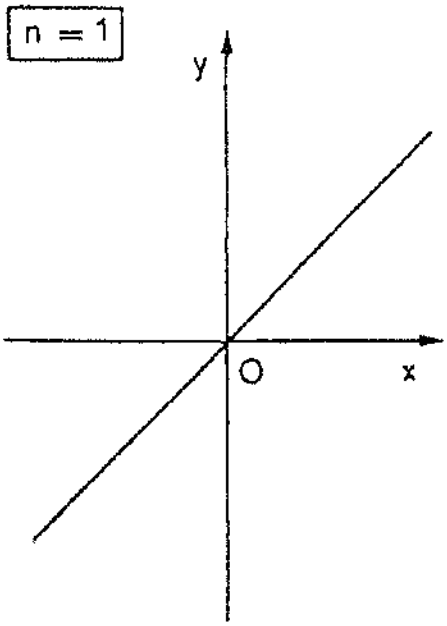


Fig. 1

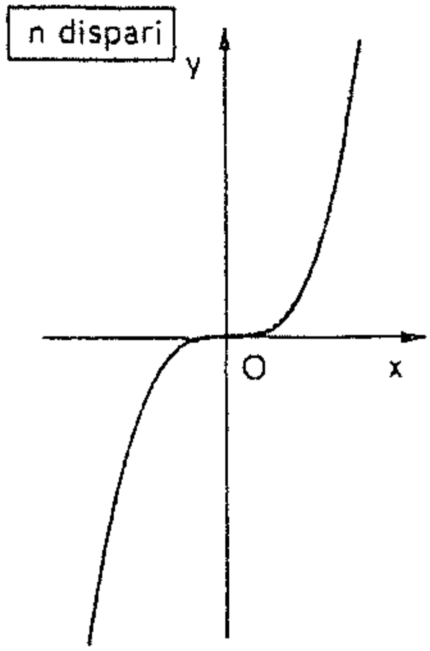


Fig. 2

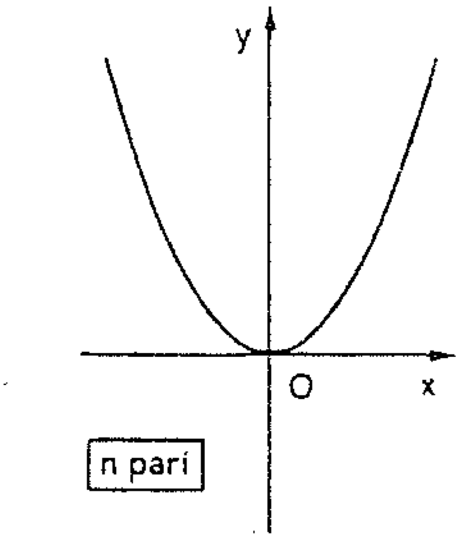


Fig. 3

L'inversa della restrizione della funzione potenza n-ma all'intervallo $[0,+\infty[$ si chiama *funzione radice n-ma*

$$x\in[0,+\infty[\ \rightarrow \sqrt[n]{x}\in[0,+\infty[\ .$$

Per quanto detto nel precedente paragrafo tale funzione è strettamente crescente in $[0,+\infty[$ ed ha per condominio $[0,+\infty[$. Il suo grafico è illustrato nella fig. 4.

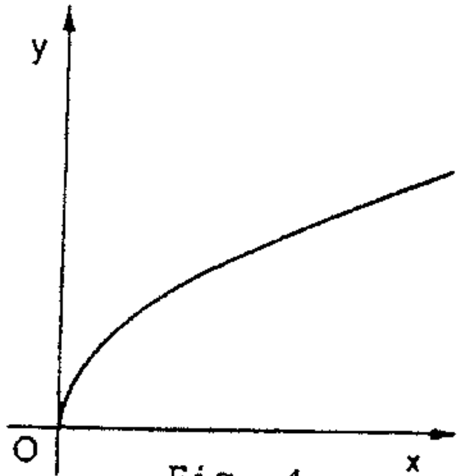


Fig. 4

Di immediata verifica sono le seguenti identità.

$$(1)\quad \begin{cases} \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x\cdot y} & x,y\geq 0 \quad n\in N \\ (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} & x\geq 0 \quad n,m\in N \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\cdot m]{x} & x\geq 0 \quad n,m\in N \\ \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[p]{x^q} & x\geq 0 \quad \frac{m}{n}=\frac{q}{p}\,. \end{cases}$$

Osservazione - Se n è dispari viene spesso chiamata funzione radice n-ma la funzione inversa della funzione potenza n-ma cioè:

$$x\in\,]-\infty,+\infty[\;\rightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -\sqrt[n]{-x} & \text{se} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Complementi ed esercizi

2.1 - Verificare che $\sqrt{x^2} = |x|$, per ogni $x \in R$

2.2 - Verificare che

a) $\sqrt{x^2-2x} > \sqrt{3} \iff x \in]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$

b) $\sqrt[3]{x^2+1} > \sqrt[3]{2x} \qquad \iff x \in [0,1[\cup]1,+\infty[$ (1)

c) $(x^2-1)^6 > 1 \iff x \in]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$

d) $x^4-x^2 > 0 \iff x \in]-\infty, -1[\cup]1,+\infty[$

e) $\forall a > 0$ e $\forall n \in N$, n pari:

$$x^n < a \iff |x| < \sqrt[n]{a}$$

§ 3 - Funzione esponenziale, logaritmo

Sia a un numero positivo diverso da 1. Se $n \in N$ abbiamo già attribuito un significato alla scrittura a^n . Se x è un razionale positivo poniamo

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{dove} \quad x = \frac{m}{n} \text{ con } m,n \in N;$$

----

(1) Se si assume la funzione $\sqrt[3]{x}$ definita in tutto R (cfr. osservazione) allora il risultato dell'esercizio é : $x \in R - \{1\}$.

tale posizione è legittima in quanto, se $x = \frac{p}{q}$, in base all'ultima relazione (1) del precedente paragrafo risulta $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$. Se $x \in Q$ e $x<0$

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

e, se $x = 0$, $a^0 = 1$.

Abbiamo in tal modo dato significato alla scrittura a^x per ogni $x \in Q$. Risulta ovviamente $a^x > 0$, $\forall x \in Q$ e inoltre

(2) $\quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad ; \quad a^{x \cdot y} = (a^x)^y \qquad \forall x,y \in Q.$

PROP. 2 - *La funzione*

$$x \in Q \to a^x \in]0,+\infty[$$

è strettamente crescente se $a > 1$, *strettamente decrescente se* $0 < a < 1$.

Consideriamo il caso $a>1$. Se $n,m \in Z$ e $n<m$ risulta

(3) $$a^n < a^m .$$

Infatti

i) se $0 \leq n < m$, essendo $a^k > 1$ per ogni intero $k > 0$ si ha:

$$1 \leq a^n < a^n \cdot a^{m-n} = a^m \; ;$$

ii) se $n < 0 \leq m$ allora poichè

$$a^{-n} > 1 \Rightarrow \frac{1}{a^{-n}} < 1$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} < 1 \leq a^m$$

iii)se $n < m < 0$ allora $-n>-m$ e quindi

$$a^{-m} < a^{-n} \Leftrightarrow \frac{1}{a^m} < \frac{1}{a^n} \Leftrightarrow a^n < a^m .$$

Se ora α e β sono due razionali scegliamo per essi due rappresentazioni sotto forma di frazioni con lo stesso denominatore

$$\alpha = \frac{m_1}{n} , \; \beta = \frac{m_2}{n} .$$

Si ha allora sfruttando la (3) e la monotonia della funzione radice n-ma:

$$\alpha<\beta \Leftrightarrow m_1<m_2 \Leftrightarrow a^{m_1} < a^{m_2} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^{m_1}} < \sqrt[n]{a^{m_2}} \Leftrightarrow a^\alpha<a^\beta .$$

Per studiare il caso $0<a<1$ basta ricordare che

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

con $\frac{1}{a} > 1$.

PROP. 3 - *Se* $c \in R$, *i due sottoinsiemi di* R

$$A=\{a^x : x\in Q,\ x<c\}\ ,\quad B=\{a^y : y\in Q,\ y>c\}$$

sono separati e contigui .

Supponiamo $a > 1$ per fissare le idee.

In base alla prop. 2 A e B sono separati; sia

$$\alpha = \sup A,\quad \beta = \inf B.$$

Per la densità di Q in R fissato $n\in N$ esiste un numero razionale r tale che

$$c - \frac{1}{n} < r < c$$

da cui

$$c < r + \frac{1}{n}\ ;$$

ne segue che

$$a^r \in A,\qquad a^{r+\frac{1}{n}} \in B.$$

Per la prima delle (1) risulta

$$(4)\qquad a^{r+\frac{1}{n}} - a^r = a^r\cdot a^{\frac{1}{n}} - a^r = a^r(a^{\frac{1}{n}} - 1)\ ;$$

d'altra parte, tenendo conto che $a>1 \Rightarrow a^h > 1$ per ogni razionale $h>0$, si ha:

$$a-1=(a^{1/n}-1)(a^{\frac{n-1}{n}}+a^{\frac{n-2}{n}}+\dots+a^{\frac{1}{n}}+1)>(a^{\frac{1}{n}}-1)\cdot n$$

da cui

$$a^{\frac{1}{n}}-1<(a-1)/n\ .$$

Da ciò e dalla (4), ricordando che $a^r<\alpha$, segue che:

$$a^{r+\frac{1}{n}}-a^r<a^r\cdot\frac{a-1}{n}<\alpha\cdot\frac{a-1}{n}\ .$$

Se adesso si fissa $\varepsilon>0$ e si sceglie n in modo tale che

$$n>\frac{\alpha\ (a-1)}{\varepsilon}$$

si ha: $$a^{r+\frac{1}{n}}-a^r<\varepsilon$$

e quindi A e B sono contigui

OSSERVAZIONE-Dalla prop.3 segue che se $c\in Q$ si ha:

$$(5)\quad \begin{cases} a^c=\sup\{a^x:x\in Q,x<c\}=\inf\{a^y:y\in Q,y>c\} \text{ se } a>1 \\ a^c=\inf\{a^x:x\in Q,x<c\}=\sup\{a^y:y\in Q,y>c\} \text{ se } 0<a<1 \end{cases}$$

Al solito per fissare le idee sia $a>1$. Dati x ed y

in Q se $x<c<y$ per la proposizione 1 si ha $a^x<a^c<a^y$. Quindi:

$$\sup\{a^x : x\in Q, x<c\} \le a^c \le \inf\{a^y : y\in Q, y>c\}$$

Allora dalla prop. 3 segue la prima delle (5). In modo analogo si prova la seconda delle (5).

Sia adesso $c\in R$. Ha senso la seguente definizione:

$$a^c = \begin{cases} \sup\{a^x : x\in Q, x<c\} = \inf\{a^y : y\in Q, y>c\} & \text{se } a>1 \\ \inf\{a^x : x\in Q, x<c\} = \sup\{a^y : y\in Q, y>c\} & \text{se } 0<a<1. \end{cases}$$

Osserviamo che, per quanto visto in precedenza, se $c\in Q$ si riottiene la classica definizione di a^c. Da tale definizione discende subito la seguente

PROP.4 - *La funzione esponenziale*

$$x\in R \to a^x \in]0,+\infty[\tag{6}$$

è strettamente crescente se $a > 1$, *strettamente decrescente se* $0 < a < 1$.

Sia al solito per fissare le idee $a>1$. Dati due numeri reali $c<c'$ siano r ed r' due numeri razionali tali che

$$c < r < r' < c';$$

dalla proposizione 2 e dalla definizione di esponenziale si ha:

$$a^c \le a^r < a^{r'} \le a^{c'}$$

e quindi l'asserto.

Si ha ancora

PROP. 5 - *Il codominio della funzione esponenziale* (6) *è l'intervallo* $]0,+\infty[$.

Sia al solito $a > 1$.

Se $b\in]0,+\infty[$ consideriamo i seguenti insiemi

$$\overline{A} = \{x\in R:\ a^x<b\},\ \overline{B} = \{x\in R:\ a^x>b\}\ ;$$

tali insiemi (che è possibile dimostrare essere non vuoti) in forza della proposizione 4 sono separati. D'altro canto $\overline{A} \cup \overline{B}$ coincide con tutto R eventualmente privato dell'unico punto c tale che $a^c= b$. Pertanto $\overline{A}$ e $\overline{B}$ sono contigui.

Posto allora

$$c = \sup \overline{A} = \inf \overline{B}$$

si ha per definizione di esponenziale:

(7) $a^c=\sup\{a^x:x\in Q,x<c\}=\inf\{a^y:y\in Q,y>c\}$.

Sia adesso $z\in\{a^x:x\in Q,x< c\}$. Esisterà allora $\overline{x}<c,\overline{x}\in Q$, tale che $z=a^{\overline{x}}$; se fosse $z=a^{\overline{x}}>b$ si avrebbe a fortiori

$$\overline{x}\in\overline{B}$$

da cui $\overline{x} \geq c$ che è assurdo. Quindi si ha:

$$z\in\{a^x:x\in Q,\ x<c\}\quad\Rightarrow\quad z\leq b;$$

analogamente:

$$z \in \{a^y : y \in Q,\ y>c\} \Rightarrow z \geq b.$$

Pertanto b è l'elemento di separazione (cfr. prop. 3) dei due insiemi contigui $\{a^x : x \in Q, x<c\}$, $\{a^y : y \in Q, y>c\}$. Da tale osservazione e dalla (7) segue $a^c = b$.

Osserviamo esplicitamente che le (2) continuano a valere se $x, y \in R$.
L'andamento della funzione esponenziale nei due casi $a>1$, $0<a<1$ è illustrato nelle figure 4 e 5.

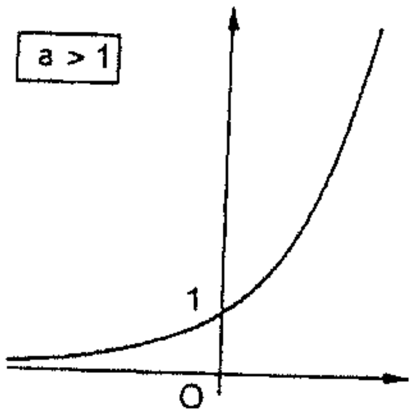


Fig. 4

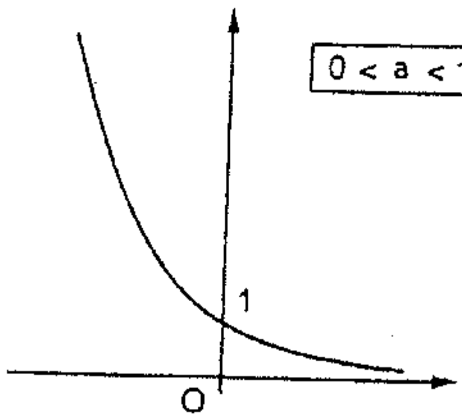


Fig. 5

Fissiamo adesso un numero reale a positivo e diverso da 1.

Si chiama *funzione logaritmo in base a* la funzione inversa della funzione esponenziale di base a:

$$\log_a : x \in]0, +\infty[\rightarrow \log_a x \in R.$$

Ovviamente:

$$a^{\log_a y} = y \quad \forall y>0 \ , \qquad \log_a a^x = x \quad \forall x \in R$$

Dalle proprietà della funzione esponenziale si ricava subito la seguente

PROP. 6 - *La funzione logaritmo di base* a *ha come codominio tutto* R; *essa è inoltre strettamente crescente se* $a > 1$, *strettamente decrescente se* $0 < a < 1$.

A partire dalle (2) sono di facile verifica le seguenti classiche identità:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$
$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$$
con x,y numeri reali positivi ed $\alpha \in R$.

L'andamento della funzione logaritmo di base a è illustrato nelle figure 6, 7.

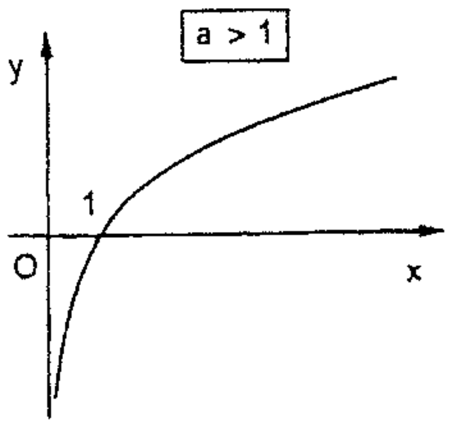


Fig. 6

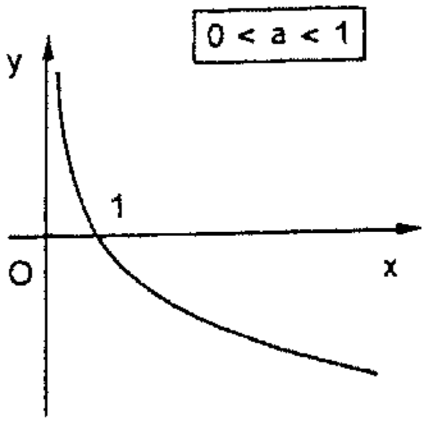


Fig. 7

Per terminare il paragrafo osserviamo esplicitamente che

$$\sup_{x\in R} a^x = +\infty \quad , \quad \inf_{x\in R} a^x = 0$$

$$\sup_{x\in]0,+\infty[} \log_a x = +\infty \; , \quad \inf_{x\in]0,+\infty[} \log_a x = -\infty$$

Complementi ed esercizi.

3.1 - Dimostrare che

a) $2^x - 5 > 0 \iff x \in]\log_2 5, +\infty[$

b) $3 - \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0 \iff x \in]\log_{\frac{1}{2}} 3, +\infty[$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) < 0 \iff x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

d) $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 4 < 0 \iff x \in]0, \log_3 4[$

e) $\log_{1/3}(x^2+1) < 0 \iff x \in R - \{0\}$

f) $\log_4^2 x - \log_4 x \leq 0 \iff x \in [1,4]$

3.2 Considerati gli insiemi

$$A_1 = \{3^{1/n} : n \in N\} \; , \quad A_2 = \{\log_3(1/n) : n \in N\}$$

$$A_3 = \{\left(\frac{1}{2}\right)^n : n \in N\} \; , \; A_4 = \{(5)^n : n \in N\}$$

provare che

$\sup A_1 = \max A_1 = 3$, $\inf A_1 = 1$; $\sup A_2 = \max A_2 = 0$

$\inf A_2 = -\infty$, $\sup A_3 = \max A_3 = \frac{1}{2}$; $\inf A_3 = 0$

$\sup A_4 = +\infty$, $\inf A_4 = \min A_4 = 5$.

3.3 - Provare che gli insiemi $\overline{A}$ e $\overline{B}$ introdotti nella dimostrazione della PROP. 5 sono non vuoti.

§ 4 - Funzione potenza ad esponente reale.

Se si conviene che

$$1^\alpha = 1 \qquad \forall\, \alpha \in R$$

il simbolo a^α ha significato per ogni $a > 0$ e per ogni $\alpha \in R$. Ha senso allora considerare la seguente funzione, detta *funzione potenza ad esponente reale* α:

$$x \in \,]0,+\infty[\; \to x^\alpha \in \,]0,+\infty[\;.$$

Se b è un numero reale, per esempio, maggiore di 1 risulta

$$x^\alpha = b^{\alpha \log_b x} .$$

Da tale identità e da quanto visto nel paragrafo 3 si ha:

PROP. 7. *La funzione potenza ad esponente reale* α *è strettamente crescente se* $\alpha > 0$, *strettamente decrescente se* $\alpha < 0$. *Il suo codominio è l'intervallo* $]0,+\infty[$.

E' ovvio che se $\alpha = n$ o $\alpha = \frac{1}{n}$ con $n \in N$ si ottengono rispettivamente la restrizione della funzione potenza n-ma a $]0,+\infty[$ e la funzione radice n-ma.

L'andamento della funzione potenza con esponente α è illustrato nelle figure 9,10,11.

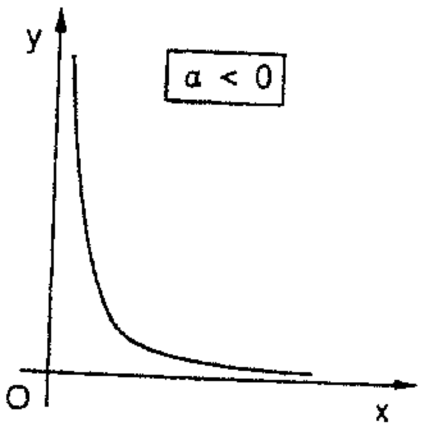


Fig. 9

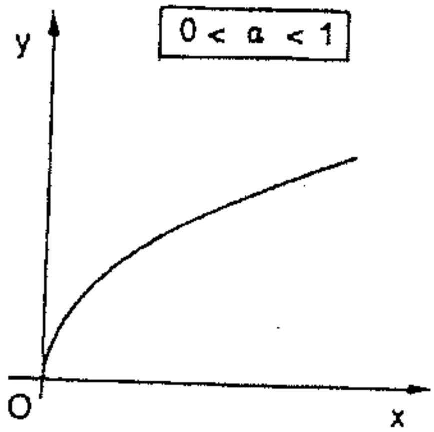


Fig. 10

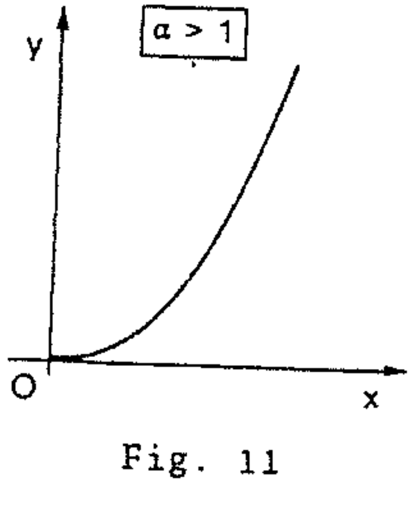


Fig. 11

Terminiamo il paragrafo osservando che:

$$\sup_{x \in]0,+\infty[} x^{\alpha} = +\infty \quad , \quad \inf_{x \in]0,+\infty[} x^{\alpha} = 0$$

Complementi ed esercizi

4.1 Dimostrare che

a) $x^{\sqrt{2}} > 3 \iff x \in]3^{1/\sqrt{2}}, +\infty[$

b) $x^{1/\sqrt{2}} - 5 \leq 0 \iff x \in]0, 5^{\sqrt{2}}]$

c) $x^{-\sqrt{2}} + 1 > 0 \iff x \in]0, +\infty[$

d) $x^{-\sqrt{2}} - 1 > 0 \iff x \in]0, 1[$

e) $x^{2\sqrt{2}} - 5x^{\sqrt{2}} + 4 \leq 0 \quad x \in [1, 4^{1/\sqrt{2}}]$

§ 5 - Funzioni trigonometriche

Sia dato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $0xy$. Consideriamo la circonferenza C di centro 0 e raggio unitario. E' intuitivamente evidente che è possibile introdurre nell' insieme dei punti di tale circonferenza "in modo naturale" due relazioni d'ordine totale; esse possono essere visualizzate immaginando un punto che si muova di moto uniforme sulla circonferenza percorrendola nel verso orario o in quello antiorario. Per comodità fissiamo come verso positivo quello antiorario (fig.12)

Consideriamo inoltre nota la nozione di lunghezza di un arco di circonferenza.

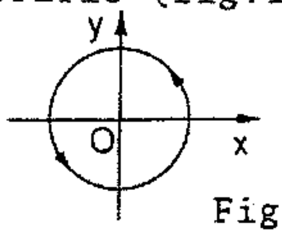


Fig.12

Indichiamo con A il punto di intersezione della circonferenza C con il semiasse positivo delle ascisse; detto P un punto generico di C indichiamo con $\widehat{AP}$:

a) il punto A se P = A, (arco degenere o nullo)

b) l'arco di estremi A e P costituito dai punti della circonferenza che seguono A e precedono P nel verso positivo se P≠A.

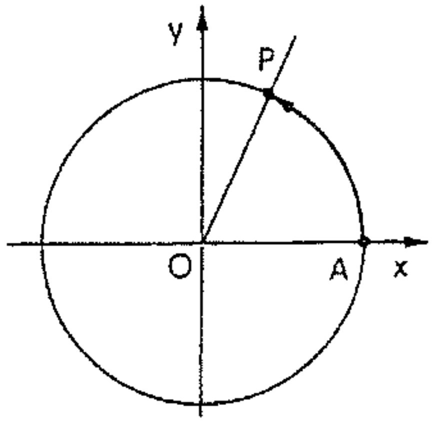


Fig. 13

Per definizione si chiama *misura in radianti* dell'angolo $\widehat{AOP}$ la lunghezza α dell'arco $\widehat{AP}$. Ovviamente $\alpha\in[0,2\pi[$.

Se ora immaginiamo un punto che si muova su C nel verso positivo con velocità costantemente uguale ad 1 e che all'istante t=0 si trovi in A, ovviamente tale punto transita per il punto P in ogni istante

(8) $$t = \alpha + 2k\pi \qquad \text{con } k\in Z.$$

Uno qualsiasi dei valori (8) rappresenta, sostanzialmente, una "misura" dell'angolo $\widehat{AOP}$; l'insieme dei valori (8) prende anche il nome di *argomento* di P, mentre ciascuno dei valori che si ottengono fissando k nella (8) si chiama *determinazione dell'argomento di* P.
Si può dimostrare che comunque si fissi un numero reale t esiste un punto $P_t \in C$ tale che t sia una determinazione dell'argomento di P_t. L'ascissa e l'ordinata di P_t sono pertanto due funzioni numeriche (della variabile t) dette rispettivamente *funzione coseno* e

funzione seno :

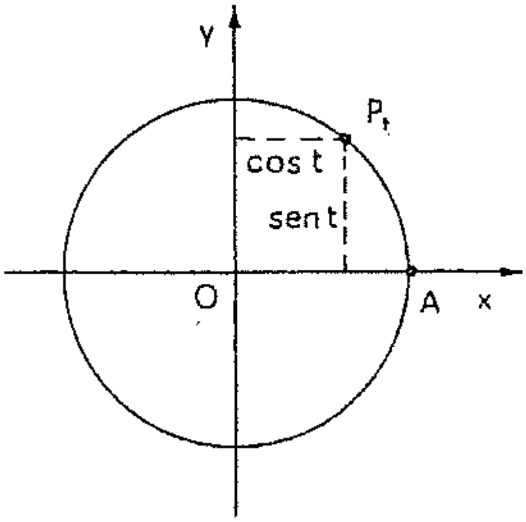


Fig. 14

cos : $t \in R \to \cos t$ = ascissa di $P_t \in [-1,1]$

sen : $t \in R \to \text{sen}\, t$ = ordinata di $P_t \in [-1,1]$.

Le seguenti proprietà delle funzioni seno e coseno sono evidenti:

a) il codominio delle funzioni seno e coseno è l'intervallo $[-1,1]$;

b) le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π;

c) sen t è una funzione dispari, cos t è una funzione pari;

d) valgono inoltre le identità:

$$\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad t \in R\ .$$

$$\operatorname{sen}(t_1 \pm t_2) = \operatorname{sen}t_1 \cdot \cos t_2 \pm \operatorname{sen}t_2 \cdot \cos t_1$$

$$t_1, t_2 \in R,$$

$$\cos(t_1 \pm t_2) = \cos t_1 \cdot \cos t_2 \mp \operatorname{sen}t_1 \cdot \operatorname{sen}t_2$$

e) $\max\limits_{t \in R} \operatorname{sen}t = \max\limits_{t \in R} \cos t = 1, \ \min\limits_{t \in R} \cos t = \min\limits_{t \in R} \operatorname{sen}t = -1.$

Se si osserva che la funzione coseno si annulla in tutti e soli i punti

$$t_k = \pi/2 + k\pi \qquad k \in Z$$

ha senso, per $t \neq t_k$, considerare la seguente funzione detta *funzione tangente* .

$$tg : t \in R - \{t_k\}_{k \in Z} \rightarrow tg\ t = \frac{\operatorname{sen}t}{\cos t} \in R .$$

Se consideriamo la tangente in A alla circonferenza C, allora tgt è l'ordinata del punto Q di intersezione della tangente in A alla circonferenza con la retta OP_t (cfr.Fig.15).E' evidente che:

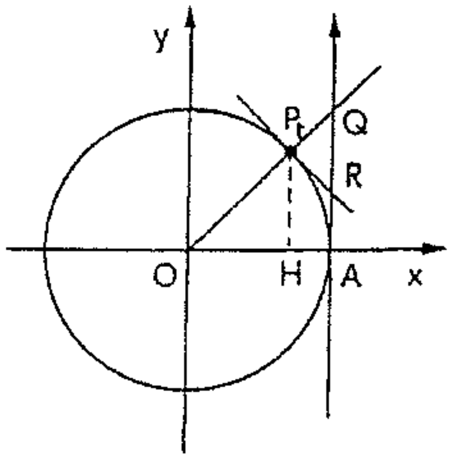


Fig. 15

a') il codominio della funzione tangente è tutto R;

b') tgt è una funzione periodica di periodo π;

c') tgt è una funzione dispari;

d') valgono le identità:

$$tg(t_1 \pm t_2) = \frac{tgt_1 \pm tgt_2}{1 \mp tgt_1\ tgt_2}$$

e') $\sup\limits_{t\in R-\{t_k\}_{k\in Z}} tgt = +\infty$, $\inf\limits_{t\in R-\{t_k\}_{k\in Z}} tgt = -\infty$.

Si osservi che dalle seguenti diseguaglianze (cfr. Fig. 15)

$$|\overline{P_t H}| < |\overline{P_t A}| < |\widehat{AP}_t| < |\overline{AR}| + |\overline{RP}_t| < |\overline{QA}|$$

segue

(9) $\quad \text{sen}t < t < tgt \qquad t\in]0,\pi/2[$.

Se si osserva che la funzione seno si annulla in tutti e soli i punti

$$t'_k = k\pi \quad , \quad k\in Z$$

ha senso, per $t \neq t'_k$, considerare la seguente funzione detta *funzione cotangente:*

$$ctg : t\in R-\{t'_k\}_{k\in Z} \to ctgt = \frac{\cos t}{\text{sen}t} \in R .$$

Lasciamo al lettore l'interpretazione geometrica di ctgt, per altro analoga a quella data per la funzione tangente; ci limitiamo qui a segnalare che per la funzione ctgt valgono le seguenti proprietà:

a") il codominio della funzione cotangente è tutto R;

b") ctgt è una funzione periodica di periodo π;

c") ctgt è una funzione dispari;

d") valgono le identità

$$\text{cotg } (t_1 \pm t_2) = \frac{\text{cotg } t_1 \text{ cotg } t_2 \mp 1}{\text{cotg } t_2 \pm \text{ctg } t_1}$$

e") $\sup \text{ctgt} = +\infty$, $\inf \text{ctgt} = -\infty$.

L'andamento delle funzioni seno, coseno, tangente è illustrato nelle figure che seguono.

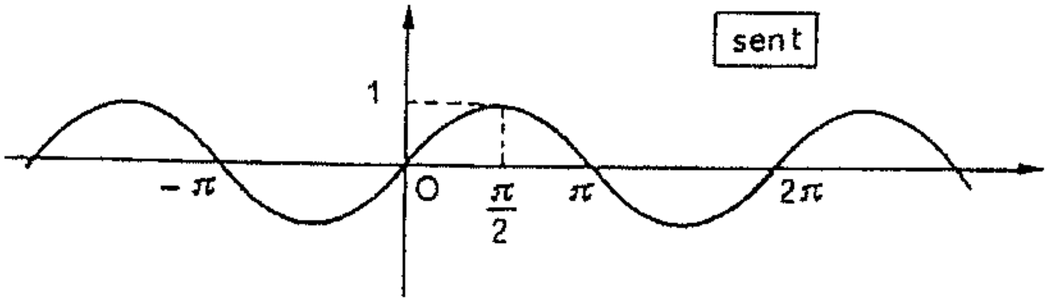


Fig. 16

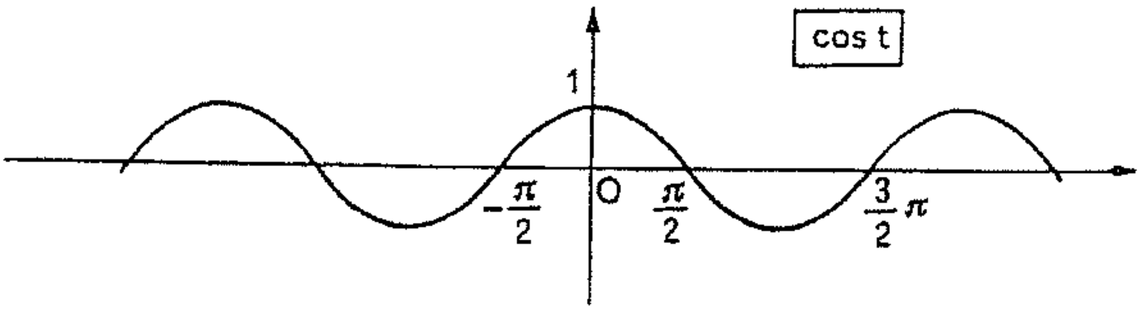


Fig. 17

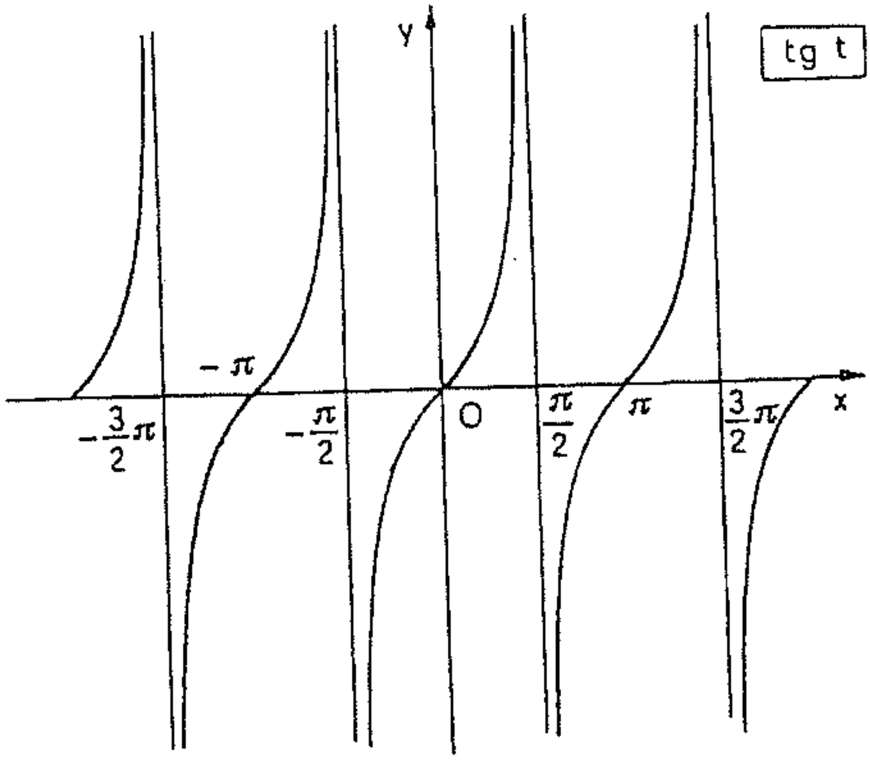

tg t
y
x
$-\pi$
$-\frac{3}{2}\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
O
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3}{2}\pi$

Fig. 18

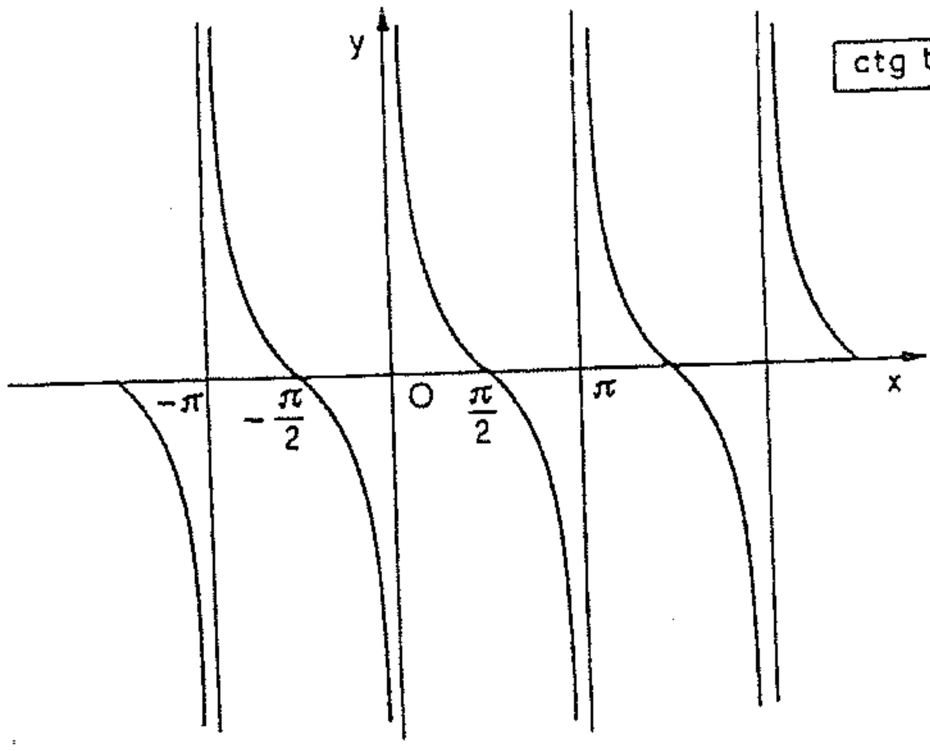

ctg t
y
x
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
O
$\frac{\pi}{2}$
π

Fig. 19

Complementi ed esercizi.

5.1 - Dimostrare che

a) $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\quad \operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$

b) $\operatorname{sen}(t+\pi)=-\operatorname{sen} t$, $\quad \cos(t+\pi)=-\cos t$ $\quad \operatorname{tg}(t+\pi)=\operatorname{tg} t$

c) $\operatorname{sen}(t+\frac{\pi}{2})=\cos t$, $\quad \cos(t+\frac{\pi}{2})=-\operatorname{sen} t$ $\quad \operatorname{tg}(t+\pi/2)=-\operatorname{ctg} t$

d) $\operatorname{sen}(\pi-t)=\operatorname{sen} t$, $\quad \cos(\pi-t)=-\cos t$ $\quad \operatorname{tg}(\pi-t)=-\operatorname{tg} t$

e) $\operatorname{sen} 2t=2\operatorname{sen} t\cos t$, $\quad \cos 2t=\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t$, $\operatorname{tg} 2t=\dfrac{2\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg}^2 t}$

f) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$

g) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}/2$ $\quad \cos\frac{\pi}{3}=1/2$ $\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

h) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ $\quad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}/3$.

5.2 Provare che:

a) la funzione seno è crescente strettamente in ogni intervallo del tipo $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi]$, $k\in Z$, decrescente strettamente in ogni intervallo del tipo $[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi]$ $k\in Z$.

b) la funzione coseno è crescente strettamente in ogni intervallo del tipo $[(2K+1)\pi, (2K+2)\pi]$ $K\in Z$, decrescente strettamente in ogni intervallo del tipo $[2K\pi, (2K+1)\pi]$, $K\in Z$.

5.3 Provare che

a) $\operatorname{sen} x > \frac{1}{2} \iff x \in \bigcup_{k \in Z} \left] \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right[$

b) $\cos x \leq \sqrt{3}/2 \iff x \in \bigcup_{k \in Z} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \right]$

c) $0 \leq \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{3}}{2} \iff$

$\iff x \in \bigcup_{k \in Z} \left([2k\pi, \pi/3 + 2k\pi[\cup]\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, (2k+1)\pi] \right)$

d) $2 \operatorname{sen}^2 x - 1 \leq 0 \iff$

$\iff x \in \bigcup_{k \in Z} \left([-\pi/4 + 2k\pi, \pi/4 + 2k\pi] \cup [\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \frac{5}{4}\pi + 2k\pi] \right).$

§ 6 - Funzioni inverse delle funzioni trigonometriche.

La funzione seno non è biunivoca e quindi non è invertibile. Se però se ne considera la restrizione, ad un intervallo del tipo (cfr. Es. 5.2 a))

$$\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi , \frac{\pi}{2} + k\pi \right]$$

tale restrizione è strettamente crescente o decrescente a seconda che k sia pari o dispari. Inoltre il codominio di tali restrizioni è l'intervallo $[-1,1]$.

Pertanto di tali restrizioni si può considerare l'inversa che sarà definita in $[-1,1]$.
Chiameremo *funzione arcoseno* la funzione inversa della restrizione della funzione seno all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$;

$$\text{arcsen} : x \in [-1,1] \to y = \text{arcsen}x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

dove y è l'unico valore dell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ tale che

$$\text{sen } y = x .$$

Quindi

$$\text{sen } (\text{arcsen } x) = x$$

ma

$$\text{arcsen } (\text{sen } x) = x \quad \text{se e solo se } x \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Ad esempio

$$\text{arcsen } (\text{sen } 3\pi) = 0$$

La funzione arcoseno è ovviamente strettamente crescente e si ha:

$$\max_{x \in [-1,1]} \text{arcsen } x = \frac{\pi}{2}, \qquad \min_{x \in [-1,1]} \text{arcsen}x = -\frac{\pi}{2} .$$

L'andamento del grafico della funzione arcoseno è illustrato nella fig. 20.
Analogamente si definiscono le funzioni *arcocoseno* ed

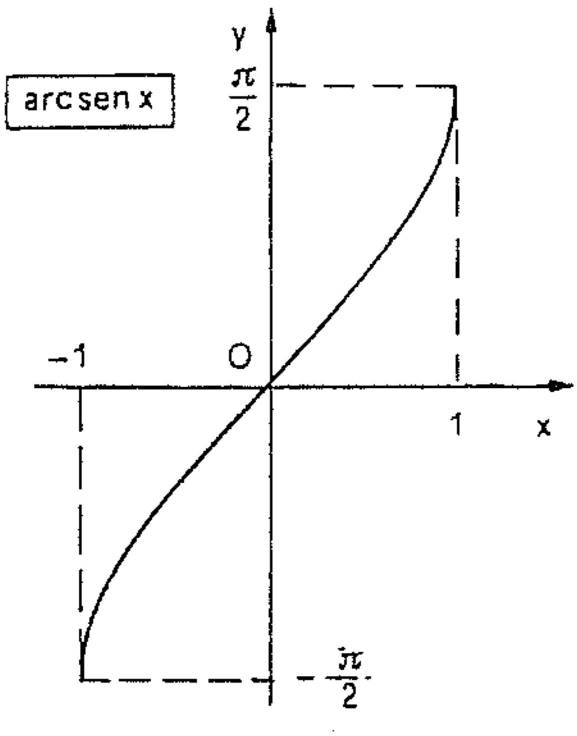


Fig. 20

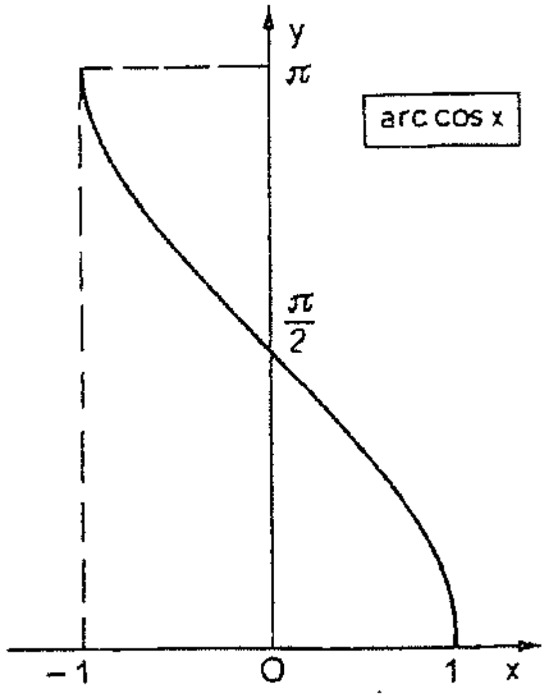


Fig. 21

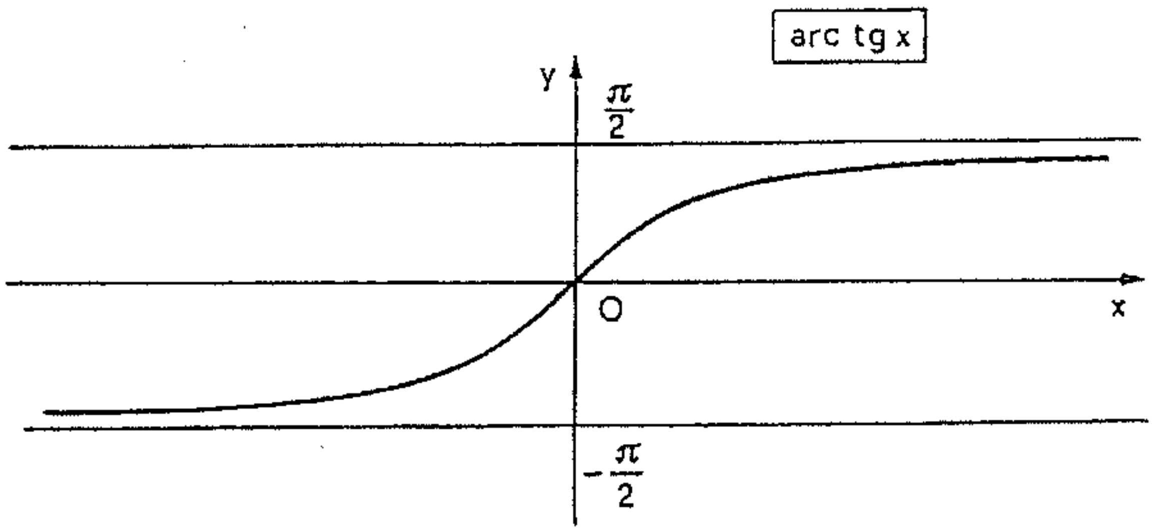


Fig. 22

arcotangente rispettivamente come funzione inversa della restrizione della funzione coseno all' intervallo $[0,\pi]$ e della funzione tangente all'intervallo $]-\pi/2, \pi/2[$:

$$\arccos : x \in [-1,1] \to \arccos x \in [0,\pi]$$

$$\operatorname{arctg} : x \in R \to \operatorname{arctg} x \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

La funzione arcocoseno è strettamente decrescente, la funzione arcotangente è strettamente crescente; inoltre:

$$\max_{x \in [-1,1]} \arccos x = \pi , \qquad \min_{x \in [-1,1]} \arccos x = 0$$

$$\sup_{x \in R} \operatorname{arctg} x = \pi/2 , \qquad \inf_{x \in R} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$$

L'andamento dei grafici delle funzioni arcocoseno ed arcotangente sono illustrati nelle figure 21 e 22.

Complementi ed esercizi

6.1 Provare che

a) $\operatorname{arcsen} x > 0 \iff x \in]0,1]$

b) $\arccos x \leq \pi/2 \iff x \in [0,1]$

c) $\operatorname{arctg} x \geq \frac{\pi}{4} \iff x \in [1,+\infty[$

d) $16 \operatorname{arcsen}^2 x - \pi^2 \leq 0 \iff x \in [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$

e) $\operatorname{arctg}^2 x - 16 \leq 0 \iff x \in R$

§ 7 - Esercizi di ricapitolazione

Determinare il più grande sottoinsieme di R (*campo di esistenza*) in cui sono definite le seguenti funzioni composte:

$\arcsin \log_{\frac{1}{2}} x$ $([1/2,2])$, $\sqrt{\operatorname{sen} x}$ $(\bigcup_{k\in Z} [2K\pi,(2K+1)\pi])$

$\log_2 \cos x$ $(\bigcup_{k\in Z}]-\frac{\pi}{2}+2K\pi, \frac{\pi}{2}+2K\pi[)$, $\operatorname{arctg}\log_3 x$ $(]0,+\infty[)$, $(\operatorname{tg}x)^{\pi}$ $(\bigcup$ $(]2K\pi, 2K\pi+\frac{\pi}{2}[\cup](2K+1)\pi,$

$(2K+1)\pi+\frac{\pi}{2}[$ $)$, $\arccos(2^x-2)$ $([0,\log_2 3])$,

$\log_5 \log_{1/4} x$ $(]0,1[)$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}$ $(R-\{\pi/2+2K\pi\}_{K\in Z})$

$\sqrt{\operatorname{arctg}x}$ $([0,+\infty[)$,

$\log(|x|-2)$ $(]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[)$, $\dfrac{2^x-3}{5^x-4}$ $(R-\{\log_5 4\})$

$\arcsin(|x|-3)$ $([-4,-2]\cup[2,4])$, $\sqrt{\log_4(2^x+1)}$ (R)

CAPITOLO IV

CENNI DI GEOMETRIA ANALITICA DEL PIANO

§ 1 - Segmenti orientati, vettori.

Sia dato nel piano π un sistema di riferimento ortogonale Oxy. Detti A e B due punti distinti di π con il simbolo $\overrightarrow{AB}$ indicheremo il *segmento di estremi* A *e* B *orientato da* A *verso* B.

Se A=B con $\overrightarrow{AB}$ denoteremo il punto A *(segmento nullo)*. Assumeremo inoltre noto il significato delle scritture

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \quad \text{(cfr. Fig. 1,1',1")}$$

$$t\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}, \quad t \in R \ \text{(cfr. Fig.2,2')}$$

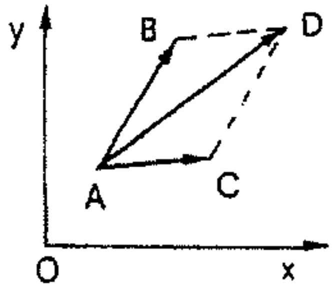


Fig. 1

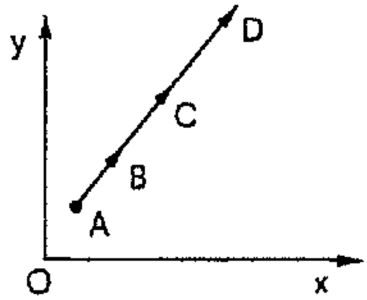


Fig. 1'

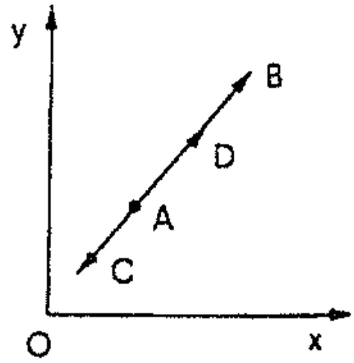


Fig. 1"

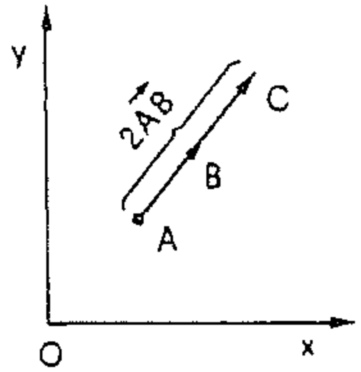


Fig.2

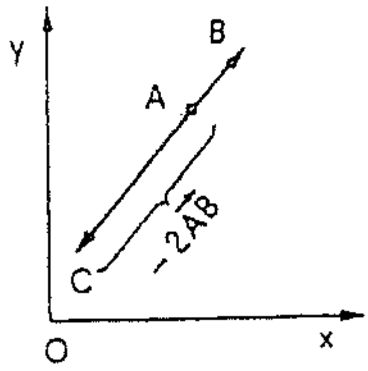


Fig.2'

Dette (x_1, y_1), (x_2, y_2) le coordinate di A e di B i numeri reali

$$x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1$$

saranno detti, rispettivamente, *prima e seconda componente di* $\overrightarrow{AB}$ (cfr. fig. 3).

Si verifica che:

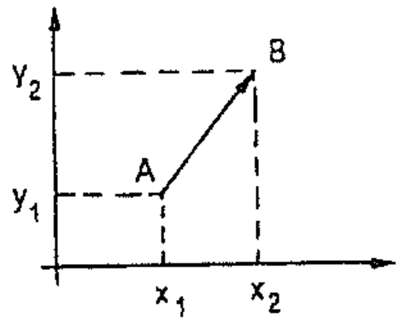


Fig. 3

i) due segmenti orientati non nulli $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ di componenti rispettivamente (a, b) ed (a', b') sono paralleli, equiversi e di egual lunghezza se e solo se

$$a = a', \quad b = b'$$

ii) due segmenti orientati non nulli $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ di componenti rispettivamente (a, b) ed (a', b') sono paralleli se e solo se esiste $t \in R - \{0\}$ tale che

$$a' = ta, \quad b' = tb;$$

in particolare segue da ii):

iii) dato un segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ di componenti (a,b) si ha l'eguaglianza:

$$\overrightarrow{AC} = t\,\overrightarrow{AB}, \quad t\in R$$

se e solo se le componenti di $\overrightarrow{AC}$ sono (ta, tb).

Ciò posto diremo *vettore* individuato da $\overrightarrow{AB}$ l'insieme dei segmenti orientati di lunghezza $|\overrightarrow{AB}|$ e che inoltre, se $A \neq B$, sono paralleli ed equiversi ad $\overrightarrow{AB}$. Un vettore sarà generalmente indicato con un simbolo del tipo $\underline{u}, \underline{v}$ etc. Il vettore individuato dal segmento nullo sarà detto *vettore nullo*.

Dato un vettore $\underline{u}$ ed un punto A del piano diremo *vettore $\underline{u}$ applicato in A* l'unico segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ che individua $\underline{u}$.

Diamo adesso alcune definizioni.

DEF. 1 - Diremo *componenti di un vettore* $\underline{u}$ le componenti di un qualunque segmento orientato che individui $\underline{u}$.

Tale definizione non è ambigua in forza di i); inoltre assegnata una coppia $(a,b)\in R\times R$ esiste uno ed un solo vettore di componenti (a,b). *E' pertanto equivalente assegnare un vettore od una coppia ordinata di numeri reali.*

DEF. 2 - Diremo che due vettori non nulli $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono *paralleli* se tali sono i vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ applicati in due punti qualunque del piano.

Si ha subito da ii)

PROP. 1 - *Due vettori non nulli* $\underline{u}$ *e* $\underline{v}$ *di componenti* (a,b) *ed* (a',b') *sono paralleli se e solo se esiste* $t \in R - \{0\}$ *tale che*

$$a' = ta, \quad b' = tb .$$

DEF. 3 - Diremo che un vettore non nullo $\underline{v}$ è parallelo ad una retta r se fissato un punto A di r il vettore $\underline{v}$ applicato in A giace su r.

DEF. 4 - Detto $\underline{u}$ un vettore di componenti (a,b) per ogni $t \in R$ indicheremo con $t\,\underline{u}$ il vettore di componenti (ta, tb).

DEF. 5 - Detti $\underline{u}$ e $\underline{v}$ due vettori di componenti (a, b) ed (a',b') indicheremo con $\underline{u} + \underline{v}$ il vettore di componenti (a+a', b+b').

E' facile verificare che detto A un qualunque punto del piano ed indicati rispettivamente con $\overrightarrow{AB}$ ed $\overrightarrow{AC}$ i vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ applicati in A si ha:

a) $t\,\underline{u}$ è il vettore individuato da $t\,\overrightarrow{AB}$

b) $\underline{u} + \underline{v}$ è il vettore individuato da $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Indichiamo inoltre con $\underline{i}$ e $\underline{j}$ i *versori degli assi coordinati* cioè i vettori che applicati nell'origine 0 del riferimento danno due segmenti di lunghezza unitaria, il primo giacente sull'asse x ed equiverso ad x, il secondo giacente sull'asse y ed equiverso ad y; detto $\underline{u}$ un vettore di componenti (a,b) si verifica che:

$$u = a\underline{i} + b\underline{j}$$

Come è naturale chiameremo *lunghezza di un vettore* $\underline{u}$ la lunghezza del vettore $\underline{u}$ stesso applicato in un qualunque punto del piano; se $\underline{u}$ ha componenti (a,b) si ha ovviamente

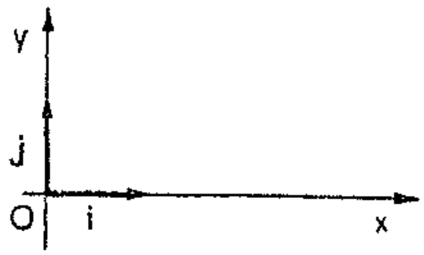


Fig. 4

$$|\underline{u}| = \text{lunghezza di } \underline{u} = \sqrt{a^2+b^2} \; .$$

Dati, ancora, due vettori $\underline{u}, \underline{v}$ di componenti (a,b) ed (a',b') si chiama *prodotto scalare di* $\underline{u}$ e $\underline{v}$ il numero reale

$$< \underline{u},\underline{v}> = aa'+bb' \; .$$

E' facile provare, e lasciamo ciò al lettore per esercizio, che se indichiamo con $\overrightarrow{AB}$ ed $\overrightarrow{AC}$ rispettivamente i vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ (supposti non nulli) applicati in un qualunque punto A del piano e diciamo $\vartheta \in [0, \pi]$ la misura in radianti dell'angolo individuato da $\overrightarrow{AB}$ ed $\overrightarrow{AC}$ si ha

$$<\underline{u},\underline{v}> = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cos \vartheta \; .$$

Pertanto $\overrightarrow{AB}$ ed $\overrightarrow{AC}$ sono ortogonali se e solo se

$$<\underline{u},\underline{v}> = 0 \; .$$

DEF.6 - Due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ non nulli si diranno ortogonali se tali sono i vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ applicati in un qualunque punto A del piano. Inoltre il vettore nullo si assume ortogonale ad ogni altro vettore.
Da quanto visto in precedenza si ha subito:

PROP.2 - *Due vettori* $\underline{u}$ *e* $\underline{v}$ *sono ortogonali se e solo se* $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$

§ 2 - Rappresentazione parametrica della retta nel piano; parallelismo e perpendicolarità.

Sia r una retta del piano ed A e B due suoi punti distinti di coordinate $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.
Detto P un punto del piano di coordinate (x, y) si ha:

(2) $P \in r \iff \exists t \in R$ tale che $\overrightarrow{AP} = t\, \overrightarrow{AB}$.

La verifica di ciò, per altro semplice, è lasciata al lettore.
Dalla iii) del n. 1 e dalla (2) segue subito che.

$$P \in r \iff \begin{cases} x - x_1 = t(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = t(y_2 - y_1) \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

Le equazioni

$$(3) \quad \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}, \quad t \in R$$

si dicono *equazioni parametriche della retta r* ed i numeri reali $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ si dicono *primo e secondo numero direttore* della retta r; pertanto i *numeri direttori di una retta r sono le componenti di un qualsiasi vettore* $\underline{u}$

non nullo e parallelo ad r. Se tale vettore $\underline{u}$ ha lunghezza unitaria le sue componenti si diranno *coseni direttori di r.*

Costruiamo una coppia di coseni direttori nel caso in cui r non sia parallela all'asse x.

A tal fine sia $A(x_1,0)$ [1] il punto di intersezione di r con l'asse x(Fig.5); sia, inoltre, $B(x_2,y_2)$ il punto di r tale che

a) $|\overline{AB}| = 1$

b) B giace nel semipiano che ha per origine l'asse x e che contiene il semiasse positivo delle y.

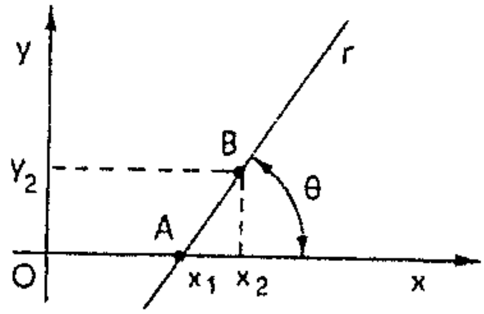


Fig. 5

E' assai facile dimostrare che detto $\vartheta\in]0,\pi[$ la misura dell'angolo formato dalla semiretta di origine A contenente B con la semiretta costituita dai punti dell'asse x che seguono A nel verso positivo si ha:

$$\cos\vartheta = x_2 - x_1 = \alpha, \qquad \operatorname{sen}\vartheta = y_2 = \beta \quad . \tag{4}$$

Tale coppia (α,β) è ovviamente una coppia di coseni direttori di r.
Nel caso in cui r è parallela all'asse x una coppia di coseni direttori è data da (1,0); tale coppia può pensarsi ottenuta ponendo $\vartheta=0$ nelle (4).
Utilizzando ancora le notazioni di (4) i numeri

$$-\alpha = \cos(\vartheta+\pi), \quad -\beta = \operatorname{sen}(\vartheta+\pi)$$

---

(1) La scrittura P(x,y) sta ad indicare che il punto P ha coordinate (x,y).

danno ancora una coppia $(-\alpha, -\beta)$ di coseni direttori di r. Essi si ottengono, come è ovvio, con lo stesso procedimento seguito per determinare α e β ma scegliendo B nel semipiano delle y negative.
Lasciamo al lettore il compito di verificare che:
a e b sono numeri direttori della retta r se e solo se:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \alpha, \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \beta$$

oppure

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\alpha, \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\beta$$

dove α e β sono i coseni direttori di r dati da (4).
Dimostriamo adesso due condizioni necessarie e sufficienti affinchè due rette siano parallele o perpendicolari.

PROP. 3 - *Se r ed r' sono due rette di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x_2 + a't \\ y=y_2 + b't \end{cases}$$

esse sono parallele se e solo se vale la condizione di *parallelismo*

$$(5) \qquad ab' - a'b = 0 .$$

Osserviamo innanzitutto che la condizione (5) (tenuto conto che $(a,b) \neq (0,0)$, $(a',b') \neq (0,0)$[2]) è equi

---

(2) Ricorda che i numeri direttori di una retta, essendo le componenti di un vettore non nullo, non possono annullarsi entrambi.

valente alla seguente:

(6) esiste $\sigma \in R-\{0\}$ tale che $a = \sigma a'$, $b=\sigma b'$.

Che la (6) implichi la (5) è banale; viceversa se vale la (5) supponiamo, per fissare le idee, $b' \neq 0$; si ha allora dividendo per b':

$$a = \frac{b}{b'} \cdot a'$$

e quindi la (6) con $\sigma = b/b'$.

Ciò premesso se r ed r' sono parallele tali saranno i due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ di componenti (a,b) ed (a',b') . La (6) segue allora dalla prop. 1. In modo analogo partendo dalla (6) si ricava che r ed r' sono parallele.

PROP. 4 - *Due rette* r *ed* r' *di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{cases} , \qquad \begin{cases} x = x_2 + a't \\ y = y_2 + b't \end{cases}$$

sono perpendicolari se e solo se vale la condizione di perpendicolarità:

$$aa' + bb' = 0 . \tag{7}$$

L'asserto segue dalla prop. 2 osservando che r ed r' sono ortogonali se e solo se sono tali i due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ di componenti (a,b) ed (a',b').

§ 3 - Equazione della retta in forma implicita.

Sia data una retta r.
Se essa è parallela all'asse x detto $A(x_0, y_0)$ un suo punto si ha subito che

$$(8) \qquad P(x,y)\in r \iff y=y_0 \iff y-y_0=0 .$$

Analogamente se r è parallela all'asse y detto ancora $A(x_0, y_0)$ un suo punto si ha:

$$(9) \qquad P(x,y)\in r \iff x=x_0 \iff x-x_0 = 0 .$$

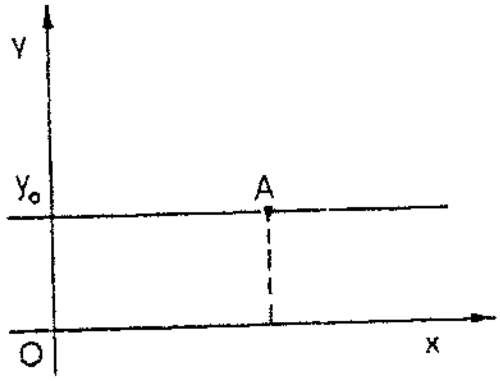


Fig. 6

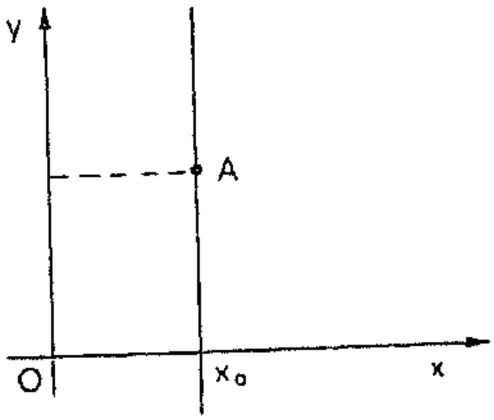


Fig. 7

Sia adesso r una retta che non sia parallela all'asse x né all'asse y e siano $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ due punti distinti di essa; per quanto visto nel n.2 le equazioni parametriche di r sono:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2-x_1) \\ y = y_1 + t(y_2-y_1). \end{cases}$$

Ricavando t da una delle due equazioni e sostituendo nell'altra si ha:

$$(10) \quad P(x,y)\in r \iff \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \iff$$

$$\iff (x_2-x_1)y-(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y_1+x_1(y_2-y_1)=0 \; .$$

In definitiva da (8), (9) e (10) segue che:
ogni retta r può essere rappresentata con un'equazione del tipo

$$(11) \qquad ax + by + c = 0$$

con $(a,b) \neq (0,0)$ e dove $(b,-a)$ è una coppia di numeri direttori di r.

Ad esempio se r è parallela all'asse x dalla (8) si ha la (11) con $a=0$, $b=1$, $c=-y_0$; così se r non è parallela agli assi coordinati dalla (10) si ha la(11) con $a=-(y_2-y_1)$, $b = x_2-x_1$, $c=(x_1-x_2)y_1+x_1(y_2-y_1)$.

Tale risultato può essere ovviamente invertito nel senso che data un'equazione del tipo (11) esiste una ed una sola retta r di numeri direttori $(b,-a)$ tale che

$$P(x,y)\in r \iff ax+by+c = 0.$$

Siano date adesso due equazioni

$$(12) \qquad ax+by+c=0 \; , \quad a'x+b'y+c' = 0$$

on $(a,b) \neq (0,0)$ ed $(a',b') \neq (0,0)$; se indichiamo on r ed r' le rette da esse rappresentate si ha:

PROP. 5 - *r coincide con r' se e solo se esiste $\alpha\in R-\{0\}$ tale che*

(13) $\qquad a=\alpha a', \quad b = \alpha b', \quad c = \alpha c'.$

Poichè $(b,-a)$ e $(b',-a')$ sono coppie di numeri direttori di r ed r' dalla prop. 1 segue subito che:

$r=r' \Rightarrow \exists \alpha \in R-\{0\}$ tale che $a=\alpha a', b=\alpha b'$.

Se fosse $c \neq \alpha c'$ si avrebbe:

$$ax+by+c=0 \Rightarrow \alpha(a'x+b'y)+c=0 \Rightarrow \alpha(a'x+b'y+c')+c-\alpha c'=0$$

$$\Rightarrow \alpha(a'x+b'y+c')=\alpha c'-c \neq 0 \Rightarrow a'x+b'y+c' \neq 0$$

e quindi le due equazioni (12) non avrebbero soluzioni in comune, cioè $r \neq r'$ e quindi un assurdo. Ne segue $c = \alpha c'$.
Analogamente si prova che la condizione (13) implica $r = r'$.
Molto utili sono anche le seguenti proposizioni:

PROP. 6 - r *ed* r' *sono parallele e distinte se e solo se esiste* $\alpha \in R - \{0\}$ *tale che*

$$a = \alpha a', \quad b = \alpha b', \quad c \neq \alpha c'.$$

PROP. 7 - r *ed* r' *sono ortogonali se e solo se*

(14) $\qquad aa' + bb' = 0$

La dimostrazione delle prop. 6 e 7 si ottiene facilmente dalle prop. 1 e 2 ricordando che $(b,-a),(b',-a')$ sono coppie di numeri direttori di r ed r'.
Se si suppone $b \neq 0$ nella (11) si ottiene

$$(15) \qquad y = mx + n$$

con $m = -a/b$, $n=-c/b$.

La (15) prende il nome di *equazione della retta in forma esplicita;* m si dice *coefficiente angolare* della retta r. Se si tiene conto che $(b,-a)$ è una coppia di numeri direttori si ha

$$m = \operatorname{tg}\theta$$

dove

a) $\theta=0$ se $a=0$, cioè se r è parallela all'asse x;

b) $\theta \in]0,\pi[- \{\pi/2\}$ se $a \neq 0$; in tal caso θ ha lo stesso significato geometrico che aveva nelle (4) (cfr. fig. 8).

Terminiamo questo paragrafo osservando che date due rette r ed r' di equazioni in forma esplicita

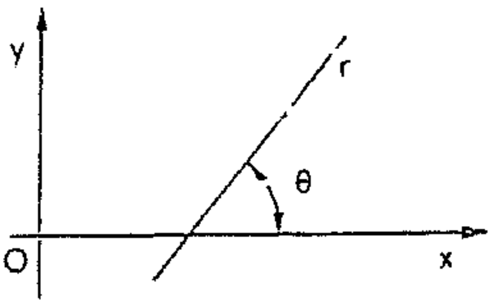


Fig. 8

$$y = mx + n, \quad y=m'x + n'$$

la condizione di parallelismo (PROP.6) si scrive

$$m = m'$$

e quella di perpendicolarità (PROP. 7)

$$mm' + 1 = 0.$$

Complementi ed Esercizi.

3.1 Scrivere le equazioni parametriche delle rette passanti per le seguenti coppie di punti

(1,2), (2,-3); (1,1), (0,-2); (2,-4), (0,-4);
(-1,2), (0,3). (1,2), (1,3) . [x=1+t, y=2-5t;
x=1-t, y=1-3t; x = 2 - 2t, y=-4; x=-1+t,y=2+t;
x=1, y=2+t].

3.2 - Tra le rette di equazione

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$$

determinare le coppie di rette parallele e quelle perpendicolari; determinare inoltre i punti d' incontro delle coppie di rette non parallele.

3.3 Date le rette r ed r' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$

scrivere le equazioni parametriche delle rette passanti per A(1,2) e parallele o perpendicolari ad r e ad r'

[x=1-t, y=2+2t; x=1+2t, y=2+t; x=1-4t, y=2+3t;
x=1+3t, y=2+4t].

3.4 - Utilizzando le (8), (9) e (10) scrivere le equazioni in forma implicita delle rette passanti per le coppie di punti date nell'esercizio 3.1.

3.5 - Scrivere le equazioni in forma implicita delle rette passanti per il punto A(2,3) e parallele o perpendicolari alle rette di equazione

$$x-2y+5=0, \quad y-3x+1=0, \quad 2x-1=0, \quad y-3=0$$

[$(x-2)-2(y-3)=0$; $-3(x-2)+(y-3)=0$; $x-2=0$; $y-3=0$; $2(x-2)+(y-3)=0$; $(x-2)+3(y-3)=0$; $y-3=0$; $x-2=0$].

3.6 - Scrivere l'equazione della perpendicolare per A(-1,0) alla bisettrice del primo e terzo quadrante [$x+y+1=0$].

3.7 - Dato il triangolo di vertici O(0,0), A(1,1), B(-2,4) determinare l'equazione della retta su cui giace la mediana relativa al lato $\overline{AO}$ [$10x-14y+36=0$]

3.8 - Determinare per quali valori del parametro $K \in R$ la retta di equazione

$$x + Ky + K-1 = 0$$

a) è parallela alla retta di equazione $x-y+1=0$

b) è ortogonale alla retta di equazione $2x+3y-5=0$

c) passa per il punto (0,0)

[$K=-1$, $K=-2/3$, $K=1$] .

3.9 - Dimostrare che la distanza del punto $A(x_o, y_o)$, dalla retta r di equazione

$$ax + by + c = 0$$

è data da

$$\frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$

3.10 - Determinare l'area del triangolo di cui allo esercizio 3.7 [3].

3.11 - Scrivere l'equazione della retta passante per A(1,1) e tale che l'asse delle x per sovrapporsi ad essa debba descrivere ruotando in senso antiorario un angolo di ampiezza

a) $\pi/3$

b) $\pi/4$

c) $\pi/6$

[$y-1=\sqrt{3}(x-1)$; $y=x$; $\sqrt{3}\,(y-1)= (x-1)$]

3.12 - Sia data *l'equazione del fascio di rette per* A(1,-1) :

$$a(x-1)+b(y+1) = 0 ;$$

per quali valori di (a,b) si ottiene

a) l'asse del segmento di estremi (-1,-1),(1,1);

b) la retta perpendicolare all'asse x;

c) la retta passante per (2,-4)

d) la retta che forma con l'asse x un angolo acuto di ampiezza $\pi/6$,

e) una retta che abbia distanza 1 dall'origine(0,0).

§ 4 - Cambiamento di riferimento nel piano.

Siano dati nel piano due sistemi di riferimento ortogonali monometrici Oxy, $O'x'y'$ che inducono come verso di rotazione positivo quello antiorario.
Supponiamo in un primo momento $O \equiv O'$.
Sia inoltre ϑ la misura dell'angolo di cui deve ruotare il semiasse positivo delle x per sovrapporsi al semiasse positivo delle x'.
Diciamo ancora $\underline{i}'$ ed $\underline{j}'$ i versori degli assi coordinati x' ed y'.
Ovviamente $\underline{i}'$ ed $\underline{j}'$ avranno nel riferimento Oxy rispettivamente componenti $(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$, $(-\operatorname{sen}\vartheta, \cos\vartheta)$.
Indicato adesso con P un punto generico del piano siano (x,y) ed (x',y') le sue coordinate nei due sistemi di riferimento.

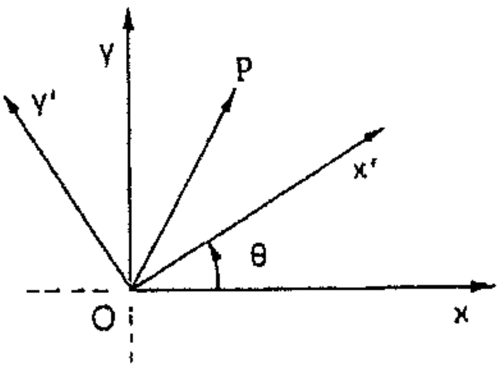


Fig. 9

Dalla relazione

$$\overrightarrow{OP} = x'\underline{i}' + y'\underline{j}'$$

(dove $\underline{i}'$ e $\underline{j}'$ si intendono applicati in O), indicati con $\underline{i}$ e $\underline{j}$ i versori degli assi coordinati x e y (applicati in O) si ha:

$$x\underline{i} + y\underline{j} = \overrightarrow{OP} = x'(\cos\vartheta\,\underline{i}+\operatorname{sen}\vartheta\,\underline{j})+y'(-\operatorname{sen}\vartheta\,\underline{i}+\cos\vartheta\,\underline{j})$$

$$=(x'\cos\vartheta-y'\operatorname{sen}\vartheta)\underline{i} + (x'\operatorname{sen}\vartheta+y'\cos\vartheta)\underline{j}$$

e quindi

$$(16)\quad \begin{cases} x = x'\cos\vartheta-y'\operatorname{sen}\vartheta \\ y = x'\operatorname{sen}\vartheta+y'\cos\vartheta \end{cases}$$

o, in forma equivalente,

$$(17)\quad \begin{cases} x'=x\cos\vartheta+y\operatorname{sen}\vartheta \\ y'=-x\operatorname{sen}\vartheta+y\cos\vartheta . \end{cases}$$

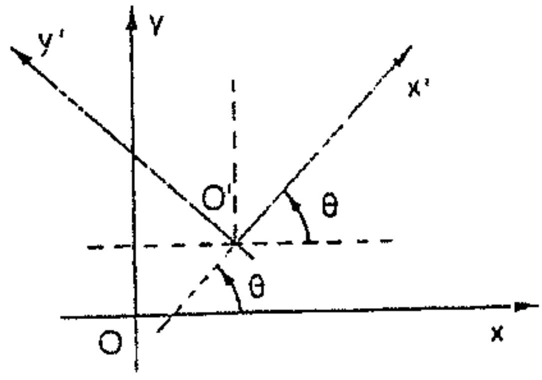


Fig. 10

Le (16) e (17) si dicono le *equazioni del cambiamento di riferimento* (*rotazione* di un angolo di ampiezza ϑ).
Se invece O è diverso da O', dette (x'_0, y'_0) le coordinate di O' nel riferimento Oxy ed (x_0, y_0) le coordinate di O nel riferimento Ox'y', le equazioni del cambiamento di riferimento si scrivono

$$(18)\quad \begin{cases} x=x'_0+x'\cos\vartheta-y'\operatorname{sen}\vartheta \\ y=y'_0+x'\operatorname{sen}\vartheta+y'\cos\vartheta \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=x_0+x\cos\vartheta+y\operatorname{sen}\vartheta \\ y'=y_0-x\operatorname{sen}\vartheta+y\cos\vartheta . \end{cases}$$

dove ϑ ha lo stesso significato che aveva nelle (16) e (17)(Fig. 10).

§ 5 - Luoghi del piano

A - La circonferenza

Sia dato nel piano π un sistema di riferimento ortogonale Oxy ; detto $P_o(x_o,y_o)$ un punto di π ed r un numero positivo, la circonferenza di centro P_o e raggio r è l'insieme

$$\Gamma=\{P(x,y)\in\pi\ :\ |\overline{PP_o}| = r\}\ .$$

Pertanto

$$P(x,y)\in\Gamma \iff (x-x_o)^2+(y-y_o)^2 = r^2$$

cioè $P(x,y)$ appartiene a Γ se e solo se:

$$x^2+y^2-2x_ox-2y_oy+x_o^2+y_o^2-r^2=0 \ . \tag{19}$$

La (19) dicesi *equazione della circonferenza di centro P_o e raggio r.*
Sia data adesso un'equazione

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0 \ . \tag{20}$$

Ci chiediamo sotto quale ipotesi l'insieme dei punti del piano le cui coordinate sono soluzioni della (20) è una circonferenza; in breve ci chiediamo sotto quali ipotesi la (20) rappresenta una circonferenza.
All'uopo osserviamo che aggiungendo e sottraendo $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}$ la (20) si riscrive

$$\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} = 0 . \tag{21}$$

Se supponiamo $\gamma < \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}$ e poniamo

$$r^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma \ , \quad x_0 = -\frac{\alpha}{2} \ , \ y_0 = -\frac{\beta}{2}$$

la (21) diventa

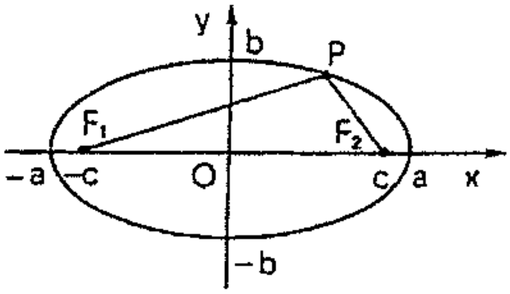
$$|PP_0|^2 = r^2$$

dove P_0 è il punto di coordinate (x_0, y_0) e P quello di coordinate (x,y); pertanto in definitiva si ha:

sotto la condizione $\gamma < \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}$ *la (20) è l'equazione della circonferenza di centro* $P_0(x_0, y_0)$ *e raggio r.*

B - L'ellisse

Siano F_1 $(-c,0)$, $F_2(c,0)$, con $c > 0$, due punt dell'asse x. Fissato un numero positivo $a>c$ si dirà *ellisse* l'insieme dei punti $P(x,y)$ del piano tali che



$$(22) \qquad |\overline{PF}_1| + |\overline{PF}_2| = 2a \ .$$

Osserviamo esplicitamente che se fosse $a < c$ tale insieme si ridurrebbe all'insieme vuoto. Infatti si ha per ogni P

$$2c=|F_1F_2| \leq |F_1P| + |F_2P| = 2a \ .$$

Se fosse invece a=c l'insieme si ridurrebbe al segmento F_1F_2.

Ciò posto la (22) si scrive

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \iff$$

$$\iff \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \ .$$

Elevando al quadrato ambo i membri si ha facilmente

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

e da qui elevando ancora al quadrato

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \ .$$

Posto $a^2-c^2 = b^2$ si ha in definitiva

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{23}$$

e la (23) si dice *equazione (canonica) dell'ellisse*.

I punti F_1 ed F_2 si dicono *fuochi* dell'ellisse, i numeri a e b *semiassi* (a = semiasse maggiore, b = semiasse minore).

C - L'iperbole

Consideriamo ancora sull'asse x due punti $F_1(-c, 0)$, $F_2(c,0)$ con $c > 0$; sia inoltre a un numero reale tale che

$$0 < a < c.$$

Dicesi *iperbole* l'insieme dei punti P(x,y) del piano tali che

$$\left| |\overline{PF}_1| - |\overline{PF}_2| \right| = 2a$$

I punti F_1 ed F_2 si dicono *fuochi*.
Procedendo in modo analogo al caso dell'ellisse si perviene alla seguente equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{24}$$

dove $b^2 = c^2 - a^2$. La (24) dicesi *equazione (canonica) dell'iperbole.*
Se si osserva che per $|x| < a$ l'equazione (24) non ha soluzioni mentre per $|x| \geq a$ ha sempre soluzione si ricava che l'iperbole è formata da "due rami" lo uno giacente nel semipiano $x \leq -a$, l'altro nel semipiano $x \geq a$.

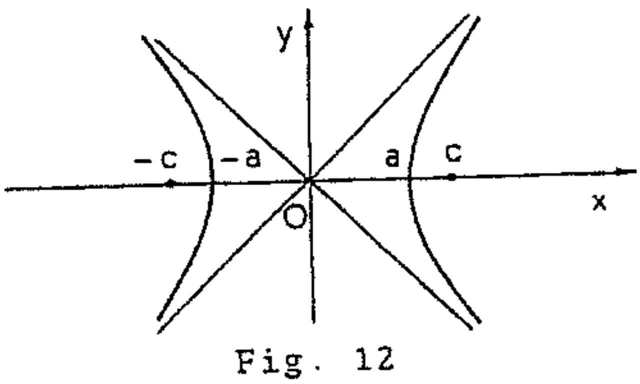


Fig. 12

I punti $(a,0)$, $(-a,0)$ si dicono *vertici dell'iperbole*. Si lascia al lettore la verifica del fatto che una retta di equazione $y = mx$ interseca l'iperbole se e solo se

$$-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a} .$$

Le rette $y = \pm \frac{b}{a} x$ si dicono *asintoti*.

Nel caso particolare $b = a$ (*iperbole equilatera*) l'equazione (24) si scrive:

$$x^2 - y^2 = a^2 ;$$

se si effettua una rotazione del piano di un angolo, di ampiezza $\frac{7}{4}\pi$ indicate con X, Y le coordinate del generico punto del piano nel nuovo sistema di coordinate l'equazione (24), facendo uso delle (17) diviene

$$XY = \frac{a^2}{2} .$$

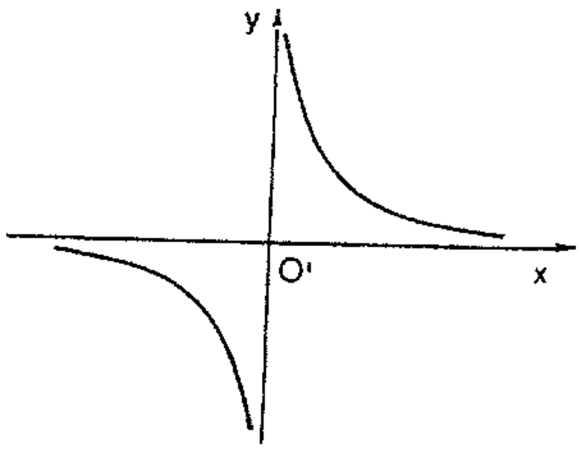


Fig. 13

Un ulteriore notevole esempio di luogo geometrico, *la parabola,* sarà studiato in un capitolo successivo.

Complementi ed esercizi.

5.1 - Scrivere le equazioni delle circonferenze i cui centri ed i cui raggi sono

$$(0,0),\ 1; \quad (1,-1),\ 2; \quad (0,-3),\ 1/2.$$

$$[x^2+y^2=1;\ x^2+y^2-2x+2y-2=0;\ x^2+y^2+6y+35/4=0]$$

5.2 - Stabilire se vi sono punti di intersezione tra la circonferenza di equazione

$$x^2+y^2-2x+2y+1 = 0$$

e le rette di equazione

$$y+1=0,\ y-x=0,\ y+x=0,\ y=0$$

$[(0,-1),(2,-1);\text{nessuno};(\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ \frac{-2-\sqrt{2}}{2}),(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\frac{-2+\sqrt{2}}{2})$
$(1,0)]$

5.3 - Scrivere l'equazione della retta passante per il punto (2,0) e tangente alla circonferenza di equazione

$$x^2+y^2-1 = 0$$

$$[y=\pm 1/\sqrt{3}(x-2)]\ .$$

5.4 - Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti (0,0), (0,3), (4,0).

$$[x^2+y^2-4x-3y = 0]$$

5.5 - Scrivere l'equazione della circonferenza di centro (2,4) e tangente all'asse x .

$$[x^2+y^2-4x-8y+4=0]$$

5.6 - Per quali valori di K la retta di equazione

$$y = Kx$$

non ha punti in comune con la circonferenza di equazione

$$x^2+y^2-4x+3 = 0 \ ?$$

$$[K \in]-\infty, -1/\sqrt{3}[\cup]1/\sqrt{3}, +\infty[\ ]$$

5.7 - Scrivere l'equazione dell'ellisse di fuochi $F_1(-3,0)$, $F_2(3,0)$ e semiasse maggiore 5.

$$[\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1]$$

5.8 - Scrivere l'equazione dell'iperbole di fuochi $F_1(-3,0)$ $F_2(3,0)$ e vertici (-1,0), (1,0).

$$[x^2 - \frac{y^2}{8} = 1]$$

5.9 Scrivere l'equazione dell'iperbole di vertici (-2,0) (2,0) e passante per il punto (3,3).

$$\left[\frac{x^2}{4} - \frac{5y^2}{36} = 1 \right]$$

5.10 - Scrivere l'equazione dell'iperbole di vertici (-1,0), (1,0) ed asintoti $y = \pm 2x$.

$$\left[x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \right]$$

5.11 - Scrivere l'equazione dell'ellisse di semiasse minore 1 e passante per il punto (1,1/2).

$$\left[\frac{3x^2}{4} + y^2 = 1 \right]$$

CAPITOLO V

CENNI DI ALGEBRA LINEARE

§ 1 - Vettori numerici

Sia $n \in N$. Un elemento di R^n, cioè una ennupla di numeri reali, sarà detto *vettore numerico*.
Dati due vettori numerici $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$ si definisce un'operazione interna in R^n ponendo

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n) .$$

E' facile verificare che valgono le seguenti proprietà

i) $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$ $\qquad \underline{x}, \underline{y} \in R^n$

ii) $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$ $\qquad \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in R^n$.

Posto poi

$$\underline{0} = (0,0,\ldots,0)$$

si ha che $\underline{0}$ (*vettore nullo*) è l'elemento neutro rispetto all'operazione di somma; inoltre esiste il simmetrico di ogni elemento $\underline{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ di R^n ed è dato da

$$-\underline{x} = (-x_1,\ldots,-x_n) \ .$$

E' possibile definire in R^n anche un'*operazione esterna* cioè un'applicazione che indicheremo con "$\cdot$" di $R\mathrm{x}R^n$ in R^n:

$$(\alpha,\underline{x})\in R \times R^n \to \alpha \cdot \underline{x} \in R^n$$

dove

$$\alpha \cdot \underline{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) .$$

Di facile verifica sono le seguenti proprietà

iii) $\alpha\cdot(\underline{x}+\underline{y})= \alpha\cdot\underline{x}+\alpha\cdot\underline{y}$, $\alpha\in R$, $\underline{x},\underline{y}\in R^n$

iv) $(\alpha+\beta)\cdot\underline{x}= \alpha\cdot\underline{x} + \beta\cdot\underline{x}$, $\alpha,\beta\in R, \underline{x}\in R^n$

v) $(\alpha\ \beta)\cdot\underline{x}= \alpha\cdot(\beta\cdot\underline{x})$, $\alpha,\beta\in R, \underline{x}\in R^n$

vi) $(1\cdot\underline{x})= \underline{x}$, $\underline{x}\in R^n$

Si dice anche che rispetto alle operazioni (interna) di somma e (esterna) di prodotto R^n è uno *spazio vet-*

toriale su R.
Precisiamo esplicitamente che per non appesantire la trattazione abbiamo indicato con il simbolo "+" sia l ' operazione di somma in R^n che quella in R.

I vettori numerici nei casi n=2 ed n=3 hanno una espressiva quanto semplice interpretazione geometrica.
Sia, ad esempio, n=2 e sia V l'insieme dei vettori di un piano π in cui sia stato introdotto un sistema di riferimento cartesiano ortogonale; consideriamo l'applicazione ϕ di V su R^2 che fa corrispondere ad un vettore $\underline{v} \in V$ la coppia (a,b) delle sue componenti (cfr. Cap. IV n. 1); ovviamente ϕ è biunivoca ed inoltre

$$\begin{cases} \phi\,(\underline{u}+\underline{v}) = \phi(\underline{u}) + \phi(\underline{v}) & \underline{u},\underline{v}\in V \\ \phi\,(\alpha\cdot\underline{v}) = \alpha\cdot\phi(\underline{v}) & a\in R, \underline{v}\in V\ . \end{cases}$$

E' pertanto naturale identificare V ed R^2.
Dati adesso $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n)$ ed $\underline{y} = (y_1,\dots,y_n)$ in R^n, in analogia al caso dei vettori del piano, si chiama *prodotto scalare* tra $\underline{x}$ ed $\underline{y}$ il numero reale

$$< \underline{x}, \underline{y} > = \sum_{i=1}^{n} x_i\ y_i\ .$$

E' evidente che

(1) $< \underline{x}, \underline{y} > = < \underline{y}, \underline{x} >$

(2) $< \alpha\cdot\underline{x},\underline{y} > = \alpha < \underline{x}, \underline{y} >$

(3) $< \underline{x}, \underline{y} + \underline{z} > = < \underline{x},\underline{y} > + <\underline{x},\underline{z}>$

(4) $< \underline{x},\underline{x} > > 0$ se $\underline{x} \neq \underline{0}$

dove al solito $\underline{x},\underline{y},\underline{z}$ sono vettori numerici ed α è un numero reale.
Si chiama inoltre *lunghezza* o *modulo* di un vettore $\underline{x}=(x_1,\dots,x_n)$ il numero reale non negativo

$$|\underline{x}| = \sqrt{<\underline{x},\underline{x}>} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} .$$

Sussistono le seguenti diseguaglianze

(5) $|<\underline{x},\underline{y}>| \leq |\underline{x}|\cdot|\underline{y}|$ (diseguaglianza di Cauchy)

(6) $|\underline{x}+\underline{y}| \leq |\underline{x}| + |\underline{y}|$ (" triangolare)

con $\underline{x},\underline{y} \in R^n$.
Dimostriamo la (5). Per ogni $\alpha\in R$ si ha per (1)-(4):

$$0 \leq <\underline{x}+\alpha\cdot\underline{y},\underline{x}+\alpha\cdot\underline{y}> = <\underline{x},\underline{x}> + \alpha^2 <\underline{y},\underline{y}> + 2\alpha <\underline{x},\underline{y}> ;$$

poichè il polinomio di secondo grado in α

$$\alpha^2|\underline{y}|^2 + 2\alpha <\underline{x},\underline{y}> + |\underline{x}|^2$$

non assume mai valori negativi il suo discriminante, sarà minore od eguale a zero e quindi

$$<\underline{x},\underline{y}>^2 - |\underline{x}|^2\cdot|\underline{y}|^2 \leq 0$$

da cui la (5).

La (6) si ottiene poi dalla (5) come segue:

$$|\underline{x}+\underline{y}|^2 = <\underline{x}+\underline{y},\ \underline{x}+\underline{y}> = |\underline{x}|^2+2<\underline{x},\underline{y}>+ |\underline{y}|^2$$

$$\leq \text{(per la (5))}\ |\underline{x}|^2+ 2|\underline{x}|\,|\underline{y}|+|\underline{y}|^2=(|\underline{x}|+|\underline{y}|)^2$$

e quindi l'asserto.

§ 2 - Basi ortonormali di R^n.

In analogia al caso dei vettori del piano diamo la seguente

DEF. 1 - Due vettori numerici $\underline{x}$ ed $\underline{y}$ si diranno *ortogonali* se

$$< \underline{x},\underline{y} > = 0 .$$

Inoltre:

DEF. 2 - Una k-pla $\{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_k\}$ di vettori numerici , (con $k \leq n$) si dirà *un sistema ortonormale se:*

$$<\underline{x}_i\ ,\ \underline{x}_j> = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

In altri termini un sistema è ortonormale se i vettori che lo compongono sono di lunghezza unitaria ed a due a due ortogonali.

DEF. 3 - Un sistema ortonormale di n vettori numerici si dirà una *base ortonormale di* R^n.

$$\underline{e}_1 = (1,0,\ldots,0),\ \underline{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ldots,\underline{e}_n = (0,0,\ldots 1)$$

si ottiene una base ortonormale di R^n detta *base canonica*.
Ovviamente se $\underline{x} = (x_1,\ldots x_n)$ si ha

$$\underline{x} = x_1 \cdot \underline{e}_1 + x_2 \cdot \underline{e}_2 + \ldots + x_n \cdot \underline{e}_n$$

ed inoltre

$$x_i = \langle \underline{x}, \underline{e}_i \rangle .$$

Più in generale si può provare che data una base ortonormale $\{\underline{h}_1, \underline{h}_2,\ldots,\underline{h}_n\}$ vale la seguente

PROP. 1 - *Ogni vettore* $\underline{x}$ *di* R^n *può essere scritto nella forma*

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \underline{x}, \underline{h}_i \rangle \cdot \underline{h}_i . \tag{7}$$

Il numero reale

$$x'_i = \langle \underline{x}, \underline{h}_i \rangle \quad (i=1\ldots n) \tag{8}$$

si dice la *componente i-esima di* $\underline{x}$ *nella base* $\{\underline{h}_1,\ldots,\underline{h}_n\}$.

Di tale proposizione omettiamo per brevità la dimostrazione. Per terminare il paragrafo dimostriamo invece la seguente

PROP. 2 - *Data una base ortonormale* $\{\underline{h}_1,\ldots \underline{h}_n\}$ *ogni* *vettore* $\underline{x} \in R^n$ *si scrive in un sol modo nella forma* (7).

Dobbiamo dimostrare che se vale un' eguaglianza del tipo

$$(9) \qquad \underline{x} = \alpha_1 \cdot \underline{h}_1 + \ldots + \alpha_n \cdot \underline{h}_n$$

con $\alpha_i \in R$ $i=1\ldots n$, si ha necessariamente

$$\alpha_i = x'_i = \langle \underline{x}, \underline{h}_i \rangle ;$$

moltiplicando scalarmente ambo i membri della (9) per $\underline{h}_i$ ed usando le proprietà del prodotto scalare si ha:

$$x'_i = \langle \underline{x}, \underline{h}_i \rangle = \alpha_1 \cdot \langle \underline{h}_1, \underline{h}_i \rangle + \ldots + \alpha_i \cdot \langle \underline{h}_i, \underline{h}_i \rangle + \ldots + \alpha_n \cdot \langle \underline{h}_n, \underline{h}_i \rangle =$$
$$= \alpha_1 \cdot 0 + \ldots + \alpha_i \cdot 1 + \ldots + \alpha_n \cdot 0 = \alpha_i$$

e quindi l'asserto.

§ 3 - Trasformazioni lineari e matrici

Siano n ed m interi positivi.

Consideriamo un'applicazione L di R^n in R^m :

$$L : \underline{x} \in R^n \to L\underline{x} \in R^m .$$

DEF. 4 - Si dice che L è una *trasformazione lineare* (di R^n in R^m) se risulta

$$L(\alpha\cdot\underline{x}+\beta\cdot\underline{y}) = \alpha\cdot L\underline{x}+\beta\cdot L\underline{y} \tag{10}$$

per ogni $\underline{x},\underline{y}\in R^n$ e per ogni $\alpha,\beta\in R$.

Ovvie conseguenze della (10) sono:

i) L trasforma il vettore nullo di R^n nel vettore nullo di R^m.

Infatti

$$L\underline{0} = L(0\cdot\underline{0}) = 0\cdot L\underline{0} = \underline{0} .$$

ii) Se $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_k$ sono k vettori di R^n ed $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ k numeri reali si ha

$$L\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot\underline{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot L\underline{x}_i . \tag{11}$$

La (11) si ottiene dalla (10) per induzione e viene lasciata al lettore per esercizio.

Un esempio di trasformazione lineare si ottiene subito assegnando n·m numeri reali a_{ij} $i=1\dots m$, $j=1\dots n$ e ponendo

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 +\dots+ a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 +\dots+ a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = a_{m1}x_1 +\dots+ a_{mn}x_n . \end{cases} \tag{12}$$

L'applicazione L così definita

$$L:\underline{x}=(x_1,\dots,x_n)\in R^n \to L\underline{x}=(y_1,\dots,y_m)\in R^m$$

è ovviamente una trasformazione lineare da R^n in R^m.
In realtà le trasformazioni del tipo (12) *sono "tutte" le trasformazioni lineari di* R^n *in* R^m.

Infatti se L è una trasformazione lineare di R^n in R^m indichiamo con $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ ed $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ le basi canoniche di R^n ed R^m.
Per ogni $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ si ha dalla (11):

$$(13) \qquad \underline{y} = L\underline{x} = L\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \underline{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot L\, \underline{e}_i .$$

Diciamo $(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi})$ le componenti del vettore $L\,\underline{e}_i$ nella base $(\underline{\eta}_1, \dots, \underline{\eta}_m)$; si ha allora (cfr.(7))

$$L\,\underline{e}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, \underline{\eta}_j$$

e quindi dalla (13):

$$(14) \qquad \underline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} \underline{\eta}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i\right) \underline{\eta}_j .$$

D'altro canto se poniamo

$$\underline{y} = (y_1, \dots, y_m)$$

si ha anche

$$\underline{y} = \sum_{j=1}^{m} y_j\, \underline{\eta}_j .$$

Da qui, dalla (14) e dalla prop. 2 segue

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$$

e cioè *le componenti* (y_j) *del vettore* $L\underline{x}$ *sono legate alle componenti* (x_i) *del vettore* $\underline{x}$ *dalle formule* (12).

Da quanto visto segue che assegnare una trasformazione lineare

$$L : \underline{x} \in R^n \to L\underline{x} \in R^m$$

è equivalente ad assegnare una tabella del tipo

$$(15) \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Una tabella A del tipo (15) è detta *matrice ad m righe ed n colonne*, o più brevemente *matrice di tipo* $[m,n]$ e si indica spesso con il simbolo

$$A = (a_{ij}) .$$

E' chiaro che se si identificano, come noi faremo, le trasformazioni lineari con le matrici è necessario tradurre le operazioni classiche tra trasformazioni in operazioni tra matrici.
Ad esempio se L_1 ed L_2 sono due trasformazioni lineari di R^n in R^m ha senso considerare la trasformazione somma:

$$(L_1+L_2)(\underline{x}) = L_1 \underline{x} + L_2 \underline{x} ;$$

è allora naturale definire la *somma di due matrici* di tipo [m,n] $A_1 = (a'_{ij})$, $A_2 = (a''_{ij})$ come segue

$$A_1 + A_2 = (a'_{ij} + a''_{ij}) \quad .$$

In modo analogo si definisce il *prodotto di una matrice* (di tipo [m,n]) $A=(a_{ij})$ *per un numero reale* α :

$$\alpha \cdot A = (\alpha a_{ij}) \quad .$$

Ad esempio se

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

allora

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 2\alpha & -\alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che

i) $A_1 + A_2 = A_2 + A_1$

ii) $\alpha(A_1 + A_2) = \alpha A_1 + \alpha A_2$

iii) $(\alpha+\beta)A_1 = \alpha A_1 + \beta A_1$.

Inoltre se A è una matrice di tipo [m,n]

$$A + \underline{0} = A$$

dove $\underline{0}$ è *la matrice nulla* di tipo [m,n], cioè

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} .$$

Siano adesso L ed M due trasformazioni lineari

$$L : \underline{x}=(x_1,\dots,x_n) \in R^n \rightarrow \underline{y}=(y_1,\dots,y_m) \in R^m \text{ con}$$

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$$

$$M : \underline{y}=(y_1,\dots,y_m) \in R^m \rightarrow \underline{z} = (z_1,\dots,z_k) \in R^k \text{ con}$$

$$z_h = \sum_{j=1}^{m} b_{hj} y_j .$$

Ha senso, in tal caso, considerare la trasformazione composta

$$N=M \circ L : \underline{x} \in R^n \rightarrow N\underline{x}=M(L\underline{x}) \in R^k .$$

Posto:

$$\underline{z} = (z_1,\dots,z_k) = N\underline{x}$$

si ha allora

$$z_h = \sum_{j=1}^{m} b_{hj} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} b_{hj} a_{ji} \right) x_i = \sum_{i=1}^{n} c_{hi} x_i \quad ;$$

ne segue che la trasformazione $M \circ L$ è individuata dalla matrice (c_{hi}) di tipo $[k,n]$ con

(16) $$c_{hi} = \sum_{j=1}^{m} b_{hj} a_{ji} \quad ;$$

In sostanza la matrice $C = (c_{hi})$ è stata ottenuta dalle matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ eseguendo il cosiddetto *prodotto righe per colonne*.

E' pertanto naturale date una matrice $B=(b_{ij})$ di tipo $[k,m]$ ed una matrice $A = (a_{ij})$ di tipo $[m,n]$ definire *prodotto (righe per colonne) di* B *per* A la matrice di tipo $[k,n]$

$$B \cdot A = (c_{hi})$$

con c_{hi} dato dalla (16).

Osserviamo esplicitamente che indicato con $\underline{b}_h$ il vettore di R^m i cui elementi sono quelli della h-esima riga di B e con $\underline{a}^i$ il vettore di R^m i cui elementi sono quelli della i-esima colonna di A riesce[(1)].

$$c_{hi} = \langle \underline{b}_h , \underline{a}^i \rangle .$$

---

(1) $\underline{b}_h$ si chiama vettore riga, $\underline{a}^i$ vettore colonna.

Particolare interesse hanno le matrici di tipo [n,n] cioè con un egual numero di righe e di colonne. Tali matrici diconsi *quadrate di ordine n.*
Osserviamo subito che se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine (e solo in questo caso) ha senso calcolare sia $A \cdot B$ che $B \cdot A$ ma in generale

$$A \cdot B \neq B \cdot A \ .$$

Diremo *matrice identica di ordine n* la matrice quadrata di ordine n così definita:

$$I_n = \begin{pmatrix} 10 & \dots & 00 \\ 01 & \dots & 00 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 00 & \dots & 10 \\ 00 & \dots & 01 \end{pmatrix} .$$

Tale matrice individua, ovviamente, la trasformazione identica di R^n in sé:

$$I_n : \underline{x} \in R^n \rightarrow \underline{x} \in R^n .$$

E' un semplice esercizio verificare che se A è una matrice quadrata di ordine n:

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A \ .$$

Ci poniamo ora il seguente problema : *data una matrice quadrata* A *di ordine n stabilire sotto quali ipotesi esiste una matrice quadrata di ordine n* A^{-1} *tale che*

(17) $$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n .$$

Quando tale matrice esiste si dirà *matrice inversa di* A ed A si dirà *invertibile*.

E' intuitivo che A^{-1} non esiste sempre poichè non tutte le trasformazioni di R^n in sé sono invertibili. Per studiare il problema dell'invertibilità di una matrice quadrata introdurremo nel prossimo paragrafo la nozione di *determinante*.

Complementi ed esercizi.

3.1 Date le matrici

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

verificare che

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 13 & -3 \end{pmatrix}$, $B\cdot C=\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

b) $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$

c) $(A\cdot B)\cdot C \neq C\cdot(A\cdot B)$.

3.2 - Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} , \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & 19 \end{pmatrix}$$

calcolare

$$A + B,\quad A - B,\quad 2A + 3B\ ,\quad A \cdot B,\ B \cdot A\ .$$

3.3 - Il lettore verifichi che date tre matrici A, B,C valgono le eguaglianza

a) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

b) $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

c) $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)\ , \qquad \alpha \in R$

ogni qual volta abbiano senso le espressioni considerate.

3.4 Se si scambiano le righe con le colonne in una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si ottiene una matrice detta *trasposta di A* che si indica con A^T :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Mostrare che:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

§ 4 - Determinanti e loro proprietà

Sia

$$A = (a_{11})$$

una matrice di ordine 1, cioè costituita da un solo elemento. Chiameremo *determinante di A* il numero reale

$$|A| = a_{11} .$$

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

una matrice quadrata di ordine 2.

Chiameremo *determinante di* A il numero reale

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

Sia adesso

$$(18) \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matrice quadrata di ordine n con $n \geq 3$.
Indichiamo con A_{ij} la matrice quadrata di ordine n-1 ottenuta da A sopprimendo la riga i-esima e la colonna j-esima.
Si chiama *determinante di* A il numero reale:

$$(19) \qquad |A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| - \dots + (-1)^{n+1} a_{1n}|A_{1n}|$$

Tale definizione non è ambigua poichè

a) è stato definito il determinante di una matrice quadrata di ordine 2;
b) la definizione di determinante di una matrice quadrata di ordine $n (\geq 3)$ si fonda su quella di determinante di una matrice quadrata di ordine n-1.

Ci limitiamo qui di seguito ad elencare senza dimostrazione le principali proprietà dei determinanti.
Data la matrice (18) si chiama *complemento algebrico di un elemento* a_{ij} il numero reale

$$(-1)^{i+j} \, |A_{ij}| \;;$$

si ha:

PROP. 3 - *Il determinante di* A *è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una riga (colonna) qua-*

lunque per i rispettivi complementi algebrici; cioè

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| .$$

Siano $\underline{a}$, $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ $k+1 (k< n)$ vettori riga (colonna) di A; diremo che $\underline{a}$ *è combinazione lineare di* $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots,$ $\underline{a}_k$ se esistono k numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tali che

$$\underline{a} = \alpha_1 \cdot \underline{a}_1 + \alpha_2 \cdot \underline{a}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \underline{a}_k .$$

Si ha:

PROP. 4 - *Se una riga (colonna) di* A *è combinazione lineare di altre righe (colonne) di* A *riesce*

$$|A| = 0 .$$

PROP. 5 - *Date due matrici di ordine* n A *e* B *riesce*

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \quad , \quad |\alpha \cdot A| = \alpha^n |A| .$$

PROP. 6 - *Se si scambiano tra loro due righe (colonne) di* A *si ottiene una matrice il cui determinante, è* $- |A|$.

PROP. 7 - *Il determinante di una matrice è uguale a quello della sua trasposta:*

$$|A| = |A^T| .$$

Dalla prop. 4 segue in particolare la seguente

PROP. 8 - *Se* A *ha due righe (colonne) proporzionali (in particolare uguali) si ha*

$$|A| = 0 .$$

Terminiamo il paragrafo osservando che dalla prop. 3 discende subito che

PROP. 9 - *Se tutti gli elementi di una riga (colonna) di* A *sono nulli allora*

$$|A| = 0 .$$

§ 5 - Matrici inverse

In questo paragrafo vogliamo caratterizzare le matrici quadrate dotate di matrice inversa. Per far ciò abbiamo bisogno della seguente

PROP. 10 - *Se* A *è una matrice quadrata di ordine* n *la somma dei prodotti degli elementi di una riga (colonna) per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga (colonna) è zero. Cioè*

$$\sum_{h=1}^{n} a_{ih} (-1)^{j+h} |A_{jh}| = 0 \quad i \neq j$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} (-1)^{k+r} |A_{kr}| = 0 \quad j \neq r.$$

Data la matrice (18), per fissare le idee, riferiamoci alla prima e seconda riga. Consideriamo la matrice

$$B= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

che si ottiene da A sostituendo la prima riga con la seconda e lasciando inalterate le altre. Dalla prop. 8 segue

$$|B| = 0 .$$

D'altro canto per definizione si ha:

$$|B| = a_{21}|A_{11}| - a_{22}|A_{12}| + \dots + (-1)^{n+1} a_{2n} \; |A_{1n}|$$

e quindi l'asserto.

Siamo ora in grado di dimostrare la seguente

PROP. 11 - *Una matrice quadrata* A *è dotata di inversa se e solo se*

$$|A| \neq 0 .$$

Se A ammette inversa A^{-1} dalla prop. 5, tenendo conto che

$$|I_n| = 1$$

si ottiene

$$1 = |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$$

e quindi $|A| \neq 0$.

Sia adesso A la matrice (18) e sia anche $|A| \neq 0$.

Poniamo

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\tilde{A}_{11}}{|A|} & \dfrac{\tilde{A}_{21}}{|A|} & \dots & \dfrac{\tilde{A}_{n1}}{|A|} \\ \dfrac{\tilde{A}_{12}}{|A|} & \dfrac{\tilde{A}_{22}}{|A|} & \dots & \dfrac{\tilde{A}_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\tilde{A}_{1n}}{|A|} & \dfrac{\tilde{A}_{2n}}{|A|} & \dots & \dfrac{\tilde{A}_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

dove $\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \, |A_{ij}|$

è il complemento algebrico di a_{ij}.

Se indichiamo con (c_{hl}) la matrice $A \cdot A^{-1}$ si ha (cfr. (16)):

$$c_{hi} = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{n} a_{hj} \tilde{A}_{ij} \ ;$$

dalle prop. 3 e 10

$$c_{hi} = 0 \quad \text{se} \quad h \neq i, \quad c_{hi} = 1 \quad \text{se} \quad h = i$$

e cioè $(c_{hi}) = I_n$; così la proposizione è dimostrata.

Complementi ed esercizi.

5.1 - Calcolare i seguenti determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 9 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \ [-13] \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} \ [14]$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 3 \\ 5 & -2 & 3 & -7 \end{vmatrix} = [0]$$

5.2 - Trovare i valori di t per cui

$$\begin{vmatrix} -3 & 2t \\ -t & 6 \end{vmatrix} = 0 \ [t=\pm 3] \qquad \begin{vmatrix} t & 4 & 0 \\ 0 & 3 & t \\ -1 & 0 & -t \end{vmatrix} [t=0, t=-4/3] \ .$$

5.3 - Dimostrare usando le proprietà dei determinanti che

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 6 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 10 & 2 & 7 & -1 \\ 1/3 & 12 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -1 & 5 \\ 15 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

5.4 - Calcolare la matrice inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} \right]$$

§ 6 - Sistemi lineari

Consideriamo un sistema di m equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$(19)\quad \begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n = y_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}\ x_n = y_m \end{cases}$$

Indicata con A la matrice (a_{ij}) (*matrice dei coefficienti*) il sistema dato si scrive in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

o, più sinteticamente

$$A\ \underline{x} = \underline{y}$$

avendo posto

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad .$$

Fissata una m-pla $(y_1, \ldots y_m)$ si dirà *soluzione di* (19) ogni ennupla $(x_1,\dots,x_n)$ in corrispondenza della quale le equazioni (19) siano verificate.

Ci proponiamo, da ora in poi, di trovare dei criteri per stabilire l'esistenza e/o l'unicità di soluzioni del sistema dato.
Per quanto attiene al problema dell'unicità osserviamo subito che

PROP. 12 - *Il sistema (19) ammette al più una soluzione qualunque sia* $(y_1,\dots,y_m)$ *se e solo se il sistema omogeneo.*

(20) $$A\,\underline{x} = \underline{0}^{(2)}$$

ammette soltanto la soluzione nulla $\underline{x}=\underline{0}=(0,0,\dots,0)$.

Infatti se $\underline{x}^\circ$ è una soluzione non nulla del sistema (20) ed $\underline{x}$ una soluzione del sistema (19) si ha

$$A\,(\underline{x}+\underline{x}^\circ)=A(\underline{x})+A(\underline{x}^\circ)=A\underline{x}=\underline{y}$$

e quindi il sistema (19) oltre ad $\underline{x}$ ammette anche la soluzione $\underline{x}+\underline{x}^\circ$.
Viceversa se $\underline{x}^1$ ed $\underline{x}^2$ sono due soluzioni distinte di (19) si ha

$$A(\underline{x}^1-\underline{x}^2)=A\underline{x}^1-A\underline{x}^2=\underline{y}-\underline{y}=\underline{0}$$

e quindi (20) ammette la soluzione non nulla $\underline{x}^1-\underline{x}^2$.

---

(2) Ovviamente in tale eguaglianza $\underline{0}$ indica il vettore colonna $\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$.

Dimostriamo adesso un importante risultato (*regola di Cramer*) relativo al caso n=m:

PROP. 13 - *Se* $|A| \neq 0$ *il sistema* (19) *ammette qualunque sia* $(y_1,\dots,y_n)$ *una ed una sola soluzione* $(x_1,\dots,x_n)$

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \tag{21}$$

dove A_i *è la matrice che si ottiene da* A *sostituendo la colonna* i*-esima con la colonna dei termini noti* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Poichè $|A| \neq 0$ per la proposizione 11 A è dotata di inversa A^{-1} .

Allora:

$$A\underline{x} = \underline{y} \iff A^{-1}(A\underline{x}) = A^{-1}\underline{y} \iff x = A^{-1}\underline{y} \; .$$

D'altro canto

$$A^{-1}\underline{y} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{A}_{11}}{|A|} & \dots & \frac{\tilde{A}_{n1}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\tilde{A}_{1n}}{|A|} & \dots & \frac{\tilde{A}_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{A}_{i1}}{|A|} \cdot y_1 \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{A}_{i2}}{|A|} \cdot y_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{A}_{in}}{|A|} \cdot y_i \end{pmatrix}$$

e quindi

$$x_j = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^{n} \tilde{A}_{ij} \; y_i \, .$$

Tenendo conto che per la prop. 3 $|A_i| = \sum_{i=1}^{n} \tilde{A}_{ij} \; y_i$ si ha proprio la (21). Pertanto il teorema è dimostrato.

La regola di Cramer da noi appena dimostrata esaurisce lo studio del sistema (19) nel caso m=n e $|A| \neq 0$ garantendo l'esistenza e l'unicità della soluzione la cui espressione è fornita dalla (21).
In generale, *fissato* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, *il sistema (19) si dirà compatibile se ammette almeno una soluzione.*
Ad esempio il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

è compatibile poichè $|A| = -2 \neq 0$ e pertanto, in forza della regola di Cramer, ammette l'unica soluzione (1,1).
Invece i sistemi

$$\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2=0 \end{cases} , \quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=1 \end{cases} , \quad \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2=0 \\ x_1+x_2=1 \end{cases}$$

sono incompatibili cioè non ammettono soluzioni; infatti se ammettessero una soluzione dovrebbe aversi "1=0"!
Per finire i sistemi

$$\begin{cases} x_1+x_2 = 1 \\ 2x_1+2x_2 = 2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 0 \\ x_1-x_2+x_3 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ \dfrac{x_1}{2} + \dfrac{x_2}{2} = 0 \end{cases}$$

sono compatibili ed ammettono infinite soluzioni; infatti per ogni $t \in R$ $(t, 1-t)$ è una soluzione del primo sistema, $(-t, 0, t)$ del secondo e $(t, -t)$ del terzo.
Allo scopo di studiare la compatibilità del sistema (19) quando non è applicabile la regola di Cramer (cioè nel caso $m \neq n$ od $m = n$ e $|A| = 0$) premettiamo le seguenti definizioni:

DEF. 5 - Data una matrice G di tipo $[m, n]$ si dice *minore di ordine* k (con $k \leq \min\{m, n\}$) il determinante di una qualsiasi matrice quadrata di ordine k ottenuta intersecando k righe e k colonne di G.
Ad esempio se

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

i minori di ordine 2 sono

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix};$$

l'unico minore di ordine 3 è

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} .$$

DEF. 6 - Data una matrice G non nulla di tipo $[m,n]$ si dice *rango di G* l'intero k tale che

i) esiste un minore di ordine k diverso da zero;

ii) tutti i minori di ordine k+1 (se esistono) sono uguali a zero.

Si assume, inoltre che la *matrice nulla abbia rango zero.*

Ciò posto considerato il sistema (19) indichiamo con B la matrice *detta completa*

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & y_m \end{pmatrix} ;$$

vale il seguente fondamentale risultato che riportiamo senza dimostrazione e che è noto come *teorema di Rouché-Capelli* .

PROP. 14 - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema* (19) *sia compatibile è che si abbia*

$$\text{rango di } A = \text{rango di } B .$$

Per il calcolo delle soluzioni del sistema (19) nel-equazione si perviene ad un sistema (*equivalente* a (25)) del tipo:

$$\begin{cases} x_1 + a''_{12}\, x_2 + a''_{13}\, x_3 + \ldots + a''_{1n}\, x_n = y''_1 \\ \qquad\quad x_2 + a''_{23}\, x_3 + \ldots + a''_{2n}\, x_n = y''_2 \\ \qquad\qquad\quad a''_{33}\, x_3 + \ldots + a''_{3n}\, x_n = y''_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\quad a''_{n3}\, x_3 + \ldots + a''_{nn}\, x_n = y''_n \end{cases}$$

dove nelle ultime (n-2) equazioni non compare più la variabile x_2.

Ripetendo questo procedimento n volte si perviene ad un sistema (equivalente a (24)) del tipo:

$$(26) \qquad \begin{cases} x_1 + b_{12}\, x_2 + b_{13}\, x_3 + \ldots + b_{1n}\, x_n = c_1 \\ \qquad\quad x_2 + b_{23}\, x_3 + \ldots + b_{2n}\, x_n = c_2 \\ \qquad\qquad\quad x_3 + \ldots + b_{3n}\, x_n = c_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n = c_n \end{cases}$$

che è assai facilmente risolubile.

Se si calcola il numero delle operazioni elementari necessarie in tale metodo si osserva che esso è dell'ordine di n^3 e quindi decisamente inferiore a quello relativo alla regola di Cramer.

In realtà il metodo di Gauss è utilizzabile anche nel caso $|A| = 0$ per stabilire la compatibilità del sistema.

Mostriamo ciò con due esempi.

Esempio 1.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Dividendo per 2 la prima equazione e per 4 l'ultima si arriva al sistema

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 = \frac{1}{2} \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 = \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Sottraendo la seconda e la terza equazione dalla prima si ha:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 = \frac{1}{2} \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases} .$$

Siamo pertanto giunti ad un punto in cui il procedi

$$(24)\qquad \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = y_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n = y_n \end{cases}$$

con la regola di Cramer richiede il calcolo di determinanti di ordine n; se si tiene presente che per il calcolo di un tale determinante è necessario eseguire un numero di operazioni elementari (addizioni, moltiplicazioni, divisioni) dell'ordine di (n+2)! si capisce come questo metodo sia di scarsa utilità pratica.

Sotto questo aspetto sono preferibili altri algoritmi di cui il più noto - e semplice - è quello di Gauss. Tale metodo consiste sostanzialmente nell' *eliminazione successiva di tutte le variabili fino a ridursi ad una equazione in una incognita*. In altri termini, come vedremo più avanti, il metodo di Gauss conduce alla risoluzione di un sistema equivalente a (24) *la cui matrice dei coefficienti sia triangolare superiore* cioè sia del tipo

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ 0 & 0 \; b_{33} & \ldots & b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & b_{nn} \end{pmatrix} .$$

Nelle linee essenziali il metodo di Gauss si sviluppa secondo lo schema sotto riportato (nell' ipotesi

$|A| \neq 0$):

I passo (*Normalizzazione della prima equazione*): per fissare le idee supponiamo $a_{11} \neq 0$ (altrimenti si scambia la prima equazione con la j-ma dove $a_{j1} \neq 0$; non può essere $a_{j1} = 0$ per j=1...n poichè si avrebbe in tal caso $|A| = 0$); si divide la prima equazione per a_{11}. Si ottiene in tal modo un'equazione in cui il coefficiente della variabile x_1 è 1 e che è equivalente all'equazione di partenza.

II passo (*eliminazione della variabile* x_1): tutte le equazioni in cui si ha $a_{j1} \neq 0$ (cioè quelle in cui compare effettivamente la variabile x_1) vengono divise per a_{j1} e sottratte alla prima equazione ottenendo così *(n-1) equazioni nelle quali non compare la variabile* x_1.
Il sistema (24) è diventato pertanto del tipo:

$$(25) \qquad \begin{cases} x_1 + a'_{12}\,x_2 + \ldots + a'_{1n}\,x_n = y'_1 \\ \qquad\;\; a'_{22}\,x_2 + \ldots + a'_{2n}\,x_n = y'_2 \\ \qquad\;\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\;\; a'_{n2}\,x_2 + \ldots + a'_{nn}\,x_n = y'_n \end{cases}$$

Ovviamente (24) e (25) sono equivalenti.

Se ora si eseguono le operazioni descritte nei passi I e II sul sistema di n-1 equazioni in n-1 incognite che si ottiene da (25) escludendo la prima

le ipotesi del teorema di Rouché-Capelli si procede come segue.
Sia

$$k = \text{rango di } A = \text{rango di } B \ .$$

Se $k = n = m$ il sistema (19) ammette, per la prop.13, una ed una sola soluzione data da (21).
Negli altri casi sia, per fissare le idee,

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

il minore di ordine k di A diverso da zero. Si considera allora *se $k < n$ il sistema*

$$(22) \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1k} x_k = y_1 - a_{1k+1} x_{k+1} - \dots - a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2k} x_k = y_2 - a_{2k+1} x_{k+1} - \dots - a_{2n} x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1} x_1 + \dots + a_{kk} x_k = y_k - a_{kk+1} x_{k+1} - \dots - a_{kn} x_n \end{cases} ,$$

se $k = n$ il sistema

$$(23) \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n = y_n \end{cases} .$$

In sostanza i sistemi (22) e (23) si ottengono da (19) sopprimendo le m-k equazioni i cui coefficienti non intervengono in A' e portando a secondo membro le n-k incognite i cui coefficienti non intervengono in A'.

E' possibile dimostrare che i sistemi (19) e (22) (o (23)) sono *equivalenti,* cioè ogni ennupla $(x_1,\ldots,x_n)$ che soddisfa il sistema (19) soddisfa anche il sistema (22) (o(23)) e viceversa.

In conclusione osserviamo esplicitamente che:

se $k = n$ *il sistema (19) ammette un'unica soluzione* che si ottiene dal sistema (23) applicando la regola di Cramer; *se* $k < n$ *il sistema (19) ammette infinite soluzioni* ognuna delle quali si ottiene fissando ad arbitrio $x_{k+1},\ldots,x_n$ e ricavando $x_1,x_2,\ldots,x_k$ dal sistema (22) con la regola di Cramer.

Complementi ed esercizi

6.1 - Calcolare con la regola di Cramer la soluzione dei seguenti sistemi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad [1/2,\ 1/2] \qquad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases} \quad [1,1,1]$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases} \quad [0,1,-1,4]$$

6.2 - Studiare la compatibilità dei sistemi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$ [Incomp.]

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 = -3 \\ x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$$ [Comp. le soluz. sono $(\frac{7}{11} + 20t,\ \frac{8}{11} + 4t,\ 11t)\ t \in R$]

6.3 - Studiare al variare del parametro t il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - tx_2 + 2tx_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_1 + tx_2 + tx_3 = -2 \end{cases}$$

[Per t diverso da 0 ed 1 il sistema è compatibile ed ammette una ed una sola soluzione; per t=0 è incompatibile; per t=1 è compatibile ed ammette le infinite soluzioni $(-3t,\ -2+4t,\ 5t)\ t \in R$].

6.4 - Studiare la compatibilità dei sistemi

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$ [infin. soluz.: $(\frac{12}{5} - 7t,\ \frac{6}{5} - t,\ 5t)\ t \in R$]

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 9y+6z =18 \\ x - 2y \quad =-8 \\ x + 3y+2z = 6 \end{cases}$$

[Ammette l'unica soluzione (0,4, -3)]

6.5 Studiare al variare del parametro t i sistemi

$$\begin{cases} x - ty = 2 \\ 2x + 3y = 0 \\ -3x + 4y =-1 \end{cases}$$

[E' incompatibile per $t \neq \frac{31}{2}$; per t=31/2 ammette l'unica soluzione (3/17,-2/17)

$$\begin{cases} x - ty + tz = 1 \\ 2x -2ty + z = 0 \end{cases}$$

[Per t=1/2 è incomp.; per t≠1/2 è compat.ed ammette infinite soluzioni]

§ 7 - Il metodo di Gauss

La risoluzione di un sistema di n equazioni in n incognite:

mento di Gauss non può andare avanti poichè l'ultima equazione è l'identità "0=0".
Il nostro sistema è dunque equivalente al seguente

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} x_3 \end{cases}$$

che ammette infinite soluzioni ognuna delle quali si ottiene fissando ad arbitrio x_3, ricavando x_2 dalla seconda equazione ed infine x_1 dalla prima equazione.

Esempio 2.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 \qquad +2x_3 = 3 \end{cases} .$$

Si ha facilmente che tale sistema è equivalente ai seguenti

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3 = \frac{1}{3} \\ x_1 - \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 = 0 \\ x_1 \qquad + \frac{2}{5} x_3 = \frac{3}{5} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3 = \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} x_2 - \frac{1}{6} x_3 = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} x_2 - \frac{1}{15} x_3 = - \frac{4}{15} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}\, x_2 + \frac{1}{3}\, x_3 = \frac{1}{3} \\ \qquad x_2 - \frac{1}{5}\, x_3 = \frac{2}{5} \\ \qquad x_2 - \frac{1}{5}\, x_3 = -\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}\, x_2 + \frac{1}{3}\, x_3 = \frac{1}{3} \\ \qquad x_2 - \frac{1}{5}\, x_3 = \frac{2}{5} \\ \qquad\qquad 0 = \frac{6}{5} \end{cases}$$

e l'ultimo sistema non ammette soluzioni poichè l'ultima equazione è diventata "$0 = \frac{6}{5}$"!. Pertanto il sistema di partenza è incompatibile.

Esercizi

7.1 - Risolvere con il metodo di Gauss gli esercizi 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5.

CAPITOLO VI

NUMERI COMPLESSI E POLINOMI

§ 1 - Il campo dei numeri complessi.

L'equazione

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

ovviamente non ammette soluzioni in R; per fare in modo che "equazioni algebriche" come la (1) ammettano soluzioni è necessario ampliare ulteriormente il concetto di numero.

DEFINIZIONE 1 - Per *campo dei numeri complessi* si intende l'insieme R x R delle coppie ordinate di numeri reali in cui siano definite due operazioni interne, dette rispettivamente somma e prodotto

$$(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc) \quad .$$

Il campo dei numeri complessi verrà d'ora in poi denotato con il simbolo C.

E' facile dimostrare che sono verificati gli assiomi di campo A del § 2 del Cap. II, precisamente si ha

1) Per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in C$ si ha

$$\alpha+\beta = \beta+\alpha \ , \quad \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha \qquad \text{(proprietà commutativa)}$$

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma), (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) \qquad (\text{'' associativa})$$

$$(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma \qquad (\text{'' distributiva}).$$

2) La coppia (0,0) è *l'elemento neutro rispetto alla somma.*
La coppia (1,0) è *l' elemento neutro rispetto al prodotto.*

3) Se $\alpha=(a,b)$, il simmetrico di α rispetto alla somma è $-\alpha=(-a,-b)$; $-\alpha$ si dice anche *opposto* di α.
Se $\alpha=(a,b)\neq(0,0)$, il simmetrico di α rispetto a prodotto è

$$\alpha^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2} \ , \ - \frac{b}{a^2+b^2} \right)$$

α^{-1} si dice anche *reciproco* di α e si indica anche con $\frac{1}{\alpha}$; più in generale si pone $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha\beta^{-1}$ con $\beta\neq(0,0)$

Ciò posto indichiamo con $\mathcal{R}$ il sottoinsieme di C formato dalle coppie del tipo (a,0) e consideriamo la applicazione

$$\phi : \alpha=(a,0)\in \mathcal{R} \to a \in \mathrm{R} \ .$$

CAPITOLO VI

NUMERI COMPLESSI E POLINOMI

§ 1 - Il campo dei numeri complessi.

L'equazione

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

ovviamente non ammette soluzioni in R ; per fare in modo che "equazioni algebriche" come la (1) ammettano soluzioni è necessario ampliare ulteriormente il concetto di numero.

DEFINIZIONE 1 - Per *campo dei numeri complessi* si intende l'insieme R x R delle coppie ordinate di numeri reali in cui siano definite due operazioni interne, dette rispettivamente somma e prodotto

$$(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc) \quad .$$

Il campo dei numeri complessi verrà d'ora in poi denotato con il simbolo C.

E' facile dimostrare che sono verificati gli assiomi di campo A del § 2 del Cap. II, precisamente si ha

1) Per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in C$ si ha

$$\alpha+\beta = \beta+\alpha \;, \quad \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha \qquad \text{(proprietà commutativa)}$$

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)\,,(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) \quad \text{(" associativa)}$$

$$(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma \qquad \text{(" distributiva)}.$$

2) La coppia (0,0) è *l'elemento neutro rispetto alla somma.*
   La coppia (1,0) è *l' elemento neutro rispetto al prodotto.*

3) Se $\alpha=(a,b)$, il simmetrico di α rispetto alla somma è $-\alpha=(-a,-b)$; $-\alpha$ si dice anche *opposto* di α.
   Se $\alpha=(a,b)\neq(0,0)$, il simmetrico di α rispetto a prodotto è

$$\alpha^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2} \;,\; -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

α^{-1} si dice anche *reciproco* di α e si indica anche con $\frac{1}{\alpha}$; più in generale si pone $\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\beta^{-1}$ con $\beta\neq(0,0)$

Ciò posto indichiamo con $\mathcal{R}$ il sottoinsieme di C formato dalle coppie del tipo (a,0) e consideriamo la applicazione

$$\phi \;:\; \alpha=(a,0)\in \mathcal{R} \to a \in R\;.$$

Essa è ovviamente biunivoca ed inoltre, se $\alpha=(a,0)$, $\beta=(b,0)$, si ha

$$\phi(\alpha+\beta) = a+b= \phi(\alpha)+\phi(\beta)$$

$$\phi(\alpha\cdot\beta) = a\cdot b= \phi(\alpha)\cdot\phi(\beta) \quad ;$$

in altri termini ϕ è un "isomorfismo" tra $\mathcal{R}$ e R. E' allora naturale identificare $\mathcal{R}$ con R; pertanto d'ora in poi porremo

$$(a,0) = a \;,$$

cioè considereremo R come "sottocampo" di C.
Consideriamo ora il numero complesso $(0,1)$ che viene anche denotato con il simbolo i (*unità immaginaria*). Si ha

(2) $$i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1 \;.$$

Se si osserva che

$$(0,b)=(b,0)\cdot(0,1)=b\cdot i \qquad \forall\, b\in R$$

un qualsiasi numero complesso $\alpha=(a,b)$ può essere anche rappresentato nella forma seguente

(3) $$(a,b) =(a,0)+(0,b)=a+b\cdot i \;.$$

La rappresentazione (3) del numero complesso (a,b) si chiama *forma algebrica* di (a,b); tale modo di rappresentare i numeri complessi è estremamente comodo perchè è possibile in tal caso operare con le abituali regole del calcolo letterale tenendo conto della (2).

OSSERVAZIONE 1 - L'identità (2) ci dice che *l'unità immaginaria* i è una soluzione dell'equazione (1).

OSSERVAZIONE 2 - Sempre dall'identità (2) si può ricavare, ma di ciò lasciamo la cura al lettore, che in C non è possibile introdurre alcuna relazione di ordine totale che goda delle proprietà B_1, B_2 del §2 del Cap. II.

Dato un numero complesso α nella forma algebrica (3)

- a si dice *parte reale* di α e si scrive $a = \mathrm{Re}\,\alpha$
- b si dice *coefficiente della parte immaginaria* di α e si scrive $b=\mathrm{Im}\alpha$
- il numero complesso $\bar{\alpha}=a-ib$ si chiama *complesso coniugato* di α.

Si hanno le seguenti relazioni la cui verifica è lasciata al lettore:

$$\mathrm{Re}\alpha=\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}, \quad \mathrm{Im}\alpha=\frac{\alpha-\bar{\alpha}}{2i}, \quad \alpha\cdot\bar{\alpha}=a^2+b^2,$$

inoltre risulta $\alpha=\bar{\alpha}$ *se e solo se* α *è un numero reale.*

Complementi ed esercizi.

1.1 - Usando le regole del calcolo letterale scrivere in forma algebrica le seguenti espressioni che rappresentano altrettanti numeri complessi:

$$\frac{1}{i}; \quad \frac{1-i}{1+i}; \quad \frac{1}{1-i}+\frac{1}{2i+1}; \quad \frac{(2-i)^2}{i}.$$

1.2 - Se α è un numero complesso e n un naturale definiamo al solito la potenza n-ma di α nel seguente modo

$$\alpha^1 = \alpha \ , \quad \alpha^n = \alpha^{n-1} \cdot \alpha \qquad \text{se} \quad n > 1 \ ;$$

inoltre se $\alpha \neq 0$ poniamo

$$\alpha^o = 1 \qquad \alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} = (\alpha^{-1})^n \ .$$

Calcolare, per ogni $n \in Z$, i^n.

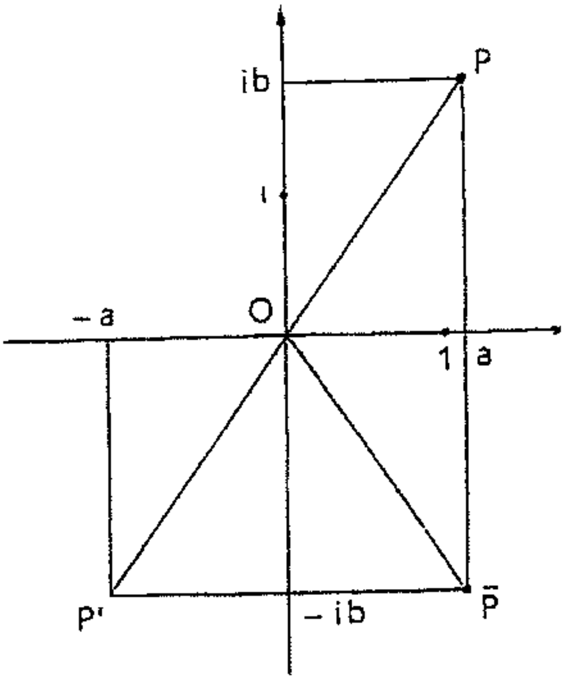
1.3 - Per quali valori del parametro reale t i seguenti numeri complessi risultano reali?

$$\frac{t}{1+it} \ ; \quad \frac{t+1}{1+it-i} + it + \frac{1}{i} \ . \quad (t=0; \quad t=1)$$

§ 2 - Il piano complesso.

Fissato in un piano π un sistema di riferimento cartesiano ortogonale l'applicazione che ad ogni numero complesso $\alpha=a+ib$ associa il punto $P\in\pi$ di coordinate (a,b) è ovviamente biunivoca. Pertanto come lo insieme dei reali può essere identificato con l' insieme dei punti di una retta così C può essere identi ficato con l'insieme dei punti di un piano. Con tale identificazione i punti dell'asse delle ascisse rappresentano i reali mentre i punti dell'asse delle ordinate rappresentano i cosiddetti *immaginari puri* cioè i numeri complessi della forma $b\cdot i$.

Così se ad α corrisponde il punto P del piano π, ad $\overline{\alpha}$ corrisponde il simmetrico $\overline{P}$ di P rispetto all'asse delle ascisse ed a $-\alpha$ il simmetrico P' di P rispetto alla origine.



La distanza di P da 0, ovvero la lunghezza del segmento $\overline{OP}$, si chiama *modulo* di α e si indica con $|\alpha|$:

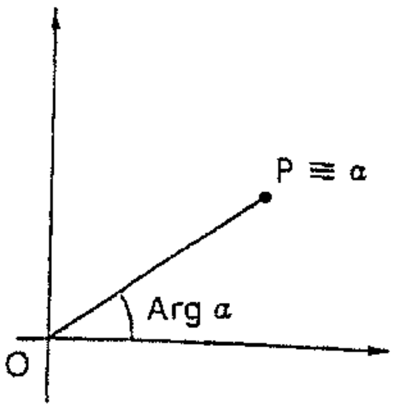
$$|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\alpha\cdot\overline{\alpha}} \ .$$

Se α è diverso da zero si chiama *argomento* di α ogni numero reale ϑ tale che

$$(4) \qquad \cos\vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\mathrm{Re}\ \alpha}{|\alpha|}\ , \quad \mathrm{sen}\ \vartheta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\mathrm{Im}\ \alpha}{|\alpha|}\ .$$

In altri termini un argomento di α è una misura in radianti dell'angolo che il semiasse positivo delle ascisse deve descrivere, ruotando in senso antiorario, per sovrapporsi alla semiretta $\overrightarrow{OP}$ essendo P il punto del piano che rappresenta α.

Fissato $\alpha \in C-\{0\}$ tra i valori che competono all'argomento di α ve ne è certamento uno che appartiene all'intervallo $]-\pi,\pi]$: esso si dice *argomento principale* e si indica con $\mathrm{Arg}\alpha$. La totalità degli argomenti di α si indica con $\arg\alpha$; si ha quindi



$$\arg \alpha = \{\mathrm{Arg}\alpha + 2k\pi\}_{k \in Z}$$

Osserviamo esplicitamente che allo zero, cioè all'origine, non si associa alcun valore dell'argomento.
Da (4) segue che se r e ϑ sono rispettivamente il modulo e l'argomento di un numero complesso $\alpha \neq 0$ si ha

$$(5) \qquad \alpha = r\,(\cos\vartheta + i\ \mathrm{sen}\vartheta)\ .$$

L'espressione (5) si chiama *forma trigonometrica* del numero complesso α.
Si ha subito

$$(6) \qquad \begin{array}{c} r_1(\cos\vartheta_1 + i\ \mathrm{sen}\vartheta_1) = r_2(\cos\vartheta_2 + i\ \mathrm{sen}\vartheta_2) \\ \Updownarrow \\ r_1 = r_2\ ,\ \vartheta_1 = \vartheta_2 + 2k\pi \quad \text{con} \quad k \in Z \end{array}$$

$$(7) \quad [r_1(\cos\vartheta_1 + i\ \mathrm{sen}\vartheta_1)]\cdot[r_2(\cos\vartheta_2 + i\ \mathrm{sen}\vartheta_2)] =$$

$$= r_1 r_2(\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\ \mathrm{sen}\ (\vartheta_1+\vartheta_2))\ ;$$

$$(8)\quad \frac{r_1(\cos\vartheta_1+i\ \mathrm{sen}\vartheta_1)}{r_2(\cos\vartheta_2+i\ \mathrm{sen}\vartheta_2)}=\frac{r_1}{r_2}\ (\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)+i\ \mathrm{sen}(\vartheta_1-\vartheta_2))$$

$$(9)\quad \frac{1}{r_2(\cos\vartheta_2+i\ \mathrm{sen}\vartheta_2)}=\frac{1}{r_2}\ (\cos(-\vartheta_2)+i\ \mathrm{sen}(-\vartheta_2))$$

$$(10)\quad [r(\cos\vartheta+i\ \mathrm{sen}\vartheta)]^k=r^k[\cos k\vartheta+i\ \mathrm{sen}k\vartheta]\qquad k\in Z.$$

La (10) si prova per $k\in N$ facendo uso del principio di induzione; ricorrendo alla (9) è poi possibile estenderla al caso in cui $k\in Z$.

Dato un numero complesso α chiamiamo *radice n-ma di* α, con $n\in N$ e $n\geq 2$ ogni numero complesso β tale che $\beta^n=\alpha$. Si ha la seguente

PROPOSIZIONE 1 - *Se* $\alpha\neq 0$ *e* $n\in N$ *esistono esattamente* n *radice* n-me *distinte di* α.

Detto r il modulo e ϑ un argomento di α poniamo

$$(11)\qquad x_k=\sqrt[n]{r}\ \left|\cos\frac{\vartheta+2k\pi}{n}+i\ \mathrm{sen}\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right|$$

$$k=0,1,\dots,n-1$$

dove $\sqrt[n]{r}$ è la radice n-ma del numero reale positiv r (cfr. PROP. 6 del Cap. II).

Dalla (10) si ha

$$x_k^n = r\{\cos(\vartheta+2k\pi) + i\ \text{sen}(\vartheta+2k\pi)\} = \alpha\ ;$$

quindi $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ sono radici n-me di α. Mostriamo che tali radici sono tra loro distinte; infatti se $x_h = x_k$ con $h \neq k$ e $h,k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, in base alla (6) dovrebbe essere

$$\frac{\vartheta+2h\pi}{n} - \frac{\vartheta+2k\pi}{n} = 2m\pi$$

per un opportuno $m \in Z$; si ha allora $h-k = mn$. D' altra parte se, tanto per fissare le idee, è $h > k$, poichè $h,k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ deve essere $0<h-k<n\leq m\cdot n$. L'assurdo cui siamo pervenuti comporta $x_h \neq x_k$. Mostriamo ora che non vi sono altre radici n-me di α. Infatti se $x=\rho\ (\cos\phi + i\ \text{sen}\phi)$ è una radice n-ma di α si ha

$$\rho^n(\cos n\phi + i\ \text{sen}\ n\phi) = r\ (\cos\vartheta + i\ \text{sen}\vartheta)$$

e quindi per la (6)

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad , \quad \phi = \frac{\vartheta+2k\pi}{n}$$

per un opportuno $k \in Z$. Sia $k_0 \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, tale che $k = nq + k_0$ con $q \in Z$. Si ha allora

$$x=\sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\vartheta+2k_0\pi}{n}+2q\pi\right)+i\ \mathrm{sen}\left(\frac{\vartheta+2k_0\pi}{n}+2q\pi\right)\right\}=x_{k_0}$$

cioè x coincide con una delle n radici $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. In conclusione la formula (11) ci dà tutte le radici n-me di α.

Complementi ed esercizi.

2.1 - Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi

$$i\ ;\ \frac{1}{i}\ ;\ i-1;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\ ;\ \frac{1}{1+i}\ ;\ \frac{1}{(i+\sqrt{3})^3}\ ;\ (1+i)^4\ .$$

2.2 - Risolvere in C le seguenti equazioni

$z^5-1=0$; $z^3+i=0$; $z^4=1-i\sqrt{3}$; $z^5(1+i)=1$;

$z^2+5=0$; $(2z-1)^3=(3z-1)^3$.

2.3 - Provare che, se $\alpha,\beta\in C$:

$$||\alpha|-|\beta||\leq|\alpha\pm\beta|\leq|\alpha|+|\beta|\ .$$

§ 3 - Polinomi

Dati n+1 numeri reali o complessi $a_0, a_1, \dots, a_n$ con $a_0 \neq 0$ si chiama *polinomio di grado* n *a coefficienti* $a_0, a_1, \dots, a_n$ la funzione

$$x \in C \to a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = P(x) \in C .$$

Se $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ $P(x)$ si dice *polinomio nullo.*

Sussistono i seguenti importanti risultati

PRINCIPIO D'IDENTITA' DEI POLINOMI. *Se si ha* $P(x) = 0$ *per ogni* $x \in R$ *il polinomio* $P(x)$ *è il polinomio nullo cioè sono nulli tutti i suoi coefficienti.*

La dimostrazione di tale risultato sarà data successivamente.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA. *Un polinomio* $P(x)$ *di grado* $n \geq 1$ *ammette almeno una radice, esiste cioè almeno un numero complesso* α *tale che* $P(\alpha) = 0$.

Un'immediata conseguenza del PRINCIPIO D'IDENTITA' DEI POLINOMI è la seguente

PROPOSIZIONE 2 - *Se due polinomi* $P(x)$ *e* $Q(x)$ *di grado rispettivamente* n *ed* m *sono tali che*

$$P(x) = Q(x) \qquad \forall x \in R$$

allora essi sono identici, hanno cioè lo stesso grado *e gli stessi coefficienti; risulta quindi anche*

$$P(x) = Q(x) \qquad \forall x \in C .$$

DEFINIZIONE 2 - Se $P(x)$ è un polinomio di grado n e $Q(x)$ è un polinomio non nullo di grado $m \leq n$ si dice che $P(x)$ *è divisibile per* $Q(x)$ se esiste un polinomio $R(x)$ di grado $n-m$ tale che

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x) \qquad \forall x \in R.$$

Si ha:

PROPOSIZIONE 3 - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un numero complesso* α *sia radice del polinomio* $P(x)$ *di grado* $n \geq 1$ *é che* $P(x)$ *sia divisibile per* $(x-\alpha)$.

Infatti se $P(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)$ si ha

$$P(x) = (x-\alpha) \cdot R(x)$$

dove $R(x)$ è un polinomio di grado $n-1$; quindi $P(\alpha)=0$. Viceversa sia α una radice di $P(x)= a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$. Dall'identità

$$P(x)=(x-\alpha)[a_0x^{n-1}+(a_1+\alpha a_0)x^{n-2}+(a_2+\alpha a_1+\alpha^2a_0)x^{n-3}+\ldots$$

$$+(a_{n-1}+a_{n-2}\alpha+\ldots a_0\alpha^{n-1})]+a_n+a_{n-1}\alpha+\ldots+a_0\alpha^n =$$

$$=(x-\alpha)\cdot R(x)+P(\alpha) ,$$

essendo $P(\alpha) = 0$, discende

$$P(x) = (x-\alpha) \cdot R(x)$$

cioè $P(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)$.

Sia ancora

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

un polinomio di grado $n \geq 1$. Per il teorema fondamentale dell'Algebra $P(x)$ ammette una radice $\alpha_1 \in C$; quindi per la prop. 3 si ha

$$P(x) = (x-\alpha_1)\ R_1(x)$$

dove $R_1(x)$ è un polinomio di grado $n-1$. Se $n-1 \geq 1$ si può applicare ancora il teorema fondamentale dell'Algebra, questa volta ad $R_1(x)$; esiste quindi $\alpha_2 \in C$ tale che

$$R_1(x) = (x-\alpha_2)R_2(x)$$

da cui

$$P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)R_2(x)$$

con $R_2(x)$ polinomio di grado $n-2$. Applicando n volte il procedimento si otterrà per $P(x)$ una decomposizione del tipo

$$P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)\cdot R \tag{12}$$

dove R è un "polinomio di grado zero" cioè una costante diversa da zero e $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n \in C$. E' facile controllare, in forza della PROP. 2, che $R = a_0$.

E' evidente che tutti i numeri α_i sono radici di $P(x)$ cioè

$$P(\alpha_i) = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n;$$

inoltre dalla "scomposizione" (12) del polinomio $P(x)$ si deduce facilmente che non esistono radici di $P(x)$ diverse da α_i $(i=1,\ldots,n)$. Osserviamo esplicitamente che i numeri α_i non sono necessariamente distinti. Indicate con $x_1, x_2, \ldots, x_k$ le radici distinte del polinomio $P(x)$ il fattore $(x-x_j)$ con $1 \leq j \leq k$ compare $n_j (\geq 1)$ volte nella scomposizione (12). Si ha quindi:

$$(13) \qquad P(x) = a_0 (x-x_1)^{n_1} (x-x_2)^{n_2} \ldots (x-x_{k-1})^{n_{k-1}} (x-x_k)^{n_k} \quad ;$$

n_j si dice *molteplicità della radice* x_j ed è

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} + n_k = n \; .$$

Se si conviene di "contare" ogni radice x_i tante volte quanto il suo ordine di molteplicità si può sintetizzare ciò che si è detto nella seguente

PROPOSIZIONE 4 - *Un polinomio di grado* $n \geq 1$ *ammette* n *radici.*

Come conseguenza si ha

PROPOSIZIONE 5 - *Dati due polinomi di grado* n $P(x)$,

$Q(x)$, *se esistono* $n+1$ *numeri complessi distinti* y_1, $y_2, \dots, y_{n+1}$ *tali che*

$$P(y_i) = Q(y_i) \qquad i=1,2,\dots,n+1 \; ,$$

i polinomi $P(x)$ *e* $Q(x)$ *sono identici.*

Infatti il polinomio $P(x)-Q(x)$, di grado minore od uguale ad n, ammette $n+1$ radici distinte $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$: ciò, in base alla proposizione 4, è assurdo a meno che $P(x)-Q(x)$ non sia il polinomio nullo.

Supponiamo ora che $P(x)$ sia un polinomo di grado $n \geq 1$ a coefficienti reali; si ha allora:

PROPOSIZIONE 6 - *Se un numero complesso* z *è radice di* $P(x)$ *anche* $\bar{z}$, *coniugato di* z, *è radice di* $P(x)$.

Infatti posto $z=x+iy$ si ha

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x+iy)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} x^{k-h} y^h (i)^h$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\substack{h=0 \\ h \text{ pari}}}^{k} \binom{k}{h} x^{k-h} y^h (-1)^{\frac{h}{2}} +$$

$$+ i \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\substack{h=1 \\ h \text{ dispari}}}^{k} \binom{k}{h} x^{k-h} y^h (-1)^{\frac{h-1}{2}} = A + i B .$$

Analogamente si prova che

$$P(\bar{z}) = A - i\,B$$

quindi

$$P(z) = 0 \iff A=B=0 \iff P(\bar{z}) = 0 \ .$$

Si può inoltre facilmente verificare che z *e* $\bar{z}$ *hanno la stessa molteplicità.*

Dalla precedente proposizione si deduce che un polinomio a coefficiente reali di grado $n \geq 1$ ha un numero pari di radici complesse e non reali; quindi *se* n *é dispari esso ammette almeno una radice reale.*

Se il polinomio $P(x)$ a coefficienti reali ammette r radici reali $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ di molteplicità $q_1,\dots,q_r$ e $2s$ radici $(\beta_1 \pm i\,\gamma_1),\dots,(\beta_s \pm i\,\gamma_s)$ $(\gamma_j \neq 0)$, di molteplicità $p_1,\dots,p_s$, tenuto conto che

$$[x-(\beta_j + i\,\gamma_j)][x-(\beta_j - i\,\gamma_j)]=(x-\beta_j)^2+\gamma_j^2$$

la formula di scomposizione (13) si scrive

$$(14) \quad P(x)=a_0(x-\alpha_1)^{q_1}\dots(x-\alpha_r)^{q_r}\,[(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2]^{p_1}\cdot$$

$$\dots[(x-\beta_s)^2 + \gamma_s^2]^{p_s} \ ,$$

con $\sum_{i=1}^{r} q_i + 2\sum_{i=1}^{s} p_i = n$.

Sottolineamo che nella scomposizione (14) i fattori a secondo membro sono tutti polinomi a coefficienti reali.

CAPITOLO VII

SUCCESSIONI

§ 1 - Definizione di limite

In questo capitolo daremo la nozione di "*limite*" e ne studieremo le proprietà. Per introdurre il lettore alla questione illustriamo alcuni esempi.

Consideriamo il problema della determinazione della lunghezza di una circonferenza di raggio unitario. Seguendo un metodo classico consideriamo la successione

(1) $$I_6 < I_{12} < I_{24} < \ldots < I_{3k} < \ldots (k=2^p, p \in N)$$

dei perimetri dei poligoni regolari, di 6,12,24,...., lati, inscritti nella circonferenza e la successione

(1)' $$E_6 > E_{12} > E_{24} > \ldots > E_{3k} > \ldots (k=2^p, p \in N)$$

dei perimetri dei poligoni regolari, di 6,12,24,...., lati, circostritti alla circonferenza. Indichiamo, come è consuetudine, con il simbolo 2π il numero reale che rappresenta la lunghezza della circonferenza e cerchiamone "valori approssimati" andando a calcolare i termini delle successioni (1), (1)'.

$\overline{AC}$ = lunghezza del lato del poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza.

$\overline{AK}$ = lunghezza del lato del poligono regolare di $2n$ lati inscritto nella circonferenza.

$\overline{AB}$ = semilunghezza del lato del poligono regolare di n lati circoscritto alla circonferenza

$\overline{DE}$ = lunghezza del lato del poligono regolare di $2n$ lati circoscritto alla circonferenza.

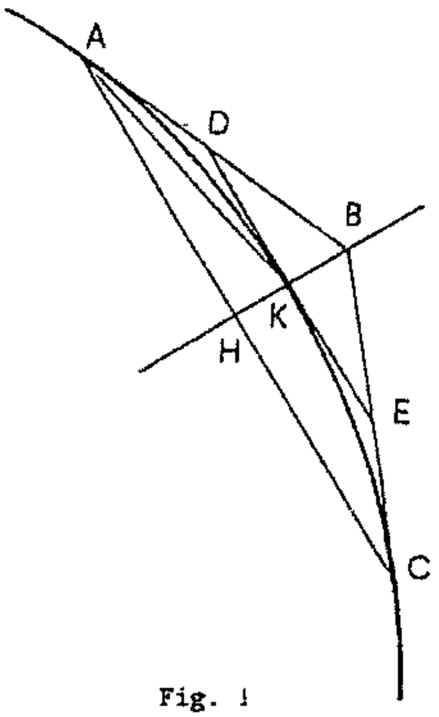


Fig. 1

Essendo i triangoli ABC, DBE (cfr. Figura 1) simili si ha

$$\overline{AB} \cdot \overline{DE} = (\overline{AB}-\overline{AD}) \cdot \overline{AC}$$

da cui facilmente

$$E_{2n} \cdot (E_n + I_n) = I_n \cdot E_n$$

con ovvio significato per i simboli I_n, I_{2n}, E_n, E_{2n}. Dalla similitudine dei triangoli ADK, AKC si ha

$$\overline{AK}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$$

da cui

$$I_{2n}^2 = I_n \cdot E_{2n} \; .$$

Si ottengono pertanto le seguenti formule

$$(2) \qquad E_{2n} = \frac{I_n \cdot E_n}{E_n + I_n} \; , \quad I_{2n} = \sqrt{I_n \cdot E_{2n}} \; .$$

Se consideriamo la successione

$$(3) \qquad E_6, I_6, E_{12}, I_{12}, E_{24}, I_{24}, \ldots, E_{3k}, I_{3k}, \ldots$$

il suo generico termine può essere calcolato, facendo uso di una delle (2), una volta noti i due termini che lo precedono. Essendo ovviamente

$$E_6 = 4\sqrt{3} \; , \quad I_6 = 6$$

tutti i termini della successione (3) possono essere calcolati per "ricorrenza" tramite le (2). Se ora, fissato $\varepsilon > 0$, vogliamo la lunghezza della circonferenza con una approssimazione tale che l'errore non superi ε, non dobbiamo far altro che calcolare i termini della successione (3) fino a che la differenza $(E_{3k} - I_{3k})$ non risulti inferiore ad ε. Detto infatti

$\bar{k}$ un indice tale che $(E_{3\bar{k}} - I_{3\bar{k}}) < \varepsilon$, essendo $I_{3\bar{k}} < 2\pi < E_{3\bar{k}}$, risulta

$$E_{3\bar{k}} - 2\pi < \varepsilon \quad , \quad 2\pi - I_{3\bar{k}} < \varepsilon \; ;$$

pertanto sia $E_{3\bar{k}}$ che $I_{3\bar{k}}$ rappresentano le "approssimazioni di 2π" che cercavamo. E' inoltre evidente che a partire da tale indice $\bar{k}$ risulta

$$E_{3k} - 2\pi < \varepsilon \; , \quad 2\pi - I_{3k} < \varepsilon \qquad k > \bar{k} \; .$$

Con una terminologia che adesso andiamo ad introdurre ciò si esprime dicendo che 2π è il limite della successione (3) (nonchè delle successioni (1),(1)').

DEFINIZIONE 1 - Si dice che la successione a valori reali[1] $\{a_n\}$ ha per *limite* $\ell \in R$ e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$

se è verificata la seguente proprietà:

$$\ll \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \nu : n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon \gg \; .$$

---

(1) Poichè nel corso di tale capitolo considereremo esclusivamente successioni a valori reali, d'ora in poi useremo il termine "successione" in luogo di "successione a valori reali".

In tal caso la successione $\{a_n\}$ si dice *convergente* in particolare se $\ell = 0$ $\{a_n\}$ si dice anche *infinitesima*

Consideriamo ora la successione

$$C_n = \left(1 + \frac{I}{100}\right)^n$$

dove I è un numero reale positivo. Il termine C_n rappresenta il capitale maturato dopo n anni a partire dal capitale unitario con un interesse annuo pari al I%. Se fissiamo in modo del tutto arbitrario un numero reale K è agevole verificare che a partire da un certo indice ν (dipendente da K) si ha

$$C_n > K ;$$

tale comportamento della successione $\{C_n\}$ è sintetizzato nella scrittura

$$\lim_{n\to\infty} C_n = +\infty .$$

Più generalmente

DEFINIZIONE 2 - Si dice che la successione $\{a_n\}$ ha per *limite* $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

se è verificata la seguente proprietà

$$\ll \forall K > 0 \quad \exists \nu : n>\nu \Rightarrow a_n > K \gg .$$

In tal caso si dice che la successione $\{a_n\}$ *diverge positivamente*.

Analogamente

DEFINIZIONE 3 - Si dice che la successione $\{a_n\}$ ha per *limite* $-\infty$ e si scrive

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$$

se è verificata la seguente proprietà

$$\ll \forall K>0 \quad \exists \nu : n>\nu \Rightarrow a_n < -K \gg .$$

In tal caso si dice che la successione $\{a_n\}$ *diverge negativamente*.

Una successione che sia o convergente o divergente positivamente o divergente negativamente si dice anche *regolare*. Una successione non regolare si dice anche *oscillante*.

OSSERVAZIONE 1 - E' possibile dare una veste uniforme alle tre precedenti definizioni.

Se $\ell \in \overline{R}$, chiamiamo *intorno* di ℓ rispettivamente

- un intervallo aperto $]h,k[$ contenente ℓ se $\ell \in R$
- un intervallo aperto $]-\infty,k[$ se $\ell=-\infty$
- un intervallo aperto $]h,+\infty[$ se $\ell=+\infty$

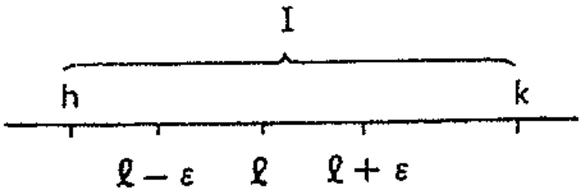
con $-\infty \leq h < k \leq +\infty$; denotiamo inoltre con $I(\ell)$ la famiglia degli intorni di ℓ.

Sia $\{a_n\}$ una successione e sia ℓ un elemento di $\overline{R}$; si ha allora facilmente

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell \iff \ll \forall I\in I(\ell)\ \exists\nu : n>\nu \Rightarrow a_n\in I \gg$.

Soffermiamoci sul caso in cui $\{a_n\}$ è convergente essendo l'equivalenza banale negli altri due casi. Supponiamo che $\{a_n\}$ verifichi la proprietà posta a destra nell'equivalenza (4); allora, se l'intorno I è del tipo $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ con $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste un indice ν tale che $a_n\in]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$, cioè $|a_n-\ell|<\varepsilon$, per $n>\nu$; quindi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Viceversa, sia $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ secondo la def. 1. Se $I =]h,k[$ con $h,k\in R$ è un generico intorno di ℓ, indicato con ε un numero tale che $0<\varepsilon<\min\{\ell-h,k-\ell\}$ risulta ovviamente $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[\subset]h,k[$. Per la def. 1 esiste un indice ν tale che $a_n\in]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ se $n > \nu$; risulta allora anche $a_n\in I$ se $n>\nu$, è cioè verificata la proprietà posta a destra dell'equivalenza (4). Analogamente si procede se $I=]h,k[$ con h e/o k appartenenti ad $\overline{R}$.



Nel seguito useremo indifferentemente la definizione (4) di limite ovvero una delle definizioni 1,2

3. Per esempio, usando la definizione (4) è agevole dimostrare il seguente

TEOREMA DI UNICITA' DEL LIMITE - *Ogni successione* $\{a_n\}$ *ammette al più un limite.*

Supponiamo che la successione $\{a_n\}$ ametta due limiti distinti ℓ_1, ℓ_2 con $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Se per esempio $\ell_1 < \ell_2$, fissato un numero reale $a \in]\ell_1, \ell_2[$, poniamo $I_1 =]-\infty, a[$, $I_2 =]a, +\infty[$. Ovviamente $I_1 \in I(\ell_1)$, $I_2 \in I(\ell_2)$ e $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. In base alla definizione (4) di limite, in corrispondenza di I_1, I_2, è possibile determinare due indici ν_1, ν_2 tali che

$$a_n \in I_1 \text{ se } n > \nu_1 \quad e \quad a_n \in I_2 \text{ se } n > \nu_2 .$$

Quindi, se $n > \max\{\nu_1, \nu_2\}$, a_n appartiene sia ad I_1 che ad I_2 contro il fatto che I_1, e I_2 sono disgiunti. L' assurdo cui siamo pervenuti prova l'asserto.

OSSERVAZIONE 2 - Nelle varie definizioni di limite compare una relazione o proprietà ($|a_n - \ell| < \varepsilon$, $a_n > K$, etc.) soddisfatta dai termini della successione a partire da un certo indice ν. D'ora in poi, talvolta quando una relazione o proprietà è verificata dai termini di una successione $\{a_n\}$ per n maggiore di un certo indice ν, diremo che tale relazione o proprietà è *definitivamente verificata.* Per esempio diremo sinteticamente che "la successione $\{a_n\}$ è *definitivamente positiva*" se esiste un indice ν tale che $a_n > 0$ per $n>\nu$.

OSSERVAZIONE 3 - Spesso nel seguito, per dimostrare che una successione $\{a_n\}$ è convergente, faremo vedere che $|a_n - \ell|<\varepsilon$ se $n>\nu$ soltanto per "valori piccoli di ε" cioè per $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ con ε_0 opportuno; ciò ovviamente è sufficiente per i nostri scopi. Analogamente se si vuole dimostrare che una successione $\{a_n\}$ diverge, per esempio, positivamente basta verificare che $a_n>K$ se $n>\nu$ comunque si scelga $K>K_0>0$ con K_0 opportuno.

Complementi ed esercizi.

1.1 - Utilizzando le definizioni di limite provare che:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2-3)=+\infty$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (2-2^{-n}) = 2$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} (1-n^3)=-\infty$.

Verificare inoltre che le seguenti successioni sono oscillanti:

f) $\{(-1)^n\}$; g) $\{\text{sen}\ n \frac{\pi}{2}\}$; h) $\{(-1)^n \cdot n\}$

1.2 - Usando le proprietà della funzione esponenziale, logaritmo e potenza verificare che

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0<a<1 \\ +\infty & \text{se } a>1 \end{cases} \quad , \lim_{n\to\infty} \lg_a n = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0<a<1 \\ +\infty & \text{se } a>1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \alpha>0 \\ 1 & \text{se} \quad \alpha=0 \\ 0 & \text{se} \quad \alpha<0 \end{cases} .$$

1.3 - Provare che la successione $\{\frac{2}{n!}\}$ è infinitesima.

Suggerimento: si verifichi che $\frac{2^n}{n!} \leq 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ definitivamente; si applichi quindi il risultato del precedente esercizio.

1.4 - Facendo uso delle proprietà del valore assoluto dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in R \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |\ell| .$$

Se $\ell=0$ tale implicazione è invertibile. Lo è anche quando $\ell\neq 0$?

1.5 - Per *media aritmetica* di k numeri $a_1,\ldots,a_k$ si intende la quantità

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$$

Data una successione $\{a_n\}$ consideriamo la successione $\{A_n\}$ il cui termine n-mo A_n è la media aritmetica dei primi n termini della successione $\{a_n\}$ cioè

$$A_n = \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \quad .$$

Vale la seguente implicazione

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \ell\in\overline{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \ell \ .$$

Accenniamo alla dimostrazione nel caso in cui $\{a_n\}$ risulti convergente. Fissato ε con $0<\varepsilon<1$, esiste un indice ν tale che, per $n>\nu$, si ha $|a_n-\ell|<\varepsilon$. Pertanto se $n>\nu$ risulta

$$|A_n-\ell| = \left| \frac{(a_1-\ell)+\ldots+(a_\nu-\ell)}{n} + \frac{(a_{\nu+1}-\ell)+\ldots+(a_n-\ell)}{n} \right|$$

$$\leq \frac{|a_1-\ell|+\ldots+|a_\nu-\ell|}{n} + \frac{|a_{\nu+1}-\ell|+\ldots+|a_n-\ell|}{n}$$

$$\leq \frac{|a_1-\ell|+\ldots+|a_\nu-\ell|}{n} + \left(\frac{n-\nu}{n}\right)\cdot\ \varepsilon \ .$$

Poichè, una volta fissato ν, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_1-\ell|+\ldots+|a_\nu-\ell|}{n} = 0$$

esiste un indice ν', che possiamo senz'altro considerare maggiore di ν, tale che, per $n>\nu'$

$$\frac{|a_1-\ell|+\ldots+|a_\nu-\ell|}{n} < \varepsilon .$$

In definitiva, osservando che $\frac{n-\nu}{n} < 1$, risulta

$$|A_n-\ell| < 2\varepsilon \qquad \text{per} \qquad n > \nu'$$

e quindi l'asserto.
Il lettore completi la dimostrazione contemplando il caso in cui $\{a_n\}$ risulti o divergente positivamente, o divergente negativamente. Verificare inoltre, facendo per esempio ricorso alla successione $\{(-1)^n\}$, che l'implicazione (5) non è invertibile.

§ 2 - **Prime proprietà dei limiti.**

Una successione $\{a_n\}$ si dice *limitata superiormente (inferiormente)* se esiste una costante A tale che

$$a_n \le A \quad (a_n \ge A) \quad \forall n\in N.$$

cioè se è limitato superiormente (inferiormente) il suo sostegno. Se $\{a_n\}$ è limitata superiormente e inferiormente essa si dice *limitata;* in tal caso il suo sostegno è limitato.

PROPOSIZIONE 1 - *Ogni successione convergente è limitata.*

Denotato con a il limite di $\{a_n\}$, comunque si fissi $\varepsilon > 0$ esiste un indice ν tale che

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon \qquad \text{se} \qquad n>\nu.$$

Posto allora $h=\min\{a_1,\ldots,a_\nu,a-\varepsilon\}$, $k=\max\{a_1,\ldots a_\nu,a+\varepsilon\}$, risulta ovviamente, per ogni $n\in N$, $h\leq a_n\leq k$, cioè la limitatezza di $\{a_n\}$.

PROPOSIZIONE 2 - *Ogni successione divergente positivamente è limitata inferiormente e non limitata superiormente. Analogamente ogni successione divergente negativamente è limitata superiormente e non limitata inferiormente.*

Consideriamo il caso di una successione $\{a_n\}$ divergente positivamente. Allora, comunque si fissi $K>0$ esiste un indice ν tale che $a_n > K$ per $n>\nu$.
Ciò, essendo K arbitrario, comporta che il sostegno di $\{a_n\}$ è non limitato superiormente; inoltre, posto $h=\min\{a_1,\ldots\ldots,a_\nu,K\}$, si ha $a_n \geq h$ per ogni $n\in N$ e quindi la successione è limitata inferiormente.

I risultati su esposti non sono invertibili; cioè una successione limitata può non convergere così come una successione non limitata, per esempio superiormente, può non divergere positivamente. Basta, per convincersi di ciò, considerare le due successioni oscillanti:

$$a_n = (-1)^n \,, \qquad b_n = \begin{cases} 1/n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 2^n & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

di cui la prima è limitata e la seconda è non limitata superiormente. Fanno in questo senso eccezione le *successioni monotone*, cioè quelle che godono di una delle seguenti proprietà:

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \forall n \in N \qquad (\textit{succ. crescente})$$

$$a_n \geq a_{n+1} \qquad \forall n \in N \qquad (\textit{succ. decrescente})^{(2)}.$$

Si ha infatti:

PROPOSIZIONE 3 - *Ogni successione monotona è regolare; di più risulta:*

---

(2) Se riesce $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in N$ la successione si dice anche *strettamente crescente*; analogamente se $a_n > a_{n+1}$ $\forall n$ la successione si dice anche *strettamente decrescente*.

i) $\{a_n\}$ *crescente* $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \sup \{a_n\}$

i)' $\{a_n\}$ *decrescente* $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \inf \{a_n\}$

Dimostriamo i) nell'ipotesi che $\{a_n\}$ sia limitata; posto $a = \sup \{a_n\}$ e fissato $\varepsilon>0$ esiste, per la seconda proprietà dell'estremo superiore (cfr. prop.2.cap II) un indice ν tale che $a_\nu > a - \varepsilon$. Poichè $\{a_n\}$ è crescente si ha

$$a-\varepsilon < a_\nu \leq a_n \leq a \qquad \text{per} \quad n>\nu$$

cioè l'asserto.

D'altronde se $\{a_n\}$ è crescente e non limitata superiormente, allora comunque si fissi $K > 0$ esiste un indice ν tale che $a_\nu > K$. Dalla crescenza della successione si ha allora

$$a_n \geq a_\nu > K \qquad \text{per} \quad n > \nu$$

cioè $\{a_n\}$ diverge positivamente. Resta in tal modo dimostrata l'implicazione i).

In modo analogo si dimostra i)'.

Di grande utilità pratica sono i seguenti risultati

TEOREMA DEL CONFRONTO - *Si hanno le seguenti implicazioni:*

i) $a_n \le b_n \le c_n$ *per* $n>\nu_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell \in R \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$

ii) $a_n \le b_n$ *per* $n>\nu_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$

iii) $b_n \le c_n$ *per* $n>\nu_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

Limitiamoci a dimostrare la implicazione i) essendo le dimostrazioni di ii), iii) analoghe oltre che più semplici. Fissato $\varepsilon>0$ esistono due indici ν_1 e ν_2 tali che

$$\ell-\varepsilon < a_n < \ell+\varepsilon \qquad \text{se} \qquad n>\nu_1$$
$$\ell-\varepsilon < c_n < \ell+\varepsilon \qquad \text{se} \qquad n>\nu_2 .$$

Quindi per $n>\nu = \max\{\nu_0, \nu_1, \nu_2\}$ si ha

$$\ell-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < \ell+\varepsilon$$

da cui l'asserto.

PROPOSIZIONE 4 - *Sia* $\{a_n\}$ *una successione regolare e sia* $\ell \in \overline{R}$ *il suo limite; se* $a \in R$ *e* $\ell>a$ $(\ell<a)$ *si ha definitivamente* $a_n > a$ $(a_n < a)$.

Supponiamo $\ell > a$. Indicato con I l'intorno di ℓ $]a,+\infty[$, per la definizione (4) di limite esiste un indice ν tale che, per $n>\nu$, $a_n \in I$ cioè $a_n > a$. In modo analogo si ragiona se $\ell < a$.

Come caso particolare si ha:

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO - *Sia* $\{a_n\}$ *una successione regolare e sia* $\ell \in \overline{R}$ *il suo limite; se* $\ell > 0$ $(\ell < 0)$ *la successione* $\{a_n\}$ *è definitivamente positiva (definitivamente negativa).*

Dalla proposizione 4 discende inoltre facilmente la seguente

PROPOSIZIONE 5 - *Sia* $\{a_n\}$ *una successione regolare; se risulta definitivamente* $a_n \geq a$ $(a_n \leq a)$ *con* $a \in R$, *si ha:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq a \qquad \left(\lim_{n\to\infty} a_n \leq a\right).$$

Sia $a_n \geq a$ e ragioniamo per assurdo; se fosse $\lim_{n\to\infty} a_n < a$ per la proposizione 4 si avrebbe definitivamente $a_n < a$, contro l'ipotesi. In modo analogo si ragiona nell'altro caso.

Complementi ed esercizi.

2.1 - Facendo uso della relazione $0<\operatorname{sen}x<x$ se $0<x<\frac{\pi}{2}$ e del teorema del confronto, ricavare che

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n} = 0 .$$

2.2 - Facendo uso della relazione $1-y<\sqrt{1-y^2}<1$ se $0<y<1$ e dell'identità $\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}$ se $0<x<\frac{\pi}{2}$ verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = 1$$

2.3 - Ricorrendo alla relazione $\cos x < \frac{\operatorname{sen}x}{x} < 1$ con $0<x<\frac{\pi}{2}$ (cfr. (9) Cap. III) e usando i risultati del precedente esercizio dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} n\operatorname{sen}\frac{1}{n} = 1 .$$

2.4 - Sia $\{a_n\}$ una successione definitivamente crescente. Dimostrare che $\{a_n\}$ è regolare. Si può ancora concludere che il suo limite è l'estremo superiore del suo sostegno?

25 - Sia $\{a_n\}$ una successione regolare e definitivamente positiva. Si può concludere che il limite di

$\{a_n\}$ è positivo? Costruire un controesempio in caso di risposta negativa.

2.6 - Sia $\{a_n\}$ una successione a termini non negativi; dimostrare, facendo uso dell'identità $(a_n^2-a^2)=(a_n - a)\cdot(a_n+a)$ che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} a_n^2 = a^2 .$$

Più in generale verificare che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} a_n^k = a^k \tag{6}$$

dove k è un naturale. Dedurre che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a} .$$

L'equivalenza (6) continua a sussistere se si toglie l'ipotesi che $a_n \geq 0$? Una delle due implicazioni è vera sempre; quale? Se si sostituisce l'ipotesi che $a_n \geq 0$ con l'ipotesi che la successione $\{a_n\}$ sia definitivamente positiva o negativa l'equivalenza (6) continua a sussistere? Se a=0 si può prescindere da qualsiasi ipotesi sul segno dei termini della successione?

2.7 - Dimostrare che

(7) $$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

dove a è un numero reale positivo diverso da 1 e $\{x_n\}$ è una successione convergente.

Diamo un cenno della dimostrazione nell'ulteriore ipotesi $a>1$. Fissato $0<\varepsilon<a^x$, poichè il codominio della funzione esponenziale è l'intervallo $]0,+\infty[$, esistono due reali $x_\varepsilon, x'_\varepsilon$ tali che

$$a^{x_\varepsilon} = a^x - \varepsilon < a^x + \varepsilon = a^{x'_\varepsilon} .$$

Essendo ovviamente $a^{x_\varepsilon} < a^x < a^{x'_\varepsilon}$ dalla stretta crescenza della funzione esponenziale a^y discende $x_\varepsilon < x < x'_\varepsilon$. Lo intervallo $]x_\varepsilon, x'_\varepsilon[$ è pertanto un intorno di x: poichè $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, per la definizione (4) di limite, esiste un indice ν tale che $x_\varepsilon < x_n < x'_\varepsilon$ se $n>\nu$ e quindi

$$a^{x_\varepsilon} = a^x - \varepsilon < a^{x_n} < a^x + \varepsilon = a^{x'_\varepsilon} \quad \text{per } n>\nu .$$

Essendo ε un numero positivo arbitrario minore di a^x si ha (cfr. osservazione 3): $\lim_n a^{x_n} = a^x$.

Viceversa supponiamo $\lim a^{x_n} = a^x$. Fissato $\varepsilon > 0$ risulta ovviamente

$$a^x a^{-\varepsilon} < a^x < a^x a^{\varepsilon}$$

quindi $]a^x a^{-\varepsilon}, a^x a^{\varepsilon}[$ è un intorno di a^x; ricorrendo al la definizione (4) di limite, esiste un indice ν tale che $a^x a^{-\varepsilon} < a^{x_n} < a^x a^{\varepsilon}$ se $n>\nu$.

Dalla stretta crescenza della funzione esponenziale si ricava

$$x-\varepsilon<x_n<x+\varepsilon \qquad \text{se } n>\nu$$

cioè $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

2.8 - Estendere la (7) al caso in cui la successione $\{x_n\}$ diverga positivamente o negativamente, una volta che si è posto

$$a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 0 & \text{se } 0<a<1 \end{cases}, \quad a^{-\infty} = \begin{cases} 0 & \text{se } a>1 \\ +\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}.$$

2.9 - Dedurre dai due precedenti esercizi che

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \lim_{n\to\infty} \lg_a x_n = \lg_a x$$

dove a è un numero reale positivo diverso da 1, $\{x_n\}$ è una successione regolare a termini positivi ed inoltre si è posto:

$$\lg_a 0 = \begin{cases} -\infty & \text{se } a>1 \\ +\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}, \quad \lg_a(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ -\infty & \text{se } 0<a<1. \end{cases}$$

2.10 - Per *media geometrica* di k numeri positivi $a_1, \ldots$ $\ldots, a_k$ si intende la quantità

$$\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k} .$$

Data una successione a termini positivi $\{a_n\}$ consideriamo la successione $\{G_n\}$ il cui termine n-mo è la media geometrica dei primi n termini della successione $\{a_n\}$ cioè

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_n} \quad .$$

Usando il fatto che

$$\lg_a G_n = \frac{\lg_a a_1 + \ldots + \lg_a a_n}{n}$$

e sfruttando il risultato dell'esercizio precedente e dell'esercizio 1.5, dimostrare che

(8) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} G_n = \ell \; .$$

Far vedere con un esempio che la precedente implicazione non è invertibile.

2.11 - Consideriamo la successione

$$1, 2, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots \quad ;$$

verificare, facendo uso della (8), che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \ .$$

2.12 - Provare, usando i risultati degli esercizi 2.9 e 2.11, che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lg_a n}{n} = 0$$

dove a è un numero reale positivo diverso da 1.

2.13 - Provare che, se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni regolari ed è definitivamente $a_n \leq b_n$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

§ 3 - Operazioni con i limiti.

Date due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ci proponiamo di studiare il comportamento della successione il cui termine generale è $s_n = a_n + b_n$.

Distinguiamo vari casi.

1° caso - Le successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sono convergenti.

Denotiamo rispettivamente con a e b i loro limiti. Fissato $\varepsilon>0$ esistono due indici ν',ν'' tali che

$$(9) \qquad \begin{array}{lll} a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon & \text{se} & n>\nu' \\ b-\varepsilon<b_n<b+\varepsilon & \text{se} & n>\nu'' . \end{array}$$

Pertanto se $n>\nu = \max\{\nu';\nu''\}$ risulta

$$(a+b)-2\varepsilon < a_n+b_n <(a+b)+2\varepsilon \; ;$$

ciò equivale a dire (cfr. DEF. 1) che

$$(10) \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b= \lim_{n\to\infty} a_n+ \lim_{n\to\infty} b_n .$$

2° caso - Una delle due successioni, per esempio $\{a_n\}$ diverge positivamente, l'altra è regolare ma non diverge negativamente cioè

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \ell > -\infty \; .$$

In base alle PROP. 1 e 2 del § 2 $\{b_n\}$ è limitata inferiormente; esiste quindi un numero reale B tale che $b_n \geq B \quad \forall n\in N$. Inoltre, se $K\in]0,+\infty[$ esiste un indice ν tale che $a_n > K$ per $n>\nu$. Pertanto risulta

$$a_n+b_n > K + B \qquad \text{se} \quad n>\nu \ .$$

Essendo K arbitrario (cfr. DEF.2 ed osservazione 3) risulta

(10)' $$\lim_{n\to+\infty} (a_n+b_n) = +\infty \ .$$

OSSERVAZIONE 4 - E' interessante notare che nel corso della precedente dimostrazione, in relazione alla successione $\{b_n\}$, si è usato esclusivamente il fatto che tale successione è inferiormente limitata. Ciò comporta che la (10)' continua a sussistere se $\{a_n\}$ *diverge positivamente e $\{b_n\}$ si mantiene limitata inferiormente pur senza essere regolare.*

3° caso - Una delle due successioni, per esempio $\{a_n\}$ diverge negativamente, l'altra è regolare ma non diverge positivamente (più in generale è superiormente limitata).

Ragionando analogamente al caso precedente si ha

(10)'' $$\lim_{n\to+\infty} (a_n+b_n) = -\infty.$$

Se si adottano le seguenti convenzioni

(11) $$\begin{array}{lll} r+(+\infty)=+\infty \quad , & r+(-\infty)=-\infty & \forall r\in R \\ (+\infty)+(+\infty)=+\infty & (-\infty)+(-\infty)=-\infty & \end{array}$$

le (10)', (10)" possono essere scritte sotto la forma (10). Si ha pertanto in sintesi:

> Se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ con $a, b \in \overline{R}$ risulta
>
> (10) $$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a+b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim b_n$$
>
> dove il significato della scrittura $a+b$ è quello ovvio se $a, b \in R$ ovvero quello indicato da una delle relazioni (11).

4° caso. Una delle successioni diverge positivamente e l'altra diverge negativamente.

Nulla può dirsi in tal caso circa il comportamento della successione $\{a_n+b_n\}$.

Infatti se per esempio

i) $a_n = n^2+n$, $b_n = -n^2$

ii) $a_n = n^2$, $b_n = -(n^2+n)$

iii) $a_n = n + \frac{1}{n}$, $b_n = -n$

iv) $a_n = n+(-1)^n$, $b_n = -n$

in tutti e quattro i casi si ha

(12) $$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$$

mentre la successione $\{a_n+b_n\}$ diverge positivamente, nel caso i), negativamente nel caso ii), è infinitesima nel caso iii) ed è oscillante nel caso iv).

Quando si verifica l'eventualità (12) si dice che il limite della successione $\{a_n+b_n\}$ si presenta nella

forma indeterminata $+\infty - \infty$;

a tale espressione non si dà alcun significato in $\overline{R}$.

Consideriamo ora la successione il cui termine generale è $p_n = a_n \cdot b_n$. Per studiarne il comportamento distinguiamo vari casi.

1° caso - Le successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *sono convergenti*. Indichiamo con a,b i rispettivi limiti. Valgono le (9); inoltre la successione $\{b_n\}$, essendo convergente, è limitata: esiste quindi una costante positiva B tale che $|b_n| \leq B$ qualunque sia l'indice n. Si ha allora, se $n>\nu = \max\{\nu',\nu''\}$

$$|a_n b_n - a\cdot b| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab|$$

$$\leq |b_n|\ |a_n - a| + |a|\,|b_n - b| \leq (B+|a|)\cdot\varepsilon\ .$$

Poichè la quantità $(B+|a|)\varepsilon$ può essere considerata u na "quantità positiva arbitraria", dalla DEF. 1 si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n .$$

2° caso - Una delle due successioni, per esempio $\{a_n\}$ *diverge, l'altra è regolare ma non infinitesima,*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \ell \neq 0 \quad \textit{con} \quad \ell \in \overline{\mathbb{R}} .$$

Tanto per fissare le idee supponiamo $\{a_n\}$ divergente positivamente e $\ell>0$. Allora, per la DEF. 2, comunque si fissi $K \in]0,+\infty[$ esiste un indice ν' tale che

$$a_n > K \qquad \text{se} \qquad n>\nu' \ ;$$

inoltre, per la proposizione 4, indicato con α un numero reale tale che $0<\alpha<\ell$, esiste un indice ν'' per il quale si ha

$$b_n>\alpha \qquad \text{se} \qquad n>\nu'' \ .$$

Pertanto se $n>\nu = \max\{\nu', \nu''\}$ risulta $a_n b_n > \alpha K$ e quindi, essendo la quantità positiva αK arbitraria, sempre per la DEF. 2 risulta

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = +\infty \ .$$

In modo analogo si prova che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b<0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b>0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b<0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty \quad .$$

Se si adottano le seguenti convenzioni

$$(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty \quad , \quad (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$(13) \left| \quad r\cdot(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad r>0 \\ \\ -\infty & \text{se} \quad r<0 \end{cases} \qquad r\cdot(-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{se} \quad r>0 \\ \\ +\infty & \text{se} \quad r<0 \end{cases} \right.$$

sinteticamente si ha:

> Se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ con $a,b\in\overline{R}$ risulta
>
> (14) $\lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = a\cdot b = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$
>
> dove il significato della scrittura $a\cdot b$ è quello ovvio se $a,b\in R$ ovvero quello indicato da una delle relazioni (13).

OSSERVAZIONE 5 - Nel 2° caso in realtà non interviene l'ipotesi che la successione $\{b_n\}$ sia regolare ma bensì che si abbia definitivamente $b_n>\alpha>0$ o $b_n<\alpha<0$.

3° caso - Una delle successioni diverge mentre l'altra è infinitesima.

Nulla può dirsi circa il comportamento della successione $\{a_n \cdot b_n\}$. Infatti, se per esempio

i) $a_n = n^2 \quad , \quad b_n = \frac{1}{n}$

ii) $a_n = n \quad , \quad b_n = \frac{1}{n^2}$

iii) $a_n = n \quad , \quad b_n = \frac{1}{n}$

iv) $a_n = n \quad , \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n}$

in tutti e quattro i casi risulta

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

mentre la successione $\{a_n \cdot b_n\}$ diverge nel caso i), è infinitesima nel caso ii), converge ad 1 nel caso iii) ed è oscillante nel caso iv).

Si dice allora che il limite della successione $\{a_n \cdot b_n\}$ si presenta nella

forma indeterminata $0 \cdot (\pm\infty)$;

a tali espressioni non si dà alcun significato in $\overline{R}$.

OSSERVAZIONE 6 - Dalla (14) si ha subito

(15) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \overline{R}$, $\alpha \in R \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha a = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Questa volta la scrittura $\alpha \cdot a$ va intesa eguale a zero se $\alpha=0$ anche quando $a=\pm\infty$; infatti in tal caso la successione $\{\alpha a_n\}$ essendo costantemente eguale a zero ha per limite zero.

OSSERVAZIONE 7 - Dalla (10) e dalla (15) si ha

(16) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

dove, ovviamente, la scrittura a secondo membro della (16) perde di significato se entrambi i limiti valgono $(+\infty)$ o $(-\infty)$.

Preliminarmente allo studio della successione quoziente $\{a_n/b_n\}$ occupiamoci della successione $\{1/b_n\}$ con $b_n \neq 0$ per ogni $n \in N$. Distinguiamo vari casi.

1° caso - La successione $\{b_n\}$ *converge a* $b \neq 0$.

Allora, fissato $\varepsilon>0$, esiste un indice ν' tale che

$$|b_n-b| < \varepsilon \qquad \text{se} \quad n>\nu' \ .$$

Inoltre (cfr. esercizio 1.4 e prop. 4) esiste un indice ν'' tale che

$$|b_n| > \frac{|b|}{2} \qquad \text{se} \quad n>\nu'' \ ,$$

e quindi

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|} \qquad \text{se} \quad n>\nu''.$$

In definitiva se $n>\nu = \max\{\nu',\nu''\}$ si ha:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n-b|}{|b_n||b|} < \frac{2\varepsilon}{b^2} \quad ;$$

dall'arbitrarietà di ε discende che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \ .$$

2° caso - La successione $\{b_n\}$ *diverge*. Per fissare le idee supponiamo $\{b_n\}$ divergente positivamente. Fissato allora $K > 0$ esiste un indice ν tale che $b_n > K$ per $n>\nu$ e quindi, sempre per $n>\nu$

$$\frac{1}{b_n} < \frac{1}{K} .$$

Essendo $\frac{1}{K}$ un arbitrario numero positivo si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0 .$$

3° caso - La successione $\{b_n\}$ è infinitesima e inoltre definitivamente positiva o definitivamente negativa .

Se tanto per fissare le idee la successione $\{b_n\}$ è definitivamente positiva, fissato $\varepsilon>0$, esiste un indice ν tale che

$$0<b_n<\varepsilon \qquad \text{se} \quad n>\nu .$$

Risulta allora

$$\frac{1}{b_n} > \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{se} \quad n>\nu \quad ;$$

essendo $\frac{1}{\varepsilon}$ un arbitrario numero positivo si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = +\infty .$$

In modo analogo si dimostra che, se $\{b_n\}$ è definitivamente negativa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = -\infty .$$

OSSERVAZIONE 8 - Se la successione infinitesima $\{b_n\}$ non è nè definitivamente positiva nè definitivamente negativa la successione $\{1/b_n\}$ è oscillante. Su ciò torneremo più avanti (cfr. es.5.4).

Consideriamo ora la successione il cui termine generale è $q_n = \frac{a_n}{b_n}$ $(b_n \neq 0)$.

Mettendo insieme quanto precedentemente detto riguardo la successione $\{\frac{1}{b_n}\}$ e il risultato sul limite del prodotto di due successioni, si ha in sintesi

> Se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ con $a,b \in \overline{R}$, e inoltre $b_n \neq 0$ per ogni $n \in N$, risulta:
>
> (17) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$
>
> dove il significato della scrittura a/b è quello ovvio se $a,b \in R$ e $b \neq 0$, altrimenti è quello indicato qui appresso:
>
> $a/b = 0$ se $a \in R$, $b = \pm\infty$
>
> $a/b = +\infty$ se $a = +\infty$, $0 < b \in R$
>
> $a/b = +\infty$ se $a = -\infty$, $0 > b \in R$

$$a/b = -\infty \quad \text{se} \quad a=+\infty \quad , \quad 0>b\in R$$

$$a/b = -\infty \quad \text{se} \quad a=-\infty \quad , \quad 0<b\in R \quad .$$

Inoltre

$a/b=+\infty$ se $0<a\in\bar{R}$, $b=0$ e $\{b_n\}$ definitivamente positiva

$a/b=+\infty$ se $0>a\in\bar{R}$, $b=0$ e $\{b_n\}$ definitivamente negativa

$a/b=-\infty$ se $0<a\in\bar{R}$, $b=0$ e $\{b_n\}$ definitivamente negativa

$a/b=-\infty$ se $0>a\in\bar{R}$, $b=0$ e $\{b_n\}$ definitivamente positiva

Infine la successione è oscillante se $a\neq 0$, $b=0$ e $\{b_n\}$ non è né definitivamente positiva né definitivamente negativa.

Restano esclusi dal precedente schema i seguenti casi:

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad .$

Si dice allora che il limite della successione $\{a_n/b_n\}$ si presenta in una delle *forme indeterminate*

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\ ,\ \frac{0}{0}\ ;$$

a tali espressioni non si dà alcun significato in $\overline{R}$.

Consideriamo infine la successione il cui termine generale è $a_n^{\,b_n}$ con $a_n>0$ per ogni $n\in N$. Fissato un numero reale c, per esempio, maggiore di 1 si ha

$$(a_n)^{b_n} = c^{\,b_n \lg_c a_n}\ ;$$

in base a quanto affermato negli esempi 2.7 e 2.8 è sufficiente allora calcolare il limite della successione $\{b_n \lg_c a_n\}$. Utilizzando la (14) e il risultato nell'esercizio 2.9 si ottiene sinteticamente:

Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$ e $a_n>0$ per ogni $n\in N$ si ha:

$$(18)\quad \lim_{n\to\infty} a_n^{\,b_n} = a^b = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

dove il significato della scrittura a^b è quello ovvio se $a,b\in R$ e $a>0$, altrimenti

$a^b=0$	se	$a=0$,	$b>0$	o	$b=+\infty$
$a^b=+\infty$	se	$a=0$,	$b<0$	o	$b=-\infty$
$a^b=+\infty$	se	$0<a<1$,	$b=-\infty$		
$a^b=0$	se	$0<a<1$,	$b=+\infty$		

$a^b = 0$	se	$a>1$,	$b=-\infty$
$a^b = +\infty$	se	$a>1$,	$b=+\infty$

Rimangono eslcusi da tale schema quattro casi che danno luogo ad altrettante *forme indeterminante:*

$$0^0 \ , \ 1^{(+\infty)} \ , \ 1^{(-\infty)} , \ (+\infty)^0 \ .$$

Complementi ed esercizi

3.1 - Si consideri la successione $\frac{n+a}{n+b}$; essendo

$$\frac{n+a}{n+b} = \frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{b}{n}}$$

si ha ovviamente $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+a}{n+b} = 1$. Verificare che, più in generale, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^h + a_1 n^{h-1} + \ldots + a_h}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots + b_k} = \begin{cases} (+\infty)\cdot\left(\frac{a_0}{b_0}\right) & \text{se } h>k \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{se } h=k \\ 0 & \text{se } h<k \end{cases}$$

dove h, k sono due naturali e $a_0(\neq 0), a_1, \dots, a_n, b_0(\neq 0)$, $b_1, \dots, b_k$ sono numeri reali .

3.2 - Facendo uso del risultato dell'esercizio 2.3 calcolare il limite della successione $\{n^\alpha \cdot \text{sen}\,\frac{1}{n}\}$ dove α è un parametro reale .

3.3 - Verificare che

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \lg_a n = 0$ $(\alpha>1, 0<a\neq 1)$, ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\text{sen}\,\frac{1}{n}} = 1$

iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, iv) $\lim_{n\to\infty} (n-\sqrt{n}) = +\infty$,

v) $\lim_{n\to\infty} (\lg_a(n+b) - \lg_a n) = 0$ $(b>-1,\ 0<a\neq 1)$.

vi) $\lim_{n\to\infty} (a^{n+b} - a^n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1,\ b>0 \\ -\infty & \text{se } a>1\ \ b<0 \\ 0 & \text{se } 0<a<1,\ \forall b\in R \end{cases}$.

3.4 - Se $a>1$ ed $\alpha \in R$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty .$$

Suggerimento: si consideri la successione il cui termine generale è

$$\lg_a\left(\frac{a^n}{n^\alpha}\right) = n - \alpha \lg_a n = n \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n} \lg_a n\right) ;$$

il risultato si ottiene ricordando gli esercizi 2.12 e 2.9.

3.5 - i) Considerata la successione il cui termine generale è $b_n = (-1)^n/n$ verificare che la successione $\{1/b_n\}$ è oscillante;

ii) verificare che:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n+1}{n^3} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2+\text{sen } n\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{n} = +\infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-3^{-n}}{\left|\text{sen } \frac{1}{n}\right|} = +\infty$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lg_3 n+n-2n^4}{n^4} = -2$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lg_2 n - \lg_2(5+n))\sqrt[n]{n+1} = 0$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n^2-1}{n^2+1} + n3^{n-2} - n3^n\right] = -\infty$; g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}-(2/3)^n\right) = 1$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{3n-1}{4-\pi n} + \frac{n^3}{6^n+5^n}\right] = -\frac{3}{\pi}$; i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}\cdot(2^{n+\pi}-2^n) = +\infty$

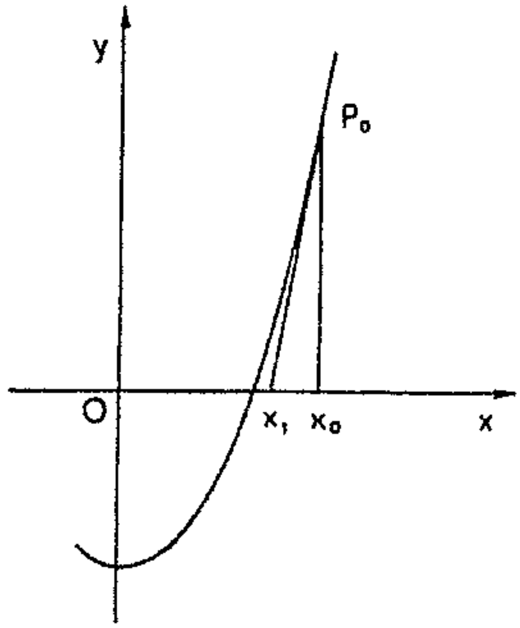
l) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}\,\lg_3\sqrt[n]{n}+4) = 4$; m) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3^n}{3^{\sqrt{n}}}\cdot n\cdot\text{sen }\frac{1}{n}\right) = +\infty$

n) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{4n^2-1}{n^2+2n+1}} - \frac{2^n-1}{2^n+1}\right) = \sqrt[3]{4} - 1$;

o) $\lim\limits_{n\to\infty} [(-1)^n+4]\cdot \dfrac{(n+1)^3}{\lg_2(n+1)} =+\infty$; p) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n+1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2n+1}} =2$

q) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\lg_3 n} =+\infty$.

3.6 - Vogliamo con il seguente esempio dare un procedimento per il calcolo approssimato di $\sqrt{2}$. Consideriamo la parabola di equazione $y=x^2-2$. Fissiamo x_0 positivo tale che $x_0^2>2$ e consideriamo il punto della parabola $P_0\equiv(x_0,x_0^2-2)$. Indichiamo con x_1 l'ascissa del punto di intersezione della tangente alla parabola in P_0 e l'asse delle x:



$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0+\frac{2}{x_0}\right) .$$

Ripetendo tale procedimento a partire da x_1 si determina un punto x_2 tale che

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1+\frac{2}{x_1}\right) .$$

Si definisce in tal modo per "ricorrenza" una successione $\{x_n\}$ mediante la posizione

$$(19) \qquad x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right) .$$

Tale successione è, per costruzione, decrescente e inferiormente limitata ($\sqrt{2}$ ne è un minorante!). Per la PROP. 3 essa è allora convergente: sia ℓ il suo limite. Passando al limite nella (19) si ottiene

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$$

cioè $\ell = \sqrt{2}$.

3.7 - Si consideri la successione il cui termine generale è

$$(20) \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad ;$$

il suo limite si presenta nella forma indeterminata $1^{(+\infty)}$. La convergenza di tale successione si ottiene provando che essa è crescente e limitata.

a) *Crescenza.* Per la formula del binomio di Newton si ha

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\,\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\,\frac{n!}{n^n} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \le 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots$$

$$\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

b) *Limitatezza.* Sempre per la formula del binomio di Newton si ha

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\dots+$$

$$+\frac{1}{2^{n-1}} = 2+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-2}}\right) =$$

$$=2+\frac{1}{2}\ \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3 .$$

Il limite della successione (20) si indica con il simbolo "e" e si chiama *numero di Neper* . Si può dimostrare che e è irrazionale; risulta $e=2,71828\dots$.
Sulle proprietà di tale numero ritorneremo più avanti.

3.8 - Per *media armonica di* k numeri (positivi) $a_1, \ldots$ $\ldots, a_k$ si intende la quantità H_k tale che

$$\frac{k}{H_k} = \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_k} .$$

Data una successione a termini positivi $\{a_n\}$ consideriamo la successione $\{H_n\}$ il cui termine n-mo è la media armonica dei primi n termini della successione $\{a_n\}$, cioè

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

Dimostrare facendo uso del risultato dell' esercizio 1.5 e della (17) che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell (\in [0,+\infty]) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} H_n = \ell .$$

3.9 - Consideriamo due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergenti rispettivamente ad a e b. Vale l'eguaglianza:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1}{n} = a \cdot b$$

Si ha ovviamente

$$\frac{a_1 b_n+\ldots+a_n b_1}{n} = b\,\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} + \frac{a_1(b_n-b)+\ldots+a_n(b_1-b)}{n}$$

Posto $x_n = \dfrac{a_1(b_n-b)+\ldots+a_n(b_1-b)}{n}$ e denotato con A un maggiorante dell'insieme $\{|a_n|\}$ si ha ancora

$$|x_n| \leq A \left| \frac{|b_1-b|+\ldots+|b_n-b|}{n} \right|$$

da cui si deduce, ricordando il risultato dell'es.15, che la successione $\{x_n\}$ è infinitesima.

Applicando ancora il risultato sulle medie aritmetiche appena ricordato si ottiene l'asserto.

§ 4 - Elementi di topologia della retta reale.

Sia A un sottoinsieme di R.

DEFINIZIONE 4 - Si dice che $x_0 \in R$ è *punto di accumulazione* per A se ogni intorno I di x_0 contiene almeno, un punto di A distinto da x_0, cioè $I \cap (A-\{x_0\}) \neq \emptyset$.

Sottolineamo che un punto di accumulazione per A può appartenere o meno ad A: ad esempio lo zero è punto di accumulazione sia per [0,1] che per]0,1].

Un punto $x_0 \in A$ che non è di accumulazione per A viene detto *punto isolato di* A: in tal caso deve esistere un intorno di x_0 la cui intersezione con A si riduce al solo punto x_0.

Osserviamo esplicitamente che, *se x_0 è di accumulazione per* A, *ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di* A. Infatti, in caso contrario, esisterebbe un intorno $]a,b[$ di x_0 tale che

$$]a,b[\ \cap\ (A-\{x_0\}) = \{x_1,\dots,x_k\}\ .$$

Supposto per comodità $x_1<x_2<\dots<x_k$, x_0 deve appartenere ad uno solo degli intervalli $]a,x_1[,]x_1\ x_2[, \dots,]x_k,b[$; l'intersezione di tale intervallo con A si riduce quindi di più al solo punto x_0 e ciò contraddice il fatto che x_0 è di accumulazione per A.

Quindi *un insieme dotato di punti di accumulazione deve necessariamente essere infinito;* un insieme infinito però non sempre ha punti di accumulazione: basti in proposito pensare ad N e Z. Si può d'altro canto dimostrare il seguente

TEOREMA DI BOLZANO - *Ogni sottoinsieme A di R contenente infiniti punti e limitato ha almeno un punto di accumulazione.*

Poichè A è limitato esso è contenuto in un intervallo $[a,b]$ con $a,b\in R$. Dividiamo tale intervallo mediante il punto medio; si ottengono in tal modo due intervalli almeno uno dei quali contiene infiniti punti di A; denotiamo con $[a_1,b_1]$ quello dei due intervalli che contiene infiniti punti di A se uno solo di essi gode di tale proprietà, ovvero l'intervallo a sinistra se entrambi contengono infiniti punti di A. Risulta ovviamente

$$a \leq a_1 < b_1 \leq b \qquad e \qquad (b_1 - a_1) = \frac{(b-a)}{2} .$$

A partire dall'intervallo $[a_1, b_1]$ si costruisce con lo stesso procedimento un intervallo $[a_2, b_2]$, contenente infiniti punti di A, con

$$a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1 \qquad e \qquad (b_2 - a_2) = \left(\frac{b_1 - a_1}{2}\right) = \frac{(b-a)}{2^2} .$$

Più in generale, costruito l'intervallo $[a_n, b_n]$, a partire da questo si ottiene l'intervallo $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contenente infiniti punti di A con

(21) $\quad a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b \qquad \forall\, n \in N$

(22) $\quad b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2} = \dfrac{(b-a)}{2^{n+1}} .$

Abbiamo in tal modo due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ la prima crescente, la seconda decrescente. Inoltre da (21) si deduce che i loro sostegni sono separati e da (22) che essi sono contigui; indichiamo con c lo elemento di separazione cioè

$$\sup_n a_n = c = \inf_n b_n .$$

Consideriamo un generico intorno $I =]\alpha,\beta[$ di c;per le proprietà dell'estremo inferiore e dell ' estremo superiore esistono due elementi a_n , b_m tali che

tali

$$\alpha < a_n \leq c \leq b_m < \beta .$$

Se, tanto per fissare le idee, è $n \leq m$ risulta

$$\alpha < a_n \leq a_m \leq c \leq b_m < \beta$$

cioè $[a_m , b_m] \subset]\alpha,\beta[$. Poichè, per costruzione, $[a_m , b_m]$ contiene infiniti punti di A, abbiamo dimostrato che un generico intorno $I =]\alpha,\beta[$ di c contiene punti di A distinti da c, cioè che c è di accumulazione per A.

OSSERVAZIONE 9 - Nella dimostrazione del teorema di Bolzano abbiamo scelto, all'ennesimo passo, come intervallo $[a_{n+1} , b_{n+1}]$ quello a sinistra se entrambi gli intervalli in cui $[a_n, b_n]$ viene suddiviso contengono infiniti punti di A. Ciò può apparire strano ma in realtà tale accorgimento serve solo a svincolare la dimostrazione dall'assioma della scelta (cfr. Cap. I, § 7). A tale proposito è buona abitudine, quando, si vuole ottenere un risultato, cercare nei limiti del possibile di dare "dimostrazioni costruttive" , ciò allo scopo di ottenere un procedimento ("algoritmo") che permette di arrivare alla soluzione.

Vogliamo ora evidenziare il legame tra la nozione di punto di accumulazione e quella di limite di una successione.

PROPOSIZIONE 6 - *Il punto x_0 è di accumulazione per $A \subseteq R$ se e solo se esiste una successione $\{x_n\}$ di elementi di A, con $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in N$, convergente, ad x_0.*

Se x_0 è di accumulazione per A, comunque si prende $n \in N$ l'insieme $]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}[\cap (A-\{x_0\})$ è non vuoto: "scegliendo" un elemento x_n in tale insieme si ha una successione con le caratteristiche richieste.

Viceversa se x_0 è limite di una successione di elementi di A distinti da x_0, dalla definizione di limite discende immediatamente che x_0 è di accumulazione per A.

OSSERVAZIONE 10 - Nel caso della precedente dimostrazione si è fatto uso dell'assioma della scelta. Si noti il carattere "esistenziale" del risultato: si riesce cioè a dimostrare che "esiste" una successione che approssima x_0 ma non viene fornito un "algoritmo" per calcolarne i termini. Vedremo nel paragrafo successivo che in alcuni casi si riesce a dare una "legge" per costruire la successione che tende ad x_0.

DEFINIZIONE 5 - Un sottoinsieme C di R si dice *chiuso* se contiene tutti i suoi punti di accumulazione. Un insieme $A \subseteq R$ si dice *aperto* se il suo complementare è chiuso.

PROPOSIZIONE 7 - *Un sottoinsieme C di R è chiuso se e solo se ogni successione convergente di elementi di C ha per limite un elemento di C.*

Infatti se x_0 è di accumulazione per C in base alla prop. 6 esisterà una successione di elementi di C convergente ad x_0; ma allora, per ipotesi, $x_0 \in C$ e quindi C è chiuso.

Viceversa se C è chiuso sia $\{x_n\}$ una successione di elementi di C che converge ad un punto x_0. Se esiste un n tale che $x_0 = x_n$ allora ovviamente $x_0 \in C$. Se, invece è $x_0 \neq x_n$ per ogni n allora in base alla definizione di limite si ha subito che x_0 è di accumulazione per C e quindi $x_0 \in C$ poichè C è chiuso.

Complementi ed esercizi

4.1 - Determinare i punti di accumulazione e i punt isolati dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

a) $\{ \frac{1}{n} ; n \in N\}$; b) Q; c) $R-Q$, d) $\{(-1)^n : n \in N\}$.

4.2 - Sia x_0 un punto isolato di A; provare che, s $\{x_n\}$ è una successione di elementi di A convergent ad x_0, risulta definitivamente $x_n = x_0$.

4.3 - Dimostrare che un sottoinsieme A di R è apert se e solo se, per ogni $x \in A$, esiste un intorno di contenuto in A.

4.4 - Sia A un sottoinsieme limitato di R dotato di punti di accumulazione; verificare che l'insieme dei punti di accumulazione di A è dotato di minimo e di massimo.

4.5 - Prendendo spunto dalla dimostrazione del Teorema di Bolzano provare il seguente "Principio degli intervalli inclusi di Cantor": data una successione di intervalli chiusi di R, totalmente ordinata rispetto alla relazione di inclusione, la loro intersezione è non vuota e coincide con un intervallo chiuso [a,b] eventualmente costituito da un unico punto.
Far vedere inoltre con un esempio che l'intersezione può risultare vuota se si toglie l'ipotesi che gli intervalli siano chiusi.

4.6 - Con riferimento alla dimostrazione del Teorema di Bolzano supponiamo $A\subseteq[0,1](=[a_o,b_o])$. Ad ogni naturale $n\in N$ associamo la cifra 0 o la cifra 1 a seconda che si scelga come intervallo $[a_n,b_n]$ l'intervallo a sinistra o quello a destra a seguito della suddivisione in due parti dell'intervallo $[a_{n-1},b_{n-1}]$. Si ottiene in tal modo un allineamento

$$0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots \tag{23}$$

dove α_k vale o 0 o 1. Si noti che non è esclusa l'eventualità che tale allineamento sia periodico di periodo 1: in tal caso, come è consuetudine, lo si identifichi con l'allineamento che si ottiene mutando in 1 l'ultima cifra non periodica e in 0 le cifre periodiche. Si dimostri che (23) è la rappresentazione in base 2 del numero reale c, cioè del punto di accumulazione di A ottenuto nella dimostrazione del Teorema di Bolzano.

Come vanno modificate la dimostrazione del suddetto teorema e le precedenti considerazioni in modo da ottenere la rappresentazione decimale di c?

§ 5 - Successioni estratte

Sia $\{n_k\}$ una successione di naturali tale che

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots \qquad ;$$

ovviamente risulta $\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$. Data una successione $\{a_n\}$, la successione $\{a_{n_k}\}_{k\in N}$ cioè

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$$

si dice *successione estratta* da $\{a_n\}$ o, anche, *sottosuccessione* di $\{a_n\}$.
Ad esempio

$$a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2k+1}, \ldots$$

$$a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2k}, \ldots$$

sono sottosuccessioni di $\{a_n\}$; invece

$$a_2, a_1, a_6, a_5, \ldots$$

non è una successione estratta da $\{a_n\}$.

PROPOSIZIONE 8 - *Ogni sottosuccessione* $\{a_{n_k}\}$ *di una successione* $\{a_n\}$ *regolare è regolare; inoltre* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$

Sia $\ell\in\overline{R}$ il limite di $\{a_n\}$; allora, comunque si fissi un intorno I di ℓ esiste un indice ν tale che $a_n\in I$ per $n>\nu$. Poichè la successione $\{n_k\}$ diverge positivamente esiste un indice $\bar{k}$ tale che, per $k>\bar{k}$, risulti $n_k > \nu$; ne consegue che

$$a_{n_k}\in I \qquad \text{se} \quad k > \bar{k}$$

cioè, per la definizione (4) di limite, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell$

Nel § 2 abbiamo provato che le successioni convergenti sono limitate e le successioni divergenti non sono limitate osservando anche che tali risultati non sono invertibili. Sussiste, però, in proposito la seguente

PROPOSIZIONE 9 - *Se la successione* $\{a_n\}$ *è limitata, essa possiede un'estratta convergente. Se* $\{a_n\}$ *non è limitata superiormente (inferiormente) essa possiede un'estratta divergente positivamente (negativamente).*

Supponiamo $\{a_n\}$ limitata. Se il sostegno di $\{a_n\}$ è finito almeno un termine della successione si ripete infinite volte; esiste cioè una successione di indici

$$n_1<n_2<\ldots<n_k < \ldots$$

tale che $a_{n_k} = a$ per ogni $k\in N$. In tal caso la sottosuccessione convergente è proprio la successione costante $\{a_{n_k}\}$. Se invece il sostegno è infinito è possibile, essendo la successione limitata, applicare il Teorema di Bolzano: quindi il sostegno di $\{a_n\}$ ha un punto di accumulazione che denotiamo con a. In base alla prop. 6 esiste una successione di elementi del sostegno di $\{a_n\}$ che converge ad a; purtroppo *non siamo in grado di stabilire se tale successione è una sottosuccessione di* $\{a_n\}$. Per superare tale difficolta' dobbiamo riprendere e precisare la dimostrazione della prop. 6.

Denotiamo con J_1 l'intorno di a $]a-1,a+1[$. Consideriamo l'insieme I_1 (infinito!) degli indici dei termini della successione che cadono in I_1; tale sottoinsieme di N ha un minimo che indichiamo con n_1. Resta in tal modo determinato il termine della successione a_{n_1}; tale termine è sostanzialmente quello cui compete l'indice più piccolo tra gli indici degli infiniti termini della successione che cadono in I_1. Posto $I_2=]a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}[$ consideriamo come nel caso precedente l'insieme J_2 (infinito!) degli indici dei termini della successione che cadono in I_2; poichè $I_2 \subset I_1$ risulta anche $J_2 \subseteq J_1$ quindi il minimo di J_2 è maggiore o uguale di n_1. Poichè a noi interessa un indice maggiore di n_1, invece di prendere il più piccolo elemento di J_2, prendiamo il "secondo per grandezza" e denotiamolo con n_2; ovviamente $n_2>n_1$.

Più in generale, posto $I_k =]a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k}[$ e indicato con J_k l'insieme infinito degli indici dei termini della successione che cadono in I_k, denotiamo con n_k quel naturale di J_k che è il "k-mo per grandezza".
In tal modo abbiamo "costruito" una successione di naturali

$$n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$$

e quindi una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ tale che

$$a-\frac{1}{k}<a_{n_k}<a+\frac{1}{k}$$

dal momento che, per costruzione, $a_{n_k} \in I_k =]a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k}[$.
Dal teorema del confronto discende

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a .$$

La seconda parte del teorema si ottiene procedendo in modo analogo.
Nel corso della dimostrazione della precedente proposizione abbiamo anche provato la seguente

PROPOSIZIONE 10 - *Se* a *è punto di accumulazione per il sostegno della successione* $\{a_n\}$ *esiste una sottosuccessione di* $\{a_n\}$ *che converge ad* a.

Combinando i risultati fin qui ottenuti si ha

PROPOSIZIONE 11 - *Un sottoinsieme* C *di* R *è chiuso e* *limitato se e solo se ogni successione di elementi di* C *ha una sottosuccessione che converge ad un elemento di* C.

Sia C chiuso e limitato; se $\{a_n\}$ è una successione di elementi di C da essa, per la prop. 9 è possibile estrarre una successione convergente il cui limite, per la proposizione 7, appartiene a C. Viceversa supponiamo che da ogni successione di elementi di C è possibile estrarre una successione convergente il cui limite è in C. Allora per le prop.7 e 8 C è chiuso. Se C non fosse limitato, per esempio superiormente, per ogni $n \in N$, esisterebbe $x_n \in C$ tale che $x_n > n$. Ma allora $\lim x_n = +\infty$ e ciò è assurdo perchè per ipotesi da $\{x_n\}$ si dovrebbe poter estrarre una successione convergente.

D'ora in poi un insieme chiuso e limitato verrà detto *compatto*.

Complementi ed esercizi

5.1 - Determinare sottosuccessioni regolari delle seguenti successioni

a) $\{\text{sen } n \frac{\pi}{2}\}$; b) $\{(-1)^n n\}$; c) $\{(1+(-1)^n)n\}$;

d) $\{ \frac{n}{2} - [\frac{n}{2}] \}$.

5.2 - Data una successione $\{a_n\}$ provare che essa è regolare se e solo se $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1}$.

5.3 - Verificare che $\lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

Suggerimento: dalla formula di duplicazione $1-\cos\frac{1}{n} = 2\,\text{sen}^2\frac{1}{2n}$, ricordando l'esercizio 2.3 e la prop. 8 si ottiene il risultato.

5.4 - Sia $\{b_n\}$ con $b_n \neq 0$ una successione infinitesima che non risulti né definitivamente positiva né definitivamente negativa (cfr. OSSERVAZIONE 8 del § 3); provare che la successione $\{\frac{1}{b_n}\}$ è oscillante.

Suggerimento: dimostrare che esiste una sottosuccessione $\{b_{n_k}\}$ definitivamente positiva e una $\{b_{m_k}\}$ definitivamente negativa. Per quanto detto nel § 3 si ha

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{b_{n_k}} = +\infty \quad , \quad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{b_{m_k}} = -\infty \ .$$

Concludere invocando la prop. 8.

.5 - Completare la dimostrazione della prop. 9 contemplando il caso in cui la successione $\{a_n\}$ sia non limitata superiormente o inferiormente.

§ 6 - Massimo e minimo limite

Sia data una successione $\{a_n\}$.

a) Ipotesi: $\{a_n\}$ è limitata.

Per la prop. 9 esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ convergente: sia ℓ il suo limite. Se il sostegno di $\{a_n\}$ è, per esempio, contenuto in $[a,b]$ si ha $a \le a_{n_k} \le b$ e quindi, anche, per la prop. 5, $a \le \ell \le b$. Denotiamo ora con E il sottoinsieme di R i cui elementi sono i limiti delle sottosuccessioni convergenti di $\{a_n\}$, cioè

$$\ell \in E \iff \text{esiste una sottosuccessione } \{a_{n_k}\} : \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell .$$

Per quanto detto all'inizio E è non vuoto e inoltre è limitato essendo contenuto in $[a,b]$

DEFINIZIONE 6 - Posto

$$\ell' = \inf E \qquad , \qquad \ell'' = \sup E$$

ℓ' è detto *minimo limite* della successione $\{a_n\}$, ℓ'' è detto *massimo limite* di $\{a_n\}$. Si scrive anche

$$\ell' = \lim_{n\to\infty}{}' a_n \qquad , \qquad \ell'' = \lim_{n\to\infty}{}'' a_n .$$

OSSERVAZIONE 11 - In realtà *ℓ' è il minimo di* E e ℓ'' *il* *massimo di* E. Riguardo ad ℓ', infatti due casi sono possibili.

- ℓ' è di accumulazione per il sostegno di $\{a_n\}$: per la prop. 10 esiste una sottosuccessione di $\{a_n\}$che converge ad ℓ', quindi $\ell' \in E$.
- ℓ' non è di accumulazione per il sostegno di $\{a_n\}$: in tal caso esiste un intorno $I=]\ell'-\varepsilon,\ell'+\varepsilon[$ di ℓ' in cui non cadono punti di $\{a_n\}$ distinti da ℓ'. Essendo $\ell' = \inf E$, esiste, per la seconda proprietà dell'estremo inferiore, $\ell_\varepsilon \in E$ tale che

$$\ell'-\varepsilon < \ell' \leq \ell_\varepsilon < \ell' + \varepsilon \quad ;$$

quindi I è anche un intorno di ℓ_ε. Poichè $\ell_\varepsilon \in E$ esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ che converge ad ℓ_ε. Per la definizione di limite (4) esiste allora un indice $\bar{k}$ tale che $a_{n_k} \in I$ se $k > \bar{k}$. Poichè I non contiene termini della successione $\{a_n\}$ distinti da ℓ', deve essere $a_{n_k} = \ell'$ per $k > \bar{k}$; quindi ℓ' è il limite della successione definitivamente costante $\{a_{n_k}\}$ cioè $\ell' \in E$. In modo analogo si ragiona per ℓ''.

Il seguente risultato permette di caratterizzare il massimo limite e il minimo limite di una successione $\{a_n\}$ limitata:

PROPOSIZIONE 12 - *Un numero reale* $\ell''(\ell')$ *è il massimo limite (minimo limite) di una successione limitata* $\{a_n\}$ *se e solo se*

(α) $\quad \forall\varepsilon>0 \;\; \exists\nu : \forall n>\nu \quad a_n < \ell''+\varepsilon \quad (a_n > \ell'-\varepsilon)$

(β) $\quad \forall\varepsilon>0,\ \forall\nu\ \ \exists n>\nu\ :\ a_n>\ell''-\varepsilon\ \ (a_n<\ell'+\varepsilon)$.

Ci limitiamo a dimostrare il risultato per il massimo limite. Dimostriamo la seguente equivalenza

$$(\alpha)\quad \Leftrightarrow \quad \ell'' \text{ è un maggiorante di } E .$$

Infatti supponiamo che ℓ'' verifichi la proprietà(α); allora se esistesse un elemento ℓ di E con $\ell > \ell''$, scelto $\varepsilon > 0$ tale che $\ell > \ell'' + \varepsilon$ e detta $\{a_{n_k}\}$ una sottosuccessione di $\{a_n\}$ convergente ad ℓ, per la definizione (4) di limite, a_{n_k} dovrebbe appartenere all'intorno $]\ell''+\varepsilon, +\infty[$ di ℓ per k maggiore di un certo indice $\bar{k}$. Ciò però contrasta con l'ipotesi (cfr. (α)) che in $]\ell''+\varepsilon,+\infty[$ cadono al più un numero finito di termini della successione $\{a_n\}$. Viceversa supponiamo che ℓ'' sia un maggiorante per E; allora se, fissato $\varepsilon>0$, in $]\ell''+\varepsilon,+\infty[$ cadessero infiniti termini di $\{a_n\}$ essi andrebbero a costituire una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$. Essendo ovviamente $\{a_{n_k}\}$ limitata esisterebbe per la PROP. 9 una sottosuccessione di $\{a_{n_k}\}$ e, quindi, di $\{a_n\}$ convergente ad un numero reale $\ell\in[\ell''+\varepsilon, +\infty[$. Quindi $\ell\in E$ contro l'ipotesi che ℓ'' è un maggiorante per E.
Per quanto concerne la proprietà (β) osserviamo innanzitutto che essa equivale a dire che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono infiniti valori di n tali che $a_n\in]\ell''-\varepsilon,+\infty[$.

Ciò premesso dimostriamo che

$$(\beta) \iff \forall\varepsilon>0 \quad \exists\, \ell\in E \; ; \; \ell''-\varepsilon<\ell .$$

Infatti, se ℓ'' verifica la proprietà (β), in $]\ell''-\frac{\varepsilon}{2}, +\infty[$ cadono infiniti termini di $\{a_n\}$ che vanno a costituire una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$. Tale sottosuccessione, essendo limitata, ha un'estratta (che è ovviamente anche una sottosuccessione di $\{a_n\}$) che converge ad $\ell\in[\ell''-\frac{\varepsilon}{2}, +\infty[$; esiste quindi un elemento ℓ di E tale che $\ell>\ell''-\varepsilon$. Viceversa, se, per ogni $\varepsilon>0$, esiste un elemento $\ell\in E$ tale che $\ell>\ell''-\varepsilon$, denotata con $\{a_{n_k}\}$ una sottosuccessione convergente ad ℓ si ha, per la definizione di limite, $a_{n_k}\in\,]\ell''-\varepsilon,+\infty[$ per k maggiore di un opportuno indice $\bar{k}$. Quindi in $]\ell''-\varepsilon, +\infty[$ cadono infiniti termini di $\{a_n\}$, risulta cioè verificata la proprietà (β).

Abbiamo dunque verificato che (cfr. anche prop.2 cap II)

$$(\alpha)+(\beta) \iff \ell''=\sup E$$

e cioè l'asserto.

Come immediata conseguenza della precedente proposizione si ha il seguente importante risultato:

PROPOSIZIONE 13 - *Una successione* $\{a_n\}$ *converge ad* ℓ *se e solo se*

$$\lim_{n\to\infty}{}' a_n = \lim_{n\to\infty}{}'' a_n = \ell .$$

Se $\{a_n\}$ converge ad ℓ, per la prop. 8 l'insieme E risulta costituito dal solo elemento ℓ; quindi si ha $\ell'' = \ell'' = \ell$.

Se, viceversa, $\ell' = \ell''$, per la proprietà (α) della prop.12, fissato $\varepsilon>0$ si ha:

- $\exists \nu_1 \quad : \quad a_n < \ell'' + \varepsilon \qquad$ per $n>\nu_1$
- $\exists \nu_2 \quad : \quad a_n > \ell' - \varepsilon \qquad$ per $n>\nu_2$.

Posto $\ell = \ell' = \ell''$, se $n > \nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ risulta

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

cioè $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

OSSERVAZIONE 12 - E' consuetudine definire il minimo limite di $\{a_n\}$ nel seguente modo

$$\ell' = \sup_k e_k' \qquad \text{dove} \qquad e_k' = \inf_n \{a_n \ ; \ n>k\}$$

o, anche, sinteticamente

$$(24)' \qquad \ell' = \sup_k \inf_{n>k} a_n \ ;$$

analogamente si definisce

$$\ell'' = \inf_k e''_k \quad \text{dove} \quad e''_k = \sup\{a_n \ ; \ n>k\}$$

o, anche, sinteticamente

$$\ell'' = \inf_k \sup_{n>k} a_n \ . \tag{24}''$$

Per rendersi conto che con tali posizioni si riottengono il massimo e il minimo limite di $\{a_n\}$basterebbe dimostrare che le quantità (24)' e (24)" verificano, le proprietà (α) e (β) rispettivamente per il minimo e il massimo limite. Di ciò lasciamo la cura al lettore .

b) Ipotesi : $\{a_n\}$ è limitata inferiormente ma non superiormente.

Denotiamo sempre con E il sottoinsieme di R i cui elementi sono limiti di sottosuccessioni convergenti (se esistono!) di $\{a_n\}$. Possono presentarsi due sottocasi:

b_1)$E = \emptyset$. Denotato con a l'estremo inferiore di$\{a_n\}$, comunque si fissi K>a nell'intervallo [a,K] cadono un numero finito di termini della successione $\{a_n\}$ (altrimenti per la PROP. 9 esisterebbe una sottosuccessione di $\{a_n\}$ convergente ad un punto di [a,K]contro l'ipotesi che $E = \emptyset$). Esiste quindi un indice ν tale che $a_n > K$ per $n>\nu$ cioè

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \ .$$

b_2) $E \neq \emptyset$. Posto

$$\ell' = \inf E \ (\geq a)$$

si può verificare, come nel caso a), che ℓ' è il minimo di E e che esso può essere caratterizzato mediante le proprietà (α), (β) della PROP. 12 Si pone allora

$$\ell' = \lim_{n\to\infty}{}' \, a_n \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty}{}'' \, a_n = +\infty$$

e si dice che ℓ' è il *minimo limite* di $\{a_n\}$ e $(+\infty)$ il *massimo limite* di $\{a_n\}$.

c) Ipotesi: $\{a_n\}$ è limitata superiormente ma non inferiormente .

Come nel caso precedente possono presentarsi due eventualità:

c_1) $E = \emptyset$. Allora risulta

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \ .$$

c_2) $E \neq \emptyset$. Posto allora $\ell'' = \sup E$, ℓ'' è, per definizione il *massimo limite* di $\{a_n\}$; ovviamente ℓ'' è caratterizzato dalle proprietà (α), (β) della PROP.12. Si pone inoltre $\lim\limits_{n\to\infty}{}' \, a_n = -\infty$.

d) Ipotesi: $\{a_n\}$ non è limitata né inferiormente né superiormente.
In tal caso $\{a_n\}$ è sicuramente non regolare in quanto, per la PROP. 9 , esiste una sottosuccessione divergente positivamente ed una

divergente negativamente.
Si pone allora

$$\lim_{n\to\infty}{}' \, a_n = -\infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty}{}'' \, a_n = +\infty \; .$$

A conclusione di quanto sopra esposto se con $\bar{E}$ si indica il sottoinsieme di $\bar{R}$ costituito dai limiti delle sottosuccessioni regolari (convergenti e divergenti) di $\{a_n\}$, si ha in ogni caso

$$\lim_{n\to\infty}{}' \, a_n = \min \bar{E} \quad , \quad \lim_{n\to\infty}{}'' \, a_n = \max \bar{E} \; .$$

Vale inoltre la seguente

PROPOSIZIONE 14 - $\{a_n\}$ *è regolare se e solo se* $\bar{E}$ *è costituito da un unico elemento* ℓ*; in tal caso si ha:*

$$\lim_{n\to\infty}{}' a_n = \lim_{n\to\infty}{}'' a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \ell \; .$$

Complementi ed esercizi

6.1 - Determinare il massimo e il minimo limite delle seguenti successioni

a) $\{(-1)^n\}$; b) $\{(1+ \frac{(-1)^n}{2})^n\}$; c) $\{\arcsen(\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2})\}$

d) $\arccos(\cos \frac{n\pi}{2})$; e) $\{(-2)^n\}$; f) $\{-(2)^{(-1)^n \cdot n}\}$.

[$-1,1$; $0, +\infty$; $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$; $0,\pi$; $-\infty,+\infty$; $-\infty,0$]

6.2 - Data una successione $\{a_n\}$ denotiamo con $\{A_n\}$ la successione delle medie aritmetiche (cfr. es. 1.5); provare che

$$\ell' = \lim_{n\to\infty}{}' a_n \le \lim_{n\to\infty}{}' A_n \le \lim_{n\to\infty}{}'' A_n \le \lim_{n\to\infty}{}'' a_n = \ell''.$$

Diamo un cenno della dimostrazione nel caso in cui $\ell', \ell'' \in R$. Per la proprietà (α) della PROP. 12, fissato $\varepsilon>0$ esiste un indice ν tale che

$$\ell'-\varepsilon < a_n < \ell'' + \varepsilon \qquad \text{se} \quad n>\nu;$$

ciò comporta ovviamente

$$\ell'-\varepsilon < \frac{a_{\nu+1}+\ldots+a_n}{n-\nu} < \ell'' + \varepsilon \qquad \text{se} \quad n>\nu .$$

Essendo inoltre $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_\nu}{n} = 0$ esiste un indice $\nu'>\nu$ tale che

$$-\varepsilon < \frac{a_1+\ldots+a_\nu}{n} < \varepsilon \qquad \text{se} \quad n>\nu'.$$

Pertanto dal momento che

$$A_n = \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = \frac{a_1+\ldots+a_\nu}{n} + \frac{n-\nu}{n}\,\frac{a_{\nu+1}+\ldots+a_n}{n-\nu}$$

si ha per $n > \nu'$:

$$-\varepsilon+\left(\frac{n-\nu}{n}\right)(\ell'-\varepsilon) < A_n < \varepsilon + \left(\frac{n-\nu}{n}\right)(\ell''+\varepsilon).$$

Poichè d'altro canto si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \left\{-\varepsilon+\left(\frac{n-\nu}{n}\right)(\ell'-\varepsilon)\right\}=\ell'-2\varepsilon,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\varepsilon+\left(\frac{n-\nu}{n}\right)(\ell''+\varepsilon)\right\} = \ell'' + 2\varepsilon$$

esiste un indice $\nu''>\nu'$ tale che, per $n>\nu''$, risulti

$$-\varepsilon+\left(\frac{n-\nu}{n}\right)(\ell'-\varepsilon)>\ell'-3\varepsilon; \quad \varepsilon+\left(\frac{n-\nu}{n}\right)(\ell''+\varepsilon)< \ell''+3\varepsilon.$$

In definitiva, se $n>\nu''$, risulta $\ell'-3\varepsilon<A_n<\ell''+3\varepsilon$. Pertanto i termini della successione $\{A_n\}$, tranne al più un numero finito, sono contenuti nell'intervallo $]\ell'-3\varepsilon,\ell''+3\varepsilon[$; nell'intervallo chiuso $[\ell'-3\varepsilon,\ell''+3\varepsilon]$ devono allora trovarsi i limiti delle sottosuccessioni regolari $\{A_{n_k}\}$ di $\{A_n\}$. Allora per l'arbitrarietà di ε deve essere $\ell' \leq \lim_{n\to\infty} A_{n_k} \leq \ell''$ e quindi l'asserto, per come sono stati definiti il minimo e massimo limite.

Il lettore completi la dimostrazione negli altri casi ($\ell'=-\infty$ e/o $\ell''=+\infty$).

6.3 - Data una successione $\{x_n\}$ verificare che

$$\lim_{n\to\infty}{}' a^{x_n} = a^{\lim'_{n\to\infty} x_n} \leq a^{\lim''_{n\to\infty} x_n} = \lim_{n\to\infty}{}'' a^{x_n} \qquad (a > 1)$$

$$\lim_{n\to\infty}{}' a^{x_n} = a^{\lim''_{n\to\infty} x_n} \leq a^{\lim'_{n\to\infty} x_n} = \lim_{n\to\infty}{}'' a^{x_n} \qquad (0<a<1)$$

e analogamente, se $x_n > 0$,

$$\lim_{n\to\infty}{}' \lg_a x_n = \lg_a (\lim_{n\to\infty}{}' x_n) \leq \lg_a (\lim_{n\to\infty}{}'' x_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}{}'' \lg_a x_n \qquad (a > 1)$$

$$\lim_{n\to\infty}{}' \lg_a x_n = \lg_a (\lim_{n\to\infty}{}'' x_n) \leq \lg_a (\lim_{n\to\infty}{}' x_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}{}'' \lg_a x_n \qquad (0<a<1).$$

6.4 - Data una successione $\{a_n\}$ sia $\{G_n\}$ la successione delle medie geometriche (cfr. es. 2.10); provare che

$$\lim_{n\to\infty}{}' a_n \leq \lim_{n\to\infty}{}' G_n \leq \lim_{n\to\infty}{}'' G_n \leq \lim_{n\to\infty}{}'' a_n .$$

Traccia: usare gli esercizi 6.2 e 6.3.

§ 7 - Criterio di convergenza di Cauchy.

Per riconoscere se una successione è convergente è molto utile il seguente risultato:

CRITERIO DI CONVERGENZA DI CAUCHY - *La successione* $\{a_n\}$ *è convergente se e solo se*

$$(\gamma) \qquad \forall\varepsilon>0 \quad \exists\nu: \quad n,m>\nu \Rightarrow |a_n-a_m|<\varepsilon \ .$$

Supponiamo $\{a_n\}$ convergente: sia a il suo limite. Fissato $\varepsilon>0$ esiste un indice ν tale che

$$|a_n-a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{se } n>\nu$$

Quindi se $n,m>\nu$ risulta

$$|a_n-a_m| = |a_n-a+a-a_m| \le |a_n-a|+|a_m-a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ ;$$

quindi $\{a_n\}$ verifica la proprietà (γ).
Viceversa, supponiamo che $\{a_n\}$ verifichi la proprietà (γ). Allora in primo luogo $\{a_n\}$ è limitata. Infatti, fissato $\bar{n} > \nu$, per ogni $m > \nu$ si ha

$$a_{\bar{n}} - \varepsilon < a_m < a_{\bar{n}} + \varepsilon \ .$$

Posto $h=\min\{a_1,\ldots,a_\nu,a_{\bar{n}} - \varepsilon\}$, $K=\max\{a_1,\ldots,a_\nu,a_{\bar{n}}+\varepsilon\}$

si ha ovviamente

$$h \leq a_n \leq k \qquad \forall n \in N$$

cioè la limitatezza di $\{a_n\}$. Denotiamo con $\ell', \ell'' \in R$ rispettivamente il minimo limite e il massimo limite di $\{a_n\}$. Per quanto detto nel § 6 (cfr. OSSERVAZIONE 11) esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ convergente ad ℓ' ed una sottosuccessione $\{a_{m_k}\}$ convergente ad ℓ''. Scelto $\varepsilon>0$, per (γ) esiste un indice ν tale che

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \text{se} \qquad n,m>\nu .$$

Sia $\bar{k}$ tale che per $k > \bar{k}$ riesca $n_k > \nu$, $m_k > \nu$; risulta allora

$$|a_{n_k} - a_{m_k}| < \varepsilon \qquad \text{se} \qquad k > \bar{k} .$$

Quindi (cfr. es. 1.4 e PROP. 5)

$$|\ell' - \ell''| = \lim_{k\to\infty} |a_{n_k} - a_{m_k}| \leq \varepsilon$$

Essendo ε arbitrario deve essere $\ell' = \ell''$: per la PROP. 13 $\{a_n\}$ risulta allora convergente.

CAPITOLO VIII

SERIE NUMERICHE

§ 1 - Definizioni e prime proprietà.

Se $h \in R$ consideriamo la successione

(1) $S_1 = 1, \quad S_2 = 1+h, \ldots, S_n = 1+h+\ldots+h^{n-1}, \ldots;$

è noto dall'algebra elementare che

$$S_n = \begin{cases} n & \text{se} \quad h=1 \\ \dfrac{1-h^n}{1-h} & \text{se} \quad h\neq 1 \end{cases},$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad h \geq 1 \\ \\ \dfrac{1}{1-h} & \text{se} \quad |h| < 1 \end{cases}$$

inoltre la successione $\{S_n\}$ è oscillante se $h \leq -1$. Limitandoci al caso $-1<h<1$ potremo dire con locuzione impropria di aver eseguito "la somma degli infiniti termini $1, h, h^2, \dots, h^{n-1}, \dots$" e di aver ottenuto come risultato $1/(1-h)$. Si riesce in tal modo, per esempio, a giustificare la seguente uguaglianza (cfr. Cap. II § 5)

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k \overline{9} = \alpha_0, \alpha_1 \dots (\alpha_k + 1) \quad .$$

Infatti

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k \overline{9} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1 \dots \alpha_k}{10^k} + 10^{-k} \cdot 0,\overline{9}$$

$$0,\overline{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^n} + \dots = \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{10^{n-1}} + \dots\right) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1 \quad ,$$

per cui

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k \overline{9} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1 \dots \alpha_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{k-1} (\alpha_k + 1) .$$

Il precedente discorso può essere formalizzato intro cendo la nozione di serie. Sia $\{a_n\}$ una successione; si dice *serie* di termine generale a_n e si indica con il simbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ovvero con

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

la successione $\{S_n\}$ così definita

$$S_1=a_1, \quad S_2=a_1+a_2, \ldots, S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n;$$

S_n si dice *somma parziale n-ma* della serie.

Una serie si dice *convergente, divergente positivamente, divergente negativamente, oscillante* se tale è la succes - sione $\{S_n\}$; una serie non oscillante si dice anche *regolare*. Il limite S di S_n, se esiste, si chiama som- ma della serie e si scrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

La serie (1) si chiama *serie geometrica di ragione* h.

Poichè in sostanza lo studio di una serie è ricondot to a quello della successione delle sue somme parzia i, ci limitiamo qui a tradurre nel "linguaggio del- e serie" i classici risultati sulle successioni.

a) *Operazioni con le serie* - Se

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \overline{R} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \in \overline{R}$$

e $\lambda \in R$, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = A + B \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda A$$

ogni qualvolta i simboli $A+B$, λA abbiano senso in $\overline{R}$. Inoltre, se $\lambda=0$, $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n) = 0$ qualunque sia $\{a_n\}$.

b) *Criterio di convergenza di Cauchy* - La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se e solo se verifica la seguente proprietà

$$(\gamma) \qquad \forall \varepsilon>0 \ \exists \nu : \left| \sum_{i=n+1}^{n+k} a_i \right| = |a_{n+1}+\ldots+a_{n+k}| < \varepsilon \quad \forall n>\nu, \ \forall k \in N.$$

La dimostrazione si ottiene applicando il criterio di Cauchy per le successioni a $\{S_n\}$ e osservando che

$$|S_{n+k} - S_n| = |a_{n+1}+\ldots+a_{n+k}| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+k} a_i \right| .$$

c) *Serie a termini non negativi* - Se $a_n \geq 0 \quad \forall n$ si ha $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$; quindi la successione delle

somme parziali della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è crescente.
Dalla PROP. 3 del Cap. VII si ha allora che *una serie a termini non negativi è regolare;* più precisamente essa converge o diverge positivamente a seconda che la successione delle sue somme parziali sia limitata o meno.

Concludiamo tale paragrafo con il seguente risultato che dà una condizione necessaria per la convergenza di una serie:

PROPOSIZIONE 1 - Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *è convergente la successione* $\{a_n\}$ *è infinitesima.*

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in R$ si ha $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = A$ e quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$.

Complementi ed esercizi

1.1. - Consideriamo la *serie armonica*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Essendo (cfr. es. 3.7 del Cap. VII) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \quad \forall n$, si ha anche

$$\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \lg e \quad \Rightarrow \quad \lg\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

dove con il simbolo lg si intende il logaritmo in base e. Dalla precedente diseguaglianza, indicata con S_n la somma parziale n-ma della serie armonica, si ha $S_n > \lg(n+1)$. Dal teorema del confronto (Cap. VII § 2) si ha $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$. *La serie armonica quindi diverge.* Si osservi che il suo termine generale è infinitesimo: quindi la condizione necessaria contenuta nell'enunciato della proposizione 1 non è sufficiente.

1.2 - Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \quad ;$$

la sua somma è 1. Più in generale si verifichi che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+h)(n+k)} = \frac{1}{k-h} \sum_{i=h+1}^{k} \frac{1}{i}$$

dove $h < k$ sono due naturali.

1.3 - Consideriamo le serie

i) $(-1)^n a$ con $a \neq 0$,

ii) $a+a-a-a+a+a-a-a+\ldots.$,

iii) $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$, $a_n \in R$,

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2n}{(n^2+1)(n^2-2n+2)}$.

Verificare che i), ii) sono oscillanti, iii) converge, diverge od oscilla a seconda che la successione, $\{a_n\}$ converge, diverge, oscilla. Se $\lim a_n = 1$ si ha $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) = 1 - a_1$. Verificare inoltre che iv) converge ed ha per somma -1.

1.4 - Verificare che le serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k}+\ldots$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2k+1}+\ldots$$

sono divergenti positivamente.

1.4 - Consideriamo il seguente allineamento decimale periodico $0,\overline{\beta_1\ldots\beta_h}$, cui corrisponde il numero reale

$$\frac{\beta_1}{10}+\frac{\beta_2}{10^2}+\ldots+\frac{\beta_h}{10^h}+\frac{\beta_1}{10^{h+1}}+\ldots+\frac{\beta_h}{10^{2h}}+\frac{\beta_1}{10^{2h+1}}+\ldots$$

Indicato con $\beta_1\beta_2\ldots\beta_h$ il numero naturale $\beta_1 10^{h-1} + \beta_2 10^{h-2} + \ldots + \beta_h$ si ha ovviamente

$$\frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_h}{10^h}=\frac{\beta_1}{10}+\frac{\beta_2}{10^2}+\ldots+\frac{\beta_h}{10^h}$$

e quindi

$$0,\overline{\beta_1\ldots\beta_h} = \frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_h}{10^h}\left\{1+\frac{1}{10^h}+\frac{1}{(10^h)^2}+\ldots\right\}$$

$$= \frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_h}{10^h}\,\frac{1}{1-\frac{1}{10^h}} = \frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_h}{10^h-1}$$

Si ottiene in tal modo la cosiddetta *frazione generatrice* di $0,\overline{\beta_1\ldots\beta_h}$. Ricavare più in generale la frazione generatrice di $M,\alpha_1\ldots\alpha_k\overline{\beta_1\ldots\beta_h}$

§ 2 - Serie a termini non negativi: criteri di convergenza e divergenza.

Calcolare la somma di una serie non sempre è agevole; d'altronde in molti casi interessa sapere semplicemente se la serie converge o diverge. Si è pertanto indotti a cercare dei criteri mediante i quali stabilire il comportamento qualitativo ovvero, come si è soliti dire, il "carattere" di una serie.

A tale proposito è utile la seguente proposizione la cui dimostrazione discende banalmente dall'esercizio 2.13 del cap. VII:

PROPOSIZIONE 2 - *Dati due serie a termini non negativi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *se* $a_n \leq b_n$ *per ogni* $n\in N$ *si hanno le seguenti implicazioni*

i) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *convergente* $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *convergente*

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergente* $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergente.*

OSSERVAZIONE 1 - Le implicazioni i), ii) della prop. 2 restano valide nell'ipotesi che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sia *definitivamente maggiorata* dalla serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, cioè se $a_n \leq b_n$ per $n > \nu$. Nel caso dell'implicazione i), posto

$$A_n = a_1+\ldots+a_\nu+a_{\nu+1}+\ldots+a_n=a_1+\ldots+a_\nu+\sum_{k=\nu+1}^{n} a_k$$

$$B_n=b_1+\ldots+b_\nu+b_{\nu+1}+\ldots+b_n=b_1+\ldots+b_\nu+\sum_{k=\nu+1}^{n} b_k$$

si ha:

$\{B_n\}$ convergente $\Rightarrow$ $\sum_{k=\nu+1}^{n} b_k$ convergente $\Rightarrow$ (per la prop. 2) $\sum_{k=\nu+1}^{n} a_k$ convergente $\Rightarrow$ $\{A_n\}$ convergente.

In modo analogo si procede nel caso dell'implicazione ii).

CRITERIO DELLA RADICE - *Data la serie a termini non negativi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se* $\lim_{n\to\infty}{}'' \sqrt[n]{a_n} < 1$ *la serie converge; se* $\lim_{n\to\infty}{}' \sqrt[n]{a_n} > 1$ *la serie di-*

verge.

Se $\lim\limits_{n\to\infty}'' \sqrt[n]{a_n} = \ell'' < 1$, fissato $\varepsilon > 0$ tale che $\ell''+\varepsilon=h < 1$, per la prima proprietà del massimo limite esiste un indice ν tale che, per $n > \nu$, sia $\sqrt[n]{a_n} < h$. Pertanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ è definitivamente maggiorata dalla serie geometrica convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h^n$ e quindi, per la OSSERV. 1, è convergente.

In modo analogo si dimostra la seconda parte.

CRITERIO DEL RAPPORTO - Sia $\{a_n\}$ *una successione a termini positivi; se* $\lim\limits_{n\to\infty}'' \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *la serie* $\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty} a_n$ *converge; se* $\lim\limits_{n\to\infty}' \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Se $\lim\limits_{n\to\infty}'' \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell'' < 1$, fissato $\varepsilon > 0$ tale che $\ell''+\varepsilon=h<1$, per la prima proprietà del massimo limite esiste un indice ν tale che, per $n>\nu$, sia $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < h$. Quindi

$$a_{\nu+2} < ha_{\nu+1},\ a_{\nu+3} < ha_{\nu+2} < h^2 a_{\nu+1};\ \ldots a_{\nu+k} < h^{k-1} a_{\nu+1},$$

cioè la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ è definitivamente maggiorata dalla serie geometrica convergente $a_{\nu+1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} h^n$. In base alla prop. 2 essa risulta convergente.

In modo analogo si dimostra la seconda parte.

OSSERVAZIONE 2 - Se si osserva che $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ è la successione delle medie geometriche della successione $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ (si ponga $a_0 = 1$), il criterio del rapporto si ottiene da quello della radice tenendo presente la relazione contenuta nell'es. 6.4 del Cap. VII. Quindi il criterio del rapporto "implica" quello della radice, cioè se si può applicare il criterio del rapporto si può applicare anche quello della radice. Nonostante però il carattere più generale del criterio della radice, il criterio del rapporto si lascia preferire in quanto di più semplice applicazione.

CRITERIO DEL CONFRONTO. *Siano* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *due successioni a termini non negativi. Se*

$$0 < \ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty$$

le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *hanno lo stesso carattere.*

Fissato $\varepsilon>0$ tale che $\ell-\varepsilon>0$ esiste un indice ν a partire dal quale si ha

$$\ell-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \ell + \varepsilon$$

e quindi $(\ell-\varepsilon)\, b_n < a_n < (\ell+\varepsilon)\, b_n$. La tesi segue allora dalla OSSERV. 1

Utile è infine il seguente criterio:

PROPOSIZIONE 3 - *Sia* $\{a_n\}$ *una successione decrescente e a termini positivi; la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se e solo se converge la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$

Consideriamo la somma parziale

$$S_{2^n-1} = \sum_{k=1}^{n} (a_{2^{k-1}} + a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k-1}) \; .$$

Poichè $\{a_n\}$ è decrescente si ha:

$$a_{2^{k-1}} + a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k-1} \le \underbrace{a_{2^{k-1}} + \ldots + a_{2^{k-1}}}_{2^{k-1} \text{ volte}} = 2^{k-1} a_{2^{k-1}}$$

$$a_{2^{k-1}} + a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k-1} \ge \underbrace{a_{2^k} + \ldots + a_{2^k}}_{2^{k-1} \text{ volte}} = 2^{k-1} a_{2^k}$$

da cui

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_{2^k} \le S_{2^n-1} \le \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_{2^{k-1}} \, .$$

Essendo la successione $\{S_{2^n-1}\}$ crescente e, quindi, regolare, essa converge se e solo se converge la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$. Poichè d'altra parte, essendo $\{S_n\}$ regolare $\{S_n\}$ converge se e solo se converge una sua estratta si ha l'asserto.

Consideriamo la *serie armonica generalizzata*

$$(2) \qquad 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\dots+\frac{1}{n^\alpha}+\dots \qquad (\alpha>0).$$

Per studiare il carattere di tale serie basta studiare, in base al criterio su esposto, il comportamento delle serie $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha}$. Quest'ultima è una serie geometrica di ragione $2^{1-\alpha}$ (cfr.(1)): per quanto detto all'inizio del § 1 essa converge se e solo se $2^{1-\alpha} < 1$ cioè se e solo se $\alpha>1$. In conclusione la serie (2) converge se $\alpha>1$ diverge positivamente se $\alpha\leq 1$.

Complementi ed esercizi

2.1 - Verificare che le seguenti serie sono convergenti

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,\pi^n}\ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n}\right)^n\ ;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{2}{n}\right)^n\ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4}\right)^n\frac{1}{n!}\ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3}\ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+2}}{5^{n+3}}\ \left(=\frac{27}{250}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n^2-7}{9n^2-2}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^3+n^2+2)^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2+\sqrt{n}}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\left[\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right]\right)^{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\log(n+1)]^{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n^2\left[\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right]} .$$

2.2 - Verificare che le seguenti serie sono divergenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt[n]{n}}\ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot n!\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\log(n+1)}}\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^{n^2\left[\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right]}$$

2.3 Verificare che

$\sum_{n=1}^{\infty} n!(t/n)^n$ converge per $t \in [0,e[$;

$\sum_{n=1}^{\infty} (nt)^n 1/n!$ converge per $t \in [0,1/e[$;

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n$ converge per ogni $t \in [0,+\infty[$.

§ 3 - Serie assolutamente convergenti

E' ben noto che in R vale la proprietà commutativa della somma; in altri termini dati k numeri reali $x_1, x_2, \ldots, x_k$ il valore della somma $x_1+x_2+\ldots+x_k$ non si altera permutando gli addendi. E' naturale chiedersi se una proprietà di questo tipo valga nel caso delle "somme infinite di numeri reali" o, più precisamente, nel caso delle serie
Cominciamo a considerare il caso di una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a termini non negativi e convergente. Sia $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Se $A = \{i_1, \ldots, i_k\}$ è un generico sottoinsieme finito di N poniamo

$$S_A = a_{i_1} + \ldots + a_{i_k} \tag{3}$$

si ha allora

$$S = \sup_A S_A \tag{4}$$

dove l'estremo superiore è, ovviamente, inteso al variare di A tra tutti i sottoinsiemi finiti di N. Infatti essendo $S = \sup_n S_n$, dove al solito S_n è la somma parziale n-ma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, è ovviamente $S \leq \sup S_A$; d'altra parte se A è un sottoinsieme finito di N, denotato con h il suo elemento più grande si ha: $S_A \leq S_h \leq \sup_n S_n = S$. e quindi la (4).

Allo stesso modo si verifica che se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è una serie a termini non negativi e se $\sup_A S_A = S < +\infty$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

OSSERVAZIONE 3 - In realtà si può verificare che la uguaglianza (4) sussiste se si prende come A un generico sottoinsieme, finito o infinito, di N. Ovviamente nel caso in cui A è infinito S_A è da intendersi come somma di una serie.

La caratterizzazione (4) della somma di una serie a termini non negativi convergente permette di concludere agevolmente che *la somma di una tale serie non cambia se si permutano in modo del tutto arbitrario i termini della serie stessa.* Ciò dipende dal fatto che se si considera una serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ottenuta dalla serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ permutandone i termini l'insieme delle somme

$$S'_A = b_{i_1} + \ldots + b_{i_k}$$

coincide ovviamente con l'insieme delle somme (3). Quindi coincidono i loro estremi superiori cioè le somme delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Consideriamo ora una generica serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

DEFINIZIONE 1 - La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si dice *assolutamente convergente* se è convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Vale la seguente:

PROPOSIZIONE 4 - *Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente essa è anche convergente.*

Se si applica il criterio di Cauchy alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un indice ν tale che

$$\sum_{i=n+1}^{n+k} |a_i| < \varepsilon \qquad \forall n>\nu \ , \ \forall k \in N.$$

D'altra parte per la proprietà triangolare del valore assoluto si ha

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+k} a_i \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} |a_i| \quad .$$

Da qui applicando il criterio di Cauchy alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si ottiene l'asserto.

Se adesso poniamo $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$ $a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$ risulta ovviamente

$$0 \leq a_n^+ \leq |a_n| \quad , \quad 0 \leq a_n^- \leq |a_n|$$

e, inoltre

$$|a_n| = a_n^+ + a_n^- \qquad\qquad a_n = a_n^+ - a_n^- .$$

Si ha allora che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge se e solo se convergono le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$; risulta inoltre

$$(5) \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = S^+ - S^- .$$

E' facile verificare, e lasciamo ciò al lettore, che *se una serie è convergente ma non assolutamente convergente* si ha: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$.

Sia da ora in poi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie assolutamente convergente; permutandone in modo del tutto arbitrario i termini si ottiene una serie che indichiamo con $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Se si considerano le due serie a termini non negativi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$$

ovviamente esse possono pensarsi ottenute permutando i termini delle due serie a termini non negativi e convergenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- ;$$

per quanto visto in precedenza si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$$

e quindi, per la (5):

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Abbiamo quindi provato che: *La somma di una serie assolutamente convergente non si altera permutandone i termini.*
Mostriamo che tale proposizione si può invertire cioè che: *se la somma di una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *convergente non si altera permutandone in modo arbitrario i termini la serie è assolutamente convergente.*
Se (per assurdo), la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non è assolutamente convergente, come già visto, le due serie $\Sigma\, a_n^+$, $\Sigma\, a_n^-$ sono divergenti positivamente.
Siano

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots , \qquad m_1 < m_2 < \ldots < m_h < \ldots$$

le due successioni divergenti di numeri naturali tali che

$$a_{n_k} \geq 0 \quad \forall k, \qquad a_{m_h} < 0 \quad \forall h .$$

Ovviamente $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$, $\sum_{h=1}^{\infty} a_{m_h} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = -\infty$.

Sia adesso k_1 un indice tale che

$$\sum_{k=1}^{k_1} a_{n_k} > 1 - a_{m_1} \quad ;$$

$k_2 > k_1$ un indice tale che:

$$(6) \qquad \sum_{k=k_1+1}^{k_2} a_{n_k} > 2 - a_{m_2} \quad .$$

In generale determinati $k_1, k_2, \ldots, k_{p-1}$ si sceglie k_p in modo tale che

$$\sum_{k=k_{p-1}+1}^{k_p} a_{n_k} > p - a_{m_p} \quad .$$

E' facile verificare che riordinando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nel modo seguente

$$a_{n_1} + \ldots + a_{n_{k_1}} + a_{m_1} + a_{n_{k_1+1}} + \ldots + a_{n_{k_2}} + a_{m_2} + \ldots + a_{n_{k_{p-1}+1}} + \ldots +$$

$$+ a_{n_{k_p}} + a_{m_p} + \ldots$$

si ottiene, in virtù della (6), una serie divergente positivamente; ciò contraddice l'ipotesi. Pertanto la serie Σa_n deve essere assolutamente convergente e cioè l'asserto.
In definitiva possiamo concludere che *le serie assolutamente convergenti si caratterizzano come quelle serie conver*

genti la cui somma non varia se si permutano in modo arbitrario i suoi termini.

Vogliamo ora mostrare con un esempio che esistono serie convergenti ma non assolutamente convergenti. Data infatti la serie

$$(7) \qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

consideriamo le somme parziali con indice pari $\{S_{2n}\}$ ed osserviamo che si ha:

$$S_{2n} = 1-\frac{1}{2}+\ldots-\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} =$$

$$= S_{2n-2}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} > S_{2n-2} \; ;$$

Quindi la successione $\{S_{2n}\}$ è crescente. Analogamente si prova che la successione $\{S_{2n+1}\}$ delle somme parziali di indice dispari è decrescente. Essendo

$$S_1 > S_{2n+1} = S_{2n}+\frac{1}{2n+1} > S_{2n} > S_2 \qquad (n>1)$$

le successioni $\{S_{2n}\}$, $\{S_{2n+1}\}$ sono limitate e quindi convergenti.
Poichè

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n+1}-S_{2n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = 0$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \in R$$

e quindi anche (cfr. es. 5.2 del precedente capitolo)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad .$$

La (7) non è però assolutamente convergente in quanto la serie i cui termini sono i valori assoluti dei termini di (7) è la serie armonica.

OSSERVAZIONE 4 - Data una successione a termini positivi $\{a_n\}$ dicesi serie alternante una serie del tipo

$$a_1 - a_2 + a_3 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots$$

Con gli stessi argomenti utilizzati per dimostrare la convergenza di (7) si ha:

- *Se la successione* $\{a_n\}$ *è decrescente e infinitesima la serie alternante* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *converge* .

Complementi ed esercizi

3.1 - Data una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente ma non assolutamente convergente, riordinarne i termini in modo da ottenere una serie divergente negativamente.

3.2 - Verificare che la serie

$$1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$$

è convergente per ogni valore positivo del parametro α. Per quali valori di α è anche assolutamente convergente ?

3.3 - Date due serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ si chiama *serie prodotto secondo Cauchy* delle serie considerate la serie il cui termine n-mo è

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1 \ .$$

Verifichiamo che, se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sono assolutamente convergenti, tale è anche $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Infatti si ha

$$|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n| \le \Big(|a_1||b_1|\Big) + \Big(|a_1||b_2| + |a_2||b_1|\Big) +$$

$$\ldots\ + \Big(|a_1||b_n| + |a_2||b_{n-1}| + \ldots + | + \ldots + |a_n||b_1|\Big) \le$$

$$\le \Big(|a_1| + \ldots + |a_n|\Big)\Big(|b_1| + \ldots + |b_n|\Big)$$

da cui ovviamente l'asserto.

Con l'ausilio dei risultati degli esercizi 1.5 e 3.9

del cap. VII il lettore provi che se

$$\Sigma a_n = A, \quad \Sigma b_n = B, \quad \Sigma c_n = C \quad \text{con} \quad A, B, C \in R$$

si ha

$$C = A \cdot B .$$

Traccia: detto C_n la somma parziale ennesima della serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ si ha:

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \ldots$$

3.4 - In quest'ultimo paragrafo abbiamo spesso usato l'espressione "permutare (riordinare) i termini di una serie" lasciando ad essa un significato "intuitivo"; il lettore provi a dare una definizione rigorosa.

3.5 - Provare che se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente si ha

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| .$$

3.6 - Consideriamo le serie

i) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^1 + a_k^2 + \ldots + a_k^r) \qquad r \geq 2, \quad r \in N$

ii) $a_1^1 + a_1^2 + \ldots + a_1^r + a_2^1 + a_2^2 + \ldots + a_2^r + \ldots + a_n^1 + a_n^2 + \ldots + a_n^r + \ldots$

Facili esempi mostrano che la serie i) può convergere senza che converga la serie ii); basta, infatti, pensare al caso seguente

$$a_k^1 = K, \quad a_k^2 = - K, \quad a_k^3 = \ldots = a_k^r = 0 .$$

In tal caso ovviamente la serie i) converge a zero ed ii) oscilla.

a) Sotto quale ipotesi la convergenza della serie i) implica quella della serie ii)?

b) Provare che se la serie ii) converge anche la serie i) converge.

Esaminare le questioni a) e b) nel caso della divergenza.

CAPITOLO IX

FUNZIONI: LIMITI, CONTINUITA', DERIVABILITA'

§ 1 - Definizioni

Consideriamo nel piano una "curva" C. Sia $P_o \in C$: cosa bisogna intendere per tangente a C nel punto P_o? ha sempre senso parlare di tangente ad una curva in un suo punto?
La definizione ingenua "la tangente a C in P_o è la retta che ha in comune con C il solo punto P_o" ben si adatta ad alcuni casi particolari come la circonferenza, l'ellisse etc. (cfr. Fig. 1); d'altro canto non appena si osservi che con tale definizione risulterebbe tangente ad un segmento AB in un punto P_o ogni retta del piano che intersechi AB e che non contenga AB (fig 1') si comprende subito" di essere fuori strada".

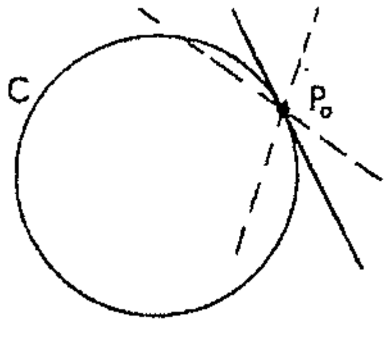


Fig. 1

La definizione data, in definitiva, non è proponibile per una generica curva del piano e, d'altra parte, non è pensabile confinare la nozione di tangente a curve particolari. Per raggiungere l'obiettivo di una definizione comprensiva di tutti i casi in cui intuitivamente una retta tangente esiste è necessario estendere la nozione di limite introdotta nel cap. VII.

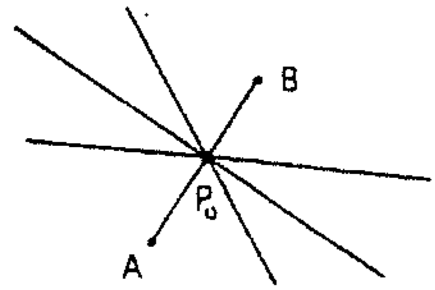


Fig.1'

Data una funzione f definita in un intervallo (aperto) I, consideriamo il grafico di f cioè il luogo dei punti del piano Oxy che "soddisfano l'equazione $y=f(x)$" (cfr. fig. 2).

Se $x_0, x_1 \in I$ e $x_1 \neq x_0$ poniamo

$$P_0=(x_0,f(x_0)),$$

$$P_1=(x_1,f(x_1)).$$

La retta passante per P_0 e P_1 (secante) ha equazione (cfr. Cap. IV § 3)

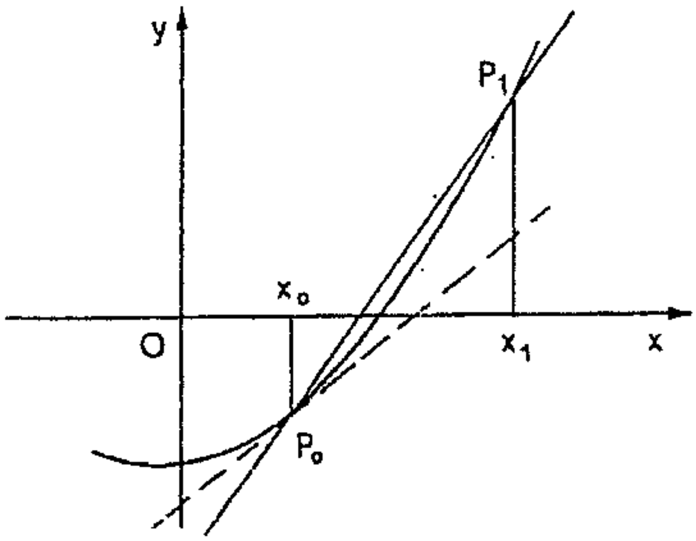


Fig. 2

$$(1) \qquad y-f(x_0) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0);$$

la quantità

$$\phi(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1-x_0}$$

ne rappresenta il coefficiente angolare. La funzione ϕ della variabile x_1 (x_0 è da considerare fissato) è detta *funzione rapporto incrementale* di f ed è ovviamente definita in $I-\{x_0\}$. Benchè la funzione ϕ non sia definita in x_0 ha senso studiare il "comportamento di ϕ in x_0"; se si verifica che, quando "x_1 tende ad x_0", il valore $\phi(x_1)$ della funzione ϕ "tende ad un certo valore $m\in R$" (in un senso che preciseremo più avanti) possiamo a buon diritto dire che la retta di equazione

$$y-f(x_0) = m(x-x_0)$$

è la "posizione limite" assunta dalla retta secante (1) allorquando "P_1 tende a P_0". Tale retta è, per definizione, la *tangente* al grafico di f in P_0.

a) CONVERGENZA

Volendo formalizzare quanto appena detto abbiamo bisogno di una definizione che estenda al caso delle funzioni la nozione di limite già introdotta per le successioni.

Sia f una funzione definita in un sottoinsieme $X \subseteq R$; se x_0 *è punto di accumulazione per* X, si dice che "f converge ad $\ell\in R$ per x che tende ad x_0" e si scrive

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

se la funzione f verifica la seguente proprietà

(2) $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta: \forall x\in X\cap]x_0-\delta,\ x_0+\delta[$ e $x\neq x_0$ risulti

$|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

b) DERIVATA

Tornando ora al problema da cui siamo partiti, se la funzione f è definita in un intervallo (aperto) I e se $x_0 \in I$, si dice che f è *derivabile* in x_0 *se la funzione rapporto incrementale è convergente in* x_0. In tal caso si pone

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

e la quantità $f'(x_0)$ si chiama *derivata* di f in x_0 e si denota anche con $Df(x_0)$.

Una volta introdotta tale notazione l'equazione della retta tangente nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ al grafico della funzione f, supposta derivabile in x_0 è

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \quad .$$

Se la funzione f è derivabile in ogni punto $x \in I$, si dice che f è derivabile in I, e la funzione

$$x \in I \to f'(x) \in R$$

viene detta *funzione derivata* o, semplicemente, *derivata* di f. Spesso in luogo di $f'(x)$ si userà uno dei simboli $Df(x)$, $\dfrac{df}{dx}$.

c) CONTINUITA'

E' importante osservare che nella definizione (2) di limite il valore che eventualmente la funzione f assume in x_0 non ha alcuna rilevanza. Pertanto a priori non c'è alcun legame tra il limite ℓ e $f(x_0)$ (ammesso ovviamente che f sia definita in x_0). Se risulta

(3) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

si dice che la funzione f *è continua in* x_0.

Si verifica facilmente che sussiste la (3) se e solo se f verifica la seguente proprietà

(4) $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta:\ \forall x\in X\cap]x_0-\delta,\ x_0+\delta[$ risulti

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Se la funzione f è continua in ogni punto di X che sia anche di accumulazione per X, si dice che f è *continua in* X.

A titolo di esempio consideriamo la funzione x^2 il cui grafico è la parabola di equazione $y=x^2$. Se $x_0\in R$ il rapporto incrementale

$$\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = x+x_0 \qquad x\neq x_0$$

tende ovviamente a $2x_0$ per x che tende ad x_0; ricordando il "significato geometrico" della derivata la retta tangente alla parabola in (x_0,x_0^2) ha equazione $y = x_0^2 + 2x_0(x-x_0)$.

La funzione x^2 è anche continua in x_0; infatti essendo $|x^2-x_0^2| = |x-x_0|\,|x+x_0|$ si può dimostrare che $|x^2-x_0^2|$ può rendersi "piccolo a piacere" a patto che x sia "sufficientemente prossimo ad x_0". Abbiamo volutamente sorvolato sui dettagli dal momento che più in generale si ha:

PROPOSIZIONE 1 - *Se* f *è definita in un intervallo aperto* I *ed è derivabile in* x_0, f *è continua in* x_0.

Fissato $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che

$$f'(x_o)-\varepsilon < \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} < f'(x_o)+\varepsilon$$

se $x \in I \cap]x_o-\delta, x_o+\delta[$ e $x \neq x_o$. Posto $M=\max\{|f'x_o)+\varepsilon|, |f'(x_o)-\varepsilon|\}$ si ha ovviamente

$$\frac{|f(x)-f(x_o)|}{|x-x_o|} \leq M$$

e quindi se $|x-x_o| < \frac{\varepsilon}{M}$, si ha $|f(x)-f(x_o)| < \varepsilon$ da cui (3).

d) DEFINIZIONE GENERALE DI LIMITE

Per completare il quadro delle definizioni di limite bisogna:

1°) contemplare, come già fatto nel caso delle successioni, l'eventualità che la funzione f in x_o "diverga positivamente o negativamente";
2°) dare significato alla scrittura $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ nel caso in cui $\sup X = +\infty$ cioè nel caso in cui la variabile x può assumere "valori arbitrariamente grandi";
3°) dare significato alla scrittura $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ nel caso in cui $\inf X = -\infty$.

Ritenendo ormai il lettore sufficientemente edotto sulla nozione di limite ci limitiamo senza ulteriore commenti a fornire un'unica definizione che contempli tutte le eventualità cui prima accennavamo.

Si lascia al lettore la cura di "esplicitare in termini di ε e δ" le varie definizioni di limite.

DEFINIZIONE 1 - Sia f definita in X; se $x_0 \in \overline{R}$ supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione per X se $x_0 \in R$ o che $\sup X = +\infty$ se $x_0 = +\infty$ o che $\inf X = -\infty$ se $x_0 = -\infty$. Se $\ell \in \overline{R}$ si dice che f *tende ad* ℓ *per* x *che tende ad* x_0 e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se è verificata la seguente proprietà: $\forall J$ (intorno di ℓ) $\exists I$ (intorno di x_0) tale che $\forall x \in X \cap I$ e $x \neq x_0$ risulti $f(x) \in J$.

In tal caso la funzione f si dice *regolare* in x_0: *convergente* in x_0 se $\ell \in R$, *divergente positivamente* se $\ell = +\infty$, *divergente negativamente* se $\ell = -\infty$.

A titolo di esemplificazione

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall K \in R\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, x \neq x_0,$ risulti $f(x) > K$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in R \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X \cap]\delta, +\infty[$ risulti $|f(x) - \ell| < \varepsilon$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall K \in R\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X \cap]-\infty, -\delta[$ risulti $f(x) < K$.

E' chiaro che la definizione 1 contiene come caso particolare la definizione (2) di funzione convergente in x_0. Inoltre se si tiene conto che una successione altro non è che una funzione definita in N, le definizioni 1,2,3 del Cap. VII rientrano come casi particolari nella definizione 1 su esposta.

e) LIMITE DESTRO E LIMITE SINISTRO

Consideriamo adesso la funzione $f(x) = 1/x$ definita in $R-\{0\}$; f non è regolare in 0. Se però denotiamo con f_1, f_2 le restrizioni di f rispettivamente, a $]-\infty,0[$ e $]0,+\infty[$ si ha:

$$\lim_{x\to 0} f_1(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0} f_2(x)=+\infty.$$

Tale fenomeno suggerisce la seguente

DEFINIZIONE 2 - Sia f definita in X, sia x_0 punto di accumulazione per $X_1=X\cap]-\infty,x_0[$ e per $X_2=X\cap]x_0,+\infty[$. Se la restrizione f_1 di f a X_1 è regolare in x_0 si dice che f ammette in x_0 *limite sinistro* e si pone

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-) \ .$$

Analogamente se la restrizione f_2 di f a X_2 è regolare in x_0 si dice che f ammette in x_0 *limite destro* e si pone

$$\lim_{x\to x_0} f_2(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+).$$

Lasciamo al lettore la cura di dimostrare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad (=\ell) \ .$$

Complementi ed esercizi

1.1 - Usando le proprietà della funzione esponenziale, logaritmo e potenza (cfr. Cap. III) verificare che

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } 0<a<1 \\ +\infty & \text{se } a>1 \end{cases} , \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0<a<1 \\ 0 & \text{se } a>1 \end{cases} ,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \lg_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ -\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases} , \qquad \lim_{x \to 0} \lg_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a>1 \\ +\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases} ,$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>0 \\ 0 & \text{se } \alpha<0 \end{cases} , \qquad \lim_{x \to 0} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha>0 \\ +\infty & \text{se } \alpha<0 \end{cases}$$

Ad esempio se a>1 e k > 0 risulta

$$a^x > k \iff x > \log_a k \ ;$$

quindi

$$x \in]\log_a k, \ +\infty[\ \Rightarrow \ a^x > k$$

cioè $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

1.2 - Verificare che $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$; più in generale, si ha $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty \quad \forall n \in N$.

1.3 - Verificare che la funzione $f(x) = [x]$ non è continua in ogni punto di Z; se $k \in Z$ calcolare il limite destro e sinistro in k.

1.4 - Dimostrare (cfr. anche es. 2.6 del Cap. VII) che, se $n \in N$

$$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n \quad (x_0 \in R), \quad \lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0} \quad (x_0 \geq 0)$$

cioè le *funzioni* x^n e $\sqrt[n]{x}$ *sono continue in ogni punto dei ispettivi insiemi di definizione.*

1.5 - Dimostrare, con argomenti simili a quelli utilizzati negli es. 2.7 e 2.9 del Cap. VII, che

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0} \; (x_0 \in R), \quad \lim_{x\to x_0} \lg_a x = \lg_a x_0 \qquad (x_0>0)$$

cioè le *funzioni esponenziale e logaritmo sono continue in ogni punto dei rispettivi insiemi di definizione.*

1.6 - Si consideri la funzione $f(x) = |x|$ e si verifichi che

i) f è continua in R

ii) f non è derivabile in 0.

Per quanto riguarda ii) si osservi che il rapporto incrementale è

$$\phi(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x>0 \\ -1 & \text{se} \quad x<0 \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^-} \phi(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \phi(x) = 1 \ .$$

In generale, data una funzione f definita in un intervallo aperto I, si considerino, sempre che esistano finiti, i seguenti limiti

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ , \quad \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ .$$

Il primo si chiama *derivata sinistra* di f in x_0, il secondo *derivata destra* di f in x_0. Se poi f(x) è definita in un intervallo chiuso [a,b] la diremo *derivabile* in a(b) se esiste finito il limite

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \left(\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}\right).$$

Se f(x) è derivabile in ogni punto di [a,b] la diremo derivabile in [a,b].

1.7 - Se si assume la (4) come definizione di continuità in x_0 f(x) è continua in ogni punto isolato di X?

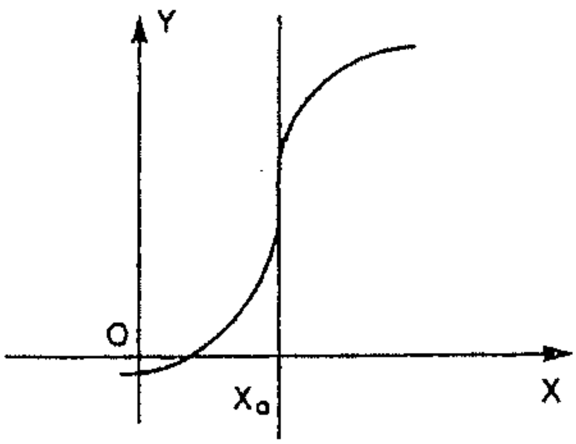
1.8 - Provare che

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

1.9 - Sia f(x) definita in]a,b[e *continua in* $x_0 \in]a,b[$. Se il limite del rapporto incrementale esiste ma non è finito, cioè se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm \infty$$

si dice che $(x_0, f(x_0))$ è un punto del grafico di f(x) a *tangente verticale* e, per definizione, si chiama tangente in $(x_0, f(x_0))$ la retta di equazione $x=x_0$.



§ 2 - Prime proprietà dei limiti.

Se x_0 è un punto di accumulazione per X esistono successioni di elementi di X, distinti da x_0, il cui limite è x_0 (cfr. PROP. 6 del Cap. VII); se sup $X=+\infty$ (inf $X=-\infty$) si può facilmente dimostrare che esistono successioni di elementi di X divergenti positivamente (negativamente).
Quindi se f(x) è definita in X ed $x_0 \in \overline{R}$ è tale che abbia senso studiare il "comportamento di f in x_0"(cioè verificare se esiste o meno il limite di f in x_0), allora il punto x_0 è "raggiungibile" mediante successioni di punti di X; esistono cioè successioni $\{x_n\}$ con $x_n \in X$ ed $x_n \neq x_0$ tali che

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad .$$

Si ha allora

$$(6) \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \overline{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell \quad .$$

Infatti (cfr. DEF. 1) se J è un generico intorno di ℓ esiste un intorno I di x_0 tale che $f(x) \in J$ se $x \in X \cap I$ e $x \neq x_0$. D'altro canto, per la (5), in corrispondenza dell'intorno I di x_0, esiste un indice ν tale che $x_n \in I$ se $n>\nu$: in definitiva risulta $f(x_n) \in J$ se $n>\nu$, cioè, essendo J arbitrario, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$. L'implicazione (6) è invertibile se si suppone che la relazione $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ sussista *per ogni* successione $\{x_n\}$, con $x_n \in X$ e $x_n \neq x_0$, la quale verifichi la (5).

Supponiamo per comodità x_o, $\ell\in R$; se f non convergesse a ℓ in x_o, negando la definizione di limite, si avrebbe

$\exists\varepsilon>0$: $\forall I$ (intorno di x_o) $\exists x\in I\cap X$, $x\neq x_o$ tale che $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon$.

In particolare, posto $I_n =]x_o - \frac{1}{n}, x_o + \frac{1}{n}[$ con $n\in N$, "scegliamo" in $I_n\cap X$ un elemento $x_n \neq x_o$ tale che

$$|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon . \tag{7}$$

Essendo $x_o - \frac{1}{n} < x_n < x_o + \frac{1}{n}$ la successione $\{x_n\}$ verifica la (5) (cfr. Cap. VII § 2) mentre, per la (7), $\{f(x_n)\}$ *non* converge ad ℓ, contro le ipotesi. In modo analogo si ragiona negli altri casi.

Possiamo pertanto enunciare la seguente

PROPOSIZIONE 2 - *Si ha* $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \ell\in\overline{R}$ *se e solo se per ogni successione* $\{x_n\}$, *con* $x_n\in X$ *e* $x_n\neq x_o$, *la quale verifichi la* (5), *risulta* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

Ovviamente si ha anche

PROPOSIZIONE 3 - *La funzione* f *è continua in* x_o *se e solo se per ogni successione* $\{x_n\}$, *con* $x_n\in X$, *convergente ad* x_o, *risulta* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_o)$.

Le precedenti caratterizzazioni, a parte il loro interesse teorico, hanno una notevole importanza pratica in quanto permettono di ricondurre lo studio di gran parte delle proprietà dei limiti di funzioni a quello delle analoghe proprietà dei limiti di successioni. Ovviamente tali proprietà potrebbero tutte essere dimostrate direttamente utilizzando gli stessi argomenti a suo tempo usati nel caso delle successioni con le opportune, naturali modifiche.

OSSERVAZIONE 1 - In realtà la condizione contenuta nella PROP. 2(e nella PROP. 3) è sovrabbondante; supponiamo, infatti, che $\{f(x_n)\}$ sia regolare qualunque sia la successione $\{x_n\}$ con $x_n \in X$, $x_n \neq x_o$ ed $x_n \to x_o$. Allora dette $\{x_n\}$ ed $\{y_n\}$ sue successioni siffatte non può aversi

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n) .$$

Se così non fosse posto

$$\ell_1 = \lim f(x_n) \neq \lim f(y_n) = \ell_2$$

la successione $x_1, y_1, x_2, \dots, x_n, y_n \dots$ convergerebbe ad x_o, mentre la successione $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2) \dots, f(x_n), f(y_n) \dots$ avendo due estratte convergenti verso limiti distinti non potrebbe essere regolare. Quindi a fortiori tutte le successioni $\{f(x_n)\}$ hanno lo stesso limite.

TEOREMA DI UNICITA' DEL LIMITE. *Se f è regolare in $x_0 \in \overline{R}$ essa ammette un solo limite.*

Se f ammettesse due limiti distinti ℓ_1, ℓ_2, detta $\{x_n\}$ una successione che verifichi le condizioni contenute nell'enunciato della PROP. 2, si avrebbe

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell_1 \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell_2$$

e ciò in contrasto con il teorema di unicità del limite per successioni (Cap. VII § 1).

TEOREMA DEL CONFRONTO - *Siano f_1, g, f_2 tre funzioni definite in X e sia I un intorno di x_0. Si ha*

i) $$\left[\begin{array}{l} f_1(x) \le g(x) \le f_2(x) \quad \forall x \in X\cap I, x \ne x_0 \\ \\ \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = \ell \in R \end{array}\right] \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$$

ii) $$\left[\begin{array}{l} f_1(x) \le g(x) \quad \forall x \in X\cap I, x \ne x_0 \\ \\ \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = +\infty \end{array}\right] \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$$

$$\text{iii)}\quad \left[\begin{array}{l} g(x)\leq f_2(x) \quad \forall x\in X\cap I,\ x\neq x_0 \\ \\ \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=-\infty \end{array}\right] \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty$$

Basta considerare una qualsiasi successione $\{x_n\}$ con $x_n\in X$ e $x_n\neq x_0$, il cui limite è x_0 e applicare il teorema del confronto (Cap. VII, § 2) alla successione $\{g(x_n)\}$; si conclude ricorrendo alla PROP. 2.

OPERAZIONI CON I LIMITI-Utilizzando la prop.2 si ha

PROPOSIZIONE 4 - *Siano* f_1, f_2 *due funzioni definite in* X *tali che*

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)=\ell_1 \quad , \quad \lim_{x\to x_0} f_2(x)=\ell_2 \quad , \quad \ell_1,\ \ell_2\in\overline{R}$$

Risulta

$$\lim_{x\to x_0} (f_1(x) \pm f_2(x)) = \ell_1 \pm \ell_2 \ ,$$

$$\lim_{x\to x_0} (f_1(x)\cdot f_2(x)) = \ell_1\cdot\ell_2 \ ,$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \qquad (f_2(x) \neq 0 \ \ \forall x\in X \text{ e } x\neq x_0) \ ,$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)\right)^{f_2(x)} = \left(\ell_1\right)^{\ell_2} \qquad (f_1(x)>0 \quad \forall x\in X \text{ e } x\neq x_0)$$

ogni volta che le espressioni $\ell_1\pm\ell_2, \ell_1\cdot\ell_2, \ell_1/\ell_2, (\ell_1)^{\ell_2}$ *hanno senso in* $\overline{R}$ (cfr. Cap. VII, § 3).

Nel caso in cui le espressioni $\ell_1\pm\ell_2, \ell_1\cdot\ell_2, \ell_1/\ell_2$ $(\ell_1)^{\ell_2}$ non abbiano senso in $\overline{R}$ si dice che il corrispondente limite si presenta in *forma indeterminata*. Per un dettagliato elenco di tali forme indeterminate e per le considerazioni ad esse relative si rimanda al già citato § 3 del Cap. VII.

Dalla proposizione 4 si deduce facilmente

PROPOSIZIONE 5- *Siano* f_1, f_2 *due funzioni definite in* X *e continue in* x_0. *Risultano continue in* x_0 *le funzioni* $f_1 \pm f_2$, $f_1\cdot f_2$, f_1/f_2 (*se* $f_2(x_0)\neq 0$), $(f_1)^{f_2}$, (*se* $f_1(x_0) > 0$ *ovvero* $f_1(x_0) = 0$ *e* $f_2(x_0) > 0$).

OSSERVAZIONE 2 - Come conseguenza dei risultati su esposti si ha immediatamente che le funzioni elementari a^x, $\lg_a x$, x^α sono continue nei rispettivi insiemi di definizione. Infatti, da quanto contenuto negli es.2.7 e 2.9 del Cap.VII, ricordando la PROP.3 si ottiene la continuità della funzione esponenziale e logaritmo. Per quanto riguarda la continuità della funzione potenza x^α essa può dedursi dalla PROP.5 se si osserva che $x^\alpha = f_1^{f_2}$ con $f_1(x)=x$ e $f_2(x) = \alpha$

funzioni continue.

ESEMPI - Come applicazione dei precedenti risultati proviamo che

(8) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$ (8)' $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

(9) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Ricordando la definizione di seno e coseno si ha

(10) $0<|\operatorname{sen} x|<|x|$ (10)' $1-|\operatorname{sen} x|< \cos x < 1$

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[-\{0\}$.

Dalla relazione (10) e dal teorema del confronto(implicazione i)) si ottiene $\lim_{x\to 0} |\operatorname{sen} x| = 0$ da cui l. (8); essendo inoltre $\lim_{x\to 0} (1-|\operatorname{sen} x|)= 1 - \lim_{x\to 0} |\operatorname{sen} x|= = 1$ dalla (10)' e dal teorema del confronto si ottiene la (8)'.

Infine, poichè dalla (9) del Cap. III discende che

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \qquad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[- \{0\},$$

sempre per la i) del teorema del confronto si ottie-

ne la (9).
La (8) e la (8)' esprimono il fatto che le funzioni seno e coseno sono continue in 0. Vedremo più avanti che tali funzioni sono continue in tutto R, provando che esse sono derivabili in R.

FUNZIONI COMPOSTE - In relazione all'operazione di composizione tra funzioni sussiste il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 6 - *Sia* f *definita in* X *e a valori in* Y *e sia* g *definita in* Y. *Se* f *è continua in* x_0 *e* g *è continua in* $f(x_0)$, *la funzione* $g \circ f$ *è continua in* x_0.

Se $\{x_n\}$ è una generica successione di elementi di X convergente ad x_0, applicando la PROP. 3 si ha

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0)).$$

Ricorrendo ancora alla PROP. 3 si ottiene l'asserto.

Più in generale, con la stessa tecnica, si può provare

$$(11) \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0,\ \lim_{y\to y_0} g(y) = \ell,\ f(x) \neq y_0,\ x \neq x_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \ell$$

dove x_0, y_0, ℓ sono in questo caso elementi di $\overline{R}$.

Ad esempio considerando la funzione $\sin\frac{x}{2}$ composta da $g(y) = \text{sen}\, y$ e $f(x) = x/2$; si ha $\lim_{x\to 0} \text{sen}\,\frac{x}{2} = \lim_{y\to 0} \text{sen}\, y = 0$; analogamente, ricordando la (9)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x/2)}{x/2} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1.$$

Da qui e dalla PROP. 4 discende

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2(x/2)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x/2)}{x/2} \cdot \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{x}{2} = 0.$$

Dalla (11) si ha anche che se $f(x)$ è derivabile in x_o riesce

$$f'(x_o) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

viceversa se esiste finito $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$ allora $f(x)$ è derivabile in x_o.

Ciò posto proviamo che

(12) $\quad D \operatorname{sen} x = \cos x \, , \quad D \cos x = - \operatorname{sen} x.$

Infatti

$$D\operatorname{sen}x = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (\text{sen } x \frac{\cos h-1}{h}) + \lim_{h\to 0} (\cos x \frac{\text{sen } h}{h}) =$$

$$= \text{sen } x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h-1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen } h}{h} = \cos x.$$

In modo analogo si prova che Dcos x = - sen x.

OPERAZIONI CON LE DERIVATE - Come conseguenza della prop. 4 ricaviamo le seguenti regole di derivazione.

PROP. 7 - Siano f *e* g *due funzioni definite in un intervallo* I *e derivabili in* x_0; *si ha allora che* kf $(k\in R)$, $f\pm g$, $f\cdot g$ ed f/g (*se* $g(x_0)\neq 0$) *sono derivabili in* x_0 *e inoltre*

D_0) $(k\cdot f)'(x_0) = k\cdot f'(x_0)$

D_1) $(f\pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

D_2) $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + g'(x_0) f(x_0)$

D_3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Le D_0 e D_1 sono di facile verifica e pertanto se ne lascia al lettore la dimostrazione.

Per quanto attiene a D_2) osserviamo che:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= g(x)\cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} .$$

Passando al limite per x che tende ad x_0 e ricordando che $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$ (cfr. Prop. 1) si ottiene la D_2).

In modo analogo si ottiene D_3) a partire dall'egua - glianza:

$$\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(g(x)\cdot g(x_0))(x-x_0)} =$$

$$= \frac{f(x)g(x_0)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{(g(x)\cdot g(x_0))\cdot(x-x_0)} =$$

$$= \frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)}\left[g(x)\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f(x)\ \frac{g(x)-g(x_c)}{x-x_c}\right] .$$

Diamo qualche esempio di applicazione della prop.7.

Dalla D_2) segue subito che

$$(13) \qquad D\, x^n = n\, x^{n-1} \qquad n \in N.$$

Infatti osservato che $f(x) = x$ è derivabile

$$Dx = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

si ha che x^n è derivabile poichè prodotto di n fun - zioni derivabili.
Inoltre poichè la (13) è vera per n=1 essa si ottiene in generale per induzione da D_2):

$$Dx^k = D(x^{k-1}\cdot x) = D(x^{k-1})\cdot x + x^{k-1}\cdot Dx = (k-1)x^{k-2}\cdot x + x^{k-1}\cdot x =$$
$$= k\, x^{k-1}\ .$$

Da D_3 e dalla (12) si ottiene

$$D\, tgx = D\left(\frac{senx}{cosx}\right) = \frac{cosx\ Dsenx - senx\ Dcosx}{cos^2 x} =$$

$$= \frac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x} = 1 + tg^2 x = \frac{1}{cos^2 x} \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad n \in Z\ ;$$

analogamente

$$D \operatorname{ctg} x = - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \qquad \forall x \neq n\pi \quad n \in Z .$$

Ritorniamo ancora al caso di funzioni composte. Supponiamo f definita in un intervallo I e a valori in un intervallo J e g definita in J. Se f è derivabile in $x_0 \in I$ e g in $f(x_0)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e si ha

$$D_4) \qquad (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Posto $y_0 = f(x_0)$ consideriamo la funzione

$$\phi(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{se} \quad y \neq y_0 \\ \\ g'(y_0) & \text{se} \quad y = y_0 \end{cases} .$$

Ovviamente ϕ è continua in y_0. Si ha inoltre

$$(13) \quad \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \phi(f(x)) \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{per } x \neq x_0;$$

infatti se $f(x) = f(x_0)$ i due membri della (13) sono nulli, se $f(x) \neq f(x_0)$ la (13) si riduce all'ovvia dentità

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} .$$

Facendo tendere x ad x_0 nella (13), e tenendo conto che per la (11)

$$\lim_{x \to x_0} \phi(f(x)) = \phi(f(x_0)) = g'(f(x_0))$$

si ottiene la D_4).

Diamo qualche esempio che chiarisca la formula D_4). Consideriamo la funzione $\text{sen}(x^2)$; tale funzione può pensarsi ottenuta componendo $g(y) = \text{sen } y$ con $f(x) = x^2$. Pertanto $\text{sen}(x^2)$ essendo funzione composta di funzioni derivabili è derivabile. Inoltre D_4) fornisce l'espressione della sua derivata: infatti

$$g'(f(x)) = \cos (x^2) \quad , \quad f'(x)=2x$$

e quindi $D \text{ sen}(x^2)=2x \cos(x^2)$.

In modo analogo si ricava che $D(\text{sen}x)^2 = 2\text{sen}x \cos x$. Infatti posto $g(y)=y^2$ e $f(x) = \text{sen}x$ si ha $g'(f(x)) = 2\text{sen}x$, $f'(x) = \cos x$; quindi l'asserto segue ancora da D_4)

Concludiamo tale paragrafo con il seguente

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO. *Sia* f *definita in* X; *se* $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ (< 0) *esiste un intorno* I *di* x_0 *tale che* $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ *per ogni* $x \in X \cap I$

e $x \neq x_0$.

Supponiamo, tanto per fissare le idee, che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$. Per la definizione 1, in corrispondenza dell'intorno $]0,+\infty[$ di ℓ esiste un intorno I di x_0 tale che, se $x \in I \cap (X-\{x_0\})$, risulti $f(x) \in]0,+\infty[$ cioè $f(x) > 0$.

Come immediata conseguenza del teorema della permanenza del segno si ha:

PROPOSIZIONE 8 - *Siano* f, g *due funzioni definite in* X *e regolari in* x_0. *Se esiste un intorno* I *di* x_0 *tale che risulti* $f(x) \leq g(x)$ *per* $x \in I \cap (X-\{x_0\})$, *si ha*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

PROPOSIZIONE 9 - *Se* f, g *sono definite in* X *e* $\lim_{x \to x_0} f(x) > \lim_{x \to x_0} g(x)$ *esiste un intorno* I *di* x_0 *tale che* $f(x) > g(x)$ *per* $x \in I \cap (X-\{x_0\})$. *In particolare se* $\lim_{x \to x_0} f(x) > k$ *con* $k \in R$ *risulta* $f(x) > k$ *per* $x \in I \cap (X-\{x_0\})$.

Esercizi e complementi

2.1 - Si consideri in $R-\{0\}$ la funzione sen $\frac{1}{x}$. Posto $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ con $n\in N$, le successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono ovviamente infinitesime. Poichè $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x_n} = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{y_n}$ dalla PROP. 2 si deduce che sen $\frac{1}{x}$ non è regolare in zero.

2.2 - Provare facendo uso del teorema del confronto che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è continua in $x=0$. Provare anche che f non è derivabile in $x=0$. Mostrare infine che $x\cdot f(x)$ è derivabile in $x=0$ e che la sua derivata è zero.

2.3 - Completare la dimostrazione della PROP. 2 prevedendo il caso in cui x_0 è $+\infty$ o $-\infty$ e ℓ è $+\infty$ o $-\infty$.

2.4 - Usando la definizione 1 di limite e procedendo sulla falsariga dei corrispondenti risultati del Cap VII, dimostrare il teorema di unicità del limite il teorema del confronto, le proposizioni 4 e 7.

Per contro, provare il teorema della permanenza del segno usando la PROP. 2 e il teorema della permanenza del segno per le successioni (cfr. § 2 del Cap. VII).

2.5 - Dimostrare la (11) prevedendo anche le eventualità che $x_o = \pm\infty$, $y_o = \pm\infty$, $\ell = \pm\infty$.

2.6 - Sia x_o un punto di accumulazione per $X_1 \subset X$ e sia f_1 la restrizione ad X_1 di una funzione f definita in X. Provare che

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \to x_o} f_1(x) = \ell \ ;$$

costruire un esempio che mostri che la precedente implicazione non è invertibile.

2.7 - Siano $P(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ $(a_o \neq 0)$, $Q(x) = b_o x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$ $(b_o \neq 0)$ due polinomi. Dimostrare che (cfr. anche Cap. VII es. 3.1) che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} (+\infty) \cdot \left(\dfrac{a_o}{b_o}\right) & \text{se} \quad n > m \\[2ex] \dfrac{a_o}{b_o} & \text{se} \quad n = m \\[2ex] 0 & \text{se} \quad n < m \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} (-1)^{n-m} \cdot (\frac{a_o}{b_o}) \cdot (+\infty) & \text{se } n > m \\ \frac{a_o}{b_o} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases} .$$

2.8 - Usando il principio di induzione verificare che

$$D(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n) = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_n + \\ + \ldots + f_1 \cdot f_2 \ldots f_n' .$$

2.9 - Provare che

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \quad .$$

2.10 - Se $x_o \in R$ e $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \ell \in R$ e se f non è definita in x_o oppure $f(x_o) \neq \ell$ si dice che x_o è un *punto di discontinuità eliminabile* per f. Tale locuzione nasce dal fatto che la funzione

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \neq x_0 \\ \ell & \text{se} \quad x = x_0 \end{cases}$$

è continua in x_0.

Se accade che esistono finiti il limite destro e sinistro di f in x_0 e

$$f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$$

si dice che x_0 è un *punto di discontinuità di prima specie* per f. Infine se f non è continua in x_0, non è convergente in x_0, ovvero non presenta in x_0 una discontinuità di prima specie si dice che x_0 è un *punto di discontinuità di seconda specie* per f.
Ad esempio x=0 è un punto di discontinuità eliminabile per $\frac{\text{sen}x}{x}$, $x \,\text{sen}\,\frac{1}{x}$, $\frac{1-\cos x}{x}$, di discontinuità di prima specie per la funzione $[x]$ e per

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in [0,+\infty[\\ x^2+1 & \text{se} \quad x \in]-\infty,0[\end{cases} \quad ;$$

infine è un punto di discontinuità di seconda specie per $\frac{1}{x}$, $e^{\frac{1}{x}}$, $\text{sen}\,\frac{1}{x}$.

2.11 - *Il principio di identità dei polinomi.*

Sia $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ un polinomio di grado n a coefficienti reali. Vogliamo dimostrare che

$$P(x) = 0 \quad \forall x \in R \Rightarrow a_0 = a_1 = ... = a_n = 0 .$$

Si ha subito che

$$P(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = P(0) = 0.$$

Posto: $P(x) = x\,[a_0x^{n-1} + a\,x^{n-2}+...+a_{n-1}]=xQ(x)$

si ha subito:

$$P(x)=0 \quad \forall x \in R \quad \Rightarrow \quad Q(x)=0 \qquad \forall x \neq 0 .$$

D'altro canto, essendo $Q(x)$ una funzione continua su R, tenuto conto che $Q(x) = 0$ su $]0,+\infty[$, si ha

$$a_{n-1} = Q(0) = \lim_{x \to 0^+} Q(x) = 0 .$$

Se n=1 l'asserto è provato. Se n > 1 basta ripetere, il ragionamento partendo da $Q(x)$ per ottenere $a_{n-2} = 0$ e così via.

Se $P(x)$ è un polinomio a coefficienti complessi, la dimostrazione del principio di identità si ottiene subito osservando che $P(x)$ può scriversi nella forma

$$P(x) = P_1(x) + i\ P_2(x)$$

dove P_1 e P_2 sono polinomi a coefficienti reali.
Un'altra semplice dimostrazione del principio di identità dei polinomi sarà indicata nell'esercizio 5.13.

2.12 - Il lettore supponga di sapere che la funzione $\sqrt{x}$ è derivabile in $]0,+\infty[$; tenendo conto che da D_4 segue $Df^2 = 2ff'$ provare che $D\sqrt{x} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$.
Più in generale, nello stesso ordine di idee, provare che $D\sqrt[k]{x^n} = \frac{n}{k}\sqrt[k]{x^{n-k}}$.

2.13 - Usando le regole di derivazione provare che

$$D(\operatorname{sen}x \cdot \cos x) = \cos 2x \ ; \quad D\,\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \ ; \quad Dx^k = kx^{k-1} \ (k \in Z);$$

$$D(\operatorname{tg}x)^4 = 4\,\frac{(\operatorname{sen}x)^3}{(\cos x)^5} \ ; \quad D\cos(\operatorname{tg}x^2) = -\operatorname{sen}(\operatorname{tg}x^2)\,\frac{2x}{(\cos x^2)^2},$$

$$D[\operatorname{sen}(x-3)]^4 = 4\operatorname{sen}^3(x-3)\cdot\cos(x-3).$$

§ 3 - Funzioni monotone

Come nel caso delle successioni le funzioni monotone (cfr. Cap. III § 1), nel panorama di tutte le funzioni numeriche, si contraddistinguono per alcune peculiari proprietà. Per comodità ci limitiamo al caso di funzioni definite in un intervallo I.

PROPOSIZIONE 10 - *Se* f *è crescente* (*decrescente*) *in* $I =]a,x_0[$ *risulta*

$$(14) \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \sup_{x\in I} f(x) \quad \left(\lim_{x\to x_0} f(x) = \inf_{x\in I} f(x)\right).$$

Supponiamo f crescente e limitata: sia $\ell = \sup\limits_{x\in I} f(x)$.
Fissato $\varepsilon > 0$, per le proprietà dell'estremo superiore esiste $x_\varepsilon \in]a,x_0[$ tale che

$$\ell-\varepsilon<f(x_\varepsilon) \leq \ell \ .$$

Poichè, essendo f crescente, risulta

$$x_\varepsilon < x < x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_\varepsilon) \leq f(x)$$

si ha: $\ell-\varepsilon<f(x)\leq \ell \quad \forall x\in]x_\varepsilon,x_0[$; essendo ε arbitrario, e ricordando la definizione (2) di limite si ottiene la (14). Il caso $\sup\limits_{x\in I} f(x) = +\infty$ è lasciato al lettore.
In modo analogo si procede se f è decrescente.

Ovviamente si ha anche

PROPOSIZIONE 10 bis. *Se* f *è crescente (decrescente) in* $I =]x_0, b[$ *Risulta*

$$(14)' \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \inf_{x \in I} f(x) \quad (\lim_{x \to x_0} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)).$$

Dalle (14), (14)' si ottiene immediatamente la seguente

PROPOSIZIONE 11 - *Sia* f *crescente (decrescente) in* $[a,b]$; *si ha:*

$$(15) \quad f(a) \le \lim_{x \to a} f(x) \quad , \quad \lim_{x \to b} f(x) \le f(b)$$

$$(15)' \quad (f(a) \ge \lim_{x \to a} f(x) \quad , \quad \lim_{x \to a} f(x) \ge f(b)) \; ;$$

se $x_0 \in]a,b[$

$$(16) \quad f(a) \le \lim_{x \to x_0^-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x \to x_0^+} f(x) \le f(b)$$

$$(16)' \quad (f(a) \ge \lim_{x \to x_0^-} f(x) \ge f(x_0) \ge \lim_{x \to x_0^+} f(x) \ge f(b)).$$

Le (15), (15)' comportano che una funzione monotona, definita in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ agli estremi di tale intervallo o è continua o presenta una discontinuità eliminabile. Dalle (16) e (16)' consegue, invece, che una funzione monotona definita in un intervallo I nei punti interni ad I è continua o presenta una discontinuità di prima specie.
Supponiamo che f sia monotona (per esempio crescente) in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Posto $f(a) = m$, $f(b) = M$ si ha

$$a \leq x \leq b \quad \Rightarrow \quad m=f(a) \leq f(x) \leq f(b)=M.$$

Quindi m,M sono rispettivamente il minimo e il massimo di f in $[a,b]$. Sia x_0 un punto di discontinuità per f; se, per esempio, $x_0 \in]a,b[$, per la (16) si ha $f(x_0^-) < f(x_0^+)$. Se ℓ è un numero tale che

$$f(x_0^-) < \ell < f(x_0^+) \quad e \quad \ell \neq f(x_0)$$

ℓ non può appartenere al codominio di f: infatti $f(x_0) \neq \ell$ e inoltre

$$x < x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(x_0^-) < \ell$$

$$x > x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(x_0^+) > \ell$$

Quindi se il codominio di f è tutto l'intervallo $[m,M]$ la funzione f deve necessariamente essere continua. Abbiamo in tal modo dimostrato il seguente utile "criterio di continuità" per funzioni monotone.

PROPOSIZIONE 12 - *Se* f *è monotona in* $[a,b]$ *essa è dotata di minimo* m *e di massimo* M. *Inoltre se il codominio di* f *coincide con tutto l'intervallo* $[m,M]$ *allora* f *è continua in* $[a,b]$.

OSSERVAZIONE 2 - Vedremo nel prossimo paragrafo che una qualsiasi funzione continua è dotata di massimo M e di minimo m se essa è definita in un intervallo chiuso e limitato; inoltre il suo codominio coincide con l'intervallo $[m,M]$. Quindi per le funzioni monotone f definite in un intervallo I chiuso e limitato vale la seguente equivalenza:

$$f \text{ continua in } I \iff f(I) = [\min_{x\in I} f(x), \max_{x\in I} f(x)]$$

OSSERVAZIONE 3 - La proposizione 12 viene solitamente utilizzata per dimostrare che le funzioni elementari sono continue nei rispettivi insiemi di definizione. Tale obiettivo può però essere raggiunto anche dimostrando la derivabilità di tali funzioni elementari e utilizzando la prop. 1. Ad esempio senx cosx, tgx, ctgx, x^n sono continue nei loro insiemi di definizione poichè derivabili.

Se la funzione f monotona e continua è anche strettamente crescente o strettamente decrescente l'applicazione

$$f: x\in[a,b] \to f(x) \in[m,M]$$

è biunivoca cioè iniettiva e suriettiva; consideriamo la funzione inversa

$$f^{-1}: y\in[m,M] \to f^{-1}(y)\in[a,b] \text{ con } f(f^{-1}(y)) = y.$$

Si dimostra facilmente che f^{-1} è strettamente crescente o decrescente se tale è la funzione f; poichè inoltre il suo codominio è l' intervallo $[a,b] = [\min f^{-1}(y), \max f^{-1}(y)]$ la funzione f^{-1}, in base alla PROP. 12, è continua.

Supponiamo f oltre che strettamente monotona e continua derivabile in $x_0\in]a,b[$; consideriamo il rapporto incrementale di f^{-1} in $y_0=f(x_0)\in]m,M[$ e sia $y=f(x)\neq y_0$. Si ha:

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)}{y-y_o} = \frac{x-x_o}{f(x) - f(x_o)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}} .$$

Posto $\phi(x) = \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ si ha

$$\phi(f^{-1}(y)) = \frac{y-y_o}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)} \qquad ;$$

per la (11) risulta, essendo $\lim\limits_{y\to y_o} f^{-1}(y)=f^{-1}(y_o)=x_o$ e $\lim\limits_{x\to x_o} \phi(x) = f'(x_o)$

$$\lim_{y\to y_o} \phi(f^{-1}(y)) = f'(x_o)= f'(f^{-1}(y_o))$$

Si ha quindi, se $f'(x_o) \neq 0$

$$\lim_{y\to y_o} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)}{y - y_o} = \lim_{y\to y_o} \frac{1}{\phi(f^{-1}(y))} =$$

$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_o))}$$

cioè la seguente "regola di derivazione delle funzioni inverse"

$$D_5) \qquad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)_{|x=f^{-1}(y)}}$$

Tale regola ha una giustificazione di carattere intuitivo se si tien conto delle seguenti considerazioni:

i) se si scambia il ruolo delle variabili x e y la curva che rappresenta il grafico di $f(x)$ rappresenta anche il grafico di $f^{-1}(y)$;

ii) se f è derivabile in x_0 e se $f'(x_0) \neq 0$ il coefficiente angolare della tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è (cfr. Fig.3) $tg\alpha = f'(x_0)$; quindi la tangente al grafico di $f^{-1}(y)$ in $(y_0, f^{-1}(y_0)) = (f(x_0), x_0)$ è

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

da cui la D_5);

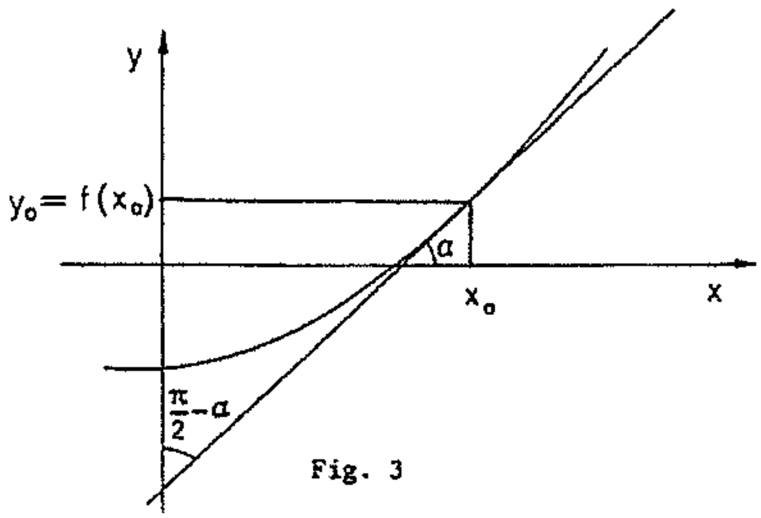


Fig. 3

iii) se $f'(x_0) = 0$ la tangente al grafico di f in in $(x_0, f(x_0))$ è parallela all'asse x; pertanto la tangente al grafico di f^{-1} in $(y_0, f^{-1}(y_0))$ è perpendicolare all'asse y; in altri termini $(y_0\ f^{-1}(y_0))$ è un punto a tangente verticale, quindi f^{-1} non è derivabile in y_0.

A titolo di esempio consideriamo in $]0,+\infty[$ la funzione $f(x) = x^2$; si ha $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ $(y>0)$ e da D_5)si ottiene

$$D\sqrt{y} = \frac{1}{(Dx^2)_{x=\sqrt{y}}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

(cfr. anche es. 2.12).

Complementi ed esercizi

3.1 - Consideriamo la funzione

$$f(x) = (1+\frac{1}{x})^x \qquad x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\ .$$

Siano $p = \frac{n}{k} < p' = \frac{n'}{k}$ due numeri razionali positivi (le frazioni scelte per rappresentarli hanno un denominatore comune). Con lo stesso procedimento dell'es

3.7 del Cap. VII è possibile dimostrare che la successione $\{(1+\frac{k}{m})^m\}_{m\in N}$ è strettamente crescente; tenendo anche presente che la funzione radice k-ma è strettamente crescente si ha

$$f(p)=\left[\left(1+\frac{k}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{k}} < \left[\left(1+\frac{k}{n'}\right)^{n'}\right]^{\frac{1}{k}} = f(p') \quad .$$

cioè la restrizione di f a $Q\cap]0,\infty[$ è strettamente crescente. Poichè (cfr. PROP. 5) f è continua in $]0,+\infty[$, detti $r < s$ due numeri reali positivi e denotate con $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ due successioni di razionali convergenti rispettivamente ad r e s e tali che $p_n < q_n$, si ha

$$f(r)=\lim_{n\to\infty} f(p_n) \leq \lim_{n\to\infty} f(q_n) = f(s) \quad ,$$

cioè la restrizione di f a $]0,+\infty[$ è crescente. In base alla PROP. 9 f è regolare a $+\infty$; per la PROP. 2 si ha (cfr. es. 3.7 del Cap. VII)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(n) = e \quad . \tag{17}$$

3.2 - Verificare che $\lim_{x\to-\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$.

Traccia: se $x<-1$ si ha

$$(1+\frac{1}{x})^x = (1-\frac{1}{|x|})^{-|x|} = (1+\frac{1}{|x|-1})^{|x|-1}(1+\frac{1}{|x|-1});$$

sfruttando la (11) e la (17) si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{|x|-1}\right)^{|x|-1}=e$$

da cui l'asserto.

3.3 - Verificare che, per ogni $x\in R$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$

Traccia: se per esempio $x>0$, posto $x_n=\frac{n}{x}$ si ha $\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty$. Essendo

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\right]^x$$

il risultato si ottiene tenendo conto dell'es. 3.1, della PROP. 2 e della continuità della funzione potenza.

3.4 - Verificare che

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \tag{18}$$

raccia: Se f è la funzione dell'es. 3.1 si ha $(1+x)^{\frac{1}{x}}=f\left(\frac{1}{x}\right)$. Poichè per la (10) e dagli es. 3.1, 3.2 si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x}) = \lim_{y\to +\infty} (1+\frac{1}{y})^y = e, \quad \lim_{x\to 0^-} f(\frac{1}{x}) = \lim_{y\to -\infty} (1+\frac{1}{y})^y = e,$$

si ottiene la (18).

3.5 - Dalla continuità della funzione logaritmo e dalla (18) si ottiene

$$(19) \qquad \lim_{x\to 0} \lg_a (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\lg_a (1+x)}{x} = \lg_a e.$$

Facendo uso della (19) è possibile calcolare la derivata della funzione logaritmo

$$\frac{\lg_a (x+h) - \lg_a x}{h} = \frac{\lg_a [x(1+h/x)] - \lg_a x}{h} =$$

$$= \frac{1}{x} \frac{\lg_a (1+h/x)}{h/x}$$

da cui passando al limite per h che tende a zero si ottiene

$$(20) \qquad D \lg_a x = \frac{1}{x} \lg_a e \quad , \quad D \lg x = \frac{1}{x} .$$

3.6 - Dalla (20)e dalla regola di derivazione D_5) si ottiene

$$Da^x = \frac{1}{(D_y \log_a y)_{y=a^x}} = \frac{a^x}{\lg_a e} = a^x \lg a; \; De^x = e^x .$$

3.7 - Ricordando che $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\lg f(x)}$ verificare

$$D_6) \quad D\, f(x)^{g(x)} = f(x)^{g(x)} \left[g'(x)\lg f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right];$$

in particolare

$$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \quad .$$

3.8 - Consideriamo la funzione arcsen x; dalla D_5)si ha

$$D \text{ arcsen } x = \frac{1}{(D_y \text{seny})_{y=\text{arcsen}x}} = \frac{1}{\cos\,(\text{arcsen}x)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2(\text{arcsen}x)}}$$

e quindi

$$D \text{ arcsen } x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

In modo analogo si prova che

$$D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2} .$$

3.9 - *Funzioni iperboliche.* Con le locuzioni *seno iperbolico, coseno iperbolico, tangente iperbolica* si designano rispettivamente le seguenti tre funzioni:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ;$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Verificare che

$$D\operatorname{senh} x = \cosh x, \quad D\cosh x = \operatorname{senh} x, \quad D\operatorname{tgh} x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

Tenendo presente la relazione $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ si ha anche

$$D\operatorname{tgh} x = 1 - \operatorname{tgh}^2 x.$$

3.10 - *Funzioni inverse delle funzioni iperboliche.* Consideriamo l'equazione

$$y = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

Risolta rispetto ad x si ottiene $x=\lg(y+\sqrt{y^2+1})$. Ciò comporta che la funzione seno iperbolico ha per codominio R ed è iniettiva; la sua funzione inversa è

$$y \in R \to \lg(y+\sqrt{1+y^2}) \in R\ .$$

Tale funzione prende il nome di *settore seno iperbolico* e si pone

$$\text{settsenh } y = \lg\,(y+\sqrt{1+y^2})\ .$$

Analogamente, se si considera l'equazione

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

si prova che, per ogni $y > 1$, esiste un unico $x > 0$ che sia soluzione dell'equazione. Si ha inoltre $x = \lg(y+\sqrt{y^2-1})$. La funzione

$$y \in [1,+\infty[\;\to x = \lg\,(y+\sqrt{y^2-1}) \in [0,+\infty[$$

è quindi la funzione inversa della restrizione a $[0,+\infty[$ della funzione coseno iperbolico e prende il nome di *settore coseno iperbolico*.

$$\text{settcosh } y = \lg(y+\sqrt{y^2-1}).$$

Infine, se $y \in]-1,1[$ risulta

$$y = \text{tgh } x \iff x = \frac{1}{2} \lg \frac{1+y}{1-y} \ .$$

Quindi la funzione

$$y \in]-1,1[\ \to \frac{1}{2} \lg \frac{1+y}{1-y}$$

è la funzione inversa della funzione tangente iperbolica; essa viene chiamata funzione *settore tangente iperbolica*

$$\text{setttgh } y = \frac{1}{2} \lg \frac{1+y}{1-y} \ .$$

Verificare che

$$D \text{ settsenh } y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \ , \quad D\text{settcosh } y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \ ,$$

$$D \text{ setttgh } y = \frac{1}{1-y^2} \ .$$

3.11 - Raggruppiamo per comodità in un unico elenco, le "regole di derivazione" e le derivate delle funzioni elementari

D_1) $D(f \pm g) = Df \pm Dg$;	D_2) $D(fg) = Df \cdot g + f \cdot Dg$
D_3) $D \dfrac{f}{g} = \dfrac{Df \cdot g - f \cdot Dg}{g^2}$,	D_4) $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$

D_5) $D f^{-1} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$; D_6) $Df^{g}=f^{g}[Dg\ \lg f + g\ \dfrac{Df}{f}]$

$DK=0 \quad K\in R$; $Dx^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}$; $Da^{x}=a^{x}\log a$; $De^{x}=e^{x}$

$D\lg_a x = \dfrac{1}{x}\lg_a e$; $D\lg x = \dfrac{1}{x}$;

$D\ \mathrm{sen}x = \cos x$, $D\cos x = -\mathrm{sen}x$; $D\ \mathrm{tg}x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$D\mathrm{ctg}x = -\dfrac{1}{\mathrm{sen}^2 x}$;

$D\ \mathrm{arcsen}x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $D\ \arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$D\ \mathrm{arctg}x = \dfrac{1}{1+x^2}$

$D\ \mathrm{senh}x = \cosh x$; $D\cosh x = \mathrm{senh}x$; $D\mathrm{tgh}x = 1-\mathrm{tgh}^2 x$

$D\ \mathrm{settsenh}x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $D\ \mathrm{settcosh}x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

$D\ \mathrm{setttgh}x = \dfrac{1}{1-x^2}$

3.12 - Provare che

$$D[f(x)]^{\alpha}=\alpha[f(x)]^{\alpha-1}\cdot f'(x)\,;\quad Da^{f(x)}=a^{f(x)}\log a\cdot f'(x)$$

$$D\log_a|f(x)|=\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\log_a e;\quad D\,\mathrm{sen}f(x)=\cos f(x)\cdot f'(x)$$

$$D\cos f(x)=-\mathrm{sen}\,f(x)\cdot f'(x)\,;\quad D\mathrm{tg}f(x)=\frac{1}{\cos^2 f(x)}\cdot f'(x)$$

$$D\,\mathrm{ctg}\,f(x)=\frac{-1}{\mathrm{sen}^2 f(x)}\cdot f'(x)\,;\quad D\mathrm{arcsen}f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}}\cdot f'(x)$$

$$D\,\arccos f(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-f^2(x)}}\cdot f'(x);\quad D\mathrm{arctg}f(x)=$$

$$=\frac{1}{1+f^2(x)}\cdot f'(x)$$

3.13 - Provare che

$$D\,\mathrm{arcsen}\,\log x=\frac{1}{x\sqrt{1-(\lg x)^2}},\quad D\log\mathrm{arctg}x=\frac{1}{\mathrm{arctg}x(1+x^2)}$$

$$D\,e^{\sqrt{\mathrm{sen}x}}=e^{\sqrt{\mathrm{sen}x}}\,\frac{\cos x}{2\sqrt{\mathrm{sen}x}},\quad D[\mathrm{tg}^2(e^x)]=\frac{2\mathrm{tg}e^x}{\cos^2 e^x}\cdot e^x$$

$$D\,\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}=\frac{-e^x}{\sqrt{(1+e^x)^3}}\;;\quad D\cos\sqrt{1+x^2}=-\frac{\mathrm{sen}\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\cdot x$$

$$D\log_3\left(\frac{1}{\mathrm{sen}x}\right)=-\mathrm{ctg}x\cdot\log_3 e;\quad D\mathrm{arctg}\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}+2x\sqrt{x}}$$

3.14 - Provare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lg a; \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

§ 4 - Funzioni continue

Premettiamo la seguente

DEFINIZIONE 3 - Sia f definita in $]a,b[$ e sia $x_0 \in]a,b[$; se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{per} \quad x \in]a,b[\cap]x_0-\delta,\ x_0+\delta[$$

si dice che x_0 è un punto di *massimo relativo* per f. Se invece

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{per} \quad x \in]a,b[\cap]x_0-\delta, x_0+\delta[$$

si dice che x_0 è un punto di *minimo relativo* per f. Se x_0 è un punto di massimo o minimo relativo, si dice anche che in x_0 c'è un *estremo locale* per f.

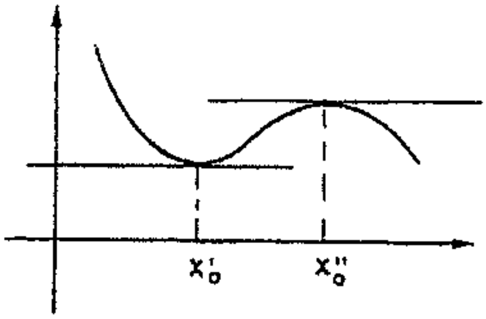


Fig. 4

x_0' p.to di min.rel.;

x_0'' p.to di max.rel.

PROPOSIZIONE 13 - *Se in* x_0 *c'é un estremo locale per* $f(x)$ *e se* $f(x)$ *è derivabile in* x_0 *si ha necessariamente* $f'(x_0) = 0$.

Per fissare le idee sia x_0 un punto di minimo relativo; se fosse

$$0 < f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

dal teorema della permanenza del segno seguirebbe la esistenza di un numero positivo δ tale che

$$x \in]x_o-\delta,\ x_o+\delta[,\ x \neq x_o \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} > 0;$$

quindi in particolare: $x_o-\delta<x<x_o \Rightarrow x-x_o<0 \Rightarrow f(x) <$ $< f(x_o)$ contro l'ipotesi che x_o sia punto di minimo relativo. In modo analogo si vede che non può essere $f'(x_o) < 0$ e quindi $f'(x_o) = 0$.

Ricordiamo che se $f(x)$ è definita in un intervallo I un punto $x_o \in I$ si dice di *massimo assoluto* (o semplicemente di *massimo*) se

$$f(x) \leq f(x_o) \qquad \forall x \in I.$$

Analoga è la definizione di punto di *minimo assoluto* o di *minimo*.
Evidentemente *un punto di massimo assoluto (minimo assoluto interno ad* I *è anche un punto di massimo relativo (minim relativo)*.

Fondamentale è il seguente

TEOREMA DI WEIERSTRASS - *Se* f *è continua in un intervallo chiuso e limitato (compatto)* [a,b] *allora* f *è dotata di massimo e di minimo; si ha cioè*

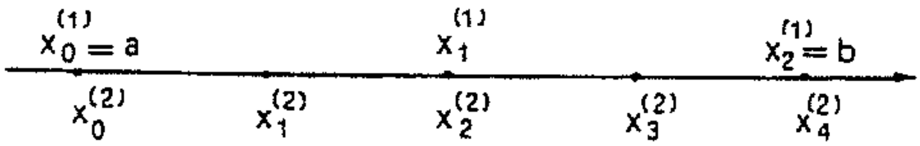
$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in [a,b]$$

e inoltre, esistono $\bar{x}$ *(punto di minimo assoluto)* , $\bar{\bar{x}}$

(*punto di massimo assoluto*) *tali che* $f(\bar{x})=m$, $f(\bar{\bar{x}})=M$.

Dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in due parti uguali mediante il punto medio $(b+a)/2$. Posto $x_0^{(1)} = a$, $x_1^{(1)} = (b+a)/2$, $x_2^{(1)} = b$, consideriamo l'insieme dei valori assunti da f nei tre punti $x_i^{(1)}$: $F_1=\{f(x_0^{(1)})$, $f(x_1^{(1)})$, $f(x_2^{(1)})\}$.

Se m_1 è il minimo di F_1 denotiamo con x_1 il più piccolo dei numeri $x_i^{(1)}$ tali che $f(x_i^{(1)}) = m_1$. Dividiamo ora $[a,b]$ in quattro intervalli di eguale ampiezza e siano $x_i^{(2)}$, $i = 0,1,2,3,4$ gli estremi di tali intervalli; poniamo inoltre $F_2 = \{f(x_0^{(2)}), f(x_1^{(2)}), f(x_2^{(2)})$ $f(x_3^{(2)}), f(x_4^{(2)})\}$. Poichè ovviamente tra i punti $x_i^{(2)}$ ritroviamo tutti i punti $x_j^{(1)}$ della prima suddivisione, si ha $F_1 \subseteq F_2$.



Quindi se m_2 è il minimo di F_2 risulta $m_2 \leq m_1$. Denotiamo inoltre con x_2 il più piccolo tra i numeri $x_i^{(2)}$ tali che $f(x_i^{(2)}) = m_2$. In generale se dividiamo $[a,b]$ in 2^n intervalli di uguale ampiezza e denotiamo con $x_j^{(n)}$, $j=0,1,\dots,2^n-1,2^n$ gli estremi di tali intervalli, posto $F_n = \{f(x_j^{(n)})\}$ $j=0,\dots,2^n$, $m_n = \min F_n$, si ha ovviamente $m_n \leq m_{n-1}$ cioè la successione $\{m_n\}$è decrescente e quindi regolare: sia $m = \lim\limits_{n\to\infty} m_n$. Se inoltre denotiamo con x_n il più piccolo tra i numeri $x_j^{(n)}$ tali che $f(x_j^{(n)}) = m_n$, per la PROP. 11 del Cap.VII dalla successione $\{x_n\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente ad un elemento $\bar{x}\in[a,b]$. Per la PROP. 3 si ha

$$m = \lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{k\to\infty} m_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x}).$$

Dobbiamo ora verificare che m è il minimo di f. Infatti, se esistesse un $x_0\in[a,b]$ tale che $f(x_0)<m$ si potrebbe determinare un intorno $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ tale che (cfr. PROP. 9)

$$f(x) < m \qquad \text{per} \qquad x\in[a,b]\cap]x_0-\delta,\ x_0+\delta[\ .$$

Se si sceglie n in modo tale che $(b-a)/2^n < \delta$ in $[a,b]\cap]x_0-\delta,\ x_0+\delta[$ cade qualche punto $x_j^{(n)}$; ma ciò è assurdo in quanto $f(x_j^{(n)}) \geq m_n \geq m$.

In modo analogo si ragiona per il massimo.

OSSERVAZIONE 4 - La precedente dimostrazione ha carattere "costruttivo" in quanto fornisce un algoritmo utile a determinare il minimo (oltre che, ovviamente, il massimo) di f. Inoltre ogni punto di accumulazione della successione $\{x_n\}$ è un punto di minimo assoluto. Si osservi infine che se la funzione f ammette un unico punto di minimo assoluto $\bar{x}$, la successione $\{x_n\}$ converge ad $\bar{x}$.

OSSERVAZIONE 5. Per completezza forniamo la dimostrazione classica del teorema di Weierstrass valida nel caso di *una funzione* f *continua in un compatto* $K\subset\mathbb{R}$; tale dimostrazione ha carattere puramente "esistenziale". Sia $m \geq -\infty$ l'estremo inferiore di f in K. Facendo uso delle proprietà dell'estremo inferiore e ricorrendo all'assioma della scelta, si dimostra che esiste una successione $\{x_n\}$ di elementi di K tale che $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = m$. Per la PROP. 11 del Cap. VII esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \bar{x} \in K$. Per la PROP. 3 si ha allora: $m= \lim_{n\to\infty} f(x_n) =\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})= f(\bar{x})$, cioè $\bar{x}$ è un punto di minimo assoluto. In modo analogo si ragiona per il massimo.

E' possibile dimostrare che la funzione f, supposta continua in $[a,b]$, assume *tutti* i valori compresi tra il minimo e il massimo. Tale risultato è sostanzialmente riposto nel seguente

TEOREMA DEGLI ZERI. *Se* f *è continua in* $[a,b]$ *e se* f *assume valori di segno opposto in* a *e* b $(f(a)\cdot f(b) < 0)$ *esiste almeno una soluzione* $c \in\,]a,b[$ *dell'equazione* $f(x) =0$.

Per fissare le idee supponiamo $f(a)> 0$, $f(b)< 0$.

Sia c_0 il punto medio di $[a,b]$: se $f(c_0) = 0$ c_0 è la soluzione cercata. Altrimenti dei due intervalli $[a, c_0]$, $[c_0, b]$ scegliamo quello ai cui estremi f assume valori di segno opposto: denotiamo tale intervallo, con la scrittura $[a_1, b_1]$. Si ha ovviamente $f(a_1) > 0$, $f(b_1) < 0$ e $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Operiamo ora sull'intervallo $[a_1, b_1]$ così come prima abbiamo operato su $[a,b]$ Se c_1 è il punto medio di $[a_1, b_1]$ allora o $f(c_1) = 0$ (quindi c_1 è la soluzione cercata) o $f(c_1) \neq 0$. In quest'ultimo caso dei due intervalli $[a_1, c_1]$, $[c_1, b_1]$ scegliamo quello ai cui estremi f assume valori di segno opposto: denotiamo tale intervallo con $[a_2, b_2]$ Ovviamente $f(a_2) > 0$, $f(b_2) < 0$ e $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$.

Così procedendo due casi sono possibili:

i) all' (n+1)-mo passo, se c_n è il punto medio dell'intervallo $[a_n, b_n]$ risulta $f(c_n) = 0$: in tal caso il procedimento si arresta e c_n è la soluzione cercata;

ii) altrimenti si viene a determinare una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ tali che

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \qquad \forall n \tag{21}$$

$$f(a_n) > 0 \qquad f(b_n) < 0 \tag{21'}$$

$$(21)'' \qquad 0 < b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} .$$

Si procede a questo punto come nella dimostrazione del teorema di Bolzano (cfr. Cap. VII § 4): per la (21) la successione $\{a_n\}$ è crescente e limitata superiormente, la successione $\{b_n\}$ è decrescente e limitata inferiormente; inoltre per la (21)'' tali successioni ammettono lo stesso limite c. Dalle (21)', dalla PROP. 3 e dalla PROP. 5 del cap. VII si ha

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \geq 0 , \quad f(c)=\lim_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0$$

e quindi $f(c) = 0$, cioè l'asserto.

OSSERVAZIONE 6 - La dimostrazione su esposta fornisce un metodo per il calcolo approssimato di una soluzione di un'equazione del tipo $f(x) = 0$; infatti la (21)'' da una valutazione dell'"errore" che si commette se si approssima la soluzione c con a_n o b_n.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 13'- *Se* f *è continua in* [a,b], *detti* m *ed* M *rispettivamente il minimo e il massimo di* f *in* [a,b], *la funzione* f *assume tutti i valori dell'intervallo* [m,M], *cioè, per ogni* $\alpha \in [m,M]$, *esiste almeno una soluzione dell'equazione* $f(x) = \alpha$.

Siano $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$ rispettivamente un punto di minimo assoluto e uno di massimo assoluto e supponiamo, tanto per fissare le idee, che $\bar{x} < \bar{\bar{x}}$. Se si applica il teo rema degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) - \alpha$ nell'intervallo $[\bar{x},\bar{\bar{x}}]$ si ottiene l'asserto.

Esercizi e complementi.

4.1 - Supposto che $f(x)$ sia definita in $[a,b]$ e dotata di derivata(destra) in a e di derivata (sinistra) in b, verificare che

a punto di massimo (minimo)assoluto $\Rightarrow f'(a) \leq 0$ $(f'(a) \geq 0)$

b " " " " " $\Rightarrow f'(b) \geq 0$ $(f'(b) \leq 0)$

4.2 - Costruire esempi di funzioni continue su insiemi non compatti o definite su compatti ma discontinue le quali siano prive di minimo e/o di massimo assoluto.

4.3 - Sia $f(x)$ definita e continua nell'intervallo compatto $[a,b]$.

Tenendo presente la proposizione 13 è facile verificare che i punti di minimo e di massimo assoluti di $f(x)$ (che esistono in forza del teorema di Weierstress) vanno ricercati tra

i) i punti di $]a,b[$ in cui è $f'(x) = 0$;

ii) i punti a e b ;

iii) i punti di $]a,b[$ in cui $f(x)$ non è derivabile.

Esempi: $f(x) = |x|$, $x \in [-1,2]$

si ha $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x<0 \\ +1 & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$, inoltre f non è derivabile in 0.

Pertanto l'insieme dei punti individuati dalle condizioni i), ii), iii) è $\{-1,0,2\}$. Poichè $f(-1)=1$, $f(0)=0$, $f(2)=2$ $x=0$ è p.to di minimo assoluto (oltre che relativo), $x=2$ è p.to di massimo assoluto.

Sia $f(x) = e^{-x^2}$ in $[-1,2]$

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}=0 \iff x=0.$$

Poichè non vi sono punti in cui $f(x)$ non è derivabile i punti di massimo e minimo vanno ricercati tra $\{-1,0,2\}$. Poichè $f(-1) = \frac{1}{e}$, $f(2) = \frac{1}{e^4}$, $f(0)=1$ $x=0$ è p.to di massimo ed $x=2$ di minimo.

4.4 - Tra i triangoli isosceli di assegnato perimetro quale è quello di area massima? [Il triangolo equilatero]

4.5 - Tra tutte le coppie di numeri reali non negativi di fissata somma $h > 0$ quale è quella per cui è assimo il prodotto?[$(h/2,\ h/2)$]

4.6 - Calcolare i punti di massimo e minimo assoluti delle seguenti funzioni negli intervalli indicati

$|\mathrm{sen}\, x|$ $[0, 3/2\cdot\pi]$ (pt. di minimo$=0,\pi$; pt. di massimo$=$ $= \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$)

$\sqrt{|x|}$ $[-1,2]$ ($\bar{x} = 0$, $\bar{\bar{x}} = 2$)

$|x|-x$ $[-1,2]$ (i punti di minimo appartengono all'intervallo $[0,2]$, $\bar{\bar{x}} = -1$)

4.7 - Utilizzando il teorema degli zeri provare che ogni polinomio di grado dispari a coefficienti reali ammette almeno una radice reale.

§ 5 - Grafici di funzioni.

Raggruppiamo in tale paragrafo alcune nozioni e risultati utili per lo studio qualitativo dei grafici delle funzioni numeriche.

Premettiamo il seguente

TEOREMA DI ROLLE - *Sia* f *derivabile in* $]a,b[$ *e continua in* $[a,b]$; *se* $f(a) = f(b)$ *esiste* $c \in]a,b[$ *tale che* $f'(c) = 0$.

Per il teorema di Weierstrass esistono due punti $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in [a,b]$ in cui f assume rispettivamente il minimo e il massimo. Se tralasciamo il caso di f costante in $[a,b]$ perchè in tale eventualità il teorema è banalmente vero, l'ipotesi $f(a) = f(b)$ comporta che al meno uno dei punti, per esempio $\bar{x}$, è interno ad [a, b]; $\bar{x}$ è allora un punto di minimo relativo e si può applicare la PROP. 13, risulta cioè $f'(\bar{x}) = 0$.

Se applichiamo il teorema di Rolle alla funzione

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

si ottiene:

TEOREMA DI LAGRANGE - *Se* f *è derivabile in*]a,b[*e continua in* [a,b] *esiste un punto* $c\in]a,b[$ *tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{22}$$

OSSERVAZIONE 7 - Geometricamente la (22) significa che esiste un punto del grafico in cui la tangente è parallela alla retta che unisce gli estremi (a,f(a)) (b,f(b)) del grafico di f (cfr. fig. 6).

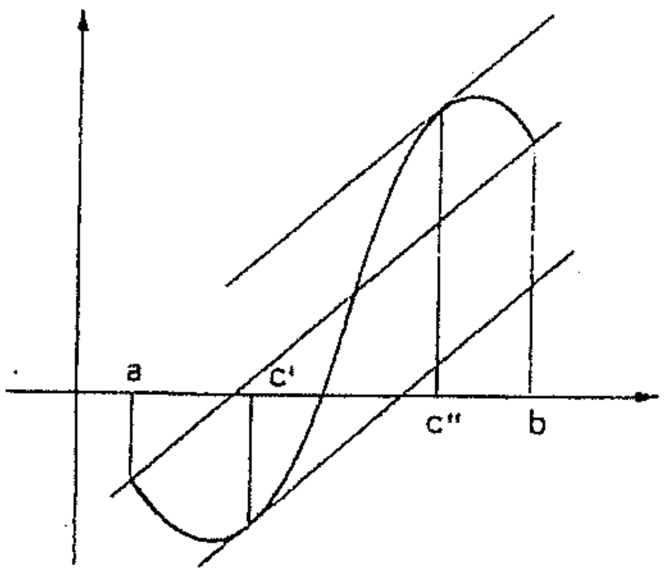


Fig. 6

Mediante il teorema di Lagrange è possibile caratterizzare le funzioni derivabili e monotone in un intervallo. Si ha infatti

PROPOSIZIONE 14 - *sia* f *continua in un intervallo* I *e derivabile nei punti interni ad* I; *si ha:*

$$f \text{ } \textit{crescente (decrescente)} \iff f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0)$$

Se $f'(x) \geq 0$ detti $x_1 < x_2$ due punti di I per il teorema di Lagrange esiste $c \in]x_1, x_2[$ tale che

$$(23) \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Ma allora poichè $x_2 - x_1 > 0$ e $f'(c) \geq 0$ si ha: $f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$ e quindi $f(x_2) \geq f(x_1)$, cioè $f(x)$ è crescente.

Viceversa sia $f(x)$ crescente e sia x_0 interno ad I; se $f'(x_0) < 0$ per il teorema della permanenza del segno esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\text{ e } x \neq x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

e quindi in particolare

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

contro l'ipotesi che $f(x)$ sia crescente.

OSSERVAZIONE 8 - Se $f'(x) = 0$ in I da (23) si deduce che f è costante in I.

PROPOSIZIONE 15 - *Nelle ipotesi della prop.* 14; *si ha*

$$f \text{ strettamente crescente (decrescente)} \iff \begin{cases} f'(x)\geq 0 \quad (f'(x)\leq 0) \\ f' \text{ non si annulla su alcun intervallo } J\subseteq I. \end{cases}$$

Se f è strettamente crescente si ha $f'(x) \geq 0$ per la precedente proposizione; inoltre $f'(x)$ non può essere identicamente nulla in un intervallo J altrimenti,(cfr OSSERVAZIONE 8) f sarebbe costante (quindi non strettamente crescente) in J. Viceversa, se $f'(x) \geq 0$, f è crescente. Se non fosse strettamente crescente esisterebbero due punti $x' < x''$ tali che $f(x') = f(x'')$; d'altra parte si ha

$$x'\leq x\leq x'' \implies f(x')\leq f(x)\leq f(x'') \implies f(x)=f(x')=$$
$$= f(x'') \text{ in } [x',x'']$$

quindi f è costante in $[x',x'']$ contro le ipotesi.

In conclusione se la derivata di f non cambia segno f è monotona. Se $f'(x_0)=0$ ed esiste un $\delta>0$ tale che, per esempio (cfr. Fig. 7)

$$f'(x)\geq 0 \quad \text{in } [x_0-\delta,x_0],\ f'(x)\leq 0 \quad \text{in } [x_0,x_0+\delta]$$

f è crescente in $[x_0-\delta,x_0]$, decrescente in $[x_0,x_0+\delta]$:

x_0 è allora un punto di massimo relativo. Analogamente se (cfr. Fig. 7)

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{in } [x_0-\delta, x_0], \quad f'(x) \geq 0 \text{ in } [x_0, x_0+\delta]$$

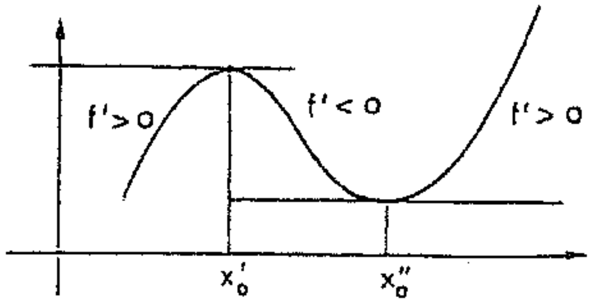


Fig. 7

x_0 è un punto di minimo relativo. In sostanza: *condizione sufficiente perché x_0 sia un punto di massimo (minimo) relativo per $f(x)$ in I è che esista un $\delta>0$ tale che in $[x_0-\delta, x_0]$ $f(x)$ è crescente (decrescente) ed in* $[x_0, x_0+\delta]$ $f(x)$ *è decrescente (crescente).*
Osserviamo esplicitamente che la condizione $f'(x_0)=0$ *non garantisce* che x_0 sia un estremo locale. Ad esempio se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

si ha $f'(0)=0$ ma $x=0$ non è un estremo locale.

DEFINIZIONE 4 - Una funzione f definita in un intervallo I si dice *convessa* se comunque si prendano due punti $x' < x''$ di I si ha

$$(24) \quad f(tx'+(1-t)x'') \leq tf(x')+(1-t)f(x'') \quad \forall t \in [0,1]$$

Se si ha invece

$$(24)' \quad f(tx'+(1-t)x'') \geq tf(x')+(1-t)f(x'') \quad \forall t \in [0,1]$$

f si dice *concava*.

La relazione (24) ha il significato geometrico illustrato nella fig.8: i punti $(x, f(x))$ del grafico di f corrispondenti ai valori $x \in [x', x'']$ si trovano al di sotto del segmento di estremi $(x', f(x'))$, $(x'', f(x''))$. Un discorso analogo vale per la concavità (cfr. fig.9).

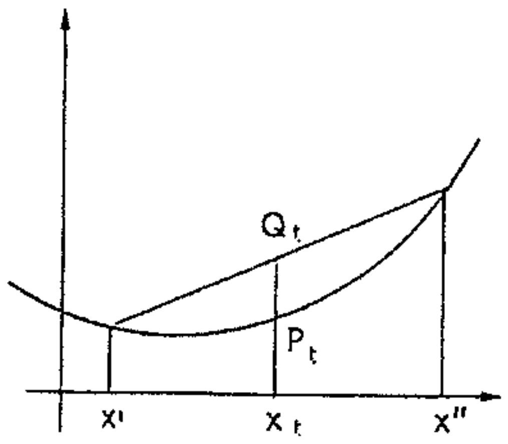


Fig.8 (convessità)

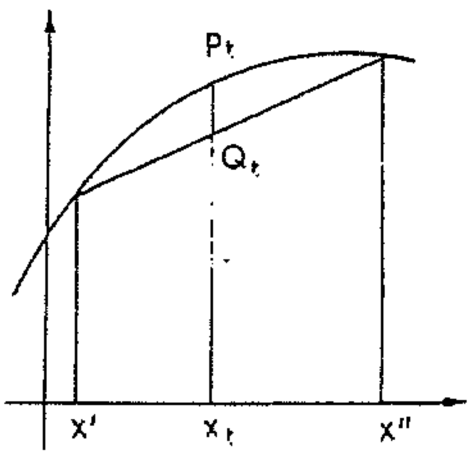


Fig.9 (concavità)

$x_t = tx'+(1-t)x'' \quad t \in [0,1] \quad P_t \equiv (x_t, f(x_t))$,

$Q_t \equiv (x_t, \; tf(x')+(1-t)f(x''))$

Le funzioni convesse (concave) in un intervallo I godono di notevoli proprietà. Ad esempio si può provare, ma ce ne asteniamo per brevità che *se f(x) è convessa in I essa è continua nei punti interni ad I.*
Una condizione sufficiente perchè una funzione sia

convessa in un intervallo $[a,b]$ è fornita dalla seguente proposizione.

PROP. 6 - *Sia* $f(x)$ *continua in* $[a,b]$ *e derivabile in* $]a,b[$. *Se* $f'(x)$ *è crescente* $f(x)$ *è convessa in* $[a,b]$.

Siano $x_1 < x_2$ due punti di $[a,b]$ e sia

$$x = tx_1 + (1-t)x_2 \qquad t\in]0,1[\tag{25}$$

un punto dell'intervallo $]x_1,x_2[$.

Osserviamo subito che da (25) si ha

$$t = \frac{x_2-x}{x_2-x_1} \quad , \qquad 1-t= \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad .$$

Applichiamo adesso il teorema di Lagrange relativamente agli intervalli $[x_1,x]$ ed $[x,x_2]$; si ha:

$$(26) \qquad \begin{aligned} &f(x)-f(x_1)=f'(c_1)(x-x_1), \quad c_1\in]x_1,x[\\ &f(x_2)-f(x)=f'(c_2)(x_2-x) \quad c_2\in]x,x_2[\ . \end{aligned}$$

Dalla prima di tali eguaglianze si ricava, tenendo conto che $c_1 < c_2 \Rightarrow f'(c_1) \leq f'(c_2)$:

$$f(x) \leq f(x_1) + f'(c_2)(x-x_1)$$

Ricavando $f'(c_2)$ dalla seconda delle(26) si ottiene

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2 - x} \cdot (x-x_1)$$

e da qui

$$(27) \quad f(x) \leq f(x_1) \cdot \frac{x_2-x}{x_2-x_1} + f(x_2) \cdot \frac{x-x_1}{x_2-x_1} =$$

$$= t\, f(x_1)+(1-t)\, f(x_2)$$

e cioè la convessità di $f(x)$.
Ragionando in modo analogo si prova che

PROP. 17 - *Sia* $f(x)$ *continua in* $[a,b]$ *e derivabile in* $]a,b[$. *Se* $f'(x)$ *è decrescente* $f(x)$ *è concava in* $[a,b]$.

Sia $f(x)$ derivabile in $]a,b[$, se $f'(x)$ è a sua volta derivabile la derivata di $f'(x)$ è detta *derivata seconda di* $f(x)$ e si denota con uno dei simboli $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$, $\frac{d^2f}{dx^2}$.
Ciò posto dalle prop. 16 e 17 e dalla prop. 14 discende subito che:

PROP. 18 - *Se* $f(x)$ *è continua in* $[a,b]$ *e dotata di derivata seconda in* $]a,b[$ *condizione sufficiente perchè* $f(x)$ *sia convessa (concava) è che si abbia* $f''(x) \geq 0$ (≤ 0) *in* $]a,b[$.

Se $f(x)$ è convessa in $[a,x_0]$ e concava in $[x_0,b]$ (o viceversa) si dice che *x_0 è un punto di flesso.*

Se denotiamo con $f'''(x)$ la derivata (ove essa esista) di $f''(x)$ (derivata terza di f) si ha:

PROP. 19 - *Se $f(x)$ è continua in $[a,b]$, dotata di derivata seconda in $]a,b[$ e di derivata terza in $x_0 \in]a,b[$ condizione sufficiente affichè x_0 sia un punto di flesso è che riesca $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0) \neq 0$.*

Sia, per fissare le idee, $f'''(x_0) > 0$. Ne segue che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{x-x_0} > 0.$$

Pertanto dal teorema della permanenza del segno discende che esiste un intorno $I = [x_0-\delta, x_0+\delta]$ di x_0 tale che:

$$x \in I - \{x_0\} \Rightarrow \frac{f''(x)}{x-x_0} > 0$$

e quindi

$$x_0 - \delta \leq x < x_0 \Rightarrow f''(x) < 0$$

$$x_0 < x \leq x_0 + \delta \Rightarrow f''(x) > 0 .$$

Quindi a norma della prop. 18 in $[x_0-\delta, x_0]$ $f(x)$ è concava ed in $[x_0, x_0+\delta]$ è convessa; pertanto x_0 è un punto di flesso.

Supponiamo, adesso, che f(x) sia definita in un intervallo I non limitato.

DEFINIZIONE 5 - La retta di equazione $y=mx+n$ si dice *asintoto obliquo* (*orizzontale* se $m=0$) per il grafico di f(x) a $+\infty(-\infty)$ se f(x) è definita in un intorno I di $+\infty(-\infty)$ e

$$(28)\qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x)-mx-n]=0 \quad (\lim_{x\to-\infty} [f(x)-mx-n]=0)$$

In sostanza la (28) significa che la distanza tra il grafico di f(x) e l'asintoto tende a zero quando x tende a $+\infty(-\infty)$.
Dalla (28) segue:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)-mx-n}{x} + m + \frac{n}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-mx-n}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{n}{x} + m = m$$

cioè

$$(29)\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m\ ;$$

risulta inoltre

$$(30)\qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x)-mx] = n\ .$$

Il lettore dimostri per esercizio che viceversa se

valgono (29) e (30) con m,n finiti la retta di equazione $y=mx+n$ è un asintoto a $+\infty$.
Analogo discorso vale per gli asintoti a $-\infty$.

Per terminare il paragrafo osserviamo che se $x_o \in R$ e se

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = \pm\infty \quad (\lim_{x \to x_o^-} f(x) = \pm\infty)$$

si dice che la retta di equazione $x=x_o$ è un *asintoto verticale destro* (*sinistro*)

Complementi ed esercizi

S.1 - Provare che se $f(x)$ è convessa in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, fissato $x_o \in]a,b[$ riesce

$$(31) \quad f(\bar{x}) \geq f(x_o)+f'(x_o)\cdot(\bar{x}-x_o) \qquad \forall \bar{x} \in [a,b].$$

Ciò, geometricamente, significa che tutti i punti del grafico di $f(x)$ sono *al disopra della tangente al grafico di f(x)* in $(x_o,\ f(x_o))$.

Traccia - Per fissare le idee sia $\bar{x} > x_o$. Sia inoltre $x \in]x_o, \bar{x}[$. Dalla (27) con $x_o=x_1$ ed $\bar{x}=x_2$ si ha:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \leq \frac{f(\bar{x})-f(x_o)}{\bar{x} - x_o} \quad ;$$

facendo tendere x ad x_o si ha.... .

5.2 - Provare che se vale la (31) qualunque sia $x_0 \in]a,b[$ $f(x)$ è convessa.

5.3 - Utilizzando l'esercizio 5.1 provare che se $f(x)$ è convessa in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$ $f'(x)$ è crescente. Provare inoltre che se $x_0 \in]a,b[$ si ha: $f'(x_0)=0 \iff x_0$ punto di minimo assoluto.

5.4 - Provare che

$$\alpha>1, \quad x,y\geq 0 \quad \Rightarrow [x+y]^{\alpha} \leq 2^{\alpha-1}(x^{\alpha}+y^{\alpha})$$

$$0<\alpha<1, \quad x,y\geq 0 \quad \Rightarrow [x+y]^{\alpha} \geq 2^{\alpha-1}(x^{\alpha}+y^{\alpha})$$

$$0<a \quad \Rightarrow \quad 2a^{\frac{x+y}{2}} \leq a^{x} + a^{y}$$

5.5 - Estendere il teorema di Rolle al caso di una funzione derivabile in un intervallo $]a,b[$ non necessariamente limitato, sostituendo l'ipotesi $f(a)=f(b)$ con la seguente : $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x) = \ell \in \bar{R}$

5.6 - Costruire un esempio di funzione convessa in $[a,b]$ ma discontinua agli estremi dell'intervallo.

5.7 - Considerata in $R-\{0\}$ la funzione

$$f(x) = x^2 - 1/x$$

provare che

i) f è crescente strettamente in $]-\sqrt[3]{1/2},0[$ e in $]0,+\infty[$;

ii) f ha un minimo relativo in $x=-\sqrt[3]{1/2}$

iii) f non è limitata inferiormente nè superiormente

5.8 - Considerata in $]0, +\infty[$ la funzione

$$f(x) = x - \log x$$

provare che

i) f ha un minimo relativo in $x=1$;

ii) l'equazione $f(x)=0$ non ammette soluzioni .

Mostrare che l'equazione $x=\log|x|$ ha un'unica soluzione.

5.9 - Considerata in R la funzione

$$f(x) = x\, e^{-x}$$

provare che f ha un massimo relativo per $x=1$.

5.10 - Per quali valori di a

$x=1$ è p.to di minimo relativo per $f(x)=ax^2-x+1$ (1/2)

$x=0$ è p.to di minimo relativo per $f(x)=e^{a^2x}-x$ (±1)

$x=-1$ è p.to di minimo relativo per $f(x)=\log a|x|+x$ (mai)

$x=2$ è p.to di massimo relativo per $f(x)=\sqrt{1-(x-a)^2}$ (2)

5.11 - Per tracciare il grafico di una funzione $f(x)$ è consigliabile eseguire, ove possibile, le seguenti operazioni:

1) determinare il *campo di esistenza* di $f(x)$[1], cioè il più grande sottoinsieme di R in cui ha senso calcolare l'espressione "$f(x)$";
2) studiare il segno di $f(x)$;
3) studiare il comportamento di $f(x)$ all'infinito (ove ciò sia lecito);
4) studiare il segno di $f'(x)$
5) studiare il segno di $f''(x)$.

A - La parabola (Fig. 10,11,12,13). Il grafico della funzione

$$f(x) = ax^2+bx+c \qquad a \neq 0$$

prende il nome di *parabola*

1) il campo di esistenza è R;
2) supponiamo al lettore noto il metodo per determinare il segno di un polinomio di secondo grado;
3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a\cdot(+\infty)$; inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a\cdot(\pm\infty)$$

---

(1) A rigore quando si assegna una funzione si intende assegnato a priori il suo campo di esistenza.

e quindi $f(x)$ è priva di asintoti obliqui;

4) $f'(x) = 2ax+b$ e quindi

$a>0 \Rightarrow f(x)$ è strett. cresc. in $]-b/2a,+\infty[$, strett. decr. in $]-\infty, -b/2a[$;

$a<0 \Rightarrow f(x)$ è strett. cresc. in $]-\infty,-b/2a[$, strett. decr. in $]-b/2a, +\infty[$;

quindi se $a > 0$ $x=-b/2a$ è p.to di minimo relativo (anzi assoluto), se $a < 0$ p.to di massimo relativo (anzi assoluto).

5) $f''(x)=2a$ e quindi $f(x)$ è convessa se $a>0$, conca-

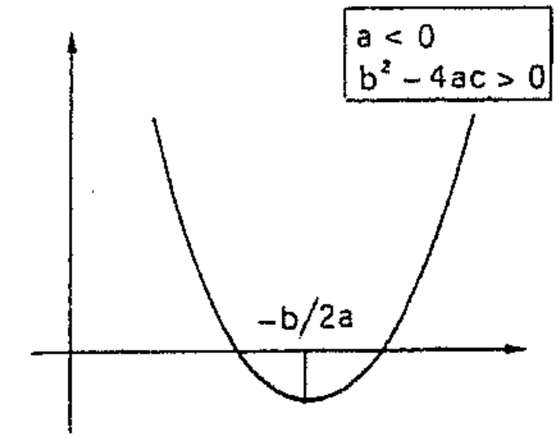


Fig. 10

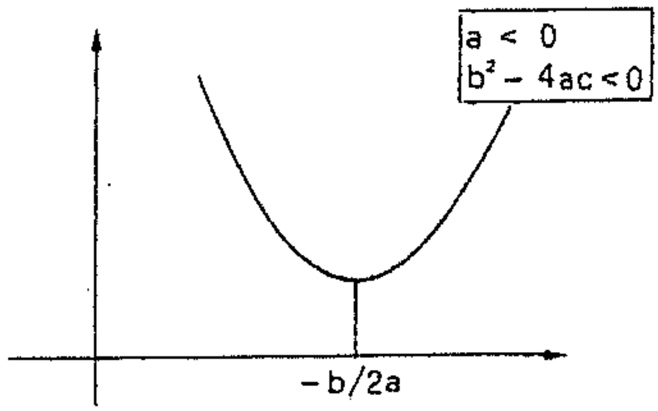


Fig. 11

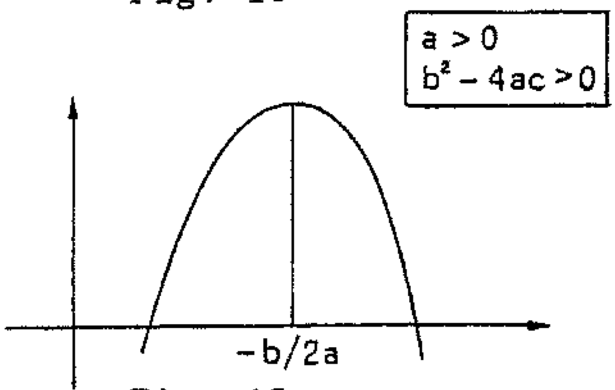


Fig. 12

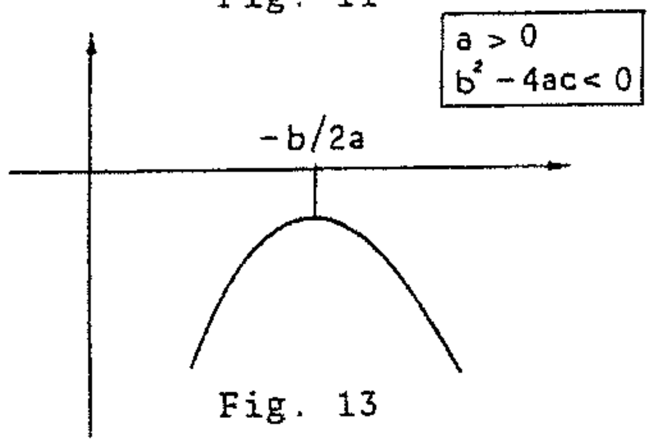


Fig. 13

va se $a<0$

B-$f(x)=e^{-x^2}$ (funzione di Gauss, Fig. 14)

1) il campo di esistenza è tutto R;

2) $e^{-x^2}>0 \quad \forall x\in R$;

3) $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2}/x = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0$;

quindi $y=0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ ed a $-\infty$;

4) $f'(x)=-2xe^{-x^2}$, quindi $f'(x)>0(<0) \Leftrightarrow x<0(x>0)$.

Pertanto $f(x)$ è strettamente crescente in $]-\infty,0]$, decrescente in $[0,+\infty[$; $x=0$ è punto di massimo relativo (anzi assoluto).

5) $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2-1)$ quindi

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in]-\infty, -1/\sqrt{2}[\cup]1/\sqrt{2},+\infty[$,

$f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$.

Pertanto $f(x)$ è convessa in $]-\infty, -1/\sqrt{2}[$ ed in $]1/\sqrt{2}, +\infty[$, concava in $]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$; $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono punti di flesso.

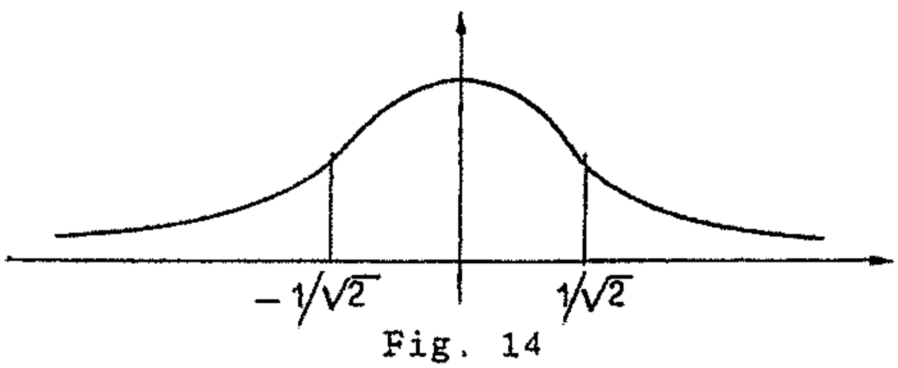


Fig. 14

C - $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ (Fig. 15)

1) f è definita in $R - \{-1\}$;

2) $f(x) \geq 0$ (<0) $\Leftrightarrow x > -1$ ($x < -1$) ;

3) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$; pertanto $x=-1$ è un

asintoto verticale. Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = 1,$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to \pm\infty} - \frac{x}{x+1} = -1$$

quindi $y=x-1$ è asintoto per il grafico di f a$+\infty$ e $-\infty$.

4) $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ quindi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$,

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-2, -1[\cup]-1, 0[$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$ e $x=-2$.

Pertanto f risulta crescente in $]-\infty, -2]$, decrescente in $[-2, -1[$, ancora decrescente in $]-1, 0]$ e crescente in $[0, +\infty[$. Si osservi che f, pur essendo decrescente in $[-2, -1[$ e $]-1, 0]$ non è decrescente in $[-2, -1[\cup]-1, 0]$. Infine -2 è un punto di massimo relativo e 0 è un punto di minimo relativo.

5) $f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$; quindi $f''(x) > 0$ (<0) $\Leftrightarrow x > -1$

($x < -1$)

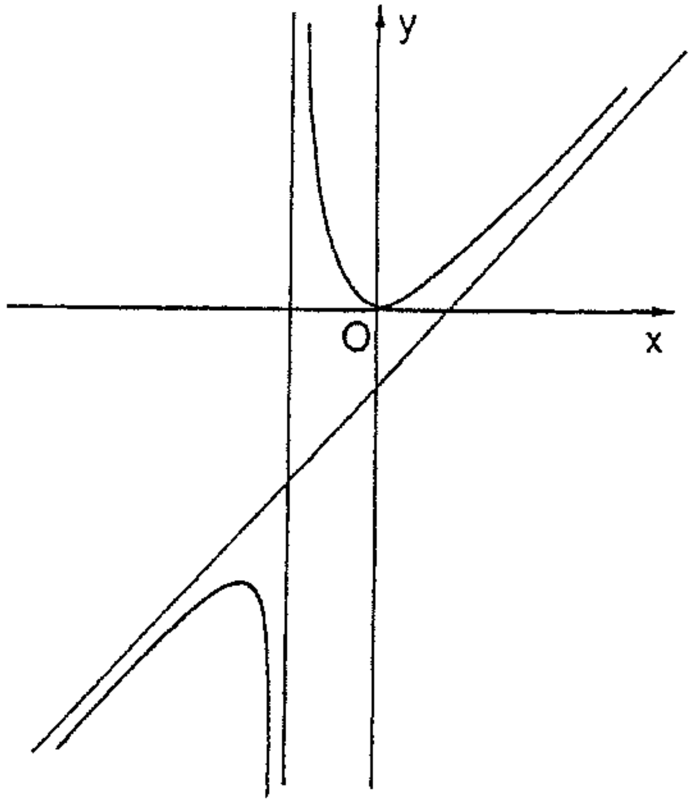


Fig. 15

5.13 - Sia $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, a_k \in R$.

Sia inoltre $P(x) = 0 \quad \forall x \in R$.

Si ha subito

$$a_n = P(0) = 0 .$$

D'altro canto : $P(x)=0 \quad \forall x \in R \quad \Rightarrow \quad P'(x)=0 \quad \forall x \in R$.

Pertanto poichè $P'(x)=na_0 x^{n-1} + \ldots + 2a_{n-2} x + a_{n-1}$

si ha:

$$a_{n-1} = P'(0) = 0.$$

Così continuando si prova che $a_k = 0 \ \forall k$. Si riottiene in tal modo il Principio di identità dei polinomi.

§ 6 - Criterio di Cauchy e convergenza uniforme.

Sia f(x) definita in X e sia x_o di accumulazione per X.
Supponiamo che f(x) sia convergente in x_o:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \in R.$$

Per definizione di limite fissato $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che

$$x \in X \cap (]x_o-\delta,\ x_o+\delta[-\{x_o\}) \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$$

da cui

$$x',x'' \in X \cap (]x_o-\delta, x_o+\delta[-\{x_o\}) \Rightarrow |f(x')-f(x'')| \leq$$

$$\leq |f(x')-\ell|+|\ell-f(x'')|<2\varepsilon.$$

In definitiva si ha (*condizione di Cauchy*):

(32) $\forall \varepsilon>0\ \exists I$(intorno di x_o): $\forall x',x'' \in X \cap (I-\{x_o\})$ risulti $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

In sostanza la (32) esprime la proprietà: "se f(x) è convergente in x_o le sue oscillazioni devono essere piccole intorno ad x_o".
E' possibile provare che il verificarsi della (32) è condizione sufficiente (oltre che necessaria) per la convergenza di f(x) in x_o.
All'uopo sia $\{x_n\}$ una successione di elementi di X

convergente ad x_0 e tale che $x_n \neq x_0$. Per definizione di limite, se J è l'intorno di x_0 di cui alla (32), esiste un indice ν tale che

$$(33) \qquad x_n \in J \quad \text{se} \quad n>\nu .$$

Quindi dalla (32) segue

$$(34) \qquad m,n > \nu \Rightarrow x_n,\ x_m \in J \Rightarrow |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon.$$

Pertanto la successione $\{f(x_n)\}$ è convergente per il criterio di Cauchy sulle successioni: sia $\ell=\lim_n f(x_n)$

Dalla prop. 2 e dall'OSSERVAZIONE 1 si ha allora che f(x) è convergente in x_0 e si ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell.$$

Quanto visto finora continua a valere se $x_0=\pm\infty$; pertanto in sintesi:

- CRITERIO DI CAUCHY - *Condizione necessaria e sufficiente perchè* f(x) *sia convergente in* x_0 *è che valga la condizione (di Cauchy)* (32).

Sia adesso $f(x)$ continua in un intervallo I; se $x_o \in I$ per il criterio di Cauchy si ha (cfr.(32)):

$$(35)\quad \forall\, \varepsilon>0 \;\; \exists\, \delta>0:\;\; x',x''\in\left]x_o-\frac{\delta}{2}\,,\; x_o+\frac{\delta}{2}\right[\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; |f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Il numero positivo δ ovviamente *dipende da* x_o *oltre che da* ε; se è possibile "svincolare δ dalla dipendenza da x_o" e cioè scegliere $\delta>0$ tale che la(35) valga qualunque sia $x_o\in I$ si dice che f è *uniformemente continua* in I; più precisamente $f(x)$ si dice uniformemente continua in I se

$$(36)\quad \forall\, \varepsilon>0 \;\; \exists\, \delta>0: \forall\, x',x''\in I \text{ con } |x'-x''|<\delta \text{ si abbia}$$

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

E'appena il caso di osservare che *una funzione uniformemente continua in* I *è continua in* I. Tale affermazione in generale non si inverte; basta in proposito considerare una funzione f continua in un intervallo non chiuso $]a,b]$ e non convergente in a. Se f fosse uniformemente continua,fissato $\varepsilon>0$, dalla (36)si avrebbe

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \quad \text{se} \quad a<x',x''<a+\delta.$$

In tal caso, per il criterio di Cauchy, f sarebbe convergente in a contro l'ipotesi.
In compenso si può dimostrare

TEOREMA DI CANTOR - *Se f è continua in un intervallo chiuso e limitato* $[a,b]$ *allora f è uniformemente continua.*

La dimostrazione di tale teorema può essere ottenuta facilmente ragionando per assurdo.
A tal fine neghiamo (per assurdo!) la (36):

$\exists\varepsilon>0$ tale che: $\forall n$ esistono in I x'_n ed x''_n tali che $|x'_n-x''_n|< \frac{1}{n}$ ed $|f(x'_n)-f(x''_n)|\geq \varepsilon$.

Poichè $\{x'_n\}$ è contenuta in $[a,b]$ esisterà un'estratta $\{x'_{n_k}\}$ convergente ad un punto $x_o\in[a,b]$. Consideriamo allora le due relazioni

i) $|x'_{n_k} - x''_{n_k}| < 1/n_k$

ii) $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon$.

Dalla i) facendo tendere k all'infinito segue che anche $\{x''_{n_k}\}$ tende ad x_o; dalla ii) tenendo conto che f è continua e che quindi $\lim_k f(x'_{n_k}) = \lim_k f(x''_{n_k}) = f(x_o)$ segue, facendo tendere k all'infinito,

$$0 = |f(x_o)-f(x_o)| \geq \varepsilon$$

e ciò è assurdo.

Complementi ed esercizi

6.1 - Sia f continua in $[a,+\infty[$, $a\in R$; dimostrare che

i) se f converge a $+\infty$ f è uniformemente continua (Traccia: usando il Criterio di Cauchy ci si riporta al caso di un intervallo chiuso e limitato);

ii) se f è derivabile ed f' converge a $+\infty$ f è uniformemente continua (Traccia: usare il teorema di Lagrange);

iii) se f è derivabile ed f' diverge a $+\infty$ f non è uniformemente continua;

iv) se f è periodica essa è uniformemente continua.

7.2 - Quali delle seguenti funzioni sono uniformemente continue su $[1, +\infty[$:

$$\frac{\text{sen } x}{x}, \quad \log x, \; e^x, \quad \frac{x^2-1}{x}, \; \text{sen}x, \; x^3, \; \sqrt{x}, \; x \log x$$

$$\frac{x^2-\text{sen } x}{x}, \quad e^{-x}.$$

7.3 - $\dfrac{\text{sen } x}{x}$ è uniformemente continua su $]0,1]$?

7.4 - Sia f(x) definita in X ed $x_0\in\overline{R}$ sia tale che abbia senso considerare il limite di f per x che tende ad x_0.
Così come già fatto nel caso delle successioni si può introdurre il concetto di massimo e minimo limi-

te di $f(x)$ in x_0 :

i) sia $f(x)$ limitata intorno ad x_0; cioè esiste un intorno I di x_0 tale che $f(x)$ sia limitata in $I \cap X$. Denotato con E l'insieme dei numeri reali ℓ tali che esista una successione $\{x_n\}$ in $X-\{x_0\}$ con le seguenti proprietà

$$\lim_n x_n = x_0 , \quad \lim_n f(x_n) = \ell ;$$

il massimo ed il minimo di E si chiamano *massimo e minimo limite* di $f(x)$ in x_0 e si pone

$$\ell'' = \max E = \lim_{x \to x_0}'' f(x) , \quad \ell' = \min E = \lim_{x \to x_0}' f(x) .$$

Si può provare che ℓ'' ed ℓ' sono caratterizzati dalle seguenti proprietà

α) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I$(intorno di x_0): $x \in X \cap (I-\{x_0\}) \Rightarrow f(x) < \ell'' + \varepsilon \ (f(x) > \ell' - \varepsilon)$

β) $\forall \varepsilon > 0, \forall I$(intorno di x_0) $\exists x \in X \cap (I-\{x_0\})$: $f(x) > \ell'' - \varepsilon \ (f(x) < \ell' + \varepsilon)$.

In modo analogo al caso delle successioni si definiscono ℓ' ed ℓ'' nel caso in cui $f(x)$ non è limitata superiormente (inferiormente) "intorno ad x_0".

7.5 Sia $f(x)$ definita in un insieme I; assumendo la (36) come definizione di uniforme continuità si ha: $f(x)$ continua in I ed I compatto $\Rightarrow$ $f(x)$ unif. cont. in I.

CAPITOLO X

CALCOLO DIFFERENZIALE

§ 1 - Teoremi di de l'Hôpital

Abbiamo visto nel precedente capitolo che lo studio del limite del rapporto di due funzioni presenta difficoltà allorquando ci si imbatte in una delle forme indeterminate 0/0 o ∞/∞. Vogliamo in tale paragrafo illustrare alcuni risultati utili a sciogliere, nella maggior parte dei casi, tale nodo.

Premettiamo il seguente

TEOREMA DI CAUCHY. *Se* f,g *sono due funzioni continue in* $[a,b]$, *derivabili in* $]a,b[$ *e se* $g'(x) \neq 0$ *in* $]a,b[$ *allora esiste un punto* $c \in]a,b[$ *tale che*

$$(1) \qquad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad .$$

Si consideri la funzione

$$h(x)=[f(b)-f(a)]g(x) - [g(b)-g(a)]f(x).$$

Tale funzione verifica le ipotesi del teorema di Rolle (cfr. Cap. IX § 5): esiste pertanto un punto $c\in]a,b[$ tale che $h'(c)=0$ cioè

$$(2)\qquad [f(b)-f(a)]g'(c)=[g(b)-g(a)]f'(c)\ .$$

Poichè, per ipotesi, $g'(c)\neq 0$ e inoltre, per il teorema di Lagrange,

$$g(b)-g(a) = g'(c_1)(b-a)\neq 0 \qquad c_1\in]a,b[$$

dalla (2), dividendo per $g'(c)[g(b)-g(a)]$, si ottiene la (1).

Siano f e g *due funzioni con le seguenti proprietà:*

α) f e g *sono derivabili in* $]a,x_0[$ *con* $x_0\in R$ o $x_0=+\infty$;

β) $g'(x)$ *ha segno costante in* $]a,x_0[$;

γ) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.

In tali ipotesi, se esiste il $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *esiste anche il* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *e si ha*

$$(3)\qquad \boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \qquad \text{(Regola di de l'Hôpital)}$$

Per fissare le idee sia $g'(x)<0$; g è allora decrescente in $]a,x_0[$ e quindi, poichè g è infinitesima in x_0, si ha $g(x) > 0$ in $]a,x_0[$. Pertanto in tale intervallo ha senso considerare il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$. Consideriamo il caso

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in R .$$

Per la definizione di limite, fissato $\varepsilon>0$, esiste $x_\varepsilon < x_0$ tale che

$$(4) \qquad \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - \ell \right| < \varepsilon \qquad \text{se} \quad z \in]x_\varepsilon, x_0[.$$

Se $x<y$ sono due punti di $]x_\varepsilon,x_0[$, per il teorema di Cauchy esiste un punto c appartenente all'intervallo $]x,y[$ e, quindi, a $]x_\varepsilon,x_0[$ tale che

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

Dalla (4) segue

$$(5) \qquad \left| \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - \ell \right| < \varepsilon \quad \text{se} \quad x,y \in]x_\varepsilon, x_0[.$$

D'altro canto poichè per ipotesi $\lim_{y \to x_0} f(y) = \lim_{y \to x_0} g(y) = 0$

dalla (5) si ottiene

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| = \lim_{y \to x_0} \left| \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - \ell \right| \leq \varepsilon \quad \text{se} \quad x \in]x_\varepsilon, x_0[:$$

ciò significa che $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$ cioè la (3).

Se $\ell = +\infty$ o $\ell = -\infty$ la dimostrazione è del tutto analoga.

OSSERVAZIONE 1 - Ovviamente il risultato precedente, continua a sussistere se si sostituisce l'intervallo $]a, x_0[$ con l'intervallo $]x_0, b[$ dove $x_0 \in R$ o $x_0 = -\infty$.

Per un corretto uso della "regola" (3) sottolineamo che, in via preliminare, va sempre studiato il comportamento in x_0 della funzione $f'(x)/g'(x)$. Se tale funzione è regolare in x_0 allora va utilizzata l'identità (3). *Se invece non esiste il* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *non si può concludere che non esiste il* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Infatti se $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, $g(x) = e^x - 1$ si ha

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \cos \frac{1}{x} + \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{e^x}$$

quindi $f'(x)/g'(x)$ non è regolare in 0; d'altra parte risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} \cdot \lim_{x\to 0} x \cos \frac{1}{x} = 1.0 = 0.$$

Come esempio di applicazione della regola di de l'Hôpital consideriamo la funzione $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x - tgx}{x^2}$ il cui limite in 0 si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\lim_{x\to 0} \frac{tg^2 x}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{tg\, x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} tgx =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

e quindi, per la (3), $\lim_{x\to 0} \frac{x - tg\, x}{x^2} = 0$.

Supponiamo che oltre alle condizioni α), β) *si abbia*

$\gamma)'$ $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$, $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$;

allora, se esiste il $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *esiste anche il* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *e sussiste la* (3)

Tanto per fissare le idee supponiamo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in R ;$$

Procedendo come nella dimostrazione precedente si ha (cfr. (5))

$$\ell-\varepsilon < \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} < \ell + \varepsilon \qquad x,y \in \,]x_\varepsilon,\, x_o[$$

e quindi

$$(6) \qquad \ell - \varepsilon < \frac{\dfrac{f(y)}{g(y)} - \dfrac{f(x)}{g(y)}}{1 - \dfrac{g(x)}{g(y)}} < \ell + \varepsilon \quad .$$

Ovviamente ha senso dividere per $g(y)$ almeno se y appartiene ad un opportuno intorno di x_o : infatti se, per fissare le idee, $g' > 0$ (cfr. β)) si ha (cfr. γ)') $\lim_{y\to x_o} g(y)=+\infty$. Inoltre, a patto di prendere x,y con $x<y$ in un opportuno intorno di x_o, risulta $0<g(x) < g(y)$; essendo quindi $1 - \frac{g(x)}{g(y)} > 0$ dalla (6) si ottiene, fissato x

$$H(y)= \frac{f(x)}{g(y)} +(\ell-\varepsilon)\left(1- \frac{g(x)}{g(y)}\right)< \frac{f(y)}{g(y)} < (\ell+\varepsilon) \left(1- \frac{g(x)}{g(y)}\right)+$$

$$+ \frac{f(x)}{g(y)} = K(y) .$$

Poichè, per l'ipotesi γ)', risulta (ricorda che x è fissato)

$$\lim_{y\to x_o} H(y) = (\ell-\varepsilon) \quad , \qquad \lim_{y\to x_o} K(y) = \ell+\varepsilon \quad ,$$

allora (cfr. Cap. IX., PROP. 9) esiste un intorno I di x_0 tale che

$$H(y) > \ell - 2\varepsilon \qquad e \qquad K(y) < \ell+2\varepsilon \quad \forall y \in I-\{x_0\}.$$

Si ha allora $\ell-2\varepsilon< \frac{f(y)}{g(y)} <\ell+2\varepsilon$ se $y\in I-\{x_0\}$ da cui per l'arbitrarietà di ε segue la (3).

In modo analogo si ragiona se $\ell=+\infty$ o $\ell=-\infty$. Ovviamente il precedente risultato continua a sussistere se l'intervallo $]a,x_0[$ è sostituito da un intervallo $]x_0,b[$ con $x_0\in R$ o $x_0=-\infty$.

Osserviamo esplicitamente che anche in questo caso la funzione $\frac{f(x)}{g(x)}$ può essere regolare in x_0 senza che lo sia $\frac{f'(x)}{g'(x)}$; basta in proposito considerare il caso $f(x) = x + \text{sen } x$, $g(x) = x$, $x_0=+\infty$.

OSSERVAZIONE 2 - In definitiva ogni volta che il limite in x_0 di un rapporto $f(x)/g(x)$ si presenta o nella forma indeterminata $0/0$ o in quella ∞/∞ si può provare a calcolare tale limite studiando il comportamento in x_0 di $f'(x)/g'(x)$. Può capitare però che anche quest'ultimo limite si presenti sotto forma indeterminata: in tal caso se f',g' verificano le ipotesi α), β), γ) ovvero α), β), γ)' si può provare a calcolare il limite in x_0 di $f''(x)/g''(x)$ dove f'', g'' (cfr. Cap. IX § 5) sono le derivate seconde di f e g. Ovviamente se $f''(x)/g''(x)$ è regolare in x_0 si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\ .$$

Più in generale, definita induttivamente la *derivata n-ma* di una funzione h(x) mediante la posizione

$$h^{(o)}(x)=h(x),\ h^{(1)}(x)=h'(x),\ h^{(n)}(x)=Dh^{(n-1)}(x)\ (=D^n h),$$

se $f^{(k)}, g^{(k)}$ verificano, per ogni $k\leq n-1$ le ipotesi α) β), γ) (o γ)') risulta

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=\lim_{x\to x_o}\frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}=\ldots=\lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}$$

sempre che il primo limite esista.

Ad esempio se si vuole calcolare il seguente

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}\quad \text{con n intero positivo},$$

osservato che $D^k x^n = n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}, D^n x^n=n!$, $D^k e^x=e^x$, si ha

$$+\infty=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{n!}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{n!x}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}.$$

Analogamente si dimostra che $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^\alpha}=+\infty\quad\forall\alpha\in R.$

Complementi ed esercizi

1.1 - Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ il limite del prodotto $f\cdot g$ si presenta in forma indeterminata. Se si osserva che, almeno in un intorno I di x_0, risulta

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad e \quad f(x)g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad (\text{se } f(x)\neq 0 \text{ in } I-\{x_0\})$$

lo studio del limite di $f(x)g(x)$ è ricondotto allo studio di uno dei seguenti limiti

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\quad , \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\quad ;$$

dal momento che si ha $\lim\limits_{x\to x_0} f=\lim\limits_{x\to x_0} 1/g=0$ e $\lim\limits_{x\to x_0}|g| = \lim\limits_{x\to x_0}|1/f|=+\infty$ il calcolo dei limiti indicati sopra può essere spesso effettuato utilizzando la regola di de l'Hôpital.

A titolo di esempio si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \lg x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\lg x}{\frac{1}{x^2}} = (\text{applicando la } (3))$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{2}{x^3}\right)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Più generalmente si provi che $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \lg x = 0 \quad \forall\alpha>0$.

Verificare inoltre che

i) $\lim_{x \to 0^+} x\, e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ ii) $\lim_{x \to 0} x\, e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$

1.2 - Provare che:

i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\lg x}{x^\alpha} = 0 \quad \forall\, \alpha > 0,$ ii) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x - \operatorname{arctg} x} = 3$

iii) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1+\operatorname{arcsen}(x-1)}{(x-1)+\operatorname{sen}(x-1)} = 1,$ iv) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\lg(e^x - 1)}{x} = 1.$

1.3 - Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, osservando che

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

il caso della forma indeterminata $\infty - \infty$ è ricondotto al caso 0/0. Ad esempio:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\lg(1+x)}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\lg(1+x) - x}{x \lg(1+x)} =$$ (Regola di de l'Hôpital)

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1} - 1}{\lg(1+x) + \frac{x}{x+1}} = - \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(1+x)\,\frac{\lg(1+x)}{x} + 1} = -\frac{1}{2}\,.$$

Provare con la stessa tecnica che

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{e^{x}-1} - \frac{1}{x}\right] = -\frac{1}{2}\,; \quad \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x}\right] = 0\,.$$

1.4 - Se il $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ si presenta in una delle forme indeterminate 0^0, 1^∞, ∞^0, osservando che $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\lg f(x)}$, tutto è ricondotto allo studio del limite in x_0 di $g(x)\lg f(x)$ che si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$, già considerata, nell' es. 1.1. Ad esempio

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\lg x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\lg x} = e^0 = 1\,.$$

Verificare che:

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x = 1\,; \quad \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{arctg} x)^x = 1\,; \quad \lim_{x\to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1\,;$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}\ .$$

1.5 - Sia f una funzione derivabile in $]a,x_0[$ $(]x_0,b[)$ $(x_0\in R)$ tale che $\lim_{x\to x_0} f'(x)=\ell\,(\in R)$. Dimostrare:

a) la funzione f è convergente in x_0 (Sugg.:usare il criterio di convergenza di Cauchy e il teorema di Lagrange);

b) prolungata f per continuità in x_0, posto cioe' $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$, risulta

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0} f'(x)=\ell \quad \text{(Sugg.:usare la(3))};$$

quindi f è dotata in x_0 di derivata sinistra (destra)(cfr. es. 1.6 del Cap. IX);

c) se f è derivabile in $]a,b[$ e $x_0\in]a,b[$ f' non può presentare in x_0 una discontinuità eliminabile o di prima specie (Sugg.: fare uso di quanto dimostrato al punto b)).

1.6 (Regola di Leibnitz) Usando il principio di induzione dimostrare che

$$D^n(f(x)\cdot g(x))=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)\ g^{(n-k)}(x)\,.$$

§ 2 - Confronto di infinitesimi ed infiniti.

Nel calcolo dei limiti che si presentano nelle forme indeterminate 0/0 ed ∞/∞ non sempre un'applicazione meccanica della regola di de l'Hôpital rappresenta la via più rapida per arrivare alla soluzione del problema.

In questo paragrafo vogliamo accennare ad un altro metodo per il calcolo dei suddetti limiti.

Siano f(x) e g(x) due funzioni *infinitesime in* $x_0 \in \overline{R}$; esista inoltre un intorno I di x_0 tale che sia $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ in $I-\{x_0\}$.

Distinguiamo quattro casi:

i) $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = 0$

ii) $\lim_{x \to x_0} |f(x)|/|g(x)| = +\infty$

iii) $\lim_{x \to x_0} |f(x)|/|g(x)| = \ell \in]0,+\infty[$

iv) $|f(x)|/|g(x)|$ non è regolare in x_0.

Quando si verifica l'eventualità i), per sottolineare il fatto che "f(x) è più veloce di g(x) nel tendere a zero" si dice che f(x) è in x_0 un *infinitesimo di ordine superiore a g(x)*; nel caso ii) si dice che f(x) *è in* x_0 *un infinitesimo di ordine inferiore a g(x)* e nel caso iii) che f(x) *è in* x_0 *un infinitesimo dello stesso ordine di g(x)*. Se invece, caso iv), il limite di $|f(x)|/|g(x)|$ non esiste si dice che f(x) e g(x) sono *infinitesimi non confrontabili in* x_0.

Ad esempio e^x-1 e senx sono infinitesimi dello stesso ordine in x=0 poichè

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}x} = 1$$

mentre x^2 è un infinitesimo di ordine superiore a $\log(1+x)$ in $x=0$; infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\log(1+x)} = 0\cdot 1 = 0 \ .$$

Infine $\operatorname{sen}x\,(2+\cos.\frac{1}{x})$ e $\operatorname{tg}x$ sono infinitesimi non confrontabili in $x = 0$.

Particolarmente utile nel calcolo dei limiti è il seguente semplice risultato.

PROPOSIZIONE 1 - *Se* $f_1 \ldots f_k$, $g_1 \ldots g_h$ *sono funzioni infinitesime in* x_0 *e se* f_1 *è di ordine inferiore ad* $f_2 \ldots f_k$ *e* g_1 *è di ordine inferiore a* $g_2, \ldots, g_h$ *si ha*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1+\ldots+f_k}{g_1+\ldots+g_h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1}{g_1} \tag{7}$$

purché uno di tali limiti esista.

Infatti tenendo conto che:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_i}{f_1} = 0 \quad i\neq 1, \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{g_i}{g_1} = 0 \quad i\neq 1$$

si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1+\ldots+f_k}{g_1+\ldots+g_h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{1+\dfrac{f_2}{f_1}+\ldots+\dfrac{f_k}{f_1}}{1+\dfrac{g_2}{g_1}+\ldots+\dfrac{g_h}{g_1}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f_1}{g_1}$$

Se invece $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitamente grandi in $x_0 \in \overline{R}$ cioè se

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty ,$$

si dirà che $f(x)$ è in x_0 *un infinito di ordine inferiore* a $g(x)$ se si verifica i), di *ordine superiore* a $g(x)$ se sussiste la ii), *dello stesso ordine* di $g(x)$ se è verificata la iii); nel caso iv) i due infiniti si diranno *non confrontabili.*
Ad esempio e^x è un infinito di ordine superiore ad x in $+\infty$ giacchè

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty ;$$

così $\log|x|$ è un infinito di ordine inferiore ad $\dfrac{1}{|x|}$ in $x = 0$ poichè

$$\lim_{x \to 0} |x| \cdot \log |x| = 0.$$

In modo del tutto analogo alla prop. 1 si prova la seguente

PROPOSIZIONE 2 - *Se* $f_1 \dots f_k$, $g_1 \dots g_h$ *sono infinitamente grandi in* $x_0 \in \bar{R}$ *e se* f_1 *è di ordine superiore a* $f_2 \dots f_k$ *e* g_1 *è di ordine superiore a* $g_2 \dots g_h$ *vale la* (7) *purchè uno dei due limiti esista.*

Per effettuare il confronto di infinitesimi (od infiniti) è talvolta utile introdurre "un'unità di misura".

Se $x_0 \in R$ è consuetudine "misurare la velocità di un infinitesimo" assumendo l'infinitesimo $|x-x_0|$ come "unità di misura" cioè come "infinitesimo del primo ordine".

Più in generale se esiste un numero reale $\alpha>0$ tale che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^\alpha} = \ell > 0$$

si dirà che $f(x)$ è *un infinitesimo di ordine* α.

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due infinitesimi in x_0 di ordine rispettivamente α,β con $\alpha>\beta$ si ha che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$; infatti:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f|}{|g|} = \lim_{x\to x_0} |x-x_0|^{\alpha-\beta} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{|f|}{|x-x_0|^\alpha} \cdot$$

$$\cdot \lim_{x\to x_0} \frac{|x-x_0|^\beta}{|g|} = 0 .$$

Analoghe definizioni si danno nel caso degli infinitesimi in $x_0 = \pm\infty$ assumendo come "unità di misura " $\frac{1}{|x|}$ ". Nel caso degli infiniti si assume come "unità di misura " $\frac{1}{|x-x_0|}$ od $|x|$ a seconda che $x_0 \in R$ od $x_0 = \pm\infty$.

Con le convenzioni su adottate, se si osserva che le funzioni senx, $(e^x-1)^3$, $(\log(1+x))^2$ sono in $x=0$ infinitesimi di ordine 1,3,2 rispettivamente mentre tg x , 1-cosx sono infinitesimi di ordine 1 e 2, si ha subito dalla prop. 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x+(e^x-1)^3+(\log(1+x))^2}{\operatorname{tg}x+(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x} = 1 \quad .$$

Ritornando al caso di una funzione f(x) infinitesima in $x_0 \in R$ se accade che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^\alpha} = 0 \qquad \forall\, \alpha>0$$

si dirà che f(x) è un *infinitesimo di ordine* $+\infty$;

se invece

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|x-x_0|^\alpha}{|f(x)|} = 0 \qquad \forall\, \alpha>0$$

si dirà che f(x) è un *infinitesimo di ordine* 0.

Analoghe definizioni si danno per gli infinitesimi in $\pm\infty$ e per gli infiniti.
Così la funzione esponenziale e^x è un infinito di ordine $+\infty$ poichè

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \forall\alpha > 0;$$

invece la funzione $\log|x|$ è un infinito di ordine 0 in $x=0$ poichè

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log|x|}{\left(\frac{1}{|x|}\right)^\alpha} = \lim_{x\to 0} |x|^\alpha \log|x| = 0 \qquad \forall\alpha>0.$$

Per finire la funzione e^{-1/x^2} è infinitesima in $x=0$ di ordine $+\infty$; infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{|x|^\alpha} = \lim_{y\to+\infty} y^\alpha e^{-y^2} = 0$$

Complementi ed esercizi

2.1 - Sia $f(x)$ un infinitesimo di ordine $+\infty$ in x_0 e $g(x)$ un infinitesimo di ordine $\alpha<+\infty$; provare che $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

2.2 - Sia $f(x)$ un infinito di ordine $+\infty$ in x_0 e $g(x)$

un infinito di ordine $\alpha<+\infty$; provare che $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}=0$

2.3 - Provare che se f è in x_0 infinitesima di ordine $\alpha>0$ e $g(x)$ di ordine $\beta>0$, $f.g$ è un infinitesimo di ordine $\alpha+\beta$.

2.4 - Sia $f(x)$ un infinitesimo di ordine $\alpha>0$ e g un infinitesimo di ordine 0. Provare che $f\cdot g$ è un infinitesimo di ordine superiore a $|x-x_0|^\alpha$ e inferiore a $|x-x_0|^\beta$ qualunque sia $\beta>\alpha$.

2.5 Verificare che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(2^x-1)+\sqrt{x}-(1-\cos x)}{2\sqrt[4]{\operatorname{sen} x}\ \sqrt[4]{x}-x^3+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x+x^2+3\lg x}{\sqrt[3]{x^2+1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3\operatorname{sen} x(e^x-1)+x^4+\sqrt{x}\ \operatorname{tg} x\ \lg_3(1+x)}{4(1-\cos x)+(\operatorname{arcsen} x)^4} = \frac{3}{2}.$$

2.6 Trovare l'ordine dei seguenti infinitesimi in 0:

$\operatorname{sen} x^2$, $\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}$, $1-\cos\sqrt{e^x-1}$, $\log(x^2+1)$

[2,1/3,1,2].

§ 3 - La formula di Taylor e conseguenze

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $]a,b[$ e derivabile in $x_o \in]a,b[$.
Poniamo

$$\varepsilon_1(x)=f(x)-(f(x_o)+(x-x_o)f'(x_o))$$

Il significato geometrico di tale quantità è illustrato nella Fig. 1:

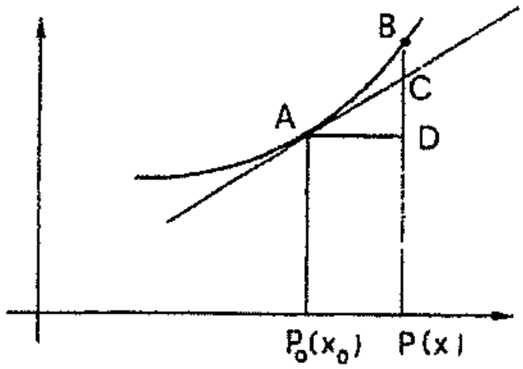


Fig. 1

$\overline{BP}=f(x)$, $\overline{CD}=f'(x_o)(x-x_o)$

$\overline{CP}=f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)$

$\overline{BC}=\varepsilon_1(x)$

$\varepsilon_1(x)$ è "l'errore" che si commette approssimando $f(x)$ con l'ordinata del punto di ascissa x giacente sulla tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_o\ f(x_o))$.
E' altresì evidente che $\varepsilon_1(x_o)=0$; ma si ha di più:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{\varepsilon_1(x)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\left[\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}-f'(x_o)\right]=$$

$$=f'(x_o)-f'(x_o)=0,\ \text{cioè:}$$

$\varepsilon_1(x)$ *è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad* $x-x_o$.

In sostanza abbiamo provato che, nelle ipotesi poste, *è possibile approssimare f(x) con un polinomio di primo grado in $x-x_0$ e l'errore che si commette è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad $x-x_0$.*

Sia adesso f(x) derivabile in]a,b[e dotata di derivata seconda in $x_0 \in]a,b[$.
Osserviamo subito che, in tali ipotesi, f'(x) è definita in]a,b[e derivabile in x_0; pertanto per quanto appena visto

$$(8) \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)-[f'(x_0)+(x-x_0)f''(x_0)]}{x-x_0} = 0 .$$

Poniamo adesso

$$\varepsilon_2(x)=f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2].$$

Il limite in x_0 di $\dfrac{\varepsilon_2(x)}{(x-x_0)^2}$ si presenta nella forma indeterminata 0/0; allora applicando la regola di de l'Hopital e tenendo conto della (8) si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varepsilon_2(x)}{(x-x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varepsilon_2'(x)}{2(x-x_0)} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)-[f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)]}{x-x_0} = 0 .$$

In sostanza abbiamo provato che, nelle ipotesi poste, *è possibile approssimare f(x) con un polinomio di secondo grado in $x-x_0$ e l'errore che si commette è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad $(x-x_0)^2$.*

In generale si ha:

PROPOSIZIONE 3 - *Se* $f(x)$ *è derivabile* $(n-1)$ *volte in* $]a,b[$ *ed* n *volte in* $x_o \in]a,b[$ *posto*

$$\varepsilon_n(x)=f(x)-[f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)+\frac{f''(x_o)}{2!}(x-x_o)^2+$$
$$+\dots+\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n]$$

si ha

$$\lim_{x\to x_o}\frac{\varepsilon_n(x)}{(x-x_o)^n}=0 \quad (9)$$

La dimostrazione, sulla falsariga di quanto fatto nel caso $n=2$, può ottenersi per induzione o anche applicando n volte la regola di de l'Hopital al rapporto $\dfrac{\varepsilon_n(x)}{(x-x_o)^n}$.

L'uguaglianza

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x-x_o)^k+\varepsilon_n(x) \quad (10)$$

prende il nome di *formula di Taylor relativa ad* f *di punto iniziale* x_o *e di ordine* n; $\varepsilon_n(x)$ si dice *resto n-mo*. Il polinomio

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x-x_o)^k$$

si dice *polinomio di Taylor di* f *di punto iniziale* x_0 *e di ordine* n. La (10) e la (9) esprimono il fatto che, nelle ipotesi della PROP. 3, è possibile *approssimare* f(x) *con un polinomio di grado* n *e l'errore che si commette è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a* $(x-x_0)^n$

A titolo di esempio sia $f(x) = e^x$ e $x_0=0$. Si ha allora

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \varepsilon_n(x).$$

Tale formula è però di scarsa utilità pratica poichè non fornisce alcuna indicazione sull'ordine di grandezza dell'errore $\varepsilon_n(x)$ che si commette assumendo la eguaglianza approssimata

$$e^x \cong \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} .$$

E' pertanto di grande interesse trovare delle espressioni esplicite per il resto $\varepsilon_n(x)$ al fine di ottenere delle stime per l'errore. In questo ordine di idee è di rilievo la seguente

PROPOSIZIONE 4 - *Se* f *è derivabile* (n+1) *volte in*]a,b[, *fissato* $x_0 \in]a,b[$, *per ogni* $x \neq x_0$ *esiste un punto* c *(dipendente* da x) *interno all'intervallo di estremi* x_0 *ed* x *tale che*

$$\varepsilon_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} .$$

Quest'ultima espressione di $\varepsilon_n(x)$ prende il nome di *resto nella forma di Lagrange*

Fissato per comodità $x<x_o$ poniamo

$$\psi_n(x) = (n+1)!\ \frac{\varepsilon_n(x)}{(x-x_o)^{n+1}} \quad .$$

Consideriamo nell'intervallo $[x,x_o]$ la funzione della variabile y

$$g(y)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k + \frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!}\psi_n(x) \quad .$$

E' facile verificare che g(y) è continua in $[x,x_o]$ e derivabile in $]x,x_o[$; inoltre

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x)^k + \frac{(x-x)^{n+1}}{(n+1)!}\psi_n(x)=f(x)$$

$$g(x_o)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x-x_o)^k + \frac{(x-x_o)^{n+1}}{(n-1)!}\psi_n(x) =$$

$$=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}(x-x_o)^k + \varepsilon_n(x) = f(x) \quad .$$

Quindi g(y) assume agli estremi dell'intervallo $[x,x_o]$ lo stesso valore; è possibile applicare a g il teorema di Rolle: esiste cioè un punto $c \in]x,x_o[$ tale che

(11) $$g'(c) = 0 \quad .$$

D'altro canto

$$g'(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(y)(x-y)^k$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(y)(x-y)^{k-1} - \frac{1}{n!}(x-y)^n \psi_n(x) =$$

$$= f'(y) + f''(y)(x-y) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(y)(x-y)^{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(y)(x-y)^n - f'(y) - f''(y)(x-y) -$$

$$- \ldots - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(y)(x-y)^{n-1} - \frac{1}{n!} \psi_n(x)(x-y)^n =$$

$$= \frac{(x-y)^n}{n!} [f^{(n+1)}(y) - \psi_n(x)] .$$

Pertanto la (11) diventa

$$\frac{(x-c)^n}{n!} [f^{(n+1)}(c) - \psi_n(x)] = 0.$$

Essendo $x \neq c$ si ricava $f^{(n+1)}(c) = \psi_n(x)$ e quindi l'asserto ricordando l'espressione di $\psi_n(x)$.

Se adesso riprendiamo in esame l'eguaglianza approssimata

$$e^x \cong \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad ,$$

si ha per l'errore $\varepsilon_n(x)$ l'espressione

$$\varepsilon_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

con c opportuno appartenente all'intervallo di estremi 0 e x; quindi se $x \in [-a,a]$

$$|\varepsilon_n(x)| \leq e^a \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \quad .$$

Analogamente nel caso $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_o=0$ si ha:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \varepsilon_{2n}(x)$$

e, tenendo conto che $\left| \frac{d^k \operatorname{sen} x}{dx^k} \right| \leq 1 \qquad \forall k \in N$.

$$\left| \varepsilon_{2n}(x) \right| \leq \frac{1}{(2n+1)!} a^{2n+1} \qquad \forall x \in [-a,a] \quad .$$

Nel caso $f(x) = \cos x$, $x_0=0$ si ha allo stesso modo

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \varepsilon_{2n+1}(x) \quad ,$$

$$\left| \varepsilon_{2n+1}(x) \right| \le \frac{1}{(2n+2)!} a^{2n+2} \qquad \forall x \in [-a,a].$$

OSSERVAZIONE 3 - Se $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}$ è un polinomio di grado n a coefficienti reali si ha che $f^{(n+1)}(x) = 0$ per ogni $x \in R$. Quindi $\varepsilon_n(x) = 0$. Ne segue che *un polinomio di grado n è uguale al suo polinomio di Taylor di ordine n qualunque sia il punto iniziale x_0.*

La proposizione che segue fornisce, utilizzando la formula di Taylor, una condizione sufficiente perchè un punto sia di massimo o di minimo relativo

PROPOSIZIONE 5 - *Sia* $f(x)$ *derivabile in* $]a,b[$ *e dotata di derivata seconda in* $x_0 \in]a,b[$. *Valgono le seguenti implicazioni:*

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \quad \textit{punto di massimo relativo,}$$

$$\text{(ii)} \begin{cases} f'(x_o) = 0 \\ \\ f''(x_o) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_o \quad \textit{punto di minimo relativo.}$$

Scriviamo la formula di Taylor di ordine 2:

$$f(x)=f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)+f''(x_o)\ \frac{(x-x_o)^2}{2} + \varepsilon_2(x).$$

Nelle ipotesi (i) si ha:

$$f(x)-f(x_o) = f''(x_o)\ \frac{(x-x_o)^2}{2!} + \varepsilon_2(x)$$

e quindi

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{(x-x_o)^2} = \frac{f''(x_o)}{2} + \frac{\varepsilon_2(x)}{(x-x_o)^2}\ .$$

Facendo tendere x ad x_o e tenendo presente la (9) (per n=2) si ottiene

$$\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{(x-x_o)^2} = \frac{f''(x_o)}{2} < 0.$$

Pertanto dal teorema della permanenza del segno segue che esiste un $\delta>0$ tale che se $x\in]x_o-\delta, x_o+\delta[\cap]a,b[\ x \neq x_o$ risulti

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} < 0 \quad \text{cioè} \quad f(x) < f(x_0)$$

e quindi l'asserto. In modo analogo si prova (ii).

Complementi ed esercizi

3.1 - Provare che: $\lg \frac{3}{2} \cong \frac{5}{12}$ con un errore ε tale che $|\varepsilon| \leq 2^{-6}$ (usare la formula di Taylor di punto iniziale 0 e di ordine 3 per $\lg(1+x)$); $\sqrt{1+10^{-k}} \cong 1+\frac{10^{k}}{2}$ $(k \in N)$ con un errore ε tale che $|\varepsilon| \leq \frac{1}{8} 10^{-2k}$ (usare la formula di Taylor di ordine 1 e di punto iniziale 0 per $\sqrt{1+x}$).

3.2 - Facendo uso della PROP. 5 dimostrare che

$$x_0 \in]a,b[\text{ è un pt. di max relativo} \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)\leq 0 \end{cases},$$

$$x_0 \in]a,b[\text{ è un pt. di min. relativo} \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)\geq 0. \end{cases}$$

3.3 - Supposto che $f(x)$ sia derivabile $(n-1)$ volte

in $]a,b[$ ed n volte in x_0 con *n pari* allora si ha:
$f'(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)< 0 (> 0) \Rightarrow x_0$ pt.di max (min.) relativo.[Si utilizzi la formula di Taylor di ordine n e si proceda come nella dimostrazione della PROP. 5.]

3.4 - Una funzione f si dice *crescente (decrescente) in* $x_0\in]a,b[$ *se esiste un* $\delta>0$ *tale che*

$$x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow f(x)>f(x_0) \quad (f(x)<f(x_0))$$
$$x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow f(x)<f(x_0) \quad (f(x)>f(x_0)) .$$

Verificare che la funzione

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x \operatorname{sen}^2 \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

è crescente in x=0 ma non è crescente in alcun intorno di 0.

3.5 - Provare che nelle stesse ipotesi dell' es. 3.3 ma con n dispari si ha:

$f'(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)>0\ (<0) \Rightarrow f$ crescente (decrescente) in x_0.

3.6 - Utilizzando la PROP. 5 verificare che:

a) x=1 è pt. di max relativo per $f(x)=\lg x-1/x$;

b) x=1 è pt. di min.relativo per $f(x)=xe^{1/x}$;

c) x=1 è pt. di min.relativo per $f(x)=x-\lg x$;

d) $x=1$ è pt. di max. relativo per $f(x)=xe^{-x}$;

e) $x=1$ è pt. di min. relativo per $f(x)=x^4-2x^2$.

Inoltre, dire per quali valori del parametro a

$x=1$ è pt. di min. relativo per $f(x)=ax^2-x+1$ [$a=1/2$]

$x=0$ è pt. di min. relativo per $f(x)=e^{a^2x}-x$ [$a=\pm1$]

$x=-1$ è pt. di min relativo per $f(x)=\lg a|x|+x$ [mai]

$x=2$ è pt. di max. relativo per $f(x)=\sqrt{1-(x-a)^2}$ [$a=2$].

3.7 - Sia $f(x)$ definita in $]a,b[$ e derivabile in $x_0\in]a,b[$. La funzione $x\in R\to f'(x_0)(x-x_0)\in R$ si chiama *differenziale di* f *in* x_0 e si indica con il simbolo $df(x_0)$. Se poniamo $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ (*incremento di* f *in* x_0) si ha (cfr. Prop. 3 con $n=1$)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f(x_0)-df(x_0)}{x-x_0}=0,$$

e cioè: *l'incremento ed il differenziale in un punto* x_0 *differiscono per un infinitesimo di ordine superiore ad* $x-x_0$.

Si osservi che se $g(x)=x$ si ha in ogni punto x_0

$$dg(x_0)=dx_0=x-x_0$$

da cui

$$df(x_0)=f'(x_0)\,dx_0.$$

§ 4 - Serie di Taylor

Consideriamo una funzione f definita in un intervallo I e supponiamo che, qualunque sia $k\in N$, f sia dotata in I di derivata k-ma $f^{(k)}(x)$; ciò si esprime di cendo che f *è di classe* $C^\infty(I)$. Allora, per ogni $n\in N$, possiamo scrivere la formula di Taylor relativa ad f di ordine n e di punto iniziale x_0, con x_0 interno ad I:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \varepsilon_n(x) \qquad x\in I$$

dove $\varepsilon_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ e c è un opportuno punto dell'intervallo di estremi x_0 e x. Posto

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

se risulta

$$(12) \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n(x) = 0 \qquad \forall x\in I$$

si ha $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$ ovvero, con le notazioni introdotte nel cap. VIII,

$$(13) \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad \forall x\in I.$$

Se vale la (13) si dice che f *è sviluppabile in* I *in serie di Taylor di punto iniziale* x_0; se $x_0 = 0$ la serie a secondo membro della (13) prende il nome di *serie di Mac-Laurin di* f.

Ricordando le maggiorazioni per i resti n-mi $\varepsilon_n(x)$, relativi alle funzioni elementari e^x, senx, cosx ottenute nel § 3, poichè inoltre $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ tali resti verificano la condizione (12); pertanto

$$(14) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad \forall x\in R$$

$$(14)' \qquad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\, x^{2n-1} + \ldots \quad \forall x \in R$$

$$(14'') \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} + \ldots \quad \forall x \in R.$$

Altro esempio di funzione sviluppabile in serie di Mac-Laurin è costituito dalla funzione $\frac{1}{1-x}$ il cui sviluppo coincide (cfr. Cap. VIII § 1) con la "serie geometrica":

$$(15) \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad \forall x \in]-1,1[\; .$$

Ponendo nella (15) $-x$ al posto di x ovvero $-x^2$ al posto di x si ottiene

$$(15)' \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n\, x^n + \ldots \quad \forall x \in]-1,1[$$

$$(15)'' \qquad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots \quad \forall x \in]-1,1[.$$

Volendo generalizzare la (15)' consideriamo la funzione $(1+x)^\alpha$ con α reale; ovviamente basta considerare il caso $\alpha \notin N$ in quanto, se $\alpha \in N$, lo sviluppo di Mac Laurin di $(1+x)^\alpha$ si riduce (cfr. oss.3) al polinomio di Taylor di punto iniziale 0 e di ordine α.

Essendo

$$D^k(1+x)^{\alpha} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} ,$$

posto

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} , \quad \binom{\alpha}{0} = 1$$

la formula di Taylor di punto iniziale 0 e di ordine n relativa a $(1+x)^{\alpha}$ con il resto nella forma di Lagrange si scrive nel seguente modo:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n+1}(1+c)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$$

dove c è un opportuno punto dell'intervallo di estremi 0 e x. Per fissare le idee supponiamo $\alpha>0$. Se $0<x<b<1$ si ha

$$(16) \quad |\varepsilon_n(x)| = \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| (1+c)^{\alpha} \frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}} \le$$

$$\le \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| 2^{\alpha} b^{n+1} \quad ;$$

poichè

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| b^{n+1}}{\left|\binom{\alpha}{n}\right| b^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n|}{n+1}\, b = b < 1$$

per il criterio del rapporto (cfr. cap. VIII §2) la serie il cui termine generale è l'ultimo membro della (16) è convergente: per la proposizione 1 del cap. VIII si ha allora

$$\lim_{n\to\infty} \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| 2^{\alpha}\, b^{n+1} = 0$$

e quindi, sempre per la (16), $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n(x) = 0$. Essendo soddisfatta la condizione (12) si ha che $(1+x)^{\alpha}$ è somma della sua serie di Mac Laurin per $x\in[0,1[$. Supponiamo ora $-\frac{1}{2} < -a < x < 0$. Risulta allora

$$|\varepsilon_n(x)| = \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| (1+c)^{\alpha} \frac{|x|^{n+1}}{(1+c)^{n+1}} \le \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \frac{a^{n+1}}{(1-a)^{n+1}} .$$

Poichè

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \left(\frac{a}{1-a}\right)^{n+1}}{\left|\binom{\alpha}{n}\right| \left(\frac{a}{1-a}\right)^{n}} = \frac{a}{1-a} < 1$$

ragionando come nel caso precedente si ha ancora $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n(x) = 0$. Se $\alpha<0$ si procede in modo analogo. In definitiva risulta

$$(17) \qquad (1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \forall x \in \left]-\frac{1}{2}, 1\right[.$$

Osserviamo esplicitamente che è possibile dimostrare l'identità (17) per ogni $x\in]-1,1[$. La serie a secondo membro della (17) prende il nome di *serie binomiale*.

Se poniamo nella (17) $\alpha =- \frac{1}{2}$ si ottiene

$$(17)' \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k$$

dove si è posto

$$\begin{cases} (-1)!! = (0)!! = 1 \\ (2k-1)!! = 1\cdot3\cdot5\ldots(2k-1), \ (2k)!! = 2\cdot4\cdot6\ldots(2k). \end{cases}$$

Dalla (17)' ponendo $-x$ al posto di x ovvero $-x^2$ al posto di x si ottiene

$$(17)'' \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k$$

$$(17)''' \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k} .$$

Complementi ed esercizi

4.1 - Ponendo nella (14) x=1 si ottiene

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} .$$

Tale formula permette di dimostrare che e è un numero reale irrazionale. Infatti se fosse $e=p/q$ con p,q interi si avrebbe

$$(18) \qquad q!\ e = \sum_{n=0}^{q} q!\ \frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} q!\ \frac{1}{n!} .$$

Poichè $q!\ e = q!\ \frac{p}{q} = (q-1)!\ p$ e inoltre, se $n\le q$, $\frac{q!}{n!}$ è un intero, deve essere intero anche l'ultimo termine di (18) cioè $\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!}$. D'altra parte si ha

$$0 < \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots + \frac{1}{(q+1)\ldots(q+k)} +$$

$$+\ldots < \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^k + \ldots = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

e quindi un assurdo non essendoci alcun intero nell'intervallo]0,1[.

4.2 - Scrivere, facendo uso della (14), gli sviluppi in serie di Mac Laurin delle funzioni senh x e coshx.

4.3 - Scrivere gli sviluppi in serie di Mac Laurin delle funzioni

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad , \quad \frac{1-\cos x}{x^2} \quad , \quad \frac{1}{1-x^2} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad .$$

CAPITOLO XI

CENNI SULLA MISURA DI PEANO-JORDAN

1. Introduzione

Sappiamo dalla geometria elementare cosa sia l'area di un quadrato, di un rettangolo e più in generale di un poligono. Sappiamo pure, come partendo dalla nozione di area di un poligono, si arrivi a definire l'area del cerchio "*approssimandolo*" dall'interno e dall'esterno con i poligoni regolari inscritti e circoscritti.

Ci chiediamo ora se il procedimento seguito per il cerchio sia adattabile ad altre figure piane. Più in generale ci chiediamo cosa si debba intendere per misura (area) di un insieme di punti del piano almeno nel caso in cui tale insieme sia limitato, cioè contenuto in un rettangolo. Sembra naturale rispondere che la misura deve essere una funzione che ad un sottoinsieme limitato A di punti del piano associa un numero reale non negativo (la **misura** di A)

$$m:A \to m(A)\in [0,+\infty[$$

e che tale funzione goda di alcune proprietà altrettanto naturali:

i) se A è un rettangolo m(A) è l'ordinaria misura (area) di A;

ii) $A\subseteq B \Rightarrow m(A)\leq m(B)$ **(monotonia)**

iii) $A\cap B = \emptyset \Rightarrow m(A\cup B) = m(A)+m(B)$ **(finita additività)**

Nelle pagine che seguono accenneremo senza molti dettagli dimostrativi a come ciò possa farsi in generale in R^k.

2. Gli intervalli di R^k

Siano dati 2k numeri reali $a_1, \dots, a_k$, $b_1, \dots, b_k$ con $a_i \le b_i$. Detto $x=(x_1, x_2, \dots, x_k)$ il generico elemento di R^k gli insiemi

$$\{x \in R^k : a_i < x_i < b_i, \quad i = 1, \dots, k\}$$
$$\{x \in R^k : a_i \le x_i \le b_i, \quad i = 1, \dots, k\}$$
$$\{x \in R^k : a_i \le x_i < b_i, \quad i = 1, \dots, k\}$$
$$\{x \in R^k : a_i < x_i \le b_i, \quad i = 1, \dots, k\}$$

saranno detti nell'ordine **intervallo aperto**, **chiuso**, **semiaperto superiormente**, **semiaperto inferiormente**. Posto $a = (a_1, \dots, a_k)$ e $b = (b_1, \dots, b_k)$ tali insiemi saranno sinteticamente indicati con i simboli $]a,b[$, $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ed a, b saranno detti gli **estremi** dell'intervallo.

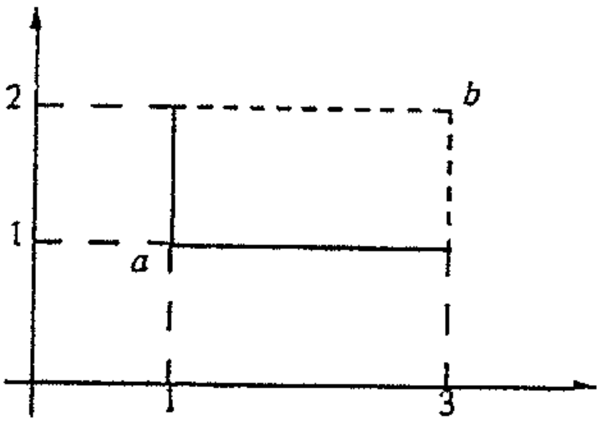


Fig. 1

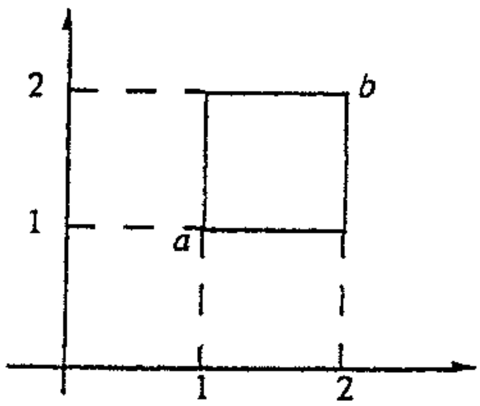


Fig. 2

In fig. 1 è rappresentato l'intervallo $[a,b[$ di R^2 con $a=(1,1)$ e $b=(3,2)$; in fig. 2 l'intervallo $[a,b]$ di R^2 con $a=(1,1)$ e $b=(2,2)$. Nel caso in cui $a_i=b_i$ per qualche i si pone:

$$]a,b[=[a,b[=]a,b] = \emptyset.$$

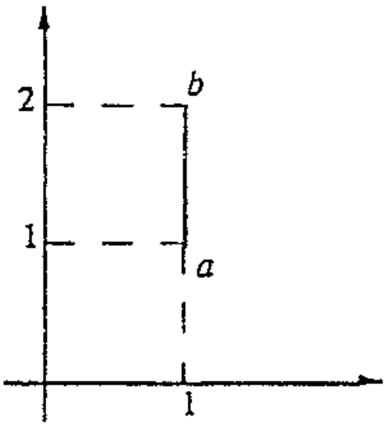


Fig. 3

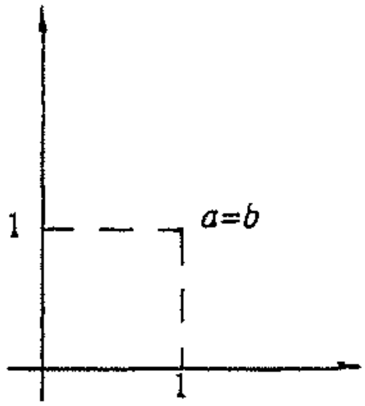


Fig. 4

Il segmento in fig. 3 ed il punto in fig. 4 rappresentano rispettivamente gli intervalli [a,b] con a=(1,1) e b=(1,2) ed [a,b] con a=(1,1) e b=(1,1). A titolo di esempio il lettore rappresenti gli intervalli di R^3 di seguito indicati:

[a,b] con a=(1,1,1), b=(1,1,2);

[a,b] con a=(1,1,1), b=(1,2,3);

[a,b[con a=(1,1,1), b=(2,3,2);

]a,b[con a=(-1,1,2), b=(0,2,4).

Richiamiamo alcune definizioni che saranno utili in seguito.

DEFINIZIONE 1. Un sottoinsieme di R^k si dice **limitato** se esiste un intervallo che lo contiene.

DEFINIZIONE 2. Un punto x si dice **interno** all'insieme A se esiste un intervallo aperto I tale che $x \in I$ e $I \subseteq A$. Se x è interno a −A si dirà che x è **esterno** ad A. Un punto che non sia né interno né esterno ad A si dice di **frontiera** per A. L'insieme dei punti interni ad A si indica con il simbolo A^0; l'insieme dei punti di frontiera per A si indica con il simbolo ∂A.

Il lettore osservi che: *un punto è di frontiera per un insieme A se e solo se ad ogni intervallo aperto contenente x appartengono sia punti di A che di −A.*

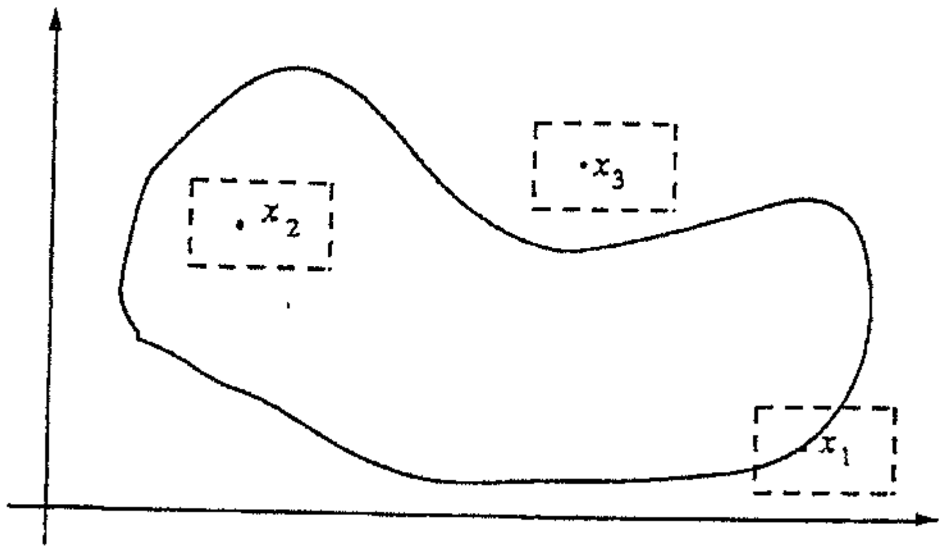


Fig.5 $x_1 \in FA$, $x_2 \in A^0$, $x_3 \in (-A)^0$

3. **La misura di Peano-Jordan in R^k: insiemi limitati**

DEFINIZIONE 3. Dato un intervallo I di estremi $a=(a_1,\dots,a_k)$ e $b=(b_1,\dots,b_k)$ si chiama **misura di I** il numero reale

$$m(I) = (b_1-a_1)\cdot\ldots\cdot(b_k-a_k).$$

Ovviamente si ha $m(\emptyset)=0$; si ha inoltre $m(I)=0$ ogni qualvolta $a_i=b_i$ per qualche i.

La definizione appena data è estremamente naturale giacché sulla retta (cioè per k=1) fornisce l'ordinaria nozione di "*lunghezza*" di un intervallo come differenza degli estremi, nel piano (k=2) l'ordinaria nozione di "*area*" di un rettangolo come prodotto delle sue dimensioni, etc.

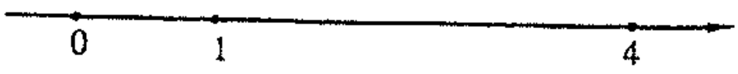


Fig.6 $m(I)=3$

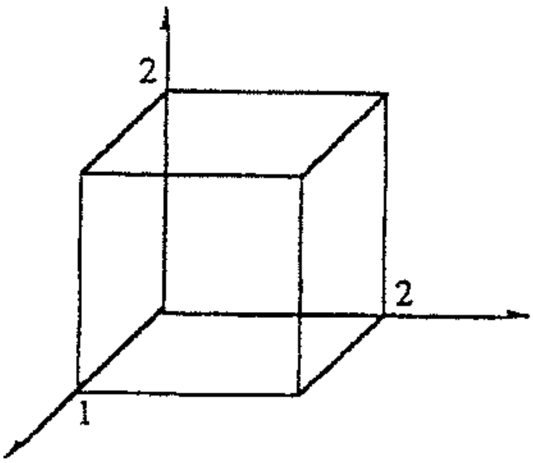


Fig.7 $m(I)=2\cdot 2\cdot 1=4$

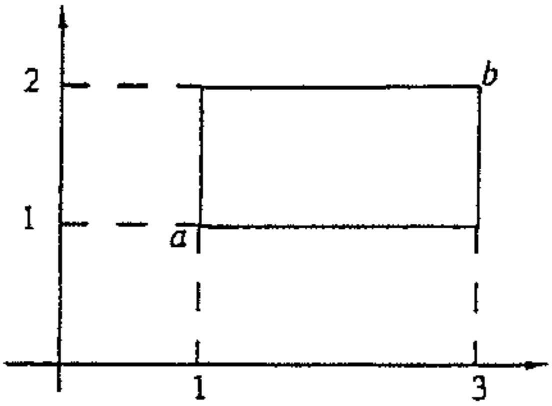


Fig.8 $m(I)=2\cdot 1=2$

Il nostro obiettivo è estendere la nozione di misura a sottoinsiemi di R^k sempre più complessi; per far ciò procediamo per gradi.

DEFINIZIONE 4. Si chiama **pluriintervallo** ogni sottoinsieme P di R^k che sia unione di un numero finito di intervalli a due a due privi di punti interni comuni:

$$P = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n, \tag{1}$$

con I_i intervallo e $(I_i)^0 \cap (I_j)^0 = \emptyset$, per $i \neq j$.

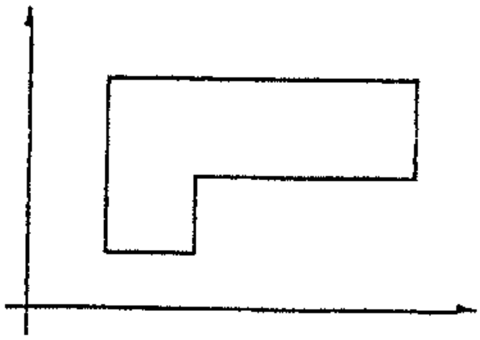


Fig.9

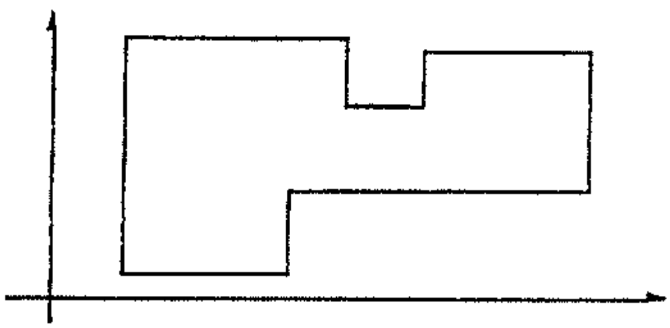


Fig.10

Una ennupla di intervalli $(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ con $(I_i)^0 \cap (I_j)^0 = \emptyset$, per $i \neq j$, e tale che valga la (1) si dirà una decomposizione del pluriintervallo P. È ovvio che in generale, dato un pluriintervallo, esso non ammette un'unica decomposizione (cfr. fig. 11, 12); è però possibile dimostrare (ma noi ce ne asteniamo per brevità) che se $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ ed $\{I'_1, I'_2, \ldots, I'_m\}$ sono due decomposizioni di P si ha:

$$\sum_1^n m(I_i) = \sum_1^m m(I'_i).$$

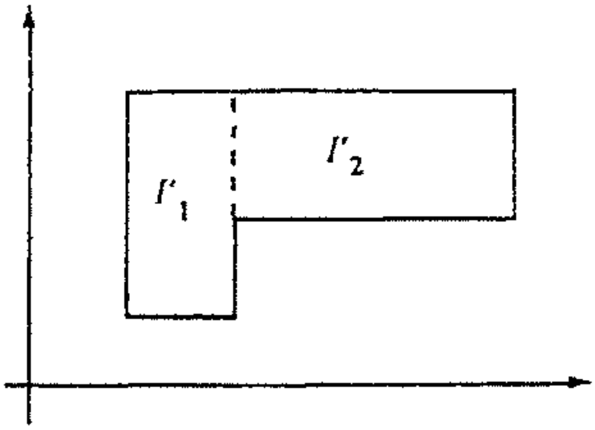


Fig. 11 $P = I_1 \cup I_2$

Ha allora senso la seguente:

DEFINIZIONE 5. Si dice **misura del pluriintervallo** *P* dato dalla (1) il numero reale non negativo

$$m(P) = \sum_1^n m(I_i)$$

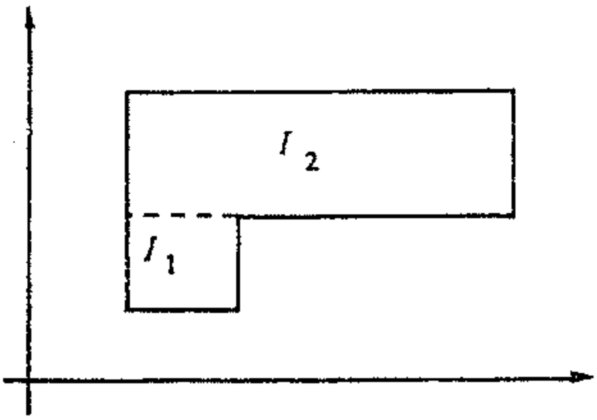


Fig. 12 $P = I'_1 \cup I'_2$

Indicato con $\mathcal{P}$ l'insieme dei pluriintervalli il lettore compirà un utile esercizio dimostrando la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 1. *Se* P_1 *e* P_2 *appartengono a* $\mathcal{P}$ *si ha:*

i) $P_1 \cup P_2$, $P_1 \cap P_2$, $P_1 - P_2$ *appartengono a* $\mathcal{P}$;

ii) $m(P_1 \cup P_2) = m(P_1) + m(P_2) - m(P_1 \cap P_2)$;

iii) $(P_1)^\circ \cap (P_2)^\circ = \emptyset \Rightarrow m(P_1 \cup P_2) = m(P_1) + m(P_2)$;

iv) $P_1 \subseteq P_2 \Rightarrow m(P_2 - P_1) = m(P_2) - m(P_1)$;

v) $P_1 \subseteq P_2 \Rightarrow m(P_1) \leq m(P_2)$.

Passiamo ad occuparci di un generico sottoinsieme limitato di R^k.

DEFINIZIONE 6. Sia A un sottoinsieme limitato di R^k. Si chiamano rispettivamente misura interna e misura esterna di A i numeri reali non negativi.

$$m_i(A)=\sup\{m(P):P\in\mathcal{P},\ P\subset A\}$$

$$m_e(A)=\inf\{m(P):P\in\mathcal{P},\ A\subset P\}.$$

In sostanza la definizione di $m_i(A)$ è legata all'idea di approssimare A dall'interno mediante pluriintervalli contenuti in A; analogamente la definizione di $m_e(A)$ è legata all'idea di approssimare A dall'esterno mediante pluriintervalli contenenti A.

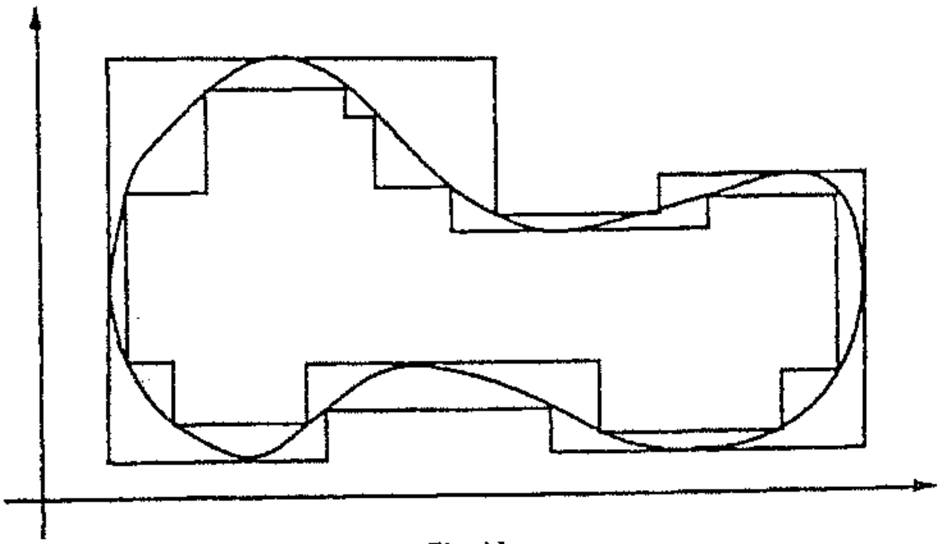


Fig. 13

Ovviamente si ha:

$$0\leq m_i(A)\leq m_e(A). \tag{2}$$

È un facile esercizio provare che:

PROPOSIZIONE 2. *Valgono le seguenti relazioni:*

i) $m_i(A)=0 \Leftrightarrow A^0=\emptyset$;

ii) $A_1\subseteq A_2 \Rightarrow m_i(A_1)\leq m_i(A_2)$;

iii) $A_1\subseteq A_2 \Rightarrow m_e(A_1)\leq m_e(A_2)$.

DIM. Proviamo la i).

Sia $m_i(A)=0$; se fosse $A^0\neq\emptyset$ esisterebbe un rettangolo di misura positiva contenuto in A contro l'ipotesi $m_i(A)=0$. Sia adesso $A^0=\emptyset$; se fosse $m_i(A)>0$ per la seconda proprietà dell'estremo superiore dovrebbe esistere un pluriintervallo P contenuto in A con $m(P)>0$ contro l'ipotesi $A^0=\emptyset$.

Le ii) e iii) si ottengono poi subito osservando che, se P denota un pluriintervallo, risulta:

$$P\subset A_1 \Rightarrow P\subset A_2 \quad e \quad A_2\subset P \Rightarrow A_1\subset P.$$

DEFINIZIONE 7. Un insieme limitato A si dice **misurabile secondo Peano-Jordan** se:

$$m_i(A)=m_e(A); \tag{3}$$

in tal caso si pone

$$m(A)=m_i(A)=m_e(A) \tag{3'}$$

ed il numero reale non negativo $m(A)$ è detto **misura di A**.

La dizione "secondo Peano-Jordan" trae origine dal nome dei due matematici che alla fine del XIX secolo proposero la definizione di insieme misurabile (e di misura) riportata in precedenza; è utile precisare che tale nozione di insieme misurabile non è né l'unica né la più generale possibile, ma su ciò non possiamo intrattenerci.

Indicata con $\mathcal{M}_k$ la classe dei sottoinsiemi di R^k **limitati e misurabili**, è naturale chiedersi se esistono sottoinsiemi di R^k limitati e non misurabili. La risposta è affermativa. Ad esempio in R basta considerare l'insieme $A=Q\cap[0,1]$ (cioè l'insieme dei numeri razionali appartenenti a $[0,1]$); si ha subito

$$m_i(A)=0<m_e(A)=1.$$

In modo analogo si costruiscono esempi di insiemi non misurabili in R^k con qualsiasi k (basta prendere i punti a coordinate razionali contenuti in un intervallo di misura positiva). Nasce allora spontaneo chiedersi: perché si impone la condizione (3) per parlare di misura di A? Non si potrebbe adoperare, come misura di A, $m_i(A)$ o $m_e(A)$ che hanno senso per ogni sottoinsieme limitato di R^k? Per rispondere a tali quesiti consideriamo in R i due insiemi $A_1=Q\cap[0,1]$, $A_2=[0,1]-A_1$ (A_2 è l'insieme dei numeri irrazionali appartenenti a $[0,1]$); si ha:

$$m_i(A_1)=m_i(A_2)=0$$

e quindi osservato che $A_1\cup A_2=[0,1]$ si ottiene:

$$1=m_i(A_1\cup A_2)>m_i(A_1)+m_i(A_2)=0;$$

analogamente si ha:

$$m_e(A_1)=m_e(A_2)=1$$

e quindi

$$1=m_e(A_1\cup A_2)<m_e(A_1)+m_e(A_2)=2;$$

pertanto nessuna delle due funzioni d'insieme $m_i(A)$, $m_e(A)$ gode della proprietà di finita additività che ci è sembrato naturale chiedere ad una misura.

PROPOSIZIONE 3. *Condizione necessaria e sufficiente perché un insieme limitato* A *sia misurabile è che per ogni* $\varepsilon>0$ *esistano un pluriintervallo* P_1 *contenuto in* A *ed un pluriintervallo* P_2 *contenente A tali che:*

$$m(P_2)-m(P_1)<\varepsilon. \tag{4}$$

DIM. Tale risultato segue subito dalla condizione necessaria e sufficiente perché due insiemi siano separati e contigui (prop. 3 del cap. II).

Lasciamo al lettore la dimostrazione del seguente facile corollario alla proposizione 3.

PROPOSIZIONE 4. *Condizione necessaria e sufficiente perché un insieme limitato A sia misurabile è che esistano due successioni di pluriintervalli* $\{P_n\}$, $\{P'_n\}$ *tali che:*

$$P_n \subset A \subset P'_n \quad \text{e} \quad \lim_n (m(P'_n) - m(P_n)) = 0.$$

Inoltre

$$\lim_n m(P'_n) = \lim_n m(P_n) = m(A).$$

Si ha ancora:

PROPOSIZIONE 5. *Siano* A_1 *ed* A_2 *in* $\mathcal{M}_1$. *Si ha:*
i) $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$ ed $A_1 - A_2$ *appartengono ad* $\mathcal{M}_1$;
ii) $m(A_1 \cup A_2) \leq m(A_1) + m(A_2)$;
iii) $(A_1)^0 \cap (A_2)^0 = \emptyset \Rightarrow m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$.

DIM. Proviamo che $A_1 \cup A_2$ è misurabile; a tal fine osserviamo che essendo A_1 ed A_2 misurabili dalla prop. 3 discende l'esistenza di quattro pluriintervalli P_1, P_2, P'_1, P'_2 tali che

$$P_i \subseteq A_i \subseteq P'_i \qquad m(P'_i) - m(P_i) < \varepsilon \qquad i = 1, 2.$$

Ne segue

$$P_1 \cup P_2 \subseteq A_1 \cup A_2 \subseteq P'_1 \cup P'_2.$$

Inoltre per la prop. 1 $P_1 \cup P_2$ e $P'_1 \cup P'_2$ sono pluriintervalli e si ha

$$m(P_1 \cup P_2) = m(P_1) + m(P_2) - m(P_1 \cap P_2)$$

$$m(P'_1 \cup P'_2) = m(P'_1) + m(P'_2) - m(P'_1 \cap P'_2).$$

A questo punto osservato che da

$$P_1 \cap P_2 \subseteq P'_1 \cap P'_2$$

segue

$$m(P_1 \cap P_2) - m(P_1' \cap P_2') \leq 0$$

si ha

$$m(P_1' \cup P_2') - m(P_1 \cup P_2) \leq m(P_1') - m(P_1) + m(P_2') - m(P_2) < 2\varepsilon$$

e quindi $A_1 \cup A_2$ risulta misurabile per la prop. 3. In modo analogo si prova la misurabilità di $A_1 \cap A_2$ ed $A_1 - A_2$.

Proviamo ii)

Per la seconda proprietà dell'estremo inferiore fissato $\varepsilon>0$ esisteranno due pluriintervalli P_1 e P_2 tali che:

$$A_1 \subset P_1 \text{ e } m(P_1) < m(A_1) + \varepsilon/2,$$

$$A_2 \subset P_2 \text{ e } m(P_2) < m(A_2) + \varepsilon/2.$$

Osservato che $P_1 \cup P_2 \supset A_1 \cup A_2$ e ricordando la ii) della proposizione 1 si ha:

$$m(A_1 \cup A_2) \leq m(P_1 \cup P_2) \leq m(P_1) + m(P_2) < m(A_1) + m(A_2) + \varepsilon;$$

dell'arbitrarietà di ε segue l'asserto.

Per provare iii) osserviamo che dalla misurabilità di A_i, $i=1,2$, segue (cfr. proposizione 3) che, fissato $\varepsilon>0$, esistono due pluriintervalli P_i, P_i' tali che

(5) $$P_i' \supset A_i \supset P_i,$$

(6) $$m(P_i') - m(P_i) < \varepsilon/2.$$

Poiché per ipotesi è $(A_1)^\circ \cap (A_2)^\circ = \emptyset$ si avrà $(P_1)^\circ \cap (P_2)^\circ = \emptyset$ e quindi per la iii) della proposizione 1 $m(P_1 \cup P_2) = m(P_1) + m(P_2)$. Da quanto detto e dal fatto che

$$(P_1' \cup P_2') \supset A_1 \cup A_2 \supset P_1 \cup P_2$$

segue

(7) $m(P_1)+m(P_2)=m(P_1\cup P_2)\le m(A_1\cup A_2)\le m(P_1'\cup P_2')\le m(P_1')+m(P_2')$;

d'altronde dalla (5) segue:

(8) $$m(P_1)+m(P_2)\le m(A_1)+m(A_2)\le m(P_1')+m(P_2').$$

Pertanto da (7), (8) e (6) si ottiene:

$$|m(A_1\cup A_2)-(m(A_1)+m(A_2))|\le m(P_1')-m(P_1)+m(P_2')-m(P_2)<\varepsilon;$$

dall'arbitrarietà di ε segue la iii).

Alcune semplici conseguenze della proposizione 5 sono indicate nella proposizione seguente.

PROPOSIZIONE 6. *Siano* A_1 *ed* A_2 *in* $\mathcal{M}_1$ *e sia inoltre* $A_2\supset A_1$. *Si ha:*

i) $m(A_1)\le m(A_2)$;

ii) $m(A_2-A_1)=m(A_2)-m(A_1)$.

DIM. Osservato che $A_2=A_1\cup(A_2-A_1)$, dalla iii) della proposizione 5 si ottiene:

$$m(A_2)=m(A_1)+m(A_2-A_1)$$

e quindi ii) ed i), dopo aver osservato che $m(A_2-A_1)\ge 0$.

Enunciamo infine senza dimostrarle alcune ulteriori interessanti proprietà della misura.

PROPOSIZIONE 7. *Sia* A *un sottoinsieme limitato di* R^k; *si ha:*

i) $A\in\mathcal{M}_1 \Leftrightarrow m_e(\partial A)=0 \Leftrightarrow \partial A$ *è misurabile e di misura nulla;*

ii) $A\in\mathcal{M}_1 \Rightarrow A^0\in\mathcal{M}_1$.

Ci limitiamo qui ad osservare che ii) non si inverte come si può ricavare considerando in R l'insieme $A=Q\cap[0,1]$ il cui interno è vuoto e quindi misurabile mentre A, come da noi già visto, non è misurabile.

4. Misurabilità del rettangoloide

Lo scopo di questo paragrafo è fornire un importante esempio di insieme misurabile. Sia $f(x)$ una funzione non negativa e continua in un intervallo $[a,b]$. Si chiama **rettangoloide di base** $[a,b]$ relativo ad $f(x)$ (cfr. fig. 14) l'insieme dei punti del piano le cui coordinate (x,y) soddisfano le diseguaglianze seguenti

$$a\le x\le b \qquad 0\le y\le f(x).$$

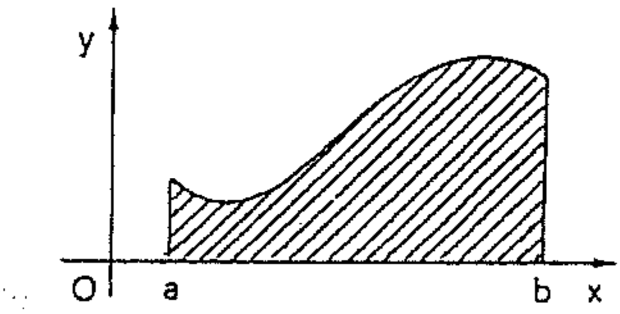


Fig. 14

Vale il seguente risultato

PROPOSIZIONE 9. *Il rettangoloide relativo ad una funzione continua è misurabile.*

DIM. Siano $a=x_1<x_2<\ldots<x_n=b$; poniamo

$$m_i=\min_{[x_i,x_{i+1}]} f(x) \qquad M_i=\max_{[x_i,x_{i+1}]} f(x).$$

La quantità $m_i(x_{i+1}-x_i)$ è l'area del rettangolo di base $[x_i, x_{i+1}]$ ed altezza m_i che è ovviamente contenuto nel rettangoloide; pertanto la quantità

$$s=\sum_{i=1}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i)$$

è l'area di un pluriintervallo P' contenuto nel

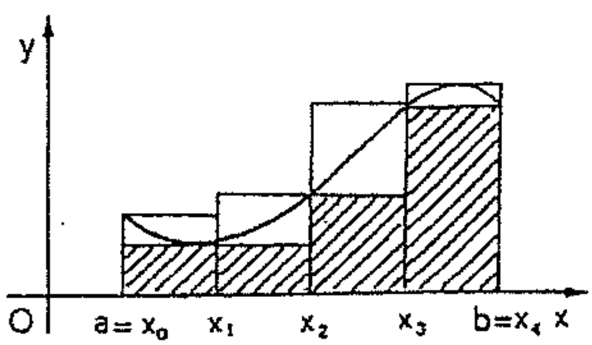


Fig. 15

rettangoloide (zona tratteggiata in fig. 15); analogamente la quantità

$$S=\sum_{i=1}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i)$$

è l'area di un pluriintervallo P" contenente il rettangoloide. Per il teorema di Weierstrass esistono due punti x_i', $x_i''\in[x_i, x_{i+1}]$ tali che

$$f(x_i')=m_i \qquad f(x_i'')=M_i.$$

Si ha pertanto

$$(9) \qquad m(P'')-m(P')=S-s=\sum_{i=1}^{n} (f(x_i'')-f(x_i'))(x_{i+1}-x_i).$$

A questo punto si osservi che f(x) è uniformemente continua in [a,b] per il teorema di Cantor; quindi, fissato ε esiste d_ε tale che se è $|x'-x''|<d_\varepsilon$ si ha:

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Scelta allora la n-pla $a=x_1<x_2<...<x_n=b$ in modo tale che sia $x_{i+1}-x_i<d_\varepsilon$ si avrà anche $|x_i''-x_i'|<d_\varepsilon$ e quindi $|f(x_i'')-f(x_i')|<\varepsilon$; da (9) consegue allora

$$m(P'')-m(P')<\varepsilon\sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)=\varepsilon(b-a)$$

e l'asserto segue dalla prop. 3.

Terminiamo questo paragrafo osservando che nel capitolo successivo mostreremo che il rettangoloide può essere misurabile anche se f(x) non è continua.

5. La misura di Peano-Jordan in R^k: insiemi non limitati

Accenneremo brevemente a come si possa estendere la nozione di misura al caso di sottoinsiemi non limitati di R^k: è ovvio a priori che bisognerà ammettere che la misura possa assumere anche valore $+\infty$:

$$m: A \longrightarrow m(A) \in [0, +\infty] .$$

Cominciamo dalla nozione di misurabilità.

DEFINIZIONE 8. Un sottoinsieme A non limitato di R^k si dirà **misurabile** se la sua intersezione con un qualunque elemento di $\mathcal{M}_1$ appartiene ad $\mathcal{M}_1$.

Denotata con $\mathcal{M}$ la classe dei sottoinsiemi (limitati o non limitati) misurabili di R^k si ha:

PROPOSIZIONE 10. *Valgono le seguenti proprietà:*
i) $R^k, \emptyset \in \mathcal{M}$;
ii) $A_1, A_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2, A_1 - A_2 \in \mathcal{M}$;
iii) dato A *in* $\mathcal{M}$ *esiste una successione* (A_n) *di elementi di* $\mathcal{M}_1$ *a due a due disgiunti tale che* $A = \cup A_n$.

DEFINIZIONE 9. Sia $A \in \mathcal{M}$: poniamo

$$m(A) = \sup m(A \cap X) ,$$

dove l'estremo superiore è fatto al variare di X in $\mathcal{M}_1$; m(A) si chiama **misura** di A ed ovviamente sarà $0 \leq m(A) \leq +\infty$.

È assai utile il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 11. *Se* $A \in \mathcal{M}$ *riesce:*

$$m(A) = \lim_n m(A \cap I_n) ,$$

dove (I_n) *è una qualunque successione di intervalli aperti tale che* $I_{n+1} \supseteq I_n$ *e* $\cup I_n = R^k$.

Infine si ha:

PROPOSIZIONE 12. *Siano* A_1 *ed* A_2 *in* $\mathcal{M}$. *Si ha:*

i) $m(A_1 \cup A_2) \leq m(A_1) + m(A_2)$;

ii) $(A_1)^0 \cap (A_2)^0 = \emptyset \Rightarrow m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$.

CAPITOLO XII

INTEGRAZIONE

1. Integrale indefinito

Sia P un "punto materiale" che si muove su una retta r su cui è stato introdotto un sistema di riferimento; sia s(t) l'ascissa del punto di r per cui transita P all'istante t. La quantità

$$v_m = \frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

è nota come "velocità media" del punto materiale relativamente all'intervallo temporale (t,t+h). La quantità

$$\lim_{h\to 0} v_m = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

ovvero la derivata s'(t) di s(t) prende il nome di "velocità" del punto P all'istante t. Nota quindi la "legge oraria" s(t) del moto del punto P, mediante l'operazione di derivazione si può ottenere la "velocità" istante per istante del punto materiale. Viceversa, supponiamo nota l'espressione, istante per istante, della velocità: è possibile allora risalire alla legge oraria del moto? Altrimenti detto: data una funzione f(x) continua in un intervallo [a,b] esiste una funzione F(x) continua in [a,b], derivabile in [a,b] e tale che F'(x)=f(x)? Una tale funzione F(x) dicesi **primitiva** di f.

È facile verificare che se $F(x)$ è primitiva di $f(x)$ allora, per ogni costante $c\in R$, $F(x)+c$ è ancora una primitiva di f. Viceversa se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ sono primitive di f in forza dell'OSS. 8 del Cap. IX si ha

$$F_1'=F_2'=f \Rightarrow (F_1-F_2)'(x)=0 \Rightarrow (F_1-F_2)(x)=\text{cost} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1(x)=F_2(x)+\text{cost}.$$

In definitiva, se f è dotata di primitiva $F(x)$, tutte le primitive di f sono del tipo $F(x)+c$ con c arbitrario numero reale. L'insieme delle primitive di f si indica con il simbolo

$$\int f(x)\,dx$$

che si legge **integrale indefinito** di f.

Scopo di tale capitolo è, prima di tutto, risolvere il problema dell'esistenza di una primitiva di una funzione continua; vedremo che tale problema è "sorprendentemente" connesso con quello del calcolo della misura del rettangoloide. Introdurremo inoltre alcuni metodi utili per determinare concretamente la primitiva di una funzione f. L'importanza di tali risultati emergerá chiaramente nel XIV capitolo nel quale ci occuperemo del problema dell'"integrazione di equazioni differenziali": quest'ultimo problema è quello che in sostanza motiva quanto andiamo ad esporre.

Complementi ed esercizi

1.1 - Dalla definizione di integrale indefinito, usando le regole i derivazione illustrate nel Cap. IX, dedurre che:

i) $\int [af(x)+bg(x)]\,dx=a\int f(x)\,dx+b\int g(x)\,dx \qquad a,b\in R;$

ii) $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c \quad (\alpha\neq-1);$ iii) $\int \dfrac{1}{x}dx=\log|x|+c;$

iv) $\int \operatorname{sen}x\,dx=-\cos x+c;$ v) $\int \cos x\,dx=\operatorname{sen}x+c;$

vi) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg}x+c;$ vii) $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}dx=-\operatorname{ctg}x+c;$

viii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\operatorname{arcsen}x+c;$ ix) $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}x+c;$

x) $\int a^x dx=a^x \lg_a e+c;$ xi) $\int e^x dx=e^x+c.$

1.2 - Dalla definizione di integrale indefinito e dalla regola di derivazione delle funzioni composte dedurre che

i) $\int [f(x)]^\alpha f'(x)\,dx=\frac{1}{\alpha+1}[f(x)]^{\alpha+1}+c \qquad (\alpha\neq-1);$

ii) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\lg|f(x)|+c;$

iii) $\int \operatorname{sen}f(x)\,f'(x)\,dx=-\cos f(x)+c;$

iv) $\int \cos f(x)\,f'(x)\,dx=\operatorname{sen}f(x)+c;$

v) $\int \frac{1}{\cos^2 f(x)}f'(x)\,dx=\operatorname{tg}f(x)+c;$

vi) $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 f(x)}f'(x)\,dx=-\operatorname{cotg}f(x)+c;$

vii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}f'(x)\,dx=\operatorname{arcsen}f(x)+c;$

viii) $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx=\operatorname{arctg}f(x)+c;$

ix) $\int a^{f(x)}f'(x)\,dx=a^{f(x)}\lg_a e+c;$

x) $\int e^{f(x)}f'(x)\,dx=e^{f(x)}+c.$

1.3 - Facendo uso degli es. precedenti provare che:

$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+c;$ $\qquad$ $\int \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}lg(1+x^2)+c;$

$\int \frac{e^x}{\cos^2 e^x}dx=tge^x+c;$ $\qquad$ $\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=-2\cos\sqrt{x}+c;$

$\int \frac{\cos x}{1+sen^2 x}dx=arctg\, senx+c;$ $\qquad$ $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx=\frac{1}{2}arcsenx^2+c;$

$\int e^{x^2+x}(2x+1)\,dx=e^{x^2+x}+c;$ $\qquad$ $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx=\frac{1}{2}arctge^{2x}+c;$

$\int ctgx\,dx=lgsenx+c$ in ogni intervallo del tipo $]2k\pi, (2k+1)\pi[\quad k\in Z;$

$\int ctgx\,dx=lg(-senx)+c$ in ogni intervallo del tipo $](2k-1)\pi, 2k\pi[\quad k\in Z;$

$\int tgx\,dx=-lg\cos x+c$ in $]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi[\quad k\in Z;$

$\int tgx\,dx=-lg(-\cos x)+c$ in $]\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi[\quad k\in Z.$

2. L'integrale di Riemann

Sia dato un intervallo $[a,b]$ di R; una ennupla di numeri $\{x_1,\ldots,x_n\}$ $(n\geq 2)$ tali che

$$a=x_1<\ldots<x_n=b$$

individua una decomposizione di $[a,b]$ in n-1 sottointervalli a due a due privi di punti interni comuni:

$$[a,b]=\bigcup_{i=1}^{n-1}[x_i,x_{i+1}].$$

La ennupla $\{x_1, \dots, x_n\}$ sarà detta ancora una **decomposizione** di $[a,b]$. Sia, adesso, $f(x)$ una funzione limitata e sia data una decomposizione $D=\{x_1, \dots, x_n\}$; posto

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x), \qquad M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

consideriamo la quantità:

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i (x_{i+1}-x_i), \qquad S(f,D) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i (x_{i+1}-x_i) .$$

Dimostriamo la proposizione seguente

PROPOSIZIONE 1. *Se è* $D_1 \subset D_2$ *riesce*

$$s(f,D_1) \le s(f,D_2), \qquad S(f,D_2) \le S(f,D_1) .$$

Dim. Per semplicità sia:

$$D_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$D_2 = \{x_1, \dots, x_k, x_k', x_{k+1}, \dots, x_n\}$$

cioè prendiamo in esame il caso in cui D_2 contenga solo un punto in più di D_1. Si ha:

$$m_k \le \inf_{[x_k, x_k']} f(x) = m_k', \qquad m_k \le \inf_{[x_k', x_{k+1}]} f(x) = m_k'' .$$

Ne segue

$$m_k (x_{k+1}-x_k) \le m_k'' (x_{k+1}-x_k') + m_k' (x_k'-x_k)$$

e quindi

$$s(f,D_1) = m_1 (x_2-x_1) + \dots + m_k (x_{k+1}-x_k) + \dots + m_{n-1} (x_n-x_{n-1}) \le$$

$$\le m_1 (x_2-x_1) + \dots + m_k'' (x_{k+1}-x_k') + m_k' (x_k'-x_k) + \dots + m_{n-1} (x_n-x_{n-1}) = s(f,D_2) .$$

In modo analogo si ottiene la diseguaglianza

$$S(f,D_2) \leq S(f,D_1).$$

Il caso generale si dimostra alla stessa maniera.

Poniamo adesso

$$s(f) = \sup_D s(f,D), \qquad S(f) = \inf_D S(f,D)$$

dove gli estremi superiore ed inferiore sono calcolati al variare di D nell'insieme delle decomposizioni di $[a,b]$.

PROPOSIZIONE 2. *Se* $f(x)$ *è limitata si ha*

$$s(f) \leq S(f),$$

cioè gli insiemi numerici descritti rispettivamente dalle quantità $s(f,D)$, $S(f,D)$ *al variare di* D *sono separati.*

Dim. Tale risultato si ottiene subito dalla dimostrazione precedente osservando che date due decomposizioni D_1 e D_2 si ha

$$s(f,D_1) \leq s(f,D_1 \cup D_2) \leq S(f,D_1 \cup D_2) \leq S(f,D_2).$$

Di tale proposizione diamo un'altra dimostrazione che utilizza la nozione di rettangoloide. Si osservi che se è $f(x) \geq 0$ allora $s(f,D)$ $(S(f,D))$ rappresenta l'area di un plurintervallo contenuto nel (contenente il) rettangoloide di base $[a,b]$ relativo ad $f(x)$ e pertanto

$$s(f,D_1) \leq S(f,D_2)$$

per ogni scelta di D_1 e D_2; ne consegue l'asserto per $f(x) \geq 0$.

In generale posto

$$m = \inf_{[a,b]} f(x)$$

si consideri la funzione $F(x)=f(x)-m\geq 0$.
Fissate due decomposizioni $D_1=\{x_1,...,x_n\}$ e $D_2=\{x'_1....x'_k\}$ e posto

$$m_i=\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f(x), \qquad M_i=\sup_{[x_i,x_{i+1}]} f(x)$$

$$m'_j=\inf_{[x'_j,x'_{j+1}]} f(x), \qquad M'_j=\sup_{[x'_j,x'_{j+1}]} f(x)$$

si ha

$$s(F,D_1)=\sum_{i=1}^{n-1} \inf_{[x_i,x_{i+1}]} F(x)\,(x_{i+1}-x_i)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1} (m_i-m)\,(x_{i+1}-x_i)=s(f,D_1)-m(b-a)\leq$$
$$\leq S(F.D_2)=\sum_{j=1}^{k-1} (M'_j-m)\,(x'_{j+1}-x'_j)=S(f,D_2)-m(b-a);$$

ne segue

$$s(f,D_1)\leq S(f,D_2)$$

e quindi l'asserto.

DEFINIZIONE 1. Si dice che $f(x)$ è **integrabile secondo Riemann** se

$$s(f)=S(f);$$

in tal caso si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx=s(f)=S(f)$$

e tale numero reale prende il nome di **integrale di Riemann** di $f(x)$.

Lasciamo al lettore la dimostrazione della seguente proposizione che discende dalla definizione data di integrale di Riemann e dalla prop. 1.

PROPOSIZIONE 3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché* $f(x)$ *sia integrabile secondo Riemann è che per ogni* $\varepsilon>0$ *esista una decomposizione* D *tale che*

$$S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon.$$

La proposizione che segue individua due classi notevoli di funzioni integrabili.

PROPOSIZIONE 4. *Sia* $f(x)$ *limitata su* $[a,b]$; *si ha*
i) se $f(x)$ *è continua essa è integrabile secondo Riemann;*
ii) se $f(x)$ *è monotona essa è integrabile secondo Riemann.*

Dim. La dimostrazione della i) è identica a quella della prop. 9 del cap. XI relativa alla misurabilità del rettangoloide. La riportiamo comunque per comodità di chi legge.

Fissato $\varepsilon>0$ per il teorema di Cantor esiste $d_\varepsilon>0$ tale che se è $|x''-x'|<d_\varepsilon$ riesce $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$.

Fissiamo adesso una decomposizione $D=\{x_1,\ldots,x_n\}$ tale che riesca $|x_{i+1}-x_i|<d_\varepsilon$ per $i=1\ldots n-1$.

Si ha allora

$$S(f,D)-s(f,D)=\sum_{i=1}^{n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)<\varepsilon(b-a)$$

dove si è tenuto conto che

a) per il teorema di Weierstrass esistono $x_i',x_i''\in[x_i,x_{i+1}]$ tali che si abbia

$$f(x_i')=m_i \qquad f(x_i'')=M_i;$$

b) si ha $|x_i'-x_i''|\le|x_{i+1}-x_i|<d$ e quindi $M_i-m_i=f(x_i'')-f(x_i')<\varepsilon$.
Proviamo la ii).

Sia $f(x)$, per fissare le idee, crescente; si ha, supposto $|x_{i+1}-x_i|<\varepsilon$

$$f(x_i)=m_i \qquad f(x_{i+1})=M_i$$

e quindi

$$S(f,D)-s(f,D)=\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1})-f(x_i))(x_{i+1}-x_i)<\varepsilon(f(b)-f(a))$$

e quindi l'asserto.
A titolo di esercizio il lettore provi che la funzione

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad x\in Q\cap[0,1] \\ 1 & \text{se} \quad x\in(R-Q)\cap[0,1] \end{cases}$$

non è integrabile su $[0,1]$.

Più in generale il lettore provi che se A è un sottoinsieme di $[a,b]$ la funzione caratteristica di A, cioè la funzione

$$\chi_A(x)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad x\in A \\ 1 & \text{se} \quad x\in(R-A) \end{cases}$$

è integrabile in $[a,b]$ se e solo se A è misurabile secondo Peano-Jordan.

La proposizione che segue, la cui facile dimostrazione è lasciata al lettore per esercizio, mette in luce la stretta connessione tra la nozione di integrale di Riemann e quella di misura di Peano-Jordan.

PROPOSIZIONE 5. *Una funzione limitata $f(x)\geq 0$ su $[a,b]$ è integrabile secondo Riemann se e solo se il relativo rettangoloide è misurabile secondo Peano-Jordan.*

La dimostrazione di tale risultato è immediata.
Diamo adesso una definizione.

DEFINIZIONE 2. Un insieme A ha misura nulla secondo Lebesgue se per ogni $\varepsilon>0$ esiste una successione $\{I_n\}_{n\in N}$ di intervalli tale che

$$A\subseteq\bigcup_{n\in N} I_n \qquad e \qquad \sum_n m(I_n)\leq\varepsilon.$$

OSSERVAZIONE 1. Si noti subito che un insieme di misura nulla secondo Peano-Jordan ha misura nulla secondo Lebesgue. Non é vero il viceversa nel senso che un insieme di misura nulla secondo Lebesgue può non essere misurabile secondo Peano-Jordan. A tal fine il lettore provi che l'insieme $Q\cap[0,1]$, che sappiamo non essere misurabile secondo Peano-Jordan, ha misura nulla secondo Lebesgue.

La successiva proposizione nota come teorema di *Vitali-Lebesgue* fornisce una caratterizzazione delle funzioni integrabili.

PROPOSIZIONE 6. *Una funzione* $f(x)$ *limitata su* $[a,b]$ *é integrabile secondo Riemann se e solo se essa é quasi-ovunque continua secondo Lebesgue, cioé é continua in ogni punto di* $[a,b]-E$ *dove* E *é un insieme di misura nulla secondo Lebesgue.*

La dimostrazione di tale teorema esula dalle finalità di questo capitolo: ci limiteremo pertanto a dimostrare la seguente più debole proposizione.

PROPOSIZIONE 6'. *Una funzione* $f(x)$ *limitata su* $[a,b]$ *ed ivi quasi-ovunque continua secondo Peano-Jordan (cioé continua in ogni punto di* $[a,b]-E$ *dove* E *é un insieme di misura nulla secondo Peano-Jordan) é integrabile secondo Riemann.*

Dim. Per evitare complicazioni formali supponiamo che a,b non appartengono ad E. Essendo E un insieme di misura nulla esisterà un pluriintervallo $P\subset[a,b]$ tale che

$$P\supset E \qquad m(P)<\varepsilon.$$

Poniamo

$$P=\bigcup_{i=1}^{k}\,]a_i,b_i[$$

con gli intervalli $]a_i,b_i[$ a due a due disgiunti e ricordiamo che $f(x)$ è continua sul compatto $K=[a,b]-P$, per cui dato $\varepsilon>0$ per il teorema di Cantor esiste $d_\varepsilon>0$ tale che se è $|x''-x'|<d_\varepsilon$ e $x',x''\in K$ riesce $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$; fissiamo allora una decomposizione $D=\{x_1,\dots,x_n\}$ di $[a,b]$ tale che:

i) $a_i,b_i\in D$ per ogni i;

ii) se $a_i=x_j$ allora $b_i=x_{j+1}$.

Tra gli intervalli $[x_i,x_{i+1}]_{i=1,\dots,n-1}$ denotiamo con $[y_i,y_{i+1}]_{i=1,\dots,r-1}$ quelli distinti dagli intervalli $[a_j,b_j]$ per cui si avrà

$$[a,b]=[y_1,y_2]\cup\dots\cup[y_{r-1},y_r]\cup[a_1,b_1]\cup\dots\cup[a_k,b_k].$$

Supponiamo, cosa senz'altro lecita

iii) $|y_{i+1}-y_i|<d_\varepsilon$.

Sia ancora

$$A=\sup_{[a,b]}|f(x)|;$$

essendo per la iii) $y_{i+1}-y_i<d_\varepsilon$ si avrà

$$\max_{[y_i,y_{i+1}]} f(x)-\min_{[y_i,y_{i+1}]} f(x)<\varepsilon$$

e quindi poiché

$$m(P)=\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i)<\varepsilon,$$

$$S(D,f)-s(D,f)=\sum_{i=1}^{r-1}\left(\max_{[y_i,y_{i+1}]}f(x)-\min_{[y_i,y_{i+1}]}f(x)\right)(y_{i+1}-y_i)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\left(\max_{[a_i,b_i]}f(x)-\min_{[a_i,b_i]}f(x)\right)(b_i-a_i)<\varepsilon\sum_{i=1}^{r-1}(y_{i+1}-y_i)+$$

$$+2A\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i)<\varepsilon((b-a)+2A);$$

segue l'asserto.

Diamo una ulteriore caratterizzazione dell'integrale di Riemann.

All'uopo sia $D=\{x_1,\ldots,x_n\}$ una decomposizione di $[a,b]$; indichiamo con ξ_i un punto arbitrario dell'intervallo $[x_i,x_{i+1}]$ e poniamo $d=\max_i(x_{i+1}-x_i)$; d sarà detto diametro della decomposizione. Poniamo infine

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n-1}f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i).$$

DEFINIZIONE 3. Detto ℓ un numero reale si pone

$$\lim_{d\to 0}\sigma=\ell$$

se per ogni $\varepsilon>0$ esiste $d_\varepsilon>0$ tale che per ogni partizione D cui compete un diametro $d<d_\varepsilon$ e comunque siano scelti i punti $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$ si abbia

$$|\sigma-\ell|<\varepsilon.$$

Vale la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 7. *Sia $f(x)$ limitata in $[a,b]$; si ha*

$$\lim_{d\to 0}\sigma=\ell$$

se e solo se f(x) è integrabile secondo Riemann. Risulta

$$\int_a^b f(x)\,dx = \ell .$$

Dim. Dimostriamo la proposizione nell'ipotesi ulteriore che f(x) sia continua. Sia f integrabile secondo Riemann; data una decomposizione $D=\{x_1,\ldots,x_n\}$ di diametro d si ha subito

$$s(f,D)=\sum_{i=1}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i)\le\sigma\le S(f,D)=\sum_{i=1}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i);$$

d'altro canto per definizione di integrale di Riemann si ha anche

$$s(f,D)\le\int_a^b f(x)\,dx\le S(f,D);$$

ne segue

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\sigma\right|\le\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i).$$

Se si osserva che per il teorema di Cantor fissato $\varepsilon>0$ esiste $d_\varepsilon>0$ tale che se è $d<d_\varepsilon$ si ha $M_i-m_i<\varepsilon$ si ottiene

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\sigma\right|<\varepsilon\,(b-a)$$

per ogni decomposizione D con $d<d_\varepsilon$; si ha quindi

$$\lim_{d\to0}\sigma=\int_a^b f\,dx.$$

Viceversa si abbia

$$\lim_{d\to0}\sigma=\lim_{d\to0}\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)=\ell;$$

dalla Def. 3 si ha che fissato $\varepsilon>0$ esiste $d_\varepsilon>0$ tale che per $d<d_\varepsilon$ si ha

$$\ell-\varepsilon<\sigma<\ell+\varepsilon$$

per ogni scelta dei punti ξ_i; dal momento che per il teorema di Weierstrass esistono $x_i', x_i'' \in [x_i, x_{i+1}]$ tali che sia

$$f(x_i')=m_i=\min_{[x_i,x_{i+1}]} f(x) \qquad f(x_i'')=M_i=\max_{[x_i,x_{i+1}]} f(x);$$

si ha

$$\ell-\varepsilon<s(f,D)\leq S(f,D)<\ell+\varepsilon$$

e quindi

$$S(f,D)-s(f,D)\leq 2\varepsilon;$$

allora per la prop. 3 $f(x)$ è integrabile secondo Riemann. D'altro canto per quanto visto sopra

$$\ell-\varepsilon<\int_a^b f(x)\,dx<\ell+\varepsilon;$$

e, dall'arbitrarietà di ε, segue

$$\int_a^b f(x)\,dx=\ell$$

e cioè l'asserto.

Le principali proprietà dell'integrale di Riemann sono contenute nella proposizione seguente.

PROPOSIZIONE 8. *Siano* $f(x)$ *e* $g(x)$ *integrabili secondo Riemann su* $[a,b]$; *valgono le seguenti proprietà*

i) $f(x)$ *è integrabile su ogni intervallo* $[a',b']\subseteq[a,b]$;

ii) **(proprietà distributiva)** $\alpha f(x)+\beta g(x)$ *è integrabile e si ha:*

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx;$$

iii) **(proprietà additiva)** *se* $c\in[a,b]$ *si ha*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx;$$

iv) se è $f(x)\le g(x)$ *si ha*

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx;$$

v) $|f(x)|$ *è integrabile e si ha*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx;$$

vi) se $f(x)=k$ *si ha*

$$\int_a^b f(x)dx=k(b-a);$$

vii) si ha

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

dove

$$m=\inf_{[a,b]} f(x),\qquad M=\sup_{[a,b]} f(x)$$

viii) **(proprietà della media)** *se* $f(x)$ *è continua in* $[a,b]$ *esiste un punto* $c\in[a,b]$ *tale che si abbia*

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a).$$

Il lettore osservi esplicitamente che, se $f(x)$ non è continua, vale la vii) ma non la proprietà della media viii).

Dim. La i) si ottiene dalla prop. 6 osservando che se $f(x)$ è limitata e quasi-ovunque continua secondo Legesgue su $[a,b]$ è tale anche su $[a',b']$: ii) ed iii) si ottengono subito dalle prop. 6 e 7; la iv) segue dalla ii) una volta osservato che $f(x) \geq 0$ segue

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0;$$

per dimostrare la v) si osserva che l'integrabilità di $|f(x)|$ segue dalla prop. 6; inoltre essendo

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

si ha per ii) ed iv)

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

e quindi l'asserto; la vi) segue banalmente dalla definizione di integrale e la vii) si ricava da iv) e vi) partendo dalle diseguaglianze

$$m \leq f(x) \leq M;$$

infine la proprietà della media viii) si ottiene osservando che per vii) si ha

$$m \leq \int_a^b f(x)\,dx/(b-a) \leq M$$

dove, essendo per ipotesi $f(x)$ continua in $[a,b]$, m ed M sono il suo minimo ed il suo massimo: dal momento che una funzione continua assume tutti i valori compresi tra il suo minimo ed il suo massimo si ha che deve esistere un punto $c \in [a,b]$ tale che si abbia

$$\int_a^b f(x)\,dx/(b-a) = f(c)$$

e cioè l'asserto.

Diamo ancora una definizione.

DEFINIZIONE 4. Sia f(x) integrabile secondo Riemann su [a,b] e siano x e y due punti di [a,b]; si chiama **integrale definito** tra x e y di f il numero reale

$$\int_x^y f(t)\,dt = \begin{cases} \int_x^y f(t)\,dt & \text{se} \quad x \le y \\ -\int_y^x f(t)\,dt & \text{se} \quad x > y \end{cases}$$

Lasciamo al lettore la dimostrazione della seguente semplice proposizione.

PROPOSIZIONE 9. *Siano f e g integrabili secondo Riemann su [a,b] ed x,y due punti di [a,b]: valgono le seguenti proprietà*

i) **(proprietà distributiva)**

$$\int_x^y (\alpha f(t)+\beta g(t))\,dt = \alpha\int_x^y f(t)\,dt + \beta\int_x^y g(t)\,dt;$$

ii) **(proprietà additiva)** *se* $x,y,z \in [a,b]$ *si ha*

$$\int_x^y f(t)\,dt = \int_x^z f(t)\,dt + \int_z^y f(t)\,dt;$$

iii) si ha

$$\left|\int_x^y f(x)\,dx\right| \le \left|\int_x^y |f(x)|\,dx\right| \le \sup_{I_{x,y}} |f(x)|\,|x-y|;$$

dove $I_{x,y} = [\min(x,y), \max(x,y)]$;

iv) **(proprietà della media)** *se* f(x) *è continua in* [a,b] *esiste un punto* $z \in I_{x,y}$ *tale che si abbia*

$$\int_x^y f(t)\,dt = f(z)\,(y-x).$$

Notevole è la seguente proposizione nota come teorema **fondamentale del calcolo integrale**.

PROPOSIZIONE 10. *Sia* f *integrabile secondo Riemann su* [a,b]*; fissato* $x_0 \in [a,b]$ *la funzione*

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

è continua in [a,b] *e derivabile nei punti di* [a,b] *in cui* f(x) è continua ed in tali punti risulta

$$F'(x) = f(x).$$

Dim. Osservando che dalle ii) ed iii) della prop. 9 si ha

$$|F(x)-F(y)| = \left|\int_{y}^{x} f(t)\,dt\right| \le \left|\int_{y}^{x} |f(t)|\,dt\right| \le \sup_{[a,b]} |f(x)|\,|x-y|$$

si ottiene la continuità di F(x).
Sia adesso f(x) continua in x_1; fissato ε, sia I un intorno di x_1 tale che per ogni $x\in I$ si abbia

$$|f(x_1)-f(x)| < \varepsilon;$$

osservato che riesce

$$\int_{x_1}^{x} f(x_1)\,dt=f(x_1)\,(x-x_1)$$

si ha, dalle ii) ed iii) della prop. 9, per $x\in I$ diverso da x_1:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_1)}{(x-x_1)}-f(x_1)\right| = \left|\frac{\int_{x_1}^{x} f(t)\,dt}{(x-x_1)} - \frac{\int_{x_1}^{x} f(x_1)\,dt}{(x-x_1)}\right| \le$$

$$\le 1/|x-x_1|\left|\int_{x_1}^{x} |f(t)-f(x_1)|\,dt\right| < \varepsilon$$

e quindi l'asserto.

Il lettore osservi che la prop. 10 risolve il problema dell'esistenza della primitiva di una funzione continua in un intervallo $[a,b]$ giacché da esso consegue che se $f(x)$ è continua la funzione

$$(1) \qquad F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

che è detta **funzione integrale**, è derivabile in ogni punto di $[a,b]$ e verifica l'eguaglianza

$$F'(x)=f(x) \qquad x\in[a,b].$$

Dalla prop. 10 discende la seguente

PROPOSIZIONE 11. *Sia* $f(x)$ *continua in* $[a,b]$ *si ha:*

i) la funzione integrale $F(x)$ *data dalla (1) è l'unica primitiva di* $f(x)$ *nulla di* x_0.

ii) Tutte le primitive di $f(x)$ *sono del tipo*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt+c$$

con $x_0\in[a,b]$ *e* c *costante arbitraria;*

iii) detta $G(x)$ *una qualunque primitiva di* $f(x)$ *si ha*

$$\int_{x}^{y} f(t)\,dt=G(y)-G(x)$$

per ogni coppia di punti $x,y\in[a,b]$.

Dim. La i) è immediata; infatti si ha $F(x_0)=0$; inoltre data un'altra primitiva $G(x)$ si avrà

$$F(x)-G(x)=c$$

con c costante opportuna: ne segue che se riesce $G(x_0)=0$ dovrà essere $c=0$ e quindi $F(x)=G(x)$ per ogni $x\in[a,b]$.

La ii) segue dal fatto che la funzione integrale é una primitiva. Proviamo iii); sia c una costante tale che si abbia

$$G(x)=F(x)+c$$

con F(x) data dalla (1). Si ha subito dalla iii) della prop. 9:

$$G(y)-G(x)=F(y)-F(x)=\int_{x_0}^{y} f(t)\,dt-\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt=\int_{x}^{y} f(t)\,dt$$

e ciò l'asserto

OSSERVAZIONE 2. Terminiamo questo paragrafo osservando esplicitamente che da quanto detto discende che se f(x) è una funzione continua e non negativa su [a,b] e G(x) è una sua qualunque primitiva l'area del rettangoloide di base [a,b] relativo ad f(x) è data da G(b)-G(a).

Complementi ed esercizi

2.1 - Sia f(x) integrabile secondo Riemann su [a,b]. Posto

$$F(x)=\int_{a}^{x} f(t)\,dt$$

si dimostri che

a) se f(x) non é negativa F(x) è crescente;

b) se f(x) è continua e crescente F(x) è convessa.

2.2 - Sia f una funzione derivabile in [a,b] (estremi inclusi!) Consideriamo la "curva" di equazione y=f(x) con $x\in[a,b]$. Posto

$$h_n=\frac{b-a}{n}\ (n\in N),\qquad x_j=a+j\,h_n\qquad \text{con } j=0,\dots,n,$$

consideriamo la "poligonale" di vertici $P_0\equiv(a,f(a))$, $P_1\equiv(x_1,f(x_1)),\dots,P_{n-1}\equiv(x_{n-1},f(x_{n-1}))$, $P_n\equiv(b,f(b))$ (cfr. fig. 1); la sua lunghezza è

$$p_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(f(x_{i+1})-f(x_i))^2} = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i) \sqrt{1+f'(c_i)^2}$$

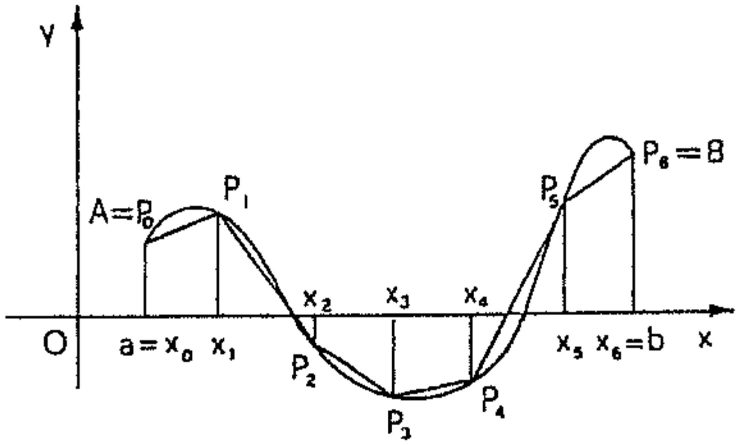


Fig. 1

dove c_i è un punto dell'intervallo $]x_i, x_{i+1}[$ tale che per il teorema di Lagrange, risulti $f(x_{i+1})-f(x_i)=f'(c_i)(x_{i+1}-x_i)$. Tenendo conto della prop. 7 si ha

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} p_n = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$$

La quantità (*) è, per definizione, la *lunghezza dell'arco di curva di equazione* $y=f(x)$ *di estremi* $A\equiv(a,f(a))$, $B\equiv(b,f(b))$.

2.3 - Calcolare le aree dei seguenti rettangoloidi;

$$R_1 \equiv \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le x^2 \end{cases} ; \qquad R_2 \equiv \begin{cases} 0\le x\le \pi \\ 0\le y\le \operatorname{sen} x \end{cases} ; \qquad R_3 \equiv \begin{cases} 0\le x\le \frac{\pi}{4} \\ 0\le x\le \operatorname{tg} x \end{cases}$$

2.4 - Sia f una funzione continua pari, tale cioè che $f(x)=f(-x)$ $x\in[-a,a]$; sia $F(x)$ la primitiva di f nulla in $x=0$. Provare che $F(x)$ è dispari (Suggerimento: verificare che $F(x)+F(-x)$ ha derivata identicamente nulla). Analogamente, se f è una funzione dispari in $[-a,a]$ ed $F(x)$ è una sua primitiva, provare che $F(x)$ è pari. Da tale fatto si deduce che, se $0<c\le a$

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx=F(c)-F(-c)=0.$$

2.5 - Verificare che, se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ in $[a,b]$, $F(x+h)$ è una primitiva di $f(x+h)$ in $[a+h,b+h]$.
Combinando tale risultato con quello dell'esercizio precedente dedurre che:

$$\int_a^b (x-a)\cdot(x-b)\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=0.$$

2.6 - Siano f,g due funzioni continue in $[a,b]$ tali che $f(x)\le g(x)$ per $x\in[a,b]$.
Si chiama *dominio normale di base* $[a,b]$ *relativo a* f e g l'insieme dei punti del piano le cui coordinate verificano le disuguaglianze (cfr. fig. 2)

$$D\equiv\begin{cases} a\le x\le b \\ f(x)\le y\le g(x) \end{cases}.$$

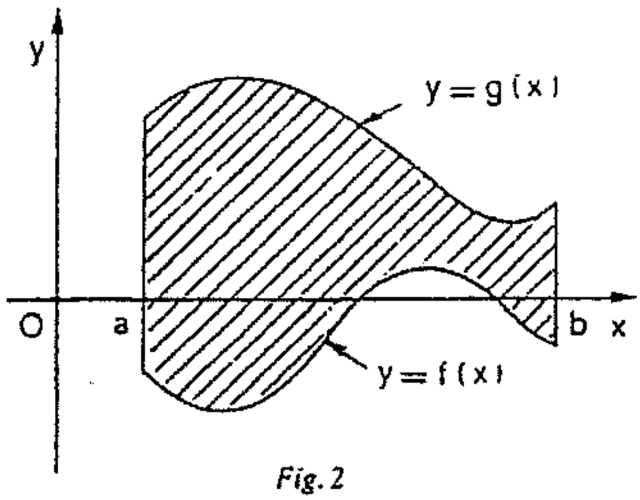


Fig. 2

Dimostrare che D è misurabile e che si ha

$$\text{area } D=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx.$$

A titolo di esempio calcolare le aree dei seguenti domini normali

$$D_1\equiv\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x^2\le y\le x \end{cases};\qquad D_2\equiv\begin{cases} 0\le x\le \pi/4 \\ \operatorname{sen}x\le y\le \cos x \end{cases};\qquad D_3\equiv\begin{cases} 0\le x\le 3 \\ x\le y\le 4x \end{cases}$$

2.7 - Facendo uso della formula (3) calcolare le lunghezze degli archi di curva di equazione

i) $y=x^{3/2}$, $0\le x\le 1$, ii) $y=\cosh x$, $0\le x\le 1$.

3. Generalizzazione del concetto di integrale

Nella definizione da noi data di integrale di Riemann abbiamo supposto la funzione integranda limitata su un intervallo chiuso e limitato. Vogliamo ora accennare alla possibilità di estendere la nozione di integrale definito prescindendo da tali ipotesi.

Per cominciare consideriamo una funzione $f(x)$ *non negativa nell'intervallo* $[a,b[$ *(b può essere anche* $+\infty$*) che sia (limitata ed) integrabile secondo Riemann in ogni intervallo compatto* $[a,x]\subset[a,b[$.

Ha senso quindi considerare la seguente funzione

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x\in[a,b[.$$

Essendo $f(x)\geq 0$ si ha che $F(x)$ è crescente; se $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)=$ $=\sup\limits_x F(x)<+\infty$ si pone

$$\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt \tag{3}$$

e f si dice **sommabile** in $[a,b[$.

Analogamente se f è *una funzione non negativa (limitata ed) integrabile su ogni intervallo* $[x,b]\subset]a,b]$ si pone

$$\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt=\sup_x\int_x^b f(t)\,dt \tag{4}$$

sempre che, ovviamente, risulti fornito il limite a secondo membro. In tal caso si dice che f è **sommabile** in $]a,b]$.

ESEMPI - Consideriamo nell'intervallo $]0,1]$ la funzione $x^{-\alpha}\,(\alpha>0)$.

Si ha:

$$\lim_{x\to 0^-}\int_x^1 t^{-\alpha}\,dt = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } 0<\alpha<1 \\[2ex] \lim\limits_{x\to 0^-} [\lg 1 - \lg x] = +\infty & \text{se } \alpha=1 \\[2ex] \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^{1-\alpha}-1}{\alpha-1} = +\infty & \text{se } \alpha>1\,. \end{cases}$$

Pertanto $t^{-\alpha}$ è sommabile in $]0,1]$ se e solo se $\alpha<1$; in tal caso risulta

$$\int_0^1 t^{-\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha}.$$

In modo analogo si prova che

$$\lim_{x\to +\infty}\int_1^x t^{-\alpha}\,dt = \begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-x^{1-\alpha}}{\alpha-1} = \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha>1 \\[2ex] \lim\limits_{x\to +\infty} [\lg x - \lg 1] = +\infty & \text{se } \alpha=1 \\[2ex] \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = +\infty & \text{se } 0<\alpha<1\,. \end{cases}$$

Quindi $t^{-\alpha}$ è sommabile in $[1,+\infty[$ se e solo se $\alpha>1$; in tal caso si pone

$$\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha-1}.$$

Consideriamo ora il caso in cui $f(\geq 0)$ *è definita in un intervallo aperto, non necessariamente limitato,* $]a,b[$ *ed è (limitata ed) integrabile su ogni intervallo compatto* $[x,y]\subset]a,b[$. Fissato $c\in]a,b[$ supponiamo sommabile sia la restrizione di f ad $]a,c]$ che la restrizione di f a $[c,b[$: in tal caso si dice che f è **sommabile** in $]a,b[$ e si pone

$$(5)\qquad \int_a^b f(t)\,dt=\int_a^c f(t)\,dt+\int_c^b f(t)\,dt\ ;$$

è facile verificare, e di ciò lasciamo la cura al lettore, che la quantità (5) non dipende dalla scelta di c in $]a,b[$.

Come ultimo passo consideriamo una funzione f *non negativa, definita nell'intervallo* $]a,b[$, *non necessariamente limitato, per la quale esistano* n *punti* $c_1<c_2<\ldots<c_n$ *tali che* $f(x)$ *risulti sommabile in ognuno degli intervalli* $]a,c_1]$, $[c_1,c_2]$, ..., $[c_i,c_{i+1}]$, ..., $[c_n,b[$. Si dice allora che f è **sommabile** in $]a,b[$ e si pone

$$(6)\qquad \int_a^b f(t)\,dt=\int_a^{c_1} f(t)\,dt+\int_{c_1}^{c_2} f(t)\,dt+\ldots+\int_{c_{n-1}}^{c_n} f(t)\,dt+\int_{c_n}^b f(t)\,dt.$$

Prima di passare ad analizzare il caso generale di una funzione f di segno variabile, è utile richiamare il seguente "*criterio di sommabilità*":

PROPOSIZIONE 12 - *Siano* f *e* g *due funzioni definite nell'intervallo* I *tali che* $0\le g(x)\le f(x)$; *allora se* f *è sommabile in* I *tale è anche* g.

Per fissare le idee sia $I=[a,c[$; che la sommabilità di $f(x)$ implichi quella di $g(x)$ è evidente dal momento che per ogni $x\in[a,c[$, si ha

$$\int_a^x g(t)\,dt\le\int_a^x f(t)\,dt\le\sup_x\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^c f(t)\,dt<+\infty.$$

Sia adesso f una funzione di segno arbitrario, definita in un intervallo I. Poniamo (cfr. Fig. 3)

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\},\qquad f^-(x)=\max\{-f(x),0\}$$

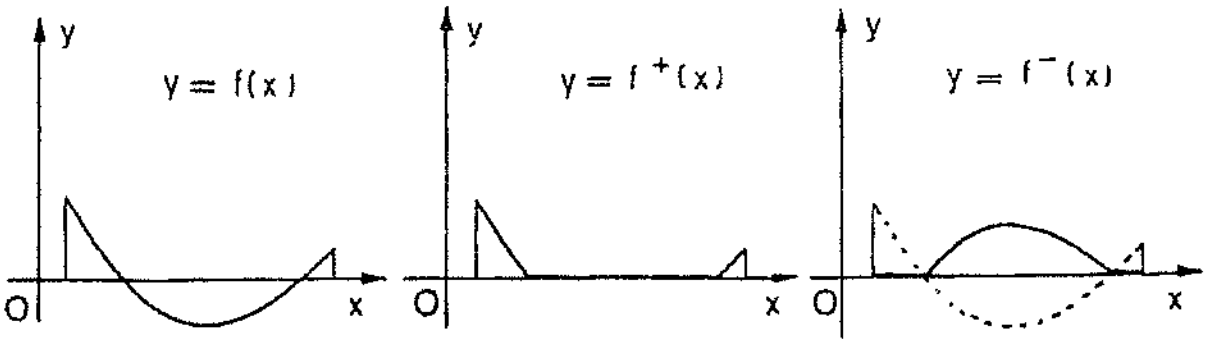


Fig. 3

Si ha ovviamente: $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$, $|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)$, $0\le f^+(x)$, $f^-(x)\le|f(x)|$. Da tali relazioni e dalla proposizione 12 si deduce che $|f|$ è sommabile se e solo se tali sono f^+ e f^-.

DEFINIZIONE 5 - Una funzione f definita nel-l'intervallo $]a,b[$ si dice **sommabile** in $]a,b[$ se tale è la funzione non negativa $|f|$. In tal caso si pone

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f^+(t)\,dt-\int_a^b f^-(t)\,dt.$$

Osservato poi che se f è sommabile in $]a,b[$ essa è sommabile in ogni intervallo contenuto in $]a,b[$ si pone:

$$\int_x^y f(t)\,dt=-\int_y^x f(t)\,dt \qquad \text{se} \quad x>y \text{ e } x,y\in[a,b].$$

É facile dimostrare che anche per tale estensione della nozione di integrale definito valgono le proprietà ii), iii), iv), v) della prop. 8.

Complementi ed esercizi

3.1 - Verificare, facendo uso della proposizione 12, che le seguenti funzioni sono sommabili in $[0,+\infty[$:

i) $\dfrac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}}$; ii) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}$; iii) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}$.

3.2 - Verificare che

i). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$; $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\lg^{\alpha} x}\,dx = \frac{(\lg 2)^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ $\alpha>1$.

Se $f(x)$ è continua su $[a,+\infty[$ verificare che:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}|f(x)| = \ell > 0 \rightarrow \begin{cases} f \text{ sommabile se } \alpha>1 \\ f \text{ non sommabile se } \alpha\leq 1 \end{cases}$$

Verificare inoltre che la funzione $\dfrac{1}{x\lg x}$, pur essendo infinitesima all'infinito di ordine maggiore di 1 non è sommabile in $[2,+\infty[$.

3.3 - Una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $]a,b[$ ed ivi continua tranne che in un numero finito di punti dicesi **generalmente continua**.

Nell'ipotesi che $f(x)$ sia generalmente continua e sommabile in $]a,b[$ dimostrare che la funzione integrale

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

con x_0 fissato in $]a,b[$ gode delle seguenti proprietà:

a) è continua in $]a,b[$ (ed anche in a e/o b se sono finiti)

b) è derivabile nei punti in cui f è continua: in tali punti si ha $F'(x) = f(x)$.

Una qualsiasi funzione che verifichi le proprietà a), b) dicesi **primitiva** (in senso generalizzato) di f. Si vede facilmente che tutte le primitive (in senso generalizzato) di f sono del tipo $F(x)+c$ con c costante arbitraria; da ciò si deduce che se $G(x)$ è una primitiva di f si ha

$$G(y)-G(x) = \int_x^y f(t)\,dt \qquad x,y\in[a,b].$$

Infine, per quel che riguarda la (9) si può dire che se f è limitata, risulta

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)(b-a) \le \int_a^b f(t)dt \le \sup_{x\in[a,b]} f(x)(b-a).$$

3.4 - Considerata la serie a termini non negativi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

e la funzione definita su $[1,+\infty[$

$$f(x)=a_n \quad \text{se } n\le x<n+1$$

si dimostri che la serie converge se e solo se $f(x)$ è sommabile su $[1,+\infty[$.

3.5 - Dimostrare il seguente criterio integrale per la convergenza di una serie:

sia f una funzione positiva e decrescente in $[1,+\infty[$, e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie:

- se f è sommabile in $[1,+\infty[$ e $|a_n|\le f(n)$ $\forall n\in N$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente;
- se f è sommabile in $[1,+\infty[$ e $a_n\ge f(n)$ $\forall n\in N$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge positivamente;

3.6 - Utilizzando i simboli dell'esercizio 3.4 con a_n di segno arbitrario provare che $f(x)$ sommabile su $[1,+\infty[$ se e solo se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente.

3.7 - Poniamo $f(x)=\frac{1}{n}$ se $n\le x<n+1$; si ha ovviamente, (cfr. fig. 4)

$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \min\left\{1, \frac{1}{x-1}\right\}.$$

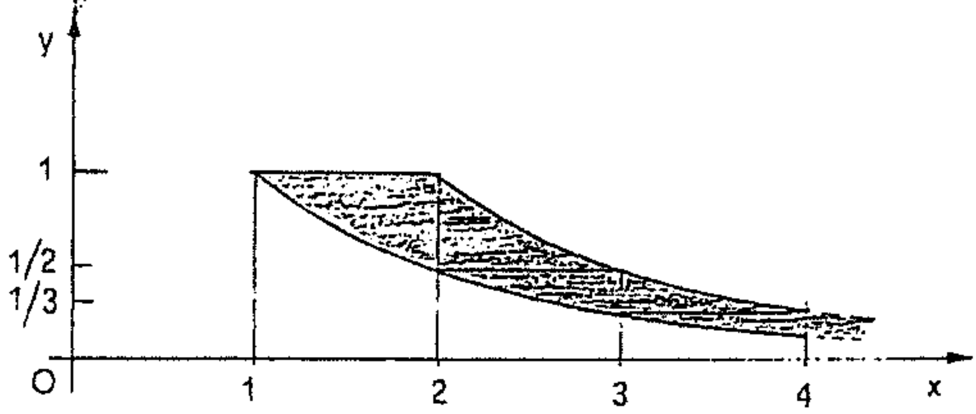


Fig. 4

Quindi, se $k \in N$

$$\int_1^k \frac{1}{x}\,dx \leq \int_1^k f(x)\,dx \leq \int_1^k \min\left\{1, \frac{1}{x-1}\right\} dx$$

da cui

$$\lg k \leq \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n} \leq 1 + \lg\ (k-1).$$

La precedente relazione, oltre la conferma che la serie armonica diverge positivamente, fornisce anche informazioni sulla velocità con la quale le somme parziali tendono ad infinito.

3.8 - Sia f una funzione (limitata ed) integrabile secondo Riemann in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, x] \subset [a, b[$. Se esiste finito il seguente limite

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt \tag{8}$$

la quantità (8) si chiama **integrale improprio** di f. È chiaro che se f è non negativa l'integrale improprio altro non è che l'ordinario integrale definito tra a e b. Se invece f è di segno variabile può verificarsi che la quantità (8) risulti finita ed f non risulti sommabile. Ad esempio consideriamo la seguente funzione

$$g(x) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n} \qquad \text{se} \quad n \le x < n+1;$$

si può verificare che

$$\lim_{x\to+b} \int_1^x g(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n},$$

quest'ultima quantità essendo finita (cfr. Cap. VIII § 3 OSS. 4). D'altra parte poiché $|g(x)|$ coincide con la funzione $f(x)$ introdotta nel precedente es. 3.7 si ha ovviamente che $|g(x)|$, e quindi g, non è sommabile in $[1,+\infty[$.

3.9 - Sia $f(x)$ continua in $[a,b]-\{x_0\}$ con $x_0 \in]a,b[$. Verificare che:

$$\lim_{x\to x_0} |x-x_0|^\alpha |f(x)| = \ell > 0 \to \begin{bmatrix} f \text{ sommabile se } \alpha<1 \\ \\ f \text{ non sommabile se } \alpha\ge 1 \end{bmatrix}$$

§ 4 - Metodi di integrazione

Sia f una funzione continua in un intervallo. Con il simbolo $\int f(x)dx$ abbiamo denotato l'insieme delle primitive di f; con un abuso di notazione ciò comporta che

$$D\left(\int f(x)dx\right) = f(x) \quad ;$$

quindi, in un certo senso, operazioni di integrazione indefinita e di derivazione sono l'una l'inversa dell'altra. Purtuttavia il problema della ricerca di una primitiva è in generale ben più complesso che non il calcolo di una derivata. Ad esempio, se f è **esprimibile elementarmente** cioè ottenuta attraverso un numero finito di operazioni di somma, differenza, prodotto, rapporto e composizione di funzioni elementari allora la sua derivata è ancora elementarmente esprimibile applicando le note regole di derivazione.

Nulla invece può dirsi in generale circa la primitiva di una tale funzione f; ad esempio nessuna primitiva di e^{-x^2} è elementarmente esprimibile.

D'altro canto fissato $x_o \in R$

$$F(x) = \int_{x_o}^{x} e^{-t^2}\,dt$$

è una primitiva di e^{-x^2}. In casi del genere acquistano particolare rilievo i cosiddetti "metodi di integrazione numerica" che consentono di calcolare valori approssimati di F(x). Alcuni di questi metodi verranno illustrati in un successivo capitolo. Ci limitiamo qui ad esporre alcuni metodi di uso comune che consentono in vari e semplici casi il calcolo esplicito di una primitiva.

A - SEMPLICI TRASFORMAZIONI - In alcuni casi il calcolo dell'integrale indefinito è pressocché immediato a patto di "intuire" la trasformazione giusta cui assoggettare la funzione integranda. Diamo qualche esempio indicando in parentesi quadra quale delle formule contenute nell'es. 1.2 viene di volta in volta adoperata:

$$\int \operatorname{sen}\alpha x\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \alpha\operatorname{sen}\alpha x\,dx = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x + c,\quad \alpha\neq 0 \qquad \text{[iii)]};$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int\frac{a\,dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\lg|ax+b| + c,\quad a\neq 0 \qquad \text{[ii)]};$$

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2} = \frac{1}{ab}\int\frac{\frac{b}{a}}{1+\left(\frac{b}{a}x\right)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}x + c,\quad a,b>0 \qquad \text{[viii)]};$$

$$\int \operatorname{sen} \alpha x \cos \beta x \, dx = \frac{1}{2} \int [\operatorname{sen}(\alpha+\beta)x + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)x] \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(\alpha+\beta)x \, dx + \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(\alpha-\beta)x \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta} + \frac{\cos(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta} \right] + c \quad \alpha \neq \pm\beta \qquad \text{[iii)]:}$$

$$\int \operatorname{sen} \alpha x \cos \alpha x \, dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(2\alpha x) \, dx =$$

$$= -\frac{1}{4\alpha} \cos(2\alpha x) + c \qquad \text{[iii)];}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int [1-\operatorname{sen} 2x] \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + c$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int [1-\operatorname{sen}^2 x] \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + c.$$

B - INTEGRAZIONI PER PARTI - Siano f, g due funzioni derivabili. Supponiamo di voler calcolare il seguente integrale indefinito.

$$\int f'(x) g(x) \, dx$$

sapendo già calcolare $\int f(x) g'(x) \, dx$. In tal caso si applica la cosiddetta "*regola di integrazione per parti*":

$$\int f'(x) g(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) \, dx. \tag{9}$$

Tale regola si ottiene facilmente osservando che

$$\int f'(x)g(x)dx = \int [f'(x)g(x)+g'(x)f(x) - g'(x)f(x)]dx =$$

$$= \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx - \int g'(x)f(x)dx =$$

$$= f(x)g(x) - \int g'(x)f(x)dx.$$

ESEMPI

1) $\int xe^x dx$: posto $f(x)=e^x$, $g(x)=x$ dalla (13) si ha

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + c.$$

Più in generale, posto $f(x)=e^x$, $g(x)=x^n$ $(n\in N)$ si ha

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int e^x x^{n-1} dx\,;$$

quindi il calcolo dell'integrale $\int x^n e^x dx$ è ricondotto a quello dell'integrale $\int x^{n-1} e^x dx$. A quest'ultimo, sempre che $n>1$, è possibile ancora applicare la (9). Applicando n volte la regola di integrazione per parti si ottiene la primitiva di $x^n e^x$.

2) $\int \lg x\, dx$: posto $f(x)=x$, $g(x)=\lg x$ si ha

$$\int \lg x\, Dx\, dx = x \lg x - \int x\, D\lg x\, dx = x\lg x - x + c$$

e quindi $\int \lg x\, dx = x(\lg x-1) + c$.

3) $\int x \lg x\, dx = \int D\,\frac{x^2}{2} \lg x\, dx = \frac{x^2}{2} \lg x - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{1}{x} dx =$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\lg x - \frac{1}{2}\right) + c.$$

Più in generale si ha, se $n\in N$

$$\int x^n \lg x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left[\lg x - \frac{1}{n+1}\right] + c.$$

4) $\int \operatorname{arcsen} x\,dx = \int \operatorname{arcsen} x\,Dx dx = x \operatorname{arcsen} x -$

$$- \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$\int \arccos x\,dx = \int \arccos x\,Dx dx = x \arccos x +$$

$$+ \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c.$$

5) $\int x \operatorname{sen} x\,dx = - \int x\,D \cos x\,dx = - x \cos x +$

$$+ \int \cos x\,dx = - x \cos x + \operatorname{sen} x + c$$

$$\int x \cos x\,dx = \int x\,D \operatorname{sen} x\,dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx =$$

$$= - x \operatorname{sen} x + \cos x + c.$$

6) $\int x^2 \cos x\,dx = \int x^2 D \operatorname{sen} x\,dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x\,dx =$

$$= x^2 \operatorname{sen} x - 2x \cos x + 2 \operatorname{sen} x + c.$$

In modo analogo si calcola $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$ e più in generale,

$$\int x^n \cos x\,dx, \quad \int x^n \operatorname{sen} x\,dx \qquad n\in N.$$

- FUNZIONI RAZIONALI - Per cominciare consideriamo il seguente integrale

$$I = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \qquad a \neq 0.$$

1° caso: $b^2 - 4ac = 0$. Si ha allora $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$ dove α è l'unica radice reale del polinomio di secondo grado ax^2+bx+c. Risulta

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2} = -\frac{1}{a}\frac{1}{x-\alpha} + c.$$

2° caso: $b^2 - 4ac > 0$. Si ha allora

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} =$$

$$= \frac{1}{a}\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)}\left(\frac{1}{x-\alpha_1} - \frac{1}{x-\alpha_2}\right)$$

dove α_1, α_2 sono le due radici (reali) del polinomio ax^2+bx+c. Risulta

$$I = \frac{1}{a(\alpha_1-\alpha_2)}(\lg|x-\alpha_1| - \lg|x-\alpha_2|) + c..$$

3° caso: $b^2-4ac < 0$. Si ha allora

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

con $q^2 = \dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{4a^2} > 0$. Posto $p = \dfrac{b}{2a}$ si ha

$$I = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+p)^2+q^2} = \int\frac{\frac{dx}{q}}{\left(\frac{x+p}{q}\right)^2+1} = \frac{1}{qa}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+p}{q}\right) + c.$$

Più in generale consideriamo una funzione che si presenti come rapporto di due polinomi $P(x)$ e $Q(x)$. Possiamo senz'altro supporre che il grado del numeratore $P(x)$ sia più piccolo del grado del denominatore $Q(x)$. Infatti, in caso contrario, eseguita la divisione tra i due polinomi si avrebbe

$$P(x) = P'(x)Q(x) + R(x) \quad \text{con grado } R(x) < \text{grado } Q(x),$$

da cui $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = P'(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$; quindi il calcolo dell'integrale indefinito di $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ verrebbe ricondotto al calcolo di quello di $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$.

Denotiamo con $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\beta_1 \pm i\gamma_1, \ldots, \beta_h \pm i\gamma_h$ le radici di $Q(x)$ rispettivamente di molteplicità $n_1, \ldots, n_k$, $m_1, \ldots m_h$. È possibile scrivere la funzione razionale $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ nella seguente forma:

$$(10) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{x-\alpha_i} + \sum_{i=1}^{h} \frac{B_i x + C_i}{(x-\beta_i)^2+\gamma_i^2} + \frac{d}{dx}\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

dove il termine $\dfrac{d}{dx}\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ compare solo se si è in presenza di radici multiple per $Q(x)$; in tal caso si ha

$$Q_1(x) = (x-\alpha_1)^{n_1-1} \ldots (x-\alpha_k)^{n_k-1} \; [(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2]^{m_1-1} \ldots [(x-\beta_h)^2+\gamma_h^2]^{m_h-1}$$

e $P_1(x)$ è un polinomio di grado $(n_1-1)+\ldots+(n_k-1) + 2(m_1-1)+ +\ldots+2(m_h-1)$.

Le costanti A_i, B_i, C_i nonché i coefficienti del polinomio $P_1(x)$ si determinano a partire dall'identità (10) facendo uso del principio di identità dei polinomi.

In base alla (10) il calcolo dell'integrale di $\frac{P(x)}{Q(x)}$ si riduce al calcolo di integrali noti.

ESEMPIO - Consideriamo la funzione razionale $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$.
Tale funzione può essere scritta nella seguente forma

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

con A, B, C, D, E costanti da determinare. Con facili calcoli si ha

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{(A+B)x^4+(C-D)x^3+(2A+B-2E)x^2+(C+D)x+A}{x(x^2+1)^2}$$

e quindi, in base al principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-D=0 \\ 2A+B-2E=1 \\ C+D=0 \\ A=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=0 \\ D=0 \\ E=-1 \end{cases}$$

In conclusione si ha

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+1}$$

e quindi

$$\int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,dx = -\lg|x| + \frac{1}{2}\lg(1+x^2) - \frac{1}{x^2+1} + c.$$

D - INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE - Data una funzione f definita in un intervallo I denotiamo con F una sua primitiva. Sia $\phi : J \to I$ derivabile nell'intervallo J e dotata di funzione inversa $\phi^{-1} : I \to J$. Si ha

$$\frac{d}{dt} F(\phi(t)) = F'(\phi(t))\ \phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$$

da cui

$$(11) \qquad \int f(\phi(t))\ \phi'(t)dt = F(\phi(t)) + c.$$

Dalla (11) si ha allora

$$F(x) + c = \left[\int f(\phi(t))\ \phi'(t)dt\right]_{t=\phi^{-1}(x)};$$

di conseguenza una primitiva di f può essere ottenuta componendo una primitiva della funzione $f(\phi(t))\ \phi'(t)$ con la funzione $\phi^{-1}(x)$. Pertanto il calcolo dell'integrale indefinito

$$(12) \qquad \int f(x)dx$$

viene in tal modo ricondotto al calcolo del seguente integrale

$$(13) \qquad \int f(\phi(t))\ \phi'(t)dt\ .$$

Spesso, mediante una opportuna "*sostituzione* $x=\phi(t)$" il calcolo dell'integrale (13) si presenta più semplice del calcolo dell'integrale (12).

Diamo qui di seguito alcuni esempi in cui viene applicato tale procedimento di calcolo.

1) $\int \frac{dx}{1+e^x}$. Posto $e^x = t$ e, quindi, $x = \lg t$, si ha:

$$\int \frac{1}{1+t}\,\frac{1}{t}\,dt = \int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \lg t - \lg(t+1) + c$$

da cui

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = x - \lg(e^x+1) + c.$$

Più in generale, se $R(y)$ è una funzione razionale, con lo stesso procedimento è possibile calcolare integrali indefiniti del tipo

$$\int R(e^x)\,dx\ .$$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\operatorname{sen}x+\cos x}$.

Risulta:

$$2+\operatorname{sen}x+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} +$$

$$+\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(3+2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right).$$

Quindi

$$\int \frac{dx}{2+\operatorname{sen}x+\cos x} = \int \frac{1}{3+2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\,\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\,dx.$$

Ponendo $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ $(x = 2\operatorname{arctg} t)$ si ha

$$\int \frac{dx}{2+\operatorname{sen}x+\cos x} = 2\left[\int \frac{dt}{3+2t+t^2}\right]_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

Pertanto il calcolo dell'integrale é ricondotto al caso di una funzione razionale.

Più in generale se $R(y,z)$ é una funzione razionale in y,z (cioé si presenta come rapporto di due polinomi nelle variabili y,z) con lo stesso procedimento é possibile calcolare integrali indefiniti del tipo

$$\int R(\text{sen}x,\ \cos x)\, dx.$$

3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+3}{5(\sqrt{x+1}-1)-x}\, dx$

Posto $\sqrt{x+1}=t$ $(x=t^2-1)$ si ha:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+3}{5(\sqrt{x+1}-1)-x}\, dx = 2\int \frac{(t+3)t}{5(t-1)-t^2+1}\, dt \Big|_{t=\sqrt{x+1}}$$

é pertanto il calcolo dell'integrale é ancora ricondotto al caso di una funzione razionale.

Più in generale tale procedimento si applica al calcolo di integrali del tipo

$$\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})\, dx$$

ponendo $\sqrt[n]{ax+b}=t$.

Complementi ed esercizi

4.1 - Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\int e^x \,\text{sen}x\, dx\ , \qquad \int e^x \cos x\, dx\ .$$

Integrando per parti si ha:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \ ;$$

da tali relazioni è facile ottenere gli integrali richiesti.

4.2 - Calcolare i seguenti integrali

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx \ , \qquad \int \cos^3 x \, dx \ .$$

Integrando per parti si ha:

$$\int \operatorname{sen}^3 dx = \int \operatorname{sen}^2 x \ \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \ \operatorname{sen}^2 x + 2 \int \cos^2 x \ \operatorname{sen} x \, dx$$

da cui

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = \cos x \ \operatorname{sen}^2 x - \frac{2}{3} \cos^3 x + c.$$

In modo analogo si calcola l'altro integrale.

4.3 - Calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+x+1}; \qquad \int \frac{dx}{(x-1)^3(1+x^2)}; \qquad \int \frac{(x^3+1)\,dx}{x(x-1)^2(x+1)^2}.$$

4.4 - Calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{dx}{2\operatorname{sen} x+\cos x}; \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}; \qquad \int \frac{dx}{\cos x}; \qquad \int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}.$$

4.5 - Mediante la sostituzione $t=\frac{x-1}{x+1}$, calcolare i seguenti integrali

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx; \qquad \int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx; \qquad \int \sqrt{x^2-1}\,dx.$$

4.6 - Prendendo spunto dalla risoluzione del precedente esercizio calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}\,dx; \qquad \int \sqrt{(x-1)(x+3)}\,dx; \qquad \int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(x+1)}}\,dx;$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx; \qquad \int \sqrt{x(1-x)}\,dx.$$

4.7 - Operando la sostituzione $\sqrt{1+x}=t$ calcolare il seguente integrale

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx.$$

4.8 - Calcolare con la sostituzione $x=\operatorname{sen} t$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

4.9 - Mediante la sostituzione $x=\operatorname{sen}h\,t$ il calcolo dell'integrale

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx \tag{14}$$

è ricondotto al calcolo del seguente integrale

$$\int \cosh t\ \operatorname{senh} t\,dt = \int \frac{e^t+e^{-t}}{2}\,\frac{e^t-e^{-t}}{2}\,dt$$

la cui funzione integranda é una funzione razionale, in e^t (cfr. esempio 1 della sez. D di tale paragrafo). Più in generale se x^2+bx+c é un polinomio a discriminante negativo Δ, osservato che

$$x^2+bx+c = -\frac{\Delta}{4}\left(\left[\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\left(x+\frac{b}{2}\right)\right]^2+1\right)$$

mediante la sostituzione $t = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\left(x+\frac{b}{2}\right)$ il calcolo dell'integrale

$$\int \sqrt{x^2+bx+c}\; dx$$

è ricondotto al calcolo dell'integrale (14).
Si calcolino inoltre i seguenti integrali

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}; \qquad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+3}}\,dx.$$

4.10 - Calcolare i seguenti integrali

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx, \qquad \int \cos^n x\,dx.$$

Traccia:

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = \int \operatorname{sen}^{n-1}x\ \operatorname{sen}x\,dx = -\cos x\ \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\ \cos^2 x\,dx = -\cos x\ \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx.$$

5. Probabilità continua

Supponiamo di effettuare un esperimento il cui risultato dipenda dal caso e sia un qualsiasi numero reale $f \in]a,b[$ con $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si pensi, ad esempio, all'esperimento consistente nel colpire completamente a caso un bersaglio circolare di centro 0 e raggio r assumendo come risultato dell'esperimento stesso la distanza $|OP|$ di 0 dal punto P colpito.

Fissiamo la nostra attenzione su eventi del tipo

$$E_{t_1,t_2} = \{t_1 < f \leq t_2\}$$

con $-\infty \leq t_1 < t_2 \leq +\infty$; un evento del genere é in sostanza "*l'insieme dei casi in cui il risultato dell'esperimento é maggiore di* t_1 *e minore od eguale a* t_2".

Nel caso dell'esempio precedente l'evento E_{t_1,t_2} può essere identificato con l'insieme dei punti della corona circolare di centro 0 delimitata dai cerchi di raggio t_1 e t_2 se $0 \leq t_1 < t_2 \leq r$, con l'insieme vuoto se $t_2 < 0$ e cosi via.

Vogliamo qui dare un'idea di come si possa assegnare una probabilitá a tali eventi.

A tal fine supponiamo di associare al nostro esperimento una funzione non negativa $P(t)$ definita in R e tale che

1) $P(t)$ é crescente

2) $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = P(+\infty) = 1$

3) $\lim\limits_{t \to -\infty} P(t) = P(-\infty) = 0$

4) $P(t)$ é continua a destra.

Una tale funzione si chiama **distribuzione di probabilitá** dell'evento E_{t_1,t_2}; si pone

$$P(E_{t_1,t_2}) = P\{t_1 < f \leq r_2\} = P(t_2) - P(t_1) .$$

Quindi in particolare

$$P(t) = P(t) - P(-\infty) = P\{f \leq t\}$$

$$1 - P(t) = P(+\infty) - P(t) = P\{f > t\} .$$

Le 1), 2), 3) appaiono come condizioni naturali ove si osservi che:

a) $\{f \leq +\infty\}$ é l'evento certo;

b) $\{f \leq -\infty\}$ è l'evento impossibile;

c) $t_1 < t_2 \Rightarrow \{f \leq t_1\} \subseteq \{f \leq t_2\}$.

Nel caso del tiro (completamente a caso) al bersaglio è ragionevole assumere

$$P(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^2/r^2 & 0 \leq t \leq r \\ 1 & t > r \end{cases}$$

cioè postulare che la probabilità di colpire un punto che disti meno di t dal centro 0 è data dal rapporto dell'area del cerchio di centro 0 e raggio t con l'area del bersaglio (cfr. fig. 5).

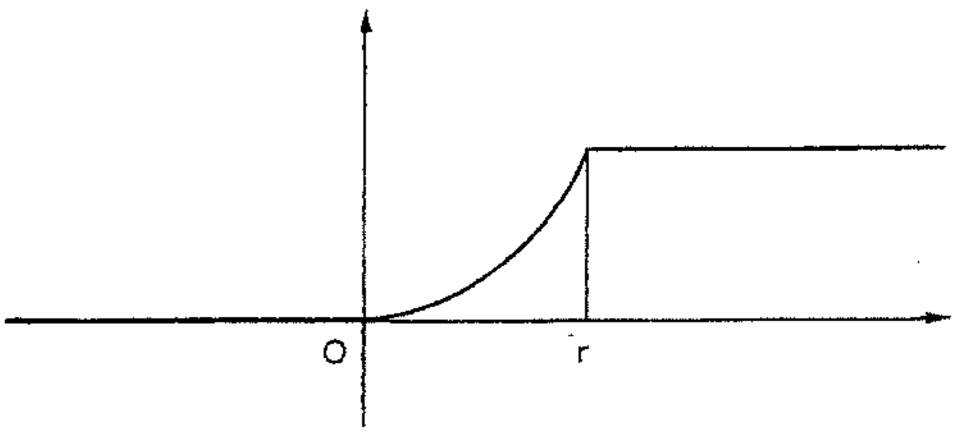


Fig. 5

Ritorniamo per un istante al caso di un esperimento, con un numero finito di risultati possibili; per fissare le idee riferiamoci all'estrazione di un numero a caso tra 1,2,3.

Ovviamente gli eventi {1}, {2}, {3} sono equiprobabili e ad ognuno di essi compete probabilità 1/3. La distribuzione di probabilità associata a tale esperimento è pertanto

$$P(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1/3 & t \in [1,2[\\ 2/3 & t \in [2,3[\\ 1 & t \in [3,+\infty[\end{cases} \qquad \text{(cfr. fig. 6)}$$

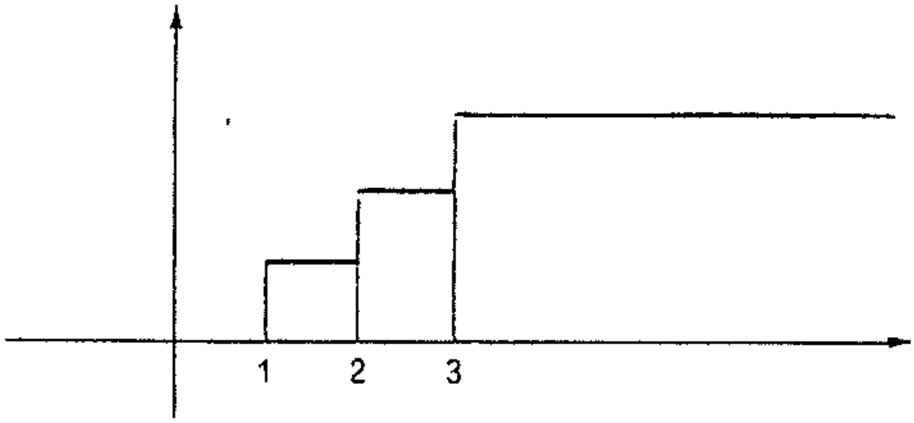


Fig. 6

In modo analogo può essere costruita la distribuzione di probabilità di un esperimento i cui risultati possibili siano $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ con probabilità rispettivamente $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Supponiamo, adesso, che la funzione di distribuzione $P(t)$ sia derivabile e che la sua derivata sia continua; posto

$$(18) \qquad P'(t) = m(t)$$

la funzione $m(t)$ prende il nome di **densità di probabilità**; intuitivamente possiamo dire che $m(t)dt$ è "la probabilità che il risultato dell'esperimento cada nell'intervallo di ampiezza infinitesima $(t, t+dt)$". Ovviamente da (18) discendono le eguaglianze

$$(19) \qquad P(t) = \int_{-\infty}^{t} m(x)\,dx$$

$$(20) \qquad P(t_2) - P(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} m(x)\,dx$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} m(x)\,dx. \tag{21}$$

In particolare la (19) esprime il fatto che l'area del rettangoloide di base $[t_1, t_2]$ relativo ad $m(t)$ é la probabilità che il risultato dell'esperimento appartenga all'intervallo $]t_1, t_2]$.

Esempi classici di densità di probabilità sono:

$$m(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/R & t \in [0, R] \\ 0 & t > R \end{cases}$$ (distribuzione uniforme) (Fig. 7)

$$m(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ ke^{-kt} & t \geq 0 \quad (k>0) \end{cases}$$ (distribuzione esponenziale) (Fig. 8)

$$m(t) = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \qquad t \in]-\infty, +\infty[$$ (distribuzione normale o di Gauss) (Fig. 9)

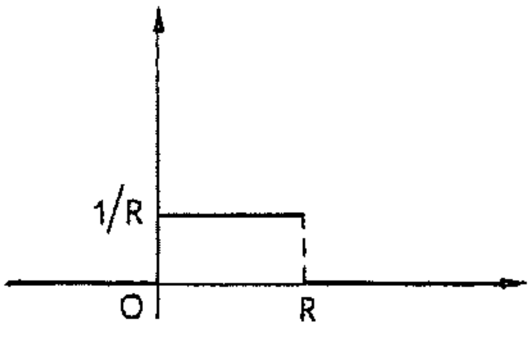


Fig. 7

Nel caso di un esperimento con un numero finito di risultati possibili $a_1 < \ldots < a_n$ con probabilità $p_1 \ldots p_n$ si può pensare ad $m(t)$ come alla funzione

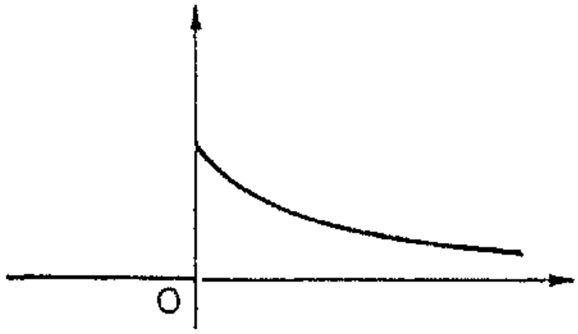


Fig. 8

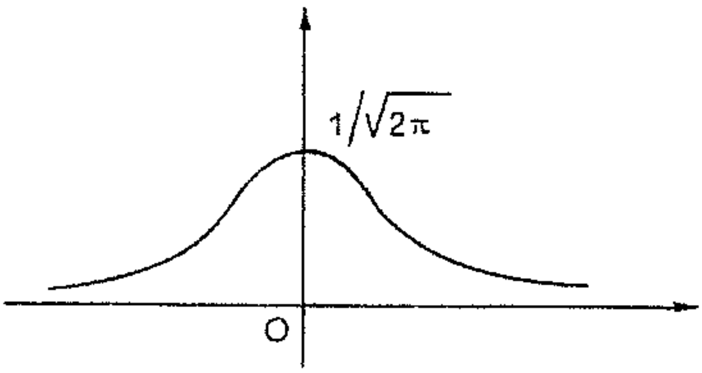


Fig. 9

$$m(t) = \begin{cases} p_i & \text{se} \quad t=a_i \\ 0 & \text{se} \quad t\neq a_i \quad \text{per ogni } i. \end{cases} \qquad \text{(Fig. 10)}$$

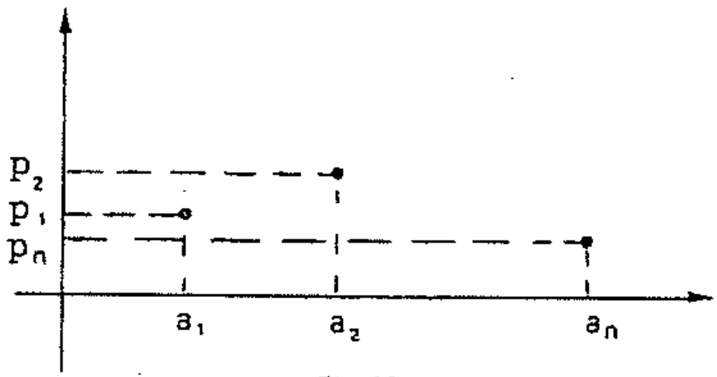


Fig. 10

Ovviamente le (19), (20), (21), diventano rispettivamente

(22) $$P(t) = \sum_{a_i \le t} p_i$$

(23) $$P(t_2) - P(t_1) = \sum_{t_1 < a_i \le t_2} p_i$$

(24) $$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Restando nel caso di un esperimento con un numero finito di risultati possibili hanno interesse le quantità

$$M = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i$$

$$V = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - M)^2 \, p_i} \; ;$$

M è la **media** dei risultati possibili dell'esperimento dato, V è *lo* **scarto quadratico medio** o **deviazione standard** e dà una valutazione di come si "*disperdano i risultati possibili rispetto alla media*".
Nel caso di un esperimento con densità di probabilità continua m(t) si introducono quantità analoghe:

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t)\,dt$$

$$V = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (t-M)^2 \, m(t)\,dt}$$

purché tali integrali siano finiti.

Il significato di M e V è analogo a quello illustrato nel caso discreto.

CAPITOLO XIII

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

1. Convergenza puntuale ed uniforme

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni definite in un sottoinsieme I di R.

DEFINIZIONE 1. Se per ogni $x \in I$ la successione numerica $\{f_n(x)\}$ converge ad un valore che denotiamo con $f(x)$ si dice che la successione $\{f_n\}$ converge **puntualmente** alla funzione f.

ESEMPIO 1. Posto $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ con $x \in [0,1]$ risulta

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in]0,1] \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Tale esempio mostra che il limite puntuale di una successione di funzioni continue potrebbe non essere una funzione continua. Più in generale si può verificare che

$$(1) \qquad \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) \neq \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$$

dove x_0 è un punto di accumulazione per I. La (1) mette quindi in evidenza il fatto che non sempre è possibile invertire due successive operazioni di limite. Perché ciò sia lecito è necessario introdurre un tipo di convergenza più forte della ordinaria convergenza puntuale.

DEFINIZIONE 2. Si dice che la successione $\{f_n\}$ converge **uniformemente** ad f in I se per ogni $\varepsilon>0$ esiste un indice ν tale che per ogni $n>\nu$ e per ogni $x\in I$ risulti $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

Se si confronta tale definizione con quella di convergenza puntuale si osserva che la novità sta nel fatto che l'indice ν può essere scelto in modo tale da risultare indipendente dal punto $x\in I$.

Dalla Definizione 2 discende immediatamente che la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente ad f se e solo se risulta

$$\text{(2)} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\right)=0.$$

In base a tale osservazione la successione $\{f_n\}$ riportata nell'Esempio 1 non converge uniformemente alla funzione f dal momento che, in contrasto con la (2), si ha

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=1.$$

ESEMPIO 2. Sia

$$f_n(x)=n^\alpha x(1-x^2)^n, \qquad x\in[0,1]$$

con α numero reale positivo. È evidente che la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente alla funzione identicamente nulla. D'altra parte

$$\max_{x\in[0,1]} f_n = \frac{n^\alpha}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n;$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\max_{x\in[0,1]} f_n\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2}$$

Pertanto la successione converge uniformemente se il parametro α è minore di 1/2; negli altri casi la convergenza non è uniforme.

In relazione alla nozione di convergenza uniforme vale il seguente risultato noto come *Criterio di convergenza uniforme* di Cauchy:

PROPOSIZIONE 1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione* $\{f_n\}$ *converga uniformemente in* I *è che per ogni* $\varepsilon>0$ *esista un indice* ν *tale che per ogni* $n,m>\nu$ *e per ogni* $x\in I$ *risulti*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (3)$$

Procedendo come nel caso del Criterio di Cauchy per le successioni numeriche (cfr. 7, Cap. VII) si dimostra che la condizione è necessaria. Per quanto riguarda la sufficienza osserviamo innanzitutto che, fissato $x\in I$, la successione numerica $\{f_n(x)\}$ è convergente sempre in base al Criterio di convergenza di Cauchy per le successioni numeriche; poniamo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) .$$

Fissando l'indice n nella (3) e facendo tendere m ad infinito si ottiene

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon ;$$

la precedente diseguaglianza vale per ogni $n>\nu$ e per ogni $x\in I$ il che equivale alla convergenza uniforme.

Nel caso in cui la successione di funzioni sia la successione delle somme parziali $\{S_n\}$ di una serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ si dice che tale serie **converge uniformemente** ad f in I se la successione delle somme parziali $\{S_n\}$ converge uniformemente ad f in I. Vale ovviamente un criterio di convergenza uniforme di Cauchy che nel caso delle serie si preferisce enunciare nella forma seguente:

PROPOSIZIONE 2. *La serie di funzioni* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente se e solo se per ogni* $\varepsilon>0$ *esiste un indice* ν *tale che per ogni* $n>\nu$, *per ogni* $k>0$ *e per ogni* $x\in I$ *risulti*

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+k}(x)| < \varepsilon .$$

DEFINIZIONE 3. Data una serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ si dice che essa è **totalmente convergente** se esiste una successione numerica $\{M_k\}$ tale che $|f_k(x)| \le M_k$ per ogni $x\in I$ inoltre $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty$.

Per riconoscere se una serie di funzioni converge uniformemente risulta utile il seguente criterio:

PROPOSIZIONE 3. *Una serie di funzioni totalmente convergente è assolutamente convergente ed uniformemente convergente.*

L'assoluta convergenza è ovvia. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, essendo la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergente, per il classico criterio di convergenza di Cauchy per le serie numeriche (cfr. 1, Cap. VIII), fissato $\varepsilon>0$ esiste un indice ν tale che per ogni $n>\nu$ e $k>0$ risulta

$$M_{n+1} + M_{n+2} + ... + M_{n+k} < \varepsilon .$$

Si ha pertanto

$$\begin{aligned} &|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+k}(x)| \le \\ &\le |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + ... + |f_{n+k}(x)| \le \\ &\le M_{n+1} + M_{n+2} + ... + M_{n+k} < \varepsilon . \end{aligned}$$

Dalla prop. 2 segue allora l'asserto.

2. Convergenza uniforme e continuità

In tale paragrafo faremo vedere che, diversamente dalla convergenza puntuale, la convergenza uniforme conserva la continuità. Sussiste infatti il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 4. *Sia* $\{f_n\}$ *una successione uniformemente convergente ad* f *in* I; *se le funzioni* f_n *sono continue in* $x_o \in I$ *tale è anche la funzione* f.

Si ha quindi

$$f(x_o) = \lim_{x \to x_o} f(x) ;$$

tale relazione può scriversi più espressivamente nella forma seguente

$$\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_o} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_o} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) \tag{4}$$

La (4) è il primo significativo esempio di inversione tra due operazioni di limite.

Dimostrazione della proposizione 4

Per ogni $\varepsilon > 0$, ricordando la Def. 2, esiste un indice ν tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall n > \nu, \ \forall x \in I. \tag{5}$$

Fissato $n > \nu$, essendo la funzione f_n continua in x_o, esiste un $\delta > 0$ tale che, se $|x - x_o| < \delta$ e $x \in I$, risulta

$$|f_n(x) - f(x_o)| < \varepsilon . \tag{6}$$

Pertanto sempre per $|x - x_o| < \delta$ e $x \in I$ dalle (5) e (6) si ha

$$|f_n(x) - f(x_o)| \le$$
$$\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_o)| + |f_n(x_o) - f(x_o)| \le 3\varepsilon ;$$

dall'arbitrarietà di ε discende l'asserto.

Più in generale supponiamo che le funzioni f_n siano convergenti in x_0 punto di accumulazione per I; cosa può dirsi sul comportamento di f in x_0? Vale in proposito il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 5. *Sia* $\{f_n\}$ *uniformemente convergente in* $I-\{x_0\}$ *ad una funzione* f*; se ogni funzione* f_n *converge in* x_0*, allora anche* f *converge in* x_0 *e vale la (4).*

Posto

$$l_n = \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

dalla ipotesi di convergenza uniforme, passando al limite nella (3) per x che tende ad x_0, si ha

$$|l_n - l_m| \leq \varepsilon \qquad \forall n, m > \nu ; \tag{7}$$

quindi la successione $\{l_n\}$ è convergente: sia l il suo limite. Prolunghiamo per continuità le funzioni f_n in x_0 ponendo

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ l_n & \text{se } x = x_0 \end{cases} .$$

Mostriamo che la successione $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente alla funzione che si ottiene prolungando la funzione f in x_0 ponendola uguale ad l cioè alla funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases} .$$

Fissato $\varepsilon > 0$ basta osservare che per n, m abbastanza grandi si ha

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in I ; \tag{8}$$

infatti la (8) coincide con la (3) se $x \neq x_o$, con la (7) se $x=x_o$. Per la prop. 4 la funzione φ risulta continua in x_o, si ha cioè

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_o} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} l_n = l = \lim_{x\to x_o} \varphi(x) = \lim_{x\to x_o}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$$

cioè la (4).

Per comodità del lettore riscriviamo per le serie di funzioni gli enunciati dei risultati appena ottenuti.

PROPOSIZIONE 6. *Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *una serie di funzioni convergente uniformemente ad f. Se le funzioni* f_n *sono continue in* x_o *tale è anche la funzione f. Se più in generale le funzioni* f_n *convergono in* x_o *e la serie è uniformemente convergente in* $I-\{x_o\}$ *allora anche f è convergente in* x_o *e si ha*

$$\lim_{x\to x_o}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_o} f_n(x)\right). \tag{9}$$

ESEMPIO 3. Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x} \qquad x>0.$$

Tale serie converge totalmente e quindi uniformemente in ogni intervallo $[a,+\infty[$ con $a>0$ in quanto la serie risulta ivi maggiorabile con la serie numerica convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2a}.$$

La serie peraltro non converge uniformemente in $]0,+\infty[$ in quanto altrimenti, in base alla prop. 6, la somma della serie dovrebbe convergere in zero e dovrebbe valere la (9).

3. Integrazione e derivazione termine a termine

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni definite in un intervallo $[a,b]$, ivi limitate ed integrabili secondo Riemann. Se $\{f_n\}$ è uniformemente convergente ad f, è la funzione f integrabile secondo Riemann? Se le funzioni f_n sono continue la funzione f è ovviamente integrabile in quanto continua (cfr. prop. 4). La risposta è comunque in ogni caso affermativa ma su ciò non ci soffermeremo.

Proponiamo come punto di partenza il seguente semplice risultato:

PROPOSIZIONE 7. *Sia $\{f_n\}$ una successione uniformemente convergente ad f in $[a,b]$; se le funzioni f_n sono continue si ha*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx \ . \tag{10}$$

Per l'uniforme convergenza, fissato $\varepsilon>0$, esiste un indice $\nu>0$ tale che, per ogni $n>\nu$ e per ogni $x\in[a,b]$, risulta

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

Quindi, per $n>\nu$, si ha

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \varepsilon\,(b-a)$$

da cui l'asserto.

Osserviamo che la (10) consente, quando c'è convergenza uniforme, di commutare il simbolo di limite con quello di integrale. Tale operazione non sempre è consentita come il seguente esempio illustra.

ESEMPIO 4. Consideriamo la successione dell'esempio 2. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{2}\frac{1}{n+1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>1 \\ 1/2 & \text{se } \alpha=1 \,. \\ 0 & \text{se } \alpha<1 \end{cases}$$

Quindi, ricordando che la successione converge puntualmente alla funzione idenicamente nulla, la (10) non vale se $\alpha\geq 1$.

Per quanto riguarda l'operatore di derivazione sussiste il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 8. *Sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni derivabili nell'intervallo* $[a,b]$*: se tale successione converge in* $x_0\in I$ *e* $\{f_n'\}$ *converge uniformemente in* $[a,b]$*, allora la successione* $\{f_n\}$ *converge uniformemente in* $[a,b]$*: detto* f *il limite di* $\{f_n\}$*, tale funzione è derivabile e si ha*

$$(\lim_{n\to+\infty} f_n(x))' = f' = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x) \tag{11}$$

Fissato $\varepsilon>0$ in base alle ipotesi esiste un indice ν tale che per $n,m>\nu$ si ha

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon \tag{12}$$

e

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon \qquad \forall x\in I\,. \tag{13}$$

Risulta

$$\begin{aligned} &|f_n(x) - f_m(x)| \leq \\ &\leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| = \\ &= |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|\,|x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \end{aligned}$$

dove ξ è un punto compreso tra x e x_0 la cui esistenza è assicurata dal teorema di Lagrange.

In base alle (12) e (13) si ha, sempre per $n, m > \nu$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon(b-a+1)$$

da cui, data l'arbitrarietà di ε, si ottiene l'uniforme convergenza della successione $\{f_n\}$: sia f il limite della successione $\{f_n\}$.
Fissato $\bar{x} \in [a,b]$, se $x \neq \bar{x}$ poniamo

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} .$$

La successione $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente in $[a,b]-\{\bar{x}\}$; infatti, applicando il teorema di Lagrange, si ha

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \frac{f_n(x) - f_m(x) - f_n(\bar{x}) + f_m(\bar{x})}{x - \bar{x}} = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| .$$

dove ξ è un punto dell'intervallo $[a,b]$ diverso da $\bar{x}$. Dalla (13) discende che $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)|$ si può maggiorare con ε per $n, m > \nu$ e $x \in [a,b] - \{\bar{x}\}$. Inoltre le funzioni φ_n convergono per x che tende ad x_0. È allora possibile applicare alla successione $\{\varphi_n\}$ la prop. 5:

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{x \to \bar{x}} \left(\lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x) - f_n(\bar{x})}{x - \bar{x}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \bar{x}} \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to \bar{x}} \varphi_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(\bar{x}) ;$$

si ottiene in tal modo l'asserto.

Se si suppone che le funzioni f_n' sono continue la seconda parte della dimostrazione della proposizione si semplifica. Infatti per il teorema fondamentale del Calcolo integrale si ha

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt . \tag{14}$$

Denotiamo con ϕ il limite di $\{f'_n\}$; tale funzione è continua in quanto tali sono le funzioni f'_n. Passando al limite nella (14) si ottiene

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \phi(t)\,dt \quad .$$

Sempre per il teorema fondamentale del Calcolo integrale si ha allora $f'(x) = \phi(x)$ da cui l'asserto.

Per sottolineare il fatto che le ipotesi della prop. 8 sono in un certo senso essenziali proponiamo i seguenti esempi:

ESEMPIO 5. Posto

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente alla funzione identicamente nulla. D'altra parte risulta $f'_n(x) = \sqrt{n}\cos nx$ e quindi

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(0) = +\infty \ .$$

ESEMPIO 6. Posto

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \qquad x\in[-1,1]$$

la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente alla funzione identicamente nulla. Essendo

$$f'_n(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

risulta

$$\lim_{n\to+\infty} f'_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

quindi $\{f'_n\}$ non converge uniformemente essendo il suo limite non continuo. Non vale la (11) per $\bar{x}=0$.

Per le serie le prop. 7 e 8 assumono la seguente forma:

PROPOSIZIONE 9. *Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *una serie di funzioni continue uniformemente convergente ad* f *in* $[a,b]$*; allora* f *è continua e si ha*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx .$$

PROPOSIZIONE 10. *Se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge in* $x_0 \in [a,b]$ *e la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ *converge uniformemente in* $[a,b]$ *allora la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente ad una funzione* f *derivabile e si ha*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) .$$

4. Serie di potenze

Data una successione numerica $\{a_n\}$ la serie

(15) $$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

dicesi serie di potenze di punto iniziale $x_0 \in R$. Per caratterizzare l'insieme dei valori per i quali la serie (15) converge è utile il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 11. *Se la serie (15) converge in* $\bar{x}$ *allora essa converge assolutamente in ogni punto* x *tale che* $|x-x_0| < |\bar{x}-x_0|$. *Inoltre la serie converge totalmente in ogni intervallo* $[x_0-\delta; x_0+\delta]$ con $\delta < |\bar{x}-x_0|$.

Si ha

$$|a_n||x-x_0|^n = |a_n||\bar{x}-x_0|^n \left(\frac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|}\right)^n .$$

Poiché per ipotesi la serie (15) converge in $\bar{x}$ la successione $\{|a_n||\bar{x}-x_0|^n\}$ è infinitesima e quindi limitata; si ha cioè $|a_n||\bar{x}-x_0|^n \leq M$ per ogni $n \in N$ con M costante opportuna.
Essendo anche, per $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$,

$$\frac{|x-x_0|}{|\bar{x}-x_0|} \leq \frac{\delta}{|\bar{x}-x_0|} = h<1$$

si ha

$$|a_n||x-x_0|^n \leq Mh^n \qquad \forall n \in N$$

da cui l'asserto essendo ovviamente convergente la serie il cui termine generale è Mh^n.

Siamo ora in grado di caratterizzare l'insieme di convergenza della serie (15); si ha infatti:

PROPOSIZIONE 12. *Per la serie (15) si verifica una delle seguenti tre eventualità:*

i) *la serie converge solo per* $x=x_0$;

ii) *la serie converge per ogni* $x \in R$.

iii) *esiste un numero* $\rho>0$ *tale che la serie converge per* $x \in]x_0-\rho, x_0+\rho[$ *e non converge per* x *tale che* $|x-x_0| > \rho$.

La quantità ρ prende il nome di **raggio di convergenza** della serie di potenze. Inoltre se si verifica il caso i) si dice che il raggio di convergenza è zero, mentre nel caso ii) il raggio di convergenza è $+\infty$. In ogni caso se il raggio di convergenza ρ è positivo l'intervallo $]x_0-\rho, x_0+\rho[$ prende il nome di **intervallo di convergenza**.

Consideriamo l'insieme H degli $h\geq 0$ tali che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|h^n \tag{16}$$

risulti convergente e poniamo $\rho=\sup H$. Se $\rho=0$ la serie (15) non converge per alcun valore $x\neq x_0$; infatti, in caso contrario, in base alla prop. 11, la serie (16) convergerebbe per ogni $h<|x-x_0|$ il che è assurdo in quanto la serie (16) non converge per alcun valore positivo di h. Se $\rho=\sup H = +\infty$, fissato $x\neq x_0$ esiste un $h\in H$ tale che $h>|x-x_0|$. La serie (16) converge per tale valore di h; quindi converge anche la serie (15) nel punto x fissato essendo $|a_n||x-x_0|^n \leq |a_n|h^n$. Sia infine ρ una quantità positiva (caso iii)). Se $x\in]x_0-\rho, x_0+\rho[$, per le proprietà dell'estremo superiore, esiste un punto $\bar{x}$, con $|x-x_0| < \bar{x}-x_0 \leq \rho$, per cui converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(\bar{x}-x_0)^n$: ciò implica che converge anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Se invece $|x-x_0|>\rho$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ non può convergere altrimenti, per la prop. 11, dovrebbe convergere la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|h^n$ con h tale che $\rho<h<|x-x_0|$; ma ciò è assurdo data la definizione di ρ.

Osserviamo che dalla prop. 11 si deduce anche che la convergenza della serie (15) è totale in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto nell'intervallo di convergenza.

Per individuare quindi l'insieme di convergenza di una serie di potenze è necessario calcolare il relativo raggio di convergenza. A tale proposito risulta decisivo il seguente risultato noto come teorema di Cauchy-Hadamard:

PROPOSIZIONE 13. *Sia l il massimo limite della successione* $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$*; allora il raggio di convergenza della serie (15) é* $1/l$ *con ovvio significato del simbolo quando* $l=0$ *ovvero* $l=+\infty$.

Se x é tale che $|x-x_o|<1/l$, con $l\neq+\infty$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}'' \sqrt[n]{|a_n||x-x_o|^n} = |x-x_o| \lim_{n\to+\infty}'' \sqrt[n]{|a_n|} = |x-x_o|\, l<1.$$

Dal criterio della radice (cfr. 2, Cap. VII) discende che per tali valori di x la serie di potenze (15) converge assolutamente.
Sia $|x-x_o|>1/l$, ovvero

$$\lim_{n\to+\infty}'' \sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|x-x_o|}\ ;$$

per una proprietà del massimo limite (cfr. 6, Cap. VII, prop. 12, proprietà (β)) esistono infiniti indici n per quali si ha

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|x-x_o|}$$

ovvero $|a_n||x-x_o|^n>1$. La serie di potenze (15) non può allora convergere per tali valori di x non essendo infinitesima la successione il cui termine generale é $|a_n||x-x_o|^n$.

Come immediata conseguenza della prop. 13 si ottiene:

PROPOSIZIONE 14. *Se si ha*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = r \tag{17}$$

allora r *é il raggio di convergenza della serie di potenze (15).*

Basta osservare che se vale la (17) si ha anche

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r} ;$$

il risultato discende allora dal teorema di Cauchy-Hadamard.

ESEMPI

1) La classica serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é un esempio di serie di potenze di punto iniziale zero. In base alla prop. 14 il suo raggio di convergenza é, ovviamente, 1.

2) Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

sempre per la prop. 14 tale serie di potenze ha raggio di convergenza $+\infty$. La somma di tale serie, come vedremo più avanti, é la funzione esponenziale e^x.

3) La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

ha raggio di convergenza nullo; la serie quindi converge solo per $x=0$.

Sul comportamento di una serie di potenze agli estremi dell'intervallo di convergenza nulla puó dirsi in generale; utile peró risulta il seguente risultato noto come teorema di Abel.

PROPOSIZIONE 15. *Se la serie di potenze (15) converge in un estremo α dell'intervallo di convergenza allora la serie converge uniformemente in ogni intervallo chiuso uno dei cui estremi coincide con α mentre l'altro è interno all'intervallo di convergenza.*

Con una trasformazione della variabile x ci si può ricondurre ad una serie di potenze di punto iniziale 0 e raggio di convergenza 1. La serie (15) diventa allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad . \tag{18}$$

Supponiamo per semplicità che la serie (18) sia convergente nell'estremo 1 dell'intervallo di convergenza: ciò implica che risulta convergente la serie numerica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Poniamo

$$r_{n,k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} ;$$

fissato $\varepsilon>0$, esiste un indice ν tale che per ogni $n>\nu$ e per ogni $k\in N$ risulta $|r_{n,k}|<\varepsilon$. Sia $x\in[0,1]$; si ha

$$\begin{aligned}\rho_{n,h} &= a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots + a_{n+h-1}x^{n+h-1} + a_{n+h}x^{n+h} = \\ &= r_{n,1}x^{n+1} + (r_{n,2}-r_{n,1})\,x^{n+2} + \ldots + (r_{n,h-1}-r_{n,h-2})\,x^{n+h-1} + (r_{n,h}-r_{n,h-1})\,x^{n+h} = \\ &= r_{n,1}(x^{n+1}-x^{n+2}) + r_{n,2}(x^{n+2}-x^{n+3}) + \ldots + r_{n,h-1}(x^{n+h-1}-x^{n+h}) + r_{n,h}x^{n+h}\end{aligned}$$

Pertanto si ha

$$\begin{aligned}|\rho_{n,h}| &\le \\ \le |r_{n,1}|(x^{n+1}-x^{n+2}) &+ |r_{n,2}|(x^{n+2}-x^{n+3}) + \ldots + |r_{n,h-1}|(x^{n+h-1}-x^{n+h}) + |r_{n,h}|x^{n+h} \le \\ &\le \varepsilon x^{n+1} \le \varepsilon\end{aligned}$$

da cui l'uniforme convergenza in $[0,1]$. L'uniforme convergenza in ogni intervallo $[c,1]$ con $-1<c<0$ segue poi in modo ovvio utilizzando il fatto che la convergenza della serie di potenze è totale e quindi uniforme in ogni intervallo chiuso contenuto nell'intervallo di convergenza.

Come conseguenza del teorema di Abel e della proposizione 4 si ha:

PROPOSIZIONE 16. *Sia f la somma della serie di potenze (15) e sia α l'estremo dell'intervallo di convergenza in cui tale serie converge; allora si ha*

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (a-x_0)^n \ . \tag{19}$$

5. Sviluppabilità in serie di Taylor

Cominciamo ad enunciare il seguente risultato relativo alla integrazione e derivazione termine a termine di una serie di potenze:

PROPOSIZIONE 17. *Supponiamo che la serie di potenze (15) abbia raggio di convergenza $\rho>0$ e sia f la sua somma; si ha allora per ogni x appartenente all'intervallo di convergenza.*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \ , \tag{20}$$

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} \ . \tag{21}$$

Inoltre le serie di potenze a secondo membro nelle (20) e (21) hanno entrambe raggio di convergenza ρ.

È evidente che basta verificare che la serie di potenze (15) e quelle a secondo membro nelle (20) e (21) hanno lo stesso raggio di convergenza: in tal caso infatti i risultati ottenuti nei precedenti paragrafi consentono di integrare e derivare termine a termine e quindi ottenere le formule (20) e (21).

In base alla prop. 7, fissato $x \in \,]x_0-\rho, x_0+\rho[$, è possibile integrare la (15) termine a termine tra x_0 ed x ottenendo in tal modo la (21). Pertanto, se ρ_i denota il raggio di convergenza della serie (21), risulta $\rho_i \le \rho$.

Si consideri ora la serie (20); se $x \neq x_0$ è un punto interno all'intervallo di convergenza della serie (15), risulta

$$n|a_n||x-x_0|^{n-1} = \frac{|a_n|}{|x-x_0|}\left(\sqrt[n]{n}\,|x-x_0|\right)^n .$$

Fissato $c \in]|x-x_0|, \rho[$, essendo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ risulta definitivamente $\sqrt[n]{n}\,|x-x_0| < c$ e quindi anche, sempre definitivamente,

$$n|a_n||x-x_0|^{n-1} \le \frac{|a_n|}{|x-x_0|} c^n . \tag{22}$$

Essendo $c<\rho$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_0|c^n$ converge; per la (22) converge anche la serie il cui termine generale è $n|a_n||x-x_0|^{n-1}$ e quindi la serie a secondo membro nella (20). Pertanto se si denota con ρ_d il raggio di convergenza della serie (20), si ha $\rho_d \ge \rho$.

Quanto sopra detto ci consente di affermare che le serie di potenze che si ottengono formalmente derivando ed integrando termine a termine una serie di potenze hanno raggi di convergenza non inferiori al raggio di convergenza della serie stessa. Poiché d'altra parte la serie (15) si ottiene derivando termine a termine la serie (21), ovvero integrando termine a termine tra x_0 e x la serie (20) e aggiungendo il termine a_0, si ha in definitiva $\rho_i = \rho = \rho_d$. La dimostrazione è pertanto completa.

Se si applica ripetutamente la (20) si ottiene che la somma $f(x)$ della serie di potenze (15) ha derivate di ogni ordine e che tali derivate si ottengono derivando più volte termine a termine la serie di potenze iniziale. In particolare si ha

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \ldots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \ldots$$
$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3(x-x_0) + \ldots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = n!a_n + [(n+1)\ldots 2]a_{n+1}(x-x_0)\ldots +$$
$$+[(n+k)\ldots(k+1)]a_{n+k}(x-x_0)^k + \ldots$$

da cui

$$f^{(n)}(x_0) = n!a_n \ . \tag{23}$$

La formula (23) ci consente di scrivere la serie di potenze (15) nella forma seguente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \ . \tag{24}$$

La serie a secondo membro nella (24) prende il nome di **serie di Taylor di f** di punto iniziale x_0 o anche serie di **MacLaurin** se $x_0 = 0$. Osserviamo esplicitamente che per ogni funzione che sia dotata di derivate di ogni ordine è possibile scrivere la relativa serie di Taylor. Non è detto però che la serie di Taylor di tale funzione ha per somma la funzione stessa in un intorno del punto iniziale. Se ciò si verifica si dice che f è sviluppabile in serie di Taylor.

Il seguente esempio mostra un caso di una funzione f la cui serie di MacLaurin non ha per somma la funzione f in alcun intorno di 0.

ESEMPIO 7. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

È facile verificare che $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in N$; quindi la serie di MacLaurin di f è la serie identicamente nulla. Essendo $f(x) \neq 0$ per ogni $x \neq 0$ la funzione f non è sviluppabile in serie di MacLaurin.

Per riconoscere se una funzione è sviluppabile in serie di Taylor risulta utile il seguente criterio:

PROPOSIZIONE 18. *Supponiamo che in un intorno* I *di* x_0 *risulti*

$$|f^{(k)}(x)| \leq Mh^k \qquad \forall k \in N \tag{25}$$

con M, h costanti positive; allora l'identità (24) sussiste per ogni $x \in I$. In particolare tale conclusione sussiste se la funzione f ha derivate equilimitate in I se cioè si ha

$$(26) \qquad |f^{(k)}(x)| \le M \qquad \forall k \in N .$$

Applichiamo ad f la formula di Taylor di ordine n, punto iniziale x_0 e resto di Lagrange

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

con ξ compreso tra x ed x_0. Dalla (25) si ha

$$(27) \qquad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| \le M \frac{[h|x-x_0|]^{(n+1)}}{(n+1)!} .$$

Essendo la successione numerica a secondo membro nella (27) infinitesima al divergere di n si ottiene il risultato.
È lecito chiedersi se una funzione per la quale sussista l'identità (24) per ogni x appartenente ad un intorno I di x_0 sia sviluppabile in serie di Taylor di un punto iniziale x_1 dove x_1 è un generico punto di I. La risposta a tale quesito è affermativa; ne tralasciamo però la dimostrazione.

6. Sviluppi notevoli

Cominciamo considerando la classica funzione esponenziale. Tale funzione ha derivate di ogni ordine, tutte uguali a e^x: tali derivate risultano equilimitate in ogni intervallo limitato. In base alla prop. 18 (cfr. (26)) la funzione esponenziale, per ogni $x_0 \in R$, è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0. In particolare il suo sviluppo in serie di MacLaurin è:

$$(28) \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in R .$$

Analogo discorso può essere fatto in relazione alle funzioni trigonometriche seno e coseno; si ha pertanto

(29) $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

(30) $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Otterremo ora altri sviluppi notevoli prendendo le mosse dalla classica serie geometrica

(31) $$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \forall x \in]-1,1[.$$

Cambiando nella (31) x in $-x$ si ottiene

(32) $$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad \forall x \in]-1,1[.$$

Integrando la (32) tra 0 e x si ha

(33) $$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \qquad \forall x \in]-1,1[.$$

La serie a secondo membro nella (33) converge nell'estremo 1 dell'intervallo di convergenza per il classico criterio di Leibnitz (cfr. Cap. VIII, 3, Osservazione 4). Pertanto per la propo. 16 (cfr. (19)) l'uguaglianza (33) sussiste anche per x=1. Si ottiene in tal modo la classica identità

(34) $$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \ldots .$$

Posto x^2 al posto di x nella (31), integrando termine a termine tra 0 e x, si ottiene il seguente sviluppo

(35) $$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right) \qquad \forall x \in]-1,1[\, .$$

Ponendo nella (31) $-x^2$ al posto di x si ha

(36) $$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots \qquad \forall x \in]-1,1[$$

da cui integrando

(37) $$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad \forall x \in]-1,1[\, .$$

Poiché la serie a secondo membro nella (37) converge per $x=1$, ragionando come nel caso della (34) si ottiene la seguente identità

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \ldots \, .$$

Consideriamo ora la funzione $(1+x)^\alpha$ con α numero reale. Si ha

$$\frac{d^k}{dx^k}(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \, .$$

Quindi, posto

(38) $$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$

la serie di MacLaurin di $(1+x)^\alpha$ si scrive nella forma seguente

(39) $$1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + \ldots \, .$$

La serie (39) prende il nome di serie binomiale. Si osservi che se α è un intero positivo e $0\leq k\leq\alpha$ le quantità (38) sono i classici coefficienti binomiali; in tal caso la serie (39) si riduce al polinomio che si ottiene dalla formula del binomio di Newton. Poiché

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha-n|}{n+1} = 1$$

la serie (39) ha raggio di convergenza 1. Sia f la somma della serie (39) in $]-1,1[$; per la prop. 17 (cfr. (20)) si ha

$$f'(x) = \binom{\alpha}{1} + 2\binom{\alpha}{2}x + \ldots + n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} + \ldots \ .$$

D'altra parte

$$n\binom{\alpha}{n} = \alpha\binom{\alpha-1}{n-1} \ ,$$

quindi risulta

$$\frac{1}{\alpha}f'(x) = 1 + \binom{\alpha-1}{1}x + \binom{\alpha-1}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha-1}{n}x^n + \ldots \ .$$

Moltiplicando primo e secondo membro per $(1+x)$ si ha

$$\frac{1}{\alpha}f'(x)(1+x) = 1 + \left[1 + \binom{\alpha-1}{1}\right]x +$$

$$+ \left[\binom{\alpha-1}{1} + \binom{\alpha-1}{2}\right]x^2 + \ldots + \left[\binom{\alpha-1}{n-1} + \binom{\alpha-1}{n}\right]x^n + \ldots \ .$$

Essendo

$$\binom{\alpha-1}{n-1} + \binom{\alpha-1}{n} = \binom{\alpha}{n} ,$$

in definitiva si ha

$$\frac{1}{\alpha} f'(x)(1+x) = f(x)$$

da cui

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}} = 0 \ .$$

Pertanto

$$\frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}} = f(0) = 1$$

ovvero $f(x) = (1+x)^{\alpha}$. La funzione $(1+x)^{\alpha}$ è allora sviluppabile in serie di MacLaurin nell'intervallo $]-1,1[$; si ha cioè

(40) $$(1+x)^{\alpha} = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \ldots \ .$$

Per $\alpha = 1/2$ la (40) diventa

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}\frac{3}{4} x^2 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2}\frac{3}{4} \ldots \frac{2n-1}{2n} x^n + \ldots \ .$$

Ponendo $-x^2$ al posto di x si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{4} x^4 + \ldots + \frac{1}{2}\frac{3}{4} \ldots \frac{2n-1}{2n} x^{2n} + \ldots \ .$$

e integrando tra 0 e x

(41) $$\operatorname{arcsen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

dove con il simbolo $k!!$ si intende il prodotto di tutti i naturali non superiori a k che abbiano la stessa parità di k. Poiché la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} \tag{42}$$

è convergente, utilizzando la prop. 16, si ha che la serie (22) ha per somma $\operatorname{arcsen} 1 = \pi/2$. Inoltre per il teorema di Abel (cfr. prop. 15) la serie (41) converge uniformemente in tutto l'intervallo chiuso $[-1,1]$.

Complementi ed esercizi

6.1. Ponendo nella (28) $x=1$ si ottiene

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} .$$

Tale formula permette di dimostrare che e è un numero reale irrazionale. Infatti se fosse $e=p/q$ con p,q interi si avrebbe

$$q!\, e = \sum_{n=0}^{q} q! \frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} q! \frac{1}{n!} . \tag{*}$$

Poiché $q!\, e = q! \frac{p}{q} = (q-1)!\, p$ e inoltre, se $n \le q$, $\frac{q!}{n!}$ è un intero, deve essere intero anche l'ultimo termine di (*) cioè $\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!}$.
D'altra parte si ha

$$0 < \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots + \frac{1}{(q+1)\ldots(q+k)} +$$
$$+ \ldots < \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^k + \ldots = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

e quindi un assurdo non essendoci alcun intero nell'intervallo]0,1[.

6.2. Scrivere, facendo uso della (29), gli sviluppi in serie di MacLaurin delle funzioni senhx e coshx.

6.3. Scrivere gli sviluppi in serie di MacLaurin delle funzioni

$$\frac{\operatorname{sen}x}{x}, \quad \frac{1-\cos x}{x^2},$$

7. La funzione esponenziale nel campo complesso

Premettiamo alcune considerazioni sulle serie a termini complessi

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \tag{43}$$

dove $\{z_n\}$ è una successione di numeri complessi. Si può ovviamente dare in modo naturale una definizione di convergenza per la serie (43): diremo infatti che un numero complesso z è la somma della serie (43) se risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k = z \ .$$

In modo analogo si dice che la serie (43) è **assolutamente convergente** se è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \ .$$

Posto $z_n = a_n + ib_n$ è facile verificare che la serie (43) converge se e solo se convergono le serie a termini reali $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; inoltre essendo

$$|a_n|,\ |b_n| \le |z_n| \le |a_n| + |b_n|$$

la serie (43) converge assolutamente se e solo se convergono assolutamente le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Per le serie a termini complessi valgono ovviamente tutte le proprietà enunciate nel Cap. VIII per le serie a termini reali convergenti.

Consideriamo la seguente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{44}$$

con z numero complesso. È noto che la serie (44) converge per ogni $x \in R$ ed ha per somma e^x (cfr. (28)). È inoltre evidente che la serie (44) converge assolutamente per ogni $z \in C$. Ha senso quindi la seguente posizione che estende la funzione esponenziale a tutto il campo complesso:

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad z \in C \ . \tag{45}$$

La posizione (45) si giustifica, oltre che per le ragioni appena esposte, anche per il fatto che tale funzione eredita tutte le proprietà formali della classica funzione esponenziale nel campo reale; si ha

$$e^{z+w} = e^z e^w \qquad z, w \in C \ . \tag{46}$$

Infatti usando il classico risultato relativo al prodotto secondo Cauchy di due serie assolutamente convergenti (cfr. Cap. VIII, 3, es. 3.3), si ha

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!\,(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} z^k w^{n-k} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = e^{z+w}$$

da cui la (46). In particolare si ha

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right)$$

da cui, tenendo presente gli sviluppi (29) e (30),

(47) $$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \;;$$

la formula (47) è nota come **formula di Eulero**. Dalla (47) si ottengono le seguenti ulteriori formule che permettono di esprimere il seno ed il coseno mediante la funzione esponenziale

$$\operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \qquad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad .$$

Si ha inoltre

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} e^{iy} = e^{x} (\cos y + i \operatorname{sen} y) \; .$$

CAPITOLO XIV

CENNI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

§ 1 - Introduzione

Consideriamo un "punto materiale" di massa m su cui agisca la sola forza peso $\vec{P}$: supponiamo, per esempio, che tale punto abbia all'istante iniziale $t=0$ velocità nulla; esso si muove allora lungo una retta orientata $\vec{r}$ parallela al vettore $\vec{P}$ (cfr. fig. 1).
Se s(t) è la funzione che rappresenta la "legge oraria" del moto del punto materiale, ricordato che s"(t) è l'accelerazione, il moto del punto si evolve secondo la classica legge di Newton

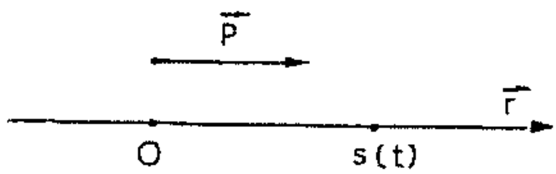


fig. 1

$$s''(t) = g \tag{1}$$

dove g rappresenta l' "accelerazione di gravità"; la (1) è un esempio di *equazione differenziale*. Con tale locuzione più in generale si intende una relazione del tipo

$$(2) \qquad F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0,$$

nella funzione incognita $x(t)$, dove F è una opportuna funzione definita in un sottoinsieme di R^{n+2}(1). Se l'equazione (2) può essere scritta nella forma

$$(3) \qquad x^{(n)} = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t))$$

si dice che la (3) è un'*equazione differenziale in forma normale di ordine* n.

Per *soluzione della* (2) (o *della* (3)) si intende una funzione $x(t)$ continua con le sue prime n derivate in un intervallo I e che per ogni $t \in I$ soddisfa la (2) (o la (3)).
Ritornando alla (1) si verifica facilmente che le soluzioni di tale equazione differenziale sono del tipo

$$(4) \qquad s(t) = \frac{1}{2} g t^2 + c_1 t + c_2$$

con c_1, c_2 costanti reali arbitrarie. Quindi l'equazione (1) da sola non è in grado di individuare la legge oraria del moto del punto materiale; per raggiungere tale obiettivo abbiamo bisogno di ulteriori

---

(1) Ricordiamo che R^{n+2} è il prodotto cartesiano di RxRx...xR (n+2)volte.

informazioni che ci permettano di precisare i valori delle costanti c_1, c_2 nella (4). Ciò può essere fatto per esempio, assegnando la posizione del punto materiale in due diversi istanti; se, a titolo di ulteriore esemplificazione, è noto che

$$(4)' \qquad s(0) = -1 \quad , \qquad s(1) = 0$$

la legge oraria del moto è allora $s(t) = \frac{1}{2} gt^2 + (1 - \frac{g}{2})t - 1$.

Più in generale, se il punto materiale è soggetto ad una forza $\vec{f}$ la cui direzione è fissa (è, per esempio, parallela alla retta $\vec{r}$ della fig. 1) ma la cui intensità f dipende dal tempo t, dalla posizione del punto s(t) e dalla sua velocità s'(t), e se allo istante iniziale t=0 il vettore velocità del punto è parallelo alla retta $\vec{r}$, allora la (1) va sostituita con la seguente equazione differenziale

$$(5) \qquad s''(t) = \frac{1}{m} f(t, s(t), s'(t)) \ .$$

Ovviamente, come nel caso della (1), la (5) da sola non basta a descrivere compiutamente il moto del punto materiale. Per ottenere ciò è necessario collegare la (5) ad altre condizioni ma su ciò ci sofferemo nel prossimo paragrafo. Vogliamo qui ancora osservare che, da ultimo, se il punto materiale è soggetto ad una forza $\vec{f}$ variabile non solo in intensità ma anche in direzione, cioè da una forza $\vec{f}$ le cui componenti sono

$f_1(t,x(t),y(t),z(t),x'(t),y'(t)z'(t))$,
$f_2(t,\dots,z'(t)),f_3(t,\dots,z'(t))$

dove $(x(t),y(t),z(t))$ è la posizione occupata nello spazio tridimensionale R^3 dal punto materiale all'istante t e $(x'(t),y'(t),z'(t))$ è il vettore velocità, la legge di Newton comporta allora

$$(6)\qquad \begin{cases} mx''(t) = f_1(t,x(t),\dots,z'(t)) \\ my''(t) = f_2(t,x(t),\dots,z'(t)) \\ mz''(t) = f_3(t,x(t),\dots,z'(t)) \end{cases} .$$

Il complesso di equazioni (6) è un esempio di "sistema di equazioni differenziali".

In conclusione lo studio del moto di un punto materiale ("dinamica" del punto materiale) è in qualche modo ricondotto allo studio di particolari equazioni o sistemi di equazioni differenziali. Questa considerazione (ma non è la sola!) sottolinea l'importanza che rivestono le equazioni differenziali e, nell'ambito di tale teoria, quei metodi che permettono di determinarne le soluzioni (esatte o approssimate). In tale capitolo e, in parte, nel prossimo, daremo i primi cenni di tale teoria rimandando a corsi successivi per uno studio più approfondito.

Complementi ed esercizi

1.1 - Se poniamo

$$x(t)=x_1(t),\ x'(t)=x_2(t),\ldots,x^{(n-1)}(t)=x_n(t)$$

l'equazione differenziale (3) si trasforma nel seguente sistema di equazioni differenziali

$$(3)'\qquad \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \ldots\ldots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t,x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)) . \end{cases}$$

Più in generale si chiama *sistema di equazioni differenziali del I ordine* un sistema del tipo

$$(3)''\qquad \begin{cases} x_1' = f_1(t,x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)) \\ x_2' = f_2(t,x_1(t),\ldots\ldots\ldots,x_n(t)) \\ \ldots\ldots \\ x_n' = f_n(t,x_1(t),\ldots\ldots\ldots,x_n(t)) \end{cases}$$

con $f_1,f_2,\ldots,f_n$ funzioni definite in un sottoinsieme di R^{n+1}. Si dice *soluzione* di (3)" ogni n-pla $(x_1(t),\dots x_n(t))$ di funzioni continue con le loro derivate prime in un intervallo I che per ogni $t \in I$ soddisfano il sistema (3)". E' chiaro che un qualsiasi sistema di equazioni differenziali, quale per esempio il sistema (6), può con un opportuno artificio essere riscritto come un sistema di equazioni differenziali del I ordine.

1.2 - Consideriamo l'equazione differenziale $y''+y=0$. Verificare che le funzioni

$$y(t) = c_1 \text{sen } t + c_2 \cos t$$

sono soluzioni dell'equazione. Verificare inoltre che le seguenti condizioni, analoghe alla (4)',

$$y(0) = 0 \qquad\qquad y(\pi) = 0$$

non individuano in modo univoco la soluzione dell'equazione.

§ 2 - Il problema di Cauchy

Nel precedente capitolo abbiamo affrontato il problema dell'esistenza di una primitiva di una funzione $f(t)$ continua in un intervallo $[a,b]$, cioè della esistenza di una funzione $y(t)$ tale che

$$(7) \qquad y'(t) = f(t) \qquad t\in[a,b] .$$

La (7) è un esempio, il più semplice, di equazione differenziale del primo ordine. Abbiamo visto che le soluzioni di (7) sono date dalla formula

$$(8) \qquad y(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds + c$$

dove t_0 è un punto (fissato) dell'intervallo $[a,b]$ e c è una costante arbitraria. Quindi (7) ha infinite soluzioni; per selezionare una tra tali infinite soluzioni è necessario affiancare alla (7) una "condizione iniziale" del tipo

$$(7)' \qquad y(t_0) = y_0 \qquad y_0\in R .$$

Infatti in tal caso segue immediatamente che l'unica soluzione di (7) che verifichi la condizione (7)' si ottiene ponendo $c = y_0$ nella (8).

Se ora consideriamo una generica equazione differenziale del primo ordine in forma normale

$$(9) \qquad y'(t) = f(t,y(t))$$

è lecito chiedersi se, affiancando alla (9) la *condizione iniziale* (7)', il seguente *problema di Cauchy* relativo all'equazione differenziale (9)

$$
(10) \qquad \begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}
$$

ammetta una e una sola soluzione. La risposta a tale quesito è affermativa purchè la funzione f(t,y) verifichi le ipotesi qui appresso elencate:

H_1) la funzione f(t,y) sia definita nella "striscia" S di R^2 individuata dalle seguenti limitazioni

$$S = \{(t,y) \in R^2 : a \leq t \leq b, \quad y \in R\} \; ;$$

H_2) ("Continuità" di f) se $(t_0, y_0) \in S$ e se $\{t_n\}, \{y_n\}$, sono due successioni convergenti rispettivamente a t_0 e y_0 allora

$$\lim_{n \to \infty} f(t_n, y_n) = f(t_0, y_0) \quad ;$$

H_3) comunque si fissi $t \in [a,b]$ la funzione della sola y

$$\psi_t(y) = f(t,y)$$

sia derivabile e risulti

$$(11) \qquad |D\psi_t(y)| < L \qquad \forall t\in[a,b] \quad \forall y\in R,$$

con L costante opportuna. La derivata di $\psi_t(y)$ si indica anche con uno dei seguenti simboli

$$f_y(t,y) \;, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)$$

e si chiama "derivata parziale" di f rispetto alla variabile y.

Ciò premesso, sussiste il seguente

TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITA' - *Nelle ipotesi* H_1) H_2), H_3) *il problema di Cauchy* (10) *ammette un'unica soluzione* y(t) *definita in tutto l'intervallo* [a,b].

OSSERVAZIONE 1 - Si dice che f(t,y) è *Lipschitziana rispetto a* y, *uniformemente rispetto a* $t\in[a,b]$, se esiste una costante positiva L' tale che

$$(11)' \qquad |f(t,y)-f(t,y')| \leq L'|y-y'|$$

$$\forall t\in[a,b] \qquad (y,y')\in R^2 .$$

Si verifica facilmente, facendo uso del teorema di Lagrange (cfr. Cap. IX, § 5), che (11) implica (11)'. E' da rilevare che nell'enunciato del precedente teorema l'ipotesi H_3) con la condizione (11) può essere sostituita dalla più generale condizione (11)'

Dobbiamo qui rinunciare alla dimostrazione della esistenza della soluzione del problema di Cauchy(10); ci limitiamo a provarne l'unicità.

Siano $y_1(t)$, $y_2(t)$ due soluzioni di (10):

$$y_i' = f(t,y_i(t)) \qquad y_i(t_0)=y_0 \qquad i = 1,2 .$$

Se integriamo tra t_0 e t otteniamo

$$(12) \qquad y_i(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y_i(s))ds \qquad i = 1,2 .$$

Mostriamo che $y_1(t)= y_2(t)$ in $[t_0,b]$; in modo analogo si ragiona se $t\in[a,t_0]$. A tale scopo dividiamo lo intervallo $[t_0,b]$, mediante i punti $t_0<t_1<\dots<t_n=b$, in n intervallini parziali ognuno dei quali abbia ampiezza minore di $1/L'$, dove L' è la costante che compare nella (11)':

$$|t_{i+1}-t_i| < \frac{1}{L'} \qquad i=0,1,\dots,n-1 .$$

Se $t\in[t_0,t_1]$ da (12) si ha

$$|y_1(t)-y_2(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s)|ds \leq$$

$$\leq L' \int_{t_0}^{t} |y_1(s)-y_2(s)|ds \leq L' \int_{t_0}^{t_1} |y_1(s)-y_2(s)|ds$$

$$\leq L'(t_1-t_0) \max_{[t_0,t_1]} |y_1(s)-y_2(s)|;$$

ne segue:

$$\max_{[t_0,t_1]} |y_1(t)-y_2(t)| \leq$$

$$L'(t_1-t_0)\max_{[t_0,t_1]} |y_1(t) - y_2(t)|.$$

Poichè $L'(t_1-t_0) < 1$ dovrà necessariamente essere $\max_{[t_0,t_1]} |y_1(t)-y_2(t)| = 0$, e quindi

$$y_1(t) = y_2(t) \qquad \forall t\in[t_0,t_1] \,. \tag{13}$$

Se $t\in[t_1,t_2]$ procedendo come sopra si ha

$$|y_1(t)-y_2(t)| \leq L'\int_{t_0}^{t} |y_1(s)-y_2(s)|ds =$$

$$= L' \int_{t_0}^{t_1} |y_1(s)-y_2(s)|ds +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} |y_1(s)-y_2(s)|ds = (\text{per la } (13))$$

$$= L' \int_{t_1}^{t} |y_1(s)-y_2(s)|ds \ .$$

Ne segue

$$\max_{[t_1,t_2]} |y_1(t)-y_2(t)| \le L'|t_2-t_1| \max_{[t_1,t_2]} |y_1(t)-y_2(t)| ;$$

ragionando come nel caso precedente si ottiene $y_1(t)=$ $= y_2(t)$ in $[t_1,t_2]$. Così procedendo si otterrà $y_1(t)=$ $= y_2(t)$ in ogni intervallo $[t_i,t_{i+1}]$ e, quindi, in $[t_o,b]$.

Più in generale consideriamo l'equazione differenziale in forma normale di ordine n

$$y^{(n)} = f(t,y(t),y'(t),\dots,y^{(n-1)}(t)) .$$

Supponiamo che $f(t,y_1,\dots,y_n)$ verifichi ipotesi analoghe alle condizioni $H_1)$, $H_2)$, $H_3)$ o (11)', cioè

- f sia definita in uno "strato" $S\subset R^{n+1}$

$$S=\{(t,y_1,\dots,y_n) \ : \ a\le t\le b \ , \ \ y_i \in R\} \ ;$$

- f è "continua" in S (la definizione di "continuità" può essere facilmente ricostruita dal lettore a partire dall'analoga definizione contenuta in H_2));

- f è Lipschitziana rispetto alle variabili y_i, ovvero f è dotata di "derivate parziali", rispetto alle variabili y_i, limitate in S. Ovviamente per derivata parziale di f rispetto, per esempio, alla variabile y_1 si intende la derivata in senso ordinario della funzione della sola variabile y_1

$$\psi(y_1) = f(t, y_1, y_2, \dots y_n)$$

ottenuta considerando fissati i valori delle variabili t, $y_2, \dots y_n$. Al solito tali derivate parziali si indicano con il simbolo $f_{y_1}, f_{y_2}, \dots, f_{y_n}$

Se sono verificate tali ipotesi, il *problema di Cauchy*

$$(14) \quad \begin{cases} y^{(n)} = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ y(t_0)=y_0, \; y'(t_0)=y_0', \dots, y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $y(x)$, *definita in* $[a,b]$, *comunque si scelgano* $t_0 \in [a,b]$ *e gli* n *valori reali* $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$.

A titolo esemplificativo il problema (14)per una equazione del II ordine diventa

$$(15) \quad \begin{cases} y'' = f(t, y(t), y'(t)) \\ y(t_0)=y_0 \;, \quad y'(t_0)= y_0' \;. \end{cases}$$

Se l'equazione che compare in (15)rappresenta la equazione del moto di un punto materiale lungo una retta quanto abbiamo appena affermato mette in risalto il cosiddetto "carattere deterministico delle leggi della meccanica": cioè la "storia" del moto di un punto materiale è nota non appena si conosce la posizione e la velocità del punto in un opportuno istante.

Complementi ed esercizi

2.1 - Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$y' = 2\sqrt{y} \qquad , \qquad y(0) = 0 \ .$$

Verificare che tale problema ammette come soluzioni $y_1=0$, $y_2=x^2$ nonchè tutte le funzioni

$$y^{(\varepsilon)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 < t < \varepsilon \\ (t-\varepsilon)^2 & \text{se} \quad \varepsilon \leq t \quad . \end{cases}$$

Quali ipotesi del teorema di esistenza ed unicità vengono meno?.

2.2 - Verificare che la funzione $\sqrt{c^2-t^2}$ è soluzione del seguente problema di Cauchy

$$y' = -\frac{t}{y} \qquad y(0)= |c| .$$

Tale esempio mostra che l'insieme in cui è definita una soluzione può dipendere dal dato iniziale se non sono verificate tutte le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità.

2.3 - Verificare che le funzioni $y = -\frac{1}{t+c}$ sono soluzioni dell'equazione differenziale $y' = y^2$. Tali funzioni non sono definite in tutto R nè nello stesso insieme. Quale ipotesi del teorema di esistenza ed unicità non è verificata?

2.4 - Consideriamo il sistema di equazioni differenziali del I ordine (3)". Le condizioni iniziali per un problema di Cauchy relativo ad un tale sistema si scrivono nella seguente forma

$$x_1(t_0)=x_1^0,\ x_2(t_0)=x_2^0, \ldots\ldots, x_n(t_0)=x_n^0 .$$

Alla luce di quanto detto nell'es. 1.1 scrivere, un sistema di condizioni iniziali per il sistema(6).

§ 3 - Equazioni differenziali del primo ordine

Vogliamo occuparci in tale paragrafo di alcune classi di equazioni differenziali del primo ordine le cui soluzioni possono essere ottenute mediante il calcolo di un numero finito di integrali.

a) EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI: $y'=f(t)g(y)$.

Si suppone che f, g siano funzioni continue rispettivamente in I, J essendo I, J due intervalli. Supponiamo inoltre, in un primo momento, $g(y)\neq 0$ in J. Se y(t) è una soluzione dell'equazione differenziale dividendo per g(y(t)) si ha

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)$$

da cui, integrando ambo i membri

$$\int f(t)dt = \int \frac{y'(t)}{g(y(t))}\, dt = \left[\int \frac{dy}{g(y)}\right]_{y=y(t)} .$$

Dette allora G(y) e F(t), rispettivamente, una primitiva di $\frac{1}{g(y)}$ e una primitiva di f(t) si ha

$$c + F(t) = G(y(t))$$

con c costante. Poichè $G'(y)=\frac{1}{g(y)}\neq 0$, G'(y) ha segno costante, quindi G(y) è invertibile. Allora per y(t) si ha l'espressione

$$y(t) = G^{-1}(F(t)+c) .$$

Se si vuole che y(t) verifichi la condizione iniziale $y(t_0)=y_0$ basta scegliere c in modo tale che

$$y_0 = G^{-1}(F(t_0)+c) \iff c=G(y_0)-F(t_0) \ .$$

ESEMPIO - Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = t(1+y^2)$$

Dividendo per $1+y^2$ si ha $\dfrac{y'}{1+y^2} = t$, da cui integrando

$$\int t \, dt = \int \frac{y' dt}{1+y^2} \ .$$

Ne segue che

$$\frac{t^2}{2} + c = \operatorname{arctg} y \iff y(t)=\operatorname{tg}\left(\frac{t^2}{2} + c\right) \ .$$

Per comprendere cosa accade nel caso in cui $g(y)$ si annulla in qualche punto utilizziamo un esempio

(16) $$y' = - t(1-y)^2 \ .$$

Se si suppone $y \neq 1$ procedendo come nel caso precedente si ottiene la seguente famiglia di soluzioni

(17) $$y(t) = 1 + \frac{1}{\frac{t^2}{2} + c} \ .$$

Comunque si scelga un punto (t_0, y_0) con $y_0 \neq 1$ si può verificare che esiste un'unica funzione della famiglia (17) che verifica la condizione iniziale $y(t_0)=$ $= y_0$. Se invece $y_0 = 1$ non esiste alcuna funzione (17) che verifichi la condizione $y(t_0)=1$. D'altro canto la funzione costante $y(t) = 1$ soddisfa sia l'equazione (16) che la condizione iniziale assegnata. Quindi per ottenere tutte le soluzioni di (16) bisogna aggiungere alla famiglia (17) la funzione $y(t) = 1$.

b) EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI: $y'(t)+a(t)y(t) = f(t)$.

Se $a(t)$, $f(t)$ sono continue in un intervallo $[a,b]$ allora sono verificate tutte le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità enunciato nel precedente paragrafo. Quindi, fissato $t_0 \in [a,b]$, per ogni $y_0 \in R$ esiste un'unica soluzione $y(t)$, definita in $[a,b]$, del problema di Cauchy.

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t), \quad y(t_0)=y_0.$$

Determiniamone l'espressione. Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per $e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ ed osservato che

$$y'(t) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + a(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \cdot y(t) =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(y(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \right),$$

si ha

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\right) = f(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

Quindi risulta

$$y(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, e^{\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds}\, d\tau + c$$

con c costante arbitraria. Ne segue che tutte e sole le soluzioni dell'equazione data hanno la forma

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\left[c + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, e^{\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds}\, d\tau\right].$$

Ovviamente, ponendo $c=y_0$, si ottiene la soluzione che verifica anche la condizione iniziale $y(t_0)=y_0$.

Complementi ed esercizi.

3.1 - Risolvere le seguenti equazioni differenziali

i) $y'=ty$ [R. $y=c\,e^{\frac{t^2}{2}}$] ; ii) $y'=y\,\mathrm{tg}\,t$ [R. $y=\frac{c}{\cos t}$]

iii) $y' = te^{-y}$ [R. $y= \lg\left(\frac{t^2}{2} + c\right)$]

iv) $y'-ty=\frac{e^{t^2/2}}{t+1}$ [R. $y=e^{\frac{t^2}{2}}(c+\lg|t+1|)$]

v) $y'+y\,\mathrm{tg}\,t = \frac{2t\cos t}{t^2+1}$ [R. $y=\cos t(c+\lg(1+t^2))$] .

3.2 - Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

con f funzione continua. Introdotta una nuova funzione incognita $z(t)$ legata a y dalla relazione $z = \frac{y}{t}$ l'equazione diventa:

$$tz' + z = f(z)$$

che è un'equazione a variabili separabili. A titolo di esempio consideriamo l'equazione

$$y' = \frac{y}{t} + \frac{y^2}{t^2} .$$

Posto $z = y/t$ si ha $tz' = z^2$ da cui

$$z=-\left(\lg \frac{t}{c}\right)^{-1} \quad \text{ovvero} \quad y=-t\left(\lg \frac{t}{c}\right)^{-1} .$$

3.3 - Consideriamo l'equazione differenziale (*equazione* di Bernoulli)

$$y'+a(t)y = f(t)y^{\alpha} \qquad \alpha\in R-\{1\} .$$

Dividendo per y^{α}, posto $y^{1-\alpha} = z$, l'equazione data si trasforma nell'equazione differenziale lineare nella incognita z

$$\frac{1}{1-\alpha} z' + a(t)z = f(t) .$$

Usando tale tecnica trovare le soluzioni delle seguenti equazioni

$$y' + \frac{y}{t} = t\sqrt{y} \quad ; \qquad y'-y = e^t y^2 .$$

§ 4 - Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti

Consideriamo la seguente equazione differenziale del secondo ordine

$$(18) \qquad y'' = -cy \qquad c \in R .$$

Supponiamo in un primo momento $c > 0$; in tal caso la (18) rappresenta l'equazione del moto di un punto materiale su cui agisce una "forza elastica". E' facile verificare che le funzioni

$$y_1(t) = \text{sen } \sqrt{c}\ t \quad , \quad y_2(t) = \cos \sqrt{c}\ t$$

sono soluzioni di (18). Inoltre, ovviamente, ogni combinazione lineare di $y_1(t)$ e $y_2(t)$, cioè ogni funzione del tipo

$$(19) \qquad c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \qquad c_1, c_2 \in R$$

è ancora soluzione dell'equazione (18). Vogliamo far vedere che le funzioni (19) "esauriscono" tutte le possibili soluzioni dell'equazione (18). A tale scopo, osservato che l'equazione (18) verifica le ipotesi del teorema di esistenza e unicità, basta dimostrare che, detta $y(t)$ una soluzione di (18), è possibile determinare i valori delle costanti c_1, c_2 in modo che $y(t)$ e $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ verifichino le stesse condizioni iniziali in un opportuno punto $t_0 \in R$. Possiamo senz'altro porre $t_0 = 0$ dal momento che $y(t)$, sempre per il teorema di esistenza e unicità già citato, è definita in tutto R. Dobbiamo pertanto verificare che il seguente sistema lineare nelle incognite c_1 e c_2 ammette soluzione:

$$\begin{cases} c_1 y_1(0) + c_2 y_2(0) = y(0) \\ c_1 y_1'(0) + c_2 y_2'(0) = y'(0) \end{cases} ;$$

ciò è evidente dal momento che risulta (cfr.Cap. V, PROP.13)

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{c} & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{c} \neq 0.$$

Un'accurata analisi di quanto appena detto mostra che, se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono due soluzioni di(18) tali che in qualche punto $t_0 \in R$ il seguente determinante (detto *Wronskiano*)

$$(20) \qquad W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

risulti diverso da zero, allora ogni soluzione $y(t)$ di (18) si può esprimere come combinazione lineare di $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Tale proprietà delle soluzioni $y_1(t)$ e $y_2(t)$ va sotto il nome di *indipendenza*. Se invece il determinante (20) si annulla in qualche punto allora non tutte le soluzioni possono essere poste nella forma (19). Ciò ovviamente comporta che il determinante wronskiano di due soluzioni $y_1(t)$ e $y_2(t)$ o è identicamente nullo o non si annulla mai.

Sia ora $c < 0$. Cerchiamo le soluzioni di (18) della forma $y(t) = e^{\alpha t}$ con $\alpha \in R$.

Risulta (sostituendo $y(t) = e^{\alpha t}$ in (18)):

$$(\alpha^2 + c)\, e^{\alpha t} = 0$$

e quindi $\alpha = \pm\sqrt{-c}$, cioè l'equazione (18) ammette come soluzioni le funzioni

$$y_1(t) = e^{\sqrt{-c}\, t} \quad , \quad y_2(t) = e^{-\sqrt{-c}\, t} \quad .$$

Ragionando come nel caso precedente è possibile, dimostrare che le due soluzioni $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono "indipendenti" e, quindi, ogni soluzione $y(t)$ si scrive nella seguente forma

$$y(t) = c_1\, e^{\sqrt{-c}\, t} + c_2\, e^{-\sqrt{-c}\, t} \quad .$$

Infine se $c = 0$ le soluzioni di (18) (come è facile verificare) hanno la seguente forma

$$y = c_1 + c_2 t \quad .$$

Consideriamo ora una generica *equazione differen -*

ziale lineare omogenea del II ordine a coefficienti costanti:

(21) $$y''+by' + cy = 0 \qquad b,c\in R.$$

Proviamo a ricercare soluzioni del tipo $y(t)=e^{\alpha t}$ con $\alpha\in R$. Deve essere

$$(\alpha^2 + b\alpha + c)\, e^{\alpha t} = 0$$

il che comporta

(22) $$\alpha^2 + b\alpha + c = 0 .$$

Supponiamo che l'equazione (22) (detta *equazione algebrica caratteristica* di (21)) ammetta due radici reali α_1 e α_2 distinte. In tal caso le funzioni

$$e^{\alpha_1 t} \quad , \quad e^{\alpha_2 t}$$

sono soluzioni di (21). Di più, ragionando come nei casi precedenti, si può dimostrare che $e^{\alpha_1 t}$ ed $e^{\alpha_2 t}$ sono indipendenti e, quindi, una generica soluzione $y(t)$ di (21) si scrive nella seguente forma

$$y(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} .$$

Consideriamo ora il caso in cui l'equazione algebrica (22) ammetta o due radici complesse o un'unica radice reale. Introduciamo una nuova funzione incognita $z(t)$ legata ad $y(t)$ dalla relazione $y(t) = e^{-\frac{b}{2}t} z(t)$. Si ha allora

$$y''+by'+cy=e^{-\frac{b}{2}t}\left(z''+\left(c-\frac{b^2}{4}\right)z\right);$$

quindi $y(t)$ è soluzione di (21) se e solo se $z(t)$ è soluzione dell'equazione

$$(23) \qquad z''+\left(c-\frac{b^2}{4}\right)z = z'' - \frac{\Delta}{4} z = 0$$

avendo denotato con $\Delta=b^2-4c(\leq 0)$ il discriminante dell'equazione algebrica (22). Ci siamo quindi ricondotti al caso dell'equazione (18); pertanto

- se $\Delta < 0$ le soluzioni di (23) sono del tipo

$$z(t) = c_1 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t + c_2 \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t$$

e, quindi, la generica soluzione di (21) è

$$y(t)= e^{-\frac{b}{2}t}\left(c_1 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t + c_2 \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t\right);$$

- se $\Delta = 0$ le soluzioni di (23) sono del tipo

$$z(t) = c_1 + c_2 t$$

e, quindi la generica soluzione di (21) è

$$y(t) = e^{-\frac{b}{2}t}(c_1 + c_2 t) .$$

In ogni caso, quindi, ogni soluzione di (21) si scrive sotto la forma (19) con $y_1(t)$, $y_2(t)$ soluzioni indipendenti. L'espressione (19) prende il nome di *integrale generale* dell'equazione (21).

Complementi ed esercizi

4.1 - Determinare gli integrali generali delle seguenti equazioni

$$y''-5y'+4y = 0 \ ; \quad y''+y'+y=0 \ ; \quad y''-y' = 0 \ .$$

4.2 - Consideriamo il seguente sistema lineare di equazioni differenziali a coefficienti costanti:

$$\begin{cases} x'(t)=a_{11}\, x(t)+a_{12}y(t) \\ \\ y'(t)=a_{21}x(t)+a_{22}y(t) \end{cases} \qquad a_{ij} \in R$$

Possiamo senz'altro supporre $a_{12} \neq 0$ altrimenti tutto si riduce a due successive integrazioni di equazioni differenziali del primo ordine. Si ha allora ricavando y(t) dalla prima equazione e sostituendo nella seconda:

$$\begin{cases} y(t) = \dfrac{1}{a_{12}} [x'-a_{11}x(t)] \\ x''-(a_{22}+a_{11})x'+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x = 0 \end{cases}$$

In tal modo il problema viene ricondotto a quello dell'integrazione di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Utilizzando tale tecnica trovare le soluzioni dei seguenti sistemi

$$\begin{cases} x'(t)=x(t)+ 7y(t) \\ y'(t)=2x(t)+y(t) \end{cases} ; \quad \begin{cases} x'(t)=2x(t)-3y(t) \\ y'(t)=x(t). \end{cases}$$

§ 5-Equazioni lineari complete a coefficienti costanti

Consideriamo la seguente equazione differenziale

$$(24) \qquad y'' + by' + cy = f(t)$$

con f(t) continua in [a,b]. Denotiamo con

$$(19) \qquad c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

l'integrale generale dell' *equazione omogenea associata alla* (24)

$$(21) \qquad y'' + by' + cy = 0 \ .$$

Supponiamo di conoscere una soluzione $\bar{y}(t)$ di (24). Se denotiamo con $y(t)$ una generica soluzione di (24) si ha

$$(y-\bar{y})'' + b(y-\bar{y})' + c(y-\bar{y}) = f(t) - f(t) = 0;$$

quindi $y-\bar{y}$, come soluzione dell'equazione (21), ha la forma (19):

$$(25) \qquad y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \bar{y}(t) \ .$$

Pertanto tutte le soluzioni di (24) sono date dall'espressione (25) che si dice *integrale generale della equazione*.

In definitiva per risolvere completamente l'equazione (24) è necessario:

a) scrivere l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;
b) trovare un qualunque integrale particolare dell'equazione completa (24).

Abbiamo già risolto la questione a) nel precedente paragrafo. Per quel che riguarda la questione b) si può verificare che

$$\bar{y}(t)=\int_{t_0}^{t} \frac{\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{W(s)} f(s)\, ds =$$

$$=y_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)f(s)}{W(s)}\, ds - y_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s)f(s)}{W(s)}\, ds \quad t_0 \in [a,b],$$

è una particolare soluzione di (24). Infatti osservato che

$$\bar{y}'(t)=y_2'(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)f(s)}{W(s)}\, ds - y_1'(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s)f(s)}{W(s)}\, ds$$

$$\bar{y}''(t)=y_2''(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)f(s)}{W(s)}\, ds + \frac{1}{W(t)}\,[y_2'(t)y_1(t)-$$

$$- y_1'(t)y_2(t)]f(t) - y_1''(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s)f(s)}{W(s)}\, ds =$$

$$= y_2''(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)f(s)}{W(s)}\, ds - y_1''(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s)f(s)}{W(s)}\, ds +$$

$$+ f(t)$$

si ha

$$\bar{y}''+b\bar{y}'+c\bar{y}=\overbrace{[y_2''(t)+by_2'(t)+cy_2(t)]}^{=\,0}\int_{t_0}^{t}\frac{y_1(s)f(s)}{W(s)}\,ds$$

$$-\overbrace{[y_1''(t)+by_1'(t)+cy_1(t)]}^{=\,0}\int_{t_0}^{t}\frac{y_2(s)f(s)}{W(s)}\,ds+f(t).$$

Il metodo appena illustrato ha carattere generale; in alcuni casi particolari, però, la ricerca di $\bar{y}(t)$ può essere fatta più rapidamente.

A - Sia $f(t) = e^{\beta t} P(t)$, dove $\beta\in R$ e $P(t)$ è un polinomio di grado k. In tal caso si cerca $\bar{y}(t)$ sotto la seguente forma:

$$\bar{y}(t) = t^h e^{\beta t} Q(t) \tag{26}$$

dove: $Q(t)$ è un polinomio, da determinarsi, di grado k; h è zero se β non è radice di (22), è uguale alla molteplicità di β se β è radice di (22). L'espressione del polinomio $Q(t)$ si ottiene sostituendo direttamente la funzione (26) nell'equazione (24) e applicando il principio d'identità dei polinomi. Chiariamo quanto detto attraverso gli esempi che seguono

$y''+y'+y=e^t$. Poichè 1 non è radice dell'equazione

$\alpha^2+\alpha+1 = 0$ posto $\bar{y}(t)=Ke^t$ e sostituendo nell'equazione si ha $3Ke^t=e^t$ cioè $K = \frac{1}{3}$.

$y''-y=t\,e^t$. Poichè 1 è radice semplice dell'equazione $\alpha^2-1=0$ la soluzione particolare va cercata sotto la forma

$$\bar{y}(t) = t(mt+n)e^t \quad .$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$e^t\,\{4\,mt + 2(m+n)\} = e^t\,t$$

da cui

$$\begin{cases} 4m = 1 \\ m+n = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m = 1/4 \\ n = -1/4 \end{cases}$$

e quindi $\bar{y}(t) = \frac{1}{4}\,t(t-1)e^t$.

B - Sia $f(t)= e^{\beta t}\,P(t)\cos\gamma t$ ovvero $f(t)=e^{\beta t}P(t)\mathrm{sen}\gamma t$ con $P(t)$ polinomio di grado k.

In tal caso la soluzione va cercata sotto la seguente forma

$$\bar{y}(t)=t^h\,e^{\beta t}\,\{Q_1(t)\cos\gamma t + Q_2(t)\mathrm{sen}\,\gamma t\}$$

dove $Q_i(t)$ sono polinomi, da determinare, di grado al più k e h è 1 se $\beta + i\gamma$ è radice dell'equazione (22) altrimenti h=0. L'espressione dei polinomi $Q_i(t)$, così come nel caso precedente, si trova sostituendo direttamente $\bar{y}$ nell'equazione e usando il principio di identità dei polinomi

ESEMPIO $y''+y = \cos t$. Poichè i è radice dell'equazione $\alpha^2+1=0$, la soluzione $\bar{y}(t)$ va ricercata sotto la forma

$$\bar{y}(t) = t\,(A \cos t + B\, \mathrm{sen}\, t) .$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$2B \cos t - 2A\, \mathrm{sen}\, t = \cos t$$

da cui $B = \frac{1}{2}$, $A = 0$ ovvero $\bar{y}(t) = \frac{t}{2}\, \mathrm{sen}\, t$.

Complementi ed esercizi

5.1- Risolvere le seguenti equazioni differenziali

$y''-3y' = t$ [R. $y=c_1+c_2e^{3t} - \frac{t^2}{6} - \frac{t}{9}$]

$y''-4y = \mathrm{sen}\, t$ [R. $y=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t} - \frac{\mathrm{sen}\, t}{5}$]

$$y''+y = \frac{1}{\cos t} \qquad [R.\ y=c_1 \operatorname{sen} t+c_2 \cos t+t \operatorname{sen} t +$$

$$+ \cos t \log |\cos t|]$$

$$y''-9y=e^{-4t} \qquad [R.\ y=c_1 e^{3t}+c_2 e^{-3t} + \frac{e^{-4t}}{7}\ ]\ .$$

5.2 - Detto $W(t)$ il determinante Wronskiano di due soluzioni y_1 ed y_2 di (21) provare che:

a) $W'(t) + bW(t)=0 \quad \forall t \in R$;

b) se esiste $t_0 \in R$ tale che $W(t_0)=0$ si ha $W(t)=0$ $\forall t \in R$; [Traccia: usare a) ed il Teorema di unicità]

c) se esiste t_0 tale che $W(t_0) \neq 0$ ogni soluzione di (21) è del tipo (19).

CAPITOLO XV

ELEMENTI DI CALCOLO NUMERICO

§ 1 - Introduzione

Consideriamo l'equazione

$$\log x = 1 + \frac{1}{x} . \tag{1}$$

Un rapido studio della derivata prima della funzione

$$f(x) = \log x - 1 - \frac{1}{x}$$

ostra che $f(x)$ è strettamente crescente in $(0,+\infty)$; ertanto poichè

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = + \infty \quad .$$

l'equazione $f(x)=0$ - e quindi l'equazione (1) - ammette una sola soluzione che diciamo x_0.
Un classico problema di "calcolo numerico" consiste nella ricerca di un procedimento (*algoritmo*) che consenta con un numero finito di operazioni il calcolo esatto delle prime n cifre decimali di x_0, con n fissato.

In questo capitolo, ben lungi da noi l'idea di fornire una trattazione esauriente, vogliamo sensibilizzare il lettore all'aspetto numerico della risoluzione di un problema matematico; con ciò intendiamo riferirci alla necessità, una volta accertato che il problema in esame ammette soluzione, del calcolo esplicito della soluzione stessa.

Dal momento che il moderno calcolo numerico non può prescindere dall'uso degli strumenti di calcolo elettronico inizieremo la nostra esposizione con un rapido cenno alla rappresentazione dei numeri in un calcolatore.

Cominciamo con l'osservare che un calcolatore opera con i numeri in forma binaria; ciò è naturale ove si pensi che nel sistema binario occorrono solo due simboli (0 ed 1) per rappresentare un numero e che tali simboli possono, ad esempio, essere identificati con l'operazione di apertura e di chiusura di un circuito. Colui che usa uno strumento di calcolo potrebbe, però, lavorare senza conoscere il sistema di numerazione binario; egli infatti fornisce dati (*input*) alla macchina e riceve risposte (*output*) dalla macchina in termini di rappresentazione decimale. Pertanto faremo sempre riferimento nella nostra esposizione alla rappresentazione decimale di un numero.

Cominciamo con l'osservare che, essendo la "memoria" di un calcolatore finita, non è pensabile che esso possa "conoscere" (*rappresentare*) ogni numero reale.

Ad esempio un elaboratore "ignora" (cioè *non è in* *grado di rappresentare*) quei numeri interi che abbiano più di un fissato numero t di cifre; t ovviamente varia a seconda delle caratteristiche tecniche della macchina e dipende dalla "quantità di memoria" destinata a tale funzione. Pertanto solo un numero finito di interi saranno rappresentabili.

Per i numeri reali si usa in generale la cosiddetta rappresentazione in "virgola mobile". Essa consiste nello scrivere un dato numero reale $a \neq 0$ nella forma:

$$a = \pm M \cdot 10^{c}$$

dove $M \in [(10)^{-1}, 1[$ (M è detta *mantissa*) e c è un intero detto *caratteristica*. Pertanto a può essere identificato con la terna $(\pm, M, c)$ ed il calcolatore destina una parte precisa di memoria alla rappresentazione delle cifre della mantissa e della caratteristica. Segue da ciò che i numeri rappresentabili(con esattezza) in un calcolatore costituiscono un insieme finito detto *insieme dei numeri macchina*.

Ad esempio i seguenti numeri

$$0{,}0125 \quad , \quad 0{,}00031 \quad , \quad 301{,}2 \quad , \quad -31$$

vengono rappresentati rispettivamente nel seguente modo

$$0{,}125 \cdot 10^{-1}, \quad 0{,}31 \cdot 10^{-3}, \quad 0{,}3012 \cdot 10^{3}, \quad -0{,}31 \cdot 10^{2}.$$

Quando in un calcolo intervengono numeri reali la cui mantissa ha un numero di cifre superiore a quello massimo previsto il calcolatore esegue "un arrotondamento", cioè identifica il numero in oggetto con "il più vicino dei numeri macchina".

Quando, invece, la caratteristica è maggiore del massimo valore rappresentabile il calcolo si blocca, e si dice che vi è un *overflow*; nel caso in cui la caratteristica è minore del minimo valore rappresentabile si parla di *underflow*.
Introduciamo qualche semplice definizione.

Detto a un numero reale ed a^* un suo valore approssimato si dirà *errore assoluto* la quantità

$$|a - a^*| \quad ;$$

si dirà *errore relativo* la quantità

$$\frac{|a - a^*|}{|a|} \qquad (a \neq 0) \; .$$

Supponiamo, per fissare le idee, che il numero massimo di cifre previste per la mantissa di un numero reale sia r. Pertanto, come già detto, ove mai ad un numero reale $a \neq 0$ competa una mantissa M con più di r cifre occorre "arrotondare a" cioè costruire un numero a^* la cui mantissa abbia al più r cifre decimali e che sarà assunto come approssimazione di a.

Tra i vari sistemi di arrotondamento uno tra i più usati è il seguente: se $a=M\cdot 10^c > 0$ si somma 5 sulla (r+1)-ma cifra decimale della mantissa M e si tronca il numero così ottenuto alla r-ma cifra decimale. Il risultato di tale operazione è il numero $a^* = M^* 10^c$ la cui mantissa M^* è

$$M^* = \left[\left(M + \frac{5}{10^{r+1}} \right) \cdot 10^r \right] \cdot \frac{1}{10^r}$$

dove [x] designa al solito la parte intera di x.

Se a < 0 si procede analogamente a partire da - a.

E' evidente che per l'errore, assoluto e relativo, che si commette sostituendo a* con a si ha

$$|a-a^*| \leq 5\cdot 10^{-r-1+c}\ , \qquad \frac{|a-a^*|}{|a|} \leq 5\cdot 10^{-r}$$

dove si è tenuto conto che $|a| \geq 10^{c-1}$. La quantita' $5\cdot 10^{-r}$ è detta "precisione di macchina".

Esercizi e complementi

1.1 - Supponendo di operare in virgola mobile con un massimo di 5 cifre decimali, dati a = 3.41256, b = = 173.453 c=0.0178896

- calcolare a*, b*, c* e gli errori relativi ed assoluti;
- calcolare (a+b)*, (b+c)*, (a+c)* e gli errori relativi ed assoluti;
- calcolare (a*+b*)*, (b*+c*)*, (a*+c*)*;
- svolgere esercizi analoghi ai precedenti operando con il prodotto in luogo che con la somma.

§ 2 - La nozione di algoritmo

Supponiamo di voler calcolare la soluzione (esatta o approssimata) di un determinato problema. Costruire un *algoritmo* per il calcolo della suddetta soluzione significa costruire un procedimento che a partire dai dati fornisca, in un numero finito e preordinato di passi, la soluzione.

Per descrivere in modo schematico un algoritmo si può procedere in vari modi. Ne illustriamo due, assai comuni, attraverso un esempio elementare.

Problema - Calcolare il prodotto dei primi n numeri naturali.

Un primo schema può essere il seguente

Passo 1 - Si definiscono due variabili A, I assegnando ad esse i valori iniziali A=1, I = 1.

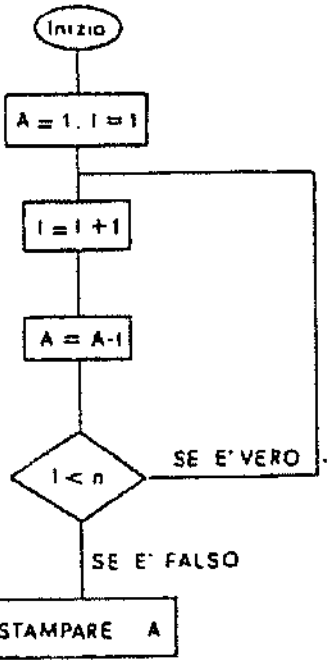
Passo 2 - Si assegna ad I il valore I+1 .

Passo 3 - Si assegna da A il valore A · I .

Passo 4 - Si controlla se I < n nel qual caso si ritorna al passo 2; se invece I=n si va al passo 5.

Passo 5 - Il procedimento ha termine ed il valore assunto da A è quello cercato.

Un secondo schema, detto *diagramma di flusso*, può essere il seguente



In tale secondo schema nei rettangoli vengono segnalate le operazioni aritmetiche ed i valori da assegnare alle variabili, nei rombi vengono indicate le operazioni di confronto da eseguire. Le frecce, indicano, invece, la sequenza logica in cui devono essere eseguiti i vari passi dell'algoritmo.

E' bene rilevare esplicitamente che in generale si possono costruire più algoritmi per la risoluzione dello stesso problema. La scelta dell'uno o dello altro dipenderà da molteplici fattori quali la precisione del risultato, la velocità di esecuzione, la quantità di memoria impegnata.

§ 3 - Errori

Ci soffermiamo qui brevemente sui più comuni tipi di errori che possono aversi nel calcolo numerico della soluzione di un dato problema.

I - *Errore nei dati iniziali* - Questo tipo di errore è presente ad esempio quando i dati del problema sono ricavati sperimentalmente o quando si effettuano delle semplificazioni nella costruzione di un modello matematico di un problema concreto. Se a "piccole variazioni" nei dati iniziali corrispondono "piccole variazioni" nella soluzione si dirà che il problema, è *ben condizionato*, in caso contrario si parlerà di problema "*mal condizionato*".

II - *Errore di troncamento* - Sia

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

una serie convergente; indicato con S la somma di tale serie e con $\{S_n\}$ la successione delle sue somme parziali la eguaglianza approssimata

$$S \simeq S_n$$

dà luogo ad un classico *errore di troncamento;* tale tipo di errore si presenta in generale ogni qualvolta la soluzione di un problema proviene da una successione infinita di operazioni (o da un processo di limite) e si è pertanto costretti ad arrestare il calcolo dopo un numero finito di passi.

In generale una stima di tale tipo di errore può essere ottenuta con uno studio teorico preliminare del problema.

II - *Errore di arrotondamento* - Tali errori sono dovuti al fatto che si opera (cfr. § 1) con un insieme finito di numeri (i numeri macchina) eseguendo sui numeri che intervengono nel calcolo opportuni arrotondamenti.

Gli errori di arrotondamento possono accumularsi durante l'esecuzione di un calcolo fino ad avere una sensibile influenza sulla precisione dei risultati. Di ciò bisogna tener conto nella costruzione di un algoritmo.

Ad esempio siano a e b i dati del problema ed a^* e b^* i numeri macchina corrispondenti con

$$a = a^* + \varepsilon_1 \ , \quad b = b^* + \varepsilon_2 \ .$$

Supponiamo che l'algoritmo da eseguire preveda una operazione di addizione; in realtà l'operazione ef fettivamente eseguita sarà $a^* + b^*$. Si ha subito:

$$|(a+b)-(a^*+b^*)| \le |\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|$$

cioè l'errore assoluto è minore od eguale alla somma degli errori assoluti.

Per quanto attiene all'errore relativo si trova ($a \ne 0$, $b \ne 0$):

$$\frac{|(a+b)-(a^*+b^*)|}{|a+b|} \le \frac{|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|}{|a+b|} =$$

$$= \frac{|\varepsilon_1|}{|a|} \cdot \frac{|a|}{|a+b|} + \frac{|\varepsilon_2|}{|b|} \frac{|b|}{|a+b|}$$

Complemnti ed esercizi

3.1 - Posto $a=a^*+\varepsilon_1$, $b=b^*+\varepsilon_2$ $(a\ne0, b\ne0)$ provare che

$$|a\cdot b-a^*b^*| \le |\varepsilon_1||b|+|\varepsilon_2||a^*| \le |\varepsilon_1||\varepsilon_2| +$$

$$+ |\varepsilon_1||b^*|+|\varepsilon_2||a^*| \, ,$$

$$\frac{|a\cdot b-a^*b^*|}{|a\ b|} \le \frac{|\varepsilon_1||\varepsilon_2|}{|a||b|} + \frac{|\varepsilon_1|}{|a|} \frac{|b^*|}{|b|} +$$

$$+ \frac{|\varepsilon_2|}{|b|} \quad \frac{|a^*|}{|a|}\left(\cong \frac{|\varepsilon_1|}{|a|} + \frac{|\varepsilon_2|}{|b|}\right),$$

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{a^*}{b^*} \right| \leq \frac{|\varepsilon_1|}{|b|} + |\varepsilon_2| \quad \frac{|a^*|}{|b|\,|b^*|} \quad ,$$

$$\frac{|a/b - a^*/b^*|}{|a/b|} \leq \frac{|\varepsilon_1|}{|a|} + \frac{|\varepsilon_2|}{|b^*|} \cdot \frac{|a^*|}{|a|}\left(\cong \frac{|\varepsilon_1|}{|a|} + \frac{|\varepsilon_2|}{|b|}\right),$$

$$|(a-b)-(a^*-b^*)| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \quad ,$$

$$\frac{|(a-b)-(a^*-b^*)|}{|a-b|} \leq \frac{|\varepsilon_1|}{|a-b|} + \frac{|\varepsilon_2|}{|a-b|} \quad .$$

E' bene osservare che nel caso della differenza se a e b sono molto vicini l'errore relativo può cr scere enormemente.

3.2 - Sia $a = 0.87216$, $b = 0.87228$, $a^*=0.8722$

$b^* = 0.8723$.

Calcolare l'ordine di grandezza dell'errore relativo su a,b,a-b

[$\cong 5 \cdot 10^{-5}$; $\cong 2 \cdot 10^{-5}$; $\cong 1/6$]

§ 4 - Risoluzione numerica di equazioni non lineari.

In questo paragrafo vogliamo studiare alcuni metodi per la risoluzione numerica di equazioni del tipo

$$(2) \qquad f(x) = 0$$

dove $f(x)$ non è una funzione lineare.

A - *Metodo di bisezione*

Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$ e tale che $f(a)\cdot f(b)<0$. In tali ipotesi il teorema degli zeri garantisce l'esistenza di una soluzione di (2). Se supponiamo, in aggiunta, che *in* $[a,b]$ *cada una sola soluzione* x_0 *della equazione* (2) un algoritmo per il calcolo approssimato di x_0 può essere facilmente ricavato rileggendo la dimostrazione del suddetto teorema. Esso è detto *algoritmo di bisezione* e consente, per ogni $n \in N$, di ricavare un valore approssimato x_n di x_0 tale che

$$|x_n - x_0| \leq (b-a)/2^n .$$

Se si vuole calcolare un'approssimazione di x_0 "a meno di 10^{-k}" l'algoritmo può essere il seguente:

1 - Si pone $A=a$, $B=b$, $E=10^{-k}$.

2 - Si pone $C=(A+B)/2$.

3 - Si calcola $f(C)$.

4 - Se $f(C)=0$ oppure $|B-A|/2 < 10^{-k}$ si va al passo 8.

5 - Si calcola il prodotto $f(A)\cdot f(C)$.

6 - Se $f(A)\cdot f(C) > 0$ si pone $A=C$; in caso contrario, si pone $B=C$.

7 - Si torna al passo 2.

8 - C è l'approssimazione cercata.

Nel caso in cui in $[a,b]$ cadano più radici della (2) si divide (se ciò è possibile!) l'intervallo $[a,b]$ in sottointervalli $[a_i,b_i]$ tali che:

- in $[a_i,b_i]$ cade una sola radice di (2);
- $f(a_i)\cdot f(b_i) < 0$.

Tale suddivisione può essere ottenuta "a mano" calcolando la funzione in vari punti dell'intervallo $[a,b]$ o anche disegnandone il grafico.

B - *Metodo iterativo*

Supponiamo che in $[a,b]$ cada una sola radice x_o di (2). L'equazione (2) può essere scritta in forma equivalente in $[a,b]$.

(3) $$x = g(x)$$

assumendo, ad esempio, $g(x) = x\pm f(x)$ (è ovvio che la scelta di $g(x)$ potrà essere fatta in infiniti modi).

Per esempio nell'intervallo $[a,b]$ con $0<a$ e $b> 1$ risulta

(4) $x^3-x=0 \iff x=x^3 \qquad (g(x)=x^3)$

$$x^3-x=0 \iff x = \frac{1}{x^2} + x-1 \quad (g(x)= \frac{1}{x^2} +x-1)$$

e in $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$(5)\ \pi \cos x-2x=0 \iff x = \frac{\pi}{2} \cos x \quad (g(x)= \frac{\pi}{2} \cos x).$$

Per risolvere l'equazione (3) si procede nel modo seguente: fissato $y_0 \in [a,b]$ definiamo per ricorrenza la seguente successione

$$y_1=g(y_0), \quad y_2=g(y_1), \dots, y_n=g(y_{n-1}), \dots .$$

Perchè tali posizioni abbiano senso è ovviamente necessario che

i) $x \in [a,b] \Rightarrow g(x) \in [a,b]$ cioè $g([a,b]) \subseteq [a,b]$.

Se la successione $\{y_n\}$ è convergente e se

ii) $g(x)$ è continua in $[a,b]$,

risulta

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y \Rightarrow y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} g(y_{n-1})=g(y)$$

e quindi, poichè la (3) ha la sola soluzione x_0, si ha $y=x_0$.

Pertanto $\{y_n\}$ "approssima" la soluzione x_0.

La convergenza della successione $\{y_n\}$ non può però essere garantita nelle sole ipotesi i) e ii).

Con riferimento all'esempio (4) se si sceglie $y_0 \in]1,b]$ e si pone $g(x) = x^3$ si ha $y_n = y_0^{3^n}$ e quindi $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_0^{3^n} = +\infty$ cioè la successione $\{y_n\}$ diverge. Se poi si considera l'esempio (5) si verifica facilmente che sono soddisfatte le ipotesi i) e ii) ma se si sceglie $y_0=0$ risulta.

$$y_1=g(0) = \frac{\pi}{2}, \quad y_2=g(\pi/2)=0, \quad y_3 = \frac{\pi}{2}, \quad y_4 = 0, \ldots$$

cioè la successione $\{y_n\}$ è oscillante.

Se però

iii) $g(x)$ è derivabile in $]a,b[$ e $|g'(x)| \leq M < 1$

si ha:

PROPOSIZIONE 1 - *Nelle ipotesi* i), ii), iii) *la successione* $y_n = g(y_{n-1})$ *converge, comunque si scelga* $y_0 \in [a,b]$, *all'unica soluzione di* (3).

Se esiste $k \in N$ tale che $y_k = y_{k-1}$ si ha $y_n = y_{k-1}$, per ogni $n \geq k$ e quindi l'asserto è banale. Supponiamo pertanto $y_k \neq y_{k-1}$ per ogni $k \in N$. Dal teorema di Lagrange si ha:

$$|y_2-y_1|=|g(y_1)-g(y_0)|=|g'(\xi)|\,|y_1-y_0|\leq M|y_1-y_0|$$

con ξ compreso tra y_0 ed y_1.

Più in generale si ha per induzione:

$$|y_n - y_{n-1}| \leq M^{n-1} \quad |y_1 - y_0| \quad ;$$

da ciò segue che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} |y_n - y_{n-1}|$$

è convergente poichè maggiorata dalla serie conver - gente

$$|y_1 - y_0| \sum_{n=1}^{\infty} M^n$$

(serie geometrica di ragione $M < 1$).
L'asserto segue allora osservando che la successione delle somme parziali della serie $y_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (y_n - y_{n-1})$ è proprio la successione $\{y_n\}$.

Per quanto attiene all'errore

$$E_n = |y_n - x_0|$$

si ha subito, nelle ipotesi della prop. 1 :

$$E_0 = |y_0 - x_0|, \quad E_1 = |y_1 - x_0| = |g(y_0) - g(x_0)| \leq M|x_0 - y_0|$$

$$E_2 = |y_2 - x_0| = |g(y_1) - g(x_0)| \leq M|y_1 - x_0| \leq M^2|x_0 - y_0|$$

ed in generale

$$(6) \qquad \boxed{E_n \leq M^n |x_0 - y_0| \leq M^n |b-a|}$$

Osservazione 1 - Le ipotesi i), ii), iii) della prop. 1 sono sufficienti a garantire che l'equazione (3) ha *un'unica soluzione* x_0 in [a,b]. Lasciamo la facile dimostrazione al lettore.

Osservazione 2 - Una attenta rilettura della dimostrazione della prop. 1 evidenzia che l'ipotesi iii) può essere sostituita con (ipotesi di Lipschitz)

iii) $\quad |g(x) - g(y)| \leq M|x-y| \quad , \quad 0 < M < 1.$

Sotto tale ipotesi continua a valere anche l'osservazione 1.
Vale inoltre la seguente

PROPOSIZIONE 1' - *Nelle ipotesi* i), ii) *e se inoltre* g(x) *è crescente in* [a,b] *la successione* $y_n = g(y_{n-1})$ *con* $y_0 = a$ o $y_0 = b$ *converge alla soluzione di* (3)

C - *Metodo di Newton (o delle tangenti)*

Sia f(x) una funzione dotata in [a,b] di derivata prima continua e tale che

iv) $f'(x) \neq 0$ in [a,b] ,

v) $f(x)$ è concava o convessa in $[a,b]$,

vi) $f(a)\cdot f(b) < 0$.

Sotto tali condizioni esiste in $[a,b]$ una ed una sola radice x_0 dell'equazione $f(x) = 0$.

Per fissare le idee sia $f'(x) > 0$ e f convessa. Posto $y_0 = b$ denotiamo (cfr. fig. 1) con y_1 il punto di intersezione tra la tangente al grafico di f in $(y_0, f(y_0))$ e l'asse x; ripetendo tale costruzione a partire da y_1 si ottiene un punto y_2 e così via. E' facile calcolare y_n a partire da y_{n-1}:

$$y_n = y_{n-1} - \frac{f(y_{n-1})}{f'(y_{n-1})} \qquad (7)$$

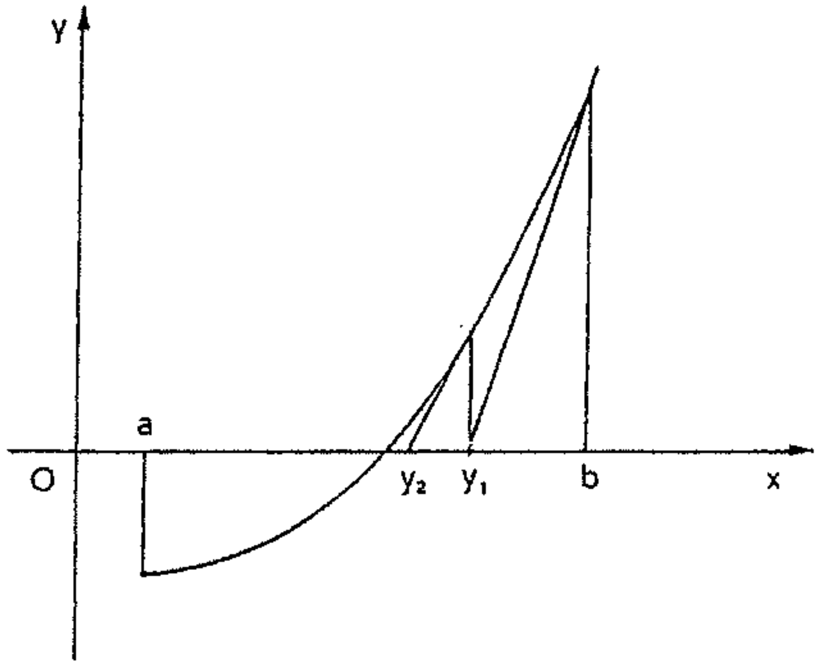


Fig. 1

Si ha:

PROPOSIZIONE 2 - *Se* f *ha derivata prima continua e se valgono le ipotesi* iv), v), vi) *la successione* (7) *con* $y_0 = b$, *se* $f' > 0$ *e* f *convessa* o $f' < 0$ *e* f *concava, ovvero con* $y_0 = a$ *negli altri casi, converge all'unica soluzione* x_0 *dell'equazione* $f(x) = 0$. *La successione* $\{y_n\}$ *è inoltre monotona.*

Per fissare le idee sia $f'(x) > 0$, $f(x)$ convessa e quindi $y_0 = b$.

Consideriamo nell'intervallo $[x_0, b]$ la funzione continua

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

ed osserviamo subito che

$$x = g(x) \iff f(x) = 0 \,.$$

Pertanto l'equazione $g(x)=x$ ammette solo la radice x_0.

Sia $x_1 < x_2$; poichè $f(x)$ è convessa (cfr. Cap.IX § 5) si ha:

a) $f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \implies \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq f'(x_2)$

b) $f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \implies \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f'(x_1)$

Ne segue che

$$g(x_2)=x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \text{ (per a)) } \geq x_2 - f(x_2) \frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)} =$$

$$=x_1 - f(x_1) \frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)} \geq \text{ (per b)) } x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = g(x_1).$$

Ma allora g è crescente; inoltre $g(x_o) = x_o$ e $g(b) < b$. Ne segue che sono verificate le ipotesi della prop. 1' e quindi la successione $y_n = g(y_{n-1})$ converge. Detto y il limite di $\{y_n\}$ e tenendo conto che g(x) è continua si ha $y = g(y)$ e per quanto già osservato $y = x_o$. Così il teorema è provato.

Per ottenere una stima dell'errore

$$E_n = |y_n - y_o|$$

supponiamo

vii) $f''(x)$ esiste continua in $[a,b]$.

Posto $m = \min\limits_{[a,b]} |f'(x)|$, $M = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$

si ha

(8) $$\boxed{E_n \leq \frac{M}{2m} E^2_{n-1}}$$

Infatti dalla formula di Taylor di punto iniziale le y_n si ha:

(9) $$0=f(x_o)=f(y_n)+f'(y_n)(x_o-y_n)+\frac{f''(c)}{2}(x_o-y_n)^2$$

e quindi:

$$E_{n+1}=|y_{n+1}-x_o|=\left|y_n-\frac{f(y_n)}{f'(y_n)}-x_o\right|=(\text{dalla}(9)).$$

$$\left|\frac{f''(c)}{f'(y_n)}\ \frac{(x_o-x_n)^2}{2}\right|\le\frac{M}{2m}E_n^2$$

D - *Metodo della falsa posizione*

Sia f una funzione continua in [a,b] la quale verifichi le condizioni v) e vi).

Osserviamo subito che, non essendo f(x) derivabile non è possibile applicare il metodo di Newton per la ricerca dell'unica radice x_o di $f(x) = 0$.(*)

Per descrivere il *metodo della falsa posizione* supponiamo per fissare le idee f(x) convessa ed $f(a)<0$, lasciando al lettore l'esame degli altri casi possibili.

Definiamo lo schema iterativo

(10) $$y_1=a,\quad y_n=y_{n-1}-\frac{y_{n-1}-b}{f(y_{n-1})-f(b)}f(y_{n-1})\quad n\ge 2.$$

E' facile controllare che y_n è il punto di in-

(*) Nelle ipotesi poste l'equazione (2) ha una sola soluzione. Si lascia al lettore la facile verifica.

tersezione tra la retta per i punti $(y_{n-1}, f(y_{n-1}))$, $(b, f(b))$ e l'asse x (cfr. fig. 2).

Sussiste la seguente

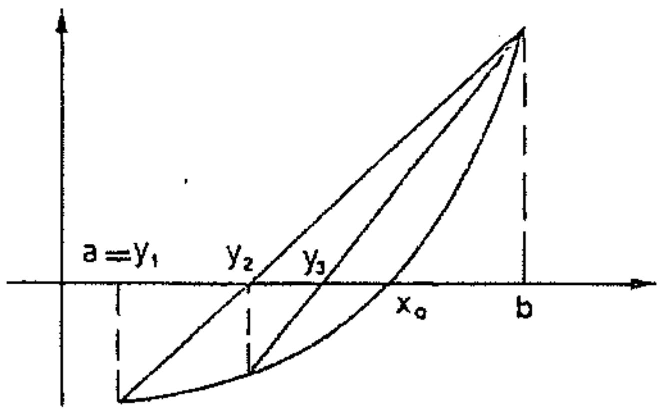


Fig. 2

PROP. 3 - *Nelle ipotesi poste la successione* $\{y_n\}$ *converge all'unica radice* x_0 *dell'equazione* $f(x) = 0$.

Poniamo in $[a, x_0]$

$$g(x) = x - \frac{x-b}{f(x)-f(b)} f(x) = b - \frac{x-b}{f(x)-f(b)} \cdot f(b).$$

Per la convessità di f(x) si ha

$$x_1 < x_2 < b \Rightarrow \frac{f(b)-f(x_1)}{b-x_1} \leq \frac{f(b)-f(x_2)}{b-x_2}$$

e quindi

$$g(x_1)-g(x_2)=f(b)\left[\frac{x_2-b}{f(x_2)-f(b)}-\frac{x_1-b}{f(x_1)-f(b)}\right]\leq 0.$$

Quindi $g(x)$ è crescente in $[a,x_0]$. D'altro canto

$$g(a) = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}\, f(a) > a, \quad g(x_0) = x_0 \;;$$

e quindi $g([x_0,a]) \subset [x_0,a]$.

Sono pertanto verificate le ipotesi della prop. 1'.

Ne segue che la successione (10)

$$y_n = g(y_{n-1})$$

converge ad un $y\in[a,x_0]$. Quindi passando al limite e tenendo conto che $g(x)$ è continua:

$$y=g(y)=y-\frac{(y-b)}{f(y)-f(b)}\cdot f(y) \Rightarrow f(y)=0 \Rightarrow y=x_0,$$

e cioè l'asserto.

Per ottenere una stima dell'errore $E_n=|y_n-x_0|$ supponiamo che la funzione f verifichi le condizioni iv) e vii). Posto allora $m = \min\limits_{[a,b]} |f'(x)|$ e $M=\max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$ si ha

$$\boxed{E_{n+1} \leq \frac{b-a}{2}\,\frac{M}{m}\,E_n} \tag{11}$$

Dimostriamo qui una formula più debole della(11). Tenendo conto che $f(x_o) = 0$ si ha

$$y_{n+1}-x_o = \frac{(x_o-y_n)(y_n-b)}{f(b)-f(y_n)}\left(\frac{f(b)-f(y_n)}{b-y_n} - \frac{f(y_n)-f(x_o)}{y_n-x_o}\right)$$

$$=\text{(per il teor. di Lagrange) } \frac{(x_o-y_n)}{f'(c_1)}\,(f'(c_2)-f'(c_3))$$

$$= \text{(ancora per Lagrange) } \frac{(x_o-y_n)}{f'(c_1)}\, f''(c_4)(c_3-c_2)$$

e quindi

$$E_{n+1} = |y_{n+1} - x_o| \le |x_o-y_n| \frac{|f''(c_4)|}{|f'(c_1)|} \; |c_3-c_2|$$

cioè

$$\boxed{E_{n+1} \le \frac{M}{m}\,(b-a)\;E_n} \tag{12}$$

E - *Metodo delle secanti*

Un altro metodo per il calcolo approssimato dello zero dell'equazione $f(x) = 0$ di cui daremo soltanto un cenno è il *metodo delle secanti*. Esso consiste nel costruire y_n come punto di intersezione tra l'asse x e la secante il grafico di $f(x)$ per i punti $(y_{n-1}, f(y_{n-1}))$, $(y_{n-2}, f(y_{n-2}))$ (cfr. fig. 3) Lo schema iterativo è il seguente

$$y_0 = b, \; y_1 = a$$

$$y_n = y_{n-1} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{f(y_{n-1}) - f(y_{n-2})} f(y_{n-1})$$

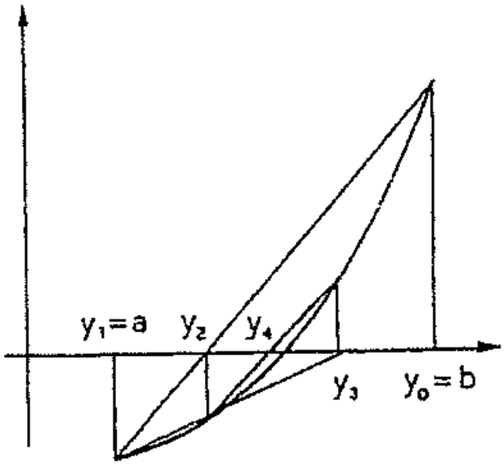


Fig. 3

Senza entrare in dettaglio osserviamo che il metodo converge, ad esempio, se $f(a) < 0$, $f(b)>0$, $f'(x)$ esiste continua con $f'(x) \neq 0$, $f''(x)$ esiste continua e $b-a$ è abbastanza piccolo; si ha inoltre la stima:

$$\boxed{E_{n+1} \leq \frac{M}{m} \frac{E_n \cdot E_{n-1}}{2}}$$

con ovvio significato per le quantità m, M.

Complementi ed esercizi

4.1 - Considerata in $[0, \frac{\pi}{2}]$ l'equazione

$$\cos x = k\, x \iff x = \frac{\cos x}{k} \quad \text{con} \quad k > 0$$

provare che se $k>1$ il metodo iterativo converge. Si può applicare il metodo iterativo se $k=1$? Particolarizzando il valore di k (ad es. $k=3,4$) e posto $y_n = \frac{\cos y_{n-1}}{k}$ e $y_0 = 0$ calcolare, con l' ausilio di un computer y_{10}, y_{20}, y_{50}.

4.2 - Calcolare con il metodo di bisezione, con il metodo di Newton, con quello della falsa posizione e delle secanti, valori approssimati della soluzione dell'equazione

$$\lg x = 1 + \frac{1}{x} \qquad (x \in [2,8])$$

Si valutino gli errori e si confrontino i risultati.

METODO NUM. ITERAZIONI	BISEZIONE	NEWTON	FALSA POSIZIONE	SECANTI
5	3.6875	3.59112	3.59970	3.59116
10	3.58789	3.59112	3.59114	3.59112
20	3.59112	3.59112	3.59112	3.59112

4.3 - Dimostrare, usando la PROP. 1 e l'OSS. 1, che l'equazione

$$x^7 - 10x + 2 = 0$$

ha un'unica radice in [0,1]. Determinarne un'approssimazione a meno di 10^{-4} utilizzando il metodo di bisezione [R: 0,19998...].
In questo caso converge il metodo di Newton?

4.4 - Considerata in $[0,\sqrt{\pi}[$ l'equazione

$$\operatorname{tg}\frac{x^2}{2} + x^2 - 1 = 0$$

provare che essa ammette una sola radice e costruirne con il metodo di bisezione un'approssimazione a meno di 10^{-2} [R.: 0,80468..]

4.5 - Consideriamo l'equazione $x=g(x)$. Fissato il punto iniziale y_0 e definita la successione $y_n = g(y_{n-1})$ provare che se esistono $\delta>0$ e $k\in]0,1[$ tali che

- $|g(x')-g(x'')| < k|x'-x''|, \quad x',x''\in]y_0-\delta,y_0+\delta[$

- $|y_1-y_0| \leq (1-k)\,\delta$

l'equazione $x=g(x)$ ha in $]y_0-\delta,\ y_0+\delta[$ un'unica soluzione c e si ha $\lim_{n\to\infty} y_n = c$.

In sostanza tale risultato evidenzia che il metodo i terativo è un "metodo locale" cioè la sua convergenza è legata, tra l'altro, al fatto che il punto iniziale y_o sia scelto abbastanza prossimo alla radice. Per la dimostrazione si osservi che

$$|y_2-y_o|=|g(y_1)-y_o|\leq|g(y_1)-g(y_o)|+|g(y_o)-y_o|\leq$$

$$\leq k|y_1-y_o|+(1-k)\delta \leq k\delta+(1-k)\delta = \delta \;;$$

così procedendo ...

4.6 - Attraverso una attenta ispezione della dimostrazione della (8) il lettore provi che il metodo di Newton è un "metodo locale" nel senso che esso converge supponendo che esista un intorno I della radice x_o tale che:

iv)' $f'(x) \neq 0$ in I;

v)' $f''(x)$ è continua;

vi)' y_o sia "abbastanza prossimo "ad x_o.

4.7 - Calcolo di $\sqrt{2}$ (cfr. Cap. VII es. 3.6). Posto $f(x) = x^2 - 2$ e $[a,b] = [1,2]$ la successione (7) diventa

$$y_o=2, \quad y_n = y_{n-1} - \frac{y_{n-1}^2 -2}{2y_{n-1}} = \frac{1}{2} \left(y_{n-1} + \frac{2}{y_{n-1}}\right).$$

Il lettore provi che vale la stima

$$y_n - \sqrt{2} \leq y_{n-1} - y_n . \tag{13}$$

(Si osservi che: $y_{n-1} > \sqrt{2} \Rightarrow 2y_n < y_{n-1} + \sqrt{2}$ ...)

L'algoritmo di Newton per il calcolo di $\sqrt{2}$ a meno di 10^{-k} è il seguente:

1 - Si pone $E = 10^{-k}$, $X = 2$

2 - Si pone $Y = X$

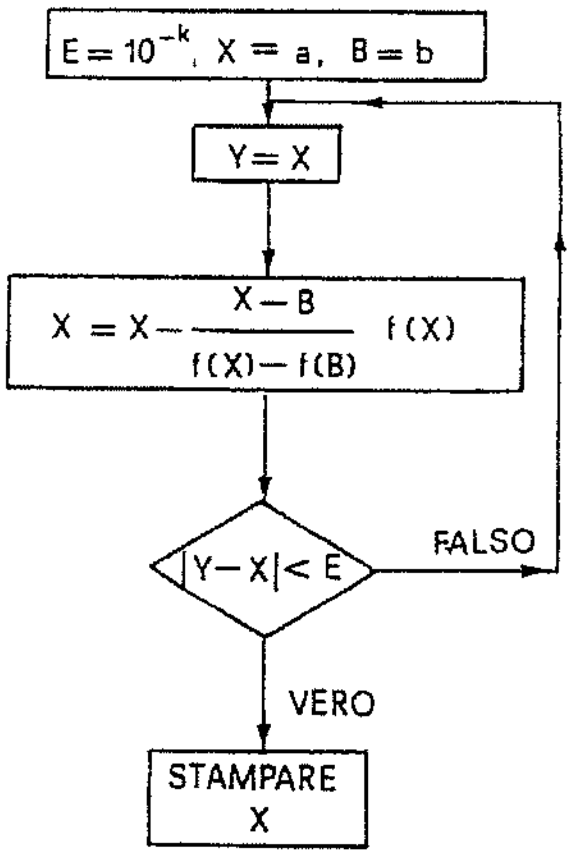
3 - Si pone $X = \frac{1}{2} (X + \frac{2}{X})$

4 - Si controlla se $Y-X < E$ nel qual caso si va al passo 6.

5 - Si torna al passo 2.

6 - Il procedimento ha termine in quanto (cfr. (13)) il valore di X è tale che $X-\sqrt{2} < 10^{-k}$.

4.8 - Il diagramma di flusso per il metodo della falsa posizione può essere il seguente



Il lettore tracci il diagramma di flusso per il metodo delle secanti.

4.9 - Dimostrare la prop. 1'.

§ 5 - Sistemi lineari

Dato il sistema lineare di n equazioni in n incognite

$$(14)\quad \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = y_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n = y_n \end{cases}$$

supponiamo che $|A| = \det (a_{ij}) \neq 0$ cosicchè tale sistema ammette una ed una sola soluzione.

Abbiamo già osservato (cfr. Cap. V) che la risoluzione del sistema (14) con il metodo di Cramer richiede un numero di operazioni dell'ordine di $(n+2)!$ mentre con il metodo di Gauss il numero di operazioni da eseguire è dell'ordine di $n^3/3$.

Pertanto, dal punto di vista numerico, il metodo di Gauss è preferibile.

Va comunque osservato che nel metodo di Gauss ad ogni passo è prevista una divisione; ad esempio per eliminare x_1 (se $a_{11} \neq 0$) si moltiplica la prima equazione per a_{21}/a_{11} e si sottrae ad essa la seconda, poi si moltiplica la prima equazione per a_{31}/a_{11} e si sottrae ad essa la terza e così via. Nel caso in cui a_{11} sia molto piccolo ciò può provocare danni no tevoli sulla precisione dei risultati. Per ridurre il rischio di tali inconvenienti si preferisce scegliere, il più grande tra i numeri $\{|a_{11}|, |a_{21}|, \ldots, |a_{n1}|\}$, e sia esso $|a_{k1}|$ e scambiare la prima riga con la k-ma. Si effettuerà pertanto la divisione per a_{k1} e non già per a_{11}. Tale metodo è detto del *pivot*. Sottolineamo comunque che anche con tale metodo non è possibile garantire che il procedimento non porti ad un sensibile accumulo di errori; lo studio di tale fenomeno esula però dalle finalità di questo testo. Per concludere tale paragrafo osserviamo che quando n sia molto grande anche il metodo di Gauss diviene di difficile utilizzazione. Si preferisce in tal caso ricorrere ai cosiddetti metodi iterativi. Diamo qui la descrizione del metodo iterativo di Jacobi.

Riscriviamo il sistema (14) nella seguente forma

$$\begin{cases} x_1 = \quad - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 \ldots\ldots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n + \dfrac{y_1}{a_{11}} \\ x_2 = - \dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1 \quad - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3 \ldots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n + \dfrac{y_2}{a_{22}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = - \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 \ldots - \dfrac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1} + \dfrac{y_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

(si è ovviamente supposto $a_{ii} \neq 0 \ \forall i$) ovvero in forma sintetica

$$X = A \cdot X + Y$$

dove A è la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots\cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ed X, Y sono i vettori

$X=(x_1,\ldots,x_n)$, $Y=(y_1/a_{11},\ldots\ldots,y_n/a_{nn})$.

Fissato $X^o = (x_1^o, x_2^o,\ldots,x_n^o)$ si pone

$X^1=A\cdot X^o+Y$, $X^2=A\cdot X^1+Y,\ldots X^r=A\cdot X^{r-1}+Y,\ldots$.

Detto X il vettore soluzione del sistema (14) il metodo si dirà convergente se $\lim\limits_{r\to\infty} X^r = X$ cioè se, posto $X^r = (x_1^r, x_2^r,\ldots,x_n^r)$ e $X = (x_1,\ldots,x_n)$ risulta $\lim\limits_{r\to\infty} x_i^r = x_i \quad i = 1,\ldots,n.$

Una condizione sufficiente per la convergenza del metodo di Jacobi è la seguente

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \frac{|a_{ik}|}{|a_{ii}|} < 1 \qquad \forall i$$

Infine è bene rilevare che prima di passare alla risoluzione numerica di un sistema lineare sarebbe auspicabile uno studio teorico del "buon condizionamento" del sistema dato. Può infatti accadere che variazioni molto piccole dei dati (y_i, a_{ij}) conducano ad una rilevante variazione delle soluzioni. Senza addentrarci nello studio di tale delicato problema riportiamo qui un classico esempio di *sistema mal condizionato*:

$$\begin{cases} x-y = 1 \\ x-\left(1+\dfrac{1}{10^k}\right)y=0 \end{cases} \quad \text{ha come soluzione} \ (10^k+1,\ 10^k) \qquad (k\in N)$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x-\left[1-\dfrac{1}{10^k}\right]y=0 \end{cases} \quad \text{ha come soluzione} \ (-10^k+1, -10^k).$$

Una variazione di $\dfrac{2}{10^k}$ del coefficiente di y porta ad una variazione di $2\cdot 10^k$ nella soluzione!

§ 6 - Interpolazione polinomiale: formule di Lagrange e di Newton.

Consideriamo nel piano n+1 punti $A_0, A_1, \ldots, A_n$ di coordinate rispettivamente (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ con $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Il problema dell'*interpolazione (polinomiale)* consiste nel costruire l'unico polinomio $P(x)$ di grado minore od eguale ad n (*polinomio interpolatore*) il cui grafico passi per i punti A_i $i = 0,1 \ldots n$. In altri termini $P(x)$ è l'unico polinomio di grado minore od eguale ad n tale che

(15) $$P(x_i) = y_i \qquad i = 0,1,\ldots,n.$$

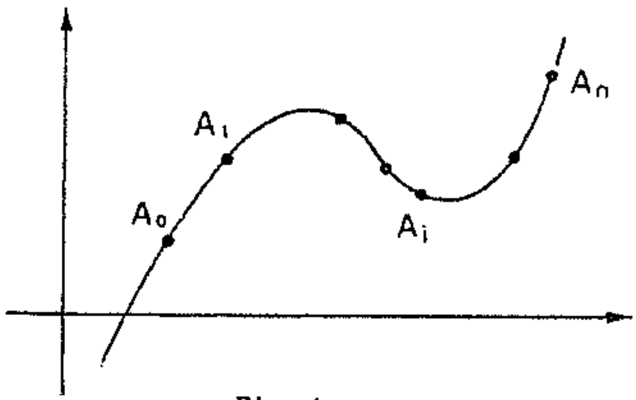


Fig. 4

Che $P(x)$ sia unico segue immediatamente dal principio di identità dei polinomi (cfr. Cap.VI par. 3); l'espressione di $P(x)$ (nella forma di Lagrange) è la seguente

16) $$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$ (Formula di interpolazione di Lagrange)[1]

----

(1) $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \ldots a_n$

E' evidente che $P(x)$ soddisfa le condizioni (15). Infatti posto

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{(x-x_o)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_o)\dots(x_i-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

si ha

$$L_i(x_k) = 0 \text{ se } i \neq k, \quad L_i(x_i) = 1;$$

ne segue

$$P(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x_k) = y_k .$$

Il polinomio interpolatore relativo ai punti (x_i, y_i) $i=0\dots n$ risulta particolarmente utile quando si voglia calcolare in un punto $x \epsilon [x_o, x_n]$ un valore approssimato di una funzione $f(x)$ di cui siano noti i valori $y_i = f(x_i)$ nei punti $x_o < x_1 < \dots < x_n$. In tal caso si ricorre all'eguaglianza approssimata

$$f(x) \cong P(x) \qquad x \epsilon [x_o, x_n]; \tag{17}$$

(tale eguaglianza è ovviamente esatta per $x=x_i$ in forza delle (15)).

La necessità di ricorrere alla (17) può derivare dal fatto che si conoscono i valori di $f(x)$ nei punti x_i ma si ignora l'espressione esplicita di $f(x)$.

(si pensi al caso in cui $y_0, y_1 \dots y_n$ siano dati sperimentali) od anche dalla complessità della espressione esplicita di $f(x)$.

Più avanti daremo, sotto opportune ipotesi di regolarità per $f(x)$, una stima dell'errore connesso con la (17).

Vogliamo ricavare adesso una espressione del polinomio interpolatore diverso dalla (16) e per certi versi più maneggevole. Tale espressione prende il nome di formula di *interpolazione di Newton*.

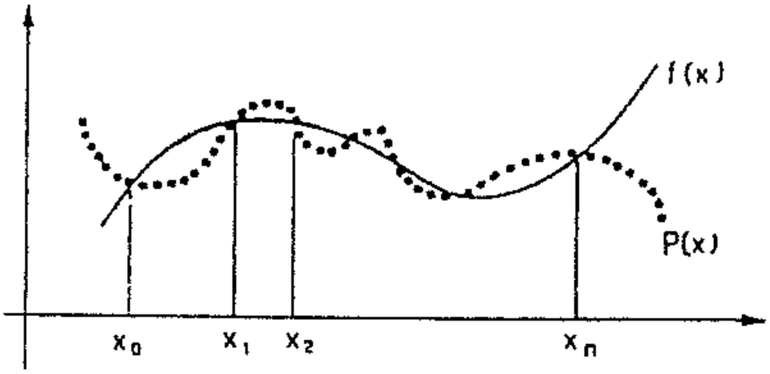


Fig. 5

A tal fine introduciamo le notazioni seguenti

$$f(x_i) = y_i$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

. . . .

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+h}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+h}] - f[x_i, \dots, x_{i+h-1}]}{x_{i+h} - x_i}$$

Le espressioni definite sopra prendono, nell'ordine, il nome di *differenze divise di ordine zero, uno, due* etc... relative ai punti (x_i, y_i).

Risulta comodo disporre le differenze divise così come da noi fatto nella seguente tabella.

	0	1	2		n
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$		
		$f[x_2, x_3]$		....	$f[x_0, x_1, .. x_n]$
x_3	$f(x_3)$	.			
.		.	$f[x_2, x_3, x_4]$		
.		.	.		
			.		
.		.	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
.		$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f(x_n)$				

E' possibile dimostrare che il polinomio interpolatore relativo agli n+1 punti (x_i, y_i) $i=0...n+1$ ha l'espressione:

(18) $P(x)=f(x_0)+f[x_0, x_1](x-x_0)+$

$$+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\dots+$$

$$+f[x_0,x_1,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

Infatti

$$P(x_0)=f(x_0) = y_0$$

$$P(x_1)=f(x_0)+f[x_0,x_1]\cdot(x_1-x_0)=f(x_0)+f(x_1)-f(x_0) =$$

$$= f(x_1) = y_1$$

$$P(x_2)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x_2-x_0)+ \frac{(f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1])}{x_2-x_0} \cdot$$

$$\cdot (x_2 - x_0)(x_2-x_1) = f(x_0)+(f(x_1)-f(x_0)) \frac{x_2-x_0}{x_1-x_0} +$$

$$+ f(x_2)-f(x_1)-(f(x_1)-f(x_0)) \frac{x_2-x_1}{x_1-x_0} = f(x_2)=y_2 .$$

Così procedendo si verifica che valgono le (15) e quindi l'asserto.

Al fine di ottenere una stima dell'errore connesso all'eguaglianza (17) supponiamo che f(x) sia una funzione definita in [a,b] ed ivi dotata di derivate fino all'ordine n+1. Detti $x_0<x_1<\dots< x_n$ n+1 punti di [a,b], posto $y_i = f(x_i)$ i=0,...,n ed indicato con P(x) il polinomio interpolatore relativo ai punti (x_i,y_i) si ha *che per ogni* $x\in[a,b]$ *esiste* $c\in[a,b]$ *tale che:*

$$(19) \qquad f(x)-P(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\ ;$$

in particolare se $f^{(n+1)}(x)$ è limitata in $[a,b]$, posto $M= \sup f^{(n+1)}(x)$ si ha:

$$(20) \qquad |f(x)-P(x)| \le M\ \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Un cenno della dimostrazione della (19) sarà dato nell'esercizio 6.4.
Osserviamo che se $a<x_0$ e/o $x_n < b$ la (19) vale anche con $x \notin [x_0,x_n]$. In tal caso si dirà che il valore approssimato $P(x)$ di $f(x)$ è *ottenuto per estrapolazione.*

Complementi ed esercizi

6.1 - Costruire il polinomio interpolatore relativo ai punti

(0,1), (2,1), (3,0)	$[-x^2/3+2x/3+1]$
(-1,2), (0,3), (1,4)	$[\ x+3\ ]$

6.2 - Posto $f(x) = 2^x$, $x_0=0.2$, $x_1=0.4$, $x_2=0.6$, $x_3 = 0.8$, $y_i = f(x_i)$ $i=0,1,2,3$, calcolare, usando il polinomio interpolatore di Newton relativo ai punti, (x_i,y_i), un valore approssimato di $\sqrt{2} = f(1/2)$. Dare una stima dell'errore (cfr. (20))

$$[f(1/2) \cong 1.4140\ldots\ ; \quad E \cong (2.1)\cdot 10^{-3}]$$

6.3 - Siano $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ numeri reali; dimostrare che se $f(x)$ è un polinomio di grado $m < n$ le differenze divise di ordine n relative ai punti $(x_i, f(x_i))$ $i = 0,1,\ldots,n$ sono nulle.

6.4 - Dimostrazione della (19). Fissiamo $x \neq x_i$ poichè per $x=x_i$ la (19) è banale. Sia α il numero reale per cui riesce

$$f(x) - P(x) - \alpha\ \psi(x) = 0$$

dove $\psi(x) = (x-x_0)\ldots(x-x_n)$; ovviamente è $\alpha = \dfrac{f(x)-P(x)}{\psi(x)}$

Per comodità supponiamo $x < x_0$; posto

$$F(y) = f(y)-P(y) - \alpha\ \psi(y)$$

si ha che F è derivabile in [a,b] e si annulla per $y=x,x_0,x_1,\ldots,x_n$. Pertanto in forza del teorema di Rolle in ognuno degli intervalli $[x,x_0]$, $[x_0,x_1]$, ...

$[x_{n-1}, x_n]$ esisterà un punto in cui $F'(y)$ vale zero. Siano $\xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{n-1}$ tali punti. Ancora per il teorema di Rolle in ognuno degli intervalli $[\xi_0, \xi_1]$, ..., $[\xi_{n-1}, \xi_n]$ esisterà un punto in cui si annulla $F''(y)$. Siano $\eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_{n-2}$ tali punti. Ripetendo n+1 volte tale ragionamento.....

6.5 - Provare che se $f(x)$ è dotata in $[a,b]$ di derivata n-ma continua, dati $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ in $[a,b]$ esiste $c \in [a,b]$:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^n(c)}{n!} .$$

Sia $y_i = f(x_i)$ $i=0\ldots n$; indicato con $P(x)$ il polinomio interpolatore relativo ai punti (x_i, y_i) $i=0\ldots n$, e con $Q(x)$ il polinomio interpolatore relativo ai punti (x_i, y_i) $i=0\ldots n-1$ si ha dalla (18)

$$f(x_n) = P(x_n) = Q(x_n) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots$$
$$\ldots(x_n - x_{n-1}).$$

Allora dalla (19) segue:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1}) = f(x_n) - Q(x_n) =$$

$$= (x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1})\,\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

e quindi l'asserto.

6.6 - Sia $f(x)$ derivabile in$[a,b]$ e siano $x_0<x_1 \ldots <$
$< x_n$ $n+1$ punti di $[a,b]$. Costruire (l'unico) polinomio $P(x)$ di grado $\leq n+1$ tale che

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i \qquad i = 0\ldots n+1$$

$$P'(x_k) = f'(x_k) \quad \text{per un fissato } k.$$

Detto $P_n(x)$ il polinomio interpolatore relativo ai punti (x_i,y_i) $i=0\ldots n+1$ si ha:

$$P(x)=P_n(x)+\frac{f'(x_k)-P_n'(x_k)}{\prod\limits_{i\neq k}(x_k-x_i)}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n).$$

6.7 - Sia $f(x)$ derivabile $n+2$ volte in $[a,b]$; indicato con $P(x)$ il polinomio di cui all'esercizio precedente provare che

$$f(x)=P(x)+\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_k)^2\ldots$$

$$\ldots(x-x_n)$$

[Traccia della dim: se $x=x_i$ $i=0\ldots n$ è ovvia; sia $x\neq$
$\neq x_i$. Per fissare le idee sia $x < x_0$; posto

$$F(y)=f(y)-P(y)-\alpha(x-x_0)\ldots(x-x_k)^2\ldots(x-x_n)$$

si scelga α in modo tale che : $F(x)=0$. Allora F si annulla in $n+2$ punti $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$; per Rolle $F'(x)$ ....].

§ 7 - **Metodi di integrazione numerica.**

Il calcolo dell'integrale definito di una funzione continua, così come da noi già sottolineato, costituisce un problema, in generale, assai complicato Di grande interesse sono perciò i metodi di integrazione numerica ed in questo paragrafo ne esporremo alcuni.

Sia $f(x)$ una funzione continua su $[a,b]$. Poniamo

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

A - *Metodo dei rettangoli*

Effettuiamo una decomposizione di $[a,b]$ in n intervalli parziali mediante i punti $x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_n = b$ con $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$. Fissiamo, inoltre, in ogni intervallo $[x_k, x_{k+1}]$ un punto c_k e poniamo

$$y_k = f(c_k)$$

E' naturale, ricordando la definizione di integrale, definito, assumere come valore approssimato di I il numero

$$(21) \qquad \boxed{I_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \,(x_{k+1} - x_k) = \frac{b-a}{n} \sum y_k}$$

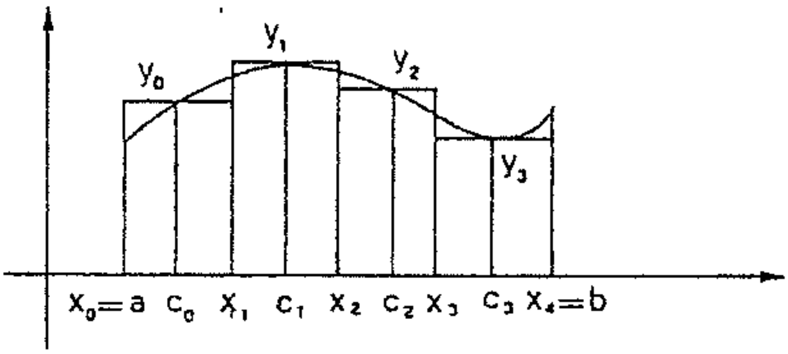


Fig. 6

Per dare una stima dell'errore

$$E_n = |I - I_n|$$

supponiamo che

i) f(x) è lipschitziana con costante L: risulti cioè

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'| \qquad \forall x, x' \in [a, b].$$

In tale ipotesi osservando che

$$I_n = \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} y_k \, dx$$

si ha:

$$E_n = \left| \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x)-y_k]dx \right| \leq \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)-$$

$$-f(c_k)|dx \leq L \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} |x-c_k| \ dx \leq$$

$$\leq L \sum_k \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = \frac{L}{2} \frac{(b-a)^2}{n} .$$

cioè

$$\boxed{E_n \leq \frac{L}{2} \frac{(b-a)^2}{n}} \tag{22}$$

Il metodo di approssimazione ora descritto prende, per un ovvio motivo, il nome di *metodo dei rettangoli*; esso consiste nell'approssimare f(x) con una "funzione a scalino" (cfr. fig. 6) cioè con una funzione costante in ogni intervallo parziale $[x_k, x_{k+1}]$.

Descriviamo l'algoritmo per il calcolo di I_n assumendo $c_k = x_{k+1}$:

1 - Si pone A = a, B = b, N = n.

2 - Si pone $P = \frac{B-A}{N}$.

3 - Si assume I = 0 e K = 0.

4 - Si pone K = K + 1

5 - I = I + f[A+KP].

6 - Se K < N si va al passo 4.

7 - I·P è l'approssimazione cercata (cioè $I_n = I\cdot P$).

B - *Metodo dei trapezi*

Conservando le notazioni precedenti possiamo dire che il *metodo dei trapezi* consiste nell'approssimare in ogni intervallo $[x_k, x_{k+1}]$ f(x) con il segmento di estremi $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, (fig.7) Precisamente si pone

$$\psi_n(x) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) \quad x \in [x_k, x_{k+1}]$$

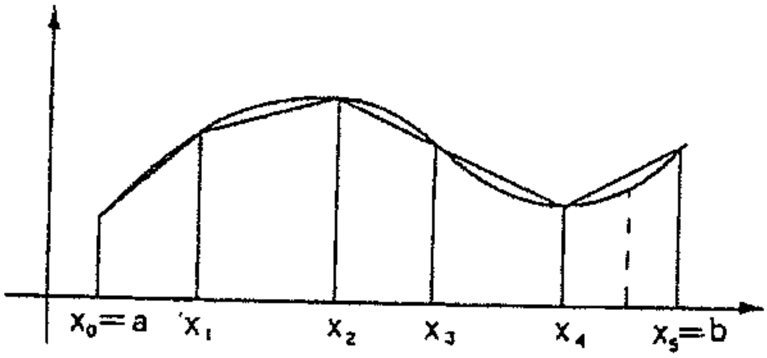


Fig. 7

(cioè in ogni intervallo $[x_k, x_{k+1}]$ $\psi_n(x)$ è il polinomio interpolatore relativo ai punti $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k+1}$ $f(x_{k+1})))$ e

$$I_n' = \int_a^b \psi_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \cdot (x - x_k)]dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k)+f(x_{k+1})] \frac{(x_{k+1}-x_k)}{2} =$$

$$= \frac{b-a}{2n} [f(a)+f(b)+2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)].$$

Quindi si ha

$$(23) \qquad \boxed{I'_n = \frac{b-a}{2n} [f(a)+f(b)+2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)]} \quad .$$

Per stimare l'errore

$$E'_n = |I - I'_n|$$

supponiamo che

ii) $f(x)$ è dotata in $[a,b]$ di derivata seconda limitata: $|f''(x)| \leq M$.

Si ha subito dalla (19):

$$E'_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)-\psi_n(x)|dx \leq \frac{M}{2} \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} |(x-x_k)\cdot$$

$$\cdot(x-x_{k+1})|dx;$$

ma

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |(x-x_k)(x-x_{k+1})|dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x-x_k)(x_{k+1}-x)dx=$$

$$= \frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{6}$$

e quindi

(24) $$\boxed{E'_n \le \frac{M}{12}\,\frac{(b-a)^3}{n^2}}\ .$$

Lasciamo al lettore il compito di verificare che se si suppone in luogo di ii) :

ii)' $f(x)$ ha derivata prima lipschitziana con costante L' si ha

(25) $$\boxed{E'_n \le \frac{L'(b-a)^3}{2n^2}}$$

C - *Metodo di Simpson*

Se in ogni intervallo $[x_k, x_{k+1}]$ si approssima $f(x)$ con il polinomio interpolatore relativo ai punti $x_k < c_k^1 < \ldots c_k^{(m-1)} < x_{k+1}$ si ottengono altre formule di quadratura. Limitiamoci qui a considerare il caso $m = 2$ che da luogo al metodo di Simpson. Indichiamo con c_k il punto medio di $[x_k, x_{k+1}]$ e poniamo

$$\phi_n(x) = \frac{2n^2}{(b-a)^2}\,[(x-x_k)(x-c_k)f(x_{k+1})-2(x-x_k)(x-x_{k+1})$$

$$f(c_k)+(x-x_{k+1})(x-c_k)f(x_k)] \quad \text{se } x\in[x_k, x_{k+1}];$$

in ogni intervallo $[x_k, x_{k+1}]$ $\phi_n(x)$ si riduce al polinomio inter polatore relativo ad i punti $(x_k, f(x_k)), (x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ $(c_k, f(c_k))$. Poniamo inoltre

$$I''_n = \int_a^b \phi_n(x)\,dx \ .$$

Un facile calcolo mostra che

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_n(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\,[f(x_k)+f(x_{k+1})+4\ f(c_k)] \ .$$

Ne segue che

$$(26) \qquad \boxed{I''_n = \frac{b-a}{6n}\,[f(x_o)+f(x_n)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+4\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)].}$$

Valutiamo l'errore

$$E''_n = |I-I''_n|$$

nell'ipotesi

iii) $f(x)$ è dotata di derivata terza limitata:
$|f'''(x)| \leq M'$.

Si ha dalla (19)

$$E''_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)-\phi_n(x)|dx \leq$$

$$\frac{M'}{6} \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} |(x-x_k)(x-c_k)(x-x_{k+1})| \; dx$$

e quindi

(27) $$\boxed{E''_n \leq \frac{M'}{12} \frac{(b-a)^4}{n^3}} \; .$$

Se però

ıv) f(x) è dotata dı derivata quarta limitata:
$|f^{(iv)}(x)| \leq M''$

si ha

(28) $$\boxed{E''_n \leq \frac{M''}{180} \frac{(b-a)^5}{(2n)^4}} \; .$$

Basterà provare la (28) nel caso n=1.

etto c il punto medio di [a,b] e Q(x) il polinomio, nterpolatore relativo ai punti (a,f(a)), (b,f(b)) , (c,f(c)) si ha (cfr. es. 6.6, 6.7):

$$f(x)-Q(x)=\frac{f'(c)-Q'(c)}{(c-a)(c-b)}\ (x-a)(x-c)(x-b)\ +$$

$$+\ \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}\ (x-a)(x-c)^2(x-b)$$

da cui

$$E_1'' = \left| \int_a^b (f(x)-Q(x)dx \right| =$$

$$= \frac{1}{4!} \left| \int_a^b f^{iv}(\xi)(x-a)\ (x-c)^2(x-b)dx \right|$$

poichè (cfr. es. 3.3 cap. XI) $\int_a^b (x-a)(x-c)(x-b)dx=0$.

D'altro canto

$$\frac{1}{4!} \left| \int_a^b f^{iv}(\xi)(x-a)(x-c)^2(x-b)dx \right| \leq$$

$$\leq \frac{M''}{4!} \int_a^b (x-a)(x-c)^2(b-x)dx = \frac{M''}{90}\ (\frac{b-a}{2})^5$$

e quindi la (28) nel caso n=1

Osserviamo che se f(x) è un polinomio di grado minore od eguale a 3 riesce $f^{iv}(x)=0$ e quindi dalla (28) segue

$$E_1'' = 0 \iff \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\ [f(a)+f(b)+4f(c)]$$

cioè *la formula di Simpson è esatta.*

Complementi ed esercizi

7.1 - Descrivere gli algoritmi per il calcolo di I'_n ed I''_n

7.2 - Posto $I = \int_1^2 (x^4-x)dx (=4.7)$ calcolare I_5, I'_5, I''_5.

[R. : $I_5 = 6.1932$, $I'_5 = 4.7932$, $I''_5 = 4.70001$]

7.3 - Posto $I = \int_{-2}^{-1} x^{-3}dx (=-0,375)$ calcolare I_{10}, I'_{10}

I''_{10}, I_{100}, I'_{100}, I''_{100}.

[R. $I_{10} = -0.42108$, $I_{100} = -0,37939$

$I'_{10} = -0,37733$, $I'_{100} = -0,37502$

$I''_{10} = -0,375$, $I''_{100} = -0,375$]

7.4 - Posto $I = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx \; (=\sqrt{2}-1)$ calcolare I''_{10}

[R.: 0,41421...]

7.5 - Calcolare con uno dei metodi descritti in tale paragrafo un valore approssimato di

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

con un errore non superiore a 10^{-k} $(k=1,2,3)$.

§ 8 Equazioni differenziali ordinarie.

Consideriamo il problema di Cauchy

$$(29)\qquad \begin{cases} y'(x) = f(x,y(x)) & x_o \leq x \leq b \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$$

nelle ipotesi (cfr. Cap. XII § 1) che garantiscono esistenza ed unicità di una soluzione $y(x)$ nell'intervallo $[x_o, b]$.

Vogliamo qui illustrare alcuni metodi per il calcolo numerico della soluzione di (29).

A - *Metodo di Eulero*

Fissato $h = \dfrac{b-x_o}{n}$ (h è comunemente detto "passo")

poniamo

$$x_k = x_o + k\,h \qquad k = 0,1,\ldots,n$$

e definiamo la formula ricorrente

$$(30)\qquad y_k = y_{k-1} + f\,[x_{k-1}, y_{k-1}]h \qquad k=1,2\ldots n.$$

Il metodo di Eulero consiste nell'assumere l'eguaglianza approssimata

$$y(x_k) \cong y_k$$

L'interpretazione geometrica della (30) è la seguente. Si parte dal valore esatto y_0 della soluzione $y(x)$ nel punto x_0; si conduce la tangente al grafico di $y(x)$ nel punto x_0 (che ha coefficiente angolare $y'(x_0)=f(x_0,y_0)$) e si assume come y_1 il valore della ordinata di tale retta nel punto x_1.
Se fosse $y_1 = y(x_1)$ si dovrebbe ripetere lo stesso ragionamento a partire da (x_1,y_1). In generale, però, $y_1 \neq y(x_1)$; si conduce allora per (x_1,y_1) la retta di coefficiente angolare $f(x_1,y_1)$ e si assume come y_2 il valore dell'ordinata di tale retta nel punto x_2. Così continuando si viene a costruire una spezzata il cui grafico è assunto come un'approssimazione del grafico di $y(x)$; tale spezzata prende il nome di "spezzata di Eulero" (cfr. fig. 8).

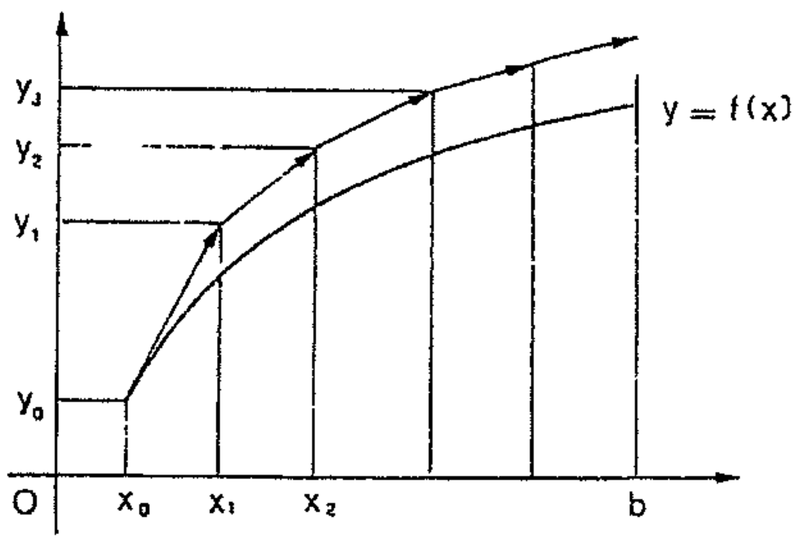


Fig. 8

Per valutare l'errore (di troncamento!)

$$E_{k,h} = E_k = |y(x_k)-y_k|$$

supponiamo che la funzione f dipenda dalla sola va - riabile y; poichè siano sotto le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità f(y) è allora dotata di deri vata f'(y) limitata in R.
Ovviamente la soluzione y(x) di (29) ha derivata seconda in $[x_0,b]$ e risulta

$$y''(x)=f'(y(x))y'(x)=f'(y(x))f(y(x)).$$

Dalla formula di Taylor di punto iniziale x_{k-1} si ricava

$$y(x_k)=y(x_{k-1})+y'(x_{k-1})h+\frac{y''(c)}{2}h^2$$

con $c\in[x_{k-1},x_k]$, pertanto

$$y(x_k)=y(x_{k-1})+f(y(x_{k-1}))h+f'(y(c))f(y(c))\frac{h^2}{2}.$$

Ricordando la (30) si ottiene

$$(31)\quad y(x_k)-y_k=[y(x_{k-1})-y_{k-1}]+[f(y(x_{k-1}))-f(y_{k-1})]h+$$

$$+f'(y(c))f(y(c))\frac{h^2}{2}.$$

Poichè $f(y(x))$ è continua in $[x_0, b]$ sia $M_1 = \sup_{[x_0,b]} |f(y(x))|$; poniamo inoltre $M_2 = \sup_{y\in R} |f'(y)|$.
Applicando il teorema di Lagrange al secondo termine del secondo membro della (31), si ha

$$(32)\quad E_k \leq E_{k-1} + h\, M_2\, E_{k-1} + M_1 M_2 \frac{h^2}{2} \leq (1+hM)E_{k-1} + M\frac{h^2}{2}$$

dove si è posto $M = \max\{M_2, M_1 M_2\}$. Dalla (32), ragionando per induzione, si deduce

$$(33)\qquad E_k \leq \frac{h}{2}\,[(1+hM)^k - 1\,] \quad .$$

Infatti la (33) è vera per k=0 poichè $E_0 = y(x_0) - y_0 = 0$ d'altronde se essa è vera per $k = i-1$ dalla (32) si ha

$$E_i \leq (1+hM)E_{i-1} + M\frac{h^2}{2} \leq (1+hM)\frac{h}{2}[(1+hM)^{i-1} - 1] +$$

$$+ M\frac{h^2}{2} = \frac{h}{2}[(1+hM)^i - 1]$$

e quindi l'asserto. Se si osserva che $1+\alpha < e^{\alpha} \Rightarrow (1+\alpha)^k < e^{\alpha k}$ dalla (33) si trae la seguente ulteriore maggiorazione dell'errore

$$(33)'\qquad \boxed{E_k \leq \frac{h}{2}[e^{khM} - 1] = \frac{h}{2}[e^{|x_k - x_0| M} - 1]}$$

OSSERVAZIONE 3 - In che senso il metodo di Eulero "converge"? La spezzata di Eulero relativa al passo $h = \frac{b-x_0}{n}$ è il grafico della seguente funzione

$$f_n(x) = y_{k-1} + f(y_{k-1})(x-x_{k-1}) \quad \text{se} \quad x_{k-1} \le x \le x_k$$

Denotata al solito con y(x) la soluzione esatta di (29), procedendo come per la dimostrazione della(32) si ha, se $x_{k-1} \le x \le x_k$

$$|y(x)-y_n(x)| \le |y(x_{k-1})-y_{k-1}| + M_2|y(x_{k-1})-y_{k-1}||x-x_{k-1}| +$$

$$+M_1M_2 \frac{|x-x_{k-1}|^2}{2} \le (1+Mh)E_{k-1} + M\frac{h^2}{2},$$

e quindi ricorrendo alla (33)'

$$|y(x)-y_n(x)| \le (1+Mh) \cdot \frac{h}{2} [e^{(b-x_0)M} - 1] + M\frac{h^2}{2}$$

da cui $\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$ dal momento che $\lim_{n\to\infty} h =$ $= \lim_{n\to\infty} \frac{b-x_0}{n} = 0.$

Quanto appena detto vale più in generale se la funzione f(x,y) verifica le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità.

B - *Metodo di Heun*

Considerato il problema di Cauchy (29) il metodo di Heun si fonda sulla formula ricorrente

$$(34) \quad y_{k+1} = y_k + h\,\frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + h\, f(x_k, y_k))}{2},$$

$$y_0 = y_0$$

dove $h = \dfrac{b - x_0}{n}$.

Cerchiamo di illustrare il significato geometrico della (34). Per avere un valore approssimato di $y(x_1) = y(x_0+h)$ si procede come segue (cfr. fig. 9): si conduce da (x_0, y_0) la retta tangente al grafico di $y(x)$; l'ordinata del punto di tale retta di ascissa x_1 è $y_0 + hf(x_0, y_0) = A_1$ (cfr. metodo di Eulero).

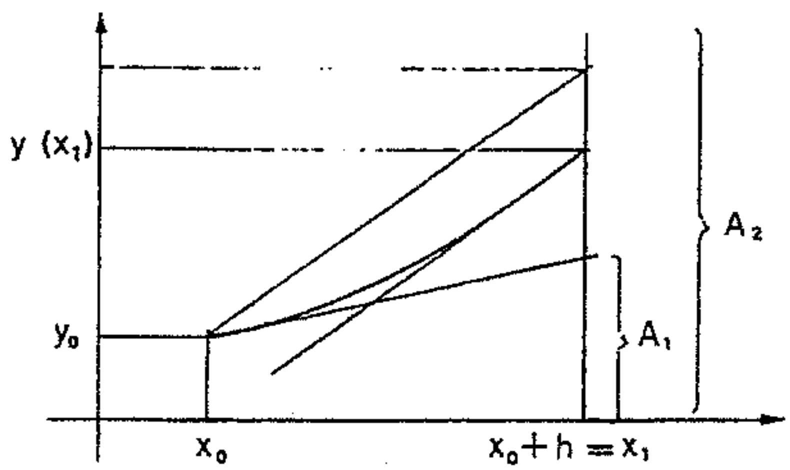


Fig. 9

Si conduce poi da (x_o, y_o), la parallela alla tangente al grafico di $y(x)$ in $x_1 = x_o+h$; l'ordinata del punto di tale retta di ascissa x_1 è $y_o+hf(x_1, y(x_o+h))$

$\equiv y_o + hf(x_1, y_o+h\ f(x_o, y_o)) = A_2$.

Ciò posto si assume $y_1 = \dfrac{A_1+A_2}{2}$ e così via.

Valutare l'errore

$$E_{h,k} = E_k = |y_k - y(x_k)|$$

è cosa complessa che esula dallo spirito del testo. Per avere un'idea di come ciò possa farsi ci mettiamo in ipotesi assai restrittive:

i) $f(x,y) = f(y)$ (cioè f non dipende da x);

ii) $f(y)$ è dotata di derivate continue fino all'ordine 3 e sia

$$|f^{(i)}(y)| \leq M, \qquad i = 0,1,2,3.$$

L'ipotesi ii) implica, in particolare, che la soluzione $y(x)$ del problema (29) ha derivata quarta continua.

Per comodità poniamo

$$\frac{f(y_k)+f(y_k+h\ f(y_k))}{2} = g(y_k, h)$$

cosicchè la (34) diventa

$$y_{k+1} = y_k + h\, g(y_k, h);$$

vale inoltre l'identità

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\, g(y(x_k), h) + [y(x_{k+1}) - y(x_k) -$$

$$-h\, g(y(x_k), h)\,]$$

Pertanto dalle ultime due eguaglianze si ricava:

$$(35) \quad E_{k+1} \leq E_k + h\, |g(y(x_k), h) - g(y_k, h)| +$$

$$+ \, |y(x_{k+1}) - y(x_k) - h\, g(y(x_k), h)|$$

Applicando il teorema di Lagrange e tenendo conto che $|f'| \leq M$ si ha facilmente

$$(36) \quad |g(y(x_k), h) - g(y_k, h)| \leq \frac{M}{2}\, E_k + \frac{M}{2}\, [E_k + hME_k] =$$

$$= ME_k + h\, \frac{M^2}{2}\, E_k \; .$$

Inoltre dalla formula di Taylor si ha:

$$(37) \quad y(x_{k+1}) - y(x_k) = y'(x_k) \cdot h + y''(x_k) \cdot \frac{h^2}{2} + y'''(x_k)\, \frac{h^3}{3!} +$$

$$+ \, y^{iv}(c_1)\, \frac{h^4}{4!}$$

$$(38)\quad f(y(x_k)+hf(y(x_k)))=f(y(x_k))+f'(y(x_k))\cdot(h\cdot f(y(x_k)))+$$

$$+f''(y(x_k))\cdot\frac{(hf(y(x_k)))^2}{2}+f'''(c_2)\cdot\frac{(hf(y(x_k)))^3}{3!}\quad .$$

Da (37) e (38) ricordando che

$$y'(x_k)=f(y(x_k)),\quad y''(x_k)=f'(y(x_k))\cdot f(y(x_k))$$

si ricava subito:

$$[y(x_{k+1})-y(x_k)]-h\ g(y(x_k),h)=[y'''(x_k)\ \frac{h^3}{3!}+$$

$$+y^{iv}(c_1)\ \frac{h^4}{4!}-\frac{h^3}{4}f''(y(x_k))f^2(y(x_k))-$$

$$-\frac{h^4}{12}\cdot f'''\ (c_2)f^3\ (y(x_k))]$$

e quindi

$$(39)\qquad |y(x_{k+1})-y(x_k)-h\ g(y(x_k),h)|\leq c\ h^3\ .$$

dove si è tenuto conto che i coefficienti delle po - tenze di h sono limitati e che $h\leq b-x_o$.

Da (35), (36) e (39) si ha in definitiva:

$$E_{k+1}\leq E_k+hME_k+h^2\ \frac{M^2}{2}\ E_k+ch^3=(1+\sigma\ h)E_k+c\ h^3$$

dove $\sigma = M + h \frac{M^2}{2}$.

Procedendo per induzione si ha allora (ricordando che $E_0=0$) :

$$E_k \leq \frac{c}{\sigma} h^2 \left[(1+h\sigma)^k - 1\right]$$

Da qui, come nella dimostrazione della (33)', si ottiene:

$$\boxed{E_k \leq \frac{c}{\sigma} h^2 \left[e^{kh\sigma} - 1\right] = \frac{c}{\sigma} h^2 \left[e^{|x_k - x_0|\sigma} - 1\right]} \tag{40}$$

E' pertanto subito evidente che tale metodo è "più veloce" del metodo di Eulero.

C - *Metodo di Runge- Kutta di ordine 4*

Il metodo di Runge-Kutta di ordine 4 si fonda, sulla formula ricorrente

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} \left[R_1 + 2R_2 + 2R_3 + R_4\right] \tag{41}$$

dove

$$R_1 = f(x_k, y_k), \quad R_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} R_1\right), \quad R_3 = f\left[x_k + \frac{h}{2},\right.$$

$$\left. y_k + \frac{h}{2} R_2\right] \quad R_4 = f(x_k + h, y_k + hR_3).$$

Senza entrare in laboriosi calcoli ci limitiamo qui ad osservare che tale metodo è considerevolmente più veloce dei precedenti. Si può infatti provare che, sotto opportune ipotesi su $f(x,y)$ per l'errore E_n vale una stima del tipo

$$\boxed{E_n \leq c\, h^4}$$

Complementi ed esercizi

8.1 - Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4\cos^2(y/4) \\ y(0)=0 \end{cases} \qquad x \in [0,1]$$

che ammette l'unica soluzione $y=4$ arctgx.

L'algoritmo di Eulero per il calcolo approssimato di $y(1)$ ($=\pi = 3.141592\ldots$) è

1 - N = n

2 - H = 1/N

3 - y = 0

4 - I = 0

5 - $Y = Y + 4\cos^2(y/4)\cdot H$

6 - $I = I+1$

7 - Se $I < N$ vai al passo 5

8 - Stampa Y

[n = 50 : 3.15551..., n=100 : 3.14854..., n = 500 :

: 3.14297...]

8.2 - Confrontare i risultati numerici contenuti nel l'esercizio precedende con la stima (33)'.

8.3 - Scrivere il diagramma di flusso dell'algoritmo di Heun per il calcolo approssimato di $y(1)$, dove $y(x)$ è la soluzione del problema dato in 8.1. Calcolare inoltre y_{50}, y_{100}, y_{500}

[3.14144..., 3.14155 ..., 3.14159...]

8.4 - Considerato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y+x}{x} & \\ & x\in[1,2] \\ y(1) = 0 & \end{cases}$$

calcolare con i tre metodi illustrati y_{10}, y_{50}, y_{100}

[Eulero : 1.81818..., 1.96078..., 1.98019..., Heun: 1.98667..., 1.99941..., 1.99985; Runge-Kutta:1.9998.

...,2,2]

8.5 - Il problema di Cauchy considerato in 8.4 ed il seguente

$$y' = \frac{2y + x}{x}$$

$$y(\tfrac{3}{2}) = 0.75 \quad (=3/4)$$

ammettono la stessa soluzione $y(x) = x^2 - x$.

Applicando il metodo di Eulero si trovano i valori approssimati di $y(2)$ seguenti : $y_{10} = 1{,}96774$......, $y_{50} = 1{,}99337$ che sono più precisi di quelli ottenuti in 8.4; perchè?

INDICE