58

00 18

A. Alvino L. Carbone G. Trombetti

- 0018 - 1/1

ESERCITAZIONI DI MATEMATICA

volume primo
parte prima

7

Liguori Editore

7665

Pubblicato da Liguori Editore
Via Mezzocannone 19, 80134 Napoli

© Liguori Editore, S.r.l., 1991

i diritti di traduzione, riproduzione e adattamento totale o parziale sono riservati per tutti i Paesi. Nessuna parte di questo volume può essere riprodotta, registrata o trasmessa con qualsiasi mezzo: elettronico, elettrostatico, meccanico, fotografico, magnetico (compresi microfilm, microfiches e copie fotostatiche).

Prima edizione italiana Novembre 1991

9 8 7 6 5 4 3 2 1

1998 1997 1996 1995 1994 1993

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

Printed in Italy, Officine Grafiche Liguori, Napoli

ISBN 88-207-1970-3

Indice

Cap. 1 Funzioni elementari ..... pag. 1

Cap. 2 Disequazioni e campi di esistenza ..... » 17

0. Nozione di disequazione e di sistema di disequazioni ..... » 17
1. Disequazioni di I grado e sistemi di disequazioni di I grado ..... » 19
   1.1 Disequazioni ..... » 19
   1.2 Sistemi ..... » 21
   1.3 Disequazioni prodotto e quoziente.... » 24
2. Disequazioni di secondo grado e sistemi .. » 29
   2.1 Disequazioni ..... » 29
   2.2 Sistemi ..... » 33
   2.3 Disequazioni quoziente e prodotto.... » 37
3. Disequazioni con funzioni potenza: disequazioni di ordine superiore e irrazionali ..... » 42
   3.1 Disequazioni con funzione potenza intera: disequazioni di ordine superiore ..... » 42
   3.2 Disequazioni con funzioni radice: disequazioni irrazionali..... » 46
   3.3 Disequazioni con funzioni di potenza ad esponente reale..... » 52
4. Disequazioni con il valore assoluto ..... » 56
5. Disequazioni esponenziali e logaritmiche . » 60
   5.1 Disequazioni esponenziali..... » 60
   5.2 Disequazioni logaritmiche..... » 64
   5.3 Disequazioni con funzioni iperboliche » 69
   5.4 Disequazioni con funzioni iperboliche inverse ..... » 72
6. Disequazioni trigonometriche e trigonometriche inverse ..... » 74
   6.1 Disequazioni trigonometriche..... » 74
   6.2 Disequazioni trigonometriche inverse. » 85
7. Campi di esistenza ..... » 91
   7.1 Primi campi di esistenza..... » 91
   7.2 Ulteriori campi di esistenza..... » 99

Cap. 3 Geometria analitica ..... pag. 109

1. Preliminari; equazioni della retta ..... » 109
1.1 Cambiamento di riferimento; distanza di due punti; punto medio ..... » 109
1.2 Equazione della retta ..... » 115
1.3 Equazioni parametriche ..... » 126
1.4 Esercizi di ricapitolazione ..... » 133
2. La circonferenza ..... » 136
3. L'ellisse, l'iperbole, la parabola ..... » 148

Cap. 4 I numeri complessi ..... » 167

1. Forma algebrica e forma trigonometrica ... » 167
2. Prodotti, rapporti, potenze e radici nel campo complesso ..... » 174
2.1 Prodotti, rapporti, potenze nel campo complesso ..... » 174
2.2 Radici nel campo complesso ..... » 176

Cap. 5 Algebra lineare ..... » 180

1. Spazi vettoriali e matrici ..... » 181
2. Determinanti ..... » 204
3. Sistemi lineari ..... » 223
4. Autovalori e autovettori ..... » 266
5. Il metodo di eliminazione di Gauss ..... » 275
5.1 Matrici a scalino ..... » 275
5.2 Sistemi a scalino ..... » 285
5.3 Risoluzione di sistemi col metodo di Gauss ..... » 298

Cap. 6 Limiti ..... » 307

1. Limiti di successioni ..... » 307
1.1 Definizioni ..... » 307
1.2 Operazioni con i limiti ..... » 313
1.3 Il numero e di Nepero e la costante C di Eulero-Mascheroni ..... » 318
1.4 Il criterio del rapporto e i teoremi sulle medie ..... » 322
1.5 Successioni estratte, massimo e minimo limite ..... » 327
2. Limiti di funzioni ..... » 330
2.1 Richiami ..... » 330
3. Forme indeterminate, infinitesimi ed infiniti ..... pag. 355
3.1 Nota introduttiva alle forme indeterminate ..... » 355
3.2 Limiti notevoli relativi alle funzioni trigonometriche e alle loro inverse .. » 359
3.3 Limiti notevoli relativi alle funzioni esponenziali logaritmiche e potenze .. » 362
3.4 Funzioni razionali ..... » 365
3.5 Funzioni trigonometriche ..... » 369
3.6 Funzioni potenze ..... » 374
3.7 Funzioni esponenziali e logaritmiche . » 379
3.8 Esercizi riassuntivi ..... » 384
4. Infinitesimi ed infiniti ..... » 392
4.1 Infinitesimi ..... » 392
4.2 Ulteriori esercizi sugli infinitesimi » 398
4.3 Infiniti ..... » 405
5. Successioni e continuità ..... » 411
5.1 Il teorema ponte ..... » 411
5.2 Successioni definite per ricorrenza .. » 415

Cap. 7 Derivazione ..... » 423

1. Derivazione delle funzioni elementari e regole di derivazione ..... » 423
2. Derivazione delle funzioni composte ..... » 430
3. Ulteriori esercizi ..... » 440

Cap. 8 Applicazioni della regola de l'Hopital .... » 457

1. Prime applicazioni della regola de l'Hopital ..... » 457
1.1 Forme indeterminate 0/0 ed ∞/∞ ..... » 458
1.2 Forma indeterminata 0·(∞) ..... » 465
1.3 Forma indeterminata ∞-∞ ..... » 467
1.4 Forma indeterminata 0^0, ∞^0, 1^∞ ..... » 470
2. Ulteriori applicazioni della regola de l'Hopital ..... » 474
3. Esercizi di ricapitolazione ..... » 483

ESERCITAZIONI DI MATEMATICA

CAPITOLO 1

FUNZIONI ELEMENTARI

In questo capitolo iniziale saranno richiamate in modo schematico le principali proprietà delle funzioni elementari: *dominio* (o *campo di esistenza*), *codominio*, *proprietà di monotonia*, *estremi*, *eventuali proprietà di parità*, *disparità e periodicità*. Inoltre di ogni funzione elementare sarà riportato, nel suo andamento qualitativo, il grafico in modo da visualizzare le proprietà sopra indicate.

Richiamiamo preliminarmente, per comodità del lettore, qualche definizione. Sia data la funzione

$$f : x \in A \to f(x) \in B$$

con A, B sottoinsiemi dell'insieme R dei numeri reali; se A è tale che: $x \in A \Rightarrow -x \in A$, f si dice *pari* se

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in A,$$

si dice *dispari* se

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in A.$$

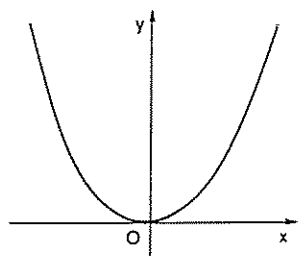
Se esiste $T>0$ tale che $x \in A \Rightarrow x \pm T \in A$, f si dice *periodica di periodo* T se

$$f(x) = f(x+T) \quad \forall x \in A.$$

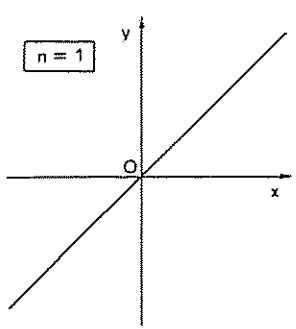
(1) Funzione potenza ad esponente naturale:
$f(x) = x^n$, $n \in N$.

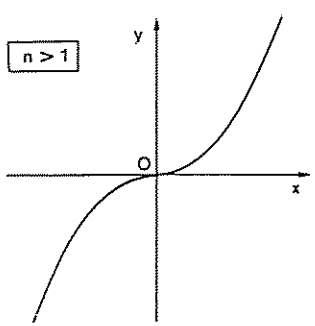
Distinguiamo due casi a seconda che n sia pari o dispari

n pari
$f: x \in R \to x^n \in [0,+\infty[$,
f è strett. decrescente in $]-\infty,0]$,
f è strett. crescente in $[0,+\infty[$,
f è pari essendo $(-x)^n = x^n$,
$\sup x^n = +\infty$, $\inf x^n = f(0) = 0$.



n dispari
$f : x \in R \to x^n \in R$,
f è strettamente crescente in R,
f è dispari essendo $(-x)^n = -x^n$,
$\sup x^n = +\infty$, $\inf x^n = -\infty$

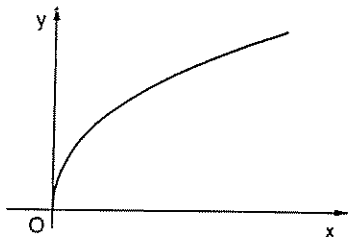




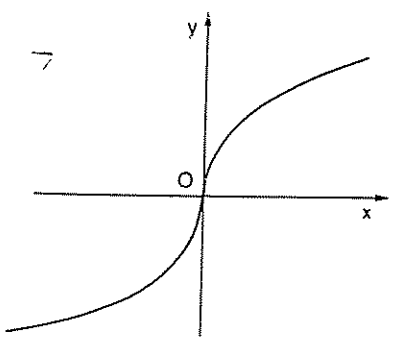
(2) Funzione radice n-ma: $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \geq 2$

Anche in questo caso distinguiamo il caso n pari e il caso n dispari

n pari
$f : x \in [0,+\infty[\to \sqrt[n]{x} \in [0,+\infty[$,
f è strettamente crescente in $[0,+\infty[$,
$\sup \sqrt[n]{x} = +\infty$,
$\inf \sqrt[n]{x} = f(0) = 0$



n dispari
$f : x \in R \to \sqrt[n]{x} \in R$,
f è strettamente crescente in $[0,+\infty[$,
$\sup \sqrt[n]{x} = +\infty$,
$\inf \sqrt[n]{x} = -\infty$



OSSERVAZIONE - È bene ricordare che nel caso in cui *n (>1) è dispari* le funzioni potenza n-ma e radice n-ma sono l'una l'inversa dell'altra nel senso che si ha

$$\sqrt[n]{x^n} = x = (\sqrt[n]{x})^n \ \forall x \in R.$$

Nel caso *n pari* la funzione potenza n-ma non è globalmente invertibile; se però se ne considera la restrizione a $[0, +\infty[$, tale restrizione è invertibile e la sua inversa è appunto la funzione radice n-ma. Si ha pertanto:

$$\sqrt[n]{x^n} = x = (\sqrt[n]{x})^n \qquad \forall x \in [0,+\infty[$$

mentre risulta

$$\sqrt[n]{x^n} = |x| \qquad \text{se } x \in R$$

dove $|x|$ è il *valore assoluto* o *modulo* di x, cioè

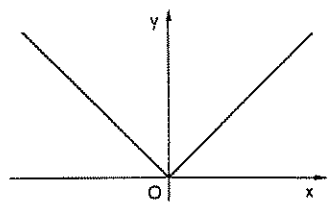
$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Ricordiamo per completezza le seguenti proprietà del valore assoluto:

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x+y| \leq |x| + |y|, \quad |xy| = |x|\,|y|.$$

(3) Funzione valore assoluto: $f(x) = |x|$.

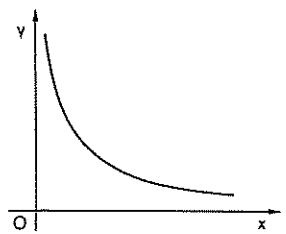
$f : x \in R \rightarrow |x| \in [0, +\infty[$,
f è strett. decr. in $]-\infty, 0]$,
f è strett. cr. in $[0, +\infty[$,
f è pari essendo $|-x| = |x|$,
$\sup |x| = +\infty$,
$\inf |x| = f(0) = 0$.



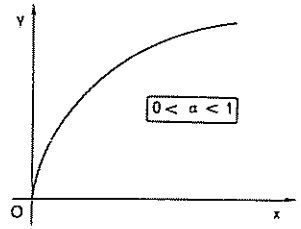
(4) Funzione potenza ad esponente reale: $f(x) = x^\alpha$ $\alpha \in R$.

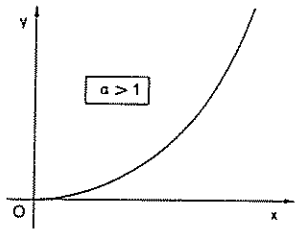
Distinguiamo due casi a seconda che risulti $\alpha<0$ o $\alpha>0$.

$\alpha<0$
$f : x \in]0,+\infty,[\rightarrow x^\alpha \in]0,+\infty[$,
f è strett.
decrescente in $[0,+\infty[$,
$\sup x^\alpha = +\infty$,
$\inf x^\alpha = 0$



$\alpha>0$
$f : x \in [0,+\infty[\rightarrow x^\alpha \in [0,+\infty[$,
f è strett. crescente in $[0, +\infty[$
$\sup x^\alpha = +\infty$, $\inf x^\alpha = f(0) = 0$

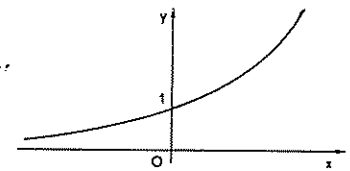




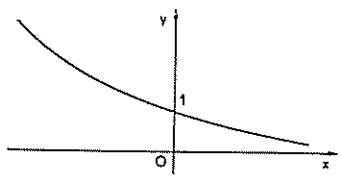
(5) Funzione esponenziale: $f(x) = a^x$, $a>0$ e $a \neq 1$.

Distinguiamo due casi a seconda che risulti $a>1$ o $0<a<1$.

$a>1$
$f : x \in R \rightarrow a^x \in]0,+\infty[$,
f è strett. crescente in R,
$\sup a^x = +\infty$, $\inf a^x = 0$.



$0<a<1$
$f : x \in R \rightarrow a^x \in]0,+\infty[$,
f è strett. decresc. in R,
$\sup a^x = +\infty$, $\inf a^x = 0$



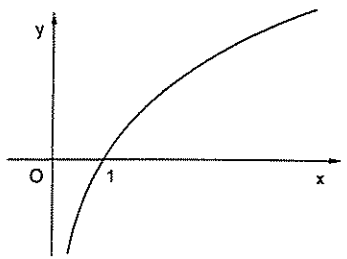
(6) Funzione logaritmo: $f(x) = \log_a x$, $a>0$ e $a \neq 1$.

Il lettore ricordi che le funzioni esponenziale e logaritmo di base a sono l'una l'inversa dell'altra risultando

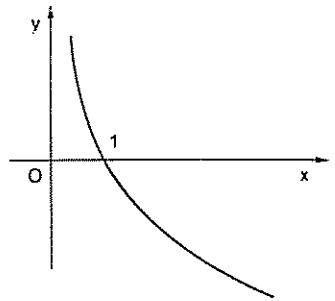
$$a^{\log_a x} = x \quad \forall x \in]0,+\infty[, \qquad \log_a a^x = x \quad \forall x \in R.$$

Segnaliamo inoltre che con la scrittura logx si intende il logaritmo in base e (numero di Neper).
Anche nel caso delle funzioni logaritmo vanno distinti due casi: $a>1$ e $0<a<1$.

a>1
$f: x \in]0,+\infty[\rightarrow \log_a x \in R$,
f è strett. crescente in $]0,+\infty[$,
$\sup \log_a x = +\infty$,
$\inf \log_a x = -\infty$



o<a<1
$f: x \in]0,+\infty[\rightarrow \log_a x \in R$,
f è strett. decrescente in $]0,+\infty[$,
$\sup \log_a x = +\infty$,
$\inf \log_a x = -\infty$



Ricordiamo ancora le seguenti proprietà di carattere algebrico relative alle funzioni potenza, esponenziale e logaritmo

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha, \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \quad x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x, \quad a^{x+y} = a^x a^y$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a b = \log_c b / \log_c a$$

$$\log_a b = 1/\log_b a$$

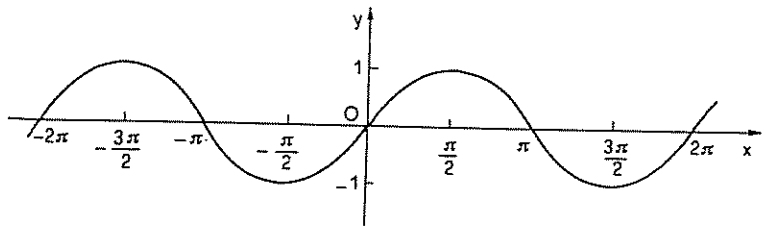
(7) Funzioni trigonometriche: $f(x) = \text{sen}x$, $\cos x$, $\text{tg}x$

funzione seno
$f: x \in R \rightarrow \text{sen}x \in [-1, 1]$,
f è strett. crescente in $\left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] k \in Z$,

f è strett. decrescente in $\left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right] k \in Z$,

f è dispari essendo $\text{sen}(-x) = -\text{sen}x$,
f è periodica di periodo 2π essendo $\text{sen}(x+2\pi) = \text{sen}x \ \forall x \in R$,

$\sup \text{sen}x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$, $\inf \text{sen}x = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1$.



funzione coseno

$f : x \in R \to \cos x \in [-1, 1]$,

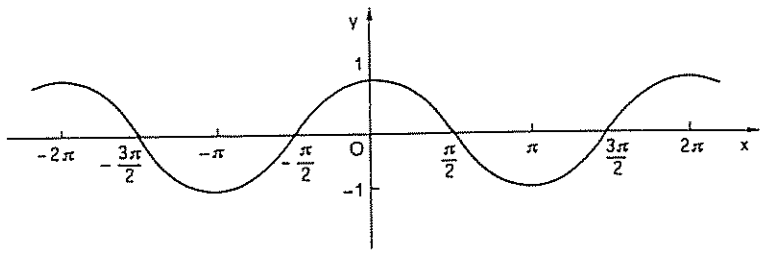
f è strett. crescente in $[\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi]$ $k \in Z$,

f è strett. decrescente in $[2k\pi, \pi+2k\pi]$ $k \in Z$,

f è pari essendo $\cos(-x) = \cos x$,

f è periodica di periodo 2π essendo $\cos(x+2\pi) = \cos x$ $\forall x$,

$\sup \cos x = \cos(2k\pi) = 1$, $\inf \cos x = \cos(\pi+2k\pi) = -1$



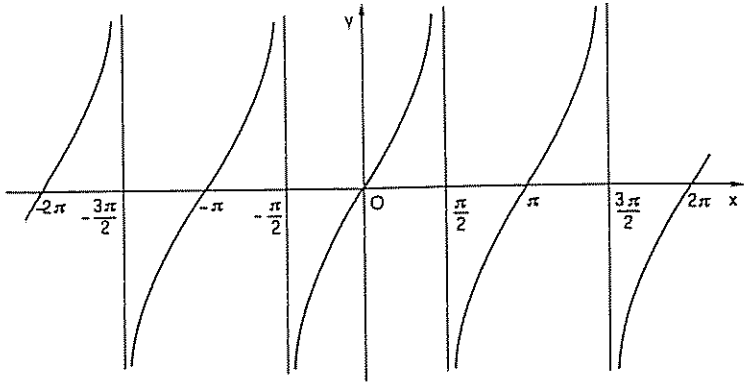
funzione tangente

$f: x \neq \pi/2 + k\pi$ $(k \in Z) \to \operatorname{tg} x \in R$,

f è strettamente crescente in $(k\pi-\pi/2, k\pi+\pi/2)$ $k \in Z$

f è dispari essendo $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$,

f è periodica di periodo π, $\sup \operatorname{tg} x = +\infty$, $\inf \operatorname{tg} x = -\infty$



Nelle tabelle che seguono raggruppiamo, per comodità del lettore, alcune classiche formule trigonometriche di uso comune e i valori delle tre funzioni trigonometriche in archi notevoli.

Formule di addizione e sottrazione

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha\pm\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \operatorname{sen}\beta, \\ \cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta, \\ \operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \end{cases}$$

Formule di duplicazione

$$\begin{cases} \operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha, \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha, \\ \operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \end{cases}$$

Formule parametriche

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

Formule di bisezione

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}, \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2} \\ \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \end{cases}$$

Formule di prostaferesi

$$\begin{cases} \operatorname{sen}p \pm \operatorname{sen}q = 2\operatorname{sen}\dfrac{p\pm q}{2} \cos\dfrac{p\mp q}{2} \\ \cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2} \cos\dfrac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\dfrac{p+q}{2} \operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2} \end{cases}$$

$\operatorname{sen}(\alpha+\pi) = -\operatorname{sen}\alpha$, $\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$

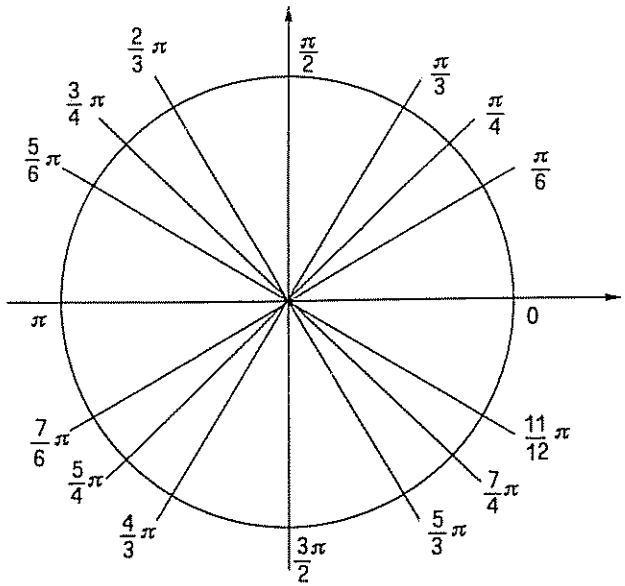
$\operatorname{sen}(\alpha+\frac{\pi}{2}) = -\cos\alpha$, $\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{tg}(\alpha+\frac{\pi}{2}) = -1/\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$, $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$, $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\alpha) = 1/\operatorname{tg}\alpha$

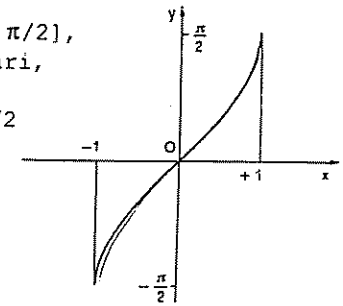
$\alpha=$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$
$\operatorname{sen}\alpha=$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
$\cos\alpha=$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$
$\operatorname{tg}\alpha=$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$

$\alpha=$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{12}\pi$
$\operatorname{sen}\alpha=$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$
$\cos\alpha=$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\operatorname{tg}\alpha=$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$

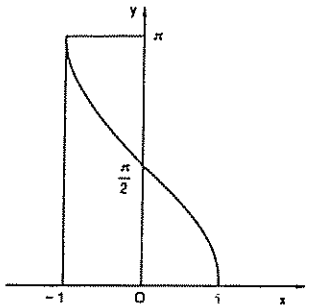


(8) Funzioni trigonometriche inverse:
$f(x)$ = arcsenx, arccosx, arctgx.

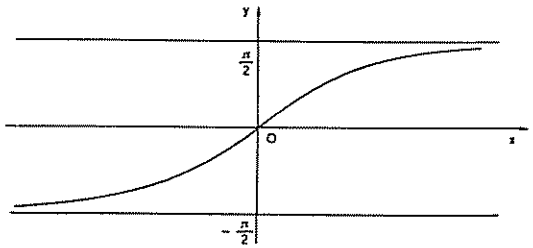
funzione arcoseno
$f: x \in [-1,1] \to \operatorname{arcsen} x \in [-\pi/2, \pi/2]$,
f è strett. crescente e dispari,
sup arcsen $x = \operatorname{arcsen} 1 = \pi/2$,
inf arcsen $x = \operatorname{arcsen}(-1) = -\pi/2$



funzione arcoseno
$f: x \in [-1,1] \to \arccos x \in [0,\pi]$,
f è strett. decrescente
sup arccos $x = \arccos(-1) = \pi$,
inf arccos $x = \arccos(1) = 0$.



funzione arcotangente
$f: x \in \mathbb{R} \to \operatorname{arctg} x \in]-\pi/2, \pi/2[$,
f è strett. crescente e dispari,
sup arctg $x = \pi/2$, inf arctg $x = -\pi/2$.



OSSERVAZIONE - Il lettore ricordi che

- arcoseno è la funzione inversa della *restrinzione* della funzione seno a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
- arcocoseno è la funzione inversa della *restrizione* della funzione coseno a $[0,\pi]$,
- arcotangente è la funzione inversa della *restrizione* della funzione tangente a $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Pertanto risulta

$\operatorname{sen}(\arcsin x)=x \quad \forall x\in[-1,1], \quad \arcsin(\operatorname{sen} x)=x \quad \forall x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\cos(\arccos x)=x \quad \forall x\in[-1,1], \quad \arccos(\cos x)=x \quad \forall x\in[0,\pi],$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x \quad \forall x\in R, \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)=x \quad \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

mentre

$\arcsin(\operatorname{sen} x)\neq x$ se $x\notin\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\arccos(\cos x)\neq x$ se $x\notin[0,\pi]$,

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)\neq x$ se $x\notin\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Ad esempio

$\arcsin(\operatorname{sen} 3\pi)=0, \quad \arccos(\cos(-\pi/4))=\pi/4,$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{7}{3}\pi)=\frac{\pi}{3}$.

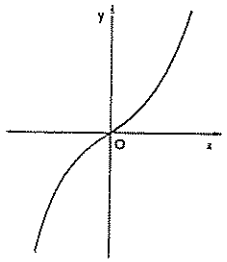
(9) Funzioni iperboliche: f(x)=senhx, coshx, tghx.

funzione seno iperbolico

$f: x\in R\to \operatorname{senh} x = (e^x-e^{-x})/2\in R,$

f è strett. crescente e dispari,

sup senhx = $+\infty$, inf senhx = $-\infty$.



funzione coseno iperbolico

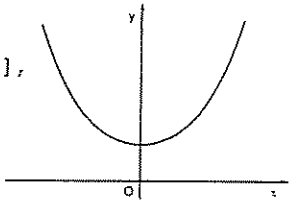
$f: x\in R\to \cosh x = (e^x+e^{-x})/2\in[1,+\infty[,$

f è strett. decrescente in $]-\infty,0]$,

strett. crescente in $[0,+\infty[$,

f e pari, sup coshx = $+\infty$,

inf coshx = cosh0=1.

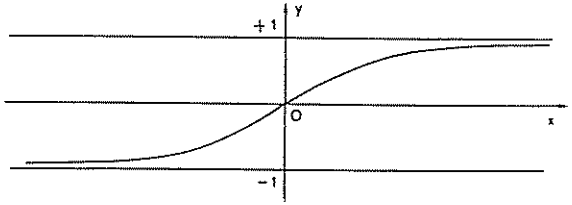


funzione tangente iperbolica

$f: x\in R\to \operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \in]-1,1[,$

f è strett. crescente e dispari,

inf tghx = -1, sup tghx=+1.



OSSERVAZIONE - Per concludere sulle funzioni iperboliche riportiamo le seguenti formule che in un certo senso motivano la particolare denominazione attribuita a tali funzioni

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{senh}(x\pm y)=\operatorname{senh}x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y;$$

$$\cosh(x\pm y)=\cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh}x \operatorname{senh} y,$$

$$\operatorname{senh}x = \frac{2\operatorname{tgh}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}}, \quad \cosh x = \frac{1+\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}}, \quad \operatorname{tgh}x = \frac{2\operatorname{tgh}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}},$$

$$\operatorname{senh}x \pm \operatorname{senh}y = 2 \operatorname{senh}\frac{x\pm y}{2} \cosh\frac{x\pm y}{2},$$

$$\operatorname{senh}x + \cosh y = 2 \cosh\frac{x+y}{2} \cosh\frac{x-y}{2},$$

$$\operatorname{senh}x - \cosh y = 2 \operatorname{senh}\frac{x+y}{2} \operatorname{senh}\frac{x-y}{2}.$$

(10) Funzioni inverse delle funzioni iperboliche: $f(x)=$ settsenhx, settcoshx, setttghx

Il lettore ricordi che:

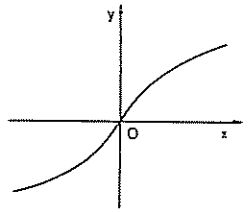
- la funzione inversa della funzione seno iperbolico è nota come funzione settore seno iperbolico;
- la funzione inversa della restrizione della funzione coseno iperbolico a $[0,+\infty[$ è nota come funzione settore coseno iperbolico;
- la funzione inversa della funzione tangente iperbolica è nota come funzione settore tangente iperbolica.

funzione settore seno iperbolico

$f: x\in R \to \operatorname{settsenh}x = \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\in R,$

f è strett. crescente e dispari,

sup settsenhx = $+\infty$, inf settsenhx$=-\infty$.

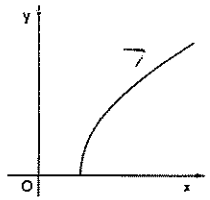


funzione settore coseno iperbolico

$f: x\in [1,\infty[\to \operatorname{settcosh}x = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \in [0,+\infty[,$

f è strett. crescente,

sup settcoshx = $+\infty$, inf settcoshx = settcosh(1)=0.

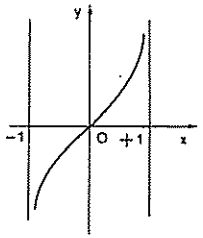


funzioni settore tangente iperbolico

$f: x\in]-1,1[\to \operatorname{setttgh}x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \in R,$

f è strett. crescente e dispari,

sup setttghx = $+\infty$, inf setttghx = $-\infty$.

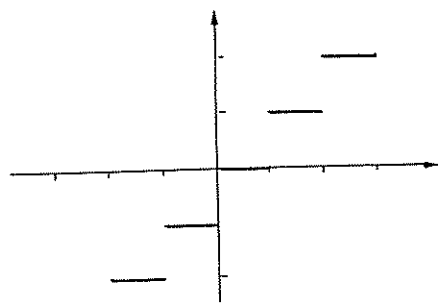


(11) Funzioni parte intera: $f(x) = [x]$

Dato un numero reale x si definisce *parte intera* di x, e si denota con il simbolo $[x]$, il più grande intero relativo minore o uguale a x. Per esempio

$[\pi] = 3, \qquad [-e] = -3, \qquad [1/2] = 0.$

$f: x \in R \to [x] \in Z$
f crescente
$\sup [x] = +\infty$
$\inf [x] = -\infty$



CAPITOLO 2

DISEQUAZIONI E CAMPI DI ESISTENZA

0. - Nozione di disequazione e di sistema di disequazioni

Sia f una funzione definita in $A \subseteq R$. Risolvere la *disequazione*

$$f(x) < a \quad (f(x) > a) \qquad \text{con } a \in R$$

significa determinare l'insieme

$$\{x \in A : f(x) < a\} \qquad (\{x \in A : f(x) > a\})$$

che costituisce *l'insieme delle soluzioni* della disequazione data.

Risolvere un *sistema di due o più disequazioni* significa determinare l'insieme dei numeri reali che risolvono "simultaneamente" tutte le disequazioni che compongono il sistema; tale insieme (*insieme delle soluzioni del sistema*) si ottiene *intersecando* tra loro gli insiemi delle soluzioni delle singole disequazioni.

Ad esempio, dati $a, b \in R$, risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x) < a \\ g(x) > b \end{cases}$$

(dove f(x) è una funzione definita in A e g(x) in B) significa determinare l'insieme

$$\{x\in A:\ f(x)<a\} \cap \{x\in B:\ g(x) >b\}.$$

Supposto a<b, osserviamo che spesso il sistema

$$\begin{cases} f(x) > a \\ f(x) < b \end{cases}$$

viene indicato con la scrittura sintetica

$$a< f(x) <b.$$

Due disequazioni (o più in generale due sistemi di disequazioni) si dicono *equivalenti* se hanno lo stesso insieme di soluzioni; per indicare che due disequazioni (o sistemi) sono equivalenti si usa interporre tra esse il simbolo $\Leftrightarrow$; ad esempio

$$f(x) > a \quad \Leftrightarrow \quad f(x)+h > a+h \quad \forall h\in R.$$

A partire da quanto detto risulta infine ovvio il significato di scritture dal tipo

$$f(x) \geq a, \qquad f(x) \leq a;$$

ad esempio l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$f(x) \leq a$$

è l'insieme

$$\{x\in A:\ f(x) <a\} \cup \{x\in A:\ f(x)=a\}$$

1. Disequazioni di I grado e sistemi di disequazioni di I grado

1.1 Disequazioni

Ricordiamo che le disequazioni di I grado ($a\neq 0$)

(i) $ax+b >0$ (<0)
(ii) $-ax-b <0$ (>0)

sono *equivalenti*. Pertanto ci si può sempre ricondurre al caso a>0 e si ha

a>0

$$ax+b >0 \Leftrightarrow ax >-b \Leftrightarrow x>-b/a$$

$$ax+b <0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x<-b/a$$

Risolvere le seguenti disequazioni di I grado

1) $2x-3 >0$

2) $-4x+8 <0$

3) $5x-10 \leq 0$

4) $\frac{x-2}{3}+\frac{x}{4} \leq 1-3x$

5) $\frac{3}{2}x-5 \leq \frac{x}{4}+\frac{10x+1}{8}$

6) $\frac{x-1}{2} > \frac{3x+7}{6}$

7) $\sqrt{3}\,x - \frac{5}{2} \geq \frac{x}{2}-\frac{3x+10}{4}$

8) $2x+1 < 5x + \frac{3}{2}$

9) $\frac{x}{2}+\frac{4}{5} > \frac{8+5x}{10}$

10) $\frac{x}{2}+\frac{1}{3} < \frac{x}{3}+\frac{1}{4}$

Risposte

1) $x > 3/2$ 2) $x > 2$ 3) $x \leq 2$
4) $x \leq 20/43$ 5) $\forall x\in R$ 6) $\emptyset$
7) $x \geq 0$ 8) $x >-1/6$ 9) $\emptyset$
10) $x < -1/2$

Svolgimento (da 1 a 6)

1) Facendo riferimento alla tabella si ha:

$$2x-3>0 \Leftrightarrow 2x>3 \Leftrightarrow x>3/2.$$

2) Sulla falsariga dell'esercizio 1) si ha

$$-4x+8<0 \Leftrightarrow 4x-8>0 \Leftrightarrow 4x>8 \Leftrightarrow x>2.$$

3) Procedendo come negli esercizi precedenti si ha

$$5x-10 \le 0 \Leftrightarrow 5x \le 10 \Leftrightarrow x \le 2.$$

4) Data la disequazione

$$\frac{x-2}{3}+\frac{x}{4} \le 1-3x$$

essa è equivalente a quella che si ottiene moltiplicando per 12 ambo i membri:

$$4(x-2)+3x \le 12-36x \Leftrightarrow 43x-20 \le 0 \Leftrightarrow x \le 20/43.$$

5) Procedendo come nell'es. 4) si ha:

$$\frac{3}{2}x-5 \le \frac{x}{4}+\frac{10x+1}{8} \Leftrightarrow 12x-40 \le 2x+10x+1 \Leftrightarrow 12x-12x-41 \le 0.$$

La disequazione di partenza e pertanto verificata da ogni $x \in R$ poiché essa è equivalente alla relazione $-41 \le 0$ (vera indipendentemente da x).

6) Procedendo come nell'es. 5) si ha:

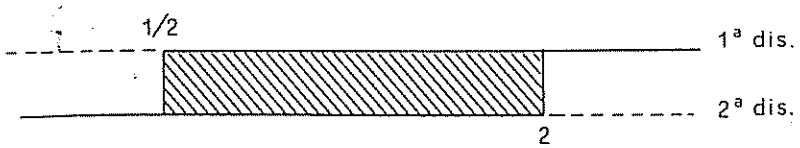
$$\frac{x-1}{2} > \frac{3x+7}{6} \Leftrightarrow 3x-3 > 3x+7 \Leftrightarrow -10>0.$$

La disequazione di partenza non è verificata da alcun $x \in R$ poiché essa è equivalente alla relazione $-10>0$ (falsa indipendentemente da x).

1.2 Sistemi

Osserviamo che nel risolvere un sistema di disequazioni può essere utile "*visualizzare*" le soluzioni delle singole disequazioni indicando (cfr. fig. 1) con una linea continua "*le zone*" in cui una disequazione è soddisfatta; in tal modo le soluzioni del sistema si troveranno "intersecando le linee continue". Ad esempio si consideri il sistema

$$\begin{cases} 6x-3>0 \\ 2x-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1/2 \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow 1/2<x<2$$



Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni di I grado

1) $\begin{cases} 5x+10>0 \\ x-4<0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x-2>2x+3 \\ x+1 \ge 2x-5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} < \frac{3x-7}{6} \\ x+5 \ge 2x-4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x+1}{3} > \frac{1+2x}{6} \\ \frac{x+5}{\sqrt{3}} \ge \frac{7x-9}{\sqrt{5}} \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x+3 > 3x+1 \\ 7x-9/2 > \frac{12x-1}{2} \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{x+2}{\sqrt{5}} < x \\ 3x-4 > \frac{2x-12}{3} \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x+\frac{2}{3} \le \frac{x}{2}+4 \\ \frac{x-1}{2} > \frac{3x+5}{3} \end{cases}$

8) $\begin{cases} \frac{x}{2}+7 \ge \frac{3x+1}{6} \\ x+2 < \frac{4x+9}{4} \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x - 1 \geq x+3 \\ 3x < 2x+6 \\ \dfrac{x-1}{4} > \dfrac{x+1}{6} \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{6} - \dfrac{x+1}{3} < x+1 \\ \dfrac{x-3}{2} + \dfrac{x-1}{4} \geq \dfrac{2x-1}{6} \\ 2x+3 \geq x-4 \end{cases}$

Risposte

1) $-2<x<4$ 2) $5<x\leq 6$ 3) $\emptyset$

4) $x \leq \dfrac{5\sqrt{5}+9\sqrt{3}}{7\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ 5) $\emptyset$ 6) $x > \dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

7) $x < -13/3$ 8) R 9) $5 < x < 6$

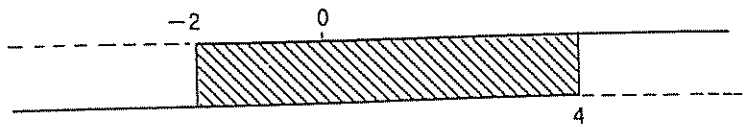
10) $x \geq 19/5$

Svolgimento (da 1 a 5)

1) Si ha facilmente la seguente equivalenza

$$\begin{cases} 5x+10 > 0 \\ x-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x<4 \end{cases} \Leftrightarrow -2<x<4$$

e graficamente



2) Procedendo come nell'esercizio 1) si ha:

$$\begin{cases} 3x - 2 > 2x + 3 \\ x+1 \geq 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 > 0 \\ x - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 5<x \leq 6$$

3) Procedendo come negli esercizi precedenti si ha:

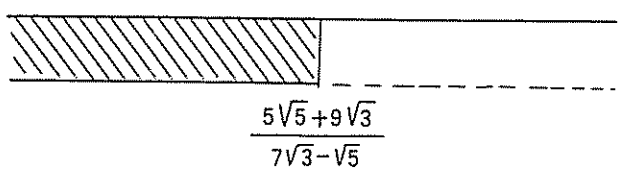
$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} < \dfrac{3x-7}{6} \\ x+5 \geq 2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{6} < 0 \\ x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \emptyset \\ x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset;$$

osserviamo che in generale quando una delle disequazioni che compaiono in un sistema non ha soluzioni il sistema stesso non ha soluzioni.

4) Procedendo come negli esercizi precedenti si ha:

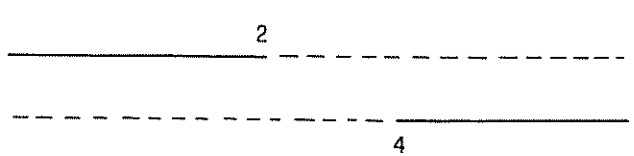
$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} > \dfrac{1+2x}{6} \\ \dfrac{x+5}{\sqrt{3}} \geq \dfrac{7x-9}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{6} \\ (\sqrt{5} - 7\sqrt{3})x + 5\sqrt{5} + 9\sqrt{3} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in R \\ x \leq \dfrac{5\sqrt{5}+9\sqrt{3}}{7\sqrt{3}-\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \dfrac{5\sqrt{5}+9\sqrt{3}}{7\sqrt{3}-\sqrt{5}}.$$



5) Procedendo come negli esercizi precedenti si ha:

$$\begin{cases} 2x + 3 > 3x + 1 \\ 7x - 9/2 > \dfrac{12x-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ 14x - 9 > 12x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$



1.3 Disequazioni prodotto e quoziente

Le equivalenze riassunte nella tabella seguente discendono dal fatto elementare che il prodotto di due numeri è positivo se e solo se essi hanno lo stesso segno, negativo se e solo se hanno segni opposti *(regola dei segni)*.

L'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad (\text{o } P(x)\cdot Q(x) > 0)$$

si ottiene facendo l'unione degli insiemi delle soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}$$

Analogamente l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \quad (\text{o } P(x)\cdot Q(x) < 0)$$

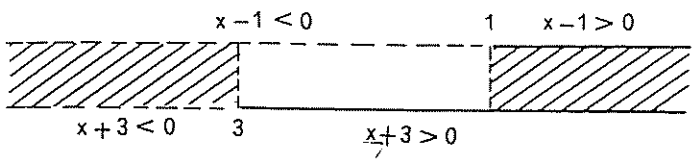
si ottiene facendo l'unione degli insiemi delle soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases}$$

Per visualizzare il procedimento risolutivo indicato nella tabella può essere utile procedere come segue: indicare *"le zone"* in cui $P(x)$ è positiva con una linea continua e quelle in cui è negativa con una linea tratteggiata ed analogamente per $Q(x)$; nel caso della disequazione $P(x)/Q(x) > 0$ le soluzioni si troveranno (grazie alla regola dei segni!) *"intersecando"* le linee continue tra loro e le linee tratteggiate tra loro (cfr. fig. 1). Nel caso della disequazione $P(x)/Q(x) < 0$ basterà invece intersecare le linee tratteggiate con le linee continue; ad esempio:

$$(x-1)(x+3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} ; \begin{cases} x-1 < 0 \\ x+3 < 0 \end{cases}$$

si ha:



E quindi la disequazione è verificata per $x<-3$, $x>1$.

Risolvere le seguenti disequazioni fratte o prodotto

1) $(x-1)(x+3) < 0$

2) $\frac{x-5}{x+4} > 0$

3) $\frac{x-2}{x-3} \geq 1$

4) $(3x+4)(5x+2) \leq 0$

5) $\frac{x-1}{3-2x} + 2 \leq 0$

6) $(\frac{x}{2} + 2x^2) \geq 0$

7) $(x-5)(\frac{3}{4}x - 2 - x) > 0$

8) $\frac{x+1}{x+2} > \frac{3}{2x+4}$

9) $\frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x-1}$

10) $\frac{x-3}{2x+5} \leq \frac{3}{2}$

Risposte

1) $-3<x<1$ 2) $x<-4,\ x>5$ 3) $x>3$

4) $-\frac{4}{3}\le x\le -\frac{2}{5}$ 5) $\frac{3}{2}<x\le\frac{5}{3}$ 6) $x\le -\frac{1}{4},\ x\ge 0$

7) $-8<x<5$ 8) $x>\frac{1}{2},\ x<-2$ 9) $-1<x<1$

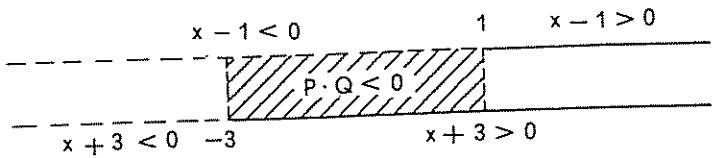
10) $x\le -\frac{21}{4},\ x>-\frac{2}{5}$

Svolgimento (da 1 a 5)

1) La disequazione $(x-1)(x+3)<0$ è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+3<0 \end{cases},\quad \begin{cases} x-1<0 \\ x+3>0 \end{cases};$$

il primo sistema non ha soluzioni; il secondo è soddisfatto per $-3<x<1$ e quindi la disequazione di partenza è verificata per $-3<x<1$; ciò è evidente dall'esame della figura sottostante:



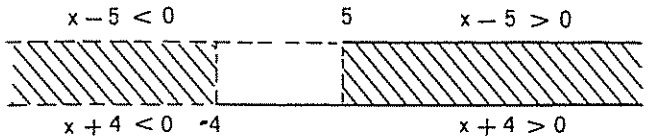
2) La disequazione

$$\frac{x-5}{x+4}>0$$

è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x-5>0 \\ x+4>0 \end{cases},\quad \begin{cases} x-5<0 \\ x+4<0 \end{cases};$$

L'insieme delle soluzioni del primo sistema è $\{x:x>5\}$ e quello del secondo $\{x:x<-4\}$; quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione fratta è $\{x:x<-4\}\cup\{x:x>5\}$ (cfr. anche la figura)



3) La disequazione

$$\frac{x-2}{x-3}\ge 1$$

va ricondotta alla forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\lessgtr 0;$$

a tale scopo si procede come segue:

$$\frac{x-2}{x-3}\ge 1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-3}-1\ge 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3}\ge 0.$$

L'ultima disequazione è (ovviamente!) equivalente a

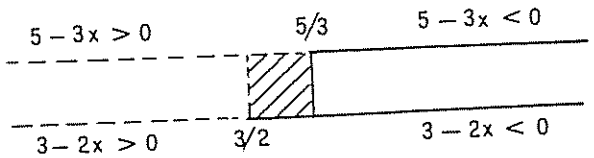
$$x-3>0 \Leftrightarrow x>3.$$

4) La disequazione data è equivalente ai sistemi

$$\begin{cases} 3x+4\ge 0 \\ 5x+2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{3}\le x\le -\frac{2}{5},\quad \begin{cases} 3x+4\le 0 \\ 5x+2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

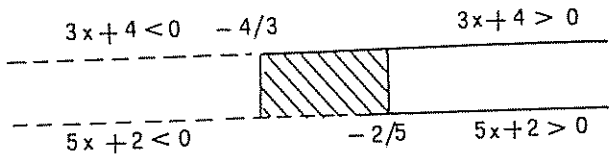
e quindi le soluzioni della disequazione assegnata sono

$$-\frac{4}{3}\le x\le -\frac{2}{5}$$



5) Procedendo come nell'es. 2) si ha:

$$\frac{x-1}{3-2x}+2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{5-3x}{3-2x} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-3x \ge 0 \\ 3-2x<0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 5-3x \le 0 \\ 3-2x>0 \end{cases}$$



Il primo sistema non ha soluzioni, il secondo ha le soluzioni $3/2<x\le 5/3$; pertanto la disequazione data ha le soluzioni $3/2<x\le 5/3$.

2. Disequazioni di secondo grado e sistemi

2.1 Disequazioni

Le disequazioni di secondo grado ($a\neq 0$)

i) $ax^2+bx+c>0$ (<0)

ii) $-ax^2-bx-c<0$ (>0)

sono equivalenti; pertanto ci si può sempre ricondurre al caso $a>0$.

$a>0$

I caso: $\Delta=b^2-4ac>0$. Il trinomio ha due radici reali

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} < x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

e vale l'eguaglianza

$$ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)(x-x_2).$$

Quindi

$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow x<x_1,\ x>x_2$

$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow x_1<x<x_2.$

II caso: $\Delta=0$. Il trinomio ha una radice reale $x_0=-\frac{b}{2a}$ e vale l'eguaglianza: $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$;

da qui si ha:

$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow$ ogni $x\neq x_0$ è soluzione

$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow$ nessun $x\in R$ è soluzione.

III caso: $\Delta<0$. Il trinomio non ha radici reali e vale l'eguaglianza:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

da qui si ha:

$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow$ ogni $x\in R$ è soluzione

$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow$ nessun $x\in R$ è soluzione.

Risolvere le seguenti disequazioni

1) $x^2-5x+4>0$

2) $4-x^2>0$

3) $x^2+x+1<0$

4) $x^2+2x-3\leq 0$

5) $2x^2-4x+2>0$

6) $3x-x^2-10\leq 0$

7) $5x^2+9\geq 0$

8) $(x-2)(x-3)\leq 0$

9) $\frac{x^2-3}{6}\geq\frac{6x-2}{3}-x+\frac{1}{3}$

10) $(x-2)x\leq(x-2)^2$

11) $(x+1)(x+2)<2(x-1)(x+1)+3x$

12) $3x^2+x\leq 0$

13) $5x^2+x+1\leq 0$

14) $\frac{x^2}{2}+x\leq-\frac{1}{2}$

15) $x^2-5<0$

16) $(2x-1)(2x+1)\leq 5x^2+2x$

17) $x-\sqrt{2}<x(\sqrt{2}-x)$

18) $5x^2-4x-2\geq(x+2)(x-2)$

19) $\frac{x^2-1}{3}\geq\frac{x^2+1}{6}$

20) $2x+7>(x+2)^2$

21) $\frac{x^2+3}{2}>\frac{2\sqrt{6}x-x^2}{2}$

22) $(x+3)^2>5x^2+36+6(1+2\sqrt{3})x$

23) $(x+1)^2+2x(x-1)\geq 2$

24) $x(x-6)<6-x$

Risposte

1) $x<1,\ x>4$
2) $-2<x<2$
3) $\emptyset$
4) $-3\leq x\leq 1$
5) $x\neq 1$
6) $\forall x\in R$
7) $\forall x\in R$
8) $2\leq x\leq 3$
9) $x\leq 3-\sqrt{10},\ x\geq 3+\sqrt{10}$
10) $x\leq 2$
11) $x<-2,\ x>2$
12) $-\frac{1}{3}\leq x\leq 0$
13) $\emptyset$
14) $x=-1$
15) $-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$
16) $\forall x\in R$
17) $-1<x<\sqrt{2}$
18) $\forall x\in R$
19) $x\leq-\sqrt{3},\ x\geq\sqrt{3}$
20) $-3<x<1$
21) $x\neq\sqrt{3}/\sqrt{2}$
22) $\emptyset$
23) $x\leq-\frac{1}{\sqrt{3}},\ x\geq\frac{1}{\sqrt{3}}$
24) $-1<x<6$

Svolgimento (da 1 a 8)

1) Per risolvere la disequazione

$$x^2-5x+4>0$$

calcoliamo il discriminante; si ha: $\Delta=9>0$; ne segue che il trinomio ha due radici reali 1,4; pertanto seguendo la tabella si ha che le soluzioni della disequazione data sono $x<1$, $x>4$ (le soluzioni sono esterne all'intervallo delle radici).

2) Osserviamo innanzitutto che:

$$4-x^2>0 \Leftrightarrow x^2-4<0;$$

procedendo come nell'es. 1) si ha che il trinomio ha due radici reali -2,2; si ha allora

$$x^2-4<0 \Leftrightarrow -2<x<2;$$

(le soluzioni sono interne all'intervallo delle radici).

3) La disequazione data è

$$x^2+x+1<0,$$

poiché si ha $\Delta=-3<0$, la disequazione non ammette soluzioni.

4) In questo caso si ha: $\Delta>0$ ed il trinomio ammette le radici reali -3, 1; ne segue che le soluzioni sono interne all'intervallo delle radici:

$$x^2+2x-3\leq 0 \Leftrightarrow -3\leq x\leq 1.$$

5) Il trinomio $2x^2-4x+2$ ha il discriminante nullo; la sua unica radice è 1; si ha pertanto

$$2x^2-4x+2=2(x-1)^2>0 \Leftrightarrow x\neq 1$$

cioè tutti i numeri reali diversi da 1 sono soluzioni.

6) Cambiando i segni (per metterci nel caso a>0) si ha:

$$3x-x^2-10 \le 0 \Leftrightarrow x^2-3x+10 \ge 0;$$

il trinomio $x^2-3x+10$ ha il discriminante negativo e pertanto è sempre positivo; in altri termini la disequazione

$$x^2-3x+10 \ge 0$$

è soddisfatta da ogni numero reale.

7) La disequazione data è

$$5x^2+9 \ge 0$$

ed essa è soddisfatta da ogni numero reale poiché, ovviamente, la somma del numero positivo 9 e del numero non negativo $5x^2$ è positiva; il lettore verifichi tale risultato osservando anche che è $\Delta < 0$.

8) Il trinomio $(x-2)(x-3)$ ha due radici reali 2 e 3, pertanto

$$(x-2)(x-3) \le 0 \Leftrightarrow x^2-5x+6 \le 0 \Leftrightarrow 2 \le x \le 3.$$

2.2 Sistemi

Il lettore risolva i seguenti sistemi di disequazioni

1) $\begin{cases} x^2-5x+4>0 \\ x-3 \le 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-1 \le 0 \\ x^2-5 > 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+x+1 > 0 \\ x^2-3x > 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-5x^2 \le 0 \\ x^2+4x+4 > 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-7x+10 > 0 \\ x^2-3x+2 < 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4 > x^2 \\ x^2 \le \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x+10 \ge 0 \\ x^2+3 \le 4x \\ 2x > x^2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} (x-1)^2+2(x-2)^2+2x>6-3x^2 \\ (1+x)(1-x) < 3x^2 \\ x^2-4 \le 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x+1 > 0 \\ 2(x+1)(x-1) < 3x-x^2 \\ 10+x^2<2x \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2-x+2>0 \\ x^2+5x+6 \le 0 \\ x^2>5x \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^2+x+1>0 \\ x^2-1>3(x-5) \\ 3x^2+5>0 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2+2x+1 \le 0 \\ x^2-3x>0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 5+x^2>0 \\ x^2-7x \le 0 \\ x^2 \ge (\sqrt{3}+\sqrt{2})x-\sqrt{6} \end{cases}$

14) $\begin{cases} (x+3)^2+x+3>0 \\ x^2-5>0 \\ (x+5)^2>x+3 \end{cases}$

Risposte

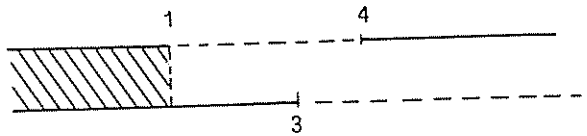
1) $x<1$	2) $\emptyset$	3) $x<0,\ x>3$
4) $x<-2,\ -2<x\le 0,\ x\ge 1/5$	5) $1<x<2$	6) $1/2\le x\le 1$
7) $1\le x<2$	8) $-2\le x<-1/2;\ 1/2<x\le 2$	9) $\emptyset$
10) $-3\le x\le -2$	11) $\forall x\in R$	12) $x=-1$
13) $0\le x\le \sqrt{2},\ \sqrt{3}\le x\le 7$	14) $x<-4,\ -3<x<-\sqrt{5},\ x>\sqrt{5}$	

Svolgimento (da 1 a 6)

1) Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x^2-5x+4>0 \\ x-3\le 0 \end{cases}$$

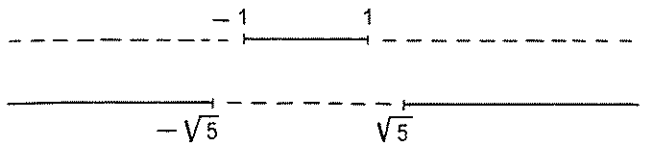
La prima disequazione ha soluzioni $x<1$, $x>4$ e la seconda $x\le 3$. Pertanto le soluzioni comuni ad entrambe le disequazioni sono $x<1$ (cfr. anche la figura)



2) Procedendo come nell'es. 1), si ha:

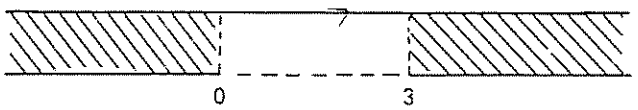
$$\begin{cases} x^2-1\le 0 \\ x^2-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ x<-\sqrt{5},\ x>\sqrt{5} \end{cases}$$

Quindi il sistema dato non ha soluzioni poiche l'insieme delle soluzioni della prima disequazione e quello della seconda hanno intersezione vuota (cfr. anche la figura)



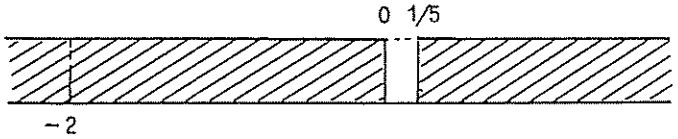
3) Procedendo come negli esercizi precedenti si ha:

$$\begin{cases} x^2+x+1>0 \\ x^2-3x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x\in R \\ x<0,\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow x<0,\ x>3$$



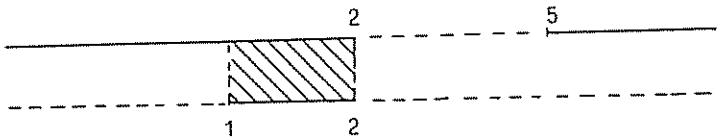
4) Procedendo come negli esercizi precedenti si ha:

$$\begin{cases} x-5x^2\le 0 \\ x^2+4x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0,\ x\ge 1/5 \\ x\ne -2 \end{cases} \Leftrightarrow x<-2,\ -2<x\le 0,\ x\ge 1/5$$



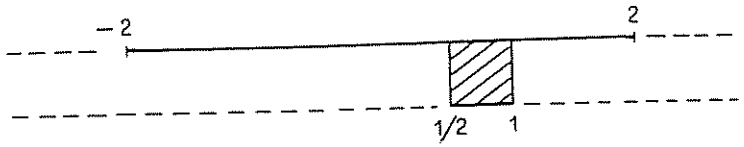
5) Si ha:

$$\begin{cases} x^2-7x+10>0 \\ x^2-3x+2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2,\ x>5 \\ 1<x<2 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<2$$



6) Si ha:

$$\begin{cases} 4>x^2 \\ x^2\le\frac{3}{2}x-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4<0 \\ 2x^2-3x+1\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<2 \\ \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\le x\le 1$$



2.3 - Disequazioni quoziente e prodotto

Per quanto attiene alle disequazioni quoziente o prodotto di polinomi di secondo grado vale, ovviamente, lo stesso schema riportato nella tabella del paragrafo 1.3; è assai utile anche il procedimento grafico (fondato sulla regola dei segni) suggerito dopo la suddetta tabella.

Il lettore risolva le seguenti disequazioni quoziente o prodotto.

1) $\dfrac{x^2-1}{x+3} \le 0$

2) $(x^2+x+7)(x^2-5x+4)>0$

3) $x^3>x$

4) $\dfrac{x^2-4x+1}{x^2-4x} \ge 0$

5) $\dfrac{1}{x-3}+1 < \dfrac{2}{x+2}$

6) $\dfrac{7+x}{x^2-3x+2} \le 1$

7) $\dfrac{x}{x^2+x+1}+1 \le 0$

8) $-1-\dfrac{1}{x^2+1} \ge 0$

9) $\dfrac{4-3x}{x^2-3x} > 1$

10) $\dfrac{4x+9}{x^2+1} < -3$

11) $\dfrac{x}{x+4}+\dfrac{2}{x^2+x-12} \le 0$

12) $\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{2x-1} \ge 0$

13) $x(x-5)(x-3)(x+3) \le 0$

14) $\dfrac{3}{x^2+4}-\dfrac{3}{x^2+5} > 0$

15) $\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)\cdot\left(\dfrac{x-3}{x-4}\right) \ge 0$

16) $(x-2)^2(x^2+3x+9)>0$

Risposte

1) $-1\le x\le 1,\ x<-3$; 2) $x<1,\ x>4$; 3) $-1<x<0,\ x>1$

4) $x<0,\ 2-\sqrt{3}\le x\le 2+\sqrt{3},\ x>4$; 5) $-2<x<3$; 6) $x\le -1,\ 1<x<2,\ x\ge 5$

7) $x=-1$; 8) $\forall x\in R$; 9) $-2<x<0,\ 2<x<3$

10) $\emptyset$; 11) $-4<x\le 1,\ 2\le x<3$; 12) $-\frac{1}{2}<x\le 0,\ x>\frac{1}{2}$

13) $-3\le x\le 0,\ 3\le x\le 5$; 14) $\forall x\in R$; 15) $x<-2,\ 1\le x\le 3,\ x>4$

16) $x\ne 2$

Svolgimento (da 1 a 6)

1) L'insieme delle soluzioni della disequazione fratta

$$\frac{x^2-1}{x+3}\le 0$$

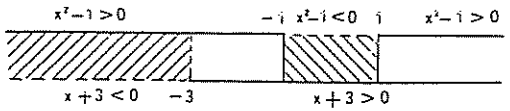
si ottiene facendo l'unione degli insiemi delle soluzioni dei due sistemi

$$(a)\begin{cases} x^2-1\ge 0 \\ x+3<0 \end{cases},\qquad (b)\begin{cases} x^2-1\le 0 \\ x+3>0 \end{cases}$$

D'altro canto

$$(a)\Leftrightarrow\begin{cases} x\le -1,\ x\ge 1 \\ x<-3 \end{cases},\qquad (b)\Leftrightarrow\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ x>-3 \end{cases}$$

per cui il sistema (a) ha le soluzioni $x<-3$, e (b) $-1\le x\le 1$. L'insieme delle soluzioni della disequazione data può essere ottenuto graficamente come nella figura.



2) L'insieme delle soluzioni della disequazione prodotto

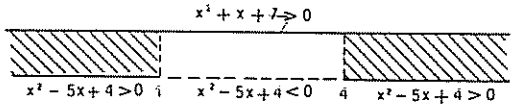
$$(x^2+x+7)(x^2-5x+4)>0$$

è l'unione degli insiemi delle soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} x^2+x+7>0 \\ x^2-5x+4>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \forall x\in R \\ x<1,\ x>4 \end{cases}\Leftrightarrow x<1,\ x>4$$

$$\begin{cases} x^2+x+7<0 \\ x^2-5x+4<0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \emptyset \\ 1<x<4 \end{cases}\Leftrightarrow \emptyset$$

Pertanto (cfr. anche la figura) la disequazione data ha le soluzioni $x<1$, $x>4$.



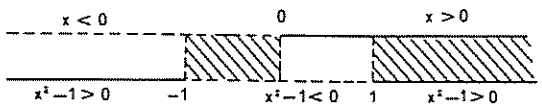
3) La disequazione data si scrive sotto forma di una disequazione prodotto

$$x^3>x\Leftrightarrow x^3-x>0\Leftrightarrow x(x^2-1)>0$$

ed è pertanto equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x>0 \\ x^2-1>0 \end{cases}\Leftrightarrow x>1,\qquad \begin{cases} x<0 \\ x^2-1<0 \end{cases}\Leftrightarrow -1<x<0$$

cosicché la disequazione data ha le soluzioni $-1<x<0$, $x>1$.



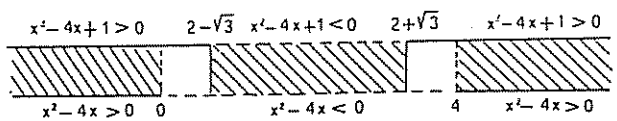
4) La disequazione data e equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2-4x+1\geq 0 \\ x^2-4x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2-\sqrt{3},\ x\geq 2+\sqrt{3} \\ x<0,\ x>4 \end{cases} \Leftrightarrow x<0,\ x>4$$

$$\begin{cases} x^2-4x+1\leq 0 \\ x^2-4x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{3}\leq x\leq 2+\sqrt{3} \\ 0<x<4 \end{cases} \Leftrightarrow 2-\sqrt{3}\leq x\leq 2+\sqrt{3}.$$

Facendo l'unione degli insiemi delle soluzioni dei due sistemi si ottiene l'insieme delle soluzioni della disequazione data:

$$x<0,\ 2-\sqrt{3}\leq x\leq 2+\sqrt{3},\ x>4$$



5) Innanzitutto riconduciamo la disequazione data alla forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \lessgtr 0;$$

a tal fine si osservi che:

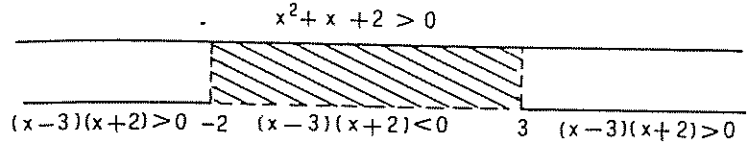
$$\frac{1}{x-3}+1<\frac{2}{x+2} \Leftrightarrow \frac{1}{x-3}+1-\frac{2}{x+2}<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+2}{(x-3)(x+2)}<0.$$

Pertanto la disequazione data equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2-2x+2>0 \\ (x-3)(x+2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x\in R \\ -2<x<3 \end{cases} \Leftrightarrow -2<x<3$$

$$\begin{cases} x^2-2x+2<0 \\ (x-3)(x+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{nessuna soluz.} \\ x<-2,\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

Quindi la disequazione data ha le soluzioni $-2<x<3$



6) Si ha:

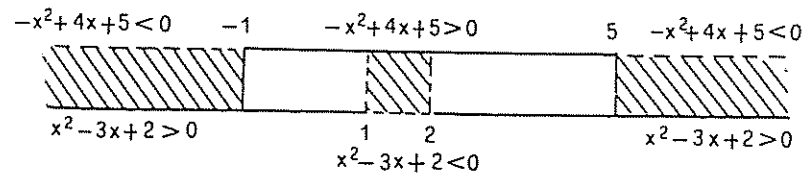
$$\frac{7+x}{x^2-3x+2}\leq 1 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x+5}{x^2-3x+2}\leq 0;$$

pertanto la disequazione e equivalente ai sistemi

$$\begin{cases} -x^2+4x+5\geq 0 \\ x^2-3x+2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\leq x\leq 5 \\ 1<x<2 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<2$$

$$\begin{cases} -x^2+4x+5\leq 0 \\ x^2-3x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -1,\ x\geq 5 \\ x<1,\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x\leq -1,\ x\geq 5.$$

La disequazione data ha soluzioni $x\leq -1,\ 1<x<2,\ x\geq 5$.



3. Disequazioni con funzioni potenza: disequazioni di ordine superiore ed irrazionali

3.1 Disequazioni con funzione potenza intera: disequazioni di ordine superiore

Riassumiamo nella tabella che segue alcune regole che discendono immediatamente dalle proprietà di monotonia della funzione potenza ad esponente intero positivo

n dispari	$x^n<a \Leftrightarrow x<\sqrt[n]{a}$
n dispari,	$x^n>a \Leftrightarrow x>\sqrt[n]{a}$
n pari, $a>0$	$x^n<a \Leftrightarrow -\sqrt[n]{a}<x<\sqrt[n]{a}$
n pari, $a\leq 0$	$x^n<a \Leftrightarrow$ nessuna soluzione
n pari, $a>0$	$x^n>a \Leftrightarrow x<-\sqrt[n]{a},\ x>\sqrt[n]{a}$
n pari, $a\leq 0$	$x^n\geq a \Leftrightarrow \forall x\in R$

Risolvere le seguenti disequazioni di ordine superiore

1) $x^5+1<0$
2) $x^6-4>0$
3) $x^7-4>0$
4) $x^8-6\leq 0$
5) $x^4+3>0$
6) $x^6+10\leq 0$
7) $x^4+x^2-2>0$
8) $x^4-2x^2+2\leq 0$
9) $x^3+3x^2-4x-12<0$
10) $x^5+x^2\geq 0$
11) $x^4-1\leq 0$
12) $x^8+5\geq 0$
13) $x^7-9<0$
14) $x^3+27\geq 0$
15) $x^4+3x^2+2<0$
16) $x^4-5x^2+6>0$
17) $x^5+2x^3+x<0$
18) $x^3-x^2-4x+4>0$
19) $x^6-3x^3+2\leq 0$
20) $x^8-3x^4+2>0$
21) $x^8+5x^4+4>0$

Risposte

1) $x<-1$
2) $x<-\sqrt[3]{2},\ x>\sqrt[3]{2}$
3) $x>\sqrt[7]{4}$
4) $-\sqrt[8]{6}\leq x\leq\sqrt[8]{6}$
5) $\forall x\in R$
6) $\emptyset$
7) $x<-1,\ x>1$
8) $\emptyset$
9) $x<-3,\ -2<x<2$
10) $x\geq -1$
11) $-1\leq x\leq 1$
12) $\forall x\in R$
13) $x<\sqrt[7]{9}$
14) $x>-3$
15) $\emptyset$
16) $x<-\sqrt{3},\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2},\ x\sqrt{3}$
17) $x<0$
18) $-2<x<1,\ x>2$
19) $1\leq x\leq\sqrt[7]{2}$
20) $x<-\sqrt[4]{2},\ -1<x<1,\ x>\sqrt[4]{2}$
21) $\forall x\in R$

Svolgimento (da 1 a 10)

1) Si ha seguendo la tabella

$$x^5+1<0 \Leftrightarrow x^5<-1 \Leftrightarrow x<-1.$$

2) Ancora dalla tabella si ha

$$x^6-4>0 \Leftrightarrow x^6>4 \Leftrightarrow x<-\sqrt[6]{4},\ x>\sqrt[6]{4}.$$

3) Ancora dalla tabella si ha

$$x^7-4>0 \Leftrightarrow x^7>4 \Leftrightarrow x>\sqrt[7]{4}.$$

Il lettore osservi che pur trovandoci di fronte ad una

disequazione dello stesso tipo di quella incontrata nell'es. 2) ($x^n>a$) l'insieme delle soluzioni si ottiene in modo diverso poiché l'es. 2) e relativo al caso n pari mentre il 3) al caso n dispari.

4) Si ha:

$$x^8-6 \le 0 \Leftrightarrow x^8 \le 6 \Leftrightarrow -\sqrt[8]{6} \le x \le \sqrt[8]{6}$$

Relativamente agli esercizi 1) e 4) si può fare un'osservazione analoga a quella fatta con gli esercizi 2) e 3).

5) La disequazione

$$x^4+3 \ge 0$$

ammette come insieme di soluzioni tutto R; ciò è evidente (cfr. anche la tabella) poiché la somma del numero positivo 3 e del numero non negativo (x^4) è un numero positivo.

6) Ragionando come fatto nell'es. 5) si ha che la disequazione

$$x^6+10 \le 0$$

non ha soluzioni.

7) Consideriamo la disequazione

$$x^4+x^2-2>0;$$

posto $y=x^2$ essa si riscrive

$$y^2+y-2>0 \Leftrightarrow y<-2,\ y>1.$$

Pertanto, ricordando la posizione fatta ($y=x^2$) si ha

$$x^4+x^2-2>0 \Leftrightarrow x^2<-2, x^2>1$$

e cioè l'insieme delle soluzioni della disequazione di partenza è l'unione degli insiemi delle soluzioni delle disequazioni

$$x^2<-2 \Leftrightarrow \emptyset,\ x^2>1 \Leftrightarrow x<-1,\ x>1.$$

Quindi la disequazione data ha soluzioni $x<-1$, $x>1$.

In modo equivalente si può procedere osservando che

$$x^4+x^2-2 = (x^2+2)(x^2-1)$$

e risolvendo una disequazione prodotto.

8) Si deve risolvere

$$x^4-2x^2+1 \le 0$$

Si procede come nell'es. 7), posto $y=x^2$ la disequazione data si riscrive

$$y^2-2y+2 \le 0$$

che non ha soluzioni e pertanto la disequazione di partenza non ha soluzioni.

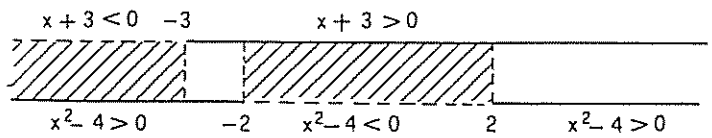
9) Se si osserva che il polinomio $x^4+3x^2-4x-12$ ammette la radice $x=-3$ si ha che esso è divisibile per $x+3$; effettuando la divisione si trova

$$x^4+3x^2-4x-12=(x^2-4)(x+3)$$

e quindi la disequazione assegnata è equivalente alla disequazione prodotto

$$(x^2-4)(x+3)<0$$

che ammette le soluzioni $x<-3$, $-2<x<2$.



10) Anche in questo caso l'esercizio si riduce ad una disequazione prodotto; infatti

$$x^5+x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2(x^3+1) \ge 0$$

e quindi la disequazione di partenza e equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ x^3+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1 \ , \qquad \begin{cases} x^2 \leq 0 \\ x^3+1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset .$$

Ne consegue:

$$x^5+x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

N.B. Per la risoluzione dell'es. 18) il lettore osservi che il polinomio x^3-x^2-4x+4 ammette la radice $x=1$.

3.2 Disequazioni con funzioni radice: disequazioni irrazionali.

Al fine di risolvere un primo gruppo di disequazioni irrazionali riassumiamo nella tabella che segue alcune regole che discendono immediatamente dalle proprietà della funzione radice n-ma.

n dispari	$\sqrt[n]{x}<a \Leftrightarrow x<a^n$
n dispari	$\sqrt[n]{x}>a \Leftrightarrow x>a^n$
n pari a ≥ 0	$\sqrt[n]{x}>a \Leftrightarrow x>a^n$
n pari a<0	$\sqrt[n]{x}>a \Leftrightarrow x\geq 0$
n pari a>0	$\sqrt[n]{x}<a \Leftrightarrow 0\leq x<a^n$
n pari a$\leq$0	$\sqrt[n]{x}<a \Leftrightarrow$ nessuna soluzione

Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali

1) $\sqrt[3]{x}-3<0$ 2) $\sqrt[5]{x}+1>0$ 3) $\sqrt[4]{x}-2\geq 0$

4) $\sqrt[8]{x}+4<0$ 5) $\sqrt[9]{x}+7>0$ 6) $\sqrt{x}-8\leq 0$

7) $x-3\sqrt{x}-4\geq 0$ 8) $3\sqrt{x}-x-2>0$ 9) $(\sqrt{x})^3-8<0$

10) $x\sqrt{x}+\sqrt{x}>x+1$ 11) $\sqrt{x}+x>0$ 12) $\sqrt[3]{x^2}-4\leq 0$

13) $2x+2-4\sqrt{x}\leq 0$ 14) $\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+2>0$

Risposte

1) $x<27$	2) $x>-1$	3) $x\geq 16$
4) $\emptyset$	5) $x\geq 0$	6) $0\leq x\leq 64$
7) $x\geq 16$	8) $1<x<4$	9) $0\leq x<4$
10) $x>1$	11) $x>0$	12) $-8\leq x\leq 8$
13) $x=1$	14) $x<1, x>8$	

Svolgimento (da 1 a 4, 7, 10)

1) Seguendo la tabella si ha:

$$\sqrt[3]{x}-3<0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}<3 \Leftrightarrow x<27.$$

2) Ancora dalla tabella

$$\sqrt[5]{x}+1>0 \Leftrightarrow \sqrt[5]{x}>-1 \Leftrightarrow x>-1.$$

3) Si ha ancora dalla tabella

$$\sqrt[4]{x}-2\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x}\geq 2 \Leftrightarrow x\geq 16.$$

4) Si ha:

$$\sqrt[8]{x}+4<0 \Leftrightarrow \sqrt[8]{x}<-4$$

e quindi la disequazione non ha soluzioni poiche la funzione $\sqrt[n]{x}$ con n pari assume solo valori non negativi (cfr. anche la tabella).

7) Consideriamo la disequazione

$$x-3\sqrt{x}-4 \geq 0;$$

posto $\sqrt{x} = y$ essa si riscrive

$$y^2-3y-4 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -1,\ y \geq 4.$$

Pertanto ricordando la posizione fatta ($\sqrt{x}=y$) si ha

$$x-3\sqrt{x}-4 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq -1,\ \sqrt{x} \geq 4.$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione di partenza è l'unione degli insiemi delle soluzioni delle disequazioni irrazionali

$$\sqrt{x} \leq -1 \Leftrightarrow \emptyset,\ \sqrt{x} \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 16.$$

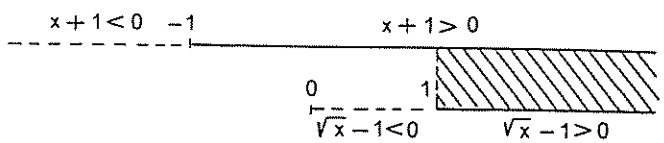
Pertanto la disequazione data ha soluzioni $x \geq 16$.

10) La disequazione data si riduce ad una disequazione prodotto; infatti:

$$x\sqrt{x}+\sqrt{x} > x+1 \Leftrightarrow x(\sqrt{x}-1)+\sqrt{x}-1>0 \Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{x}-1)>0;$$

pertanto la disequazione di partenza è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x+1>0 \\ \sqrt{x}-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1, \qquad \begin{cases} x+1<0 \\ \sqrt{x}-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$



(Il lettore ricordi che $\sqrt{x}$ non è definita per $x<0$); così l'insieme delle soluzioni cercato è $x>1$.

Al fine di risolvere disequazioni irrazionali più generali di quelle considerate fin'ora riassumiamo nella tabella che segue alcune regole che discendono dalle proprietà della funzione radice n-ma.

n dispari	$\sqrt[n]{P(x)} < \sqrt[n]{Q(x)}$	$\Leftrightarrow P(x) < Q(x)$
n dispari	$\sqrt[n]{P(x)} < Q(x)$	$\Leftrightarrow P(x) < Q^n(x)$
n dispari	$Q(x) < \sqrt[n]{P(x)}$	$\Leftrightarrow Q^n(x) < P(x)$
n pari	$\sqrt[n]{P(x)} < \sqrt[n]{Q(x)}$	$\Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ P(x)<Q(x) \end{cases}$
n pari	$\sqrt[n]{P(x)} < Q(x)$	$\Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \\ P(x)<Q^n(x) \end{cases}$
n pari	$Q(x) < \sqrt[n]{P(x)}$	$\Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) < 0 \\ P(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ Q^n(x) < P(x) \end{cases}$

Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali

15) $\sqrt[3]{x+2} < \sqrt[3]{x^2-4x-4}$

16) $\sqrt[3]{2x+1-x^3} < 1-x$

17) $\sqrt{x^2-1} - \sqrt{4-x^2} \geq 0$

18) $\sqrt{2x-x^2} < x$

19) $2x-1 < \sqrt{x^2-4x+3}$

20) $x+1 \geq \sqrt[3]{1+3x+x^3}$

21) $\sqrt{x^2-3x} \leq \sqrt{3x-x^2-2}$

22) $x-1-\sqrt{9-x^2} \leq 0$

23) $\sqrt{x^2+2x-8} < x+2$

24) $x-4 < \sqrt{x+4}$

25) $\sqrt[4]{4-x^2} < \sqrt[4]{x^2+10}$

26) $\sqrt{4-x^2}+x \leq 2$

27) $x+2 < \sqrt{4-x^2}$

28) $x-5 \le \sqrt{x^2-5x}$

29) $\sqrt{3x^2-2x-1} < 2$

30) $\sqrt{x^2+1} < \sqrt{4x^2-1}$

31) $\sqrt{x^2-4} + 3 < x$

32) $x-1 < \sqrt{x^2+x+1}$

33) $\sqrt[3]{x^2+1} < \sqrt[5]{x}$

34) $\sqrt[3]{3x^2-2x} - x < 0$

Risposte

15) $x<-1 \quad x>6$

16) $x<0, \quad x> \frac{5}{3}$

17) $-2\le x\le -\sqrt{\frac{5}{2}}, \quad \sqrt{\frac{5}{2}}\le x\le 2$

18) $1<x\le 2$

19) $x< \sqrt{\frac{2}{3}}$

20) $\forall x\in R$

21) $\emptyset$

22) $-3\le x\le \frac{1+\sqrt{17}}{2}$

23) $x\ge 2$

24) $-4\le x< \frac{9+\sqrt{33}}{2}$

25) $-2\le x\le 2$

26) $-2\le x\le 0, x=2$

27) $-2<x<0$

28) $x\le 0, x\ge 5$

29) $-1<x\le -1/3, 1\le x<5/3$

30) $x<-\sqrt{\frac{2}{3}}, x> \sqrt{\frac{2}{3}}$

31) $\emptyset$

32) $\forall x\in R$

33) $\emptyset$

34) $0<x<1, x>2$

Svolgimento (da 15 a 20)

15) Seguendo la tabella (2) si ha subito

$$\sqrt[3]{x+2} < \sqrt[3]{x^2-4x-4} \iff x+2<x^2-4x-4 \iff x^2-5x-6>0$$

cosicchè le soluzioni della disequazione assegnata sono $x<-1, \ x>6$.

16) Seguendo la tabella (2) si ha subito:

$$\sqrt[3]{2x+1-x^3}<(1-x) \iff 2x+1-x^3<(1-x)^3 \iff 3x^2-5x>0$$

e quindi le soluzioni della disequazione sono $x<0, \ x>\frac{5}{3}$.

17) La disequazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 4-x^2\ge 0 \\ x^2-1 \ge 4-x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2\le x\le 2 \\ x\le -\sqrt{\frac{5}{2}}, x\ge \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \iff -2\le x\le -\sqrt{\frac{5}{2}}, \ \sqrt{\frac{5}{2}}\le x\le 2.$$

18) La disequazione

$$\sqrt{2x-x^2}<x$$

è equivalente (cfr. la tabella (2)) al sistema

$$\begin{cases} 2x-x^2\ge 0 \\ x>0 \\ 2x-x^2<x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ x>0 \\ x<0, \ x>1 \end{cases} \iff 1<x\le 2.$$

19) Ancora dalla tabella (2) segue che la disequazione

$$2x-1<\sqrt{x^2-4x+3}$$

è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} 2x-1<0 \\ x^2-4x+3 \ge 0 \end{cases} \iff x< \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 2x-1\ge 0 \\ x^2-4x+3>(2x-1)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x\ge 1/2 \\ 3x^2-2<0 \end{cases} \iff \frac{1}{2}\le x< \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Pertanto le soluzioni della disequazione sono $x< \sqrt{\frac{2}{3}}$.

20) Si ha:

$$x+1 \geq \sqrt[3]{1+3x+x^3} \iff (x+1)^3 \geq 1+3x+x^3 \iff 3x^2 \geq 0,$$

cosicché la disequazione data ha come insieme di soluzioni tutto R.

3.3 Disequazioni con funzioni potenza ad esponente reale

Ricordando che il codominio della funzione potenza ad esponente reale positivo è $[0,+\infty[$ e che tale funzione è strettamente crescente si ottengono facilmente le regole riassunte nella tabella che segue:

> Sia $\alpha \in R$, $\alpha>0$; si ha:
> $b>0$, $x^\alpha<b \iff 0\leq x<b^{1/\alpha}$
> $b\leq 0$, $x^\alpha<b \iff$ nessuna soluzione
> $b\geq 0$, $x^\alpha>b \iff x>b^{1/\alpha}$
> $b<0$, $x^\alpha>b \iff \forall x\geq 0$
> N.B. Il caso $\alpha<0$ si riconduce al precedente grazie all'identità $x^{-\alpha}=(1/x)^\alpha$ $\forall x>0$

Risolvere le seguenti disequazioni:

1) $x^\pi-3>0$
2) $x^{\sqrt{2}}-5\leq 0$
3) $x^{2\pi}+3x^\pi>0$
4) $x^e-3+\frac{2}{x^e}\leq 0$
5) $x^{-\sqrt{5}}-1<0$
6) $x^{3\sqrt{2}}-4x^{\sqrt{2}}>0$
7) $x^{1/\pi}-4x^{2/\pi}\geq 0$
8) $\frac{1}{x^e}-x^e\geq 0$
9) $x^{\sqrt{2}}<5x^{1/\sqrt{2}}-4$
10) $x^{2\sqrt{3}}+3x^{\sqrt{3}}+2>0$

11) $x^{-\sqrt{3}}-3x^{-2\sqrt{3}}\leq 0$
12) $x^{\sqrt{2/3}}+4x^{1/\sqrt{6}}+3<0$
13) $x^{\sqrt{2}}+x^{-\sqrt{2}}+1>0$
14) $(x^{\sqrt{2}}+1)(x^{1/\sqrt{5}}-5x^{1/2\sqrt{5}}+6)>0$

Risposte

1) $x>3^{1/\pi}$
2) $0\leq x\leq 5^{1/\sqrt{2}}$
3) $x>0$
4) $1\leq x\leq 2^{1/e}$
5) $x>1$
6) $x>2^{1/\sqrt{2}}$
7) $0\leq x\leq 4^{-\pi}$
8) $0<x\leq 1$
9) $1<x<4^{\sqrt{2}}$
10) $x\geq 0$
11) $0<x\leq (3)^{1/\sqrt{3}}$
12) $\emptyset$
13) $x>0$
14) $0\leq x<(4)^{\sqrt{2}}$, $x>9^{\sqrt{5}}$

Svolgimento (da 1 a 6)

1) Seguendo la tabella con $\alpha=\pi$ si ha:

$$x^\pi-3>0 \iff x^\pi>3 \iff x>3^{1/\pi}$$

2) Seguendo la tabella con $\alpha=\sqrt{2}$ si ha:

$$x^{\sqrt{2}}-5\leq 0 \iff x^{\sqrt{2}}\leq 5 \iff 0\leq x\leq 5^{1/\sqrt{2}}.$$

3) Posto $x^\pi=y$ la disequazione data si riscrive

$$y^2+3y>0 \iff y<-3,\ y>0;$$

ricordando la posizione fatta si ha allora

$$x^{2\pi}+3x^\pi>0 \iff x^\pi<-3,\ x^\pi>0;$$

la disequazione $x^\pi<-3$ non ha soluzioni, mentre $x^\pi>0$

na come soluzioni $x>0$; pertanto

$$x^{2\pi}+3x^{\pi} > 0 \Leftrightarrow x>0.$$

4) La disequazione data è equivalente alla seguente:

$$\frac{x^{2e}-3x^{e}+2}{x^{e}} \leq 0 \Leftrightarrow x^{2e}-3x^{e}+2 \leq 0, \quad x>0;$$

posto $x^{e}=y$ la disequazione $x^{2e}-3x^{e}+2 \leq 0$ si riscrive

$$y^{2}-3y+2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 2;$$

pertanto ricordando la posizione fatta si ha:

$$x^{2e}-3x^{e}+2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x^{e} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2^{1/e}.$$

Quindi

$$\frac{x^{2e}-3x^{e}+2}{x^{e}} \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2^{1/e}$$

5) Procedendo formalmente si ha:

$$x^{-\sqrt{5}}-1<0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{5}} <1,$$

e posto $1/x=y$ l'ultima disequazione si riscrive

$$(y)^{\sqrt{5}} <1 \Leftrightarrow 0 \leq y<1;$$

ricordando allora la posizione fatta si ha:

$$x^{-\sqrt{5}}-1 <0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{x} <1 \Leftrightarrow x>1.$$

6) Posto $x^{\sqrt{2}}=y$ la disequazione data si riscrive

$$y^{3}-4y>0 \Leftrightarrow y(y^{2}-4)>0 \Leftrightarrow -2<y<0, \quad y>2;$$

pertanto ricordando la posizione fatta:

$$x^{3\sqrt{2}} -4x^{\sqrt{2}} >0 \Leftrightarrow -2<x^{\sqrt{2}} <0, \quad x^{\sqrt{2}} >2;$$

tenendo conto che

$$-2<x^{\sqrt{2}} <0 \Leftrightarrow \emptyset, \quad x^{\sqrt{2}} >2 \Leftrightarrow x>2^{1/\sqrt{2}}$$

ne segue che la disequazione di partenza ha soluzioni $x>2^{1/\sqrt{2}}$.

4. Disequazioni con il valore assoluto

Per comodità del lettore richiamiamo le regole riportate nella tabella sottostante che discendono immediatamente dalle proprietà del valore assoluto.

$a>0,\ |P(x)|<a \Leftrightarrow -a<P(x)<a$
$a\le 0,\ |P(x)|<a \Leftrightarrow$ nessuna soluzione
$a\ge 0,\ |P(x)|>a \Leftrightarrow P(x)<-a,\ P(x)>a$
$a<0,\ |P(x)|>a \Leftrightarrow$ sempre verificata

Risolvere le seguenti disequazioni

1) $|x+2|<3$
2) $|x^2-5x+4| \ge 4$
3) $|6x+x^2|<5$
4) $|x-1|-|x-2|<0$
5) $|x^2-1|-|x^2-4|\ge 0$
6) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<1$
7) $x^2-3|x|-4\le 0$
8) $|x|-|x+1|<1$
9) $\left|\frac{2x^2-3}{x^2+1}\right|\le 1$
10) $|x|-2<\sqrt{|x|-1}$
11) $\frac{|x|-2}{3-|x|}<0$
12) $|x^2+x|<|x|$
13) $\frac{x^2-5|x|}{x^2-4}>0$
14) $\frac{2|x|-|x+1|}{1-|x|}>0$

Risposte

1) $-5<x<1$
2) $x\le 0,\ x\ge 5$
3) $-3-\sqrt{14}<x<-5,\ -1<x<-3+\sqrt{14}$
4) $x<\frac{3}{2}$
5) $x\le-\sqrt{\frac{5}{2}},\ x\ge\sqrt{\frac{5}{2}}$
6) $x>0$
7) $-4\le x\le 4$
8) $x>-1$
9) $-2\le x\le-\sqrt{\frac{2}{3}},\ \sqrt{\frac{2}{3}}\le x\le 2$
10) $-\frac{5+\sqrt{5}}{2}<x\le-1,\ 1\le x<\frac{5+\sqrt{5}}{2}$
11) $x<-3,\ -2<x<2,\ x>3$
12) $-2<x<0$
13) $x<-5,\ -2<x<0,\ 0<x<2\ x>5$
14) $x<-1,\ x>-\frac{1}{3}$

Svolgimento (da 1 a 7)

1) Seguendo la tabella si ha:

$$|x+2|<3 \Leftrightarrow -3<x+2<3 \Leftrightarrow -5<x<1.$$

2) Seguendo la tabella si ha:

$$|x^2-5x+4|\ge 4 \Leftrightarrow x^2-5x+4\ge 4,\ x^2-5x+4\le -4;$$

poiché

$$x^2-5x+4\ge 4 \Leftrightarrow x^2-5x\ge 0, \Leftrightarrow x\le 0\ x\le 5$$

e

$$x^2-5x+4\le -4 \Leftrightarrow x^2-5x+8\le 0, \Leftrightarrow \text{nessuna soluzione},$$

si ha, in definitiva, che la disequazione di partenza ha le soluzioni $x\le 0,\ x\ge 5$.

3) La disequazione

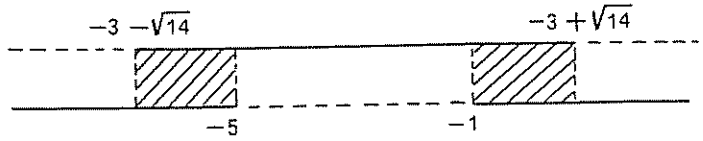
$$|6x+x^2|<5$$

è equivalente al sistema

$$-5<6x+x^2<5 \iff \begin{cases} x^2+6x-5<0 \\ x^2+6x+5>0 \end{cases}$$

ed il sistema ammette le soluzioni

$$-3-\sqrt{14}<x<-5, \quad -1<x<-3+\sqrt{14}$$



4) Per risolvere la disequazione

$$|x-1|<|x-2|$$

osserviamo innanzitutto che

$$|x-1|=\begin{cases} x-1 \text{ se } x\geq 1 \\ 1-x \text{ se } x<1 \end{cases}, \quad |x-2|=\begin{cases} x-2 \text{ se } x\geq 2 \\ 2-x \text{ se } x<2 \end{cases}$$

cosicchè si ha che la disequazione data è equivalente ai tre sistemi

$$\begin{cases} x<1 \\ 1-x<2-x \end{cases} \iff x<1$$

$$\begin{cases} 1\leq x<2 \\ x-1<2-x \end{cases} \iff 1\leq x<\frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x\geq 2 \\ x-1<x-2 \end{cases} \iff \text{nessuna soluzione}$$

Pertanto la disequazione di partenza ha le soluzioni $x<\frac{3}{2}$

5) Si ha

$$|x^2-1|\geq|x^2-4| \iff (x^2-1)^2\geq(x^2-4)^2 \iff$$
$$\iff (x^2-1)^2-(x^2-4)^2\geq 0 \iff 3(2x^2-5)\geq 0 \iff$$
$$\iff x\leq-\sqrt{\frac{5}{2}},\ x\geq\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

6) Procedendo come nell'esercizio 1) si ha:

cosicchè le soluzioni della disequazione data sono $x>0$.

$$-1<\frac{x-1}{x+1}<1 \iff \begin{cases} \frac{x-1}{x+1}-1<0 \\ \frac{x-1}{x+1}+1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-1 \\ x<-1,\ x>0 \end{cases}$$

7) La disequazione

$$x^2-3|x|-4\leq 0$$

equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-3x-4\leq 0 \end{cases} \iff 0\leq x\leq 4, \quad \begin{cases} x\leq 0 \\ x^2+3x-4\leq 0 \end{cases} \iff -4\leq x\leq 0$$

e quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione data è $-4\leq x\leq 4$.

5. Disequazioni esponenziali e logaritmiche

5.1 Disequazioni esponenziali

Sia a un numero reale positivo e diverso da 1; ricordando che la funzione esponenziale a^x assume solo valori positivi si ha che la disequazione

$$a^x>b \qquad \text{con } b \le 0$$

è soddisfatta per ogni $x\in R$; analogamente la disequazione

$$a^x<b \qquad \text{con } b \le 0$$

non ha soluzioni.
Sia adesso $b>0$ e per fissare le idee sia $a>1$; dalla stretta crescenza di a^x segue:

$$a^x>b \ (<b) \iff a^x>a^{\log_a b} \ (<a^{\log_a b}) \iff x>\log_a b \ (<\log_a b).$$

In modo analogo si tratta il caso $0<a<1$.

	$b\le 0,\ a^x>b$	$\iff$	$\forall x\in R$
	$b\le 0,\ a^x<b$	$\iff$	nessuna soluzione
$a>1,$	$b>0,\ a^x>b\ (<b)$	$\iff$	$x>\log_a b \quad (x<\log_a b)$
$0<a<1,$	$b>0,\ a^x>b\ (<b)$	$\iff$	$x<\log_a b \quad (x>\log_a b)$

Risolvere le seguenti disequazioni:

1) $3^x-2>0$

2) $(1/4)^x-5>0$

3) $2^x+1\le 0$

4) $(1/3)^x+2>0$

5) $3^x-7^x\le 0$

6) $\frac{3}{2^x}-2^x<0$

7) $5^{2x-1}-5^x+\frac{4}{5}>0$

8) $27^x-3^{x+1}\le 0$

9) $\sqrt{2-5^x}\le 5^x$

10) $7^{x^2-8}\le 49^x$

11) $\frac{3^x-2}{4-5^x}<0$

12) $\frac{1}{2^x}-\frac{1}{4^x}<0$

13) $(\sqrt{3})^{x+1}\le\sqrt{3^{2x}+2}$

14) $3^{|x|}\le 9^{x^2}$

15) $6^x-3^{2x}<0$

16) $2^{2x^2+2x+4}-4<0$

17) $4^x+10\cdot 2^{x-1}+6\le 0$

18) $6^{2x}-6^{x+1}+8\le 0$

Risposte

1) $x>\log_3 2$ 2) $x<\log_{\frac{1}{4}} 5$ 3) $\varnothing$

4) $\forall x\in R$ 5) $x\ge 0$ 6) $x>\log_2\sqrt{3}$

7) $x<0, x>\log_5 4$ 8) $x\le\frac{1}{2}$ 9) $0\le x\le\log_5 2$

10) $-2\le x\le 4$ 11) $x<\log_3 2,\ x>\log_5 4$ 12) $x<0$

13) $x\le 0,\ x\ge\log_3 2$ 14) $x\le-\frac{1}{2}, x=0,\ x\ge\frac{1}{2}$ 15) $x>0$

16) $\varnothing$ 17) $\varnothing$ 18) $\log_6 2\le x\le\log_6 4$

Svolgimento (da 1 a 10)

1) Dalla tabella segue

$$3^x-2>0 \iff 3^x>2 \iff x>\log_3 2.$$

2) Seguendo lo schema indicato in tabella si ha:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x-5>0 \iff \left(\frac{1}{4}\right)^x>5 \iff x<\log_{\frac{1}{4}} 5;$$

Il lettore osservi la differenza con l'esercizio 1) dovuto al fatto che interviene l'esponenziale di base 1/4 <1.

3) Ricordando che $2^x>0$ $\forall x\in R$ si ha:

$$2^x+1 \le 0 \Leftrightarrow 2^x \le -1 \Leftrightarrow \text{nessuna soluzione.}$$

4) Ricordando che $(1/3)^x>0$ $\forall x\in R$ si ha:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x +2>0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x >-2 \Leftrightarrow \forall x\in R.$$

5) Si ha:

$$3^x-7^x \le 0 \Leftrightarrow 3^x \le 7^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^x \le 1 \Leftrightarrow x\ge\log_{\frac{3}{7}}1=0$$

(è lecito dividere per 7^x poiché $7^x>0$ $\forall x\in R$).

6) Moltiplicando ambo i membri per 2^x la disequazione si riscrive in modo equivalente

$$\frac{3}{2^x}-2^x<0 \Leftrightarrow 2^{2x} >3 \Leftrightarrow x> \frac{1}{2}\log_2 3=\log_2 \sqrt{3}.$$

7) Moltiplicando per 5 ambo i membri la disequazione si riscrive in modo equivalente:

$$5^{2x} - 5\cdot 5^x+4>0;$$

posto $5^x=y$ l'ultima disequazione diventa

$$y^2-5y+4>0 \Leftrightarrow y<1,\ y>4;$$

ricordando la posizione fatta si ha allora

$$5^{2x}-5\cdot 5^x+4>0 \Leftrightarrow 5^x<1,\ 5^x>4.$$

poiché

$$5^x<1 \Leftrightarrow x<0,\ 5^x>4 \Leftrightarrow x>\log_5 4$$

ne consegue che

$$5^{2x}-5\cdot 5^x+4>0 \Leftrightarrow x<0,\ x>\log_5 4.$$

8) La disequazione si scrive in modo equivalente:

$$3^{3x}-3\cdot 3^x \le 0 \Leftrightarrow 3^x\ (3^{2x}-3) \le 0$$

Tenuto conto che $3^x>0$ $\forall x\in R$ si ha

$$3^{3x}-3\cdot 3^x \le 0 \Leftrightarrow 3^{2x}-3 \le 0 \Leftrightarrow x \le 1/2.$$

9) La disequazione data è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2-5^x\ge 0 \\ 5^x\ge 0 \\ 2-5^x\le 5^{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le\log_5 2 \\ \forall x\in R \\ 5^{2x}+5^x-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le\log_5 2 \\ \forall x\in R \\ 5^x\le -2,\ 5^x\ge 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le\log_5 2 \\ \forall x\in R \\ x\ge 0 \end{cases}$$

Pertanto la disequazione data è soddisfatta per $0\le x\le\log_5 2$.

10) Si ha:

$$7^{x^2-8} \le 49^x \Leftrightarrow 7^{x^2-2x-8} \le 1 \Leftrightarrow x^2-2x-8 \le 0 \Leftrightarrow -2\le x\le 4.$$

3) Posto $\log_{1/2} x=y$ la disequazione si riscrive:

$$y^2-y<0 \iff 0<y<1;$$

quindi tenuto conto della posizione fatta si ha:

$$\log^2_{1/2} x - \log_{1/2} x < 0 \iff 0 < \log_{1/2} x<1 \iff 1/2 <x<1.$$

4) Posto $\log_2 x = y$ la disequazione si scrive

$$y^2 + 2y + 3 > 0 \iff \forall y\in R.$$

Tenuto conto della posizione fatta e tenuto conto che $\log_2 x$ e definito per $x>0$ si ha

$$\log^2_2 x+ 2 \log_2 x + 3>0 \iff \forall x>0.$$

5) La disequazione (fratta) e equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases}\log_2 x-1>0\\ \log_{1/2} x-1>0\end{cases} \iff \begin{cases}x>2\\ 0<x<1/2\end{cases} \iff \emptyset$$

$$\begin{cases}\log_2 x-1>0\\ \log_{1/2} x-1>0\end{cases} \iff \begin{cases}0<x<2\\ x>1/2\end{cases} \iff 1/2 <x<2.$$

Quindi

$$\frac{\log_2 x-1}{\log_{1/2} x-1} >0 \iff 1/2 <x<2.$$

6) La disequazione e equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases}\log_2 x\le 0\\ 3-2 \log_2 x\ge 0\end{cases} \iff \begin{cases}0<x\le 1\\ 0<x\le 2\sqrt{2}\end{cases} \iff 0<x\le 1$$

$$\begin{cases}\log_2 x\ge 0\\ \log^2_2 \le 3-2 \log_2 x\end{cases} \iff \begin{cases}x\ge 1\\ -3\le \log_2 x\le 1\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}x\ge 1\\ 1/8 \le x\le 2\end{cases} \iff [1\le x\le 2.$$

Facendo l'unione degli insiemi delle soluzioni dei due sistemi si trova $0<x\le 2$ che è l'insieme delle soluzioni della disequazione data.

7) Si ha:

$$\log \frac{x+1}{x} >0 \iff \frac{x+1}{x} >1 \iff \frac{1}{x} >0 \iff x>0.$$

8) Si ha:

$$\log_3 (x^2-1) < \log_3 (x^2 -4x) \iff \begin{cases}x^2-1>0\\ x^2-4x>0\\ x^2-1<x^2-4x\end{cases}$$

dove le prime due condizioni servono a dare senso alle espressioni $\log_3(x^2-1)$ e $\log_3 (x^2-4x)$ e la terza discende dalla stretta crescenza del logaritmo in base 3; un facile calcolo mostra poi che il sistema ha soluzioni $x<-1$.

N.B. Si osservi che la disequazione non è equivalente alla seguente

$$\log_3 \frac{x^2 -1}{x^2-4x} <0$$

che pure si ottiene da quella di partenza utilizzando "formalmente" la proprietà che il logaritmo di un rapporto è uguale alla differenza dei logaritmi; ciò perché $\log_3 a/b$ ha senso anche per $a<0$ e $b<0$ a differenza di $\log_3 a-\log_3 b$

N.B. - Per risolvere l'es. 15) dividi per 3^x.

5.2 Disequazioni logaritmiche

Sia $a>1$; ricordando che la funzione $\log_a x$ è definita per $x>0$ ed è strettamente crescente si ha:

$$\log_a x>b \Leftrightarrow \log_a x > \log_a a^b \Leftrightarrow x>a^b$$

$$\log_a x<b \Leftrightarrow \log_a x < \log_a a^b \Leftrightarrow 0<x<a^b.$$

Ragionando in modo analogo nel caso $0<a<1$ si ha la tabella seguente

$a>1$,	$\log_a x>b \Leftrightarrow x>a^b$
$a>1$,	$\log_a x<b \Leftrightarrow 0<x<a^b$
$0<a<1$,	$\log_a x>b \Leftrightarrow 0<x<a^b$
$0<a<1$,	$\log_a x<b \Leftrightarrow x>a^b$

Risolvere le seguenti disequazioni

1) $\log_3 x-2>0$

2) $\log_{1/3} x-3 \le 0$

3) $\log^2_{\frac{1}{2}} x-\log_{\frac{1}{2}} x<0$

4) $\log^2_2 x + 2\log_2 x+3>0$

5) $\dfrac{\log_2 x-1}{\log_{\frac{1}{2}} x-1} >0$

6) $\log_2 x \le \sqrt{3-2 \log_2 x}$

7) $\log \dfrac{x+1}{x} >0$

8) $\log_3(x^2-1) < \log_3 (x^2-4x)$

9) $\log^2_3 x-\log_9 x>0$

10) $\log_2 x^2-3>0$

11) $2\log_2 x>3$

12) $\log_{1/2} (x^2+5x+4)+2\ge 0$

13) $|\log_5(x+1)|-2>0$

14) $\log(x+1) + \log(x-1)>\log x$

15) $\log^2_2 x - \log_2(4x^2)+3\le 0$

16) $\log x^4-\log^2 x + \log\sqrt{x} >0$

17) $\log_3(x^2+x+4)>1$

18) $\log_2(x^2+1) < \log_4(x^2+1)$

Risposte

1) $x>9$ 2) $x\ge \frac{1}{27}$ 3) $1/2 <x<1$

4) $x>0$ 5) $1/2 <x<2$ 6) $0<x\le 2$

7) $x>0$ 8) $x<-1$ 9) $0<x<1,\ x>\sqrt{3}$

10) $x<-2\sqrt{2}$, $x>2\sqrt{2}$ 11) $x>2\sqrt{2}$ 12) $-5\le x<-4,\ -1<x\le 0$

13) $-1<x<-\frac{24}{25}$, $x>24$ 14) $x> \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 15) $x=2$

16) $1<x<e\sqrt[4]{e}$ 17) $\forall x\in R$ 18) $\emptyset$

Svolgimento (da 1 a 10)

1) Procedendo come nella tabella si ha

$$\log_3 x-2 >0 \Leftrightarrow \log_3 x>2 \Leftrightarrow x>3^2=9.$$

2) Procedendo come nella tabella si ha

$$\log_{\frac{1}{3}} x-3 \le 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x \le 3 \Leftrightarrow x \ge \left(\frac{1}{3}\right)^3= \frac{1}{27}$$

(Il lettore noti la differenza con l'esercizio 1) dovuta al fatto che siano di fronte al logaritmo con base $\frac{1}{3}<1$).

9) Effettuando il cambiamento di base (da 9 a 3) si ha

$$\log_9 x = \frac{1}{2}\log_3 x$$

e quindi

$$\log_3^2 x - \log_9 x > 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - \frac{1}{2}\log_3 x > 0 \Leftrightarrow \log_3 x < 0,\ \log_3 x > \frac{1}{2};$$

poiché

$$\log_3 x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1,\ \Leftrightarrow \log_3 x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \sqrt{3},$$

le soluzioni della disequazione data sono $0<x<1$, $x>\sqrt{3}$.

10) Si ha:

$$\log_2 x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 8 \Leftrightarrow x < -2\sqrt{2},\ x > 2\sqrt{2}.$$

5.3 Disequazioni con funzioni iperboliche

Il lettore osservi che una disequazione del tipo

$$\operatorname{senh} x > a \ (<a)$$

può essere sempre ricondotta ad una disequazione esponenziale ricorrendo alla definizione di senhx; infatti

$$\operatorname{senh} x > a \ (<a) \Leftrightarrow e^{2x} - 2ae^x - 1 > 0 \ (<0)$$

e cioè

$$e^x > a + \sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow x > \log(a + \sqrt{a^2+1}) = \operatorname{settsenh} a$$

$$(x < \operatorname{settsenh} a).$$

Ovviamente tale risultato poteva ottenersi in modo più immediato ricordando che il seno iperbolico ed il settore seno iperbolico sono l'una la funzione inversa dell'altra.

Analogamente sfruttando le proprietà delle funzioni coshx, settcoshx, tghx, setttghx si ottengono le regole qui di seguito riportate

$a \in R$,	$\operatorname{senh} x < a$	$\Leftrightarrow x < \operatorname{settsenh} a$
$a \in R$,	$\operatorname{senh} x > a$	$\Leftrightarrow x > \operatorname{settsenh} a$
$a \le 1$,	$\cosh x < a$	$\Leftrightarrow$ nessuna soluzione
$a < 1$,	$\cosh x > a$	$\Leftrightarrow \forall x \in R$
$a > 1$,	$\cosh x < a$	$\Leftrightarrow -\operatorname{settcosh} a < x < \operatorname{settcosh} a$
$a \ge 1$,	$\cosh x < a$	$\Leftrightarrow x < -\operatorname{settcosh} a,\ x > \operatorname{settcosh} a$
$-1<a<1$,	$\operatorname{tgh} x < a$	$\Leftrightarrow x < \operatorname{setttgh} a$
$-1<a<1$	$\operatorname{tgh} x > a$	$\Leftrightarrow x > \operatorname{setttgh} a$
$a \ge 1$,	$\operatorname{tgh} x > a$	$\Leftrightarrow$ nessuna soluzione
$a \ge 1$,	$\operatorname{tgh} x < a$	$\Leftrightarrow \forall x \in R$
$a \le -1$,	$\operatorname{tgh} x < a$	$\Leftrightarrow$ nessuna soluzione
$a \ge -1$,	$\operatorname{tgh} x > a$	$\Leftrightarrow \forall x \in R$

Risolvere le seguenti disequazioni

1) $\operatorname{senh} x > 3$

2) $\operatorname{senh} x \leq 0$

3) $\cosh x < -2$

4) $\cosh x \geq 0$

5) $\cosh x - 2 < 0$

6) $2\cosh x - 6 > 0$

7) $3\operatorname{tgh} x - 1 > 0$

8) $2\operatorname{tgh} x \leq 0$

9) $\operatorname{tgh} x < 3$

10) $\operatorname{tgh} x < -3$

11) $\operatorname{senh}^2 x - \operatorname{senh} x < 0$

12) $\cosh^2 x - 4\cosh x < 0$

13) $\dfrac{2\operatorname{tgh} x - 1}{2+\cosh x} < 0$

14) $\operatorname{tgh}^2 x + 2\operatorname{tgh} x > 0$

15) $(\operatorname{tgh} x+3)(\cosh x-1) > 0$

16) $(\operatorname{senh} x-1)(\cosh x-1) \leq 0$

Risposte

1) $x > \log(3+\sqrt{10})$

2) $x \leq 0$

3) $\emptyset$

4) $\forall x \in R$

5) $-\log(2+\sqrt{3}) < x < \log(2+\sqrt{3})$

6) $x < -\log(3+2\sqrt{2}),\ x > \log(3+2\sqrt{2})$

7) $x < \frac{1}{2}\log 3$

8) $x \leq 0$

9) $\forall x \in R$

10) $\emptyset$

11) $x < 0,\ x > \log(1+\sqrt{2})$

12) $-\log(4+\sqrt{15}) < x < \log(4+\sqrt{15})$

13) $x < 1/2 \log 3$

14) $x > 0$

15) $x \neq 0$

16) $x \leq \log(1+\sqrt{2})$

Svolgimento (da 1 a 5, 11)

1) Seguendo la tabella si ha:

$$\operatorname{senh} x > 3 \Leftrightarrow x > \operatorname{settsenh} 3 = \log(3+\sqrt{10}).$$

2) Procedendo come nell'esercizio 1) si ha

$$\operatorname{senh} x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \operatorname{settsenh} 0 = \log 1 = 0.$$

3) Poiché il codominio della funzione $\cosh x$ è $[1,+\infty[$ si ha

$$\cosh x < -2 \Leftrightarrow \emptyset.$$

4) Ragionando come in 3) si ha

$$\cosh x \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in R.$$

5) Seguendo la tabella si ha

$$\cosh x - 2 < 0 \Leftrightarrow \cosh x < 2 \Leftrightarrow -\operatorname{settcosh} 2 < x < \operatorname{settcosh} 2$$

e cioè

$$-\log(2+\sqrt{3}) < x < \log(2+\sqrt{3}).$$

11) Ponendo $\operatorname{senh} x = y$ la disequazione data si riscrive

$$y^2 - y < 0 \Leftrightarrow y < 0,\ y > 1.$$

Quindi la disequazione assegnata è equivalente alle due disequazioni

$\text{senh}x<0 \Leftrightarrow x< \text{settsenh}0=0$

$\text{senh}x>1 \Leftrightarrow x> \text{settsenh}1 = \log(1+\sqrt{2})$.

5.4 Disequazioni con funzioni iperboliche inverse

Dalle proprietà delle funzioni iperboliche inverse discende facilmente la seguente tabella.

$a\in R$,	$\text{settsenh}x < a$ $(>a) \Leftrightarrow x<\text{senh}a$ $(>\text{senh}a)$
$a\le 0$,	$\text{settcosh}x < a \Leftrightarrow$ nessuna soluzione
$a>0$,	$\text{settcosh}x < a \Leftrightarrow 1 \le x<\cosh a$
$a<0$,	$\text{settcosh}x > a \Leftrightarrow x\ge 1$
$a\ge 0$,	$\text{settcosh}x > a \Leftrightarrow x> \cosh a$
$a\in R$,	$\text{setttgh}x > a \Leftrightarrow \text{tgh}a <x<1$
$a\in R$,	$\text{setttgh}x < a \Leftrightarrow -1 <x< \text{tgh}a$

Risolvere le seguenti disequazioni

1) $\text{settsenh}x <1$

2) $\text{settsenh}x \ge 0$

3) $\text{settcosh}x+2\le 0$

4) $\text{settcosh}x -2<0$

5) $\text{settcosh}x-3\le 0$

6) $2\text{settcosh}x+1 \ge 0$

7) $\text{setttgh}x \ge 0$

8) $3\text{setttgh}x+2<0$

9) $\text{settsenh}^2x-2\text{settsenh}x<0$

10) $\dfrac{1+\text{settcosh}x}{1+\text{settsenh}x} > 0$

11) $\dfrac{1+\text{setttgh}x\cdot\text{settsenh}x}{1+|\text{settsenh}x|} \ge 0$

12) $(\text{settsenh}x-1)(\text{settcosh}x+2)>0$

Risposte

1) $x< \dfrac{e^2-1}{2e}$ 2) $x\ge 0$ 3) $\emptyset$

4) $1\le x< \dfrac{e^4+1}{2e^2}$ 5) $1\le x< \dfrac{e^6+1}{2e^3}$ 6) $\forall x\ge 1$

7) $0\le x<1$ 8) $-1<x< \text{tgh}(2/3)$ 9) $x<0,\ x> \dfrac{e^4-1}{2e^2}$

10) $x\ge 1$ 11) $-1<x<1$ 12) $x> \dfrac{e^2-1}{2e^2}$

Svolgimento (da 1 a 4, 10)

1) Seguendo la tabella si ha

$$\text{settsenh}x < 1 \Leftrightarrow x < \text{senh}1 = \frac{e^2-1}{2e}.$$

2) Procedendo come nell'es. 1) si ha:

$$\text{settsenh}x \ge 0 \Leftrightarrow x\ge \text{senh}0 = 0.$$

3) Poiche il codominio di settcoshx è $[0,+\infty[$ si ha ovviamente

$$\text{settcosh}x + 2 \le 0 \Leftrightarrow \text{settcosh}x \le -2 \Leftrightarrow \text{nessuna soluzione}.$$

4) Seguendo lo schema indicato in tabella si ha

$$\text{settcosh}x-2 <0 \Leftrightarrow \text{settcosh}x <2 \Leftrightarrow 1\le x<\cosh 2= \frac{e^4+1}{2e^2}.$$

10) Osservato

$$1+\text{settcosh}x >0 \Leftrightarrow x\ge 1$$

(che il settcosh x non è definito per $x<1$!) la disequazione data si riduce alla seguente

$$\text{settsenh}x+1 >0 \Leftrightarrow \text{settsenh}x >-1 \Leftrightarrow x> \text{senh}(-1)= \frac{1-e^2}{2e}.$$

Quindi la disequazione data ha per soluzioni $x \geq 1$.

6. Disequazioni trigonometriche e trigonometriche inverse

6.1 Disequazioni trigonometriche

Sia α un numero reale. Ricordando che il codominio delle funzioni senx e cosx è l'intervallo $[-1,1]$ si ha subito

$\alpha \leq -1$,	$\operatorname{sen}x < \alpha$ ($\cos x < \alpha$)	$\Leftrightarrow$ nessuna soluzione
$\alpha \geq 1$,	$\operatorname{sen}x > \alpha$ ($\cos x > \alpha$)	$\Leftrightarrow$ nessuna soluzione
$\alpha < -1$,	$\operatorname{sen}x > \alpha$ ($\cos x > \alpha$)	$\Leftrightarrow \forall x \in R$
$\alpha > 1$,	$\operatorname{sen}x < \alpha$ ($\cos x < \alpha$)	$\Leftrightarrow \forall x \in R$

Sia adesso $\alpha \in [-1,1]$; indichiamo con x_o l'unico numero reale appartenente all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ tale che

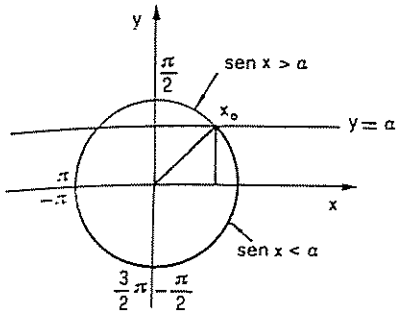
$$\operatorname{sen}x_o = \alpha$$

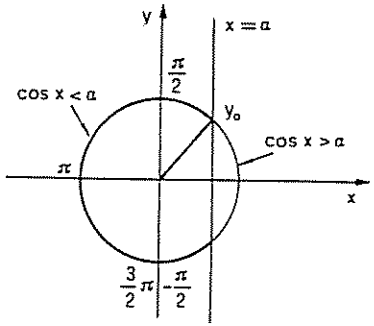
e con y_o l'unico numero reale appartenente all'intervallo $[0,\pi]$ tale che

$$\cos y_o = \alpha$$

(in sintesi: $x_o = \operatorname{arcsen}\alpha$, $y_o = \arccos\alpha$).

Si ha facilmente, ricordando tra l'altro che il seno ed il coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π, quanto segue (è utile fare riferimento alle figure successive).





$\alpha \in]-1,1]$

$\operatorname{sen}x < \alpha \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_o + 2k\pi\right[\cup \left]\pi - x_o + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right] \ \forall k \in Z$

$\Leftrightarrow x \in]-\pi - x_o + 2k\pi,\ x_o + 2k\pi[\ \forall k \in Z$

$\cos x < \alpha \Leftrightarrow x \in]y_o + 2k\pi,\ 2\pi - y_o + 2k\pi[\ \forall k \in Z$

$\alpha \in]-1,1[$:

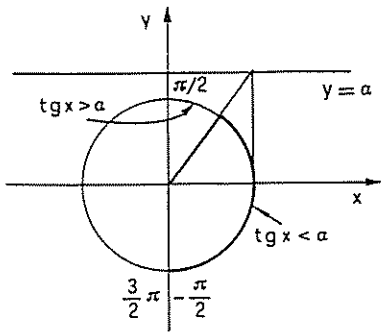
$\operatorname{sen}x > \alpha \Leftrightarrow x \in]\ x_o + 2k\pi,\ \pi - x_o + 2k\pi\ [\ \forall k \in Z$

$\cos x > \alpha \Leftrightarrow x \in]\ -y_o + 2k\pi,\ y_o + 2k\pi\ | \ \forall k \in Z$

Fissato adesso $\alpha \in R$ sia z_o l'unico numero reale appartenente all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ tale che:

$$\operatorname{tg}z_o = \alpha$$

(in sintesi; $z_o = \operatorname{arctg}\alpha$); ricordando tra l'altro che la funzione tangente è periodica di periodo π si ha facilmente



$$\operatorname{tg}x<\alpha \Leftrightarrow x\in \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ z_o+k\pi\right[\quad \forall k\in Z$$

$$\operatorname{tg}x>\alpha \Leftrightarrow x\in \left]z_o+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right[\quad \forall k\in Z$$

Risolvere le seguenti disequazioni

1) $2\operatorname{sen}x < \sqrt{3}$

2) $2\cos x-1\geq 0$

3) $\operatorname{tg}x-1<0$

4) $\sqrt{3}\operatorname{sen}x-\cos x>0$

5) $\operatorname{sen}x-\sqrt{3} \leq 0$

6) $\operatorname{sen}^2x-2\operatorname{sen}x>0$

7) $\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}x<0$

8) $3^{\operatorname{sen}x} - \sqrt{3} \geq 0$

9) $\operatorname{sen}x+\cos x-3>0$

10) $\operatorname{sen}2x-\sqrt{2}(\operatorname{sen}x+\cos x)+1\geq 0$

11) $1-\operatorname{tg}^2x \geq 0$

12) $\operatorname{sen}^2x-3\operatorname{sen}x + 2 \geq 0$

13) $3\cos^2x-\operatorname{sen}^2x \leq 0$

14) $\operatorname{sen}2x > \operatorname{sen}x$

15) $1-\sqrt{\operatorname{sen}x} \geq 0$

16) $\cos 2x \leq \cos x$

17) $5(1-\cos x)-\operatorname{sen}^2x \leq 0$

18) $4\cos^2x+2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos x - \sqrt{6} <0$

19) $2\operatorname{ctg}x+\dfrac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen}x}>0$

20) $\sqrt{3}\operatorname{sen}x-\cos x-2\sqrt{3}\operatorname{tg}x + 2>0$

Risposte

1) $\left](2k-1)\pi - \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3} +2k\pi\right[\quad \forall k\in Z$

2) $\left[-\frac{\pi}{3} +2k\pi,\ \frac{\pi}{3} +2k\pi\right] \forall k\in Z$

3) $\left]-\frac{\pi}{2} +k\pi,\ \frac{\pi}{4}+k\pi\right[\forall k\in Z$

4) $\left]\frac{\pi}{6} +2k\pi,\ \frac{7}{6}\pi+2k\pi\right[\forall k\in Z$

5) $\forall x\in R$

6) $\left](2k-1)\pi,\ 2k\pi\right[\quad \forall k\in Z$

7) $\left]k\pi,\ \frac{\pi}{4}+k\pi\right[\quad \forall k\in Z$

8) $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5}{6}\pi+2k\pi\right] \forall k\in Z$

9) $\varnothing$

10) $\left]\frac{3}{4}\pi+2k\pi,\ \frac{7}{4}\pi+2k\pi\right[\quad \forall k\in Z$

11) $\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right] \quad \forall k\in Z$

12) $\forall x\in R$

13) $\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{2}{3}\pi+2k\pi\right] \cup \left[\frac{4}{3}\pi+2k\pi, \frac{5}{3}\pi+2k\pi\right] \quad \forall k\in Z$

14) $\left]2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\right[\cup \left](2k+1)\pi, \frac{5}{3}+2k\pi\right[\quad \forall k\in Z$

15) $\left[2k\pi, (2k+1)\pi\right] \quad \forall k\in Z$

16) $\left[(2k-1)\pi+\frac{\pi}{3}, (2k+1)\pi+\frac{\pi}{3}\right] \quad \forall k\in Z$

17) $x = 2k\pi \quad \forall k\in Z$

18) $\left]\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{3}{4}\pi+2k\pi\right[\cup \left]\frac{5}{4}\pi+2k\pi, \frac{11}{6}\pi+2k\pi\right[\quad \forall k\in Z$

19) $\left]2k\pi, \frac{5}{6}\pi+2k\pi\right[\cup \left](2k+1)\pi, (2k+1)\pi+\frac{\pi}{6}\right[\quad \forall k\in Z$

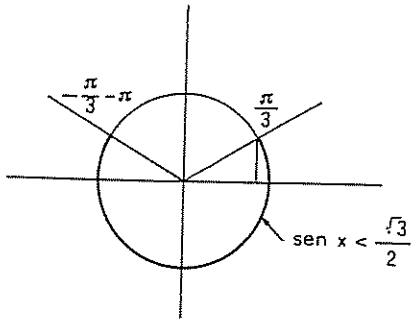
20) $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{6}+k\pi\right[\quad \forall k\in Z$

Svolgimento (da 1 a 10)

1) Seguendo lo schema indicato in tabella si ha:

$\tan x < \sqrt{3} \Leftrightarrow \text{sen } x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ricordando che $\text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ si ha (cfr. anche la figura)

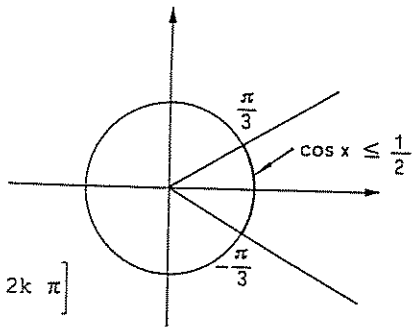


$\tan x < \sqrt{3} \Leftrightarrow x\in \left]-\frac{\pi}{3}+(2k-1)\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\right[$ con $k\in Z$

2) Si ha:

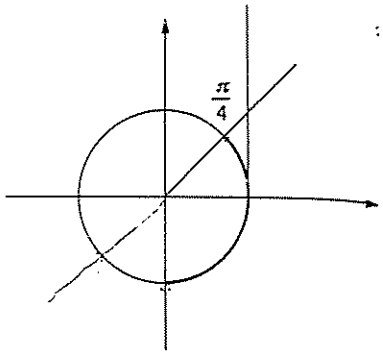
$2\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{1}{2}$;

tenuto conto che $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ si ha (cfr. anche figura)



$2\cos x \geq 1 \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$ con $k\in Z$

3) Seguendo lo schema indicato nella tabella si ha:



$tgx - 1 < 0 \Leftrightarrow tgx < 1;$

tenuto conto che $tg\frac{\pi}{4} = 1$ si ha (cfr. figura)

$tgx<1 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[$ con $k \in \mathbb{Z}$.

4) Risolviamo la disequazione

$$\sqrt{3}\,\text{sen}\,x - \cos x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\,\text{sen}x > \cos x$$

dapprima nell'intervallo $[0, 2\pi[$. Si ha:

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \sqrt{3}\,\text{sen}x > \cos x \Leftrightarrow tgx > 1/\sqrt{3}$$

(si può dividere per cosx poiché cosx > 0);

$$x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \sqrt{3}\,\text{sen}x > \cos x$$

è sempre verificata poiché $\cos x \le 0$, $\text{sen}x \ge 0$ (e non è mai senx = cosx = 0!);

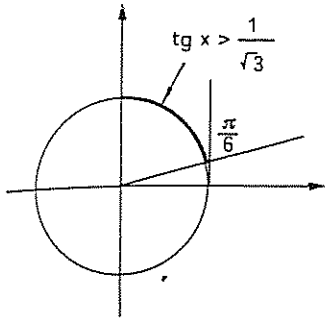
$$x \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right[, \sqrt{3}\,\text{sen}x > \cos x \Leftrightarrow tgx < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

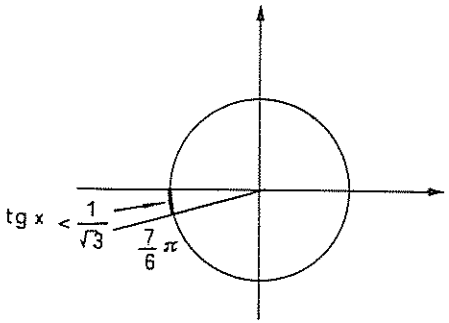
(tieni conto che si divide per cosx <0);

$$x \in \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right[, \sqrt{3}\,\text{sen}x > \cos x$$

non ha soluzioni poiché $\cos x \ge 0$, $\text{sen}x \ge 0$ (e non è mai senx = cosx = 0!)

D'altro canto





$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, tgx > \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$

$x \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right[, tgx < \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \left[\pi, \frac{7}{6}\pi\right[$

In definitiva quindi in $[0, 2\pi[$

$$\sqrt{3}\,\text{sen}x > \cos x \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi\right[$$

e, tenendo conto della periodicità di senx e cosx, si ha:

$$\sqrt{3}\,\text{sen}x > \cos x \Leftrightarrow \left]\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7}{6}\pi + 2k\pi\right[.$$

5) Tenendo conto che $\sqrt{3} > 1$ si ha subito

$$\text{sen}x - \sqrt{3} \le 0 \Leftrightarrow \text{sen}x \le \sqrt{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

6) Posto senx = y la disequazione si riscrive

$$y^2 - 2y > 0 \Leftrightarrow y<0,\ y>2;$$

Quindi dalla posizione fatta (y=senx) discende:

$$\text{sen}^2x - 2\text{sen}x > 0 \Leftrightarrow \text{sen}x < 0,\ \text{sen}x > 2;$$

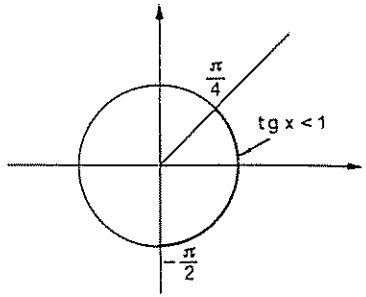
si ha inoltre

$\text{sen}x > 2 \Leftrightarrow$ nessuna soluzione

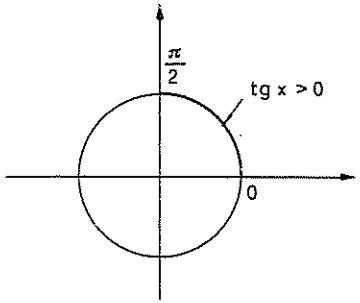
$\text{sen}x < 0 \Leftrightarrow x \in \,]\,(2k-1)\pi,\ 2k\pi\,[\ \forall k \in \mathbb{Z}.$

Ne consegue che la disequazione data è soddisfatta in

$]\,(2k-1)\pi,\ 2k\pi\,[,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$



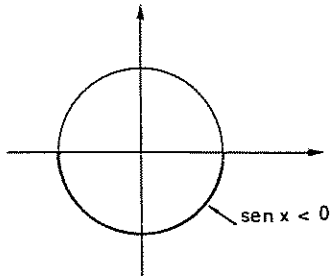
7) Procedendo in modo simile all'esercizio 6) si ponga tgx=y; la disequazione si riscrive:



$$y^2 - y < 0 \Leftrightarrow 0 < y < 1;$$

pertanto, ricordando la posizione tgx=y, si ottiene:

$$tg^2x - tgx < 0 \Leftrightarrow 0 < tgx < 1;$$

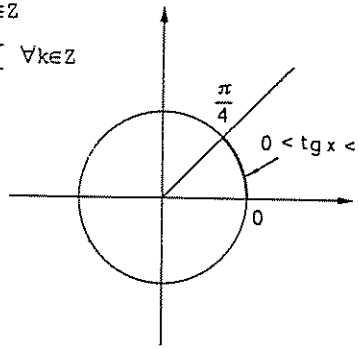


si deve allora risolvere il sistema

$$\begin{cases} tgx > 0 \\ tgx < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \,]\,k\pi,\ k\pi + \frac{\pi}{2}\,[\ \forall k \in \mathbb{Z} \\ x \in \,]\,-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{4} + k\pi\,[\ \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

pertanto il sistema (e quindi la disequazione data) ha soluzioni

$x \in \,]\,k\pi,\ \frac{\pi}{4} + k\pi\,[\ \forall k \in \mathbb{Z}.$

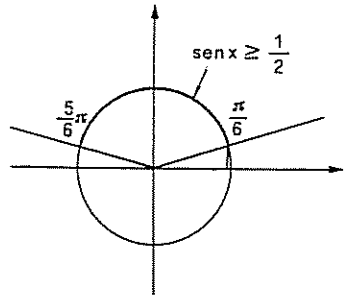


8) Ricordando la stretta crescenza dell'esponenziale di base 3 si ha:

$$3^{\text{sen}x} - \sqrt{3} \geq 0 \Leftrightarrow 3^{\text{sen}x} \geq 3^{1/2} \Leftrightarrow \text{sen}x \geq \frac{1}{2}$$

e tenuto conto che $\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ si ha

$$\text{sen}x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$



9) Ricordando che $\text{sen}x \leq 1$, $\cos x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha subito

$$\text{sen}x + \cos x > 3 \Leftrightarrow \text{nessuna soluzione.}$$

10) Ricordando che $\text{sen}2x = 2\text{sen}x\cos x$ si ha

$$\text{sen}2x - \sqrt{2}\,(\text{sen}x + \cos x) + 1 > 0 \Leftrightarrow 2\text{sen}x\cos x - \sqrt{2}\,\text{sen}x - \sqrt{2}\cos x + 1 > 0$$

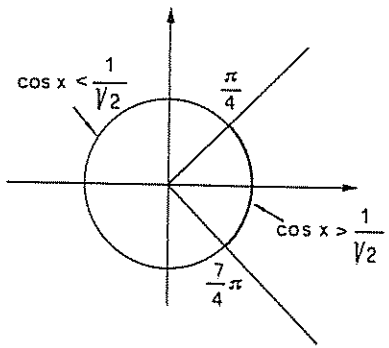
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\,\text{sen}x\,(\sqrt{2}\cos x - 1) - \sqrt{2}\cos x + 1 > 0$$

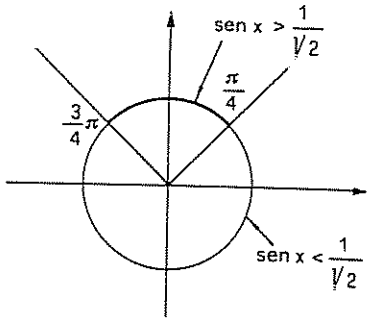
$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}\cos x - 1)(\sqrt{2}\,\text{sen}x - 1) > 0$$

e quindi la disequazione data è equivalente ai sistemi

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x - 1 > 0 \\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mathrm{sen}\,x > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x - 1 < 0 \\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mathrm{sen}\,x < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$





Risolviamo i due sistemi dapprima nell'intervallo $[0,2\pi]$; il primo equivale a (cfr. le figure)

$$\begin{cases} x\in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right] \\ x\in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right[\end{cases} \Leftrightarrow \text{nessuna soluzione,}$$

il secondo equivale a (cfr le figure)

$$\begin{cases} x\in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi\right[\\ x\in \left]\frac{3}{4}\pi, 2\pi\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\end{cases} \Leftrightarrow x\in \left]\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\right[\pi.$$

Quindi, tenendo conto della periodicità di senx e cosx, la disequazione data ha come insieme di soluzioni

$$\left]\frac{3}{4}\pi+2k\pi, \frac{7}{4}\pi+2k\pi\right[\ \forall k\in Z.$$

6.2 Disequazioni trigonometriche inverse

Sia α un numero reale; ricordando che la funzione arcsenx è definita in $[-1,1]$ ed ha per condominio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ si ha subito

$\alpha \le -\frac{\pi}{2}$,	arcsenx $< \alpha \Leftrightarrow$ nessuna soluzione
$\alpha \ge \frac{\pi}{2}$,	arcsenx $> \alpha \Leftrightarrow$ nessuna soluzione
$\alpha > \frac{\pi}{2}$,	arcsenx $< \alpha \Leftrightarrow \forall x\in [-1, 1]$
$\alpha < -\frac{\pi}{2}$,	arcsenx $> \alpha \Leftrightarrow \forall x\in [-1, 1]$

$\alpha \le 0$	arccosx $< \alpha \Leftrightarrow$ nessuna soluzione
$\alpha \ge \pi$	arccosx $> \alpha \Leftrightarrow$ nessuna soluzione
$\alpha < 0$	arccosx $> \alpha \Leftrightarrow \forall x\in [-1, 1]$
$\alpha > \pi$	arccosx $< \alpha \Leftrightarrow \forall x\in [-1, 1]$

Infine ricordando che la funzione arctgx è definita in R ed ha per codominio $]-\pi/2, \pi/2[$ si ha

$\alpha \le -\frac{\pi}{2}$,	$\text{arctg}x \le \alpha \Leftrightarrow$ nessuna soluzione
$\alpha \ge \frac{\pi}{2}$,	$\text{arctg}x \ge \alpha \Leftrightarrow$ nessuna soluzione
$\alpha \le -\frac{\pi}{2}$,	$\text{arctg}x \ge \alpha \Leftrightarrow \forall x \in R$
$\alpha \ge \frac{\pi}{2}$,	$\text{arctg}x \le \alpha \Leftrightarrow \forall x \in R$

Ricordando adesso che le funzioni arcoseno ed arcotangente sono strettamente crescenti nel loro campo di esistenza mentre la funzione arcocoseno è strettamente descrescente si na la tabella seguente

$-\frac{\pi}{2} < \alpha \le \frac{\pi}{2}$,	$\text{arcsen}x < \alpha \Leftrightarrow x \in [-1, \text{sen}\alpha[$
$-\frac{\pi}{2} \le \alpha < \frac{\pi}{2}$,	$\text{arcsen}x > \alpha \Leftrightarrow x \in]\text{sen}\alpha, 1]$
$0 < \alpha \le \pi$,	$\text{arccos}x < \alpha \Leftrightarrow x \in]\cos\alpha, 1]$
$0 \le \alpha < \pi$,	$\text{arccos}x > \alpha \Leftrightarrow x \in [-1, \cos\alpha[$
$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$,	$\text{arctg}x < \alpha \Leftrightarrow x \in]-\infty, \text{tg}\alpha[$
$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$,	$\text{arctg}x > \alpha \Leftrightarrow x \in]\text{tg}\alpha, +\infty[$

Risolvere le seguenti disequazioni

1) $\text{arcsen}x < 0$ 2) $2\text{arccos}x - \pi > 0$

3) $4\text{arctg}x - \pi \ge 0$ 4) $2\text{arcsen}x + \pi < 0$

5) $\text{arccos}x \le 0$ 6) $2\text{arctg}x + \pi \ge 0$

7) $|4\text{arcsen}x| < \pi$ 8) $16\text{arctg}^2x - \pi^2 \ge 0$

9) $\dfrac{\text{arccos}x + \pi}{2\text{arccos}x - \pi} > 0$ 10) $12\text{arccos}^2x - 7\pi\text{arccos}x + \pi^2 \ge 0$

11) $(6\text{arcsen}x - \pi)(2\text{arccos}x - \pi) > 0$

12) $\text{arccos}^2x - 4\text{arccos}x > 0$

13) $\dfrac{\text{arctg}x - 2}{x^2 + 1} < 0$ 14) $\dfrac{3\text{arcsen}x - \pi}{4\text{arctg}x - \pi} < 0$

15) $\dfrac{\pi - \text{arccos}x}{(\pi + 2\text{arctg}x)(\pi + \text{arcsen}x)} > 0$

16) $\dfrac{(\pi + \text{arccos}x)(\pi - \text{arccos}x)}{4\text{arcos}x - 3\pi} \ge 0$

17) $2\sqrt{\text{arcsen}x} - \sqrt{\pi} \ge 0$ 18) $2\ \text{arctg}x - (\text{arcsen}2x) \le 0$

Risposte

1) $]-1,0[$ 2) $]-1,0[$ 3) $[1,+\infty[$

4) $\varnothing$ 5) $x=1$ 6) $\forall x \in R$

7) $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ 8) $]-\infty, -1[\cup[1,+\infty[$ 9) $[-1,0[$

10) $\left[-1, \frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ 11) $]0,1/2[$ 12) $\emptyset$

13) $]-\infty, \mathrm{tg}2[$ 14) $\left]\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right[$ 15) $]-1,1[$

16) $\left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ 17) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ 18) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

Svolgimento da 1 a 10)

1) Seguendo lo schema indicato in tabella si ha

$$\mathrm{arcsen}x < 0 \Leftrightarrow x\in[-1, \mathrm{sen}0[=[-1,0[.$$

2) Procedendo come nell'esercizio 1) si ha

$$2\mathrm{arccos}x-\pi>0 \Leftrightarrow \mathrm{arccos}x > \pi/2 \Leftrightarrow x\in[-1,\cos\pi/2[=[-1,0[.$$

3) Si ha procedendo ancora secondo lo schema indicato in tabella

$$4\,\mathrm{arctg}x-\pi\geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{arctg}x\geq\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x\in\left[\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}, +\infty\right[=[1,+\infty[.$$

4) Si ha (cfr. tabella):

$$2\,\mathrm{arcsen}x + \pi < 0 \Leftrightarrow \mathrm{arcsen}x < -\pi/2 \Leftrightarrow \text{nessuna soluzione.}$$

5) Si ha ancora

$$\mathrm{arccos}x \leq 0 \Leftrightarrow x=1;$$

(Il lettore osservi che $\mathrm{arccos}x = 0 \Leftrightarrow x=1$ e $\mathrm{arccos}x <0 \Leftrightarrow$ nessuna soluzione).

6) La disequazione data è equivalente alla seguente

$$\mathrm{arctg}x \geq -\frac{\pi}{2}$$

che è soddisfatta $\forall x\in R$ poiché il codominio della funzione arcotangente è $]-\pi/2, \pi/2[$ (cfr. anche tabella).

7) Si ha ricordando le proprietà del valore assoluto:

$$|4\mathrm{arcsen}x| < \pi \Leftrightarrow -\pi < 4\mathrm{arcsen}x < \pi;$$

pertanto bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases}\mathrm{arcsen}x < \frac{\pi}{4}\\ \mathrm{arcsen}x > -\frac{\pi}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in\left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[\\ x\in\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left]\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

8) Posto $y=\mathrm{arctg}x$ la disequazione data si riscrive

$$16y^2 - \pi^2\geq 0 \Leftrightarrow y\leq -\frac{\pi}{4},\ y \geq \frac{\pi}{4};$$

Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione assegnata è

l'unione degli insiemi delle soluzioni delle disequazioni seguenti

$$\operatorname{arctg} x \le -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -1\right]$$

$$\operatorname{arctg} x \ge \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x \in \left[1, +\infty\right[$$

quindi

$$16\operatorname{arctg}^2 x - \pi^2 \ge 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[.$$

9) La disequazione (fratta) assegnata è equivalente ai sistemi

$$\begin{cases} \arccos x + \pi > 0 \\ 2\arccos x - \pi > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left]-1, 1\right] \\ x \in \left]-1, 0\right] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]-1, 0\right[$$

$$\begin{cases} \arccos x + \pi < 0 \\ 2\arccos x - \pi < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \emptyset \\ \left]0, 1\right] \end{cases} \Leftrightarrow \text{nessuna soluzione}$$

quindi

$$\frac{\arccos x + \pi}{2\arccos x - \pi} > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1, 0\right[.$$

10) Posto $\arccos x = y$ la disequazione data si riscrive:

$$12y^2 - 7\pi y + \pi^2 \ge 0 \Leftrightarrow y \le \frac{\pi}{4},\ y \ge \frac{\pi}{3}$$

quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione assegnata è l'unione degli insiemi delle soluzioni delle disequazioni seguenti

$$\arccos x \le \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$$

$$\arccos x \ge \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$$

7. Campi di esistenza

7.1 Primi campi di esistenza

Il problema di determinare il campo di esistenza(*) di (una assegnata funzione) $f(x)$ consiste nel *determinare il più grande sottoinsieme di R in cui ha senso calcolare l'espressione "f(x)"*.
Ricordiamo che se $g(x)$ è definita in $A \subseteq R$ ed $f(x)$ è definita in $I \subseteq R$ allora $g(f(x))$ è definita nell'insieme

$$\{x \in I:\ f(x) \in A\};$$

a partire da ciò e dai campi di esistenza delle funzioni elementari si costruisce facilmente la tabella che segue

(*) A rigore quando si considera una funzione si intende assegnato a priori il suo campo di esistenza.

Sia I il campo di esistenza di f(x); allora:

il c.d.e. di	$(f(x))^n$, $n\in N$	è	I
» » »	$\sqrt[n]{f(x)}$, n dispari	è	I
» » »	$\sqrt[n]{f(x)}$, n pari	è	$\{x\in I: f(x) \geq 0\}$
» » »	$(f(x))^\alpha$ $\alpha\in]0,+\infty[$	è	$\{x\in I: f(x) \geq 0\}$
» » »	$(f(x))^\alpha$ $\alpha\in]-\infty, 0[$	è	$\{x\in I: f(x) > 0\}$
» » »	$a^{f(x)}$, $a>0$, $a\neq 1$	è	I
» » »	$\log_a f(x)$, $a>0$, $a\neq 1$	è	$\{x\in I: f(x) > 0\}$
» » »	$\operatorname{sen} f(x)$	è	I
» » »	$\cos f(x)$	è	I
» » »	$\operatorname{tg} f(x)$	è	$\left\{x\in I: f(x)\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\right\}$
» » »	$\operatorname{ctg} f(x)$	è	$\{x\in I: f(x)\neq k\pi,\ k\in Z\}$
» » »	$\operatorname{arcsen} f(x)$	è	$\{x\in I: -1\leq f(x)\leq 1\}$
» » »	$\arccos f(x)$	è	$\{x\in I: -1\leq f(x)\leq 1\}$
» » »	$\operatorname{arctg} f(x)$	è	I
» » »	$\operatorname{senh} f(x)$	è	I
» » »	$\cosh f(x)$	è	I
» » »	$\operatorname{tgh} f(x)$	è	I
» » »	$\operatorname{settsenh} f(x)$	è	I
» » »	$\operatorname{settcosh} f(x)$	è	$\{x\in I: f(x) \geq 1\}$
» » »	$\operatorname{setttgh} f(x)$	è	$\{x\in I: -1<f(x) <1\}$

Sia I il c.d.e. di f(x) e J quello di g(x); si ha:

il c.d.e. di	$f(x) \pm g(x)$	è	$I\cap J$
» » »	$f(x)\cdot g(x)$	è	$I\cap J$
» » »	$f(x)/g(x)$	è	$\{x\in I\cap J: g(x)\neq 0\}$
» » »	$(f(x))^{g(x)}$	è	$\{x\in I\cap J: f(x)>0\}$

Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni

1) $\sqrt{\operatorname{sen} x}$

2) $\sqrt[7]{\operatorname{arcsen} x}$

3) $(\log x)^\pi$

4) $3^{\cos x}$

5) $\log_3 \operatorname{tg} x$

6) $\operatorname{sen} 2^x$

7) $\operatorname{tg}[3^x+1]$

8) $\operatorname{arcsen}(x^2-1)$

9) $\arccos(2+x^2)$

10) $\log x + \operatorname{arcsen} x$

11) $\dfrac{x^2-1}{\operatorname{tg} x}$

12) $\sqrt{\log_{1/2} x}\cdot(x+1)^\pi$

13) $(\cos x)^{\log x}$

14) $\cosh(x^2+7)$

15) $\operatorname{tgh}(3-x)^{\sqrt{2}}$

16) $\log(2\operatorname{senh} x - \cosh x)$

17) $\operatorname{setttgh}(x^2-1)$

18) $(4\log^2 x-1)^\pi$

19) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2+1}{\log x}\right)$

20) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\operatorname{arcsen} x}$

21) $3^{\operatorname{arctg}x} \cdot \sqrt{2-\operatorname{sen}x}$

22) $\cos\left(1+\sqrt{x^2-1}\right)$

23) $\log\arccos x$

24) $\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\log(x+1)$

25) $\operatorname{tg}(x+1) + \log(x+1)$

26) $\sqrt{1-\log_3 x} \cdot (x^2-3x)\cos x$

27) $\log\left(\sqrt{x}-x\right)$

28) $\sqrt{3-\log_2 x} + (10-x)^{\sqrt{2}}$

29) $\operatorname{senh}\log x$

30) $\operatorname{tgh}(\operatorname{arcsen}(x+1))$

31) $\sqrt{\log_{1/2}(x+1)}$

32) $\sqrt[5]{(\operatorname{sen}x-1)^4} \cdot \log\left(1+|x+2^x|\right)$

33) $\sqrt{|\operatorname{senh}x| \cdot (3^x-4)}$

34) $\dfrac{\operatorname{tgh}(1/x)^2 \cdot \log(x-1)}{\operatorname{senh}(x^2+1)}$

35) $\arccos x^2 \cdot \sqrt{x^2+x-2}$

36) $\sqrt{\cos x - 1} \cdot \operatorname{tgh}\left((x^2+1)(x^2+4)\right)$

37) $\log(\operatorname{settsenh}x-1)$

38) $\arcsin\log x$

39) $(2^x-3)^{\operatorname{tg}x}$

Risposte

1) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$ 2) $[-1,1]$ 3) $[1, +\infty[$

4) $]-\infty, +\infty[$ 5) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ 6) $]-\infty, +\infty[$

7) $]-\infty, +\infty[- \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\geq 0}} \left\{\log_3\left(\frac{\pi}{2} - 1 + k\pi\right)\right\}$ 8) $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

9) $\emptyset$ 10) $]0,1]$

11) $]-\infty, +\infty[- \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{k\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$ 12) $]0,1]$

13) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\right)$ 14) $]-\infty, +\infty[$

15) $]-\infty, 3[$ 16) $\left]\frac{1}{2}\log 3, +\infty\right[$

17) $]-\sqrt{2}, 0[\cup]0, \sqrt{2}[$ 18) $]0, \frac{1}{\sqrt{e}}[\cup]\sqrt{e}, +\infty[$

19) $]0,1[\cup]1, +\infty[$ 20) $]-1,0[\cup]0,1]$

21) $]-\infty, +\infty[$ 22) $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

23) $]-1,1[$ 24) $[1, +\infty[$

25) $]-1, +\infty[- \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} - 1 + k\pi\right\}$ 26) $\emptyset$

27) $]0,1[$ 28) $]0,8]$

29) $]0, +\infty[$ 30) $]-2,0]$

31) $]-1,0]$ 32) $]-\infty, +\infty[$

33) $[\log_3 4, +\infty[$ 34) $]1, +\infty[$

35) $\{1\}$ 36) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{2k\pi\}$

37) $]\operatorname{senh}1, +\infty[$ 38) $\left[\frac{1}{e}, e\right]$

39) $\left]\log_2 3, +\infty\right[- \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

Svolgimento (da 1 a 17)

1) Tenendo conto che la funzione senx è definita in tutto R e la funzione $\sqrt{y}$ è definita in $[0, +\infty[$ si ha facilmente che il campo di esistenza di $\sqrt{\operatorname{sen}x}$ si ottiene (cfr. anche la tabella) risolvendo la disequazione

$$\text{sen } x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in Z} [2k\pi, (2k+1)\pi].$$

2) Poiché $\sqrt[3]{y}$ è definita in tutto R il campo di esistenza di $\sqrt[3]{\text{arcsen}x}$ coincide con quello di arcsenx e cioè con $[-1,1]$ (cfr. anche la tabella).

3) Poiché logx è definito in $]0,+\infty[$ ed $(y)^\pi$ in $[0,+\infty[$ il c.d.e. si trova risolvendo il sistema (cfr. anche la tabella):

$$\begin{cases} x>0 \\ \log x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow [1,+\infty[.$$

4) Poiché 3^y è definita in tutto R il campo di esistenza di $3^{\cos x}$ coincide con quello di cosx ed è quindi tutto R.

5) La funzione $\log_3 y$ è definita in $]0,+\infty[$ e tgx in

$$R - \bigcup_{k \in Z} \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}.$$

Quindi il campo di esistenza si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x \neq \pi/2 + k\pi, \ k \in Z \\ \text{tg}x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in Z} \left]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[.$$

6) La funzione seny è definita in tutto R e pertanto il c.d.e. di sen 2^x è quello di 2^x cioè $]-\infty,+\infty[$

7) La funzione tgy è definita per $y \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in Z$ e 3^x+1 in tutto R; pertanto (cfr. tabella) il campo di esistenza si trova risolvendo:

$$3^x+1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \forall k \in Z \Leftrightarrow$$

$$x \neq \log_3 \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + k\pi\right] \ \forall k \in Z, k \geq 0.$$

8) Ricordando che arcseny è definito in $[-1,1]$ si ha che il c.d.e. di arcsen (x^2-1) si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2-1 \geq -1 \\ x^2-1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$$

9) Ricordando che arccosy è definito in $[-1,1]$ si ha che il c.d.e. di arccos (x^2+2) è dato dall'insieme delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2+2 \geq -1 \\ x^2+2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset.$$

10) Poiché logx è definita in $]0,+\infty[$ ed arcsenx in $[-1,1]$ il c.d.e. si trova risolvendo il sistema (cfr. anche la tabella):

$$\begin{cases} x>0 \\ x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 1.$$

11) La funzione x^2-1 è definita in R e tgx per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$; inoltre poiché la funzione data è un rapporto bisogna imporre che il denominatore sia diverso da 0 (cfr. tabella); quindi il c.d.e. si trova risolvendo:

$$\begin{cases} x \neq \pi/2 + k\pi, \ k \in Z \\ \text{tg}x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ \pi \ \frac{k\pi}{2}, \ k \in Z.$$

12) Poiché la funzione data è il prodotto delle due funzioni $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$ ed $(x+1)^\pi$ il c.d.e. si ottiene intersecando i c.d.e. delle funzioni $(x+1)^\pi$ e $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$ (cfr. tabella)

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x>0 \\ \log_{1/2} x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 1.$$

13) La funzione cosx è definita in tutto R; logx in $]0,+\infty[$; inoltre affinche abbia senso $(\cos x)^{\log x}$ bisogna imporre che la base sia positiva; quindi il c.d.e. si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x>0 \\ \cos x>0 \end{cases} \Leftrightarrow]0,+\infty[\cap\left(\bigcup_{k\in Z}]-\pi/2+2k\pi, +\pi/2+2k\pi[\right)=$$
$$=]0,\pi/2[\cup\left(\bigcup_{k\in N}]-\pi/2+2k\pi, \pi/2+2k\pi[\right)$$

14) La funzione coshy è definita in $]-\infty,+\infty[$ e quindi il c.d.e. di $\cosh(x^2+7)$ coincide con quello di x^2+7 cioè con $]-\infty,+\infty[$.

15) La funzione tghy è definita in tutto R cosicchè il c.d.e. di $\operatorname{tgh}(3-x)^{\sqrt{2}}$ coincide con quello di $(3-x)^{\sqrt{2}}$ che si ottiene imponendo

$$3-x > 0 \Leftrightarrow x\in\ ]-\infty,\ 3[$$

16) La funzione logy è definita per y>0 cosicchè dovrà essere

$$2\operatorname{sen}x > \cosh x \Leftrightarrow e^x-e^{-x} > \frac{e^x+e^{-x}}{2} \Leftrightarrow e^{2x} > 3 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}\log 3$$

17) La funzione setttghy è definita in $]-1,1[$ cosicchè il campo di definizione si trova imponendo

$$-1<x^2-1<1 \Leftrightarrow 0<x^2<2 \Leftrightarrow -\sqrt{2}<x<0,\ \ 0<x<\sqrt{2}$$

7.2 Ulteriori campi di esistenza

1) $\sqrt{\log^2_{1/3} x-1} + \operatorname{arcsen}\left(\log_3^2 \frac{x}{2}\right)$

2) $\log\left(16\operatorname{arcsen}^2 x-\pi^2\right)\cdot\sqrt{1+\log_{1/3} x}$

3) $(\log^2 x - 5\log x+4)^{\sqrt{2-\log x}}$

4) $\operatorname{tgh}\left[\left(\sqrt{3x+4} - x\right)^{\log \operatorname{arcsen} x}\right]$

5) $(2)^{1/\log\left(\sqrt{3-x}-x\right)}$

6) $\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\log x+1}-\log x\right)$

7) $(3)^{1/\arccos\left(\sqrt{1-x}+x\right)}$

8) $\arccos\left(\sqrt{3^x+1}-3^x\right)$

9) $\sqrt{\log_{1/3}(x^2-1)+1}+\sqrt{\operatorname{arcsen}\log_3(x^2+1)}$

10) $\sqrt{1+\log_{1/3}(x^2+2x)}+\sqrt{\operatorname{arcsen}\log_3(x^2+2x+2)}$

11) $\sqrt{\dfrac{2\cos x+\sqrt{3}}{\operatorname{sen}x}}$

12) $\sqrt{1-(\log_{1/3} x)^{x^2-4}}$

13) $\sqrt{\log_2|x+1|}\ \sqrt{\log_{1/2}(x^2+3x)+2}$

14) $\sqrt{\dfrac{-x}{e^{x\ \operatorname{sen}x}-1}}+\cos n\left(\dfrac{1}{x^2+2x+7}\right)$

15) $\operatorname{senh}\left(\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)^{-\sqrt{2}}\right)$

16) $5^{1/\operatorname{arcsen}(1/x)}\left(1-3^{-\sqrt{-x}}\right)^{\operatorname{senh} 3x}$

17) $\sqrt[8]{\operatorname{arcsen}\ (x-2)/(x^2-4x+7)}$

18) $\arccos\left(\dfrac{\log_2 x-1}{\log_2 x-2}\right)$

19) $\dfrac{(\operatorname{sen} x\cos x)^{x^2-1}}{1+2^{\sqrt{\operatorname{sen}x}}}$

20) $\left(\dfrac{\pi-3\operatorname{arcsen}x}{1-\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$

21) $\log\left(\dfrac{\log x+2}{\log^2 x-1}\right)$

22) $\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2-1}-x+2\right)\right)^{2\sqrt{2}}$

23) $(\operatorname{tg}x+1)^{\log(2\cos x-1)}$

24) $1/\log\left((x^2+x+5)/(x-1)\right)$

25) $\dfrac{\operatorname{senh}2x+\operatorname{tg}^2 hx}{\left(x-\sqrt{2}\right)\log\left(x^2-2\right)}+\dfrac{1}{\sqrt{4\operatorname{arcsen}(x/2)-\pi}}$

26) $\dfrac{\sqrt[4]{\operatorname{tg}^2 x+\left(1-\sqrt{3}\right)\operatorname{tg}x-\sqrt{3}}\ \sqrt[8]{2\operatorname{sen}x-1}}{\sqrt[3]{1+\cos x}}$

27) $\left(|\operatorname{arcsen}x|\right)^{\sqrt{1+\log|x|}}$

28) $\left(|\log x+1|-1\right)^{\sqrt{x}}$

29) $\dfrac{\sqrt{|x^2+3x|+4}}{|\log x|+4}$

30) $\dfrac{\log\left(|x^2-1|-1\right)\ \mathrm{arcsen}\left(|x+1|\right)}{1+\sqrt{|x|}}$

31) $\dfrac{\sqrt{\mathrm{arcsen}\,(3^x-2)}}{\log\,(3^x+2)}$

32) $\dfrac{(3^{2x}-3^{x+1}-4)^{\sqrt{2}}+\sqrt{\mathrm{arctg}x}}{\sqrt[4]{x^2\mathrm{sen}x}}$

33) $(1-4\ \mathrm{sen}^2x)^{\sqrt{\mathrm{tg}x+1}}$

34) $\dfrac{\log\,(\mathrm{tg}^2x-3)}{\mathrm{sen}^2x-1}+\sqrt[4]{\cos x}$

35) $\dfrac{\sqrt{2^{\mathrm{arcsen}(x^2-1)}-1}}{\log_{1/2}\left(|x|-1\right)}$

36) $\dfrac{\left(2\ \log_3|x|\ -\ \log_3^3|x|\right)^{\sqrt{2|x|-8}}}{\pi\ +\ \mathrm{arcsen}\,(|x+5|-1)}$

37) $\sqrt[8]{\sqrt{3}-3^{\mathrm{sen}x}}\cdot\sqrt[4]{2^{\cos x}-\sqrt{2}}$

38) $\dfrac{\sqrt{4-\log_{\frac{1}{2}}^2x}}{(2^{2x}-3\cdot2^x-4)^{\pi}}$

39) $(\arccos\,(2^x-3))^{\sqrt{4^{2x}+2\cdot4^x-3}}$

40) $\dfrac{(4\ \mathrm{sen}^2\ x-1)^{\pi}}{\sqrt{2^{\cos x}-1}}$

41) $\sqrt{\dfrac{x}{5^{x/(x-1)}-5}}$

42) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{5^{x/(x-1)}-5}}$

43) $\dfrac{\sqrt{8^x-2}}{1+\mathrm{tgh}^2x}\cdot(1-3x)^{\mathrm{sen}x}$

44) $\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{senh}^2x}}{1+\log\ (|x|+1)}\cdot(|\mathrm{arctg}x|+4)^{\sqrt{2+|x|}}$

45) $\dfrac{\sqrt{(x-4)(x-5)}\cdot(x^2+5x)^{1+\sqrt{2}}}{1+\mathrm{sen}^2x}+\mathrm{arcsen}\,(x-4)$

46) $\dfrac{\sqrt[3]{x^7-x^8+x^2}\ \log(|\mathrm{senh}x|+4)}{1+x+2|x|}+\sqrt{\mathrm{sen}|x|-1}$

47) $\dfrac{\sqrt{|\log x|-\log^2x}}{\sqrt{x}-x}\cdot(|x|-2)^{\mathrm{arctg}x}$

48) $\sqrt{\dfrac{\mathrm{senh}x\ -\ 1}{\cosh x\ -\ 2}}$

49) $\mathrm{setttgh}\ (2-\cosh x)$

50) $\mathrm{setttgh}\ \dfrac{2e^x-1}{e^x+2}$

51) $\sqrt{\mathrm{tgh}^2x\ -\ 3\mathrm{tgh}x\ +\ 2}$

52) $\log\,(2\cosh x-1)\ -\ \sqrt{1-\mathrm{senh}x}$

53) $\mathrm{settcosh}\ \dfrac{e^x+1}{2e^x-1}+\mathrm{settsenh}\ \sqrt{x}$

54) $\log\,(1+\mathrm{setttgh}(x-2))+\sqrt{1+\mathrm{settcosh}x}$

55) $\left(\sqrt{\mathrm{sen}2x}\ -\ \sqrt{\cos 2x}\right)^x+\left(3+\log^2(|x|+1)\right)^{1+\mathrm{sen}x}$

56) $\log(\mathrm{arcsen}(\sqrt{x}-x))\cdot(\mathrm{arctg}x)^{\sqrt{x+1}}$

57) $\left(\dfrac{x-1}{1-|x+1|}\right)^{|x|}+\sqrt{\mathrm{arctg}\,(9-x^2)}$

58) $\sqrt{\log_{1/3}\mathrm{arctg}x\ -\ \log_{1/3}\pi/4}\ /\ \sqrt{5^{2x}-5^x}$

59) $\sqrt{x^2-|x|}+(|\log\ x|-1)^{\pi}+\mathrm{arcsen}\left(\dfrac{|x|}{1+|x|}\right)$

60) $\arccos\ |3^{2x}-3^x+1|+|x|^x-\log(6|\mathrm{arcsen}x|-\pi)$

Risposte

1) $[3,6]$

2) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$

3) $[0,e[$

4) $]0,1[$

5) $]-\infty,0\,[\cup]\,0,-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,[$

6) $[1,e^4]\cup[1/e]$

7) $[-3,0[$

8) $]-\infty,1[$

9) $[-\sqrt{2},-1\,[\cup]\,1,\sqrt{2}]$

10) $[-\sqrt{2},-1,-2\,[\cup]\,0,\sqrt{2}-1]$

11) $\bigcup_{k\in Z}\left(\left]2k\pi,\ \frac{5}{6}\pi+2k\pi\right]\right)\cup\left(\left]\left(2k+1\right)\pi,\ \left(2k+1\right)\pi+\frac{\pi}{6}\right]\right)$

12) $]0,1/3]$

13) $[-4,-3[\cup]0,1[$

14) $\bigcup_{k\in Z}\left]\left(2k+1\right)\pi,\left(2k+2\right)\pi\right[$

15) $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$

16) $]-\infty,-1[$

17) $[2,+\infty[$

18) $]0,2\sqrt{2}[$

19) $\bigcup_{k\in Z}\left]2k\pi,\ \pi/2+2k\pi\right[$

20) $[0,\sqrt{3}/2[$

21) $\left]\frac{1}{e^2},\frac{1}{e}\right[\cup]\,e,+\infty[$

22) $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

23) $\bigcup_{k\in Z}\left]-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right[$

24) $]1,+\infty[$

25) $]\sqrt{2},\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},2[$

26) $\bigcup_{k\in Z}\left(\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\cup\left]\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right]\right)$

27) $[-1,-1/e]\cup[1/e,1]$

28) $]0,1/e^2[\cup]1,+\infty[$

29) $]0,+\infty[$

30) $[-2,-\sqrt{2}[$

31) $[\log_3 2,1]$

32) $]\log_3 4,\pi[\cup\left(\bigcup_{k\in N}]2k\pi,(2k+1)\pi[\right)$

33) $\bigcup_{k\in Z}\left(\left]-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right[\cup\left]\frac{5}{6}\pi+2k\pi,\frac{7}{6}\pi+2k\pi\right[\right)$

34) $\bigcup_{k\in Z}\left(\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi,-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right[\cup\left]\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{2}\pi+2k\pi\right[\right)$

35) $[-\sqrt{2},-1[\cup]1,\sqrt{2}]$

36) $]-7,-3]$

37) $\bigcup_{k\in Z}-\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]$

38) $]2,4]$

39) $[1,2[$

40) $\bigcup_{k\in Z}\left(\left]\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\cup\left]\frac{3}{2}\pi+2k\pi,\frac{11}{6}\pi+2k\pi\right[\right)$

41) $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

42) $]1,\infty[$

43) $\emptyset$

44) $]-\infty,+\infty[$

45) $[3,4]\cup\{5\}$

46) $\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

47) $]2,e]$

48) $]-\text{settcosh}2,\ \text{settsenh}1]\cup]\text{settcosh}2,\ +\infty[$

49) $]-\text{settcosh}3,\ \text{settcosh}3[-\{0\}$

50) $]-\infty,\ \log 3[$

51) $]-\infty,+\infty[$

52) $]-\infty,\log\ (1+\sqrt{2})]$

53) $[0,\log 2]$

54) $2+\frac{1-e^2}{1+e^2},3\ [$

55) $\bigcup_{k\in Z}\left]\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right]$

56) $]0,1[$

57) $]-3,-2[\cup]0,1[$

58) $]0,1]$

59) $]e,+\infty[$

60) $[-1,-\frac{1}{2}[$

Svolgimento

Per ognuno degli esercizi sarà indicato il sistema la cui risoluzione conduce alla determinazione del c.d.e.

1) $\begin{cases} x>0 \\ \log^2_{1/3} x-1 \geq 0 \\ \log^2_3 \frac{x}{2} \leq 1 \\ \log^2_3 \frac{x}{2} \geq -1 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -1 \\ 16\text{arcsen}^2 x-\pi^2 > 0 \\ 1+\log_{1/3} x \geq 0 \\ x>0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x > 0 \\ \log^2 x-5\log x+4 > 0 \\ 2-\log x \geq 0 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} 3x+4 \geq 0 \\ \sqrt{3x+4}-x > 0 \\ \text{arcsen}x > 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ \sqrt{1-x} - x > 0 \\ \log\left(\sqrt{1-x} - x\right) \neq 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x > 0 \\ \log x + 1 \geq 0 \\ \sqrt{\log x+1} - \log x \leq 1 \\ \sqrt{\log x+1} - \log x \leq -1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ \sqrt{1-x} + x \leq 1 \\ \sqrt{1-x} + x \geq -1 \\ \arccos\left(\sqrt{1-x} + x\right) \neq 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3^x + 1 \geq 0 \\ \sqrt{3^x+1} - 3^x \leq 1 \\ \sqrt{3^x+1} - 3^x \geq -1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2-1 > 0 \\ \log_{1/3}(x^2-1) + 1 \geq 0 \\ x^2 + 1 > 0 \\ \log_3(x^2+1) \geq -1 \\ \log_3(x^2+1) \leq 1 \\ \operatorname{arcsen} \log_3(x^2+1) \geq 0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2+2x > 0 \\ 1+\log_{1/3}(x^2+2x) \geq 0 \\ x^2 + 2x + 2 > 0 \\ \log_3(x^2+2x+2) \geq -1 \\ \log_3(x^2+2x+2) \leq 1 \\ \operatorname{arcsen} \log_3(x^2+2x+2) \geq 0 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{2\cos x + \sqrt{3}}{\operatorname{sen} x} \geq 0 \\ \operatorname{sen} x \neq 0 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x > 0 \\ \log_{1/3} x > 0 \\ 1 - (\log_{1/3} x)^{x^2-4} \geq 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} \log_2 |x+1| \geq 0 \\ |x+1| > 0 \\ x^2 + 3x > 0 \\ \log_{1/3}(x^2+3x) + 2 \geq 0 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \dfrac{x}{1-e^{x \operatorname{sen} x}} \geq 0 \\ 1 - e^{x \operatorname{sen} x} \pi 0 \\ x^2 + 2x + 7 \neq 0 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ \sqrt{1 - x^2} + x > 0 \end{cases}$

16) $\begin{cases} -1 \leq \dfrac{1}{x} \leq 1 \\ x \neq 0 \\ \operatorname{arcsen} \dfrac{1}{x} \neq 0 \\ -x \geq 0 \\ 1 - 3^{\sqrt{-x}} > 0 \end{cases}$

17) $\begin{cases} -1 \leq \dfrac{x-2}{x^2-4x+7} \leq 1 \\ x^2 - 4x+7 \neq 0 \\ \operatorname{arcsen} \dfrac{x-2}{x^2-4x+7} \geq 0 \end{cases}$

18) $\begin{cases} -1 \leq \dfrac{\log_2 x-1}{\log_2 x-2} \leq 1 \\ x > 0 \\ \log_2 x-2 \neq 0 \end{cases}$

19) $\begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \cos x > 0 \\ \operatorname{sen} x \geq 0 \\ 1 + 2^{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \neq 0 \end{cases}$

20) $\begin{cases} \dfrac{\pi - 3 \operatorname{arcsen} x}{1 - \sqrt{x}} > 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ 1 - \sqrt{x} \neq 0 \\ x \geq 0 \\ 1+\operatorname{sen}^2 x \geq 0 \end{cases}$

21) $\begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{\log x + 2}{\log^2 x - 1} > 0 \\ \log^2 x - 1 \neq 0 \end{cases}$

22) $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2-1} - x+2\right) > 0 \end{cases}$

23) $\begin{cases} 2\cos x-1 > 0 \\ \operatorname{tg} x + 1 > 0 \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

24) $\begin{cases} \dfrac{x^2+x+5}{x-1} > 0 \\ x-1 \neq 0 \\ \log\left(\dfrac{x^2+x+5}{x-1}\right) \neq 0 \end{cases}$

25) $\begin{cases} (x - \sqrt{2}) \cdot \log(x^2-2) \neq 0 \\ x^2-2 > 0 \\ -1 \leq \dfrac{x}{2} \leq 1 \\ 4 \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{2} - \pi > 0 \end{cases}$

26) $\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \left(1-\sqrt{3}\right) \operatorname{tg} x - \sqrt{3} \geq 0 \\ x \neq \pi/2 + k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z} \\ 2 \operatorname{sen} x-1 \geq 0 \\ 1 + \cos x \neq 0 \end{cases}$

27) $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ |\text{arcsen } x| > 0 \\ |x| > 0 \\ 1+\log |x| \ge 0 \end{cases}$

28) $\begin{cases} |\log x + 1| - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$

29) $\begin{cases} |x^2+3x|+4 \ge 0 \\ x > 0 \\ |\log x|+4 \ne 0 \end{cases}$

30) $\begin{cases} |x^2-1|-1 > 0 \\ -1 \le |x+1| \le 1 \\ |x| \ge 0 \\ 1 + \sqrt{|x|} \ne 0 \end{cases}$

31) $\begin{cases} -1 \le 3^x - 2 \le 1 \\ \text{arcsen } (3^x-2) \ge 0 \\ 3^x+2 > 0 \\ \log (3^x+2) \ne 0 \end{cases}$

32) $\begin{cases} 3^{2x}-3^{x+1}-4 \ge 0 \\ \text{arctg } x \ge 0 \\ x^2 \text{ sen } x>0 \end{cases}$

33) $\begin{cases} 1-4 \text{ sen}^2 x > 0 \\ \text{tg } x+1 \ge 0 \\ x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k\in Z \end{cases}$

34) $\begin{cases} \text{tg}^2 x - 3 > 0 \\ x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k\in Z \\ \cos x \ge 0 \\ \text{sen}^2 x - 1 \ \pi \ 0 \end{cases}$

35) $\begin{cases} 2^{3\text{arcsen } (x^2 - 1)} - 1 \ge 0 \\ -1 \le x^2 - 1 \le 1 \\ |x|-1 > 0 \\ \log_{1/2}(|x| - 1) \ne 0 \end{cases}$

36) $\begin{cases} |x| > 0 \\ 2 \log_3 |x| - \log_3^2 |x| > 0 \\ 2^{|x|}-8 \ge 0 \\ -1 \le |x+5|-1 \le 1 \\ \pi + \text{arcsen } (|x+5|-1) \ne 0 \end{cases}$

37) $\begin{cases} \sqrt{3}-3^{\text{sen } x} \ge 0 \\ -\sqrt{2}+2^{\cos x} \ge 0 \end{cases}$

38) $\begin{cases} x > 0 \\ 4-\log_{1/2}^2 x \ge 0 \\ 2^{2x}-3\cdot 2^x - 4 > 0 \end{cases}$

39) $\begin{cases} \arccos (2^x-3) > 0 \\ -1 \le 2^x - 3 \le 1 \\ 4^{2x}+2\cdot 4^x - 3 \ge 0 \end{cases}$

40) $\begin{cases} 4 \text{ sen}^2 x-1 \ge 0 \\ 2^{\cos x} - 1 \ge 0 \\ \sqrt{2^{\cos x}-1} \ne 0 \end{cases}$

41) $\begin{cases} \dfrac{x}{5^{x/(x-1)}-5} \ge 0 \\ 5^{x/(x-1)} - 5 \ne 0 \\ x - 1 \ne 0 \end{cases}$

42) $\begin{cases} x \ge 0 \\ 5^{x/(x-1)} - 5 \ge 0 \\ \sqrt{5^{x/(x-1)} - 5} \ne 0 \\ x-1 \ne 0 \end{cases}$

43) $\begin{cases} 8^x-2 \ge 0 \\ 1 - 3x > 0 \end{cases}$

44) $\begin{cases} 1 + \text{senh}^2 x \ge 0 \\ |\text{arctg } x|+ 4 > 0 \\ 2 + |x| \ge 0 \\ |x| + 1 > 0 \\ 1+\log (|x| + 1) \ne 0 \end{cases}$

45) $\begin{cases} (x-4)(x-5) \ge 0 \\ x^2+5x \ge 0 \\ -1 \le x-4 \le 1 \\ 1 + \text{sen}^2 x \ne 0 \end{cases}$

46) $\begin{cases} |\text{senh } x| + 4 > 0 \\ 1 + x + 2 |x| \ne 0 \\ \text{sen } |x| -1 \ge 0 \end{cases}$

47) $\begin{cases} x > 0 \\ |\log x| - \log^2 x \ge 0 \\ \sqrt{x} - x \ne 0 \\ |x| - 2 > 0 \end{cases}$

48) $\begin{cases} \dfrac{\text{senh } x-1}{\cosh x-2} \ge 0 \\ \cosh x -2 \ne 0 \end{cases}$

49) $-1 < 2 - \cosh x < 1$

50) $\begin{cases} -1 < \dfrac{2e^x-1}{e^x+2} < 1 \\ e^x+2 \ne 0 \end{cases}$

51) $\operatorname{tgh}^2 x - 3\operatorname{tgh} x + 2 \quad 0$

52) $\begin{cases} 2\cosh x - 1 > 0 \\ 1 - \operatorname{senh} x \geq 0 \end{cases}$

53) $\begin{cases} \dfrac{e^x+1}{2e^x-1} \geq 1 \\ 2e^x - 1 \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

54) $\begin{cases} 1 + \operatorname{setttgn}(x-2) > 0 \\ -1 < x-2 < 1 \\ 1 + \operatorname{settcosh} x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$

55) $\begin{cases} \operatorname{sen} 2x \geq 0 \\ \cos 2x \geq 0 \\ \sqrt{\operatorname{sen} 2x} - \sqrt{\cos 2x} > 0 \\ 3 + \log^2(|x|+1) > 0 \\ |x|+1 > 0 \end{cases}$

56) $\begin{cases} \operatorname{arcsen}(\sqrt{x}-x) > 0 \\ -1 \leq \sqrt{x} - x \leq 1 \\ x \geq 0 \\ \operatorname{arctg} x > 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$

57) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1-|x+1|} > 0 \\ 1 \neq |x+1| \\ \operatorname{arctg}(9-x^2) \geq 0 \end{cases}$

58) $\begin{cases} \log_{1/3} \operatorname{arctg} x - \log_{1/3} \dfrac{\pi}{4} \geq 0 \\ \operatorname{arctg} x > 0 \\ 5^{2x} - 5^x \geq 0 \\ \sqrt{5^{2x}-5x} \neq 0 \end{cases}$

59) $\begin{cases} x^2 - |x| \geq 0 \\ |\log x| - 1 \geq 0 \\ x > 0 \\ -1 \leq \dfrac{|x|}{1+|x|} \leq 1 \\ 1+|x| \neq 0 \end{cases}$

60) $\begin{cases} -1 \leq |3^{2x}-3^x+1| \leq 1 \\ |x| > 0 \\ 6|\operatorname{arcsen} x| - \pi > 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$

CAPITOLO 3

GEOMETRIA ANALITICA

1. Preliminari: equazioni della retta

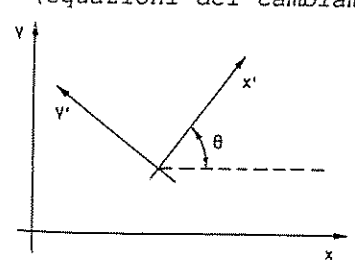
1.1 Cambiamento di riferimento: distanza di due punti; punto medio

In tutto il capitolo supporremo sempre di operare in un *sistema di riferimento cartesiano monometrico ortogonale*.

Se si passa dal riferimento Oxy al riferimento O'x'y' ottenuto portando l'origine O in O' e facendo ruotare gli assi x,y di un angolo θ in senso antiorario (cfr. figura) dette (x'_o, y'_o) le coordinate di O' nel riferimento Oxy si ha:

$$\begin{cases} x = x'_o + x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y = y'_o + x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = (x-x'_o)\cos\theta + (y-y'_o)\operatorname{sen}\theta \\ y' = (x'_o-x)\operatorname{sen}\theta + (y-y'_o)\cos\theta \end{cases}$$

(equazioni del cambiamento di riferimento)



N.B. Se $\theta = 0$ si ha una *traslazione*, se O=O' si ha una *rotazione*.

Dati nel piano due punti $P_1 \equiv (x_1, y_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ si ha

$$|P_1 P_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \quad \textit{(distanza di due punti)}$$

$$M \equiv \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \quad \textit{(punto medio del segmento } P_1 P_2\textit{)}$$

Risolvere i seguenti esercizi:

1) Dati nel riferimento Oxy i punti $A \equiv (1,2)$ e $B \equiv (-3,1)$ determinare le nuove coordinate nel riferimento O'x'y' ottenuto come segue:
a) con una traslazione che porta $O \equiv (0,0)$ in $O' \equiv (1,1)$;
b) con una traslazione che porta $O \equiv (0,0)$ in $O' \equiv (-2,3)$;
c) con una rotazione di un angolo $\theta = \pi/6$ in senso antiorario;
d) portando $O \equiv (0,0)$ in $O' \equiv (-1,2)$ e facendo ruotare gli assi di un angolo $\theta = \pi/4$ in senso antiorario

2) Determinare la distanza tra le seguenti coppie di punti:
a) $(0,0)$, $(1,1)$; b) $(-2,1)$, $(3,4)$; c) $(-2,0)$, $(0,\sqrt{5})$;
d) $(3,5)$, $(-3,5)$; e) $\left(\frac{1}{2}, -2\right)\left(2, -\frac{3}{2}\right)$; f) $(7,1)$, $(3,-2)$;
g) $\left(\frac{1}{\pi}, \sqrt{2}\right)\left(2, \sqrt{2}\right)$; h) $\left(-2, \frac{1}{4}\right)\left(-2, \frac{3}{5}\right)$; i) $\left(\sqrt{2}, 0\right), \left(\sqrt{5}, \sqrt[4]{40}\right)$;
l) $\left(10, -3\right)\left(9, -3+\sqrt{15}\right)$.

3) Determinare le coordinate del punto medio dei segmenti aventi per estremi le seguenti coppie di punti

a) $(0,0)$, $(1,1)$; b) $(-3,2)$, $(3,-2)$; c) $\left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right)$
d) $(3,4)$, $(5,-8)$; e) $(\sqrt{3}, 2)$ $(1,-2)$; f) $(-3,-2)$, $(5,0)$.

4) Calcolare il perimetro del triangolo di vertici $A \equiv (0,0)$, $B \equiv (1,1)$ $C \equiv (3,0)$

5) Dato il triangolo di vertici $A \equiv (-2,-1)$, $B \equiv (0,0)$, $C \equiv \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ verificare che è isoscele sulla base AB e calcolare l'altezza relativa ad AB.

6) Calcolare l'area del triangolo di vertici $A \equiv (1,1)$, $B \equiv (3,3)$, $C \equiv (4,0)$.

7) Dato il punto $A \equiv (2,3)$ determinare i punti del piano che hanno ascissa 2 (uguale a quella di A) e la cui distanza da A sia 5; determinare poi i punti del piano di ordinata 3 (uguale a quella di A) e la cui distanza da A sia 2.

8) Verificare che il quadrilatero ABCD con $A \equiv (1,0)$, $B \equiv (1,1)$, $C \equiv (-1,0)$, $D \equiv (-1,-1)$ è un parallelogramma.

9) Verificare che il quadrilatero ABCD con $A \equiv (1,2)$, $B \equiv (0,0)$, $C \equiv (2,-1)$, $D \equiv (3,1)$ è un quadrato.

10) Siano dati i punti $A \equiv (-2,1)$, $B \equiv (-2,3)$; determinare i punti C tali che il triangolo ABC sia isoscele sulla base AB ed abbia area 4.

Risposte

1)

a) $(0,1)$, $(-4,0)$
b) $(3,-1)$, $(-1,-2)$
c) $\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right), \left(\frac{1-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$
d) $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), \left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2)

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{34}$
c) 3
d) 6
e) $\frac{\sqrt{10}}{2}$
f) 5
g) $\frac{2\pi-1}{\pi}$
h) $\frac{7}{20}$
i) $\sqrt{7}$
l) 4

3)

a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ b) $(0,0)$

c) $\left(-\frac{3}{8}, \frac{2}{5}\right)$ d) $(4,-2)$

e) $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, 0\right)$ f) $(1,-1)$

4) $\sqrt{2}+\sqrt{5}+3$ 5) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

6) 4 7) $(2,8), (2,-2), (0,3), (4,3)$

8) si ha: $|AB|=|CD|, |BC|=|AD|$ 9) I lati sono eguali e le diagonali sono eguali

10) $(2,2), (-6,2)$

Svolgimento (1a, c, 2a, 3a, 6-10)

1a) Le equazioni delle traslazioni sono:

$$\begin{cases} x' = x-1 \\ y' = y-1 \end{cases}$$

e quindi sostituendo ad x ed y le coordinate di A nel riferimento Oxy si ottengono le coordinate di A nel riferimento O'x'y':

$$\begin{cases} x' = 1-1 = 0 \\ y' = 2-1 = 1 \end{cases};$$

pertanto nel nuovo riferimento A ha coordinate $(0,1)$; analogamente si trovano le nuove coordinate di B

$$\begin{cases} x' = -3-1 = -4 \\ y' = 1-1 = 0 \end{cases};$$

pertanto B ha coordinate $(-4,0)$ nel nuovo riferimento.

c) Le equazioni della rotazione sono:

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \\ y' = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

e sostituendo ad (x,y) le coordinate di A e B si trova rispettivamente:

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}+2}{2} \\ y' = \frac{2\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = \frac{1-3\sqrt{3}}{2} \\ y' = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \end{cases};$$

quindi le coordinate di A nel nuovo riferimento sono

$\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ e quelle di $B \equiv \left(\frac{1-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$.

2a) Applicando la formula della distanza di due punti si ha posto $P_1 \equiv (0,0)$, $P_2 \equiv (1,1)$:

$$|P_1 P_2| = \sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}.$$

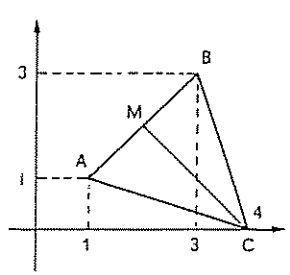
3a) Dato il segmento di estremi $(0,0)$, $(1,1)$ il punto medio M ha per ascissa la semisomma delle ascisse e per ordinata la semisomma delle ordinate per cui:

$$M \equiv \left(\frac{1+0}{2}, \frac{1+0}{3}\right) \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

6) Si faccia riferimento alla fig. 2; si ha: $|AC| = \sqrt{10} = |BC|$ e quindi il triangolo è isoscele sulla base A B; detto pertanto

$M \equiv (2,2)$

il punto medio di A B l'area del triangolo sarà data da:



$$\frac{1}{2}\ |AB| \cdot |CM| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4$$

7) Sia, $P \equiv (2,y)$ il generico punto del piano di ascissa 2; si ha:

$$|PA| = |y-3| = 5 \Leftrightarrow y=8,\ y=2$$

quindi i punti di ascissa 2 che distano 5 da A sono (2,8) e (2,3). Analogamente detto $Q\equiv(x,3)$ il generico punto del piano di ordinata 3 si ha:

$$|QA| = 2 \Leftrightarrow |x-2| = 2 \Leftrightarrow x=4,\ x=0.$$

pertanto i punti di ordinata 3 che distano 2 da A sono (0,3) e (4,3)

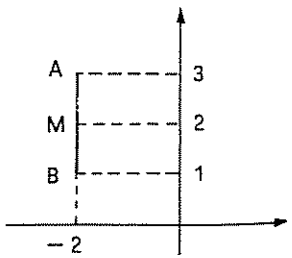
8) Basta verificare che i lati opposti hanno lunghezza eguale; si ha:

$$|AB| = |CD| = 1,\ |BC| = |AD| = \sqrt{5}$$

9) Si ha: $|AB| = |BC| = |CD| = |AD| = \sqrt{5}$; inoltre $|AB| = |BC| = \sqrt{10}$; quindi avendo i lati eguali e le diagonali eguali il quadrilatero è un quadrato

10) Si faccia riferimento alla figura; affinchè il triangolo abbia area 4 l'altezza relativa ad $|AB|$ dovrà avere lunghezza 4 poichè $|AB| = 2$ e

$$\frac{1}{2}\ h \cdot |AB| = 4 \Rightarrow h=4.$$



Affinchè il triangolo sia isoscele C dovrà avere l'ordinata di M punto medio di $|AB|$; quindi poichè $M \equiv (-2,2)$ si avrà che le soluzioni cercate sono $C_1 \equiv (-2+h,2) \equiv (2,2)$ e $C_2 \equiv (-2-h,2) \equiv (-6,2)$.

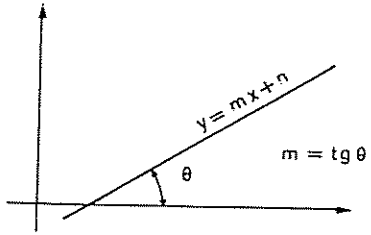
1.2 - Equazione della retta

Una retta nel piano è rappresentata da un'equazione di primo grado in x ed y:

$ax+by+c=0$ con $(a,b) \neq (0,0)$ *(equazione della retta in forma implicita)*

$y=mx+n$ *(equazione della retta in forma esplicita)*

m=coefficiente angolare



Dati nel piano due punti $P_1 \equiv (x_1,y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2,y_2)$

$(y_2-y_1)(x-x_1) = (x_2-x_1)(y-y_1)$ *(equazione della retta passante per due punti)*.

In particolare se $x_1=x_2$ si ha:

$x-x_1=0$ *(equaz. della retta per due punti di eguale ascissa)*

se $y_1=y_2$

$y-y_1=0$ *(equaz. della retta per due punti di eguale ordinata)*

$a(x-x_1) + b(y-y_1)=0$ *(equazione del fascio di rette passanti per P_1 in forma implicita)*

$y-y_1=m(x-x_1)$ *(equazione del fascio di rette passanti per P_1 in forma esplicita)*

Date le rette r ed r' di equazioni (in forma implicita) rispettivamente $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ si ha:

$r=r' \Leftrightarrow \exists k \in R-\{0\}$ tale che: $a'=ka$, $b'=kb$; $c'=kc$ *(condizione di coincidenza)*

$r//r' \Leftrightarrow \exists k \in R-\{0\}$ tale che: $a'=ka$, $b'=kb$; $(c' \neq kc)$ *(condizione di parallelismo)*

$r \perp r' \Leftrightarrow aa'+bb'=0$ (*condizione di perpendicolarità*):

date poi le rette r ed r' di equazioni (in forma esplicita) rispettivamente $y=mx+n$, $y=m'x+n'$ si ha:

$r=r' \Leftrightarrow m=m',\ n=n'$, (*condizione di coincidenza*)
$r//r' \Leftrightarrow m=m',\ (n\neq n')$ (*condizione di parallelismo*)
$r \perp r' \Leftrightarrow mm'+1=0$ (*condizione di perpendicolarità*)

Dato il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e la retta r di equazione $ax+by+c = 0$ si ha:

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \text{distanza di } P_0 \text{ da } r.$$

Risolvere i seguenti esercizi

1) Scrivere le equazioni delle rette passanti per le coppie di punti indicati

a) $(0,1)$, $(1,0)$; b) $(-2,1)$, $(3,4)$;
c) $(2,2)$, $(1,1)$; d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, $(0,0)$;
e) $(-3,-5)$, $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$; f) $(2,1)$, $(-2,2)$;
g) $(-3,5)$, $(2,2)$; h) $(0,1)$, $(1,3)$;
i) $(-2, -3)$, $(0,3)$; l) $\left(\sqrt{2}+1,-2\right)$, $\left(1, \sqrt{3}-2\right)$;
m) $(2,0)$, $(2,1)$; n) $(0,-5)$, $(\sqrt{7},-5)$;
o) $\left(\sqrt{2}+1, 3\right)$ $\left(\sqrt{2}+1,-10\right)$ p) $\left(-3,\frac{1}{3}\right)$, $\left(7,\frac{1}{3}\right)$.

2) Determinare il coefficiente angolare delle rette passanti per le seguenti coppie di punti:

a) $(0,0)$, $(1,1)$; b) $(0,0)$, $(-1,1)$;
c) $(-1,2)$, $\left(\sqrt{3}-1, 3\right)$; d) $(9,-2)$, $(5,-2)$;
e) $(-1,2)$, $(-1,5)$.

3) Determinare i punti di intersezione tra le seguenti coppie di rette

a) $\begin{matrix} x-y=0 \\ y+x=0 \end{matrix}$; b) $\begin{cases} 3x+y-1 = 0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2y=x-2 \\ y=x-3 \end{cases}$.

4) Date le seguenti coppie di rette

a) $\begin{matrix} y-2x+5=0 \\ -2y+4x+6=0 \end{matrix}$; b) $\begin{cases} 3x-y+6=0 \\ x-\frac{1}{3}y+2=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y+5=0 \\ 2x-2y+7=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} y=3x+2 \\ y= -\frac{x}{3} +2 \end{cases}$

e) $\begin{matrix} y=2x+4 \\ 8x-4y+16=0 \end{matrix}$; f) $\begin{cases} 2x-5y=0 \\ 5x+2y+1=0 \end{cases}$; g) $\begin{cases} y=-\frac{x}{3} +2 \\ 3y+x=9 \end{cases}$; h) $\begin{cases} 4x-2y+1=0 \\ -6x+3y+5=0 \end{cases}$

individuare le coppie di rette parallele, perpendicolari o coincidenti.

5) Scrivere l'equazione della retta parallela all'asse x e passante per $(-2,3)$.
6) Scrivere l'equazione della retta parallela all'asse y e passante per $(-3,-3)$.
7) Scrivere l'equazione della retta per $(1,1)$ parallela alla retta $y-3x+5=0$.
8) Scrivere l'equazione della retta per $(-2,3)$ parallela alla retta $2y+5x=1$.
9) Scrivere l'equazione della retta per $(-1,5)$ parallela alla $x=2y+5$.
10) Scrivere l'equazione della retta per $(0,0)$ di coefficiente angolare -2.
11) Scrivere l'equazione della retta per $(-1,3)$ avente il coefficiente angolare eguale a quello della retta per $(-2,1)$, $(3,4)$.
12) Scrivere l'equazione della retta per $(-1,1)$ perpendicolare alla retta $y=3x$.
13) Scrivere l'equazione della retta per $(-1,3)$ perpendicolare alla retta $2x+3y-2=0$.

14) Scrivere l'equazione della retta per (2,-2) perpendicolare alla retta $x-2y+4=0$.
15) Scrivere l'equazione della retta per (1,3) perpendicolare a quella di coefficiente angolare 3.
16) Scrivere l'equazione della retta per (1,2) perpendicolare a quella passante per (0,0) (-1,1).
17) Nel fascio di rette passanti per (2,2) individuare:
a) quella di coefficiente angolare -3;
b) quella perpendicolare alla retta $2y-3x+5=0$;
c) quella passante per (0,0);
d) quella perpendicolare all'asse x;
e) quella parallela alla retta $y=3x+5$.

18) Determinare se le terne di punti assegnate sono allineate

a) (0,0), (1,2) (-3,-6), b) (1,1), (2,3), (-2,4).

19) Determinare la distanza tra i punti e le rette indicate:

a) $4y-3x+1=0$, (-1,2) b) $y=2x+1$, (0,0) c) $y=x+1$ (-2,-3)

20) Scrivere l'equazione della retta i cui punti sono equidistanti da (0,0) e (1,3).

21) Nel fascio di rette passanti per (1,-1) individuare
a) la parallela all'asse x;
b) la parallela all'asse y;
c) la parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante,
d) la parallela alla retta $2y + 3x-5=0$;
e) la perpendicolare alla retta $y-5x+2=0$;
f) la perpendicolare alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

22) Dire se nel fascio di rette per (1,-1) vi sono rette aventi distanza $d=\sqrt{2}$ dall'origine ed in caso affermativo scriverne le equazioni; analoga questione per d=1 e d=3; discutere il caso generale $d\geq 0$.

Risposte

1)

a) $y+x-1=0$	b) $3x-5y+11=0$
c) $y-x=0$	d) $2x-3y=0$
e) $5y-12x-11=0$	f) $x+4y-6=0$
g) $5y+3x-16=0$	h) $y-2x-1=0$
i) $y-3x-3=0$	l) $\sqrt{3}x+\sqrt{2}y+2\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}=0$
m) $x-2=0$	n) $y+5=0$
o) $x-\sqrt{2}-1=0$	p) $3y-1=0$

2)

a) 1	b) -1
c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$	d) 0
e) non definito	

3)

a) (0,0)	b) (1,-2)
c) (4,1)	

4)

a) parallele	b) coincidenti
c) perpendicolari	d) perpendicolari
e) coincidenti	f) perpendicolari
g) parallele	h) parallele

5) $y-3=0$;	6) $x+3=0$
7) $y-3x+2=0$;	8) $5x+2y+4=0$
9) $x-2y+11=0$;	10) $y=-2x$
11) $y=\frac{3}{5}x+\frac{18}{5}$;	12) $x+3y-2=0$

13) $2y-3x-9=0$; 14) $y+2x-2=0$

15) $y=\frac{10-x}{3}$; 16) $y-x-1=0$

17)

a) $y=-3x+8$; b) $2x+3y-10=0$

c) $y=x$; d) $x=2$

e) $y=3x-4$

18)

a) si ; b) no

19)

a) $\frac{12}{5}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

c) $\sqrt{2}$;

20) $3y+x-5=0$

21)

a) $y=-1$ b) $x=1$

c) $y=x-2$ d) $3x+2y-1=0$

e) $x+5y+4=0$ f) $y=-x$

22) $d=\sqrt{2}$: $y=x-2$; $d=1$: $y=-1$, $x=1$

$d=3$: nessuna retta; in generale: una retta per $d=0$, $d=\sqrt{2}$, due rette per $0<d<\sqrt{2}$, nessuna retta per $d>\sqrt{2}$

Svolgimento (1a, b, m, n, 2a, e, 3, 4a, b, c, 7, 10, 12, 15, 19a, 22)

1a) Dalla equazione della retta passante per due punti con $(0,1)\equiv(x_1,y_1)$ e $(1,0)\equiv(x_2,y_2)$ si ha:

$$(0-1)\ (x-0) = (1-0)(y-1)$$

e cioe

$$y+x-1=0.$$

b) Dalla equazione della retta passante per due punti con $(-2,1)\equiv(x_1,y_1)$ e $(3,4)\equiv(x_2,y_2)$ si ha:

$$(4-1)(x+2)=(3+2)(y-1)$$

e cioe

$$3x - 5y + 11 = 0.$$

m) Bisogna scrivere l'equazione della retta passante per $(2,0)$ e $(2,1)$; poiché i due punti hanno eguale ascissa 2 l'equazione della retta sara

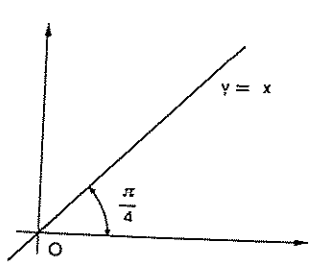
$$x=2 \Leftrightarrow x-2=0.$$

n) L'equazione della retta per $(0,-5)$ e $(\sqrt{7},-5)$ e

$$y=-5 \Leftrightarrow y+5=0$$

poiche i due punti hanno eguale ordinata -5.

2a) L'equazione della retta passante per $(0,0)$, $(1,1)$ è $y-x=0$ cioe $y=x$ pertanto il coefficiente angolare e $1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.



e) L'equazione della retta per (-1,2) e (-1,5) è x=-1 (parallela all'asse delle y); in tal caso il coefficiente angolare non è definito.

3) Per determinare il punto di intersezione tra due rette bisogna risolvere il sistema formato con le equazioni delle due rette; così si ha:

a) $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(0,0);$

b) $\begin{cases} 3x+y-1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(1,-2)$

c) $\begin{cases} 2y=x-2 \\ y=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(4,1)$

4a) Consideriamo le due rette r ed r' di equazioni rispettivamente:

$ax+by+c=y-2x+5=0, \quad a'x+b'y+c'= -2y+4x+6=0;$

si ha subito che le due rette sono parallele dal momento che i coefficienti di x ed y sono proporzionali:

$$a'=4=-2\cdot a, \quad b'=-2=-2\cdot b, \quad (c'=6\neq -2\cdot c=-10);$$

si può anche procedere scrivendo le equazioni di r ed r' in forma esplicita:

$$y=-2x-5, \quad y=2x+3$$

e quindi le due rette sono parallele perchè hanno lo stesso coefficiente angolare 2 (ma non sono coincidenti poichè $-5\neq 3$);

b) Le due rette r ed r' hanno rispettivamente equazione:

$ax+by+c=3x-y+6 = 0, \quad a'x+b'y+c'=x-\frac{1}{3}y+2=0;$

si ha subito che le due rette coincidono poichè

$$a' = 1 = \frac{1}{3}a, \quad b' = -\frac{1}{3} = \frac{1}{3}b, \quad c' = 2 = \frac{1}{3}c;$$

c) Le due rette hanno rispettivamente equazioni

$$ax+by+c = x+y+5=0, \quad a'x+b'y+c'=2x-2y+7=0;$$

si ha subito che esse sono ortogonali poichè:

$$aa' + bb' = 2-2 = 0;$$

si può anche procedere scrivendo le due equazioni in forma esplicita:

$$y = mx + n = -x-5, \quad y = m'x + n' = x + 7/2$$

ed osservando che vale la condizione di perpendicolarità:

$$mm'+1 = -1+1 = 0.$$

7) L'equazione del fascio di rette passanti per (1,1) è:

$$a(x-1) + b(y-1) = 0;$$

la retta di tale fascio parallela a quella di equazione

$$y-3x + 5 = 0$$

si ottiene prendendo a eguale al coefficiente di x e b a quello di y, cioè:

$$a=-3, \quad b=1;$$

(cosicchè vale la condizione di parallelismo); pertanto la retta cercata ha equazione

$$-3\ (x-1) + (y-1) = \Leftrightarrow y-3x+2 = 0.$$

10) Conviene scrivere l'equazione in forma esplicita del fascio di rette per (0,0):

$$y = mx;$$

poiche il coefficiente angolare della retta cercata e -2 si ha l'equazione

$$y=-2x.$$

12) L'equazione del fascio di rette per (-1,1) e

$$a(x+1)+b(y-1)=0;$$

la retta di tale fascio perpendicolare a quella di equazione

$$a'x+b'y+c' = 3x-y=0$$

si ottiene scegliendo $a=-b'=1$, $b=a'=3$ (cosicchè valga la condizione di perpendicolarità); l'equazione cercata sarà quindi:

$$x+3y-2=0,$$

15) Conviene scrivere l'equazione in forma esplicita del fascio di rette per (1,3):

$$y-3 = m(x-1);$$

la retta di tale fascio perpendicolare a quella di coefficiente angolare 3 si ottiene ponendo $m=-\frac{1}{3}$ (cosicchè valga la condizione di perpendicolarità); pertanto l'equazione cercata e

$$y = -\frac{x}{3} + \frac{10}{3}$$

19a) Dato il punto $(x_1, y_1) \equiv (-1,2)$ e la retta $ax+by+c = 4y-3x+1 = 0$ si ha:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8+3+1|}{\sqrt{16+9}} = \frac{12}{5}$$

22) Il fascio di rette per (1,-1) ha equazione

$$a(x-1) + b(y+1) = 0;$$

la generica retta del fascio ha pertanto distanza dall'origine

$$d = \frac{|b-a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

si ha quindi

$$d = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|b-a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sqrt{2} \Leftrightarrow (b+a)^2 = 0 \Leftrightarrow b=-a;$$

l'equazione dell'unica retta avente distanza $\sqrt{2}$ dall'origine e pertanto

$$y = x-2;$$

nel caso d=1 si ha

$$\frac{|b-a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1 \Leftrightarrow 2ab = 0 \Leftrightarrow a=0 \text{ o } b=0;$$

pertanto vi sono due rette nel fascio aventi distanza 1 dall'origine e sono:

$$y+1 = 0 \text{ e } x-1 = 0;$$

nel caso d=3 si ha:

$$\frac{|b-a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3 \Leftrightarrow 8a^2 + 8b^2 + 2ab = 0,$$

e tale equazione non ammette soluzioni (a parte (a,b)=(0,0) che

non è accettabile).

In generale:

$$\frac{|b-a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = d \Leftrightarrow a^2(d^2-1) + b^2(d^2-1) + 2ab=0;$$

l'ultima equazione ammette per $d=0$ e $d=\sqrt{2}$ una soluzione accettabile (cioè diversa da $(0,0)$); per $0<d<\sqrt{2}$ due soluzioni accettabili e per $d>\sqrt{2}$ nessuna soluzione accettabile.

1.3 – Equazioni parametriche

Sia $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ una coppia di numeri direttori di una retta r e sia $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto di r; si ha:

$$\begin{cases} x=x_0 + \lambda t \\ y=y_0 + \mu t \end{cases}, \quad t \in R \quad \textbf{(equazioni parametriche di r)}$$

Siano date due rette r^1 ed r^2 di equazioni parametriche rispettivamente

$$\begin{cases} x=x_1 + \lambda^1 t \\ y=y_1 + \mu^1 t \end{cases}, \quad \begin{cases} x=x_2 + \lambda^2 t \\ y=y_2 + \mu^2 t \end{cases};$$

si ha sinteticamente

$\exists k \in R - \{0\}$ tale che $\lambda^2=k\lambda^1$, $\mu^2=k\mu^1$ (*condizione di parallelismo*);
$\lambda^2\lambda^1+\mu^2\mu^1 = 0$ (*condizione di perpendicolarità*);

$ax+by+c=0$ equazione della retta $r \Rightarrow (-b,a)$ coppia di numeri direttori di r;

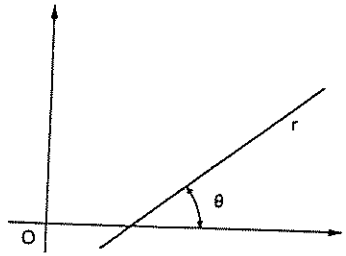
$P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ punti di $r \Rightarrow (x_2-x_1, y_2-y_1)$ coppia di numeri direttori di r;

(λ,μ) coppia di numeri direttori di r

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} = \cos\theta, \quad \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} = \text{sen}\theta$$

oppure

$$\frac{-\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} = \cos\theta, \quad \frac{-\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} = \text{sen}\theta$$



Risolvere i seguenti esercizi

1) Scrivere le equazioni parametriche delle rette passanti per le seguenti coppie di punti

a) $(1,2)$, $(2,-3)$; b) $(1,1)$, $(0,-2)$; c) $(2,-4)$, $(0,-4)$;

d) $(-1,2)$, $(0,3)$; e) $(1,2)$, $(1,3)$.

2) Scrivere le equazioni parametriche delle rette per $(1,1)$ di numeri direttori:

a) $(0,1)$; b) $(3,0)$; c) $(2,-2)$; d) $(-1,3)$; e) $(1,5)$.

3) Tra le rette di equazioni parametriche

$$r_1 \begin{cases} x=2t \\ y=-3t \end{cases}, \quad r_2 \begin{cases} x=4-t \\ y=-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}t \end{cases}, \quad r_3 \begin{cases} x=3+3t \\ y=5+2t \end{cases}$$

determinare le coppie di rette parallele o perpendicolari.

4) Scrivere le equazioni in forma esplicita delle rette di equazioni parametriche

a) $\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$, b) $\begin{cases} x=1-t \\ y=1+3t \end{cases}$, c) $\begin{cases} x=-2 \\ y=t \end{cases}$, d) $\begin{cases} x=t \\ y=3 \end{cases}$,

e) $\begin{cases} x=2t-3 \\ y=2-4t \end{cases}$

5) Determinare il punto di intersezione tra le seguenti coppie di rette

$r_1)$ $\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-1 \end{cases}$, $r_2)$ $\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=2t+4 \end{cases}$

$r_3)$ $\begin{cases} x=3t \\ y=t \end{cases}$, $r_4)$ $\begin{cases} x=-t-1 \\ y=3+t \end{cases}$;

6) Date le rette r ed r^1 di equazioni parametriche

r) $\begin{cases} x=1-t \\ y=2t \end{cases}$, $r^1)$ $\begin{cases} x=3-4t \\ y=2+3t \end{cases}$

scrivere le equazioni parametriche delle parallele ad r) e ad r^1) passanti per (1,2).

7) Scrivere le equazioni parametriche delle rette passanti per (1,2) e perpendicolari alle rette r ed r^1 dell'esercizio 5).

8) Scrivere una coppia di coseni direttori

a) della retta $x-3y+5=0$
b) della retta $y=2$
c) della retta $x=1$
d) della retta passante per $A\equiv(1,1)$ e tale che l'asse x per sovrapporsi ad essa debba descrivere, ruotando in senso antiorario, un angolo di ampiezza $\pi/3$.

9) Scrivere le equazioni parametriche della retta di cui al punto d) dell'esercizio 8).

10) Dimostrare che le rette di equazioni parametriche

$\begin{cases} x=1+3t \\ y=2-2t \end{cases}$ e $\begin{cases} x=4-6t \\ y=4t \end{cases}$

sono coincidenti.

Risposte

1)
a) $x=1+t$, $y=2-5t$ b) $x=1-t$, $y=1-3t$
c) $x=2+2t$, $y=-4$ d) $x=-1+t$, $y=2+t$
e) $x=1$, $y=2+t$

2)
a) $x=1$, $y=1+t$ b) $x=1+3t$, $y=1$
c) $x=1+2t$, $y=1-2t$ d) $x=1-t$, $y=1+3t$
e) $x=1+t$, $y=1+5t$

3) Parallele r_1, r_2; perpendicolari: r_1, r_3, ed r_2, r_3.

4)
a) $y=x$ b) $y=4-3x$
c) $x=-2$ d) $y=3$
e) $y=-2x-4$

5) $\left(\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 6) $x=1-t$, $y=2+2t$, $x=1-4t$, $y=2+3t$

7) $x=1+2t$, $y=2+t$; $x=1+3t$, $y=2+4t$

8)
a) $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ b) $(1,0)$
c) $(0,1)$ d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

9) $x=1+\frac{t}{2}$, $y=1+\frac{\sqrt{3}\,t}{2}$

Svolgimento (1a, c, 3, 4b, 5, 6, 7, 8a, 10)

1a) Sia r la retta passante per i punti $(x_1,y_1)\equiv(1,2)$ e $(x_2,y_2)\equiv(2,-3)$; tale retta ha numeri direttori $a=x_2-x_1=1$, $b=y_2-y_1=-5$; quindi le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2-5t \end{cases} \quad t\in R;$$

ovviamente una volta calcolata la coppia di numeri direttori (1,-5) le equazioni parametriche di r possono essere scritte indifferentemente a partire dal punto (1,2) (come fatto sopra) o dal punto (2,-3) ottenendo equivalentemente

$$\begin{cases} x=2+s \\ y=-3-5s \end{cases} \quad s\in R.$$

(Si osservi che si passa dall'una all'altra coppia di equazioni ponendo t=1+s).

c) La retta per (2,-4), (0,-4) (parallela all'asse x) ha numeri direttori (2,0) e quindi equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=2+2t \\ y=-4 \end{cases} \quad t\in R; \quad \left(\text{o equivalentemente} \begin{cases} x=2s \\ y=-4 \end{cases}, \ s\in R\right).$$

3) La retta r_1 ha numeri direttori $(a,b) = (2,-3)$ ed r_2 ha numeri direttori $(a', b')=(-1, 3/2)$; poiche le coppie (a,b) ed (a', b') sono proporzionale avendosi $a=-2a'$, $b=-2b'$ si ha che r_1 ed r_2 sono parallele; (inoltre, come è facile verificare, il punto (0,0) appartiene ad r_1 ma non ad r_2 e quindi r_1 ed r_2 non sono coincidenti); la retta r_3 ha numeri direttori $(a'', b'') = (3,2)$ ed avendosi:

$$aa''+bb'' = 6-6 = 0, \quad a'a''+b'b''=-3+3=0$$

ne segue che r_1 ed r_2 sono perpendicolari ad r_3.

4b) Sia r la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=1+3t \end{cases};$$

eliminando il parametro si trova l'equazione (in forma esplicita) di r:

$$y=-3x+4.$$

5) Le equazioni parametriche di r_1 ed r_2 sono rispettivamente

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=-2s+1 \\ y=2s+4 \end{cases};$$

per trovare il punto di intersezione basterà risolvere il sistema

$$(*)\begin{cases} -2s+1 = t+1 \\ 2s+4 = 2t-1 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{5}{3}, \ s = -\frac{5}{6}$$

Sostituendo il valore di t trovato nelle equazioni parametriche di r_1 (o quello di s nelle equazioni parametriche di r_2 si trova il punto comune alle due rette $\left(\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$. In modo analogo si trova il punto comune ad r_3 ed r_4.

N.B. Se si scrivono le equazioni di entrambe le rette in funzione dello stesso parametro t si troverà in luogo di (*):

$$\begin{cases} -2t+1 = t+1 \\ 2t+4 = 2t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ 4=-1 \end{cases}!$$

Ciò dipende dal fatto che il punto comune alle due rette si ottiene in corrispondenza di due distinti valori del parametro.

6) L'equazione in forma parametrica del fascio di rette per (1,2) è

$$\begin{cases} x=1+\lambda t \\ y=2+\mu t \end{cases};$$

ovviamente la parallela alla retta r si ottiene per $\lambda=-1$ e $\mu=2$ poiché $(-1,2)$ è una coppia di numeri direttori di r; analogamente la parallela ad r' si trova per $\lambda=-4$ e $\mu=3$.

7) Come già osservato nell'esercizio 6) l'equazione del fascio di rette per $(1,2)$ è

$$\begin{cases} x=1+\lambda t \\ y=2+\mu t \end{cases};$$

poiché la retta r ha numeri direttori $(-1,2)$ affinché sia verificato la condizione di perpendicolarità

$$-\lambda+2\mu = 0$$

basterà assumere $\lambda=2$, $\mu=1$; procedendo in modo analogo la perpendicolare ad r' si ottiene per $\lambda=3$, $\mu=4$.

8a) Data la retta di equazione

$$ax+by+c = x-3y+5=0$$

una coppia di numeri direttori è data da $(-b, a) = (3,1)$; allora una coppia di coseni direttori sarà $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ (il lettore osservi che anche $\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$ è una coppia di coseni direttori della retta data).

10) Le due rette sono parallele poiché hanno numeri direttori proporzionali:

$$-6=-2\cdot 3, \quad 4=(-2)\cdot(-2);$$

per dimostrare che sono coincidenti basterà verificare che hanno un punto comune; all'uopo si osservi che $(1,2)$ appartiene alla prima retta poiché si ottiene ponendo $t=0$; verifichiamo che esso appartiene alla seconda sostituendo nelle equazioni parametriche; si ha

$$\begin{cases} 1=4-6t \\ 2=4t \end{cases} \Leftrightarrow t=2.$$

quindi il punto $(1,2)$ appartiene anche alla seconda retta (corrisponde infatti al valore 2 del parametro).

1.4 Esercizi di ricapitolazione

1) Scrivere le equazioni in forma implicita delle rette passanti per le seguenti coppie di punti:

a) $(-1,2)$, $(3,4)$; b) $(1,5)$, $(-7,5)$;

c) $(0,0)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ d) $(2,3)$, $(2,-11)$.

2) Scrivere le equazioni in forma implicita delle rette passanti per $A\equiv(2,3)$ e parallele o perpendicolari alle rette di equazione

a) $x-2y+5 = 0$ b) $y-3x+1=0$

c) $2x-1=0$ d) $y-3=0$.

3) Scrivere le equazioni in forma parametrica delle rette per $O\equiv(0,0)$ e parallele o perpendicolari alle rette

a) $y=3x+1$ b) $2x-y+5=0$.

4) Determinare per quali valori del parametro $k(\in R)$ la retta di equazione

$$x+ky+k-1=0$$

a) è parallela alla retta $x-y+1=0$
b) è ortogonale alla retta $2x+3y+5=0$
c) passa per $(0,0)$.

5) Scrivere le equazioni in forma esplicita ed in forma parametrica della retta passante per $A\equiv(1,1)$ e tale che

l'asse x per sovrapporsi ad essa debba descrivere ruotando in senso antiorario un angolo di ampiezza

a) $\pi/6$
b) $\pi/4$.

6) Sia data l'equazione del fascio di rette per $A\equiv(1,-1)$:

$\alpha(x-1) + \beta(y+1) = 0$;

individuare una coppia (α, β) per cui si ottenga:

a) l'asse del segmento di estremi $(-1,-1)$, $(1,1)$;
b) la perpendicolare all'asse x;
c) la retta passante per $(2,-4)$;
d) la retta di numeri direttori $(3,-2)$
e) la retta per sovrapporsi alla quale l'asse x deve ruotare in senso antiorario di un angolo di ampiezza $\pi/6$.

7) Determinare una coppia di coseni direttori delle rette di equazioni

a) $y+2x+5=0$, b) $y-2=0$,
c) $3x-1=0$, d) $y+x=0$.

8) Scrivere l'equazione esplicita della retta per $(0,1)$ e

a) avente coefficiente angolare 0,
b) parallela alla retta $y=3x+5$,
c) perpendicolare alla retta $4y-x=2$.

Risposte

1)

a) $2y-x-5=0$ b) $y-5=0$
c) $\sqrt{2}\,y - \sqrt{3}\,x = 0$ d) $x-2=0$

2)

a) $x-2y+4=0$; $2x+y-7=0$ b) $y-3x+3=0$, $x+3y-11=0$
c) $x-2 = 0$; $y-3=0$ d) $y-3=0$, $x-2=0$

3)

a) $x=t$, $y=3t$; $x=-3t$, $y=t$ b) $x=t$, $y=2t$; $x=-2t$, $y=t$

4)

a) $k=-1$ b) $k=-2/3$
c) $k=1$

5)

a) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$; $x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}t$, $y=1+\frac{t}{2}$
b) $y=x$; $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t$, $y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t$

6)

a) $(1,1)$ b) $(1,0)$
c) $(3,1)$ d) $(-2,-3)$
e) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

7)

a) $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ b) $(1,0)$
c) $(0,1)$ d) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

8)

a) $y=1$ b) $y=3x+1$

c) $y=-4x+1$

2. - La circonferenza

Siano dati un punto $C\equiv(x_0,y_0)$ ed un numero reale positivo r; si ha:

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \Leftrightarrow$ **(Equazione della circonferenza**

$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-r^2=0$ **di centro C e raggio r)**

Viceversa l'equazione

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\delta=0$$

nell'ipotesi

$$\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\delta>0$$

rappresenta la circonferenza di centro $\left(\frac{-\alpha}{2},\frac{-\beta}{2}\right)$, e raggio

$$r=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\delta}$$

Risolvere i seguenti esercizi

1) Scrivere l'equazione della circonferenza avente centro e raggio indicati:

a) $(0,0)$, 1; b) $(-2,3)$, 2; c) $(1,1)$, $\sqrt{3}$;

d) $(3,0)$, $1/2$; e) $(0,-1/4)$, 1; f) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{3}$.

2) Dire se le seguenti equazioni rappresentano una circonferenza ed in caso affermativo calcolarne le coordinate del centro ed il raggio

a) $x^2+y^2-7=0$ b) $x^2+y^2-2x-8=0$; c) $x^2+y^2+2x+y+3=0$,

d) $2x^2+2y^2-6x+y+4=0$; e) $36x^2+36y^2+36x-24y-23=0$;

f) $3x^2+3y^2-6x+y+10=0$.

3) Scrivere l'equazione della circonferenza di centro l'origine e passante per $(0,\sqrt{3})$.

4) Scrivere l'equazione della circonferenza passante per $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

5) Scrivere le equazioni delle circonferenze passanti per $(2,0)$, $(0,2)$, e di raggio 2.

6) Stabilire se vi sono punti di intersezione tra la circonferenza di equazione

$$x^2+y^2-2x+2y+1=0$$

e le rette di equazione

a) $y+1=0$, b) $y-x=0$, c) $x=0$;

in caso affermativo calcolare le coordinate dei punti di intersezione.

7) Stesso quesito posto nell'esercizio 6) relativamente alla circonferenza di equazione

$$x^2+y^2-6x+5=0$$

ed alle rette

a) $\sqrt{5}\,y-2x=0$ b) $y=x+1$, c) $2y-x-1=0$.

8) Scrivere le equazioni delle rette passanti per $(2,0)$ e tangenti alla circonferenza di equazione

$$x^2+y^2=1.$$

9) Scrivere le equazioni delle rette passanti per (0,0) e tangenti alla circonferenza di equazione

$$x^2+y^2-2x-6y+8=0.$$

10) Scrivere l'equazione della tangente alla circonferenza

$$x^2+y^2+4x-2y=0$$

nel punto (0,0).

11) Considerata la famiglia di equazioni

$$x^2+y^2-2kx+2(k+1)y+1+k=0$$

dire per quali valori di k rappresenta una circonferenza:

a) passante per (0,0);
b) di centro (1,0);
c) di centro (3,-4);
d) di raggio 1.

12) Determinare i punti di intersezione tra le circonferenze di equazioni

$x^2+y^2-4=0,$ $\qquad$ $x^2+y^2-2x+2y=0.$

13) Scrivere le equazioni delle rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante e tangenti alla circonferenza di equazione

$$x^2+y^2-2x=0.$$

14) Scrivere l'equazione della circonferenza tangente all'asse delle y in (0,2) e passante per (1,1).

15) Scrivere l'equazione della circonferenza tangente all'asse delle x in (0,0) e passante per (1,-1).

16) Considerata la famiglia di equazioni

$$x^2+y^2-2x+ky=0$$

dire per quale valore di k si ottiene la circonferenza di raggio minimo.

17) Scrivere l'equazione della famiglia di circonferenze tangenti in (0,0) alla retta di equazione y=x; dire inoltre se tra le circonferenze del fascio ve ne è una passante per (2,2).

18) Scrivere l'equazione della famiglia di circonferenze passanti per (1,0) e (0,1) e dire se tra le circonferenze del fascio ve ne è una di raggio 1/2.

19) Nella famiglia di circonferenze data nell'esercizio 18) individuare le circonferenze tangenti alla retta $y=x-\sqrt{2}$

Risposte

1) a) $x^2+y^2-1=0$ b) $x^2+y^2+4x-6y+9=0$
c) $x^2+y^2-2x-2y-1=0$ d) $4x^2+4y^2-24x+35=0$
e) $16x^2+16y^2+8y-15=0$ f) $18x^2+18y^2-18x-18y+7=0$

2) a) $(0,0), \sqrt{7}$ b) $(1,0), 3$
c) non rappr. una circ. d) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right), \frac{\sqrt{5}}{4}$
e) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), 1$ f) non rappr. una circ.

3) $x^2+y^2-3=0$ 4) $x^2+y^2-x-y=0$

5) $x^2+y^2-4=0,\ x^2+y^2-4x-4y+4=0$

6) a) (0,-1), (2,-1) b) nessun punto di intersez.
c) (0,-1)

7) a) $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{5}\right)$ b) nessun punto di intersez.
c) $(3,2), \left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$

8) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\frac{\sqrt{3}}{3}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\frac{\sqrt{3}}{3}$

9) $y=x$, $y=-7x$

10) $y=2x$

11) a) $k=-1$ b) nessun valore di k

c) $k=3$ d) $k=-1$, $k=1/2$

12) $(0,-2)$, $(2,0)$

13) $y=x-1 \pm \sqrt{2}$

14) $x^2+y^2-2x-4y+4=0$

15) $x^2+y^2+2y=0$

16) $k=0$

17) $x^2+y^2+\alpha x-\alpha y=0$; no

18) $x^2+y^2+\alpha x+\alpha y-1-\alpha$; no

19) $x^2+y^2-1=0$, $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

Svolgimento (1a, b, 2a, c, 3, 4, 5, 6a, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 18)

1a) L'equazione della circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 è

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2$$

cioè

$$x^2+y^2-1=0.$$

b) Analogamente la circonferenza di centro $(-2,3)$ e raggio 2 ha equazioni

$$(x+2)^2+(y-3)^2=4$$

cioe

$$x^2+y^2+4x-6y+9=0.$$

2a) Ricordiamo che l'equazione

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\delta=0$$

rappresenta la circonferenza di centro $\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right)$ e raggio $r=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\delta}$ se è verificata la condizione $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\delta>0$

Nel caso dell'equazione $x^2+y^2-7=0$ si ha:

$\alpha=0$, $\beta=0$, $\delta=-7$ e quindi $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\delta=7>0$;

pertanto l'equazione data rappresenta la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{7}$.

c) Nel caso dell'equazione $x^2+y^2+2x+y+3=0$ si ha:

$$\alpha=2,\ \beta=1,\ \gamma=3 \text{ e quindi } \frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma = 1+\frac{1}{4}-3 = -\frac{7}{4} <0$$

e quindi l'equazione data non rappresenta una circonferenza.

3) La circonferenza di centro $O\equiv(0,0)$ e passante per $A\equiv(0,\sqrt{3})$ ha ovviamente, raggio $r = |\overline{OA}| = \sqrt{3}$; pertanto la sua equazione sarà:

$$x^2+y^2=3 \Leftrightarrow x^2+y^2-3=0.$$

4) Osserviamo che i punti $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$ non sono allineati e pertanto per essi passa una ed una sola circonferenza; data la generica equazione

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$$

determiniamo i parametri α, β, δ in modo tale che essa rappresenti la circonferenza passante per i punti assegnati: ciò si fa sostituendo le coordinate di ciascun punto nell'equazione:

$$\begin{cases}\gamma = 0\\ 1+\alpha+\gamma = 0\\ \alpha+\beta+\gamma+2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=0\\ \alpha=-1\\ \beta=-1\end{cases}$$

Pertanto l'equazione cercata è $x^2+y^2-x-y=0$.

5) Data la generica equazione

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$$

affinche essa rappresenti una circonferenza passante per $(2,0)$

e (0,2) deve aversi

$$\begin{cases}4+2\alpha+\gamma=0\\4+2\beta+\gamma=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\beta\\\gamma=-4-2\alpha\end{cases},$$

quindi la famiglia di circonferenze per (2,0) e (0,2) ha equazione

$$x^2+y^2+\alpha x+\alpha y-4-2\alpha=0;$$

le circonferenze di raggio 2 in tale fascio si ottengono risolvendo l'equazione

$$r^2 = \frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^2}{4} + 4+2\alpha$$

e cioè

$$4 = \frac{\alpha^2}{2}+4+2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+4\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=0,\ \alpha=-4;$$

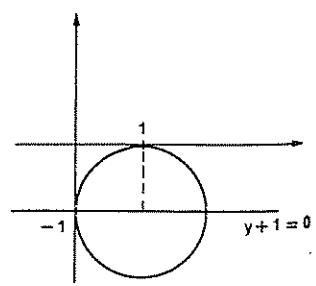
pertanto vi sono due circonferenze che soddisfano le condizioni assegnate

$$x^2+y^2-4=0, \quad x^2+y^2-4x-4y+4=0.$$

6a) La circonferenza data ha centro in (1,-1) e raggio 1 (cfr. figura);

per determinare gli eventuali punti di intersezione tra la circonferenza data e la retta y+1=0 si considera il sistema:

$$\begin{cases}x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0\\y + 1 = 0\end{cases}$$



che ha le soluzioni (0,-1) e (2,-1); pertanto (cosa peraltro evidente dalla figura) la retta è secante la circonferenza.

8) L'equazione del fascio di rette per (2,0) è:

$$a(x-2) + by=0;$$

per ottenere le rette del fascio che siano tangenti alla circonferenza $x^2+y^2=1$ bisogna imporre che il sistema

$$\begin{cases}x^2 + y^2 = 1\\a(x-2) + by = 0\end{cases}$$

abbia una sola soluzione. Poiché la retta x=2, come è facile verificare, non è tangente alla circonferenza, è lecito supporre $b\neq 0$ e quindi dividere per b. Posto $-\frac{a}{b} = m$ il sistema si riscrive

$$\begin{cases}x^2+y^2 = 1\\y=m(x-2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1+m^2)\ x^2-4m^2x+4m^2-1=0\\y=m(x-2)\end{cases};$$

tale sistema ha una ed una sola soluzione se e solo se:

$$\frac{\Delta}{4}=4m^4+(1+m^2)\ (1-4m^2) = 0$$

e cioè $m=\pm\sqrt{3}/3$. Ne segue che le rette cercate sono quelle di equazione

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2\frac{\sqrt{3}}{3},\quad y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\frac{\sqrt{3}}{3}$$

11) Osserviamo in via preliminare che l'equazione

$$(*)\quad x^2+y^2-2kx+2(k+1)y+1+k=0$$

rappresenta una circonferenza se e solo se k è tale che

$$k^2+(k+1)^2-(k+1)>0$$

cioè

$$k\in\ ]-\infty,-1/2[\cup]0,+\infty[.$$

a) Sostituendo x=0, y=0 in (*) si ha:

$$1+k = 0 \Leftrightarrow k=-1$$

e quindi

$$x^2+y^2+2x=0$$

e l'equazione della circonferenza che passa per (0,0).

b) Il centro della circonferenza di equazione (*) è (k,-k-1); affinché, quindi, l'equazione (*) rappresenti una circonferenza di centro (1,0) dovrebbe essere k=1, k+1=0 e ciò è assurdo. Pertanto tra le circonferenze della data famiglia non ve ne è nessuna di centro (1,0);

c) procedendo come in α_2) si ha: k=3, -k-1=-4 e quindi per k=3 si ha la circonferenza cercata.

d) Il raggio della circonferenza di equazione (*) è

$$r=\sqrt{k^2+(k+1)^2-(k+1)} = \sqrt{2k^2+k};$$

pertanto si ha r=1 se e solo se k=-1 o k=1/2.

13) La generica retta parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante ha equazione y=x+k, $k\in R$; affinché una tale retta sia tangente alla circonferenza di equazione x^2+y^2-2x è necessario e sufficiente che il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ y=x+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+2(k-1)x+k^2=0 \\ y=x+k \end{cases}$$

abbia una sola soluzione; ciò si ottiene ponendo eguale a zero il discriminante dell'equazione di secondo grado:

$$(k-1)^2-2k^2=0 \Leftrightarrow k=-1\pm\sqrt{2}.$$

Quindi le rette cercate hanno equazioni

$$y=x-1+\sqrt{2}\ ,\ y=x-1-\sqrt{2}.$$

14) Data la generica equazione

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$$

affinché essa rappresenti una circonferenza per (0,2) ed (1,1) dovrà aversi

$$\begin{cases} 4+2\beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta+\gamma+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+\beta-\alpha=0 \\ \gamma=-2\beta-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha-2 \\ \gamma=-2\alpha \end{cases};$$

pertanto l'equazione del fascio di circonferenze per (0,2) ed (1,1) sarà:

$$(*)\quad x^2+y^2+\alpha x+(\alpha-2)y-2\alpha=0$$

Affinché la circonferenza di equazione (*) sia tangente all'asse y basta che il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+\alpha x+(\alpha-2)y-2\alpha=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+(\alpha+2)y-2\alpha=0 \\ x=0 \end{cases}$$

ammetta un'unica soluzione (che sarà "a fortiori" (0,2));

$$(\alpha-2)^2+8\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=-2.$$

Quindi la circonferenza cercata ha equazione: $x^2+y^2-2x-4y+4=0$

16) Il raggio della circonferenza di equazione

$$x^2+y^2-2x+ky=0$$

è $r = \sqrt{1 + k^2/4}$; il valore minimo di r si ottiene, ovviamente, per k=0.

17) L'equazione della generica circonferenza passante per (0,0) è:

$$x^2+y^2+\alpha x=\beta y=0;$$

affinché essa sia tangente alla retta y=x il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+\alpha x+\beta y=0 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+(\alpha+\beta)\ x=0 \\ y=x \end{cases}$$

deve ammettere una sola soluzione (che sarà "a fortiori (0,0)) e ciò accade per $\alpha+\beta=0$.
Ne consegue che

$$x^2+y^2+\alpha x-\alpha y=0$$

è l'equazione del fascio di circonferenze tangenti in (0,0) alla retta y=x.
Ovviamente nessuna circonferenza del fascio passa per (2,2) poiché la coppia (2,2) non è soluzione dell'equazione del fascio per alcun valore di α (sostituendo si trova infatti 8=0!).

18) Affinché la circonferenza di equazione

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$$

passi per (1,0) e (0,1) dovrà essere:

$$\begin{cases} 1+\alpha+\gamma=0 \\ 1+\beta+\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta=0 \\ \gamma=-1-\alpha \end{cases}$$

Quindi

$$(*)\quad x^2+y^2+\alpha x+\alpha y-1-\alpha=0$$

è l'equazione del fascio di circonferenze per (1,0) e (0,1).
Il raggio della circonferenza di equazione (*) è

$$r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2}+1+\alpha}\ ;$$

ne segue

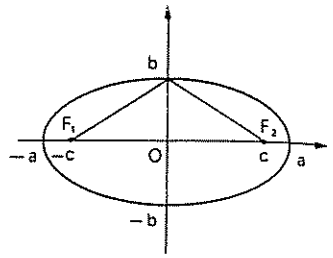
$$r = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\alpha^2+4\alpha+3=0$$

e quindi poiché l'equazione ottenuta non ha soluzioni reali, non esistono valori di α per cui r=1/2.

3. - L'ellisse, l'iperbole, la parabola

L'equazione (canonica) dell'*ellisse* di *fuochi* $F_1 \equiv (-c,0)$ ed $F_2 \equiv (c,0)$ e di *semiasse maggiore* a $(a>c>0)$ è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



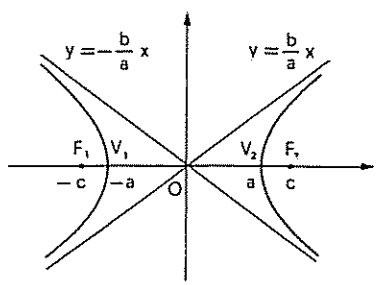
con $b^2=a^2-c^2$;

b= *semiasse minore*
$e=c/a \in]0,1[$ = *eccentricità.*

N.B. Il caso in cui l'ellisse abbia i fuochi sull'asse y si ottiene in modo ovvio scambiando i ruoli di x ed y.

L'equazione (canonica) dell'*iperbole* di *fuochi* $F_1 \equiv (-c,0)$ ed $F_2 \equiv (c,0)$ e di *vertici* $V_1 \equiv (-a,0)$, $V_2 \equiv (a,0)$ $(c>a>0)$ è

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



con $b^2=c^2-a^2$;

a,b = *semiassi*

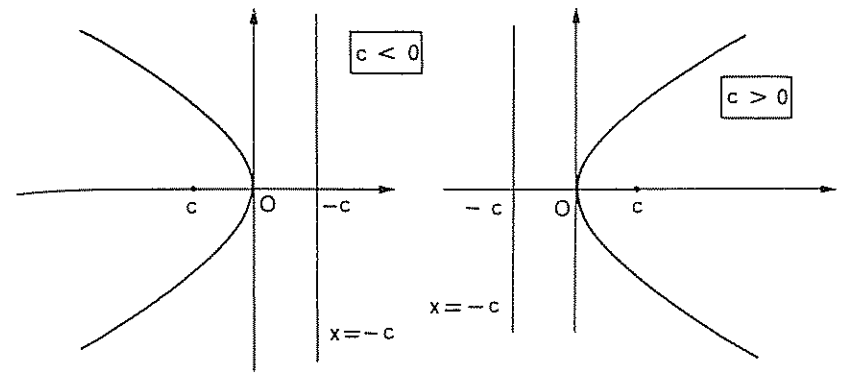
$y = \pm\frac{b}{a}x$ = *asintoti*

a=b *iperbole equilatera*

N.B. - Il caso in cui l'*iperbole* abbia i fuochi sull'asse y ed i vertici sull'asse y si ottiene in modo ovvio scambiando i ruoli di x ed y.

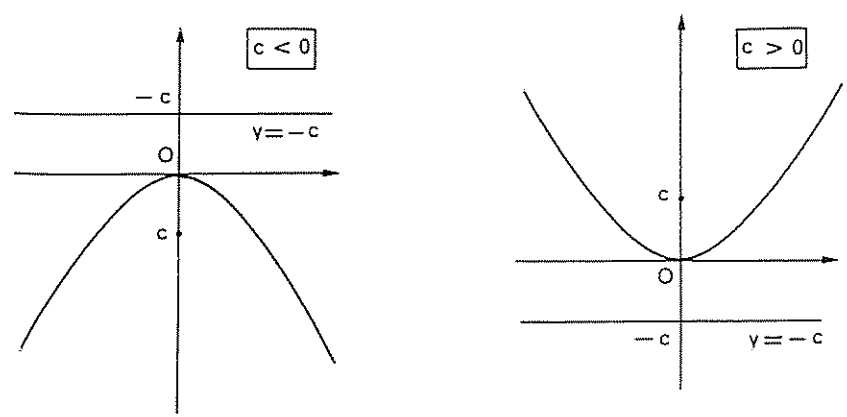
L'equazione (canonica) della *parabola* di *fuoco* (c,0) e *direttrice* di equazione x=-c è (cfr. figg. succ.)

$y^2=4cx$



La retta y=0 (asse delle x) si dice *asse* della parabola; il punto $O \equiv (0,0)$ si dice *vertice* della parabola.

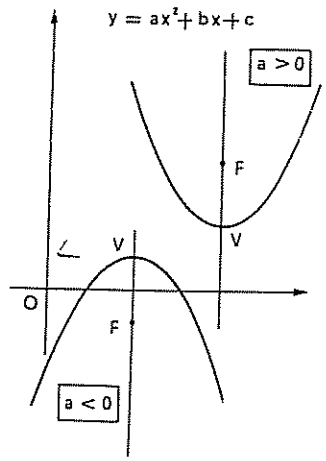
N.B. Il caso in cui la parabola abbia *fuoco* sull'asse y nel punto (0,c) e *direttrice* y=-c (parallela all'asse x) si ottiene in modo ovvio scambiando i ruoli di x ed y: si ottiene in tal caso l'equazione $x^2=4cy$.

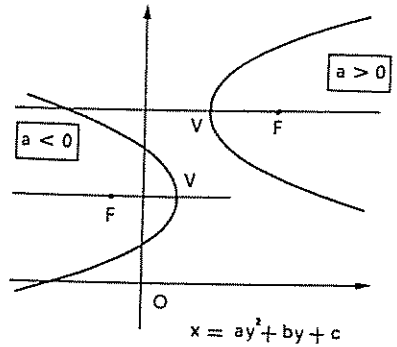


Più in generale un'equazione del tipo

$$y=ax^2+bx+c \quad (x=ay^2+by+c)$$

rappresenta una parabola con il *vertice* in $V \equiv \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ $\left(\left(-\frac{\Delta}{4a}, \frac{-b}{2a}\right)\right)$, *con asse* $x=\frac{-b}{2a}$ $\left(y=-\frac{b}{2a}\right)$, con *fuoco* in $F \equiv \left(-\frac{b}{2a}, \frac{(1-\Delta)}{4a}\right)$ $\left(\left(\frac{1-D}{4a}, \frac{b}{2a}\right)\right)$ e *direttrice* $y=-\frac{(1-\Delta)}{4a}$ $\left(x=-\frac{(1+\Delta)}{4a}\right)$;





Risolvere i seguenti esercizi

1) Scrivere l'equazione dell'ellisse di fuochi $F_1 \equiv (-3,0)$, $F_2 \equiv (3,0)$ e semiasse maggiore 5.

2) Scrivere l'equazione dell'ellisse di fuochi $F_1 \equiv (-2,0)$, $F_2 \equiv (2,0)$ e semiasse minore 1.

3) Scrivere l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x di semiasse maggiore 3 e minore $\sqrt{3}$; calcolarne inoltre le coordinate dei fuochi e l'eccentricità.

4) Determinare i semiassi, le coordinate dei fuochi e l'eccentricità delle ellissi di equazioni

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, **b)** $3x^2+2y^2=24$, **c)** $x^2+3y^2=4$.

5) Scrivere l'equazione dell'ellisse di eccentricità $\frac{1}{2}$ e fuochi $F_1 \equiv (-4,0)$ ed $F_2 \equiv (4,0)$.

6) Scrivere l'equazione dell'ellisse avente fuochi $F_1 \equiv (0,-2)$, $F_2 \equiv (0,2)$ e semiasse maggiore 4.

7) Scrivere l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x di semiasse minore 1 e passante per il punto (1, 1/2).

8) Scrivere l'equazione dell'ellisse *con i fuochi sull'asse* y di semiasse maggiore 2 e passante per il punto (1,1).

9) Scrivere le equazioni delle tangenti all'ellisse

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

passanti per il punto (2,0).

10) Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, scriverne

l'equazione nel riferimento che si ottiene con una rotazione di $\pi/4$.

11) Determinare i valori di h per cui la retta $y=x+h$ è tangente all'ellisse di equazione $x^2+4y^2=1$.

12) Scrivere l'equazione dell'iperbole di fuochi $F_1\equiv(-3,0)$, $F_2\equiv(3,0)$ e vertici $V_1\equiv(-1,0)$, $V_2\equiv(1,0)$.

13) Scrivere l'equazione dell'iperbole di vertici $V_1\equiv(-2,0)$, $V_2\equiv(2,0)$ e passante per il punto $(3,3)$.

14) Scrivere l'equazione dell'iperbole di vertici $(-1,0)$, $(1,0)$ ed asintoti $y=\pm 2x$.

15) Scrivere l'equazione dell'iperbole di vertici $(0,-\sqrt{3})$, $(0,\sqrt{3})$ e di fuochi $(0,-3)$, $(0,3)$.

16) Scrivere l'equazione dell'iperbole di fuochi $(-2,0)$, $(2,0)$ passante per $(1,1)$.

17) Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera di fuochi $(-8,0)$ $(8,0)$.

18) Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera avente i fuochi sull'asse x e passante per il punto $(2,1)$.

19) Scrivere le coordinate dei fuochi e dei vertici e le equazioni degli asintoti delle iperboli di equazioni

a) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$, b) $x^2-y^2=4$ c) $y^2-3x^2=9$.

20) Determinare i valori di m per cui la retta $y=mx$ ha punti in comune con l'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1.$$

21) Data l'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{2}-y^2=1,$$

scriverne l'equazione nel riferimento che si ottiene con una rotazione di $\frac{\pi}{4}$.

22) Calcolare le coordinate dei punti di intersezione tra l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

e l'iperbole di equazione

$$x^2-y^2=1.$$

23) Dimostrare che l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ e l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$ non hanno punti in comune.

24) Determinare i valori di h per cui la retta $y=2x+h$
a) è tangente all'iperbole $x^2-y^2=1$;
b) è tangente all'ellisse $2x^2+3y^2=6$.

25) Scrivere le equazioni delle parabole aventi i fuochi e le direttrici indicati:

a) $(2,0)$, $x=-2$; b) $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$, $x=\frac{1}{2}$

c) $(0,3)$, $y=-3$; d) $(0,-\sqrt{2})$, $y=\sqrt{2}$

26) Trovare il fuoco e la direttrice delle parabole di equazioni:

a) $y^2=4x$ b) $y^2=-3x$ c) $2x^2=3y$ d) $x^2=-8y$

27) Scrivere le coordinate del vertice e del fuoco e l'equazione della direttrice delle parabole di equazioni

a) $y=x^2-5x$, b) $y=-x^2+x+3$; c) $x=(y-1)^2$ d) $x+(y+2)^2=5$

28) Scrivere l'equazione della parabola con vertice in $(1,1)$, asse parallelo all'asse y e passante per $(0,0)$.

29) Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x e passante per $(-3,0)$, $(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$.

30) Data la parabola di equazione

$$y=x^2-4$$

scriverne l'equazione nel riferimento $O'x'y'$ che si ottiene effettuando:

a) una traslazione che porta O in $O'\equiv(0,-4)$;
b) una rotazione di $\frac{\pi}{4}$
c) un cambiamento di riferimento che porti O in $O'\equiv(0,-4)$ ed una rotazione di $\frac{\pi}{2}$.

31) Scrivere l'equazione della parabola con vertice in $(0,0)$ e:

a) con l'asse parallelo all'asse x e passante per $(1,1)$;
b) con l'asse parallelo all'asse y e passante per $(-1,2)$
c) con l'asse parallelo all'asse y e passante per $(-1,-2)$.

32) Scrivere l'equazione della parabola

a) con vertice $(-1,-2)$, passante per $(0,1)$ ed asse parallelo all'asse delle y;
b) con asse $x=0$ e passante per $(0,9)$, $(-1,10)$;

c) con asse $y=0$ e passante per $(0,1)$, $(-1,0)$.

33) Scrivere l'equazione della tangente alla parabola $y=x^2$ nel punto $(1,1)$.

34) Determinare i valori di k per cui

a) $y=x+k$ è tangente alla parabola $y=x^2+2x$
b) $y=kx$ è tangente alla parabola $y=x^2+x$

35) Determinare i punti di intersezione tra la parabola $x=y^2-y+1$ e

a) la retta $y=x$
b) la retta $x-2y-5=0$
c) la retta $2y-x-6=0$

36) Dimostrare che la tangente all'ellisse (iperbole) di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right)$$

nel punto (x_0,y_0) appartenente all'ellisse (iperbole) ha equazione

$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1 \quad \left(\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y=1\right)$$

37) Dimostrare che la tangente alla parabola di equazione

$$y^2=4cx \quad (x^2=4cy)$$

nel punto (x_0,y_0) appartenente alla parabola ha equazione

$$y_0y=2c(x_0+x) \quad (x_0x=2c(y_0+y))$$

38) Scrivere, utilizzando le formule date negli esercizi 36) e 37), le equazioni delle tangenti

a) all'ellisse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ in $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$

b) all'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ in $\left(5, -\frac{8}{3}\right)$

c) alla parabola $y^2=3x$ in $(1, \sqrt{3})$

d) alla parabola $x^2=4y$ in $(-2,1)$.

Risposte

1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$

3) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$, $(\pm\sqrt{6}, 0)$, $\sqrt{6}/9$

4) a) $2, \sqrt{2}$, $(\pm\sqrt{2}, 0)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$, $(0,\pm 2)$, $1/\sqrt{3}$

c) 2, $2/\sqrt{3}$, $(\pm 2\sqrt{2}/\sqrt{3}, 0)$, $\sqrt{2}/\sqrt{3}$

5) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$; 6) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$

7) $\frac{3}{4}x^2 + y^2 = 1$; 8) $\frac{3x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

9) $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(x-2)$; 10) $3x'^2+3y'^2+2x'y'-8=0$

11) $y=x \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$; 12) $x^2-\frac{y^2}{8} = 1$

13) $9x^2 - 5y^2 = 36$; 14) $x^2-\frac{y^2}{4} = 1$

15) $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{6} = 1$; 16) $\frac{x^2}{3-\sqrt{5}} - \frac{y^2}{1+\sqrt{5}} = 1$

17) $x^2-y^2 = 32$; 18) $x^2-y^2 = 3$

19) a) $(\pm\sqrt{6}, 0)$, $(\pm 2, 0)$, $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

b) $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$, $(\pm 2, 0)$, $y = \pm x$ c) $(0, \pm 2\sqrt{3})$, $(0, \pm 3)$, $y=\pm\sqrt{3}x$

20) $|-\sqrt{3}, \sqrt{3}|$; 21) $x'^2+y'^2+6x'y'+4=0$

22) $\left(\pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$;

24) a) $\pm\sqrt{3}$ b) $\pm\sqrt{14}$

25) a) $y^2=8x$ b) $y^2=-2x$

c) $x^2=12y$ d) $x^2=-4\sqrt{2}\,y$

26) a) $(1,0)$, $x=-1$ b) $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$, $x=\frac{3}{4}$

c) $\left(0, \frac{3}{8}\right)$, $y=-\frac{3}{8}$ d) $(0,-2)$, $y=2$

27) a) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{25}{4}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, -6\right)$, $y=-\frac{13}{2}$

b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $y=\frac{7}{2}$

c) $(0,1)$, $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$, $x=-\frac{1}{4}$ d) $(5, -2)$, $\left(\frac{19}{4}, -2\right)$, $x=\frac{21}{4}$

28) $y=-x^2+2x$; 29) $x=y^2-3$

30) a) $y'=x'^2$ b) $x'^2+y'^2-\sqrt{2}x'-\sqrt{2}y'-2x'y'-8=0$

c) $x'=y'^2$

31) a) $x=y^2$ b) $y=2x^2$

c) $y=-2x^2$

32) a) $y=3x^2+6x+1$ b) $y=x^2+9$

c) $x=y^2-1$

33) $y=2x-1$

34) a) $k=-\frac{1}{4}$ b) $k=1$

35) a) $(1,1)$ b) $(3,-1)$, $(13,4)$

c) nessun punto in comune.

38) a) $\frac{x}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}y = 1$ b) $\frac{5x}{9} + \frac{2}{3}y = 1$

c) $\sqrt{3}\,y = \frac{3}{2}(x+1)$ d) $-x = y+1$

Svolgimento (1,4a, b, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 17, 19a, c, 20, 25a, d, 26a, c, 27a, 28, 30a, 33)

1) Ricordiamo che l'ellisse di fuochi $(\pm c,0)$ e semiasse maggiore a ha equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

con $b^2=a^2-c^2$; quindi nel presente caso si ha:

$$a^2=5^2=25,\quad b^2=a^2-c^2=25-9=16$$

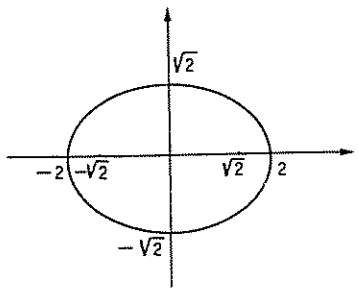
cosicche l'ellisse di fuochi $(\pm 3,0)$ e semiasse maggiore 5 ha equazione

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

4a) Data l'ellisse di equazione

$$(*)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

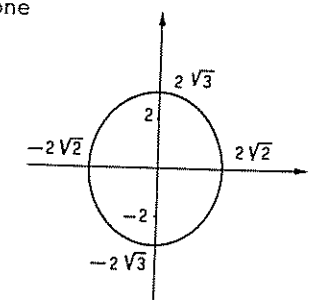
con $a>b>0$ essa ha semiassi a,b, fuochi (sull'asse x) $(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ ed eccentricità $\sqrt{a^2-b^2}/a$.
Pertanto l'ellisse di equazione $x^2/_{a} + y^2/_{b} = 1$



ha semiassi 2 e $\sqrt{2}$, fuochi $(\pm\sqrt{2},\ 0)$ ed eccentricità $\sqrt{2}/2$

b) Nel caso in cui nell'equazione (*) sia $b>a>0$ l'ellisse ha semiassi b,a, fuochi (sull'asse y) $\left(0,\ \pm\sqrt{b^2-a^2}\right)$ ed eccentricita $\sqrt{b^2-a^2}/b$. Pertanto l'ellisse di equazione

$$x^2+2y^2=24 \Leftrightarrow \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{12}=1$$



ha semiassi $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$, fuochi $(0,\pm 2)$ ed eccentricità $1/\sqrt{3}$

5) Data l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

con $a>b>0$, di fuochi $(\pm c,0)$ si ha $b^2=a^2-c^2$ ed e=(eccentricità) = c/a.

Pertanto nel presente caso si ha

$$c=4;\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=2c=8;\ b^2=64-16=48$$

e quindi l'equazione dell'ellisse cercata è:

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1.$$

7) Un'ellisse con i fuochi sull'asse x di semiasse minore 1 ha equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1;$$

affinché passi per il punto $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ dovrà essere

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a^2 = \frac{4}{3};$$

pertanto l'ellisse cercata ha equazione

$$\frac{3}{4}x^2 + y^2 = 1$$

9) Il fascio di rette per (2,0) ha equazione

$$a(x-2) + by=0.$$

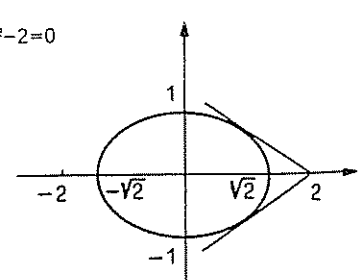
Una retta del fascio e tangente all'ellisse se e solo se il sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ a\ (x-2) + by = 0 \end{cases}$$

ha una sola soluzione.

Poiché, come è facile verificare (cfr. anche la figura) la retta x=2 non è tangente all'ellisse, si potrà supporre $b\neq 0$ e riscrivere il sistema nella forma ($m=-a/b$):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = m\ (x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+2m^2)\ x^2-8m^2x+8m^2-2=0 \\ y=m(x-2) \end{cases}$$



Tale sistema ha una e una sola soluzione se e solo se

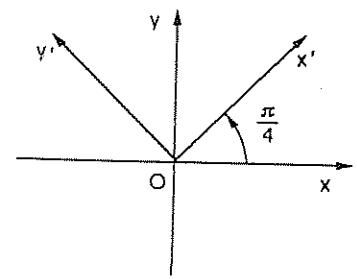
$$14m^4-(8m^2-2)(1+2m^2) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1/\sqrt{2}$$

Pertanto le tangenti cercate sono le rette di equazione

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(x-2)$$

10) Le equazioni del cambiamento di riferimento (rotazione di $\frac{\pi}{4}$) sono

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$
$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$$



dove con x' ed y' si indicano le coordinate nel nuovo riferimento; pertanto l'ellisse che ha nel riferimento Oxy equazione

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

nel riferimento Ox'y' avrà equazione

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2=1$$

e cioè $3x'^2+3y'^2+2x'y'-8=0$.

12) Ricordiamo che l'iperbole di fuochi (±c,0) e vertici (±a,0) (c>a>0) ha equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $b^2=c^2-a^2$; quindi nel presente caso si ha: $a^2=1$, $c^2=9$, $b^2=9-1=8$ cosicché l'equazione cercata è

$$x^2 - \frac{y^2}{8} = 1.$$

14) Un'iperbole di vertici (±1,0) ha equazione del tipo

$$x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

poiché tale iperbole ha gli asintoti di equazioni $y=\pm bx$ dovrà essere b=2. Quindi l'iperbole cercata ha equazione

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1.$$

15) L'equazione di un'iperbole di vertici $(0,\pm b)$ (sull'asse y!) e di fuochi $(0,\pm c)$ (sull'asse y!) con $c>b$ è del tipo

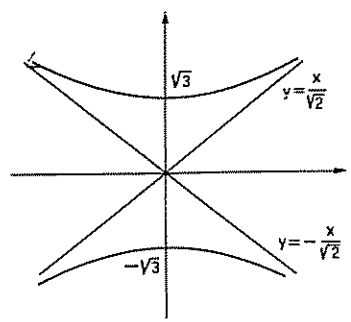
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

con $a^2=c^2-b^2$.

Quindi nel nostro caso si avrà

$$b^2=3,\ c^2=9,\ a^2=9-3=6$$

e l'equazione dell'iperbole cercata è $y^2/_3-x^2/_6=1$



17) Un'iperbole equilatera (con i fuochi sull'asse x) ha equazione del tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow x^2-y^2=a^2.$$

Se i fuochi sono $(\pm c,0)$ dovrà aversi $2a^2=c^2$; nel nostro caso è $c=8$ e quindi $2a^2=64 \Rightarrow a^2=32$. Pertanto l'equazione cercata è

$$x^2-y^2 = 32.$$

19a) Data l'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

i fuochi hanno coordinate $\left(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$, i vertici $(\pm a,0)$ e gli asintoti hanno equazione $y=\pm\frac{b}{a}x$, cosicché l'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$$

ha fuochi $\left(\pm\sqrt{6},\ 0\right)$, vertici $(\pm 2,\ 0)$ ed asintoti $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

c) L'iperbole (*con fuochi e vertici sull'asse* y) di equazione

$$y^2 - 3x^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{3} = 1$$

ha fuochi $(0,\pm 2\sqrt{3})$, vertici $(0,\pm 3)$ ed asintoti $y=\pm\sqrt{3}\,x$.

20) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1 \\ y=mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-m^2)\,x^2 = 6 \\ y=mx \end{cases};$$

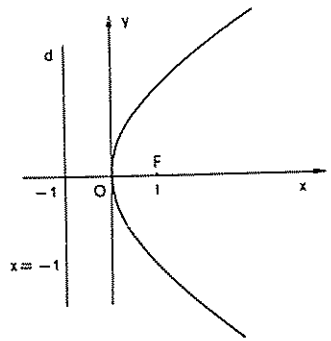
esso ha soluzioni se e solo se $3-m^2>0 \Leftrightarrow m\in\left]-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\right[$.

25a) Poiché l'equazione della parabola con fuoco in $(c,0)$ e direttrice $x=-c$ è $y^2=4cx$ in questo caso si ha $c=2$ e quindi $y^2=8x$ è l'equazione cercata;

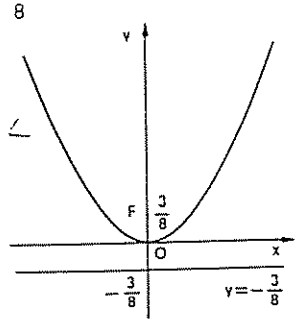
d) in questo caso essendo il fuoco in $(0,c)$ con $c=-\sqrt{2}$ e la direttrice $y=\sqrt{2}$ l'equazione sarà $x^2=4cx=-4\sqrt{2}\,x$.

26a) Una parabola di equazione $y^2=ax$ ha il fuoco in $\left(\frac{a}{4},\ 0\right)$ e per direttrice la retta $x=-\frac{a}{4}$; nel nostro caso si ha quindi che $(1,0)$ sono le coordinate del fuoco ed $x=-1$ e l'equazione della

direttrice.



c) La parabola di equazione $x^2=\frac{3}{2}y$ ha il fuoco in $\left(0,\frac{3}{8}\right)$ (sull'asse y) e direttrice $y = -\frac{3}{8}$.



27a) La parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$ ha il vertice in $V \equiv \left(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, il fuoco in $F \equiv \left(\frac{-b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$, e direttrice

$y = -\frac{(1+\Delta)}{4a}$; nel nostro caso si ha la parabola di equazione $y=x^2-5x$ ($a=1$, $b=-5$, $c=0$) e quindi $\frac{-b}{2a}=\frac{5}{2}$, $\frac{-\Delta}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{25}{4a}$; pertanto si ha:

$$V \equiv \left(\frac{5}{2}, -\frac{25}{4}\right),\quad F \equiv \left(\frac{5}{2}, -6\right),\quad y=-\frac{13}{2}$$

28) L'equazione della parabola generica con asse parallelo

all'asse delle y è

$$y=ax^2+bx+c;$$

dovendo passare per (0,0) ed (1,1) dovrà aversi

$$\begin{cases} c=0 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=1-b \end{cases}$$

essendo inoltre (1,1) il vertice dovrà essere

$$-\frac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow b=-2a$$

e quindi

$$\begin{cases} c=0 \\ a=1-b \\ b=-2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=-1 \\ b=+2 \end{cases}$$

cosicché $y=-x^2+2x$ è l'equazione cercata.

30) a) Le equazioni della traslazione che porta l'origine $\equiv(0,0)$ in $O'\equiv(0,-4)$ sono

$$\begin{cases} x = x' \\ y = -4+y' \end{cases}$$

e quindi l'equazione $y=x^2-4$ diviene

$$y'-4 = x'^2-4 \Leftrightarrow y'=x'^2$$

33) Consideriamo l'equazione (in forma esplicita) del fascio di rette per (1,1):

$$y=m(x-1)+1$$

(Il lettore osservi che la retta $x=1$ non è tangente alla parabola (cfr. figura successiva).

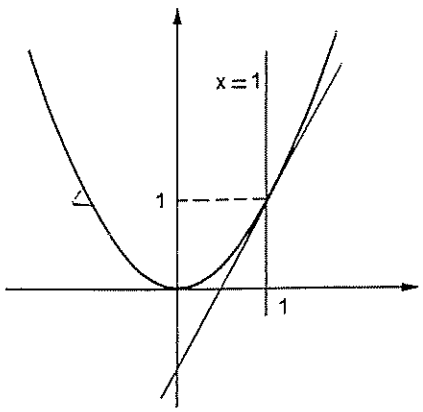
la tangente si trova
imponendo al sistema

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=m(x-1)+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - mx + m - 1 = 0 \\ y=x^2 \end{cases}$$

di avere una ed una sola soluzione e cioe imponendo che

$$m^2 - 4(m-1) = 0 \Leftrightarrow m=2$$

Quindi y=2x-1 è l'equazione cercata.



CAPITOLO 4

I NUMERI COMPLESSI

1. - Forma algebrica e forma trigonometrica

Dati i due *numeri complessi in forma algebrica*

(1) $$z_1=a+ib, \quad z_2=c+id$$

ricordiamo che operando con le ordinarie regole del calcolo letterale e tenendo conto che $i \cdot i = -1$ si ha:

(2) $z_1+z_2=(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$
(2)' $z_1 \cdot z_2=(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$.

È utile richiamare le seguenti locuzioni relative al numero complesso z=a+ib:

$a=\mathrm{Re}\,z$	*(parte reale di z)*
$b=\mathrm{Im}\,z$	*(coefficiente della parte immaginaria di z)*
$\bar{z}=a-ib$	*(complesso coniugato di z)*
$\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$	*(modulo di z)*

Il modulo poi gode delle seguenti proprietà

$$\left.\begin{array}{l} \lvert z_1+z_2\rvert \le \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert \\ \big|\,\lvert z_1\rvert - \lvert z_2\rvert\,\big| \le \lvert z_1 - z_2\rvert \end{array}\right\} \textit{proprietà triangolari}$$

$$\lvert z_1 \cdot z_2\rvert = \big|\,\lvert z_1\rvert \cdot \lvert z_2\rvert\,\big|, \quad \lvert z\rvert = \lvert\bar{z}\rvert$$

$$\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,z = \mathrm{Im}\,z = 0$$

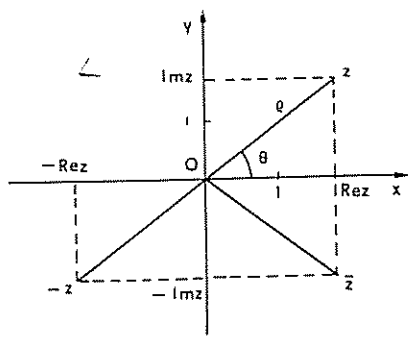
Inoltre se ρ e il modulo di $z\neq 0$ e θ è tale che si abbia

(3) $$\cos\theta = \frac{a}{\rho}\ , \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho}$$

si dice che θ è l'*argomento* di z o anche l'*argomento principale* se $\theta\in]-\pi,\pi]$. Dalle (3) discende che il numero complesso z può anche essere rappresentato mediante la scrittura

(4) $$z = \rho\ (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = [\rho,\theta]$$

nota come *forma trigonometrica*. Per visualizzare tutte le nozioni introdotte è utile riferirsi alla figura dove un numero complesso z è identificato con il punto del piano di ascissa $\operatorname{Re}z$ ed ordinata $\operatorname{Im}z$:



Ovviamente due numeri complessi $z=[\rho,\theta]$ e $z'=[\rho',\theta']$ sono uguali se e solo se

$$\rho=\rho',\ \theta-\theta'=2k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z}.$$

Ricordiamo infine che dato $z=a+ib$:

(5) $$z\cdot\bar{z} = (a+ib)\,(a-ib) = a^2+b^2 = |z|^2$$

e quindi , se $z\neq 0$

(6) $$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

Risolvere i seguenti esercizi

1) Calcolare le potenze k-me con $k\in\mathbb{Z}$ del numero i.

2) Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi

a) $(3-i)+(2+i)$; b) $(3+i)(3+2i)$; c) $\frac{7+5i}{2-i}$;

d) $\frac{1}{2-3i}$; e) $(2-i)^3$; f) $(2+3i)^4$;

g) $i^3\,\frac{1+i}{3-i}$; h) $\frac{i}{|6-5i|}$; i) $\frac{|3-i|}{2i}$;

l) $4+i+\frac{1}{1+3i}$; m) $2-3i+\frac{i}{2+3i}$; n) $\frac{i}{5-3i}-\frac{i}{5+3i}$;

o) $\frac{1-i}{1+i}+i-\frac{1}{i}$; p) $\frac{(i+2)\ (i-1)}{i+3}+\frac{5}{3i+4}$;

q) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{4+2i}{1-2i}$.

3) Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi esplicitandone l'argomento principale

a) $1-i$; b) $3+\sqrt{3}i$; c) $-1+\sqrt{3}i$;

d) $\sqrt{3}-i$; e) $1+i$; f) $-i$;

g) 3 ; h) $-5+5i$; i) $2i$;

l) $-\pi$; m) $-\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}}$; n) $\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}i}{2}$.

4) Determinare i numeri complessi $z=x+iy$ tali che valgano le seguenti relazioni

a) $|z-i|=|z+1|$; b) $z+|z|^2=2$; c) $iz^2-|z|^2=0$;

d $|z-1|+|z+1|=4$; e) $|z-i|=2$; f) $z^2+2|z|^2+\bar{z}^2=1$.

Risposte

1) Le potenze successive di i si ripetono ciclicamente con periodo 4; risulta cioè

$$\ldots\ i^{-2}=-1,\ i^{-1}=-i,\ i^{0}=1,\ i^{1}=i,\ i^{2}=-1,\ i^{3}=-i,\ i^{4}=1\ldots$$

2)

a) 5 ; b) $7+9i$; c) $\frac{9}{5}+\frac{17}{5}i$;

d) $\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$; e) $2-11i$; f) $-119-120i$;

g) $\frac{2}{5}-\frac{i}{5}$; h) $\frac{i}{\sqrt{61}}$; i) $-\frac{\sqrt{10}\,i}{2}$;

l) $\frac{41+7i}{10}$; m) $\frac{14}{13}(2-3i)$; n) $\frac{3}{17}i$;

o) i ; p) 0 ; q) $-i$.

3)

a) $\left[\sqrt{2},\ -\frac{\pi}{4}\right]$; b) $\left[2\sqrt{3},\ \frac{\pi}{6}\right]$; c) $\left[2,\ \frac{2}{3}\pi\right]$;

d) $\left[2,\ -\frac{\pi}{6}\right]$; e) $\left[\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right]$; f) $\left[1,\ -\frac{\pi}{2}\right]$;

g) $[3,0]$; h) $\left[5\sqrt{2},\ \frac{3}{4}\pi\right]$; i) $\left[2,\ \frac{\pi}{2}\right]$;

l) $[\pi,\ \pi]$; m) $\left[\frac{2}{\sqrt{3}},\ -\frac{2}{3}\pi\right]$; n) $\left[\sqrt{6},\ -\frac{\pi}{3}\right]$.

4)

a) Le soluzioni sono tutti i numeri complessi che si trovano sulla retta di equazione $y=-x$, cioè l'insieme delle soluzioni è

$$\{z=x+iy : y=-x\}$$

b) $z=1,\ z=-2$; c) $\{z=x+iy : y=-x\}$;

d) Le soluzioni sono i numeri complessi $z=x+iy$ tali che (x,y) appartenga all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, cioè l'insieme delle soluzioni è

$$\left\{z=x+iy\ :\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\right\}.$$

e) Le soluzioni sono i numeri complessi $z=x+iy$ appartenenti alla circonferenza di centro i (cioè $(0,1)$) e raggio 2, cioè l'insieme delle soluzioni è $\{z=x+iy : x^2+(y-1)^2=4\}$.

f) Le soluzioni sono tutti i numeri complessi $z=x+iy$ che si trovano sulla retta $x=\frac{1}{2}$ o sulla retta $x=-\frac{1}{2}$ cioè l'insieme delle soluzioni è

$$\left\{z=x+iy : x=\pm\frac{1}{2}\right\}.$$

Svolgimento (1, 2a, b, c, e, m, 3a, b, 4a, b, c, d)

1) Si ha: $i^0=1,\ i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$; se poi $k\in Z$ esistono $n\in Z$ ed $r\in\{0,1,2,3\}$ tali che

$$k=4n+r$$

ne segue:

$$i^k=(i^4)^n i^r=i^r,$$

e si ottiene quindi uno dei quattro risultati $i^0,\ i^1,\ i^2,\ i^3$.

2a) Utilizzando la (2) si ha

$$(3-i)+(2+i)=(3+2)+i\,(-1+1)=5$$

b) Utilizzando la (2)' si ha

$$(3+i)(3+2i)=9+2i^2+(3+6)i=9-2+9i=7+9i.$$

c) Ricordando la (6) si ha

$$\frac{7+5i}{2-i} = \frac{(7+5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{14+5i^2+(7+10)i}{5} = \frac{9+17i}{5}.$$

d) Si utilizzi la formula del binomio di Newton

$$(2-i)^3 = \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k} 2^{3-k}(-i)^k = 2^3-3\cdot 2^2\cdot i + 3\cdot 2\cdot i^2 - i^3 = 2-11i.$$

m) Utilizzando la (5) si ha

$$2-3i + \frac{1}{2+3i} = \frac{|2-3i|^2+1}{2+3i} = \frac{14}{2+3i} = \frac{14}{13}(2-3i).$$

3a) Si ha:

$$|1-i| = \sqrt{2};\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4};$$

pertanto $1-i = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$.

b) Procedendo come nell'esercizio precedente si ha:

$$|3+\sqrt{3}i| = 2\sqrt{3},\ \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\quad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

e quindi $3+\sqrt{3}i = \left[2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right]$.

4a) Posto $z=x+iy$ si ha:

$$|z-i|^2 = |x+i(y-1)|^2 = x^2 + (y-1)^2$$
$$|z+1|^2 = |(x+1) + iy|^2 = (x+1)^2+y^2$$

e quindi

$$|z-i| = |z+1| \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 = (x+1)^2+y^2 \Leftrightarrow x=-y$$

b) Si ha

$$z+|z|^2=2 \Leftrightarrow x+x^2+y^2-2+iy=0$$

da cui (ricordando che un numero complesso w e nullo se e solo se Rew=Imw=0) segue:

$$\begin{cases} y=0 \\ x+x^2+y^2-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1,\ x=-2 \end{cases}.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione data sono $z=1$, $z=-2$.

c) Si ha:

$$iz^2 - |z|^2 = -(x^2+y^2+2xy)+i(x^2-y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=0 \\ x^2-y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=-x$$

d) Se si osserva che $|z-1|$ e $|z+1|$ rappresentano le distanze del punto (x,y) rispettivamente dai punti $(1,0)$ e $(-1,0)$, la soluzione dell'esercizio si ottiene dalla definizione di ellisse di fuochi $(1,0)$, $(-1,0)$ e semiasse maggiore 2.

2. - Prodotti, rapporti, potenze e radici nel campo complesso

2.1 - Prodotti, rapporti, potenze nel campo complesso

Ricordiamo le seguenti utili formule per il calcolo di prodotti, rapporti e potenze di numeri complessi.

Sia $z=[\rho,\theta]$ e $z'=[\rho',\theta']$; si ha

(7) $z\cdot z' = \rho\rho' \ (\cos(\theta+\theta')+i\,\mathrm{sen}(\theta+\theta')) = [\rho\rho',\theta+\theta']$

(8) $\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}(\cos(\theta-\theta')+i\,\mathrm{sen}(\theta-\theta')) = [\frac{\rho}{\rho'},\theta-\theta']$

(9) $z^n = \rho^n \ (\cos(n\theta)+i\,\mathrm{sen}(n\theta))=[\rho^n, n\theta] \ \forall n\in\mathbb{Z}$.

Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi

1) $(1+i)\cdot(\sqrt{3}+i)$; 2) $\frac{i}{1-i}$;

3) $i\,(1+i)^2$; 4) $(\sqrt{3}+i)^2\cdot(1+i)^3$;

5) $(1-i)^6$; 6) $\frac{1}{(-1+\sqrt{3}i)^4}$;

7) $(1-i)^3\,(3-\sqrt{3}i)^2$; 8) $\frac{1+i}{(\sqrt{3}+i)^2}$;

9) $\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{(1-i)}\cdot i$; 10) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8$;

11) $\frac{(i-1)^3}{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^6$; 12) $\frac{(\sqrt{3}+i)^3}{8i}\cdot\frac{(1+i)^4}{(1-i)^2}$.

Risposte

1) $\left[2\sqrt{2},\ \frac{5}{12}\pi\right]$; 2) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{3}{4}\pi\right]\left(=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)$;

3) $[2,\ \pi]\ (=-2)$; 4) $\left[8\sqrt{2},\ -\frac{11}{12}\pi\right]$;

5) $\left[8,\ \frac{\pi}{2}\right]\ (=8i)$; 6) $\left[\frac{1}{16},\ -\frac{8}{3}\pi\right]\left(=-\frac{1}{32}-i\frac{\sqrt{3}}{32}\right)$;

7) $\left[24\sqrt{2},\ \frac{11}{12}\pi\right]$; 8) $\left[\frac{\sqrt{2}}{4},\ -\frac{\pi}{12}\right]$;

9) $\left[2\sqrt{2},\ \frac{1}{12}\pi\right]$; 10) $[1,0]\ (=i)$;

11) $\left[2\sqrt{2},\ \frac{3}{4}\pi\right]\ (=2i-2)$; 12) $\left[2,\ -\frac{\pi}{2}\right]\ (=-2i)$.

Svolgimento (1, 2, 3)

1) Dalla (7) con $z=1+i=\left[\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right]$ e $z'=\sqrt{3}+i=\left[2,\ \frac{\pi}{6}\right]$ si ha:

$$(1+i)\,(\sqrt{3}+i) = \left[2\sqrt{2},\ \frac{5}{12}\pi\right]$$

2) Dalla (8) con $z=i=\left[1,\ \frac{\pi}{2}\right]$ e $z'=1-i=\left[\sqrt{2},\ -\frac{\pi}{4}\right]$ si ha:

$$\frac{i}{1-i} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{3}{4}\pi\right]$$

3) Dalla (9) con $z=1+i=\left[\sqrt{2};\ \frac{\pi}{4}\right]$ si ha:

$$(1+i)^2 = \left[2,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

e poi dalla (7):

$$i\,(1+i)^2 = \left[1,\ \frac{\pi}{2}\right]\cdot\left[2,\ \frac{\pi}{2}\right]\ [2,\ \pi].$$

2.2 Radici nel campo complesso

Ricordiamo che dato il numero complesso $z=[\rho,\theta]$ l'equazione $w^n=z$ $(n\in N)$ ha n soluzioni distinte nel campo dei numeri complessi (*radici ennesime di z*) date dalla formula

$$(10)\quad w_k = \rho^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) = \left[\rho^{1/n},\ \frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

dove k assume i valori $0,1,2,\ldots,\ n-1$.

Risolvere i seguenti esercizi

1) Calcolare le radici quarte di -1 ed 1.

2) Calcolare le radici terze di i ed $i-1$.

3) Calcolare le radici quadrate di i e $-i$.

4) Calcolare le radici quadrate di $1+\sqrt{3}i$ e $-1-\sqrt{3}i$.

5) Calcolare le radici cubiche di 27 e -27.

6) Determinare i numeri complessi z che soddisfano le seguenti equazioni

a) $(z+i)^4=4$; b) $(z+1)^3=(1+i)^4$;

c) $z^2+i\,z-1 = 0$; d) $(z+2)^4=(z-1)^4$;

e) $|z(z+i)|^2=i^1$; f) $(z-2i)^2 = (1-i)^4$;

g) $z^4-2z^2+2=0$; h) $z^6-2iz^3-1=0$;

i) $z^3-i(z-2)^3=0$.

Risposte

1) Le rad. quarte di -1 sono $\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$, quelle di 1 sono ± 1, $\pm i$.

2) Le rad. cubiche di i sono $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}+i)$, $-i$; quelle di $i-1$

$$\left[\sqrt[6]{2},\ \frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1+i),\ \left[\sqrt[6]{2},\ \frac{11}{12}\pi\right],\ \left[\sqrt[6]{2},\ -\frac{5}{12}\pi\right].$$

3) Le radici quadrate di i sono $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, quelle di $-i$ sono $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4) Le radici quadrate di $1+\sqrt{3}\,i$ sono $\pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, quelle di $-1-\sqrt{3}\,i$ sono $\pm\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,

5) Le radici cubiche di 27 sono $3\left(-\frac{3}{2} \pm i\,3\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, quelle di -27 sono -3, $\left(\frac{3}{2} \pm i\,3\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6) a) $\sqrt{2}-i$, $(\sqrt{2}-1)\,i$, $-\sqrt{2}-i$, $-(\sqrt{2}+1)\,i$.

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1\pm i\sqrt{3})$, $-\sqrt[4]{4}$ c) $\frac{-i\pm\sqrt{3}}{2}$

d) $-\frac{1}{2}$, $\frac{3i-1}{2}$, $-\frac{1+3i}{2}$ e) $\frac{-i\pm\sqrt{3}}{2}$, $-i\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$

f) $0,4i$

g) $\left[\sqrt[4]{2},\ \frac{\pi}{8}\right]$, $\left[\sqrt[4]{2},\ \frac{9}{8}\pi\right]$, $\left[\sqrt[4]{2},\ -\frac{\pi}{8}\right]$, $\left[\sqrt[4]{2},\ \frac{7}{8}\pi\right]$

h) $-i$, $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}+i)$ i) $1+i$, $1-\frac{i}{2-\sqrt{3}}$, $1-\frac{i}{2+\sqrt{3}}$

Svolgimento (1, 2, 6a, c, d)

1) Dalla (10) segue che le radici quarte di $-1=[1, \ ]$ sono

$$W_k = \left[1, \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right] \quad k=0,1,2,3$$

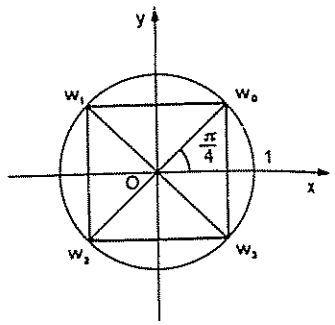
cioè

$$W_0 = \left[1, \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$W_1 = \left[1, \frac{3}{4}\pi\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$W_2 = \left[1, \frac{5}{4}\pi\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$W_3 = \left[1, \frac{7}{4}\pi\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2};$$



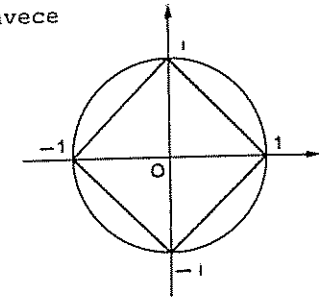
le radici quarte di $1=[1,0]$ sono invece

$$W_k = \left[1, \frac{k\pi}{2}\right] \quad k=0,1,2,3$$

cioè

$$W_0 = [1,0]=1, \quad W_1 = \left[1, \frac{\pi}{2}\right] = i$$

$$W_2 = [1, \ ]=-1, \quad W_3 = \left[1, \frac{3}{2}\pi\right] = -i$$



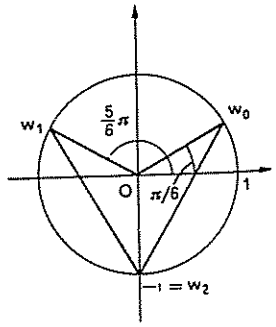
2) Le radici cubiche di i sono

$$W_k = \left[1, \frac{\pi + 4k\pi}{6}\right] \quad k=0,1,2$$

(cfr. fig. 4)

e cioè

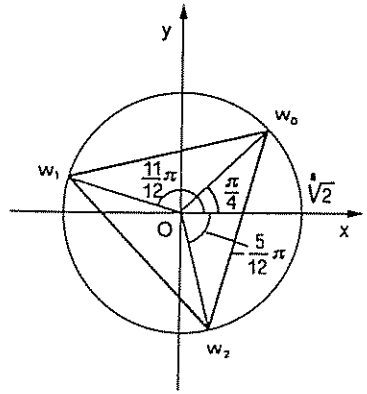
$$W_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad W_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad W_2 = -i$$



per quanto riguarda le radici cubiche di $i-1 = \left[\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right]$ si ha

$$W_k = \left[\sqrt[6]{2}, \frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3}\right] \quad k = 0,1,2$$

e quindi, graficamente:
N.B. Si osservi che le soluzioni sono sempre i vertici di un poligono regolare.



6a) Posto $z+i=w$ bisogna calcolare le soluzioni di

$$w^4=4$$

cioè le radici quarte di 4 che sono:

$$w_k = \left[\sqrt{2}, k\,\frac{\pi}{2}\right], \quad k=0,1,2,3$$

cioè $w_0 = \sqrt{2}$, $w_1 = \sqrt{2}\,i$, $w_2 = -\sqrt{2}$, $w_3 = -\sqrt{2}i$; pertanto, ricordando la posizione fatta $w=z+i$, si ha che l'equazione data ha le radici

$$z_0=\sqrt{2}-i, \quad z_1=\sqrt{2}i-i, \quad z_2=-\sqrt{2}-i, \quad z_3=-\sqrt{2}i-i.$$

c) Dalla usuale formula risolutiva delle equazioni di secondo grado si trova

$$z=-\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}.$$

d) Dividendo per $(z-1)^4$ l'equazione data si scrive

$$\left(\frac{z+2}{z-1}\right)^4 = 1 \quad (z\neq 1)$$

(si osservi preventivamente che $z=1$ non è soluzione dell'equazione di partenza!). Posto ora $w=\frac{z+2}{z-1}$ l'equazione si riscrive

$$w^4=1$$

e quindi il problema e ricondotto al calcolo delle radici quarte di 1 (cfr. esercizio 1) che sono $w_0=1$, $w_1=i$, $w_2=-1$, $w_3=-i$; ricordando poi la posizione fatta $w=\frac{z+2}{z-1}$ si ha che le soluzioni dell'equazione di partenza si trovano risolvendo

$$\frac{z+2}{z-1}=1 \Leftrightarrow \text{nessuna soluzione}$$

$$\frac{z+2}{z-1}=i \Leftrightarrow z=\frac{2+i}{i-1} \Leftrightarrow z=\frac{-3i+1}{2}$$

$$\frac{z+2}{z-1}=-1 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{z+2}{z-1}=-i \Leftrightarrow z=\frac{i-2}{1+i} \Leftrightarrow z=\frac{3i-1}{2}.$$

CAPITOLO 5

ALGEBRA LINEARE

1. - Spazi vettoriali e matrici

Si ricordi che in uno spazio vettoriale di dimensione finita n, tutte le basi sono costituite da n vettori e un sistema di n vettori linearmente indipendente costituisce una base (*teorema della base*).

Dato un insieme di vettori $v_1 \dots v_k$ con sp $\{v_1 \dots v_k\}$ si indica l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di vettori $v_1 \dots v_k$ il sottospazio vettoriale, cioè, generale da $v_1 \dots v_k$.

Data un'applicazione lineare L tra due spazi vettoriali V e W la sua immagine (o Range) verra denotata con R(L), il suo nucleo (o Kernel) con N(L) (l'insieme cioè dei v tali che $Lv=0$).

Si ricordi che N(L) e R(L) sono spazi vettoriali. Se V ha dimensione finita n, N(L) e R(L) hanno dimensioni finite e inoltre la somma delle loro dimensioni vale n. (*teorema della dimensione*).

Se W è un sottoinsieme di V e v_0 è in V col simbolo $v_0 + W$ indicheremo l'insieme

$$v_0+W = \{v\in V: \text{esiste } w\in W \text{ per cui } v=v_0+w\}.$$

Si svolgano i seguenti esercizi.

1) Si effettuino se possibile le seguenti somme tra vettori

a) $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}2\\6\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}3\\6\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}6\\2\\5\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

2) Si effettuino se possibile le seguenti moltiplicazioni per uno scalare

a) $3\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} 2$

c) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

d) $1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

3) Si studi la dipendenza e l'indipendenza lineare dei seguenti insiemi di vettori, individuando in essi almeno un sistema massimo linearmente indipendente

a) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\3\end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\4\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\4\\0\\1\end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\7\\8\\9\\10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\9\\11\\13\\15\end{pmatrix}$

4) Si dica se le seguenti coppie di vettori costituiscono basi per R^2

a) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

5) Si dica se le seguenti terne di vettori costituiscono basi per IR^3

a) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

6) Si effettuino, se possibile, le seguenti somme matriciali

a) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2&4\\7&5\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}3&5\\2&6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&1&1\\2&6&4\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}6&4\\1&3\\1&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

7) Si effettuino, se possibile, le seguenti moltiplicazioni di matrici per uno scalare

a) $2\begin{pmatrix}1&1\\0&4\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} 3$

c) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(0\ 0\ 0\ 1)$

d) $3\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&0\end{pmatrix}$

8) Si effettuino, se possibile, i seguenti prodotti righe per colonne tra matrici (nell'ordine indicato)

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

9) Si indichi quale dei prodotti matriciali che seguono commuta

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

10) Si calcolino le trasposte delle seguenti matrici

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

11) Si individuino delle basi per gli spazi delle matrici

a) di tipo 2x2

b) di tipo 2x3

12) Si dica se le matrici che seguono sono simmetriche antisimmetriche, triangolari inferiori, triangolari superiori, diagonali, scalari.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

n) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

13) Si costruiscano, se esistono le inverse delle seguenti matrici

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14) Si studino Range e Kernel, dei seguenti operatori

a) A: $v \in R^2 \rightarrow 0 \in R^2$ (operatore identicamente nullo)

b) A: $v \in R^2 \rightarrow v \in R^2$ (operatore identità)

c) A: $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in R^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in R^2$

d) A: $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in R^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in R^2$

e) A: $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in R^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in R^2$

f) A: $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in R^3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in R^2$

Risposte

1) a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ b) impossibile c) $\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$ d) impossibile

2) a) $\begin{pmatrix} 18 \\ 21 \end{pmatrix}$ b) impossibile c) impossibile d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) a) il terzo vettore dipende linearmente dai primi due; il sistema costituito da questo è massimo linearmente indipendente

b) il secondo vettore dipende linearmente dal primo; il sistema costituito da questo è massimo linearmente indipendente

c) il sistema è linearmente indipendente

d) il terzo vettore dipende linearmente dai primi due; il sistema costituito da questi è massimo linearmente indipendente

e) il primo vettore dipende linearmente dagli ultimi due; il sistema costituito da questi e massimo linearmente indipendente

f) il secondo vettore dipende linearmente dal primo, il sistema costituito dal primo e dal terzo è massimo linearmente indipendente

g) il sistema è linearmente indipendente

h) il terzo vettore dipende linearmente dai primi due; il sistema costituito da questi e massimo linearmente indipendente

4) a) no b) no c) si d) si

5) a) no b) si c) no d) si

6) a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ b) impossibile c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ d) impossibile

7) a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ b) impossibile c) impossibile d) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

8) a) $\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 16 & 10 & 10 & 14 \\ 11 & 14 & 20 & 25 \end{pmatrix}$ c) impossibile

d) $\begin{pmatrix} 38 & 27 & 13 & 3 \\ 18 & 36 & 8 & 4 \\ 23 & 18 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ f) 8

9) a) si b) no c) no d) si

10 a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $(1\ 4\ 5)$ c) $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

11) a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

12) a) scalare, triangolare inferiore e superiore, simmetrica

b) diagonale, triangolare inferiore e superiore, simmetrica

c) simmetrica

d) antisimmetrica

e) non gode di nessuna delle proprieta elencate

f) simmetrica

g) triangolare inferiore

h) triangolare superiore

i) scalare, triangolare inferiore e superiore, simmetrica

l) triangolare superiore

m) triangolare inferiore

n) antisimmetrica

13) a) singolare b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ e) singolare f) non è quadrata

g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

14) a) $R(A)=\{0\}$, $N(A) = R^2$

b) $R(A) = R^2$, $N(A) = \{0\}$

c) $R(A) = sp\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ $N(A)=sp\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$

d) $R(A) = R^2$ $N(A) = \{0\}$

e) $R(A) = R^2$ $N(A) = \{0\}$

f) $R(A) = R^2$ $N(A) = sp\left[\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

Svolgimento

1) a) Ovviamente, addizionando le componenti di egual posto

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4+1 \\ 3+5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

b) E impossibile effettuare la somma in quanto il primo e il terzo vettore sono in R^3, il secondo e in R^2 e dunque non risultano tutti nello stesso spazio.

c) Addizionando le componenti di egual posto

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+1+4 \\ 6+2+5 \\ 8+3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$$

d) E impossibile effettuare la somma in quanto i due vettori appartengono a spazi distinti (rispettivamente R^4 e R^3)

2) a) Moltiplicando per 3 le singole componenti,

$$3\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot 6\\3\cdot 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\21\end{pmatrix}$$

b) È impossibile effettuare il prodotto in quanto questo ha senso solo se il primo fattore è un numero e il secondo un vettore

c) È impossibile effettuare il prodotto, in quanto il primo fattore è un vettore e non un numero.

d) Moltiplicando per 1 le singole componenti

$$1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 0\\1\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

3) a) Il sistema è necessariamente linearmente dipendente in quanto esso è costituito da tre vettori di R^2 mentre R^2 ha dimensione 2.
Si osservi che i primi due vettori sono linearmente indipendenti. Infatti per studiarne le proprietà di indipendenza e dipendenza basta verificare e esistono o meno due numeri x_1 e x_2 di cui uno almeno non nullo tali che

$$x_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

e cioè tali da risolvere il sistema

$$\begin{cases}x_2 = 0\\x_1 = 0\end{cases}$$

ma tale sistema ha chiaramente la sola soluzione $x_1=0$ $x_2=0$.

b) Per studiare le proprietà di dipendenza del sistema di vettori bisogna verificare l'esistenza o meno di due numero x_1 e x_2 di cui uno almeno no nullo tali che

$$x_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\x_1 + 2x_2\\x_1 + 2x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

e cioè tali da risolvere il sistema

$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 = 0\\x_1 + 2x_2 = 0\end{cases}$$

e tale sistema ha chiaramente soluzioni non nulle (del tipo ad esempio $x_1 = -2$, $x_2 = 1$) sicchè il sistema e linearmente dipendente

c) Si tratta di verificare l'esistenza o meno di tre numeri x_1, x_2, x_3, tali che

$$x_1\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4x_2\\3x_1\\5x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

e cioè tali da risolvere il sistema

$$\begin{cases}4x_2 = 0\\3x_1 = 0\\5x_3 = 0\end{cases}$$

che ammette la sola soluzione $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
Dunque il sistema risulta linearmente indipendente

d) Studiando le terne di numeri x_1, x_2, x_3 tali che

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

si pensera al sistema

$$\begin{cases}x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\\x_1 + x_3 = 0\\x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\end{cases}$$

Tale sistema ricavando x_2 dalla seconda equazione e sostituendo si riduce al seguente

$$\begin{cases}x_3 = -x_1\\-x_1 + x_2 = 0\end{cases}$$

che ha certamente soluzioni non nulle (ad esempio $x_1=1$ $x_2=1$ $x_3=-1$. Pertanto il sistema e linearmente dipendente.
Si studi poi il sistema costituito dai primi due vettori

in esame. Cerchiamo le coppie di numeri x_1, x_2 tali che

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Si perviene al sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

che ha la sola soluzione $x_1=x_2=0$ sicché il sistema di vettori e linearmente indipendente e dunque massimo linearmente indipendente
Gli esercizi e), f), g), h), si risolvono seguendo lo stesso procedimento illustrato in a), b), c), d)

4) a) Poiché il primo vettore è nullo, la coppia non può costituire una base non essendo linearmente indipendente

b) Poiché il secondo vettore si ottiene dal primo moltiplicandolo scalarmente per 2, il sistema non può essere linearmente indipendente e quindi non costituisce una base.

c) Si osservi che i due vettori sono linearmente indipendenti in quanto l'unica coppia x_1, x_2 di numeri tali che

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

e che risolvono quindi il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

e quella 0,0.
Poiché le basi di R^2 sono costituite da due vettori per il teorema della base la coppia di vettori assegnata è una base.

d) Si proceda come in c) e si potrà concludere che il sistema assegnato costituisce una base.

5) a) Occorre stabilire soltanto se la terna assegnata è linearmente indipendente in quanto in tal caso essa sarà una base perché la dimensione di R^3 è 3.

Lo studio dell'indipendenza lineare si riduce allo studio delle terne x_1, x_2, x_3 tali che

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

e cioè delle soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette soluzioni non nulle, ad esempio 0,0,1; pertanto la terna di vettori non è linearmente indipendente.

b) Ragionando come in a) basta studiare le terne x_1, x_2, x_3 tali che

$$x_1\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

e cioè tali da risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Per sostituzione si ha subito

$$\begin{cases} x_3 = -3x_1 \\ x_2 = -x_1 \\ -3x_1 = 0 \end{cases}$$

e quindi l'unica soluzione è costituita da 0,0,0.
Il sistema di vettori risulta così linearmente indipendente e pertanto è una base.
Gli esercizi c) e d) si risolvono utilizzando lo stesso procedimento illustrato in a) e b).

6) a) Sommando le componenti di egual posto si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 0+4 \\ 0+7 & 1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Non è possibile sommare le due matrici in quanto appartenenti a due spazi vettoriali distinti, la prima a quello delle matrici a 2 righe e 2 colonne, la seconda a quello delle matrici a 2 righe e 3 colonne.

c) Sommando le componenti di egual posto si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0+1 & 0+1 \\ 1+2 & 0+6 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

d) Non e possibile sommare le due matrici in quanto appartenenti a spazi vettoriali distinti, la prima a quello delle matrici 3x2, la seconda a quello delle matrici 2x3.

7) a) Moltiplicando per 2 tutte le componenti si ha

$$2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

b) La moltiplicazione è impossibile in quanto il prodotto per uno scalare ha senso solo se il primo fattore e un numero e il secondo una matrice

c) Il prodotto è ineseguibile in quanto ha senso solo se il primo fattore è un numero

d) moltiplicando per 3 tutte le componenti si ha

$$3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 1 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 1 & 3\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

8) a) La prima matrice è 2x3, la seconda 3x2 pertanto essendo il numero delle colonne della prima eguale al numero delle righe della seconda il prodotto è eseguibile e darà una matrice 2x2.

Si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+4\cdot 1+1\cdot 1 & 2\cdot 0+4\cdot 2+1\cdot 3 \\ 3\cdot 1+2\cdot 1+0\cdot 1 & 3\cdot 0+2\cdot 2+0\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

b) La prima matrice è 2x2, la seconda 2x4; il prodotto è quindi eseguibile e darà una matrice 2x4

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+2\cdot 7 & 2\cdot 3+2\cdot 2 & 2\cdot 5+2\cdot 0 & 2\cdot 6+2\cdot 1 \\ 4\cdot 1+1\cdot 7 & 4\cdot 3+1\cdot 2 & 4\cdot 5+1\cdot 0 & 4\cdot 6+1\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 10 & 10 & 14 \\ 11 & 14 & 20 & 25 \end{pmatrix}$$

c) La prima matrice e 2x3, la seconda 2x2; il prodotto pertanto non è eseguibile essendo il numero delle colonne della prima diverso dal numero delle righe della seconda.

d) La prima matrice e 3x2, la seconda 2x4; il prodotto è allora eseguibile e darà una matrice 3x4. Si ha

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1+5\cdot 7 & 3\cdot 9+5\cdot 0 & 3\cdot 1+5\cdot 2 & 3\cdot 1+5\cdot 0 \\ 4\cdot 1+2\cdot 7 & 4\cdot 9+2\cdot 0 & 4\cdot 1+2\cdot 2 & 4\cdot 1+2\cdot 0 \\ 2\cdot 1+3\cdot 7 & 2\cdot 9+3\cdot 0 & 2\cdot 1+3\cdot 2 & 2\cdot 1+3\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 27 & 13 & 3 \\ 18 & 36 & 8 & 4 \\ 23 & 18 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

e) La prima matrice e 3x1, la seconda 1x3; il prodotto è eseguibile e darà una matrice 3x3. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 & 1\cdot 1 & 1\cdot 0 \\ 0\cdot 0 & 0\cdot 0 & 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 & 0\cdot 1 & 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f) La prima matrice è 1x3, la seconda 3x1, il prodotto è eseguibile e dara matrice 1x1, identificabile quindi con uno scalare. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 0 \end{pmatrix} = 8$$

9) a) I due fattori coincidono, pertanto il prodotto commuta.

b) Effettuiamo separatamente il prodotto della prima matrice per la seconda e della seconda per la prima (entrambi effettuabili perché le matrici sono 2x2) e verifichiamo se i risultati coincidono o no. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Poiché i risultati sono diversi il prodotto non commuta
Gli esercizi c) e d) possono essere risolti ragionando come in b).

10) a) Si tratta di mutare le righe in colonne.
Il risultato sarà la seguente matrice 2x2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Scambiando le righe in colonne si avrà la matrice 1x3 seguente: (1 4 5)

Gli esercizi c) e d) possono essere risolti come quelli a) e b).

11) a) Le quattro matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti. Infatti se x_1, x_2, x_3, x_4, sono tali che

$$x_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

allora verificano il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

e pertanto sono tutti nulli.
D'altro canto data una generica matrice 2x2 del tipo

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ si avrà

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e pertanto ogni matrice si può scrivere come combinazione lineare delle matrici assegnate; ne segue che le quattro matrici date costituiscono una base.

L'esercizio b) si risolve come quello a) a partire dalle 6 matrici seguenti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12) a) La matrice si può ottenere moltiplicando scalarmente la matrice identità 3x3 per 2. Essa pertanto è una matrice diagonale e scalare. È triangolare inferiore e superiore e simmetrica perché gli elementi al di sopra e al di sotto della diagonale principale sono nulli.

b) La matrice è diagonale perché solo gli elementi sulla diagonale principale sono diversi da zero.
È triangolare inferiore, superiore e simmetrica perché gli elementi al di sopra e al di sotto della diagonale principale sono nulli

c) La matrice è simmetrica perché l'elemento di posto (i, j) (l'elemento cioè di posto j sulla riga i) coincide con l'elemento di posto (j, i) (con l'elemento cioè di posto i sulla riga j) comunque si scelgano i e j in {1,2,3}.

d) La matrice è antisimmetrica perché l'elemento di posto (i, j) coincide con l'opposto dell'elemento di posto (j, i) comunque si scelgono i e j in {1,2,3}

Per l'esercizio e) si veda l'esercizio d)
Per l'esercizio f) si veda l'esercizio c)

g) La matrice è triangolare superiore perchè sono nulli tutti gli elementi al di sotto, della diagonale principale (costituita da quegli elementi il cui indice di riga coincide con quello di colonna, dagli elementi cioè del tipo a_{ii}).

h) La matrice è triangolare inferiore perchè tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale sono nulli.

Per l'esercizio **i)** si veda l'esercizio **a)**
Per l'esercizio **l)** si veda l'esercizio **g)**
Per l'esercizio **m)** si veda l'esercizio **h)**
Per l'esercizio **n)** si veda l'esercizio **d)**

13) a) La matrice è singolare, in quanto essendo la sua prima riga nulla, il suo prodotto con qualsiasi altra matrice 2x2 avrà la prima riga nulla e pertanto non potrà coincidere con la matrice identità.

b) Si osservi che cercando una matrice inversa di quella assegnata si è ricondotti all'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 & 3x_2 \\ 2x_3 & 3x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ove le incognite x_1, x_2, x_3, x_4, sono gli elementi della matrice inversa e quindi al sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 3x_1 = 1 \\ 2x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Pertanto l'inversa della matrice assegnata esiste e sarà la matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Cercando la matrice inversa di quella assegnata si è

ricondotti all'equazione matriciale.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+2x_3 & x_2+2x_4 \\ 3x_1+4x_3 & 3x_2+4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ove le incognite x_1, x_2, x_3, x_4, sono gli elementi della matrice inversa, e quindi al sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 1 \\ 3x_2 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Ricavando x_1 dalla prima equazione e x_2 dalla terza e sostituendo rispettivamente nella seconda e quarta equazione si ha

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_3 \\ 3 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = - 2x_4 \\ - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Tale sistema ha come soluzioni

$$x_1 = - 2, \quad x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_4 = - \frac{1}{2}$$

La matrice inversa cercata sarà pertanto

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d) Cercando la matrice inversa di quella assegnata si è ricondotti all'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+x_3 & 2x_2+x_4 \\ 6x_1+4x_3 & 6x_2+4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi al sistema

$$\begin{cases} 2x_1+x_3 = 1 \\ 6x_1+4x_3 = 0 \\ 2x_1+x_4 = 0 \\ 6x_2+4x_4 = 1 \end{cases}$$

che risolto per sostituzione dà $x_1=2$, $x_3=-3$, $x_2=-\frac{1}{2}$ $x_1=1$. La matrice inversa di quella assegnata è dunque

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Cercando la matrice inversa di quella assegnata si e ricondotti all'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi al sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Tale sistema non ha soluzioni. Si osservi infatti ad esempio che la prima equazione impone $x_1+x_3=1$ mentre la seconda $x_1+x_3=0$
La matrice in esame pertanto non ha inversa

f) Non essendo la matrice quadrata non si può parlare di matrice inversa della matrice assegnata

g) Cercando la matrice inversa di quella assegnata si è ricondotti all'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi al sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ 2x_4+3x_7 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 2x_5+3x_6 = 1 \\ x_5 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 2x_8+3x_9 = 0 \\ x_6 = 1 \end{cases}$$

che, risolto per sostituzione, ha come soluzioni

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 1$$
$$x_7 = 0 \quad x_8 = \frac{1}{3} \quad x_9 = -\frac{2}{3}$$

La matrice inversa sarà pertanto la seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

l'esercizio 1) si svolge come il g).

14) a) Ovviamente l'immagine di R^2 tramite A, cioè il range di A e $\{0\}$ mentre il nucleo cioè l'insieme di tutti i vettori v in R^2 tali che $Av=0$ coincide con tutto R^2

b) Chiaramente $Av=v=0$ se e solo se $v=0$, dunque $N(A) = \{0\}$ mentre ogni elemento di R^2 è immagine tramite A di se stesso quindi $R(A)=R^2$

c) Si osservi che dove $Av=0$ equivale a dire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1+v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cercare i vettori v tali che $Av=0$ equivale allora a

trovare le soluzioni dell'equazione (nelle incognite v_1, v_2) $v_1+v_2=0$ che sono del tipo $v_2=-v_1$. Pertanto tutti e solo i vettori in N(A) sono del tipo

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sicche si ha:

$$N(A) = sp\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right].$$

Per determinare R(A) si osservi che un vettore w di componenti w_1, w_2 è in R(A) se e solo se esiste un vettore v di componenti v_1, v_2 tale che Av = w tale che cioe

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Si perviene cosi al sistema nelle incognite v_1, v_2

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = w_1 \\ 0 = w_2 \end{cases}$$

Tale sistema è risolubile se e solo se $w_2=0$
Dunque i vettori in R(A) sono tutti e solo quelli del tipo

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sicche si ha:

$$R(A) = sp\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

Gli esercizi **d)** ed **e)** si risolvono come il **c)**.

f) Dire Av = 0 equivale al sistema

$$\begin{cases} v_1 + 2v_2 = 0 \\ 4v_1 + 5v_2 + v_3 = 0 \end{cases}$$

Ricavando v_1 in funzione di v_2 dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottengono le soluzioni $v_1=-2v_2$, $v_2=v_2$, $v_3=3v_2$, espresse in funzione di v_2 che funge da parametro. Pertanto i vettori in N(A) sono del tipo

$$v = \begin{pmatrix} -2v_2 \\ v_2 \\ 3v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sicche si ha:

$$N(A) = sp\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$$

Cercare i vettori w di componenti w_1, w_2, w_3, in R(A) equivale a cercare i vettori v di componenti v_1, v_2, v_3, tali che Av = w e quindi a risolvere il sistema

$$\begin{cases} v_1 + 2v_2 = w_1 \\ 4v_1 + 5v_2 + v_3 = w_2 \end{cases}$$

che risulta risolvibile comunque si scelgono w_1, w_2 sicche $R(A) = \mathbb{R}^2$.

2. Determinanti

Data una matrice quadrata A col simbolo $|A|$ indicheremo il suo determinante.

Valgono le seguenti proprietà.

(1) Una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso determinante.

(2) Una matrice con una riga tutta nulla ha determinante nullo

(3) Se A' si ottiene da A scambiando due righe tra loro allora $|A'| = -|A|$

(4) Se A' si ottiene da A moltiplicando una riga per una costante C allora $|A'| = C\,|A|$

(5) Se A' si ottiene da A sommando alla riga di indice i la riga di indice j (con $i \neq j$) moltiplicata per una costante allora $|A'| = |A|$

(6) Se una matrice A ha due righe eguali allora

$$|A| = 0$$

(7) Se A = BC con B e C quadrate allora $|A| = |B| \cdot |C|$ (teorema di Binet)

Sia M_{ij} la matrice ottenuta da A cancellando la riga di indice i e la colonna di indice je si ponga $A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$ (complemento algebrico di indici i e j). Si ha

(8) Per ogni indice i $|A| = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} A_{ij}$ (teorema di Laplace)

Si indichi con adjA la matrice aggiunta di A definita dalle posizioni $\mathrm{adj}A = (A_{ij})$ e con $(\mathrm{adj}A)^t$ la sua trasposta. Si ha

(9) Una matrice A è invertibile se e solo se $|A| \neq 0$.

Inoltre se $|A| \neq 0$ allora $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{adj}\,A)^t$

Sia A una matrice di tipo mxn, e si fissino in A k righe e l colonne, la matrice A' ottenuta da A prendendone gli elementi posti sulle righe e sulle colonne fissate si dice sottomatrice di A (costituita dalle righe e dalle colonne prefissate) così ad esempio data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

la sottomatrice A' costituita dalla prima e terza riga e dalla seconda e quarta colonna sarà la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Data una sottomatrice A' di A si dirà orlata (o matrice orlata) di A' una qualsiasi matrice che si ottiene da A' effettuando le seguenti operazioni:

a) si fissino una riga e una colonna in A che non figurino in A'.

b) si aggiunga ad A' un'ulteriore riga prendendo gli elementi della riga fissata in a) che giacciono sulle colonne presenti in A'.

c) si aggiunga ad A' un'ulteriore colonna prendendo gli elementi della colonna fissata in a) che giacciono sulle righe presenti in A' e sulla riga fissata in a).

Matrici orlate della sottomatrice A' prima indicata sono ad esempio le seguenti

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

la prima ottenuta orlando A' con la seconda riga e la prima colonna, la seconda ottenuta orlando A' con la seconda riga

e la terza colonna, la terza ottenuta orlando A' con la quarta riga e la prima colonna.

10) Sia A' una sottomatrice quadrata di A. Allora A' ha determinante diverso da zero a ogni orlato di A' ha determinante nullo se e solo se i vettori riga di A presenti in A' (rispettivamente i vettori colonna di A presenti in A') costituiscono nell'insieme delle righe (rispettivamente delle colonne di A (teorema degli orlati).

Si ricordi ora che il rango di una matrice è il numero di vettori presenti in un sistema massimo lineramente indipendente per l'insieme delle righe (o equivalentemente delle colonne, grazie al teorema del rango) di A.

Il teorema degli orlati viene spesso allora utilizzato nella seguente forma.

Sia A' una sottomatrice quadrata di A, allora A' ha determinante diverso da zero e tutti i suoi orlati hanno determinante nullo se e solo se A' è di rango massimo (cioè se il suo rango coincide col rango di A).

Si svolgano i seguenti esercizi

1) Si calcolino i determinanti delle seguenti matrici 2x2

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2) Si calcolino i determinanti delle seguenti matrici 3x3

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \\ 8 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

3) Si calcolino i determinanti delle seguenti matrici

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 6 \\ 9 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ h) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

i) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 & 8 \\ 9 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ l) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

4) Si calcolino, se esistono le inverse delle seguenti matrici

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5) Si individuino nei seguenti insiemi di vettori dei sistemi massimi linearmente indipendenti

a) $\begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\\0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\7\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\5\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\10\\7\\3\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\2\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-2\\0\end{pmatrix}$

6) Dati i sistemi di vettori a), c), d) considerati nell'esercizio 5) si dica se i seguenti vettori dipendano lineramente da essi

a)' $\begin{pmatrix}3\\6\\5\\1\end{pmatrix}$ b)' $\begin{pmatrix}5\\8\\5\\4\end{pmatrix}$

7) Si determini il rango delle seguenti matrici; si individui in esse un sistema massimo linearmente indipendente di righe e uno di colonne; si individui infine una sottomatrice di rango massimo

a) $\begin{pmatrix}1&3&4\\2&6&1\\3&2&5\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1&5&8\\2&3&0\\4&7&1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}3&-6&0&6\\-2&4&0&-4\\1&-2&1&1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\t&0&1\\1&t+1&0\end{pmatrix}$ con $t\in R$

Risposte

1) a) -9 b) -10 c) -34 d) 0

2) a) 10 b) 141 c) -12 d) -6

3) a) 0 b) 0 c) -48 d) 0

e) -47 f) 0 g) 72 h) 72

i) -112 l) -390

4) a) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1&2\\3&1\end{pmatrix}$ b) A^{-1} non esiste

c) $\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-1&-1&4\\8&-7&-2\\-4&11&1\end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8&-12&-1\\0&4&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$

e) $\frac{1}{29}\begin{pmatrix}29&0&0&0\\0&10&-7&-6\\0&-7&2&10\\0&-5&18&3\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\0&-2&1&0\\5&-2&-2&1\end{pmatrix}$

5) a) L'insieme e linearmente indipendente

b) Il terzo e il quarto vettore dipendono linearmente dai primi due che costituiscono un sistema massimo linearmente indipendente

c) Il quarto vettore dipende linearmente dai primi tre che costituiscono un sistema massimo lineramente indipendente

d) Il quarto vettore dipende linearmente dai primi tre che costituiscono un sistema massimo linearmente indipendente

6) Il vettore in a') dipende linearmente dal sistema in 5a), é linearmente indipendente dai sistemi in 5c) e 5d)
Il vettore in b') dipende linearmente dal sistema in 5 a) e linearmente indipendente dai sistemi in 5 c) e 5 d)

7) a) La matrice ha rango 2. Le prime due righe (risp. la prima e terza colonna) costituiscono un sistema massimo linearmente indipendente di righe (risp. di colonne). Una sottomatrice di rango massimo A' e costituita ad esempio dalle prime due righe e dalla prima e terza colonna e si ha

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) La matrice ha rango 3. Le tre righe (risp. colonne) costituiscono un sistema massimo linearmente indipendente di righe (risp. colonne). L'unica sottomatrice di rango massimo è la matrice stessa

c) La matrice ha rango 2. La prima e la terza riga (risp. prima e quarta colonna) costituiscono un sistema massimo linearmente indipendente di righe (risp. di colonne). Una sottomatrice di rango massimo A' è costituita ad esempio dalla prima e terza riga e dalla prima e quarta colonna e si ha

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) La matrice ha rango 3 per $t \neq -1 \pm \sqrt{2}$.
Le tre righe (risp. colonne) costituiscono un sistema massimo linearmente indipendente di righe (risp. colonne). L'unica sottomatrice di rango massimo è la matrice stessa.
La matrice ha rango 2 per $t = -1 \pm \sqrt{2}$. Le prime due righe (risp. le ultime due colonne) costituiscono un sistema massimo linearmente indipendente di righe (risp. colonne).
Una sottomatrice di rango massimo A' è costituita ad esempio dalle prime due righe e dalle ultime due colonne e si ha

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Svolgimento

1) Per risolvere gli esercizi proposti applicando direttamente la definizione, si osservi che l'insieme delle permutazioni di {1,2} è costituito dalle due applicazioni φ_1, φ_2, tali che $\varphi_1(1)=1$, $\varphi_2(2)=2$ e $\varphi_2(1)=2$ $\varphi_2(2)=1$.
La prima è pari poiche la coppia (1,2) non presenta inversioni ($\varphi_1(1)<\varphi_1(2)$) la seconda è dispari poiché la coppia (1,2), presenta inversione ($\varphi_1(1) > \varphi_2(2)$).

Pertanto il determinante di una matrice A, due righe e due colonne di elementi a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} sarà dato dall'espressione $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

a) applicando la definizione si ha

$$|A| = 1\cdot 6 + (-1)\cdot 3\cdot 5 = -9$$

b) Applicando la definizione si ha

$$|A| = (-1)\cdot 4 + (-1)\cdot 2\cdot 3 = -10$$

c) Applicando la definizione si ha

$$|A| = (-6)\cdot 4 + (-1)\cdot 2\cdot 5 = -34$$

d) Applicando la definizione si ha

$$|A| = 3\cdot 2 + (-1)\cdot(-6)\cdot(-1) = 0$$

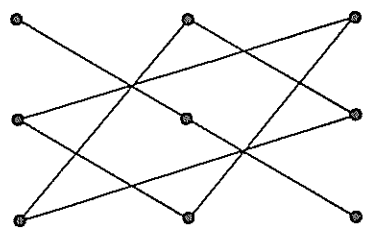
2) Per risolvere gli esercizi proposti applicando direttamente la definizione si osservi che l'insieme delle permutazioni di {1,2,3} e costituito dalle seguenti 6 applicazioni della parità indicata

$\varphi_1(1)=1$	$\varphi_1(2)=2$	$\varphi_1(3)=3$	pari
$\varphi_2(1)=1$	$\varphi_2(2)=3$	$\varphi_2(3)=2$	dispari
$\varphi_3(1)=2$	$\varphi_3(2)=1$	$\varphi_3(3)=3$	dispari
$\varphi_4(1)=2$	$\varphi_4(2)=3$	$\varphi_4(3)=1$	pari
$\varphi_5(1)=3$	$\varphi_5(2)=1$	$\varphi_5(3)=2$	pari
$\varphi_6(1)=3$	$\varphi_6(2)=2$	$\varphi_6(3)=1$	dispari

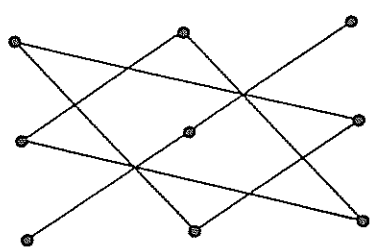
Il determinante di una matrice $A=(a_{ij})$, 3x3 sarà data da

$$|A| = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$$
$$-a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{31}\, a_{33}$$

Pertanto nel calcolare il determinante di una matrice 3x3 andranno presi col loro segno i prodotti dei fattori le cui posizioni sono congiunte con linea continua nel seguete quadro



e col segno cambiato i prodotti di fattori le cui posizioni sono congiunte con linee continue nel seguente quadro



a) Applicando la definizione si ha

$$|A| = 1\cdot5\cdot2 + 0\cdot6\cdot0 + 2\cdot3\cdot1 - 0\cdot5\cdot2 - 0\cdot3\cdot2 - 1\cdot6\cdot1 = 10$$

b) Applicando la definizione si ha

$$|A| = 1\cdot2\cdot4 + 3\cdot1\cdot8 + 6\cdot9\cdot5 - 8\cdot2\cdot5 - 3\cdot6\cdot4 - 9\cdot1\cdot1 = 141$$

c) Applicando la definizione si ha

$$|A| = 3\cdot4\cdot1 + 1\cdot3\cdot0 + 6\cdot2\cdot0 - 0\cdot4\cdot0 - 3\cdot2\cdot3 - 1\cdot6\cdot1 = -12$$

d) Applicando la definizione si ha

$$|A| = 1\cdot4\cdot10 + 3\cdot8\cdot5 + 2\cdot1\cdot6 - 5\cdot4\cdot6 - 2\cdot3\cdot10 - 8\cdot1\cdot1 = -6$$

3) a) Poiché la prima e la terza riga della matrice sono eguali, il determinante vale 0.

b) Poiché la prima e la terza colonna della matrice sono eguali, il determinante vale 0.

c) Sviluppando con la regola di Laplace secondo l'ultima colonna (che è quella che contiene il maggior numero di zeri) si ha

$$|A| = 8\cdot(-1)^{4+3}\,(2\cdot5 - 4\cdot4) = 8\cdot(-6) = -48$$

d) Poiche la terza riga è nulla, il deteminante vale 0.

e) Sviluppando con la regola di Laplace secondo la seconda riga (che e quella che contiene il maggior numero di zeri) si ha

$$|A| = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot4\cdot9 + 3\cdot5\cdot7 + 6\cdot2\cdot1 -$$
$$- 1\cdot4\cdot7 - 3\cdot6\cdot9 - 5\cdot2\cdot1 = -47$$

f) Si osservi che la matrice A' che si ottiene dalla matrice A aggiungendo alla prima riga la seconda moltiplicata per -2 ha lo stesso determinante. D'altro canto

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Anche la matrice A'' che si ottiene da A' aggiungendo alla terza riga la quarta moltiplicata per -1 avrà lo stesso determinante di A e

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Infine anche la matrice A''' che si ottiene sommando alla terza riga la prima moltiplicata per -2 ha determinante eguale a quello di A ma

$$A''' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e quindi il suo determinante vale 0 (la terza riga è tutta nulla). Pertanto $|A| = |A'''| = 0$

g) Applicando ripetutamente il teorema di Laplace si ha

$$|A| = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\cdot 3 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 6\cdot 4 = 72$$

h) Applicando ripetutamente il teorema di Laplace si ha

$$|A| = (-1)^{1+1}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 6 = 72$$

i) La matrice A' che si ottiene da A sommando alla prima riga la seconda moltiplicata per -1 ha lo stesso determinante di A. Essa vale

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 6 & 8 \\ 9 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Anche la matrice A'' che si ottiene da A' sottraendo alla terza riga la quarta ha lo stesso determinante di A.

Essa vale

$$A'' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 6 & 8 \\ 7 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

La stessa considerazione può farsi per la matrice che si ottiene da A" sottraendo alla seconda riga la quarta moltiplicata per 2.

Essa vale

$$A''' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & -6 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Sviluppando col teorema di Laplace secondo la seconda colonna si ha

$$|A| = |A'''| = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -1 & -6 & 0 \\ 7 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -112$$

l) Addizionando alla prima riga la terza moltiplicata per -4 si ha la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} -17 & -30 & -13 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Sommando in tale matrice alla quarta riga la terza moltiplicata per -2 si ha la matrice

$$A'' = \begin{pmatrix} -17 & -30 & -13 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 3 & 1 \\ 1 & -10 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tutte tali matrici hanno lo stesso determinante di A. D'altro canto sviluppando secondo la quarta colonna col teorema di Laplace il determinante di A" si ha

$$|A''| = (-1)^{3+4}\begin{vmatrix} -17 & -30 & -13 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -10 & -1 \end{vmatrix} = -390$$

4) a) Calcoliamo la matrice aggiunta di A. Si ha

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 1$ $\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 3$ $\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 2$ $\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 1$

D'altro canto il determinante di A vale -5. Si ha pertanto

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot(\text{adj } A)^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Poiche il determinante di A vale 0, A^{-1} non esiste

c) Il determinante di A vale 15 e pertanto la matrice A^{-1} esiste calcoliamo l'aggiunta di A. Si ha

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot(-1)$ $\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-8)$ $\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot(-4)$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot(1)$ $\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\,(-7)$ $\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\,(-11)$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot 4$ $\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot 2$ $\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot 1$

e dunque

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot(\text{adj } A)^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 8 & -7 & -2 \\ -4 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Il determinante di A vale 8 e pertanto la matrice A^{-1} esiste Calcoliamo l'aggiunta di A. Si ha

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 8$ $\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 0$ $\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot 0$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 12$ $\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 4$ $\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot 0$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot(-1)$ $\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot 1$ $\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot 2$

e dunque

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & -12 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e) Il determinante di A vale -29 (si sviluppi secondo la prima riga) sicché A^{-1} esiste. Calcoliamo l'aggiunta di A. Si ha

$A_{11}=(-1)^{1+1}\,(-29)$ $\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 0$ $\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot 0$ $\quad A_{14}=(-1)^{1+4}\cdot 0$

$A_{21}=(-1)^{1+2}\cdot 0$ $\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot(-10)$ $\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot(-7)$ $\quad A_{24}=(-1)^{2+4}\cdot 5$

$A_{31}=(-1)^{1+3}\cdot 0$ $\quad A_{32}=(-1)^{2+3}\cdot(-7)$ $\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot(-2)$ $\quad A_{34}=(-1)^{3+4}\cdot 18$

$A_{41}=(-1)^{1+4}\cdot 0$ $\quad A_{42}=(-1)^{2+4}\cdot 6$ $\quad A_{43}=(-1)^{3+4}\cdot 10$ $\quad A_{44}=(-1)^{4+4}\cdot(-3)$

e dunque

$$A = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 29 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & -6 \\ 0 & -7 & 2 & 10 \\ 0 & -5 & 18 & 3 \end{pmatrix}$$

f) Il determinante di A vale 1 sicché A^{-1} esiste. Calcolando l'aggiunta di A si ha

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 1$ $\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 2$ $\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot 1$ $\quad A_{14}=(-1)^{1+4}\cdot(-5)$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 0$ $\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 1$ $\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot 2$ $\quad A_{24}=(-1)^{2+4}\cdot(-2)$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot 0$ $\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot 0$ $\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot 1$ $\quad A_{34}=(-1)^{3+4}\cdot 2$

$A_{41}=(-1)^{4+1}\cdot 0$ $\quad A_{42}=(-1)^{4+2}\cdot 0$ $\quad A_{43}=(-1)^{4+3}\cdot 0$ $\quad A_{44}=(-1)^{4+4}\cdot 1$

e dunque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Si costruisca la matrice A che ha come colonne i vettori in esame e si cerchi di individuare un minore di ordine massimo, cioè una sottomatrice quadrata tale che il suo determinante sia diverso da zero e i determinanti di tutte le orlate sono nulli. I vettori che figurano in tale sottomatrice formano per il teorema degli orlati un sistema massimo linearmente indipendente.

a) La matrice A è in questo caso

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si osservi che sviluppando il determinante di A con la regola di Laplace secondo la quarta riga si ha

$$|A| = (-1)^{4+1} \left| \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right|$$

e sviluppando il determinante di quest'ultima matrice ancora con la regola di Laplace secondo la terza riga si ha

$$|A| = (-1)\cdot 4$$

Pertanto $|A| \neq 0$ e i quattro vettori in esame costituiscono un sistema linearmente indipendente che pertanto è massimo

b) La matrice A è in questo caso

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Si osservi che esistono tre sottomatrici 3x3

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

i cui determinanti sono tutti nulli.
D'altro canto, ad esempio, la sottomatrice costituita dalle prime due righe e dalle prime due colonne ha determinante diverso da zero. Pertanto i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

costituiscono un sistema massimo lineramente indipendente

c) La matrice A è in questo caso

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcolando il determinante di A, si trova che esso è nullo. Esaminando i determinanti delle sottomatrici 3x3 si trova subito che è diverso da zero quello della matrice costituito dalle prime 3 righe e dalle prime 3 colonne. Pertanto i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

costituiscono un sistema massimo linearmente indipendente.

d) La matrice A in questo caso e

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e il suo determinante e nullo.
Esaminando i determinanti dalle sottomatrici 3x3 si trova subito che è diverso da zero quello della matrice costituita dalle prime tre righe e dalle prime 3 colonne. Pertanto i vettori

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

costituiscono un sistema massimo linearmente indipendente.

6) Si tratta di verificare se i vettori in esame dipendono o meno dai sistemi massimi linearmente indipendenti individuati nell'esercizio 5). Si deve allora considerare la matrice A costituita dai vettori del sistema e una sua sottomatrice A' a determinante diverso da zero le cui orlate hanno determinante eguale a zero. Se le ulteriori orlate che si ottengono da A' utilizzando come colonna il vettore in esame e come riga una qualsiasi riga di A (diversa da quelle in A') hanno tutte determinanti nulli il vettore dipende linearmente dal sistema; in caso contrario è linearmente indipendente da esso.

a) Nel caso del sistema 5a) le matrici A e A' sono le seguenti

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A=A'$$

e dunque non essendovi ulteriori orlate il vettore a') in esame dipende linearmente dal sistema di vettori 5a).
Nel caso del sistema 5c) le matrici A e A' sono le seguenti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Le orlate di A' col vettore in esame si riducono alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è diverso da zero e pertanto il vettore in esame è indipendente linearmente dal sistema 5c).

Nel caso del sistema 5d) le matrici A e A' sono le seguenti

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Le orlate di A' col vettore in esame si riducono alla matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è diverso da zero e pertanto il vettore in esame è indipendente linearmente dal sistema 5d)

b) Nel caso del sistema 5a) valgono le stesse considerazioni fatte per il vettore in a)'

Nel caso del sistema 5c) si tratta di studiare il determinante delle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Poiche tale determinante è diverso da zero il vettore in esame è indipendente linearmente dal sistema 5c)

Nel caso del sistema 5d) si tratta di studiare il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Poiché tale determinante è diverso da zero il vettore in esame è indipendente linearmente dal sistema 5d)

7) Si tratta grazie al teorema degli orlati di determinare una sottomatrice quadrata a determinante diverso da zero, i cui orlati abbiano determinante nullo: le righe e le colonne presenti in tale sottomatrice costituiranno sistemi massimi linearmente indipendente, il loro numero sarà il rango della matrice considerato e la sottomatrice trovata avrà rango massimo (cioè il suo rango coincide con quello di A)

a) Una sottomatrice a determinante diverso da zero i cui orlati hanno determinante nullo è costituita ad esempio dalla matrice A' che si ottiene utilizzando le prime due righe e la prima e la terza colonna, la matrice cioè

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A' è di rango massimo e il rango di A è 2. Un sistema di righe massimo linearmente indipendente è costituito dalla prima e dalla seconda, un sistema di colonne ancora dalla prima e dalla terza.

b) Il determinante della matrice in esame è diverso da zero. Pertanto la matrice ha rango 3, le tre righe (risp. le tre colonne) sono linearmente indipendenti e costituiscono

così un sistema massimo linearmente indipendente. L'unica sottomatrice di rango massimo è la matrice stessa.

c) La matrice A' costituita ad esempio dalla prima e dalla terza riga di A e dalla prima e quarta colonna ha determinante diverso da zero. Le sue due orlate (che si ottengono utilizzando la seconda riga e una volta la seconda colonna, una volta la terza colonna) hanno determinanti nulli. Pertanto A' ha rango massimo e il rango della matrice in esame è 2. Un sistema di righe massimo lineramente indipendente è costituito dalla prima e dalla terza, un sistema di colonne dalla prima e dalla quarta.

d) La matrice in esame dipende da un parametro t. Dettala A_t, sviluppando ad esempio il suo determinante secondo la terza colonna con la regola di Laplace si ha

$$|A_t| = (-1)(t-1) - t(t+1) = -t^2-2t+1$$

Pertanto $|A_t| \neq 0$ per $t \neq -1 \pm \sqrt{2}$.

e dunque il rango di A_t è 3 per $t \neq -1 \pm \sqrt{2}$. Le tre righe (risp. colonne) costituiscono un sistema massimo linearmente indipendente e l'unica sottomatrice di rango massimo è A_t stessa.

Per $t=-1\pm\sqrt{2}$ si ha. $|A_t|=0$

La sottomatrice A'_t costituita dalla seconda e terza colonna e dalla prima e seconda riga, la sottomatrice cioè

$$A'_t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante sempre diverso da zero (non dipende da t). Pertanto A'_t è di rango massimo, il rango di A_t è 2 e il sistema costituito dalla prima e seconda riga (risp. seconda e terza colonna) è massimo linearmente indipendente per le righe (risp. colonne) di A_t.

3. Sistemi lineari

Sia dato il sistema lineare a m equazioni ed n incognite:

$$a_{11}\, x_1 + \dots + a_{1n}\, x_n = c_1$$

$$a_{21}\, x_1 + \dots + a_{2n}\, x_n = c_2$$

$$a_{m1}\, x_1 + \dots + a_{mn}\, x_n = c_m$$

Posto $A = (a_{ij})$ ed indicato con C il vettore di componenti $c_1 \dots c_m$ diremo A *matrice dei coefficienti* e C vettore (o *colonna*) dei termini noti.

La matrice che si ottiene da A aggiungendo come ultima colonna C sarà denotata con (A/C) e sarà detta *matrice completa* del sistema:

$$(A/C) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

Per indicare il sistema in esame si userà la notazione matriciale

$$AX = C$$

dove il vettore X sarà detto *vettore delle incognite* e sarà

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Risolvere il sistema AX=C vuol dire individuare l'insieme S delle sue soluzioni; tale insieme può essere vuoto (sistema *incompatibile*) o non vuoto (*sistema compatibile*).

Studio della compatibilità

Per stabilire se il sistema AX=C è compatibile si ricorre al teorema di Rouché-Capelli; il sistema è compatibile se e solo se la matrice dei coefficienti A e la matrice completa (A/C) hanno lo stesso rango. A tale scopo si individua una sottomatrice quadrata A' di rango massimo (e quindi, per il teorema degli orlati, con $|A|\neq 0$ e con orlate tutte a determinante nullo) e si verifica se A', riguardata come sottomatrice di (A/C) ha ancora rango massimo (e cioè ancora grazie al teorema degli orlati se le orlate di A' ottenute utilizzando C come colonna hanno determinante diverso da zero).

Regola di Cramer

Se m = n e $|A|\neq 0$ il sistema è sempre compatibile ed ammette un'unica soluzione X per cui vale la formula

$$X=A^{-1}\,C.$$

Da tale formula si ricava subito la regola di Cramer, la componente i-sima del vettore X, x_i è data da

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

ove A_i è la matrice che si ottiene da A sostituendo la sua colonna i-sima con la colonna dei termini noti.

Soluzioni col metodo parametrico

Supposto il sistema compatibile, sia k il rango di A e ancora A' una sottomatrice quadrata di A di rango massimo; le soluzioni del sistema si ottengono risolvendo con la regola di Cramer il sistema di k equazioni in k incognite ottenuto cancellando le m-k equazioni i cui coefficienti non campaiono in A' e portando a secondo membro i termini contenenti le n-k incognite i cui coefficienti non

compaiono in A' (queste ultime vengono così trattate come dei parametri reali fissabili arbitrariamente).

N.B. Ad ogni fissata (n-k)-pla di valori delle incognite i cui coefficienti non compaiono in A' corrisponde una soluzione del sistema dato che ammette pertanto ∞ soluzioni se k<n.

Per evidenziare che la generica soluzione del sistema dipende dalla scelta di n-k parametri arbitrari si dice che il sistema ammette ∞^{n-k} soluzioni a titolo di esempio risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+x_3=-1 \\ x_1+x_3=0 \end{cases}$$

Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A/C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché A ha due colonne eguali (la prima e la terza) il suo rango è 2. Poiché l'ultima colonna di (A/C) coincide con la seconda di A il rango di (A/C) è eguale al rango di A. Il sistema è pertanto compatibile. Una sottomatrice A' di rango massimo è costituita dalla prima e seconda riga e dalla prima e seconda colonna, cioè.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il sistema che si ottiene da quello di partenza cancellando la terza equazione e portando al secondo membro l'incognita x_3 (che si considera fissata arbitrariamente) è il seguente

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - x_3 \\ x_1 - x_2 = -1 - x_3 \end{cases}$$

Tale sistema si può risolvere sia applicando la regola di Cramer sia costruendo $(A')^{-1}$. Col primo metodo si ha

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-x_3 & 1 \\ -1-x_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-x_3 \\ 1 & -1-x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}$$

cioè $x_1=-x_3$, $x_2=1$ (x_3 in IR).

Col secondo metodo si ha

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (A')^{-1} \begin{pmatrix} 1-x_3 \\ -1-x_3 \end{pmatrix}$$

Poichè $(A')^{-1} = \frac{1}{|A'|}(\text{adj } A)^t$ si ha

e dunque ancora

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il sistema dato ammette pertanto le ∞^1 soluzioni

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ 1 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x_3 \text{ in } R.$$

Risoluzione dell'insieme delle soluzioni col metodo vettoriale

Utilizzando il linguaggio degli spazi vettoriali si può descrivere diversamente la struttura delle soluzioni del sistema AX=C.

Si osservi che considerando la matrice A come l'applicazione lineare da R^n a R^m che ad ogni X associa AX, l'insieme S_o delle soluzioni del sistema cosiddetto omogeneo, del sistema cioè AX=0 può riguardarsi come il nucleo di A mentre l'insieme dei vettori C per cui il sistema AX=C ammette soluzioni può riguardarsi come il range di A. Dal teorema di Rouche Capelli segue allora che R(A) ha dimensioni k se k è il rango della matrice A e pertanto per il teorema della dimensione S_o ha dimensione n-k.

Nel caso in cui il sistema AX=C è incompatibile, l'insieme delle soluzioni S sarà vuoto; nel caso di sistema compatibile detta $\bar{X}$ una soluzione particolare si avrà $S=\bar{X} + S_o$ sicchè lo studio di S si riconduce alla ricerca di una soluzione particolare e allo studio di S_o.

Lo studio di S_o che è uno spazio vettoriale sarà ovviamente completo quando sarà nota una base.

Detta A' una sottomatrice di A di rango massimo una soluzione particolare $\bar{X}$ si può ottenere ponendo eguali a zero le incognite i cui coefficienti non figurano in A' e ricavando le altre incognite dell'unica soluzione $X'=(A')^{-1}C'$ del sistema A'X'=C' che si ottiene da quello dato cancellando le equazioni e le incognite i cui coefficienti non figurano in A'

Per trovare poi un vettore non nullo in S_o si può procedere come segue:

a) si fissi una delle incognite i cui coefficienti non figurano in A', si attribuisca ad essa il valore 1 e si indichi con C la colonna dei suoi coefficienti

b) si pongano eguali a zero tutte le altre incognite i cui coefficienti non figurano in A'.

c) si ricavi il valore delle rimanenti componenti risolvendo il sistema A'X'=-C', il sistema cioè che si ottiene da AX=-C cancellando le equazioni e le incognite i cui coefficienti non figurano in A'

Ripetendo tali operazioni per ciascuna delle incognite che non figurano in A' si ottengono n-k vettori che costituiscono una base per S_o

A titolo di esempio studiamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_4 = 6 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}$$

La matrice A dei coefficienti e la matrice completa (A/C) sono rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 6 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 8 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Tutte le sottomatrici 3x3 della matrice A hanno determinante nullo. La sottomatrice A' invece costituita dalle prime due righe e dalle prime due colonne ha determinante diverso da zero. Essa pertanto è di rango massimo e si ha $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Considerata come sottomatrice di (A/C) essa ammette un'ulteriore orlata ottenibile utilizzando la colonna C e la terza riga.

Tale orlata ha determinante anch'esso nullo.

Pertanto il rango di A e di (A/C) coincidono ed il sistema è compatibile.

Si osservi che in A' figurano i coefficienti delle prime due equazioni e delle incognite x_1, x_2.

La matrice inversa della matrice A' vale

$$(A')^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Una soluzione particolare $\bar{X}$ del sistema AX=C la si ottiene fissando $x_3=0$, $x_4=0$ e ricavando x_1 e x_2 del sistema A'X'=C' ottenuto da AX=C cancellando le equazioni e le incognite i cui coefficienti non figurano in A'. Tale sistema vale

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ 4x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$$

Si ha allora

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (A')^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/11 \\ 10/11 \end{pmatrix}$$

e dunque $\bar{X}$ sarà

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 14/11 \\ 10/11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'insieme delle soluzioni d di AX=C è eguale a $\bar{X} + S_0$.

Occorrerà trovare allora una base per S_0. Poiché il rango di A è 2, tale base sarà costituita da 2 vettori.

Per trovarla, si fissi innanzi tutto $x_3=1$, $x_4=0$ e si indichi co C_3 il vettore dei coefficienti di x_3.

Il sistema $A'X'=-C'_3$ ottenuto da $AX=-C_3$ cancellando le equazioni e le incognite i cui coefficienti non figurano in A', è

$$\begin{cases} x_1+3x_2 = -2 \\ 4x_1+x_2 = -6 \end{cases}$$

Si ha allora

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (A')^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16/11 \\ -2/11 \end{pmatrix}$$

Un primo vettore X_1 in S_0 sarà allora

$$x_1 = \begin{pmatrix} -16/11 \\ -2/11 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si fissi ora $x_3=0$, $x_4=1$ e si indichi con C_4 il vettore dei coefficienti di x_4.

Il sistema $A'X' = -C'_4$ ottenuto da $AX = -C_4$ cancellando le equazioni e le incognite i cui coefficienti non figurino in A' è

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -1 \\ 4x_1 + x_2 = -2 \end{cases}$$

Si ha allora

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (A')^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/11 \\ -2/11 \end{pmatrix}$$

Un secondo vettore X_2 in S_o sarà allora

$$x_2 = \begin{pmatrix} -5/11 \\ -5/11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I vettori x_1, x_2 costituiscono una base per S_o.

Si risolvano i seguenti esercizi

1) Si risolvano i sistemi lineari AX=0, AX=C, AX=D ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Si risolvano i sistemi lineari AX=0, AX=C, AX=D ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}$$

3) Si risolvano i sistemi lineari AX=0, AX=C, AX=D ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 11 \\ 1 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

4) Si risolvano i sistemi lineari AX=0, AX=C, AX=D ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 12 & 9 & 15 & 21 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \\ 39 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \\ 36 \end{pmatrix}$$

5) Si risolvano i sistemi lineari AX=0, AX=C, AX=D ove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 11 \\ 2 & 2 & 10 \\ 2 & 2 & 01 \\ 6 & 6 & 21 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6) Si risolvano i sistemi lineari AX=0, AX=C, AX=D ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

7) Si risolvano i sistemi lineari AX=0, AX=C, AX=D ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8) Si risolvano i sistemi lineari AX=0, AX=C, AX=D ove

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9) Si risolvano i sistemi lineari AX=0, AX=C, AX=D ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

10) Si risolvano i sistemi lineari AX=0, AX=C, AX=D ove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

11) Si risolvano i sistemi lineari AX=0, AX=C, AX=D ove

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 10 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

12) Si risolvano i sistemi lineari AX=0, AX=C, AX=D ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

13) Si risolvano i sistemi lineari AX=0, AX=C, AX=D ove

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 22 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

14) Si risolvano, al variare del parametro t, i sistemi lineari $A_tX=0$, $A_tX=C$ ove

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

15) Si risolvano al variare del parametro t, i sistemi lineari $A_tX=0$, $A_tX=C$, ove

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ t & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

16) Si risolvano al variare del parametro t, i sistemi lineari $A_tX=0$, $A_tX=C$, ove

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & t \\ t & 2t & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

17) Si risolvano al variare del parametro t, i sistemi lineari $A_tX=0$, $A_tX=C$ ove

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 3t & 0 & 2 \\ 3 & 2t & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

18) Si risolvano al variare del parametro i sistemi lineari $A_tX=0$, $A_tX=C$, ove

$$A_t = \begin{pmatrix} 6 & t \\ 2t & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Risposte

1) Il sistema AX=0 ha la sola soluzione X=0
Il sistema AX=C ha la sola soluzione

$$X = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Il sistema AX=D ha la sola soluzione

$$X = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Il sistema AX=0 ha la sola soluzione X=0
Il sistema AX=C ha la sola soluzione

$$X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -19 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Il sistema AX=D ha la sola soluzione

$$X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 30 \end{pmatrix}$$

3) Il sistema AX=0 ha la ∞^1 soluzioni

$$X = x_3\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_3 parametro arbitrario

Il sistema AX=C ha le ∞^1 soluzioni

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_3 parametro arbitrario.

Il sistema AX=D e incompatibile

4) Il sistema AX=0 ha le ∞^1 soluzioni

$$X = \frac{x_4}{7}\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_4 parametro arbitrario
Il sistema AX=C ha le ∞^1 soluzioni

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_4}{7}\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_4 parametro arbitrario
Il sistema AX=D è incompatibile

5) Una base per S_o insieme delle soluzioni di AX=0 è data dai vettori

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Una soluzione particolare del sistema AX=C è data dal vettore

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Il sistema AX=D è incompatibile

6) Il sistema AX=0 ha la sola soluzione X=0

Il sistema AX=C ha la sola soluzione

$$X = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 3/29 \\ -65 \\ 118 \\ 105 \end{pmatrix}$$

Il sistema AX=D ha la sola soluzione

$$X = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 1/29 \\ -86 \\ 124 \\ 130 \end{pmatrix}$$

7) Il sistema Ax=0 ha la sola soluzione X=0
Il sistema AX=C ha la sola soluzione

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Il sistema AX=0 ha la sola soluzione

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8) Una base per S_o insieme delle soluzioni di AX=0 e data dal vettore

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 512 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una soluzione particolare del sistema AX=C e data dal vettore

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema AX=D è incompatibile

9) Il sistema AX=0 ha le ∞^1 soluzioni

$$X = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

con x_1 parametro arbitrario.
Il sistema AX=C ha le ∞^1 soluzioni

$$X = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_1 parametro arbitrario.
Il sistema AX=D è incompatibile

10) Una base per S_o insieme delle soluzioni di AX=0 è data dal vettore

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una soluzione particolare del sistema AX=C è data da

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema AX=D e incompatibile

11) Il sistema AX=0 ha le ∞^2 soluzioni

$$X = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_3 e x_4 parametri arbitrari

Il sistema AX=C ha le ∞^2 soluzioni

$$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_3 e x_4 parametri arbitrari

Il sistema AX=D e incompatibile

12) Una base per S_0, insieme delle soluzioni del sistema AX=0 e costituito dai vettori

$$X_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una soluzione particolare per il sistema AX=C e data da

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una soluzione particolare per il sistema AX=D è data da

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

13) Il sistema AX=0 ha la sola soluzione X=0

Il sistema AX=C ha la sola soluzione

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Il sistema AX=D e incompatibile

14) Per $t \neq 2$ il sistema $A_t x=0$ ha la sola soluzione X=0 e il sistema $A_t X=C$ la sola soluzione

$$X = \frac{1}{4-2t} \begin{pmatrix} 4-t \\ -1 \end{pmatrix}$$

Per t=2 il sistema $A_t X=0$ ha le ∞^1 soluzioni date da

$$X = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_2 parametro arbitrario; il sistema $A_t X=C$ è invece incompatibile.

15) Per $t \neq 1$ il sistema $A_t X=C$ la sola soluzione

$$X = \frac{1}{2(t-1)^2} \begin{pmatrix} 2t-2 \\ 3t^2-7t+4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pet t=1 l'insieme S_0 delle soluzioni del sistema $A_t X=0$ ha una base costituita dal vettore

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

una soluzione particolare del sistema AX=C e data da

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

16) Per $t \neq 0,1$ il sistema AX=0 ha la sola soluzione X=0 e il sistema $A_t X=C$ la sola soluzione

$$X = \frac{1}{t^2-t} \begin{pmatrix} 8t^2 + 11t - 3 \\ 4t^2 - 5t + 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per t=0 il sistema $A_t X=0$ ha le ∞^1 soluzioni

$$X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con x_1 parametro arbitrario mentre il sistema $A_tX=C$ è incompatibile
Per t=1 il sistema $A_tX=0$ ha le ∞^1 soluzioni

$$X = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_3 parametro arbitrario e il sistema $A_tX=C$ ha le ∞^1 soluzioni

$$X = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_3 parametro arbitrario

17) Per ogni t il sistema $A_tX=0$ ha le ∞^2 soluzioni

$$X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5t/2 \\ -3t/2 \end{pmatrix}$$

Il sistema $A_tX=C$ ha le ∞^2 soluzioni

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5t/2 \\ -3t/2 \end{pmatrix}$$

18) Per $t \neq 2, 3$ il sistema $A_tX=0$ ha la sola soluzione X=0 mentre il sistema $A_tX=C$ è incompatibile
Per t=2 il sistema $A_tX=0$ ha la sola soluzione X=0 e il sistema $A_tX=C$ la sola soluzione

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per t=3 una base per S_0, insieme delle soluzioni del sistema $A_tX=0$ e data dal vettore

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

mentre il sistema $A_tX=C$ è incompatibile

Svolgimento

1) La matrice dei coefficienti del sistema è invertibile in quanto il suo determinante è diverso da zero. La sua matrice inversa è stata calcolata nell'esercizio 4 del paragrafo 2. "Le soluzioni dei tre sistemi sono allora uniche e valgono

$$X = A^{-1}0 = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 8 & -7 & -2 \\ -4 & 11 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}C = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 8 & -7 & -2 \\ -4 & 11 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}D = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 8 & -7 & -2 \\ -4 & 11 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oviamente allo stesso risultato si perviene adoperando la regola di Cramer; ad esempio nel caso del secondo sistema si ha

$$X = \left(\frac{|A_1|}{|A|}, \frac{|A_2|}{|A|}, \frac{|A_3|}{|A|} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{15} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \frac{1}{15} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \frac{1}{15} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{15}, \frac{8}{15}, -\frac{4}{15} \right)$$

2) La matrice dei coefficienti del sistema è invertibile in quanto il suo determinante è diverso da zero. L'inversa è stata calcolata nell'esercizio 4 del paragrafo 2. Le soluzioni dei tre sistemi sono allora uniche e valgono

$$X = A^{-1} D = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & -12 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} C = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & -12 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19/8 \\ 5/8 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} D = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & -12 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/8 \\ -3/8 \\ 15/4 \end{pmatrix}$$

Si osservi peraltro che il sistema e facilmente risolvibile per sostituzione e partendo dall'incognita x_3 che e subito individuata dalla terza equazione, ricavando poi x_2, infine x_1.

Procedendo invece con la regola di Cramer si ottiene nel caso del secondo sistema

$$X = \left(\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right) = \left(-\frac{19}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right)$$

e nel caso del terzo sistema

$$X = \left(\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 15 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 15 & 4 \end{vmatrix}, \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 15 \end{vmatrix}\right) = \left(-\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, \frac{15}{4}\right)$$

3) Il determinante di A e nullo, quindi A non è invertibile e pertanto non è applicabile la regola di Cramer. Il rango di A è 2 poiché il determinante della matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ottenuta dalle prime due righe e dalle prime due colonne è diverso da zero.
Pertanto la ∞^1 soluzioni del sistema omogeneo (che è sempre compatibile)

$$A\ X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 11x_3 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

si ottengono risolvendo il sistema ottenuto cancellando la terza equazione e portando a secondo membro i termini contenenti x_3 (che si considera fissato arbitrariamente):

$$A' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_3 \\ -11x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 = -11x_3 \end{cases}$$

Tenuto conto che $(A')^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

si ha

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in R$$

cosicché il sistema dato ha le ∞^1 soluzioni

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in R;$$

si osservi per altro che a tale risultato si perviene assai velocemente per sostituzione.
Per studiare il sistema

$$AX = C$$

dobbiamo innanzitutto verificarne la compatibilità. Poiché la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

formata con le prime due colonne di A (quelle che intervengono in A') e con C ha determinante nullo ne segue, per il teorema degli orlati, che (A/C) ha rango 2 e quindi il sistema e compatibile. Al fine di scrivere la soluzione di AX=C si consideri il sistema

$$A' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_3 + 2 \\ -11x_3 + 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 3x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 = 8 - 11x_3 \end{cases}$$

ottenuto cancellando la terza equazione di AX=C (i cui coefficienti non intervengono in A') e portando a secondo

membro i termini contenenti x_3 (i cui coefficienti non intervengono in A').
Tale sistema ha per ogni fissato x_3 l'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (A')^{-1} \begin{pmatrix} -3x_3 + 2 \\ -11x_3 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_3 + 2 \\ -x_3 + 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in R.$$

Quindi il sistema AX=C ha le ∞^1 soluzioni

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - x_3 \\ 1 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in R.$$

Infine il sistema AX=D è incompatibile poiche la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da zero e quindi (A/D) ha rango 3.

4) Poiche $|A|=0$ e $|A'|\neq 0$ con

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1^a,\ 2^a,\ 3^a \text{ riga},\ 1^a,\ 2^a,\ 3^a \text{ colonna})$$

il rango di A è 3. Si ha poi

$$(A')^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Le ∞^1 soluzioni del sistema omogeneo (e quindi certamente compatibile) AX=0 si ottengono risolvendo il sistema

$$A' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_4 \\ -2x_4 \\ -4x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -x_4 \\ x_2 + 2x_3 = -2x_4 \\ 3x_1 + x_3 = -4x_4 \end{cases}$$

(cancellare la quarta equazione e portare a secondo membro i termini in x_4, che si considera fissato arbitrariamente).
Si ha

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (A')^{-1} \begin{pmatrix} -x_4 \\ -2x_4 \\ -4x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -5/7 \\ 12/7 \\ -13/7 \end{pmatrix}$$

e quindi le ∞^1 soluzioni di AX=0 sono date da:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -5/7 \\ 12/7 \\ -13/7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 \in R.$$

Per studiare la compatibilita del sistema AX=C osserviamo che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 12 & 9 & 15 & 39 \end{pmatrix}$$

ottenuta con le prime tre colonne di A (quelle che intervengono in A') e con C, ha determinante nullo. Pertanto (A/C) ha rango 3 e quindi il sistema è compatibile. Al fine di scrivere le soluzioni di AX=C si consideri il sistema (ottenuto cancellando la quarta equazione e portando a secondo membro i termini in x_4 che al solito va pensato come fissato arbitrariamente):

$$A' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-x_4 \\ -2x_4 \\ 8-4x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 - x_4 \\ x_2 + 2x_3 = -2x_4 \\ 3x_1 + x_3 = 8-4x_4 \end{cases}$$

che ha, per ogni fissato $x_4 \in R$, la soluzione (regola di Cramer):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (A')^{-1} \begin{pmatrix} 5-x_4 \\ -2x_4 \\ 8-4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7}x_4 + 3 \\ \frac{12}{7}x_4 + 2 \\ -\frac{13}{7}x_4 - 1 \end{pmatrix};$$

quindi il sistema di partenza ha le ∞^1 soluzioni

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \frac{5}{7}x_4 \\ 2 + \frac{12}{7}x_4 \\ -1 - \frac{13}{7}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ +\frac{12}{7} \\ -\frac{13}{7} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 \in R.$$

Infine il sistema AX=D è incompatibile poiché la matrice formata con le prime tre colonne di A e con D

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 12 & 9 & 15 & 36 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da zero cosicché (A/D) ha rango 4.

5) Il determinante della matrice dei coefficienti è nullo. Inoltre detta, ad esempio A' la sottomatrice costituita della seconda e terza riga e terza e quarta colonna, il determinante di A' è diverso da zero mentre tutte le sue orlate hanno determinante eguale a zero. Le equazioni che non figurano in A' sono la prima e la quarta, le incognite invece la prima e la seconda.
La matrice inversa della matrice A', coincidendo questa con la matrice identità 2x2, è ancora la matrice identità 2x2.
Nel nostro caso essendo il rango di A eguale a 2 ed il sistema 4x4, una base per S_o, insieme delle soluzioni del sistema omogeneo sarà costituito da due vettori linearmente indipendenti. Poniamo allora:

$$x_1 = 1;\ x_2 = 0;\ C_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(C_1 è la colonna dei coefficienti di x_1) e risolviamo il sistema $A'X' = -C_1'$, ottenuto da $AX=-C_1$ cancellando prima e quarta equazione, prima e seconda incognite, cioè

$$\begin{cases} x_3 = -2 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

Pertanto un primo vettore in S_o è

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Poniamo poi

$$x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ C_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(C_2 è la colonna dei coefficienti di x_2) e risolviamo il sistema $A'X' = -C_2'$ ottenuto da $AX = -C_2$ come detto, cioè ancora:

$$\begin{cases} x_3 = -2 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

Pertanto un secondo vettore in S_o è

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

I vettori x_1 e x_2 costituiscono una base per S_o.
Studiamo ora la compatibilità del sistema col termine noto C.
Si tratta di controllare se A e (A/C) hanno lo stesso rango. Orlando A' con la colonna costituita C e con una qualsiasi altra riga di A si ottengono sempre sottomatrici a determinante nullo. Pertanto (A/C) e A hanno lo stesso rango e il sistema risulta compatibile.
Per costruire una soluzione particolare $\bar{X}$, poniamo $x_1=x_2=0$.
Risolviamo poi il sistema A'X'=C' ottenuto da quello di partenza cancellando la prima e la quarta equazione, la prima e la seconda incognita cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$X' = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Studiamo ora la compatibilità del sistema col termine noto

D. Si tratta di studiare il rango della matrice (A/D). Si osservi che la matrice che si ottiene orlando A' con D e con l'ultima riga di A, cioè la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da zero; pertanto essa ha rango 3 mentre A ha rango 2. Dunque (A/D) e A non hanno lo stesso rango e il sistema è incompatibile

6) La matrice dei coefficienti del sistema è invertibile in quanto il determinante è diverso da zero. L'inversa è stata calcolata nell'esercizio 4 del paragrafo 2. Le soluzioni dei tre sistemi sono uniche e valgono rispettivamente X=A⁻¹ 0=0

$$X = A^{-1} C = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 29 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & -6 \\ 0 & -7 & 2 & 10 \\ 0 & -5 & 18 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -65/29 \\ 118/29 \\ 105/29 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} D = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 29 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & -6 \\ 0 & -7 & 2 & 10 \\ 0 & -5 & 18 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -86/29 \\ 124/29 \\ 130/29 \end{pmatrix}$$

7) La matrice dei coefficienti del sistema è invertibile in quanto il determinante è diverso da zero. L'inversa è stata calcolata nell'esercizio 4 del paragrafo 2. Le soluzioni dei tre sistemi sono allora uniche e valgono rispettivamente X=A⁻¹ 0=0

$$X = A^{-1} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si osservi peraltro che il sistema, poiché la matrice dei

coefficienti è triangolare inferiore, è subito risolubile, per sostituzione in avanti, cioè ricavando prima x_1, dalla prima equazione poi sostituendo nella seconda equazione e ricavando x_2, sostituendo ancora i valori ottenuti di x_1 e x_2 nella terza e ricavando x_3 e così via.

8) Il determinante della matrice dei coefficienti è nullo D'altro canto la sottomatrice A' costituita dalle prime tre righe e dalle prime tre colonne ha determinante diverso da zero. Essa ha rango massimo. In A' non figurano i coefficienti della quarta equazione e della quarta incognita.
La matrice inversa della matrice A' è data dalla formula

$$(A')^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Poiché il rango di A è eguale a tre per avere una base di S_0, insieme delle soluzioni del sistema omogeneo, bastera trovare in S_0 un vettore non nullo. Poniamo allora:

$$x_4 = 1 \; ; \; C_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(C_4 è la colonna dei coefficienti di x_4) e risolviamo il sistema $A'X' = -C_4'$ che si ottiene da $AX = -C'$ cancellando l'ultima equazione e l'ultima incognita, cioè

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ha,

$$X_1 = (A')^{-1} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Pertanto un vettore non nullo in S_0 è

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Studiamo la compatibilità del sistema col termine noto C. Poiché la matrice che si ottiene da A' orlandola con C e con la quarta riga di A, cioè la matrice:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante nullo, ne segue subito che A e (A/C) hanno lo stesso rango. Pertanto il sistema e compatibile.
Per ottenere una soluzione particolare cominciamo col risolvere

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$X' = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pertanto si avrá

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Studiamo ora la compatibilità del sistema col termine noto D.
Si tratta di studiare il rango della matrice che si ottiene orlando A' con O e con l'ultima riga di A, cioè della matrice.

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è diverso da zero. Pertanto il rango di (A/D) è 4 mentre il rango di A è di 3. Pertanto il sistema non e compatibile

9) La matrice del sistema ha determinante nullo.
La sottomatrice A' costituita dalle ultime tre righe e dalle ultime tre colonne ha determinante non nullo. Essa pertanto costituisce una sottomatrice di rango massimo.
Si ha

$$(A')^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Studiamo il sistema omogeneo AX = 0
Cerchiamo le soluzioni del sistema ottenuto cancellando la prima equazione e portando a secondo membro la prima incognita. Si ha

$$\begin{cases} 2x_2 + x_4 = -3x_1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -4x_1 \end{cases}$$

e dunque le soluzioni sono date da

$$X' = (A')^{-1} \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 0 \\ -4x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 0 \\ -4x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

con x_1 arbitrario.
Le soluzioni del sistema AX=0 sono date allora da

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

con x_1 parametro arbitrario.
Per stabilire se il sistema AX = C e risolubile esaminiamo la matrice ottenuta orlando A' con C e con la prima riga di A, la matrice cioe

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Essa ha determinante nullo e pertanto il rango di A e di (A/C) sono eguali. Il sistema è dunque compatibile. Cerchiamo le soluzioni del sistema ottenuto da AX = C cancellando la prima equazione e portando a secondo membro la prima incognita. Si ha

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -3x_1 + 5 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -4x_1 + 5 \end{cases}$$

e dunque le soluzioni sono date da

$$X' = (A')^{-1}\begin{pmatrix} 3x_1 + 5 \\ 0 \\ -4x_1 + 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1+2 \\ x_1-2 \\ -x_1+1 \end{pmatrix}$$

con x_1 parametro arbitrario.
Le soluzioni del sistema AX = C sono date allora da

$$X = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_1 parametro arbitrario.
Per studiare la risolubilità del sistema col termine noto D, si osservi che la matrice ottenuta orlando A' con D e con la prima riga di A, la matrice cioè

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da zero. Pertanto il suo rango è 4. Poichè il rango di A è 3, ne segue subito che (A/D) e A hanno ranghi diversi e il sistema risulta così incompatibile.

10) La matrice A ha determinante nullo. La sottomatrice A' costituita dalle prime tre colonne e dalle ultime tre righe ha determinante diverso da zero. Pertanto A' è di rango massimo. In essa non figurano i coefficienti della prima equazione e dell'ultima incognita.

Si ha

$$(A')^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 6 & 0 & -3 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Una base per S_o, insieme delle soluzioni del sistema omogeneo sarà data da un vettore in S_o non nullo. Per determinarne uno, poniamo

$$x_4 = 1, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(C_4 è la colonna dei coefficienti di x_4) e risolviamo il sistema $A'X' = -C'_4$ che si ottiene da $AX = -C_4$ cancellando l'ultima incognita e la prima equazione il sistema cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Si ha così

$$X_1' = (A')^{-1}\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 6 & 0 & -3 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e una base per S_o è data da

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per stabilire la risolubilità del sistema, col termine noto C, esaminiamo la matrice ottenuta orlando A' con C e con la prima riga di A, cioè la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Il suo determinante è nullo e pertanto A' è sottomatrice di rango massimo anche per (A/C). Ciò implica che i ranghi di A e di (A/C) coincidono e pertanto il sistema è incompatibile.

Per costruire una soluzione particolare, poniamo $x_4 = 0$ e risolviamo il sistema $A'X' = C'$ che si ottiene da $AX = C$ cancellando la prima equazione e l'ultima incognita, cioe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Si avra

$$X' = (A')^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 6 & 0 & -3 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e una soluzione particolare sarà data da

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per stabilire la risolubilità del sistema relativamente al termine noto D, esaminiamo la matrice che si ottiene orlando A' con la prima riga di A e con D, cioé la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il suo determinante é diverso da zero. Pertanto il rango di (A/D) e 4 mentre il rango di A e 3 e il sistema risulta incompatibile

11) Il determinante della matrice A é nullo. La sottomatrice A', costituita dalle prime due righe e dalle prime due colonne ha determinante diverso da zero e orlate a determinante nullo; essa pertanto é di rango massimo. Si ha

$$(A')^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Studiamo il sistema omogeneo.
Cerchiamo le soluzioni del sistema ottenuto cancellando

le ultime due equazioni e portanto a secondo membro le ultime due incognite. Si ha

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 = -2x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

e dunque le soluzioni sono date da

$$X' = (A')^{-1} \begin{pmatrix} -x_3 \\ -2x_3 - 2x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_3 \\ -2x_3 - 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 - 3x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

con x_3 e x_4 parametri arbitrari
Le soluzioni del sistema AX=0 sono date allora da

$$X = \begin{pmatrix} -x_3 - 3x_4 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_3 e x_4 parametri arbitrari.
Per stabilire se il sistema col termine noto C é compatibile, esaminiamo le 2 matrici che si ottengono da A' orlandola prima con la terza riga di A e con C, poi con la quarta riga e con C. Entrambe hanno determinante nullo. Pertanto A e (A/C) hanno lo stesso rango e il sistema é compatibile.
Per calcolare le soluzioni, cerchiamo prima le soluzioni del sistema ottenuto da AX = C cancellando le ultime due equazioni e portando a secondo membro le ultime due incognite. Si ha

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 - x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 10 - 2x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

e dunque le soluzioni sono date da

$$X' = (A')^{-1} \begin{pmatrix} 5-x_3 \\ 10-2x_3-2x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5-x_3 \\ 10-2x_3-2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-x_3-3x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

con x_3 e x_4 parametri arbitrari. Le soluzioni del sistema AX=C sono date allora da

$$X = \begin{pmatrix} 5-x_3-3x_4 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_3 e x_4 arbitrari.
Per studiare la compatibilità del sistema AX=D si osservi che orlando A' con D e con la terza riga di A si ottiene una matrice a determinante diverso da zero. Poichè allora il rango di A e di (A/D) risultano diversi, il sistema non è compatibile.

12) Il sistema è a 4 incognite e due equazioni.
Poichè, ad esempio, la sottomatrice A' di A costituita dalle prime due righe e dalle prime due colonne ha determinante diverso da zero. Essa pertanto è di rango massimo
L'inversa di A' è data da

$$(A')^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Una base per S_o, insieme delle soluzioni del sistema omogeneo sarà data da due vettori in S_o linearmente indipendenti.
Per costruirli poniamo

$$x_3 = 1,\ x_4 = 0\ C_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(C_3 è la colonna dei coefficienti di x_3) e risolviamo il sistema $A'X' = -C'_3$ ottenuto da $AX = -C_3$ cancellando terza e quarta incognita cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$X'_1 = (A')^{-1} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Pertanto un primo vettore in S_o è

$$X_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare un secondo vettore poniamo

$$x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ C_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(C_4 è la colonna dei coefficienti di x_4) e risolviamo il sistema $A'X' = -C'_4$ ottenuto da $AX = -C_4$ cancellando terza e quarta incognita, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$X'_2 = (A')^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Pertanto un secondo vettore X_2 in S_o è

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I vettori X_1 e X_2 formano una base per S_o.
Ovviamente il sistema ammette soluzioni qualsivoglia sia il termine noto. Per trovare una soluzione particolare relativa a C poniamo $x_3=x_4=0$ e risolviamo il sistema A'X'=C' ottenuto da AX=C cancellando la terza e la quarta incognita, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$X' = (A')^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare una soluzione particolare relativa a D poniamo $x_3=x_4=0$ e risolviamo il sistema A'X'=C' ottenuto da AX=C cancellando la terza e quarta incognita cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$X' = (A')^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

13) Il sistema è a due incognite e tre equazioni. La matrice A ha rango 2; la sottomatrice A' costituita dalle ultime due righe e dalle due colonne esistenti ha determinante diverso da zero, pertanto è di rango massimo. Si ha

$$(A')^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

Il sistema omogeneo ha, essendo il rango di A eguale a 2, come unica soluzione quella nulla.
Per studiare la risolubilità del sistema col termine noto C esaminiamo la matrice ottenuta orlando A' con C e con la prima riga di A, la matrice cioè

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 10 \\ 3 & 2 & 5 \\ 9 & 5 & 17 \end{pmatrix}$$

Il suo determinante è nullo. Pertanto il rango di A e di (A/C) coincidono e il sistema è compatibile.

Per costruire la soluzione $\bar{X}$ (unica) basta risolvere il sistema A'X'=C' ottenuto da AX cancellando la prima equazione, cioè

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$\bar{X} = (A')^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Per studiare la risolubilità del sistema col termine noto D esaminiamo la matrice ottenuta orlando A' con D e con la prima riga di A

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 9 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

Il suo determinante è diverso da zero; pertanto il rango di (A/D) è 3 mentre il rango di A è 2, sicchè il sistema risulta incompatibile.

14) Calcoliamo il determinante della matrice A_t. Esso vale $|A_t| = 4-2t$ e pertanto si annulla solo per t=2. Escludendo il valore t=2, A_t^{-1} esiste e si ha

$$A_t^{-1} = \frac{1}{4-2t} \begin{pmatrix} 4 & -t \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

sicchè per $t \neq 2$ il sistema omogeneo ha l'unica soluzione nulla e il sistema col termine noto C ha come unica soluzione il vettore

$$X = A_t^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4-2t} \begin{pmatrix} 4 & -t \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4-2t} \begin{pmatrix} 4-t \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pet t=2 la matrice A_t si trasforma in

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Il sistema omogeneo è dunque

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ cioè } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2(x_1 + x_2) = 0 \end{cases}$$

Esso ammette pertanto le ∞^1 soluzioni date da

$$X = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_2 parametro arbitrario.
Il sistema col termine noto C non è compatibile in quanto, ad esempio, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da zero.
(Si osservi anche più semplicemente che se fosse $x_1+2x_2=1$ si dovrebbe avere allora necessariamente $2(x_1+2x_2)=2$)

15) Calcoliamo il determinante della matrice A_t. Esso vale (si sviluppi secondo la terza colonna)

$$|A_t| = t\ (2t-2) + 2-2t = 2(t-1)^2$$

Esso si annulla pertanto solo per il valore t=1. Escludendo tale valore, A_t^{-1} esiste e si ha

$$A_t^{-1} = \frac{1}{2(t-1)^2} \begin{pmatrix} 2 & 2t-2 & -2t \\ -t & 1-t & t^2 \\ 2t-2 & 0 & 2-2t \end{pmatrix}$$

sicchè per $t \neq 1$ il sistema omogeneo ha l'unica soluzione nulla e il sistema col termine noto C ha come unica soluzione il vettore

$$X = A_t^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2(t-1)^2} \begin{pmatrix} 2 & 2t-2 & -2t \\ -t & 1-t & t^2 \\ 2t-2 & 0 & 2-2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2(t-1)^2} \begin{pmatrix} 2t-2 \\ 3t^2-7t+4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per t=1 la matrice A_t diviene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

con determinante nullo.
La sottomatrice A' costituita dalle prime due righe e dalle ultime due colonne ha determinante diverso da zero e pertanto ha rango massimo. In essa non figurano i coefficienti di x_1.

$$(A')^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Per individuare un vettore non nullo che costituisca una base in S_0, poniamo

$$x_1=0, \quad C_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e risolviamo il sistema che si ottiene da $AX=-C_1$ cancellando la terza equazione e l'ultima incognita. Si ha

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_2 = -1 \end{cases}$$

e cioè

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema col termine noto C è compatibile in quanto la matrice costituita dalle ultime due colonne di A_t e da C ha determinante nullo (ha due righe eguali).
Per costruire una soluzione particolare $\tilde{X}$ poniamo $x_1=0$ e risolviamo il sistema $A'X'=C'$ che si ottiene da $A_1X=C$

cancellando la terza equazione e la prima incognita, cioè

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$X' = (A')^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

16) Calcoliamo il determinante della matrice A_t. Esso vale (si sviluppi secondo la terza colonna) $|A_t| = t^2-t$; pertanto si annulla per t=0 e t=1. Escludendo questi due valori A_t è invertibile e si ha

$$A_t^{-1} = \frac{1}{t^2-t} \begin{pmatrix} 2t & 3t-3 & 2t^2 \\ -t & 1-t & t^2 \\ t & 0 & -t \end{pmatrix}$$

Pertanto il sistema omogeneo ha l'unica soluzione nulla e il sistema con termine noto C ha come soluzione

$$X = A_t^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2-t} \begin{pmatrix} 2t & 3t-3 & 2t^2 \\ -t & 1-t & t^2 \\ t & 0 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2-t} \begin{pmatrix} 8t^2+1/t-3 \\ 4t^2-5t+1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per t=0 la matrice A_t diviene

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e la sottomatrice A' costituita dalle ultime due colonne e dalla prima e terza riga ha determinante diverso da zero e pertanto è di rango massimo.
Per trovare le soluzioni del sistema omogeneo risolviamo

il sistema che si ottiene cancellando la seconda equazione e portando a secondo membro l'incognita x_1 cioè il sistema

$$\begin{cases} 3x_2 = -x_1 \\ 3x_2 + x_3 = -x_1 \end{cases}$$

Esso ha le ∞^1 soluzioni

$$X' = \begin{pmatrix} -x_1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con x_1 parametro arbitrario.
Il sistema $A_0X=0$ ha allora le ∞^1 soluzioni

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1/3 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con x_1 parametro arbitrario
Il sistema col termine noto C è incompatibile in quanto la matrice ottenuta orlando A' con C e con la prima riga di A_0 ha determinante diverso da zero e quindi (A_0/C) e A_0 hanno ranghi diversi.
Per t=1 la matrice A_t diviene

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e la sottomatrice A' costituita dalle prime due righe e dalle prime due colonne ha determinante diverso da zero. Essa risulta pertanto di rango massimo.
Per trovare le soluzioni del sistema omogeneo cominciamo col risolvere il sistema che si ottiene da AX=0 cancellando la terza equazione e portando a secondo membro l'incognita x_3, cioè il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -x_3 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Esso ha le ∞^1 soluzioni

$$x' = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

con x_3 parametro arbitrario
Il sistema $A_1X=0$ ha allora le ∞^1 soluzioni

$$X = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_3 parametro arbitrario.
Il sistema $A_1X=C$ è compatibile in quanto l'orlata di A' ottenuta con C e la terza riga di A_1 ha determinante nullo e quindi A_1 e (A_1/C) hanno lo stesso rango.
Le soluzioni si ottengono risolvendo il sistema che si ottiene da $A_1X=C$ cancellando la terza equazione e portando a secondo membro l'incognita x_3, cioè il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -x_3 + 4 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

che ammette le ∞^1 soluzioni

$$X' = \begin{pmatrix} 2x_3-5 \\ -x_3+3 \end{pmatrix}$$

con x_3 parametro arbitrario
Il sistema $A_1X=C$ ha allora le ∞^1 soluzioni

$$X = \begin{pmatrix} 2x_3-5 \\ -x_3+3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

17) La sottomatrice A' costituita dalle ultime due colonne e dalle due righe esistenti ha determinante sempre diverso da zero, ed è pertanto di rango massimo. Per ottenere le soluzioni del sistema omogeneo, cominciamo a risolvere il sistema che si ottiene da $A_tX=0$ portando le incognite x_1 e x_2 a secondo membro, il sistema cioè

$$\begin{cases} 2x_4 = -x_1 - 3tx_2 \\ x_3 + 3x_4 = -3x_1 - 2tx_2 \end{cases}$$

le soluzioni sono ∞^2 e valgono

$$X' = \begin{pmatrix} (-3x_1 + 5tx_2)/2 \\ (-x_1 - 3tx_2)/2 \end{pmatrix}$$

con x_1 e x_2 parametri arbitrari

Il sistema $A_tX=0$ ammette pertanto le ∞^2 soluzioni

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ (-3x_1+5tx_2)/2 \\ (-x_1 - 3tx_2)/2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5t/2 \\ -3t/2 \end{pmatrix}$$

con x_1 e x_2 parametri arbitrari.
Il sistema è sempre compatibile.
Per ottenere le soluzioni di $A_tX=C$, cominciamo col risolvere il sistema che si ottiene da $A_tX=C$ portando a secondo membro le incognite x_1 e x_2, cioè il sistema

$$\begin{cases} 2x_4 = 3 - x_1 - 3tx_2 \\ x_3 + 3x_4 = 2 - 3x_1 - 2tx_2 \end{cases}$$

Le soluzioni sono ∞^2 e valgono

$$X' = \begin{pmatrix} (-5 - 3x_1 + 5tx_2)/2 \\ (3-x_1-3tx_2)/2 \end{pmatrix}$$

con x_1 e x_2 parametri arbitrari
Il sistema $A_tX=C$ ammette pertanto le ∞^2 soluzioni

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ (-5-3x_1+5tx_2)/2 \\ (3-x_1-3tx_2)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

18) La matrice A_1 ha due sottomatrici 2x2; la sottomatrice A'_1

costituita dalle prime due righe e dalle due colonne esistenti e la sottomatrice A''_t costituita con le ultime due righe. I determinanti valgono

$$|A_t'| = -2t^2 - 18 = -2\left(t^2-9\right) \qquad |A_t''| = 2t - 6 = 2\left(t-3\right)$$

Il primo determinante si annulla per t=3 e t=-3, il secondo per t=3. Pertanto per $t\neq3$ almeno uno di essi (esattamente A''_t) é diverso da zero. Pertanto S_0 é per $t\neq3$ costituito dal solo vettore nullo, mentre il sistema é compatibile col termine noto C se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} 6 & t & 2 \\ 2t & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante eguale a zero.
Tale determinante vale $(t-2)(2t-6)$. Esso pertanto è compatibile (si ricordi che $t\neq3$) quando t=2. In tal caso una soluzione la si ottiene risolvendo, ad esempio, (si scriva A'_t per t=2)

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Poiché

$$\left(A_2'\right)^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

si ha

$$X = \left(A_2'\right)^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per t=3 la matrice A_t diviene

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

L'insieme S_0 ha una base costituita da un solo vettore. Si può ottenere un vettore X_1 in tale base risolvendo ad esempio l'equazione

$$2x_1 + x_2 = 0$$

Si ha così

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Il sistema col termine noto C e incompatibile in quanto la matrice A_3 ha rango 1 mentre la matrice che si ottiene aggiungendo ad A_3 il vettore colonna C ha rango 2 (esiste almeno una sottomatrice 2x2 a determinante diverso da zero: si prenda ad esempio la sottomatrice costituita dalle prime due righe e dalle ultime due colonne mentre tutte le sottomatrici 2x2 di A_3 hanno determinante nullo).

4. Autovalori e autovettori

Poichè un autovalore reale di una matrice quadrata A è un numero reale λ tale che il sistema $(A-\lambda I)\,X=0$ (I è la matrice identità) ammette soluzioni non nulle, dette autovettori, gli autovalori stessi saranno tutti e solo quei numeri tali da rendere non invertibile la matrice $A-\lambda I$ e pertanto saranno le soluzioni (reali) dell'equazione in λ $|A-\lambda I|=0$ (equazione secolare). Gli autovettori relativi ad un autovalore λ si possono ottenere risolvendo il sistema $(A-\lambda I)X=0$.

L'insieme degli autovettori relativi a un determinato autovalore ovviamente costituisce uno spazio vettoriale.

Si individuino autovalori e autovettori delle seguenti matrici:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

7) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

8) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

9) $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 9 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

10) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Risposte

Nelle risposte ad ogni autovalore seguono gli autovettori corrispondenti (o più precisamente una base per lo spazio degli autovettori corrispondenti)

1) $1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $2, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $0, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $3, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) nessun autovalore

4) $1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5) $1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6) $1, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

7) $2, \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/4 \end{pmatrix}$; $6, \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $1, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

8) $3, \begin{pmatrix} 1 \\ 5/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$; $2, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $-2, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

9) $4, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8/3 \end{pmatrix}$

10) $1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

11) $3, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

12) $1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Svolgimento

1) Esplicitando l'equazione $|A-\lambda I|=0$ si deve risolvere l'equazione $(1-\lambda)(2-\lambda)=0$ che ha come soluzioni i numeri 1 e 2. Tali numeri costituiscono gli autovalori. Cercando le soluzioni del sistema lineare $(A-\lambda I)X=0$ prima con $\lambda=1$ e poi con $\lambda=2$ si è ricondotti a risolvere i sistemi

$$\begin{cases} 4x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_1 + 4x_2 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

che hanno rispettivamente come soluzioni i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con t arbitrario. Pertanto i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

costituiscono ciascuno una base per lo spazio degli autovettori relativi rispettivamente a 1 e 2.

2) Esplicitando l'equazione $|A-\lambda I|=0$ si ha da risolvere l'equazione $(1-\lambda)(2-\lambda)-2=0$ cioè $\lambda^2-3\lambda=0$ che ha come soluzioni i numeri 0 e 3. Tali numeri sono gli autovalori. Cercando le soluzioni del sistema lineare $(A-\lambda I)X=0$ prima per $\lambda=0$ poi per $\lambda=3$ si è ricondotti a risolvere i sistemi

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

che hanno rispettivamente come soluzioni i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con t arbitrario. Pertanto i vettori

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

costituiscono ciascuno una base per lo spazio degli autovettori relativi rispettivamente a 0 e 3.

3) Esplicitando l'equazione $|A-\lambda|=0$ si ha da risolvere l'equazione $(2-\lambda)(3-\lambda)+9=0$ cioè $\lambda^2-5\lambda+15=0$ che non ha soluzioni reali. Non esistono quindi autovalori

4) Esplicitando l'equazione $|A-\lambda I|=0$ si ha da risolvere l'equazione $(1-\lambda)^2=0$ che ha come soluzioni $\lambda=1$. Cercando le soluzioni del sistema $(A-\lambda I)X=0$ per $\lambda=1$ si perviene al sistema

$$\begin{cases} 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

che ha ovviamente come soluzioni un qualunque vettore di R^2. Pertanto una base relativa all'autovettore 1 sarà costituita da una qualunque base di IR^2 ad esempio dai vettori:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5) Esplicitando l'equazione $|A-\lambda I|=0$ si ha da risolvere l'equazione $(1-\lambda)^2=0$ che ha come soluzioni $\lambda=1$. Cercando le soluzioni del sistema $(A-\lambda I)X=0$ per $\lambda=1$ si perviene al sistema

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni i vettori del tipo $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ con t arbitrario.
Pertanto il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una base per lo spazio degli autovettori.

6) Esplicitando l'equazione $|A-\lambda I|=0$ si perviene all'equazione $(1-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)=0$ che ha come soluzioni $\lambda=3$ e $\lambda=1$. Cercando le soluzioni del sistema $(A-\lambda I)X=0$ prima per $\lambda=1$ e poi con $\lambda=3$ si perviene ai sistemi

$$\begin{cases} 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \\ 2\cdot x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_1 = 0 \\ 2x_1 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

che hanno come soluzioni rispettivamente i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

con t arbitrario. Pertanto i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

costituiscono ciascuno una base per lo spazio degli autovettori relativi rispettivamente a 1 e 3.

7) Esplicitando l'equazione $|A-\lambda I|=0$ (si sviluppi il determinante secondo la prima riga col teorema di Laplace) si perviene alla equazione $(2-\lambda)\ |(3-\lambda)(4-\lambda)-6|=0$ cioè $(2-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+\lambda)=0$ che ha come soluzioni $\lambda=2$, $\lambda=6$, $\lambda=1$. Cercando le soluzioni del sistema $(A-\lambda I)X=0$ per $\lambda=2$, $\lambda=6$, $\lambda=1$, si perviene ai tre sistemi

$$\begin{cases} 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4x_1 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

che hanno come soluzioni rispettivamente i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} t \\ -t/2 \\ -t/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t \end{pmatrix}$$

con t arbitrario. Pertanto i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

costituiscono ciascuno una base per lo spazio degli autovettori relativi rispettivamente a 2, 6, 1.

8) Esplicitando l'equazione $|A-\lambda I|=0$ (si sviluppi il determinante secondo la terza riga col teorema di Laplace) si perviene all'equazione $(3-\lambda)(\lambda^2-4)=0$ che ha come soluzioni $\lambda=3$, $\lambda=2$, $\lambda=-2$.
Cercando le soluzioni del sistema $(A-\lambda I)X=0$ per $\lambda=3$, 2, -2 si perviene ai tre sistemi

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_3 = 0 \end{cases}$$

che hanno rispettivamente come soluzioni i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} t \\ (8/7)\,t \\ (5/7)\,t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}$$

con t arbitrario. Pertanto i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 8/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

costituiscono ciascuno una base per lo spazio degli autovettori rispettivamente relativi a 3, 2, −2.

9) Esplicitando l'equazione $|A-\lambda I|=0$ (si sviluppi il determinante secondo l'ultima riga col teorema di Laplace) si perviene all'equazione $(4-\lambda)(\lambda^2+16)=0$ che ha come unica soluzione reale $\lambda=4$. Cercando le soluzioni del sistema $(A-\lambda I)\ X=0$ per $\lambda=4$ si perviene al sistema

$$\begin{cases} -4x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} 5t \\ t \\ (8/3)\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$

con t arbitrario. Pertanto una base per lo spazio degli autovettori è costituita dal vettore

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$

10) Esplicitando l'equazione $|A-\lambda I|=0$ si perviene a $(1-\lambda)^3=0$ che ha come unica soluzione $\lambda=1$. Cercando le soluzioni del sistema $(A-\lambda I)\ X=0$ per $\lambda=1$ si perviene al sistema

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni tutti i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_1 e x_3 arbitrari. Pertanto una base per lo spazio degli autovettori è costituito da:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

11) Esplicitando l'equazione $|A-\lambda I|=0$ (si sviluppi il determinante secondo la seconda riga col teorema di Laplace), si perviene all'equazione $(3-\lambda)(\lambda^2+4)=0$ che ha l'unica soluzione reale $\lambda=3$. Cercando le soluzioni del sistema $(A-\lambda I)\ X=0$ per $\lambda=3$ si perviene al sistema

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_3 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con t arbitrario sicché una base per lo spazio degli autovettori è costituita dal vettore

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

12) Esplicitando l'equazione $|A-\lambda I|=0$ (si sviluppi il determinante secondo la seconda riga col teorema di Laplace) si ha l'equazione $(1-\lambda)\ (\lambda^2-2\lambda+-7)=0$ che ha l'unica soluzione reale $\lambda=1$. Cercando le soluzioni del sistema $(A-\lambda I)\ X=0$ per $\lambda=1$ si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2x_3 = 0 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni i vettori del tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con t arbitrario. Pertanto una base per lo spazio degli autovettori è costituito dal vettore

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Il metodo di eliminazione di Gauss

Il metodo di eliminazione di Gauss, per la soluzione dei sistemi lineari consiste nel riportarsi, operando sulle equazioni del sistema secondo un meccanismo ben definito, a sistemi che ammettono le stesse soluzioni di quelli di partenza ma di forma, più semplice (matrici a scalino) e rapidamente risolvibili per sostituzione successive all'indietro, (cominciando cioè dall'ultima incognita).

5.1 Matrici a scalino

Una matrice A a m righe ed n colonne si dice *a scalino* se esiste un numero k con $k \leq m$ tale che

i) le righe di indice maggiore strettamente di k sono tutte nulle;

ii) fissata una qualsiasi riga tra le prime k su di essa vi è un elemento $a_{ij}=1$;

iii) la sottomatrice di A costituita dalla riga i-ma e dalle righe successive, dalla colonna j-ma e dalle precedenti ha tutti gli elementi nulli tranne a_{ij};

cioè se esistono un numero k con $k \leq m$ e k numeri $d_1, \ldots d_k$ con $1 \leq d_1 < d_2 < \ldots < d_k \leq n$ tali che

i) le righe di indice maggiore strettamente di k sono tutte nulle

ii) l'elemento di posto d_i sulla riga di indice i vale 1

iii) gli elementi sulla riga i che precedono quello di posto d_i sono nulli

iv) gli elementi che sulla colonna d_i seguono quello di posto i sono nulli.

Si osservi che il numero k è proprio il rango di A.

Così ad esempio sono a scalino le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non sono a scalino le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si dicono operazioni elementari (rispettivamente di I, II, III tipo) le seguenti operazioni effettuate sulle righe di una matrice

I) Scambio di due righe tra loro
II) Moltiplicazione di una riga per una costante diversa da zero
III) Addizione ad una riga di un'altra (da essa distinta) moltiplicata per una costante

Una matrice $\tilde{A}$ che è ottenuta da una matrice A attraverso un numero finito di operazioni elementari di riga si dice ad essa equivalente.

Il metodo di Gauss consente, se A è non nulla, di costruire una matrice a scalino $\tilde{A}$ ad essa equivalente.

Esso consiste nello scorrere le colonne di A, nell'ordine dall'alto in basso arrestandosi al primo elemento non nullo nel dividere la riga su cui è tale elemento per l'inverso dell'elemento stesso, nell'utilizzare attraverso operazioni elementari di terzo tipo, tale riga per annullare gli elementi delle righe sottostanti di medesima posizione di tale elemento non nullo; nello scambiare tale riga con la prima.

Il procedimento si itera poi sulla matrice così ottenuta a partire dalla seconda riga.

Si consideri così ad esempio la matrice (non a scalino)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La prima colonna è tutta nulla: il primo elemento non nullo (un due) è sulla seconda colonna in seconda posizione.

Dividiamo allora la seconda riga per 2; si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sulla seconda colonna in terza posizione e in quarta vi sono elementi non nulli. Usiamo allora la seconda riga per annullarli. Sommiamo alla terza riga la seconda moltiplicata per -1. Si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sommiamo ancora alla quarta riga la seconda moltiplicata per - 3; si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Scambiamo ora la seconda riga con la prima; si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Iteriamo il procedimento a partire dalla seconda riga. Il primo elemento non nullo si trova sulla terza colonna

in seconda posizione e vale già 1. Pertanto non occorre dividere la seconda riga per costanti. Aggiungiamo alla terza riga la seconda; si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Aggiungiamo alla quarta riga la seconda moltiplicata per 2; si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

non occorre ora effettuare scambi.

Iteriamo il procedimento a partire dalla terza riga. Il primo elemento non nullo è sulla quarta colonna e vale già 1.

Sommiamo alla quarta riga la terza moltiplicata per 2; si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tale matrice è a scalino e il procedimento è concluso.

Si risolvano i seguenti esercizi

1) Si dica se le seguenti matrici sono a scalino

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Si trovino delle matrici a scalino equivalenti alle seguenti (col metodo di Gauss)

a) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Risposte

1) a) sì b) no c) sì

d) sì e) no f) sì

2) a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 12/13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Svolgimenti

1) a) La matrice è a scalino (si ponga nella definizione $k=3$ $d_1=1$ $d_2=3$ $d_3=4$)

b) La matrice non e a scalino (lo sarebbe se l'elemento sulla seconda riga e sulla seconda colonna fosse un 1)

c) La matrice è a scalino (si ponga nella definizione $k=3$ $d_1=1$ $d_2=2$ $d_3=4$)

d) La matrice è a scalino (si ponga nella definizione $k=2$ $d_1=3$ $d_2=4$)

e) La matrice non e a scalino (ad esempio la prima riga è tutta nulla)

f) La matrice è a scalino (si ponga nella definizione $k=3$ $d_1=2$ $d_2=5$ $d_3=6$)

2) a) Il primo elemento non nullo sulla prima colonna è situato sulla terza riga. Trasformiamo in zero il quarto elemento della prima colonna sommando alla quarta riga la terza moltiplicata per -1. Si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 6 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Dividiamo per 2 la terza riga. Si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Scambiamo la terza riga con la prima. Si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Non consideriamo nella matrice ottenuta la prima riga e cerchiamo il primo elemento non nullo sulla seconda colonna ma a partire dalla seconda riga. Lo si trova proprio sulla seconda riga. Dividiamo la seconda riga per 3. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Annulliamo il terzo elemento sulla seconda colonna addizionando alla terza colonna la seconda moltiplicata per -2. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Annulliamo il quarto elemento sulla seconda colonna addizionando alla quarta colonna la seconda moltiplicata per 8. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Si osservi che sulla prima colonna non vi sono elementi non nulli. Si esamini allora la seconda colonna. Sulla seconda riga si ha un elemento non nullo. Trasformiamo in zero il terzo elemento della seconda colonna addizionando alla terza riga la seconda moltiplicata per -2. Si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Dividiamo ora la seconda riga per 1. Si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Scambiamo ora la seconda riga con la prima. Si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Ripetiamo il procedimento non considerando la prima riga. Il primo elemento non nullo è sulla quarta colonna e sulla seconda riga. Dividiamo tale riga per 3. Si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Trasformiamo in 0 il terzo elemento della quarta colonna, addizionando alla terza riga la seconda moltiplicata per 4. Si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13/3 \end{pmatrix}$$

Ripetiamo il procedimento non considerando le prime due righe. Basterà allora dividere la terza per 13/3. Si ottiene così la matrice a scalino

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ripetiamo il procedimento non considerando la prima riga. Il primo elemento non nullo si trova sulla seconda colonna in terza riga. Dividiamo la terza riga per 13/3. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12/13 \end{pmatrix}$$

Scambiamo infine la seconda e la terza riga così da ottenere la matrice a scalino

c) Sulla prima colonna vi è in corrispondenza della prima riga un elemento non nullo. Dividiamo tale prima riga per 3. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Addizioniamo alla terza riga la seconda moltiplicata per -2. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13/3 & 4 \end{pmatrix}$$

d) Il primo elemento non nullo sulla prima colonna è anche sulla prima riga. Dividendo tale riga per 3 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Addizionando alla seconda riga la prima moltiplicata per -1 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Addizionando alla terza riga la seconda moltiplicata per -6 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ripetiamo il procedimento non considerando la prima riga. Il primo elemento non nullo è sulla seconda colonna e sulla seconda riga. Dividiamo tale riga per 2. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Addizionando alla terza riga la prima moltiplicata per -2 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dividendo l'ultima riga per -1, si ottiene la matrice a scalino

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.2 Sistemi a scalino

Lo studio di un sistema a scalino, di un sistema cioè AX=C la cui matrice dei coefficienti è a scalino, è immediato.

Siano infatti k il numero delle righe non nulle di A e $d_1, \ldots, d_k$ i numeri che figurano nella definizione.

Se k=m=n, cioè se A è quadrata e di rango k=m allora $d_1=1$, $d_2=2$, ... $d_k=k$ necessariamente.

Il sistema è sempre risolubile, ha soluzione unica e può essere risolto per sostituzioni successive all'indietro, ricavando cioè prima x_k dall'equazione k-sima (che è una identità) sostituendolo nella (k-1)-sima equazione, ricavando x_{k-1}, da questo, sostituendo x_k e x_{k-1} nella (k-2)-sima equazione, ricavando x_{k-2} e così via.

Se k<m per stabilire se il sistema AX=C è compatibile basta controllare che C non abbia elementi diversi da zero in posti successivi al k-simo.

Se il sistema risulta compatibile per trovare una soluzione (particolare) basterà porre eguali a zero tutte le incognite diverse da $x_{d_1}, \ldots, x_{d_k}$ (non necessariamente ora coincidenti con $x_1, \ldots, x_k$) e ricavare queste ultime risolvendo il sistema A'X'=C' di k equazioni e k incognite con A' matrice a scalino di rango k.

Se il sistema risulta compatibile, usando il metodo parametrico, le soluzioni si ottengono risolvendo come prima indicato il sistema di k equazioni in k incognite ottenuto cancellando le ultime m-k equazioni e portando a secondo membro i termini contenenti le n-k incognite diverse da $x_{d_1}, \ldots, x_{d_k}$.

Tali incognite vengono così trattate come dei parametri reali fissabili arbitrariamente.

A titolo di esempio risolviamo il sistema AX=C con A e C dati da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ha k=2, $d_1=1$, $d_2=4$. Il sistema è compatibile perche

la terza componente di C è nulla. Le incognite da scegliere come parametri sono x_2 e x_3. Si ha allora

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 = -2x_2 - 3x_3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Si ottiene così sostituendo x_4 nella prima equazione che le soluzioni del sistema si possono esprimere come

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con x_2 e x_3 qualsiasi.

Utilizzando il metodo vettoriale, se il sistema è compatibile, l'insieme delle sue soluzioni S si serve come $\bar{X} + S_0$ ove $\bar{X}$ è una soluzione particolare e S_0 è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo. Esso sarà allora completamente descritto quando sarà nota una soluzione particolare e una base per S_0.

Per trovare una soluzione particolare $\bar{X}$ basterà porre eguali a zero tutte le incognite diverse da $x_{d_1}, \dots, x_{d_k}$ e ricavare queste ultime risolvendo il sistema A'X'=C' a k equazioni e k incognite con A' matrice a scalino di rango k ottenuta da AX=C eliminando le incognite distinte da $x_{d_1}, \dots, x_{d_k}$ e le ultime m-k equazioni.

Tale sistema è risolvibile allora come già indicato nel caso k=m=n per sostituzioni all'indietro.

L'insieme S_0 delle soluzioni del sistema omogeneo AX=0 sarà uno spazio vettoriale di dimensione n-k in quanto esso coincide con N(A) mentre dim R(A) = k e per il teorema della dimensione dim R(A) + dim N(A) = n.

Un vettore non nullo di S_0 può essere ottenuto nel seguente modo:

a) si fissi una delle incognite distinte da $x_{d_1}, \dots, x_{d_k}$; si attribuisca ad essa il valore 1 e si indichi con C la colonna dei suoi coefficienti.

b) si pongano eguali a zero tutte le altre incognite distinte da $x_{d_1}, \dots, x_{d_k}$.

c) si ricavi il valore delle componenti $x_{d_1}, \dots, x_{d_k}$ avendo una soluzione particolare del sistema A'X'= - C' che si ottiene da AX = - C eliminando le incognite distinte da $x_{d_1}, \dots, x_{d_k}$ e le ultime m-k equazioni (si osservi che il sistema AX = -C è quello che ha come termini noti i coefficienti delle incognite fissate cambiate di segno).

Ripetendo tali operazioni per ciascuna delle incognite distinte da $x_{d_1}, \dots, x_{d_k}$ si ottengono n-k vettori che costituiscono una base per S_0.

Così ad esempio data la matrice a scalino A e il vettore C dati da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

risolviamo il sistema AX=C.

Si ha subito k=3, $d_1=1$, $d_2=2$, $d_3=4$. Il vettore C ha la quarta componente nulla sicchè il sistema è compatibile. Per trovare una soluzione particolare basterà fissare $x_3=x_5=0$. Il sistema A'X'=C' sarà

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + 5x_4 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

Si ha allora subito $x_4=3$; sostituendo nella seconda equazione si ottiene $x_2=-13$; sostituendo infine nella prima i valori di x_2 e x_4 ottenuti si ricava $x_1=18$.

Una soluzione particolare sarà pertanto

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 18 \\ -13 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare un primo vettore non nullo in S_o poniamo

$$x_3=1 \quad x_5=0, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(C_3 è la colonna dei coefficienti di x_3) e risolviamo il sistema $A'X'=-C'_3$ ottenuto da $AX = -C_3$ cancellando le ultime due equazioni e le incognite x_3 e x_5 che sono diverse da x_1, x_2, x_4 il sistema cioè

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = -3 \\ x_2 + 5x_4 = -2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Si ottiene così sostituendo all'indietro, $x_4=0$, $x_2=-2$, $x_1=1$.

Un vettore in S_o non nullo sarà

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poniamo poi:

$$x_3 = 0, \quad x_5 = 1, \quad C_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(C_5 è la colonna dei coefficienti di x_5) e risolviamo il sistema $A'X'=-C'_5$ ottenuto da $AX=-C_5$ cancellando le ultime due equazioni e le incognite x_3 e x_5 che sono diverse

da x_1, x_2, x_4, il sistema cioè

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_2 + 5x_4 = -2 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

si ottiene sostituendo all'indietro $x_4=-1$, $x_2=3$, $x_1=-4$

Un altro vettore non nullo in S_o sarà allora

$$X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I vettori X_1 e X_2 costituiscono una base per S_o

1) Si risolvano i seguenti sistemi a scalino $AX=C$ ove

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Risposte

a) $X = \begin{pmatrix} -48 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) L'insieme delle soluzioni S coincide con $\bar{X} + S_o$ ove $\bar{X}$ è la soluzione particolare $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ e S_o, insieme delle soluzioni del sistema omogeneo, ha come base il vettore $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) Il sistema è incompatibile

e) L'insieme S_o delle soluzioni del sistema omogeneo ha come base il sistema di vettori

$$X_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 21 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

f) L'insieme S_o delle soluzioni del sistema omogeneo ha come base il sistema di vettori

$$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

g) Le soluzioni del sistema sono date da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_2 e x_5 arbitrari

h) Le soluzioni del sistema sono date da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con x_3 arbitraria

i) Le soluzioni del sistema sono date da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_1, x_2, x_5 arbitrari

Svolgimento

a) La matrice A ha rango 3 ed e quadrata. Il sistema si può subito risolvere per sostituzione all'indietro.
Si ha infatti

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 6 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ha $x_3=4$; sostituendo nella seconda si ottiene $x_2=10$; sostituendo i valori di x_3 e x_2 ottenuto nella prima equazione si ottiene $x_1=-48$.

b) La matrice A ha rango 3 ed è quadrata. Il sistema si può subito risolvere per sostituzione all'indietro.
Si ha infatti

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 3 \\ x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ha $x_3=0$; sostituendo nella seconda si ottiene $x_2=1$; sostituendo i valori di x_3 e x_2 ottenuti nella prima equazione si ottiene $x_1=1$.

c) La matrice A a scalino ha rango 3 ed è 4x4.
Bisognerà allora verificare la compatibilità. Poiche C ha la quarta componente nulla il sistema e risolubile.
Una soluzione particolare osservato che $d_1=1$ $d_2=3$ $d_3=4$ la si ottiene ponendo $x_2=0$ e risolvendo il sistema $A'X'=C'$ ottenuto da AX=C cancellando, l'ultima equazione e la seconda incognita, risolvendo cioè

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 6x_4 = 4 \\ x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Effettuando sostituzioni all'indietro si ottiene $x_4=2$, $x_3=-5$, $x_1=2$.

Una soluzione particolare sarà allora

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tutte le soluzioni di AX=C saranno date da $\bar{X} + S_o$ ove S_o e l'insieme delle soluzioni di AX=0.

Poiché S_o ha dimensione $n-k = 4-3 = 1$, basterà per individuarne una base trovare un vettore non nullo.
A tale scopo si ponga:

$$x_2 = 1, \quad C = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(C è la colonna dei coefficienti di x_2).
Risolviamo allora il sistema $A'X'=-C'$ ottenuta da AX=-C cancellando la quarta equazione e la seconda incognita, il sistema cioè

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 6x_4 = -6 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $x_4=0$, $x_3=0$, $x_1=-6$.
Una base per S_o è pertanto costituita dal vettore

$$x_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) La matrice A, a scalino, ha rango 3 ed e 4x4.
Bisogna verificare allora la compatibilità. Poiché C ha la quarta componente diversa da zero il sistema non e compatibile (l'ultima equazione dà O=1).

e) La matrice A, a scalino ha rango 3 ed è 4x5; poiché $n-k = 5-3 = 2$ l'insieme S_o delle soluzioni del sistema omogeneo ha dimensione 2. Per determinare una base si osservi che $d_1=1$, $d_2=2$, $d_3=4$ e si cominci col porre:

$$x_3 = 1, \quad x_5 = 0 \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(C è la colonna dei coefficienti di x_3). Risolviamo il sistema: $A'X'=-C'$, che si ottiene da $AX=-C$ cancellando la quarta equazione e la terza e quarta incognita, il sistema cioè

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_4 = -2 \\ x_2 + 3x_4 = -2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $x_4 = 0$, $x_2=-2$, $x_1=6$.
Un primo vettore non nullo in S_o sarà allora

$$X_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ponga ora:

$$x_3 = 0, \; x_5 = 1, \; C = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e risolviamo il sistema $A'X' = -C'$ che si ottiene da $AX = -C$ cancellando la quarta equazione e la terza e quinta incognita, il sistema cioè

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_4 = 6 \\ x_2 + 3x_4 = -2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Esso ha come soluzioni $x_4=1$, $x_2=-5$, $x_1=21$.
Un secondo vettore non nullo in S_o sarà allora

$$X_2 = \begin{pmatrix} 21 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il sistema X_1, X_2 costituisce una base per S_o.

f) La matrice A ha rango 2 ed è 4x5. Poiche $n-k = 5-2=3$ l'insieme S_o delle soluzioni del sistema omogeneo ha dimensione 2 per trovarne una base si osservi che $d_1=1$, $d_2=3$.

Consideriamo allora le variabili x_2, x_4, x_5. Poniamo

$$x_2 = 1, \; x_4 = 0, \; x_5 = 0, \; C = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(C è la colonna dei coefficienti di x_2) e risolviamo il sistema $A'X' = -C'$ ottenuto da $AX=-C$ cancellando la terza e la quarta equazione e le incognite x_2, x_4, x_5 il sistema cioè

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $x_2=0$ $x_1=-4$
Un primo vettore in S_o sara allora

$$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poniamo ora

$$x_2 = 0, \; x_4 = 1, \; x_5 = 0; \; C = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(C è la colonna dei coefficienti di x_4) e risolviamo il sistema$A'X'=-C'$ ottenuto da $AX=-C$ cancellando la terza e la quarta equazione e le incognite x_2, x_4, x_5, il sistema cioè

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -6 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $x_2=-3$, $x_1=3$.

Un secondo vettore in S_o sarà allora

$$X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fissiamo infine

$$x_2 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1,\ C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(C è la colonna dei coefficienti di x_5) e risolviamo il sistema A'X'=-C' ottenuto da AX=-C cancellando terza e quarta equazione e le incognite x_2, x_4, x_5, il sistema cioè

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $x_2 = -3$, $x_1 = 7$
Un terzo vettore in S_o sarà allora

$$X_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il sistema dei vettori X_1, X_2, X_3 costituisce una base per S_o

g) Nel caso in esame k=3, $d_1=1$, $d_2=3$, $d_3=4$.
Si possono allora utilizzare come parametri le incognite x_2 e x_5. Si ha

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 + 2x_4 = 1 - x_5 - 6x_2 \\ x_3 + 2x_4 = 2 - 3x_5 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

e per sostituzioni all'indietro, si ottiene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 6x_2 + 14x_5 \\ x_2 \\ -4-3x_5 \\ 3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_2 e x_5 arbitrari.

h) Nel caso in esame k=3, $d_1=1$, $d_2=2$, $d_3=4$.
Si può utilizzare allora come parametro l'incognita x_3.
Si ha

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 - 3x_3 \\ x_2 + x_4 = 1 - 2x_3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

e per sostituzioni all'indietro si ottiene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con x_3 arbitrario.

i) Nel caso in esame k=2, $d_1=1$, $d_2=4$. Si possono allora scegliere come parametri x_2, x_3, x_5. Si ha

$$\begin{cases} x_1 + 5x_4 = -2x_2 - 6x_3 - x_5 \\ x_4 = -3x_5 \end{cases}$$

e si ottiene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - 6x_3 + 14x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ -3x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con x_2, x_3, x_5 parametri arbitrari.

5.3 Risoluzione di sistemi col metodo di Gauss.

Si ricordi che un sistema AX=C a m equazioni e n incognite si dice equivalente ad un sistema $\tilde{A}X = \tilde{C}$ se esso ammette come soluzioni tutte e solo le soluzioni di quest'ultimo.

Si osservi che se la matrice completa (A/C) del sistema AX=C è equivalente alla matrice completa $(\tilde{A}/\tilde{C})$ del sistema $\tilde{A}X = \tilde{C}$ allora i due sistemi sono equivalenti.

Si noti infatti che operazioni elementari effettuate sulle righe della matrice completa di un sistema conducono a nuovi sistemi ma non modificano l'insieme delle soluzioni.

Il metodo di Gauss consente d'altro canto se A è non nulla di costruire una matrice $\tilde{A}$ ad essa equivalente, a scalino. Effettuando poi su C le stesse operazioni elementari effettuate su A si perviene ad un vettore $\tilde{C}$ tale che la matrice (A/C) risulta equivalente alla matrice $(\tilde{A}/\tilde{C})$.

Così ogni sistema lineare è riconducibile allo studio di un sistema lineare a scalino.

Nell'applicare il procedimento di Gauss alla matrice A, converrà eseguire le operazioni sulla matrice $(A:I_m)$ la matrice cioè ottenuta affiancando ad A la matrice identità mxm.

Infatti quando A si sarà trasformata in una matrice a scalino $\tilde{A}$, I_m si sarà a sua volta trasformata in una matrice E e si osservi che ponendo $\tilde{C} = EC$ la matrice (A/C) risulta equivalente a $(\tilde{A}/\tilde{C})$. Si noti infatti che la moltiplicazione per E sottopone C alle stesse operazioni di riga cui è stata sottoposta A.

1) Si risolvono col metodo di eliminazione di Gauss i sistemi lineari considerati negli esercizi 1), 2), 3), 5) del paragrafo 3

Svolgimento

1) Costruiamo la matrice costituita da A e dalla matrice identità 3x3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Si osservi che il primo elemento sulla prima colonna è diverso da zero. Il secondo elemento sulla prima colonna è già nullo; procediamo pertanto a trasformare in zero il terzo elemento sulla prima colonna aggiungendo alla terza riga la prima moltiplicata per -4. Si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -7 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Procediamo ora sulla seconda colonna a partire dalla seconda riga. Si incontra subito un elemento non nullo; procediamo a trasformare in zero il terzo elemento sulla seconda colonna aggiungendo alla terza riga la seconda moltiplicata per 11.
Si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & -4 & 11 & 1 \end{array}\right)$$

Procediamo ora sulla terza colonna a partire dalla terza riga. L'elemento è non nullo e diverso da 1, pertanto si divide la terza riga per 15. Si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4/15 & 11/15 & 1/15 \end{array}\right)$$

La sottomatrice $\tilde{A}$ che figura a sinistra della linea tratteggiata è una matrice a scalino equivalente ad A.

Si ha subito allora che $\bar{A}X=0$ ha come unica soluzione $X=0$.

Il sistema $AX=C$ equivale al sistema $\bar{A}X=EC$ ove E è la matrice a destra della linea tratteggiata. Analoghe considerazioni valgono per il sistema $AX=D$. D'altro canto

$$EC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/15 & 11/15 & 1/15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4/15 \end{pmatrix},$$

$$ED = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/15 & 11/15 & 1/15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/15 \end{pmatrix}$$

e dunque $A'X=EC$ e $A'X=ED$ si riducono a

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = -\dfrac{4}{15} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = \dfrac{1}{15} \end{cases}$$

che risolti per sostituzione (a partire da x_3) danno come soluzioni rispettivamente

$$X = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad X = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Costruiamo la matrice costituita da A e della matrice identità 3x3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Si osservi che A è già "quasi" a scalino: basterà dividere la seconda riga per 2 e la terza per 4 per ottenere una matrice a scalino. Si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1/4 \end{array}\right)$$

Detta $\bar{A}$ la matrice a sinistra della linea ed E quella a destra, i sistemi $AX=0$, $AX=C$ $AX=D$ sono equivalenti rispettivamente ai sistemi $\bar{A}X=E0$, $\bar{A}X=EC$, $\bar{A}X=ED$. Si ha subito d'altro canto che $\bar{A}X=E0=0$ ha come unica soluzione $X=0$. D'altro canto

$$EC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/4 \end{pmatrix},$$

$$ED = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3/2 \\ 15/4 \end{pmatrix}$$

e dunque $\bar{A}X=EC$ e $\bar{A}X=ED$ si riducono a

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 = 1 \\ x_3 = \dfrac{3}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 = \dfrac{3}{2} \\ x_3 = 15/4 \end{cases}$$

che risolti per sostituzioni successive (a partire da x_3) danno come soluzioni

$$X = \begin{pmatrix} -19/8 \\ 5/8 \\ 3/4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -3/8 \\ -3/8 \\ 15/4 \end{pmatrix}$$

3) Costruiamo la matrice costituita da A e dalla matrice identità 3x3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Il primo elemento sulla prima colonna è diverso da zero (è -1). Trasformiamo il secondo elemento sulla prima colonna in 0 sommando alla seconda riga la prima moltiplicata per -3 e analogamente per il terzo elemento sulla prima colonna sommando alla terza riga la prima moltiplicata per -1. Si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Procediamo ora sulla seconda colonna a partire dalla seconda riga. Si incontra subito un elemento non nullo; procediamo a trasformare in 0 il terzo elemento sulla seconda colonna, aggiungendo alla terza riga la seconda moltiplicata per -3 e dividiamo poi la seconda riga per 2.
Si ha

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

La matrice $\tilde{A}$ a sinistra della linea tratteggiata è a scalino. Detta E la matrice a destra della linea tratteggiata i sistemi AX=0; AX=C, AX=D sono rispettivamente equivalenti ai sistemi $\tilde{A}X=EO$, $\tilde{A}X=EC$, $\tilde{A}X=EC$, $\tilde{A}X=ED$. Si osservi che EO=O e $\tilde{A}X=0$ ha un insieme S_o di soluzioni di dimensione uno. Per trovare una base basterà trovare un vettore in S_o. Si osservi che $d_1=1$, $d_2=2$ e poniamo,

$$x_3 = 1, \ \tilde{C}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare x_1 e x_2 si è ricondotti a risolvere il sistema $\tilde{A}'X'=-\tilde{C}_3'$ ottenuto da $\tilde{A}X=-\tilde{C}_3$ cancellando la terza equazione e la terza incognita. Tale sistema risulta pertanto essere

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

e allora una base per S_o è data da

$$X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'altro canto si ha

$$EC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1/2 & 0 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ED = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1/2 & 0 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

e ci si riconduce quindi ai sistemi

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = -1/2 \\ 0 = 8 \end{cases}$$

Il primo di essi è risolubile, il secondo è incompatibile (la terza equazione è impossibile). Una soluzione dei primi la si ottiene ponendo $x_3=0$ e ricavando poi x_2 e x_1. Si ha così

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5) Costruiamo la matrice costituita da A e dalla matrice identità 4x4. Si ha

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Il primo elemento nella prima colonna è diverso da zero. Addizioniamo alla seconda e alla terza riga la prima moltiplicata per -1/2; addizioniamo alla quarta riga la prima moltiplicata per -3/2; dividiamo infine la prima riga per 4. Si ha

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -3/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Si addizioni alla terza riga la seconda e alla quarta la seconda moltiplicata per -1; si divida infine la seconda riga per 1/2. Si ha

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Detta $\tilde{A}$ la matrice a sinistra della linea tratteggiata ed E quella a destra i sistemi AX=0, AX=C, AX=D equivalgono rispettivamente ai sistemi $\tilde{A}X=EO$ $\tilde{A}X=EC$, $\tilde{A}X=ED$.
La matrice $\tilde{A}$ e a scalino con k=2 $d_1=1$, $d_2=3$.
Si osservi che E0=0. Una base per S_o sarà costituita da due vettori. Per costruirli

$$x_2 = 1,\ x_4 = 0,\ \tilde{C}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare le componenti x_1 e x_3 di un primo vettore bisognerà allora risolvere il sistema $\tilde{A}'X' = -\tilde{C}_2'$ ottenuto

da $\tilde{A}X = -\tilde{C}_2$ cancellando la terza e la quarta equazione e la seconda e quarta incognita. Tale sistema sarà pertanto

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{4} x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $x_1=-1$, $x_3=0$.
Pertanto un primo vettore in S_o sarà

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poniamo ora

$$x_2 = 0,\ x_4 = 1,\ \tilde{C}_4 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare le componenti x_1 e x_3 di un secondo vettore bisognera allora risolvere il sistema $\tilde{A}'X' = -\tilde{C}_4'$ ottenuto come detto prima. il sistema cioè

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{4} x_3 = -1/4 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $x_1 = -1/2$, $x_3 = 1$.
Un secondo vettore in S_o sarà allora

$$X_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I vettori X_1 e X_2 costituiscono una base per S_o.
Si osservi ora che

$$EC = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$EC = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pertanto i sistemi $\tilde{A}X = EC$ e $\tilde{A}X = ED$ si riducono rispettivamente a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \frac{1}{4} x_3 + \frac{1}{4} x_4 = \frac{7}{4} \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \frac{1}{4} x_3 + \frac{1}{4} x_4 = \frac{3}{4} \\ x_3 - x_4 = -3 \\ 0 = -3 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

Il secondo di essi non ammette soluzioni. Per trovare una soluzione particolare del primo poniamo $x_2=x_4=0$.
Si ha allora subito sostituendo $x_3=-1$, $x_1=2$ sicchè una soluzione particolare è

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

CAPITOLO 6

LIMITI

1. - Limiti di successioni

1.1 - Definizioni

Per comodità del lettore richiamiamo le definizioni di limite per una successione reale $\{a_n\}$.

DEFINIZIONE 1 - Si dice che $\{a_n\}$ converge ad $a \in R$ e si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a$$

se: comunque si fissi $\varepsilon > 0$ esiste un indice $\nu \in N$ tale che, per ogni $n > \nu$, risulti

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

ovvero

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Se $a=0$ $\{a_n\}$ si dice infinitesima.

DEFINIZIONE 2 - Si dice che $\{a_n\}$ diverge positivamente (negativamente) e si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \quad \left(\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty\right)$$

se: comunque si fissi $k > 0$ esiste un indice $\nu \in N$ tale che, per ogni $n > \nu$, risulti $a_n > k$ $(a_n < -k)$.

Ricordiamo inoltre il seguente classico risultato noto come teorema del confronto o dei "carabinieri": date tre successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = 1$$

e, per n sufficientemente grande, $a_n \le b_n \le c_n$ allora si ha anche

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 1.$$

Riportiamo nella seguente tabella un primo elenco di limiti notevoli; il procedimento di deduzione di tali limiti verrà esemplificato negli esercizi 1-7.

TABELLA 1

i) $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>0 \\ 0 & \text{se } \alpha<0 \end{cases}$

ii) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad a>0$

iii) $\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 0 & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$

iv) $\lim_{n\to+\infty} \lg_a n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ -\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$

Facendo uso delle definizioni e del teorema del confronto, si calcolino i seguenti limiti

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$

2) $\lim_{n\to+\infty} n^3$

3) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3}$

4) $\lim_{n\to+\infty} 5^n$

5) $\lim_{n\to+\infty} \lg_{\frac{1}{2}} n$

6) $\lim_{n\to+\infty} \lg_3 n$

7) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

8) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$

9) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{27n+1}{n}}$

10) $\lim_{n\to+\infty} \lg_2 \frac{n+1}{n}$

11) $\lim_{n\to+\infty} 3^{n/(n^2+1)}$

12) $\lim_{n\to+\infty} (n+3)^\pi$

Risposte

1) 0	2) $+\infty$	3) 1
4) $+\infty$	5) $-\infty$	6) $+\infty$
7) 0	8) 0	9) 3
10) 0	11) 1	12) $+\infty$

Svolgimento (1-10)

1) Per provare che $\lim 1/n = 0$ bisogna dimostrare che, in corrispondenza di un qualsiasi $\varepsilon>0$, è possibile determinare un indice $\nu\in N$ per cui si abbia $1/n < \varepsilon$ se $n>\nu$. Essendo

$$1/n < \varepsilon \Leftrightarrow n > 1/\varepsilon$$

l'indice ν può essere scelto come $[1/\varepsilon]$ cioè il più grande intero minore o uguale di $1/\varepsilon$.

2) Per dimostrare che $\lim n^3=+\infty$, fissato $k>0$, bisogna determinare un indice $\nu\in N$ tale che, per $n>\nu$, risulti $n^3>k$. Ma

$$n^3>k \Leftrightarrow n>\sqrt[3]{k}$$

quindi per $n>\nu = \left[\sqrt[3]{k}\right]$ si ha $n^3>k$.

3) Si osservi innanzitutto che, per ogni $n\in N$, risulta $1<\sqrt[n]{3}$. Dall'uguaglianza

$$a-1 = (\sqrt[n]{a}-1)\,(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{a}+1)$$

si ha

$$\sqrt[n]{3}-1 = \frac{2}{\sqrt[n]{3^{n-1}}+\sqrt[n]{3^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{3}+1} < \frac{2}{n}$$

quindi in definitiva

$$0 < \sqrt[n]{3}-1 < \frac{2}{n}.$$

Dal teorema del confronto segue che $\lim\left(\sqrt[n]{3}-1\right) = 0$ da cui facilmente $\lim\sqrt[n]{3} = 1$.

4) Per provare che $\lim 5^n=+\infty$ basta osservare che, se $k>0$.

$$5^n>k \Leftrightarrow n>\lg_5 k$$

Scegliendo pertanto $\nu=[\lg_5 k]$ risulta $5^n>k$ se $n>\nu$.

5) Fissato $k>0$, utilizzando la decrescenza della funzione logaritmo di base 1/2, si ha

$$\lg_{\frac{1}{2}} n<-k \Leftrightarrow n > \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} = 2^k.$$

Pertanto se $n>\nu=2^k$ si ha $\lg_{1/2} n<-k$ cioè $\lim \lg_{1/2} n=-\infty$.

6) Fissato $k>0$ si ha

$$\lg_3 n>k \Leftrightarrow n>3^k.$$

Pertanto se $n>\nu=3^k$ si ha $\lg_3 n>k$ e dunque $\lim\limits_{n\to+\infty} \lg_3 n=+\infty$.

7) Fissato $\varepsilon>0$, utilizzando la decrescenza della funzione esponenziale di base 1/2, si ha

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon \Leftrightarrow n > \lg_{\frac{1}{2}} \varepsilon.$$

Basta allora scegliere $\nu = \left[\lg_{\frac{1}{2}} \varepsilon\right]$ perchè risulti $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$ e se $n>\nu$ e quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

8) Per provare che $\lim 1/\sqrt{n+2} = 0$, fissato $\varepsilon>0$ bisogna studiare la disequazione

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}} < \varepsilon,$$

che è soddisfatta per $n > \frac{1}{\varepsilon^2}-2$ e quindi per ogni $n>\nu$ scegliendo $\nu=0$ se $\varepsilon \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, ovvero $\nu=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}-2\right]$ se $0<\varepsilon<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

9) Si ha per $\varepsilon>0$ e per ogni n

$$3-\varepsilon < \sqrt[3]{\frac{27n+1}{n}}.$$

D'altro canto

$$\sqrt[3]{\frac{27n+1}{n}} < 3+\varepsilon \Leftrightarrow n > \left(\varepsilon^3 + 9\varepsilon^2 + 27\varepsilon\right)^{-1}$$

e quindi per $n>\nu = \left[\left(\varepsilon^3 + 9\varepsilon^2 + 27\varepsilon\right)^{-1}\right]$ risulta

$$\left|\sqrt[3]{\frac{27n+1}{n}}-3\right| < \varepsilon$$

Si può allora concludere che $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{27n+1}{n}} = 3$

10) Fissato $\varepsilon>0$ si ha

$$\lg_2 \frac{n+1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{2^\varepsilon-1}$$

pertanto per $n>\nu = [(2^\varepsilon-1)^{-1}]$ si ha $\lg_2 \frac{n+1}{n} < \varepsilon$ e quindi, essendo ovviamente $\lg_2 \frac{n+1}{n} > -\varepsilon$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lg_2 \frac{n+1}{n} = 0$.

1.2 - Operazioni con i limiti

Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni regolari e siano a, b in R i rispettivi limiti. È noto che

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$,

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = a\, b$,

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ se b_n, $b\neq 0$.

Le formule (1), (2), (3) sono suscettibili di generalizzazione, purché si tengano presenti le seguenti scritture convenzionali

$$a\pm(+\infty)=\pm\infty, \quad a-(\pm\infty)=\mp\infty \quad \forall a\in R$$

$$a\cdot(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}, \qquad a\cdot(-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases},$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0 \quad \forall a\in R,$$

OSSERVAZIONE 1 - Un discorso a parte merita la formula (3) nel caso in cui $\{a_n\}$ non sia infinitesima e $\{b_n\}$ lo sia. In tale circostanza se in più la successione $\{b_n\}$ tende a 0 conservando, almeno definitivamente, lo stesso segno si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \text{ se } \begin{cases} a>0 \text{ e } b_n > 0 \\ \quad\text{oppure} \\ a<0 \text{ e } b_n < 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty \text{ se } \begin{cases} a<0 \text{ e } b_n > 0 \\ \text{oppure} \\ a>0 \text{ e } b_n < 0 \end{cases}$$

Restano fuori dallo schema appena illustrato le seguenti espressioni

$$(+\infty) - (+\infty),\ (-\infty) - (-\infty),\ 0 \cdot (\pm\infty),\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{0}{0};$$

quando, nell'applicare una delle formule (1), (2), (3), ci si imbatte in una di tali espressioni si dice che il limite si presenta in "forma indeterminata".

OSSERVAZIONE 2 - Dal teorema del confronto si deduce il seguente utile criterio: la successione prodotto di una successione limitata (non necessariamente convergente) e di una successione infinitesima, è una successione infinitesima.

Si calcolino i seguenti limiti

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2+1}$

2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 - 1}{n^4 + 1}$

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3 - 1}{1-2n^2}$

4) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^5 + 3n^4 - 1}{3n^3 + 4n^2}$

5) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3 - 2n + 1}{4n^3 + 5}$

6) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^5 - 6n^6}{7n^5 + 3n^2 - 1}$

7) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - n^3}{n - 2n^2}$

8) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4 + 1}{3n^3 - 5n + 3}$

9) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^\pi - 5n}{1 - 7n^6}$

10) $\lim_{n\to+\infty} \frac{5 - 5\sqrt[3]{n} - 3n\sqrt{n}}{6n + \sqrt{n} - n\sqrt{n}}$

11) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n} + 5\sqrt[3]{n^2} + 1}{\sqrt[3]{n^2} - 3\sqrt[3]{n} + 4}$

12) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n + 2\sqrt{n} + 1}{n\sqrt[3]{n} + n + 4}$

13) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\lg_3 n + 3}{\lg_3 n + 1}$

14) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^{2n} - 3}{2\pi^n + 5}$

15) $\lim_{n\to+\infty} \frac{8^n - 5}{1 + 2^n - 8^n}$

16) $\lim_{n\to+\infty} \frac{5^n + 2^n}{4^n - 3^n}$

17) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\lg_2 n + 1}{\lg_5 n + 1}$

18) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n \cos(n+1)}{n\sqrt{n} + 1}$

19) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + n \operatorname{sen} n}{\cos n - 2n}$

20) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n + \operatorname{sen} n}{3^n - 2^n}$

Risposte

1) 1	2) 0	3) $-\infty$	4) $+\infty$
5) 3/4	6) $-\infty$	7) $+\infty$	8) $+\infty$
9) 0	10) 3	11) 5	12) 0
13) 1	14) $+\infty$	15) -1	16) $+\infty$
17) $\lg_5 5$	18) 0	19) $-\infty$	20) 1

Svolgimento (1-4, 13, 14, 16, 18)

1) Mettendo in evidenza a numeratore e denominatore le potenze di n di grado massimo si ha

$$\frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 1} = \frac{n^2\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)},$$

da cui usando (1), (2), (3), si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n+3}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{1+\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}+\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n^2}}{1+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{1+0+0}{1+0} = 1.$$

2) Procedendo come nel caso precedente si ha

$$\frac{n^3-1}{n^4+1} = \frac{n^3\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{n^4\left(1+\frac{1}{n^4}\right)} = \frac{1}{n}\,\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^4}};$$

quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3-1}{n^4+1} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}}{1+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}} = 0\cdot\frac{1-0}{1+0} = 0.$$

3) Risulta

$$\frac{3n^3-1}{1-2n^2} = \frac{n^3\left(3-\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2}-2\right)} = n\,\frac{3-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}-2};$$

quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^3-1}{1-2n^2} = \lim_{n\to+\infty} n\,\frac{3-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}}{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}-2} = (+\infty)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = -\infty.$$

4) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^5+3n^4-1}{3n^3+4n^2} = \lim_{n\to+\infty} n^2\,\frac{1+\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n}-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^5}}{3+\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n}} =$$

$$= (+\infty)\cdot\frac{1+0-0}{3+0} = +\infty.$$

13) Mettendo in evidenza a numeratore e denominatore $\lg_3 n$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\lg_3 n+3}{\lg_3 n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{\lg_3 n}}{1+\frac{1}{\lg_3 n}} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

14) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi^{2n}-3}{2\pi^n+5} = \lim_{n\to+\infty}\pi^n\cdot\frac{1-\lim_{n\to+\infty}\pi^{-2n}}{2+\lim_{n\to+\infty}\pi^{-n}} = (+\infty)\,\frac{1-0}{2+0} = +\infty.$$

16) Mettendo in evidenza 5^n a numeratore e 4^n a denominatore, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5^n+2^n}{4^n-3^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n\cdot\frac{1+\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$= +\infty\left(\frac{1+0}{1-0}\right) = +\infty$$

18) Essendo $\{\cos(n+1)\}$ una successione limitata e $\{n/(n\sqrt{n}+1)\}$ una successione infinitesima, risulta (cfr. Oss. 2)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n\sqrt{n}+1}\cos(n+1)\right) = 0$$

1.3 - Il numero e di Nepero e la costante C di Eulero-Mascheroni

Ricordiamo che il seguente "limite notevole"

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \tag{4}$$

serve a definire il numero e o numero di Nepero[1]. Le prime cifre di tale numero sono 2,717. Inoltre la successione $\{(1+1/n)^n\}$ è strettamente crescente.

Consideriamo ora la successione

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\} \tag{5}$$

Si ha ovviamente

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Inoltre la successione (5) è strettamente decrescente. A tale scopo basta osservare che la disuguaglianza

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

si puo anche scrivere nel modo seguente

$$1+\frac{1}{n} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n;$$

quest'ultima può essere dimostrata, mediante la formula del binomio di Newton, nel modo seguente

[1] Più in generale si ha

$$(4')\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{(n^2-1)^k} > 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}$$

Si ha pertanto

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n\in N. \tag{6}$$

Dalla (6) e dalla proprietà di monotonia della funzione logaritmo si ottiene

$$\frac{1}{n+1} < \lg\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

o anche

$$\frac{n}{n+1} < n\lg\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1. \tag{7}$$

Ancora, riscrivendo la (6) nella seguente forma

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \quad \forall n>1.$$

si ottiene

$$\frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{1}{n-1}$$

o anche

$$1 < n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \frac{n}{n-1} \tag{8}$$

Da (7), (8), facendo uso del teorema del confronto, si ottengono i seguenti ulteriori limiti notevoli

(9) $$\lim_{n\to\infty} n \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

(10) $$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 1.$$

OSSERVAZIONE - La formula (6) può essere utilizzata per valutare l'errore che si commette approssimando e con il termine n-mo della successione che compare in (4); infatti

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Consideriamo ora le seguenti notevoli successioni

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \lg(n+1)$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \lg(n+1)$$

Dalla (7) si ha

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \lg(n+1) + \lg n = \frac{1}{n} - \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$$

$$b_n - b_{n-1} = \frac{1}{n+1} - \lg(n+1) + \lg n = \frac{1}{n+1} - \lg\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0;$$

quindi le due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sono l'una crescente, l'altra decrescente. Esse sono ovviamente limitate, dal momento che è $a_1 < a_n < b_n < b_1$, e pertanto convergenti. Si ha inoltre

(11) $$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_n + \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Il valore del limite (11) si denota con la lettera C ed è noto

come costante di Eulero-Mascheroni; le sue prime cifre decimali sono C = 0.577215...

È possibile dare una valutazione dell'errore che si commette approssimando C con a_n o b_n, infatti

$$C - a_n < b_n - a_n = \frac{1}{n+1}.$$

Si osservi infine che la successione il cui termine generale è

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

è divergente essendo

$$a_n + \lg(n+1) = A_n.$$

La quantità A_n rappresenta la "somma parziale n-ma" della cosiddetta serie armonica. Per concludere si osservi che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{\lg(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(A_n - \lg(n+1))}{\lg(n+1)} + 1 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\lg(n+1)} + 1 = \frac{C}{+\infty} + 1 = 1.$$

1.4 - Il criterio del rapporto e i teoremi sulle medie

a) Per verificare se una successione $\{a_n\}$ è infinitesima è spesso utile il seguente "criterio del rapporto"

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Si osservi infatti che scelto $h \in]r,1[$ risulta $|a_{n+1}|/|a_n| < h$ per $n > \nu$ con ν opportuno.

Ciò comporta

$$|a_{\nu+2}| < h\,|a_{\nu+1}|,\ |a_{\nu+3}| < h\,|a_{\nu+2}| < h^2\,|a_{\nu+1}|, \ldots$$

e in generale $|a_{\nu+k}| < h^{k-1}\,|a_{\nu+1}|$. Essendo la successione $\{h^n\}$ infinitesima, tale è allora, per il teorema del confronto, la successione $\{a_n\}$.

È poi evidente che, se $a_n > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

Con l'ausilio di tali criteri si deducono i seguenti limiti notevoli

TABELLA 2

i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad \alpha \in R,\ a>1;$ ii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0;$

iii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^n} = 0,$ iv) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,a^n}{n^n} = 0 \quad a \in]0,e[.$

Ricordiamo che con il simbolo n! (fattoriale di n) si denota la quantità $1\cdot2\cdot3 \ldots n$.

A scopo esemplificativo verifichiamo il limite iv).

Basta a tale scopo dimostrare che il seguente limite è più piccolo di 1:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\ a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!\,a^n} = \lim_{n\to+\infty} a \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{a}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e} < 1$$

b) Ricordiamo i cosiddetti teoremi della "media" o di Cesàro.

Teorema della media aritmetica. La successione $\{a_n\}$ ammette limite, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

Teorema della media geometrica. La successione $\{a_n\}$, con $a_n > 0$, ammette limite, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1\ a_2 \ldots a_n} = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

Oltre ai due classici teoremi sulla media aritmetica e su quella geometrica è utile tener presente i seguenti corollari

$$(\alpha)\quad \lim_{n\to+\infty} (a_{n+1}-a_n) = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = a$$

$$(\alpha)'\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a,\ a_n > 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$$

Come banale conseguenza di quest'ultimo si ha ad esempio che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

basta a tale scopo ricordare che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

Facendo uso dei criteri appena ricordati calcolare i seguenti limiti:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!\ n^{\pi}}{2^n}$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n\pi)^n}{n!}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^5\ 3^n}{(n+1)!}$ 4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^n\ 2^n}{(2n)!}$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n + 3\cdot n!}{5^n + 2\cdot n!}$ 6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n^n + n! + 5^n}{3n^n + 2n! + 7^n}$

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+3n+2}$ 8) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

9) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$ 10) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(n+1)\ (n+2)\ (n+3)}$

11) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n\ (n+1)\ \ldots\ (2n-1)}}$

12) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n}$

Risposte

1) $-\infty$	2) $+\infty$	3) 0	4) 0
5) 3/2	6) 7/3	7) 1	8) e
9) $-\infty$	10) 1	11) e/4	12) 0

Svolgimento (2, 4, 5, 8, 10, 11, 12)

2) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\ \pi^{n+1}}{(n+1)!}\ \frac{n!}{n^n\ \pi^n} = \pi \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \pi\ e > 1,$$

Utilizzando il criterio del rapporto si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n\pi)^n}{n!} = +\infty.$$

4) Risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\ 2^{n+1}}{(2n+2)!}\ \frac{(2n)!}{n^n\ 2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\ (n+1)^{n+1}}{(2n+2)\ (2n+1)\ n^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0 \quad e = 0 < 1,$$

dal criterio del rapporto segue

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n\ 2^n}{(2n)!} = 0.$$

5) Si ha, mettendo in evidenza n! a numeratore e denominatore

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n + 3\cdot n!}{5^n + 2\cdot n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^n}{n!} + 3}{\frac{5^n}{n!} + 2} = (\text{cfr. ii) in tab. 2}) =$$

$$= \frac{0+3}{0+2} = \frac{3}{2}.$$

8) Si applica il criterio $(\alpha)'$ con $a_n = n^n/n!$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\ \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e.$$

10) Essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)\ (n+3)\ (n+4)}{(n+1)\ (n+2)\ (n+3)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+4}{n+1} = 1$$

sempre per $(\alpha)'$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} = 1$$

11) Si applica $(\alpha)'$ con $a_n = n^n/n(n+1)\ \dots\ (2n-1)$. Si ha infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\,(n+2)\ \dots\ (2n+1)}\ \frac{n\,(n+1)\ \dots\ (2n-1)}{n^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{2\,(2n+1)\,n^n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n+1}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e = \frac{e}{4}.$$

12) Si osservi che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0;$$

quindi per il criterio (α) il limite proposto vale 0.

1.5 - Successioni estratte, massimo e minimo limite

Data una successione $\{a_n\}$, denotiamo con $\{a_{n_k}\}$ una sua sottosuccessione. È noto che se $\{a_n\}$ è regolare vale la seguente implicazione:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \implies \lim_{n\to+\infty} a_{n_k} = l$$

con l eventualmente uguale a $+\infty$ o $-\infty$. Se $\{a_n\}$ non è regolare esistono sottosuccessioni tendenti a limiti diversi; si dice allora che la successione $\{a_n\}$ ha un "minimo limite" che si denota con uno dei simboli

$$\lim_{n\to+\infty}{}' a_n\ ; \qquad \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n\ , \qquad \min\lim_{n\to+\infty} a_n$$

e un "massimo limite" che si denota con uno dei simboli

$$\lim_{n\to+\infty}{}'' a_n\ , \qquad \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n\ , \qquad \max\lim_{n\to+\infty} a_n$$

Rimandiamo ad un qualsiasi testo di Analisi Matematica per le relative definizioni; limitiamoci qui a ricordare le seguenti proprietà:

(i) $\{a_n\}$ regolare $\iff \lim_{n\to+\infty}{}' a_n = \lim_{n\to+\infty}{}'' a_n$;

(ii) esistono due sottosuccessioni $\{a_{n_k}\}$, $\{a_{m_k}\}$ tali che

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to+\infty}{}' a_n,\quad \lim_{k\to+\infty} a_{m_k} = \lim_{k\to+\infty}{}'' a_n;$$

(iii) se una sottosuccessione di $\{a_n\}$ tende ad l, allora l appartiene all'intervallo i cui estremi sono il minimo e massimo limite.

Per ciascuna delle seguenti successioni determinare:

a) il massimo limite, **b)** il minimo limite.

1) $(-1)^n$ 2) $n^{(-1)^n}$ 3) $\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$ 4) $\frac{(-1)^n\, n}{n+1}$

5) $\left(1+\frac{\cos n\pi}{n}\right)^n$ 6) $\frac{n}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]$ 7) $\left[\frac{n}{n+(-1)^n}\right]$ 8) $\frac{(-1)^n\, n^2}{n+3}$

Risposte

1)	a) +1	b) -1	2)	a) $+\infty$	b) 0
3)	a) +1	b) -1	4)	a) +1	b) -1
5)	a) e	b) 1/e	6)	a) 1/2	b) 0
7)	a) 1	b) 0	8)	a) $+\infty$	b) $-\infty$

Svolgimento (2, 4, 5)

2) Le sottosuccessione di indici pari e dispari sono rispettivamente

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{1}{2k+1},\ \ldots$$

$$2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2k,\ \ldots$$

La prima e infinitesima, la seconda diverge positiviamente. È possibile inoltre verificare che non esistono successioni estratte aventi limiti diversi da 0 o $+\infty$.
Quindi si ha

$$\lim_{n\to+\infty}{}' \ n^{(-1)^n} = 0,\quad \lim_{n\to+\infty}{}'' \ n^{(-1)^n} = +\infty.$$

4) Per n pari si ottiene la sottosuccessione

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{5},\ \ldots,\ \frac{2k}{2k+1},\ \ldots$$

per n dispari

$$-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4},\ \ldots,\ -\frac{2k+1}{2k+2},\ \ldots$$

La prima sottosuccessione tende a + 1, la seconda a -1, non esistono sottosuccessioni che tendono a limiti diversi da questi. Quindi -1 e il minimo limite e +1 il massimo limite.

5) A seconda che n sia pari o dispari si ha

$$\left(1+\frac{\cos n\pi}{n}\right)^n = \begin{cases}(1+1/n)^n & n \text{ pari}\\ (1-1/n)^n & n \text{ dispari}\end{cases}$$

Ricordando i limiti notevoli (4), (4') si ha che la sottosuccessione dei termini con indice pari tende ad e, quella dei termini con indice dispari tende a 1/e. Osservato inoltre che non esistono successioni estratte tendente a limiti diversi risulta

$$\lim_{n\to+\infty}{}' \left(1+\frac{\cos n\pi}{n}\right)^n = \frac{1}{e},\quad \lim_{n\to+\infty}{}'' \left(1+\frac{\cos n\pi}{n}\right)^n = e.$$

2. Limiti di funzioni

2.1 Richiami

Precisiamo i concetti di limite e di continuità nella forma utilizzata in questo paragrafo e nei successivi.

Sia f una funzione a valori reali definita in un intervallo aperto I privato eventualmente del suo punto x_0.

Diremo che f converge ad un numero l quando x tende ad x_0 e scriveremo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se comunque si scelga un ε positivo (strettamente) esiste un δ_ε positivo (strettamente) tale che per ogni x in I tale da verificare $0 < |x-x_0| < \delta_\varepsilon$ si ha $|f(x)-l| < \varepsilon$.

Diremo che f diverge positivamente quando x tende ad x_0 e scriveremo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se comunque si scelga un ε positivo esiste un δ_ε positivo tale che per ogni x in I tale da verificare $0 < |x-x_0| < \delta_\varepsilon$ si ha $f(x) > \varepsilon$.

Diremo che f diverge negativamente quando x tende ad x_0 e scriveremo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se comunque si scelga un ε positivo esiste un δ_ε positivo tale che per ogni x in I tale da verificare $0 < |x-x_0| < \delta_\varepsilon$ si ha $f(x) < -\varepsilon$.

Sia ora f una funzione a valori reali definita in un intervallo illimitato superiormente I (risp. illimitato inferiormente).

Diremo che f converge ad un numero l quando x tende a $+\infty$ (risp. $-\infty$) e scriveremo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \left(\text{risp. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = l\right)$$

se comunque si scelga un ε positivo esiste un δ_ε tale che per ogni x in I tale da verificare $x > \delta_\varepsilon$ (risp. $x < -\delta_\varepsilon$) si ha $|f(x)-l| < \varepsilon$.

Diremo che f diverge positivamente quando x tende a $+\infty$ (risp $-\infty$) e scriveremo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \left(\text{risp. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\right)$$

se comunque si scelga un ε positivo esiste un δ_ε tale che per ogni x in I tale da verificare $x > \delta_\varepsilon$ (risp $x < -\delta_\varepsilon$) si ha $f(x) > \varepsilon$.

Diremo che f diverge negativamente quando x tende a $+\infty$ (risp. $-\infty$) e scriveremo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \left(\text{risp. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\right)$$

se comunque si scelga un ε positivo esiste un δ_ε tale che per ogni x in I tale da verificare $x > \delta_\varepsilon$ (risp. $x < -\delta_\varepsilon$) si ha $f(x) < -\varepsilon$.

Ricordiamo ancora le nozioni di limite sinistro e di limite destro.

Sia f una funzione a valori reali definita in un intervallo I privato eventualmente del suo punto x_0.

Diremo che f converge ad un numero l quando x tende ad x_0 da sinistra (risp. da destra) e scriveremo

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \left(\text{risp. } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l\right)$$

se x_0 non è l'estremo inferiore (risp. l'estremo superiore) di I e se comunque si scelga un ε positivo esiste un δ_ε positivo tale che per ogni x in I tale da verificare $x_0-\delta_\varepsilon < x < x_0$ (risp. $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$) si ha $|f(x)-l| < \varepsilon$.

Diremo che f diverge positivamente quando x tende a x_0 da sinistra (risp. da destra) e scriveremo

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \left(\text{risp. } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty\right)$$

se x_0 non è l'estremo inferiore (risp. l'estremo superiore) di I e se comunque si scelga un ε positivo esiste un δ_ε positivo tale che per ogni x in I tale da verificare $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0$ (risp $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$) si ha $f(x) > \varepsilon$.

Diremo che f diverge negativamente quando x tende a x_0 da sinistra (risp. da destra) e scriveremo

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \left(\text{risp. } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty\right)$$

se x_0 non è l'estremo inferiore (risp l'estremo superiore) di I e se comunque si scelga un ε positivo esiste un δ_ε positivo tale che per ogni x in I tale da verificare $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0$ (risp. $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$) si ha $f(x) < -\varepsilon$.

Osserviamo esplicitamente che se x_0 è l'estremo superiore (risp. l'estremo inferiore) dell'intervallo di definizione I di una funzione f denoteremo allora semplicemente con

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

il limite da sinistra (risp. da destra), se esiste, di f. Tenendo conto di tale convenzione diremo che una funzione f definita in un intervallo I e a valori reali è continua nel punto x_0 di I se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Infine segnaliamo che se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

e se inoltre $f(x) > 0$ (risp. $f(x) < 0$) riassumeremo questi due fatti scrivendo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^+ \left(\text{risp. } \lim_{x \to x_0} f(x) = 0^-\right)$$

Il comportamento dell'operazione di limite in relazione alle operazioni algebriche è regolato dalle seguenti norme (nel caso della convergenza).

Siano f e g due funzioni deifinite nell'intervallo aperto I privato eventualmente di un suo punto interno x_0, a valori reali e risultino entrambe convergenti in x_0, allora

(1) $\lim_{x \to x_0} (cf+dg)(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x) + d \lim_{x \to x_0} g(x)$

per ogni coppia di numeri reali c,d

(2) $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$

ed inoltre se $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ allora

(3) $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \Big/ \lim_{x \to x_0} g(x)$.

È possibile cioè scambiare le operazioni algebriche con le operazioni di limite.

Nel caso della divergenza si possono dare ancora alcune regole, ma non esaustive.

Siano sempre f e g due funzioni definite nell'intervallo aperto I privato eventualmente di un suo punto interno x_0 a valori reali allora

(4) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (risp. $-\infty$) e g converge in x_0

si ha

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = +\infty \ (\text{risp. } -\infty)$$

Tale regola sussiste anche se g è soltanto limitata inferiormente (risp. superiormente)

(5) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (risp. $-\infty$) e $\lim_{x \to x_0} g(x) > 0$,

allora

$$\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = +\infty \ (\text{risp. } -\infty)$$

Tale regola sussiste anche se $g(x) > c > 0$ per qualche c e per ogni x.

Analogamente

(5)' se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (risp. $-\infty$) e $\lim_{x\to x_0} g(x) < 0$

allora

$$\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = -\infty \ (\text{risp. } +\infty)$$

Tale regola sussiste anche se $g(x) < c < 0$ per qualche c e per ogni x.

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = +\infty$$

(6) Se $\lim f(x) = +\infty$ (risp. $-\infty$) e g converge in x_0 ad un numero reale strettamente maggiore di zero allora

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = +\infty$$

(6)' Se $\lim f(x) = +\infty$ (risp. $-\infty$) e g converge in x_0 ad un numero reale strettamente minore di zero, allora

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = -\infty \ (\text{risp. } +\infty)$$

(6)" Se f converge in x_0 e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ (risp. $-\infty$) (risp. $-\infty$); allora

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0$$

Lo studio di un limite del tipo

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)}$$

si riconduce ai casi già esaminati grazie alla posizione

$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\lg f(x)}$$

Infatti se esiste

$$\lim_{x\to x_0} g(x) \lg f(x)$$

(che è di tipo prodotto) allora grazie alle proprietà della funzione esponenziale e alla regola di composizione dei limiti si ha

$$\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\lg f(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\lg f(x)}$$

e pertanto

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\lg f(x)}$$

Alcuni casi in cui la funzione g ha limite 0 in x_0 e deve studiarsi il limite del quoziente f/g sono contenuti nelle seguenti regole

(7) Se f converge in x_0 ad un numero strettamente maggiore di zero o diverge positivamente e se inoltre $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^+$ (risp. 0^-) allora

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = +\infty \ (\text{risp. } -\infty)$$

(7)' Se f converge in x_0 ad un numero strettamente minore di zero o diverge negativamente e se $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0^+$ (risp. 0^-) allora

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = -\infty \ (\text{risp. } +\infty)$$

Tutte le regole segnalate valgono anche nel caso in cui $x_0 = \pm\infty$ e qualora si considerino limiti sinistri o limiti destri.

I casi non contemplati in tali regole vengono dette forme indeterminate e verranno esaminate nel paragrafo successivo.

Per comodità del lettore riportiamo anche gli enunciati del teorema di composizione dei limiti e del teorema del confronto o teorema dei Carabinieri.

Regola di composizione dei limiti. Sia I un intervallo aperto e sia x_o un elemento in I. Sia f una funzione definita in I eventualmente privato di x_o e a valori reali tale che $\lim_{x\to x_o} f(x) = l$, $f(x) \neq l$ per ogni x in $I - \{x_o\}$. Siano J un intervallo aperto cui appartiene l e g una funzione definita in J eventualmente privato di l e a valori reali tale che

$$\lim_{y\to l} g(y) = m$$

allora

$$\lim_{x\to x_o} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to l} g(y) = m$$

Tale conclusione è valida con le opportune modifiche sulle ipotesi se $x_o = \pm\infty$ e anche relativamente a limiti sinistri e destri.

Ovviamente se g è continua si avrà

$$\lim_{x\to x_o} g\big(f(x)\big) = g(l)$$

Quando si applica la regola di composizione si dice spesso che si effettua la sostituzione $y = f(x)$.

Teorema dei Carabinieri. Siano f, g, h tre funzioni definite nell'intervallo aperto I eventualmente privato di x_o (con x_o in I) a valori reali. Risulti

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ per ogni } x \text{ in } I-\{x_o\}$$

ed inoltre

$$\lim_{x\to x_o} g(x) = \lim_{x\to x_o} h(x);$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x\to x_o} f(x)$$

e coincide con i precedenti.

Tale conclusione è vera con le ovvie varianti se $x_o = \pm\infty$ e per limiti sinistri e destri. Inoltre, ad esempio se

$$\lim_{x\to x_o} g(x) = +\infty$$

è sufficiente la sola disuguaglianza $g(x) \leq f(x)$ in $I-\{x_o\}$ ad assicurare che

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = +\infty$$

Limiti fondamentali

(a) **Funzioni potenza di esponente intero (n positivo)**

(1) $\lim_{x\to x_o} x^n = x_o^n$ (2) $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

(3) $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ pari} \\ -\infty & n \text{ dispari} \end{cases}$

(4) $\lim_{x\to x_o} x^{-n} = x_o^{-n} \quad x_o \neq 0$ (5) $\lim_{x\to\pm\infty} x^{-n} = 0$

(6) $\lim_{x\to 0^{\pm}} x^{-n} = \begin{cases} +\infty & n \text{ pari} \\ \pm\infty & n \text{ dispari} \end{cases}$

(b) **Funzioni radici n-sime (n intero positivo)**

(1) $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$

(2) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$ (n dispari)

(3) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

(c) **Funzioni potenza di esponente reale α**

(1) $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha \text{ positivo} \\ +\infty & \alpha \text{ negativo} \end{cases}$

(2) $\lim_{x\to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \ (x_0 \neq 0)$

(3) $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha \text{ positivo} \\ 0 & \alpha \text{ negativo} \end{cases}$

(d) **Funzioni esponenziali e logaritmiche**

(1) $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$ (2) $\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ 1 & a=1 \\ 0 & a<1 \end{cases}$

(3) $\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a>1 \\ 1 & a=1 \\ +\infty & a<1 \end{cases}$ (4) $\lim_{x\to x_0} \lg_a x = \lg_a x_0$

(5) $\lim_{x\to+\infty} \lg_a x = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ -\infty & a<1 \end{cases}$ (6) $\lim_{x\to 0^+} \lg_a x = \begin{cases} -\infty & a>1 \\ +\infty & a<1 \end{cases}$

(e) **Funzioni trigonometriche e loro inverse**

(1) $\lim_{x\to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$ (2) $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$

(3) $\lim_{x\to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$ (4) $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^\pm} \operatorname{tg} x = \mp\infty$

$x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k intero

(5) $\lim_{x\to x_0} \operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} x_0$

(6) $\lim_{x\to x_0} \arccos x = \arccos x_0$

(7) $\lim_{x\to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0$ (8) $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}$

(f) **Altri limiti fondamentali**

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (2) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e.$

I limiti su elencati descrivono il comportamento delle funzioni elementari.

Diamo qui di seguito delle verifiche di tali proprietà utilizzando direttamente la definizione.

Dati due numeri a e b con min {a,b} denoteremo il più piccolo numero tra a e b.

(a) (1) Si osservi che

$$x^n - x_0^n = (x-x_0)\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_0 + \dots + x\, x_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right)$$

e quindi per ogni x tale che $|x| \le |x_0| + 1$ si ha

$$|x^n-x_0^n| \le |x-x_0| \cdot \left[\left(|x_0|+1\right)^{n-1} + \left(|x_0|+1\right)^{n-2}|x_0| + \dots + \left(|x_0|+1\right)|x_0|^{n-2} + |x_0|^{n-1}\right] \le n\,|x-x_0|\,\left(|x_0|+1\right)^{n-1}$$

Si fissi ora $0<\varepsilon<1$ e si scelga in relazione a tale ε un δ_ε nel modo seguente

$$\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{n\,(|x_0|+1)^{n-1}}$$

Si osservi che se x è tale che $|x-x_0| < \delta_\varepsilon$ allora sarà anche $|x| \le |x_0| + 1$. Si ha infatti $-(|x_0|+1) < -(|x_0|+\delta_\varepsilon) \le x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon \le |x_0|+\delta_\varepsilon < |x_0|+1$;

Si avrà, pertanto $|x^n-x_0^n| < \varepsilon$ e dunque

$$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$$

(a) (2) Si osservi che fissato un $\varepsilon>0$ e scelto $\delta_\varepsilon = \sqrt[n]{\varepsilon}$ si ha, per $x > \delta_\varepsilon$, grazie alla crescenza della funzione potenza di esponente naturale, ristretta a $[0,+\infty)$, $x^n > \delta_\varepsilon^n=\varepsilon$ e dunque

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

(a) (3) Sia dapprima n dispari e si fissi $\varepsilon>0$, si scelga $\delta_\varepsilon = \sqrt[n]{\varepsilon}$ allora per ogni $x < -\delta_\varepsilon$ per la crescenza della funzione potenza di esponente dispari si ha

$$x^n < (-\delta_\varepsilon)^n=-\varepsilon$$

e dunque

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$$

Sia ora n pari; si fissi $\varepsilon>0$, si scelga $\delta_\varepsilon=\sqrt[n]{\varepsilon}$: allora per ogni $x<-\delta_\varepsilon$ per la decrescenza della funzione potenza di esponente pari ristretta a $(-\infty,0]$ si ha

$$x^n<(-\delta_\varepsilon)^n=\varepsilon$$

e dunque

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$$

(a) (4) Si osservi che

$$x^{-n}=1/x^n$$

e pertanto può applicarsi il teorema sui limiti dei quozienti (3) e utilizzare il valore del limite (a) (1).

(a) (5) Si osservi che

$$x^{-n}=1/x^n$$

Si può allora applicare il teorema sui limiti dei quozienti (6)" e utilizzare i valori dei limiti (a) (2) e (a) (3)

(a) (6) Si osservi ancora che

$$x^{-n}=1/x^n$$

Si può allora applicare il teorema sui limiti dei quozienti (7)' e utilizzare il valore del limite (a) (1) osservando che se n è pari

$$\lim_{x\to0} x^n = 0^+$$

mentre se n è dispari

$$\lim_{x\to0^+} x^n = 0^+ \qquad \lim_{x\to0^-} x^n = 0^-.$$

(b) (1) Sia dapprima n dispari e si fissi $\varepsilon>0$.

Si osservi che la disuguaglianza

$$|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0}| < \varepsilon$$

equivale a

$$\sqrt[n]{x_0}- \varepsilon < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{x_0} + \varepsilon$$

Quest'ultima per la stretta crescenza della funzione radice n-sima equivale a

$$(\sqrt[n]{x_0} - \varepsilon)^n < x < (\sqrt[n]{x_0} + \varepsilon)^n$$

Ancora per la stretta crescenza della funzione radice n-sima si ha

$$(\sqrt[n]{x_0} - \varepsilon)^n < x_0 < (\sqrt[n]{x_0} + \varepsilon)^n$$

Si ponga allora

$$\delta_\varepsilon = \min \{x_0 - (\sqrt[n]{x_0}-\varepsilon)^n, (\sqrt[n]{x_0}+\varepsilon)^n - x_0\}$$

Per x tale che $|x-x_0| < \delta_\varepsilon$ si avrà senz'altro

$$(\sqrt[n]{x_0}-\varepsilon)^n < x < (\sqrt[n]{x_0}+\varepsilon)^n$$

e quindi varrà

$$|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0}| < \varepsilon$$

Si avrà così

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}.$$

Se n è pari e $x_0>0$ pur di fissare $\varepsilon < \sqrt[n]{x_0}$ si può ripetere il ragionamento già svolto.
Se n è pari e $x_0=0$ fissato $\varepsilon>0$ e scelto $\delta_\varepsilon=\varepsilon^n$ si avrà per $0 < x < \delta_\varepsilon$, per la crescenza della funzione radice

$$0 < \sqrt[n]{x} < \varepsilon$$

e dunque anche in tal caso si avrà

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0} = 0.$$

(b) (2) Si fissi $\varepsilon > 0$ e si scelga $\delta_\varepsilon=\varepsilon^n$; si avrà allora per $x<-\delta_\varepsilon$ per la crescenza della funzione radice $\sqrt[n]{x} < -\varepsilon$ e dunque

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$$

(b) (3) Si fissi $\varepsilon>0$ e si scelga $\delta_\varepsilon=\varepsilon^n$ si avrà allora per $x>\delta_\varepsilon$, per la crescenza della funzione radice $\sqrt[n]{x} < \varepsilon$ e dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

(c) (1) Se α è positivo, fissato $\varepsilon>0$ si osservi che la disuguaglianza

$$0\le x^\alpha<\varepsilon$$

equivale per la stretta crescenza della funzione potenza α-esima a

$$0\le x<\varepsilon^{1/\alpha}$$

e quindi ponendo $\delta_\varepsilon=\varepsilon^{1/\alpha}$ si ha per $0\le x<\delta_\varepsilon$

$$x^\alpha<\varepsilon.$$

e dunque $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$

Se α è negativo, fissato $\varepsilon>0$, si osservi che la disuguaglianza

$$x^\alpha>\varepsilon$$

equivale per la stretta decrescenza della funzione potenza α-esima nel caso in esame a

$$0 < x < \varepsilon^{1/\alpha}$$

e quindi ponendo $\delta_\varepsilon=\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$ si ha

$$x^\alpha>\varepsilon$$

e dunque $\lim_{x\to 0} x^\alpha = +\infty$.

(c) (2) Si osservi che la disuguaglianza

$$x_0^\alpha - \varepsilon < x^\alpha < x_0^\alpha + \varepsilon$$

equivale a

$$(x_0^\alpha - \varepsilon)^{1/\alpha} < x < (x_0^\alpha + \varepsilon)^{1/\alpha}$$

se α è positivo per la crescenza della funzione potenza α-esima, a

$$(x_0^\alpha + \varepsilon)^{1/\alpha} < x < (x_0^\alpha - \varepsilon)^{1/\alpha}$$

se α è negativo per la decrescenza in tal caso della funzione potenza α-esima.

Si osservi ancora che se α è positivo

$$(x_0^\alpha - \varepsilon)^{1/\alpha} < x_0 < (x_0^\alpha + \varepsilon)^{1/\alpha}$$

e se α è negativo

$$(x_0^\alpha + \varepsilon)^{1/\alpha} < x_0 < (x_0^\alpha - \varepsilon)^{1/\alpha}$$

Pertanto ponendo se α è positivo

$$\delta_\varepsilon = \min\left\{x_0 - (x_0^\alpha - \varepsilon)^{1/\alpha},\ (x_0^\alpha + \varepsilon)^{1/\alpha} - x_0\right\}$$

e se α è negativo

$$\delta_\varepsilon = \min\left\{x_0 - (x_0^\alpha + \varepsilon)^{1/\alpha},\ (x_0^\alpha - \varepsilon)^{1/\alpha} - x_0\right\}$$

si ha per $x \in (x_0-\delta_\varepsilon,\ x_0+\delta_\varepsilon)$

$$|x^\alpha - x_0^\alpha| < \varepsilon$$

sicché

$$\lim_{x\to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha.$$

(c) (3) Se α è positivo la disuguaglianza

$$x^\alpha > \varepsilon$$

equivale per la crescenza della funzione potenza α-esima a

$$x > \varepsilon^{1/\alpha}$$

e pertanto ponendo

$$\delta_\varepsilon = \varepsilon^{1/\alpha}$$

si ha per $x > \delta_\varepsilon$

$$x^\alpha > \varepsilon$$

e dunque

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$$

Se α è negativo la disuguaglianza

$$x^\alpha < \varepsilon$$

equivale per la decrescenza della funzione potenza α-esima, a

$$x > \varepsilon^{1/\alpha}$$

Ponendo allora

$$\delta_\varepsilon = \varepsilon^{1/\alpha}$$

si ha per $x > \delta_\varepsilon$

$$x^\alpha < \varepsilon$$

e dunque

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$$

(d) (1) Poiche se $a=1$ $a^x=1$ per ogni x l'asserto è ovvio per $a=1$

Sia allora $a\neq 1$.

Si osservi che la disuguaglianza

$$a^{x_0}-\varepsilon < a^x < a^{x_0} + \varepsilon$$

equivale, se $a>1$, per la stretta crescenza della funzione esponenziale di base maggiore di 1, a

$$\lg_a (a^{x_0}-\varepsilon) < x < \lg_a (a^{x_0}+\varepsilon)$$

e se $a<1$ per la stretta decrescenza della funzione esponenziale di base minore di 1, e

$$\lg_a (a^{x_0}+\varepsilon) < x < \lg_a (a^{x_0}-\varepsilon)$$

Si osservi ancora che se $a>1$

$$\lg_a (a^{x_0}-\varepsilon) \overset{/}{\leftarrow} x_0 < \lg_a (a^{x_0}+\varepsilon)$$

e se $a<1$

$$\lg_a (a^{x_0}+\varepsilon) < x_0 < \lg_a (a^{x_0}-\varepsilon)$$

Pertanto ponendo se $a>1$

$$\delta_\varepsilon = \min \{x_0-\lg_a (a^{x_0}-\varepsilon),\ \lg_a (a^{x_0}+\varepsilon) - x_0\}$$

e se $a<1$

$$\delta_\varepsilon = \min \{x_0-\lg_a (a^{x_0}+\varepsilon),\ \lg_a (a^{x_0}-\varepsilon) - x_0\}$$

si ha per $x\in (x_0-\delta_\varepsilon,\ x_0+\delta_\varepsilon)$

$$|a^x-a^{x_0}| < \varepsilon$$

sicchè

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$$

(d) (2) Se $a=1$, $a^x=1$ e dunque il risultato è ovvio

Se $a>1$, la disuguaglianza

$$a^x>\varepsilon$$

Per la crescenza della funzione esponenziale di base maggiore di 1 equivale a

$$x > \lg_a\varepsilon$$

Posto allora $\delta_\varepsilon=\lg_a\varepsilon$ si ha per $x> \delta_\varepsilon$

$$a^x>\varepsilon$$

e dunque

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

Se $a<1$ si osservi che

$$a^x=1/(1/a)^x$$

Dunque essendo $1/a > 1$ per quanto gia visto e per la proprietà richiamata in (6)" si ha

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0.$$

(d) (3) Se $a=1$, $a^x=1$ e il risultato è ovvio, se $a\neq 1$, allora si osservi che

$$a^x=(1/a)^{-x}$$

Per quanto stabilito in (d)(2), per il teorema di composizione dei limiti osservando che quando x tende a $-\infty$, $-x$ tende a $+\infty$, si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \qquad a>1$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad a<1$$

(d) (4) La disuguaglianza

$$\lg_a x_0-\varepsilon < \lg_a x < \lg_a x_0 + \varepsilon$$

equivale, per a>1, per la stretta crescenza della funzione logaritmo di base maggiore di 1 a

$$a^{\lg_a x_0 - \varepsilon} < x < a^{\lg_a x_0 + \varepsilon}$$

e se a < 1 per la stretta decrescenza della funzione logaritmo di base minore di 1 a

$$a^{\lg_a x_0 + \varepsilon} < x < a^{\lg_a x_0 - \varepsilon}$$

Si osservi ancora che se a>1

$$a^{\lg_a x_0 - \varepsilon} < x_0 < a^{\lg_a x_0 + \varepsilon}$$

e se a<1

$$a^{\lg_a x_0 + \varepsilon} < x_0 < a^{\lg_a x_0 - \varepsilon}$$

Pertanto ponendo se a>1

$$\delta_\varepsilon = \min\left\{x_0-a^{\lg_a x_0 - \varepsilon},\ a^{\lg_a x_0 + \varepsilon} - x_0\right\}$$

e se a<1

$$\delta_\varepsilon = \min\left\{x_0-a^{\lg_a x_0 + \varepsilon},\ a^{\lg_a x_0 - \varepsilon} - x_0\right\}$$

si ha per $x\in(x_0-\delta_\varepsilon,\ x_0+\delta_\varepsilon)$

$$|\lg_a x - \lg_a x_0| < \varepsilon$$

sicché

$$\lim_{x\to x_0} \lg_a x = \lg_a x_0$$

d) (5) Se a>1 per la stretta crescenza della funzione logaritmo di base maggiore di 1, la disuguaglianza

$$\lg_a x > \varepsilon$$

equivale a

$$x > a^\varepsilon$$

Pertanto posto $\delta_\varepsilon=a^\varepsilon$ per $x>\delta_\varepsilon$ si ha

$$\lg_a x > \varepsilon$$

e dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \lg_a x = +\infty$$

Se a<1, per la formula di cambiamento di base nei logaritmi si ha

$$\lg_a x = \lg_{1/a} x \quad \lg_a 1/a = -\lg_{1/a} x$$

Poiché 1/a > 1, allora per quanto già provato si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \lg_a x = -\infty.$$

(d) (6) Poiché

$$\lg_a x = -\lg_a 1/x$$

per i risulati già ottenuti in (d) (5), per il teorema di composizione dei limiti e osservando che quando x tende a 0^+, 1/x tende a $+\infty$ si ha

$$\lim_{x\to0^+} \lg_a x = -\infty \quad a>1$$

$$\lim_{x\to0^+} \lg_a x = +\infty \quad a>1$$

(e) (1) Si osservi che

$$\text{sen } x - \text{sen} x_0 = 2 \text{ sen} \left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos \left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

Di conseguenza per le note disuguaglianze

$$|\text{sen } x| \leq |x| \quad |\cos x| \leq 1$$

si ha

$$|\text{sen} x - \text{sen} x_0| \leq |x-x_0|$$

Pertanto fissato $\varepsilon>0$ si ponga $\delta_\varepsilon=\varepsilon$, si ha allora per $x\in (x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon)$

$$|\text{sen} x - \text{sen} x_0| < \varepsilon$$

e dunque

$$\lim_{x\to x_0} \text{sen} x = \text{sen} x_0$$

(e) (2) Si osservi che

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \text{ sen} \left(\frac{x+x_0}{2}\right) \cdot \text{sen} \left(\frac{x-x_0}{2}\right)$$

Per le note disuguaglianze

$$|\text{sen} x| \leq |x| \quad |\text{sen} x| \leq 1$$

si ha

$$|\cos x - \cos x_0| \leq |x-x_0|$$

Pertanto fissato $\varepsilon>0$ si ponga $\delta_\varepsilon=\varepsilon$, si ha per $x\in (x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon)$

$$|\cos x - \cos x_0| < \varepsilon$$

e quindi

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$$

(e) (3) Basta applicare i risultati degli esercizi (e) (1), (e) (2) e la proprietà riportata nella formula (3).

(e) (4) Basta applicare i risultati degli esercizi (e) (1), (e) (2) e la proprietà riportata nella formula (7) osservando che per n intero.

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^+} \cos x = 0^- \qquad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^-} \cos x = 0^+$$

(e) (5) Si fissi $\varepsilon>0$ e sia x_0 diverso da 1 e -1. Allora grazie alla stretta crescenza della funzione arcoseno la disuguaglianza

$$\text{arcsen } x_0-\varepsilon < \text{arcsen } x < \text{arcsen } x_0 + \varepsilon$$

equivale a

$$\text{sen } (\text{arcsen } x_0-\varepsilon) < x < \text{sen } (\text{arcsen } x_0 + \varepsilon)$$

purchè

$$-\frac{\pi}{2} < \text{arcsen } x_0 - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \text{arcsen } x_0 + \varepsilon < \frac{\pi}{2}$$

(cosa possibile se ε è abbastanza piccolo in quanto $x_0\neq\pm 1$ e quindi $-\pi/2 < \text{arcsen } x_0 < \pi/2$)

Analogamente si ha

$$\text{sen } (\text{arcsen } x_0-\varepsilon) < x_0 < \text{sen } (\text{arcsen } x_0+\varepsilon)$$

Pertanto scegliendo

$$\delta_\varepsilon = \min \{x_0-\text{sen}(\text{arcsen } x_0-\varepsilon), \text{ sen } (\text{arcsen } x_0+\varepsilon) - x_0\}$$

si ha per $x \in (x_0-\delta_\varepsilon,\ x_0+\delta_\varepsilon)$

$$|\text{arcsen } x - \text{arcsen } x_0| < \varepsilon$$

e quindi

$$\lim_{x\to x_0} \text{arcsen } x = \text{arcsen } x_0$$

I casi $x_0=+1$ e $x_0=-1$ si analizzano in maniera analoga osservando che si tratta di studiare rispettivamente un limite solo da sinistra e un limite solo da destra.

(e) (6) Si fissi $\varepsilon>0$ e sia x_0 diverso da 1 e -1. Per la stretta decrescenza della funzione arcocoseno, la disuguaglianza

$$\arccos x_0-\varepsilon < \arccos x < \arccos x_0+\varepsilon$$

equivale a

$$\cos(\arccos x_0+\varepsilon) < x < \cos(\arccos x_0-\varepsilon)$$

purchè

$$0 < \arccos x_0 - \varepsilon < \pi$$

$$0 < \arccos x_0 + \varepsilon < \pi$$

(cosa possibile se ε è sufficientemente piccolo in quanto $x_0 \neq \pm 1$ e quindi $0<\arccos x_0<\pi$)

Si ha anche

$$\cos(\arccos x_0+\varepsilon) < x_0 < \cos(\arccos x_0-\varepsilon)$$

Pertanto scegliendo

$$\delta_\varepsilon=\min\{x_0-\cos(\arccos x_0+\varepsilon),\ \cos(\arccos x_0-\varepsilon)-x_0\}$$

si ha per $x \in (x_0-\delta_\varepsilon,\ x_0+\delta_\varepsilon)$

$$|\arccos x-\arccos x_0|<\varepsilon$$

e quindi

$$\lim_{x\to x_0} \arccos x = \arccos x_0$$

(e) (7) Si ripetano considerazioni del tipo di quelle svolte in (e) (5) utilizzando la stretta crescenza della funzione arcotangente.

(e) (8) Proviamo che

$$\lim_{x\to\infty} \text{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Si osservi che per ogni x

$$\text{arctg} x < \frac{\pi}{2}$$

Si fissi $\varepsilon>0$, basterà provare allora l'esistenza di un $\delta_\varepsilon>0$ tale che per ogni $x>\delta_\varepsilon$ si abbia

$$\text{arctg} x > \frac{\pi}{2} - e.$$

Si osservi che per la stretta crescenza della funzione arcotangente tale disuguaglianza equivale a

$$x > \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$$

Bastera porre allora $\delta_\varepsilon=\text{tg}(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)$.

Analogamente si prova che

$$\lim_{x\to-\infty} \text{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

(f) (1) Si osservi che la funzione senx/x è una funzione pari in quanto sia senx che x sono dispari.

Basterà allora provare che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}x}{x} = 1.$$

in quanto, ciò fatto per provare che

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$$

basterà osservare che

$$\frac{\text{sen}x}{x} = \frac{\text{sen}\,(-x)}{-x}$$

che quando x tende a 0^-, $-x$ tende a 0^+ e applicare il teorema di composizione dei limiti.

Per provare che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$$

basta ricordare le due disuguaglianze

$$0 < \text{sen}\, x < x \qquad \text{per } 0<x<\pi$$

$$0 < x < \text{tg}x \qquad \text{per } 0 < x < \pi/2$$

Si può allora dedurre ricordando che tgx = senx/cosx

$$\frac{1}{\cos x} < \frac{\text{sen}x}{x} < 1$$

Poichè

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} = 1$$

dal teorema dei Carabinieri si può subito dedurre quanto si desidera provare

(f) (2) La dimostrazione di tale limite è omessa. Essa è riportata nella quasi totalità dei testi di Analisi.

3. Forme indeterminate, infinitesimi ed infiniti.

3.1 Nota introduttiva alle forme indeterminate

Le regole che determinano il comportamento rispetto all'operazione di limite delle combinazioni algebriche di funzioni (come ad esempio somme, prodotti e quozienti di funzioni) non sono, come già detto, in taluni casi applicabili.

Tali casi vengono detti forme (o casi) indeterminate e vengono designati generalmente con i seguenti simboli

$$(+\infty) - (+\infty);\ (-\infty) - (-\infty);\ 0\cdot(\pm\infty);\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty};\ \frac{0}{0}$$

Con essi vengono riassunte quelle situazioni nelle quali, date due funzioni, f e g si ha

(a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$

e si deve studiare il limite

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x)$$

(b) $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$

e si deve studiare il limite

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$$

(c) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$

e si deve studiare il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(d) $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim g(x) = 0$

e si deve studiare il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Forme indeterminate vengono anche considerate le seguenti situazioni nelle quali

(e) $\lim_{x\to x_0} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$

e si deve studiare il limite

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)}$$

(f) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

e si deve studiare il limite

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)}$$

(g) $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

e si deve studiare il limite

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)}$$

Lo studio dei casi (e), (f), (g) si riconduce allo studio del caso (b) grazie all'osservazione che

$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\lg f(x)}$$

e ad un'applicazione del teorema di composizione dei limiti in virtù del quale se esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0} g(x) \lg f(x)$$

esiste allora anche il limite

$$\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\lg f(x)}$$

e vale l'identità

$$\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\lg f(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\lg f(x)}$$

I casi indeterminati (e), (f), (g) vengono denotati con i simboli, rispettivamente

$$1^{\pm\infty};\ (+\infty)^0;\ 0^0$$

Lo studio delle forme indeterminate in generale non è di natura 'meccanica'. Esso si basa sull'accorto esame delle proprietà delle funzioni che intervengono e su alcuni strumenti teorici, più precisamente su

(i) la conoscenza dei limiti 'notevoli', che descrivono il comportamento delle funzioni elementari e il cui uso dovrebbe essere automatico

(ii) la regola sui limiti delle funzioni composte (o regola di composizione dei limiti)

(iii) i teoremi di confronto, tra i quali si può far rientrare l'osservazione che il prodotto di una funzione infinitesima in un punto per una funzione limitata è infinitesimo

(iv) i teoremi di de l'Hopital, che non utilizzeremo in

questo paragrafo in quanto presuppongono la conoscenza del calcolo differenziale.

Osserviamo esplicitamente infine che di frequente è utile l'accorgimento di procedere separatamente allo studio del limite sinistro e di quello destro.

Qualora si arrivi ad esempio a stabilire che uno dei due non esiste o che essi sono distinti si potrà subito desumere da ciò la non esistenza del limite in esame.

3.2 Limiti notevoli relativi alle funzioni trigonometriche e alle loro inverse

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}x}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$?

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} = 0$

4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\pi/2 - x} = 1$

5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg}x = 1$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen}x}{x} = 1$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\pi/2 - \arccos x}{x} = 1$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}x}{x} = 1$

9) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\pi/2 - \operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2}$

10) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}x\right) x = 1$

Risoluzioni

1) Si osservi che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x}{x} \lim_{x\to 0} \cos x = 1\cdot 1$$

2) Si ha grazie alle formule di prostaferesi

$$1-\cos x = \cos 0 - \cos x = -2 \operatorname{sen}\frac{x}{2} \operatorname{sen}\left(-\frac{x}{2}\right) = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2},$$

e quindi grazie anche alla sostituzione $y=x/2$ e al fatto che $\lim\limits_{y\to 0} \operatorname{sen} y/y=1$ si ha

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{y\to 0} 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}/x^2 =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}/\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

3) Poiché la funzione $(\operatorname{sen}x - x)/x^2$ è dispari basta provare che $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}x - x}{x^2} = 0.$

Si osservi che per $0 \le x < \frac{\pi}{2}$

$$0 \le x - \text{sen}x < \text{tg}x - \text{sen}x$$

ma tenendo conto del limite notevole 2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}x-\text{sen}x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)/x =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x} =$$

$$= 1\cdot 1\cdot 0 =$$

Si può allora utilizzare il teorema dei Carabinieri per concludere che

$$0 \le \lim_{x\to 0^+} \frac{x-\text{sen}x}{x^2} \le \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{tg}x-\text{sen}x}{x^2} = 0$$

4) Con la sostituzione $y=\frac{\pi}{2}-x$ si ha

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi/2-x} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos(\pi/2-y)}{y}$$

Grazie alle formule di addizione $\cos\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\, y$ e dunque

$$\lim_{y\to 0} \frac{\cos(y-\pi/2)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\text{sen}y}{y} = 1$$

5) Si osservi che

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{tg}x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \text{sen}x \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)/\cos x$$

e si applichi il limite notevole 4)

6) Con la sostituzione y=arcsenx si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{arcsen}x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{arcsen}x}{\text{sen}\,(\text{arcsen}x)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\text{sen}y} = 1$$

7) Con la sostituzione y = arccosx e grazie al limite notevole 4) si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\pi/2-\arccos x}{x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\pi/2-y}{\cos y} = 1$$

8) Con la sostituzione y=arctgx e grazie al limite notevole 1) si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{arctg}x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{y}{\text{tg}y} = 1$$

9) Con la sostituzione y=arcsenx si ottiene

$$\lim_{x\to 1} \frac{\pi/2-\text{arcsen}x}{\sqrt{1-x}} = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \frac{\pi/2-y}{\sqrt{1-\text{sen}y}} = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi/2-y)\sqrt{1+\text{sen}y}}{\sqrt{1-\text{sen}^2 y}}$$

$$= \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \frac{\pi/2-y}{\cos y} \quad \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\text{sen}y} = \sqrt{2}$$

Si osservi che il limite è per $x\to 1^-$, e quindi per $y\to\frac{\pi}{2}^-$

10) Con la sostituzione arctgx=y si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} (\pi/2-\text{arctg}x)\, x = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} (\pi/2-y)\, \text{tg}y =$$

$$= \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi/2-y)}{\cos y} \quad \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \text{sen}y = 1.$$

3.3 Limiti notevoli relativi alle funzioni esponenziali, logaritmiche e potenze.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad a>1$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \lg x = 0 \qquad \alpha>0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lg x}{x^\alpha} = 0 \quad \alpha>0$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\lg x) = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to 0} (1+ax)^{1/x} = e^a$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(1+x)}{x} = 1$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg_a(1+x)}{x} = \lg_a e = \dfrac{1}{\lg_e a}$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \lg a$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$

Risoluzioni

1) Sia $\alpha > 0$ dal momento che se è $\alpha \le 0$ il limite è immediato. Se con $|x|$ si denota la funzione parte intera di x si ha $|x| \le x \le |x| +1$ e dunque

$$\frac{a^{|x|}}{(|x| + 1)^\alpha} \le \frac{a^x}{x^\alpha} \le \frac{a^{|x|+1}}{|x|^\alpha}$$

D'altro canto poiché $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$ (cfr. par. 1.4 tab.2 i))

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}}{(n)^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{(n+1)^\alpha} = +\infty$$

e grazie al teorema sulla composizione dei limiti si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{|x|}}{(|x| + 1)^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^{|x|+1}}{|x|^\alpha} = +\infty$$

Dal teorema dei Carabinieri si conclude allora subito che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$$

2) Con la sostituzione $y=\lg x$ e quindi con la sostituzione $y=-t$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \lg x = \lim_{y\to-\infty} y\, e^{\alpha y} = -\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{(e^\alpha)^t}$$

e dunque utilizzando il limite 1) si ottiene il risultato cercato.

3) Con la sostituzione $y=\lg x$ e utilizzando il limite 1) si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{x^\alpha} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{(e^\alpha)^y} = 0$$

4) Con la sostituzione $y=\lg x$ e utilizzando il limite 1) si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} x-\lg x = \lim_{y\to+\infty} e^y-y = \lim_{y\to+\infty} e^y\left(1 - \frac{y}{e^y}\right).$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^y \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{y}{e^y}\right) = +\infty \quad 1 = +\infty$$

5) Con la sostituzione $ax=y$, utilizzando il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ e applicando il teorema di composizione dei limiti alla funzione potenza si ha

$$\lim_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{a}{y}} = \left(\lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^a = e^a$$

6) Applicando il teorema di composizione dei limiti alla funzione logaritmo e al limite notevole $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \lg(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

7) Poiché $\lg_a x = \lg x \ \lg_a e$ si ha subito dal limite 6)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lg_a(1+x)}{x} = \lg_a e \ \lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)}{x} = \lg_a e.$$

8) Con la sostituzione $y=e^x$ e poi con quella $\tau=y-1$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{\lg y} = \lim_{\tau\to 0} \frac{\tau}{\lg(1+\tau)}$$

si può ora applicare il limite 6)

9) Poiché $a^x=e^{x\lg a}$ con la sostituzione $y=x\lg a$ si ha grazie al limite 6)

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\lg a}-1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} \lg a = 1 \lg a = \lg a.$$

10) Osservando che $(1+x)^\alpha=e^{\alpha \lg(1+x)}$ e utilizzando il limite 6) si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \lg(1+x)}-1}{\lg(1+x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)}{x} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \lg(1+x)}-1}{\lg(1+x)}$$

e con la sostituzione $\alpha\lg(1+x)=y$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \lg(1+x)}-1}{\lg(1+x)} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} \alpha = \alpha$$

3.4 Funzioni razionali

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x+1}{4x+3}$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2+x-1}{8x^3+3x^2-5}$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^5+1}{5x^5-8}$

4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{8x^4+2}{-x^3+2x+1}$

5) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg^3 x + \lg x + 1}{\lg^4 x + 3}$

6) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{6x} + e^x + 2}{e^{4x} + 1}$

7) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3}$

8) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^3 + x^2 - 2x - 8}$

9) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^3 - 4x^2 - 16x + 64}$

10) $\lim_{x\to 1} \frac{x + \sqrt{x} - 2}{x + 2\sqrt{x} - 3}$

11) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x + 2}{\operatorname{sen}^2 x - 1}$

12) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x - \pi^2/4}{\operatorname{arctg}^2 x + (1-\pi/2)\operatorname{arctg} x - \pi/2}$

Risultati

1) $+\infty$	2) 0	3) 6/5	4) $-\infty$
5) 0	6) $+\infty$	7) 0	8) 0
9) non esiste	10) 3/4	11) $-1/2$	12) $2\pi/(2+\pi)$

Risoluzioni (1, 3, 5, 7, 9, 11)

1) Ponendo in evidenza al numeratore x^2 e al denominatore x, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x+1}{4x+2} = \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \Big/ x \left(4 + \frac{2}{x}\right)$$

Semplificando e osservando che

$$\lim_{x\to+\infty} \left(3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 3, \quad \lim_{x\to+\infty} \left(4 + \frac{2}{x}\right) = 4$$

si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x+1}{4x+2} = \frac{3}{4} \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

3) Ponendo in evidenza al numeratore e al denominatore x^5 si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^5+1}{5x^5-8} = \lim_{x\to+\infty} x^5 \left(6 + \frac{1}{x^5}\right) \Big/ x^5 \left(5 - \frac{8}{x^5}\right)$$

semplificando e osservando che

$$\lim_{x\to+\infty} \left(6 + \frac{1}{x^5}\right) = 6 \quad \lim_{x\to+\infty} \left(5 - \frac{8}{x^5}\right) = 5$$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^5+1}{5x^5-8} = \frac{6}{5}$$

5) Con la sostituzione $y=\lg x$ si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg^3 x + \lg x + 1}{\lg^4 x + 3} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^3 + y + 1}{y^4 + 1} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{y^3}{y^4} \; \frac{1 + 1/y^2 + 1/y^3}{1 + 1/y^4} = 0$$

7) Sia il polinomio x^3-3x+2 che il polinomio x^2+2x-3 si annullano in 1. Eseguendo la divisione per $x-1$ secondo la regola di Ruffini si ottiene

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

	1	2	-3
1		1	3
	1	3	0

e quindi

$$\lim_{x\to1} \frac{x^3-3x+2}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)}{(x-1)} \; \frac{(x^2+x-2)}{(x+3)} = 0$$

9) Sia il polinomio x^2-3x-4 che il polinomio $x^3-4x^2-16x+64$ si annullano in 4. Eseguendo la divisione per $x-4$ secondo la regola di Ruffini si ha

	1	-3	-4
4		4	4
	1	1	0

	1	-4	-16	+64
4		4	0	-64
	1	0	-16	0

e quindi

$$\lim_{x\to4} \frac{x^2-3x-4}{x^3-4x^2-16x+64} = \lim_{x\to4} \frac{x-4}{x-4} \; \frac{x+1}{x^2-16}$$

$$= \lim_{x\to4} \frac{x+1}{x+4} \; \frac{1}{x-4} = \frac{5}{4} \lim_{x\to4} \frac{1}{x-4}$$

ma

$$\lim_{x\to4^+} \frac{1}{x-4} = +\infty \quad \lim_{x\to4^-} \frac{1}{x-4} = -\infty$$

e dunque il limite cercato non esiste, pur esistendo il limite sinistro e quello destro.

11) Con la sostituzione y = senx si ottiene

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen}x + 2}{\operatorname{sen}^2 x - 1} = \lim_{y\to -1} \frac{y^2+3y+2}{y^2-1}$$

Grazie alla regola di Ruffini applicata al polinomio y^2+3y+2 che si annulla in -1 si ha

	1	3	2
−1		−1	−2
	1	2	0

e dunque

$$\lim_{y\to -1} \frac{y^2+3y+2}{y^2-1} = \lim_{y\to -1} \frac{y+1}{y+1}\,\frac{y+2}{y-1} = -\frac{1}{2}$$

3.5 Funzioni trigonometriche

1) $\lim_{x\to+\infty} (x^2 + \cos x)$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-\operatorname{sen}^2 x}{x^3}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}^4 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{arctg}^2 x - x^2}{\operatorname{sen}^2 x}$

4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\cos 2x)/\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

5) $\lim_{x\to+\infty} x \cos x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$

6) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}x} - \frac{1}{x}\right)$

7) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}x}{(1-\cos x)^{\frac{1}{2}}}$

8) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - (\operatorname{sen}^2 2x)/4}{\operatorname{sen}^4 3x}$

9) $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(1-x^2)}{1-x}$

10) $\lim_{x\to+\infty} x^2 \operatorname{tg}\frac{1}{x^2}$

11) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \operatorname{tg}x}$

12) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi^3}{2^3} - \operatorname{arctg}^3 x\right) x^2$

13) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x+\operatorname{sen}x}{1-\cos x + \operatorname{tg}x}$

14) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + \operatorname{sen}^2 x}{1-\cos^2 x}$

15) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \operatorname{sen}x}{(\pi-4x)}$

16) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{x(1-\cos x)}$

Risultati

1) $+\infty$	2) non esiste	3) 0	4) 2
5) 0	6) 0	7) non esiste	8) $2/3^4$
9) 3/2	10) 1	11) 3	12) $+\infty$
13) 1	14) 3/2	15) $\sqrt{2}/4$	16) 2

Risoluzioni (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15)

1) Si osservi che

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+\cos x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1+\frac{\cos x}{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{\cos x}{x^2}$$

Ora $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ mentre $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\cos x}{x^2}\right) = 1$

in quanto

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

e $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$.

3) Si ha ovviamente

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arcsen}^4 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{arctg}^2 x - x^2}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arcsen}^4 x}{\operatorname{sen}^2 x} +$$

$$+ \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} - \lim_{x\to0}\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arcsen}^4 x}{x^2} + \lim_{x\to0}\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}^3 x}{x^2} +$$

$$+ \lim_{x\to0}\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2} - \lim_{x\to0}\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Si può ora ricordare che

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

per dedurre che il limite proposto esiste e vale 0.

5) Si può osservare che per $x>0$

$$\left|x\cos x\operatorname{sen}^2\frac{1}{x}\right| \le x\operatorname{sen}^2\frac{1}{x}$$

D'altro canto con la sostituzione $y=1/x$ si ha subito

$$\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{sen}^2\frac{1}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{sen}^2 y}{y} = 0$$

e quindi per il teorema del confronto il limite proposto vale 0.

7) Si ha

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{(1-\cos x)^{\frac12}} = \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\quad\lim_{x\to0}\frac{x}{(1-\cos x)^{\frac12}}$$

Ora $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1$

D'altro canto $\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)}{x^2} = \frac12$ e pertanto

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{(1-\cos x)^{\frac12}} = \sqrt2 \qquad \lim_{x\to0^-}\frac{x}{(1-\cos x)^{\frac12}} = -\sqrt2$$

Ne segue che $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{(1-\cos x)^{\frac12}}$ non esiste pur esistendo il limite destro (che vale $\sqrt2/2$) e quello sinistro che vale $(-\sqrt2/2)$.

9) Basta osservare che

$$\lim_{x\to1}\frac{\operatorname{sen}(1-x^2)}{1-x} = \lim_{x\to1}\frac{\operatorname{sen}(1-x^2)}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^2}{1-x} = \lim_{x\to1}\frac{\operatorname{sen}(1-x^2)}{1-x^2}\cdot 2$$

D'altro canto con la sostituzione $y=1-x^2$ si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}\left(1-x^2\right)}{1-x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$$

Pertanto il limite proposto vale 2.

11) Ricordando che $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x+\cos^2 x)}{x \operatorname{tg} x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \cdot \lim_{x\to 0} \left(1+\cos x+\cos^2 x\right)$$

Poiché $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$ e infine

$\lim_{x\to 0} \left(1+\cos x+\cos^2 x\right) = 3$, il limite proposto esiste e vale 3/2

13) Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x+\operatorname{sen} x}{1-\cos x+\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1+(1-\cos x)/\operatorname{sen} x}{1+(1-\cos x)/\operatorname{tg} x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \cos x \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\operatorname{sen} x} + 1\right) \Big/ \left(\frac{1-\cos x}{x^2} \frac{x^2}{\operatorname{tg} x} + 1\right)$$

Poiché si ha

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} x \quad \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \cos x \frac{x^2}{\operatorname{sen} x} = 0$$

il limite in esame esiste e vale 1.

15) Si osservi che

$$\cos x - \operatorname{sen} x = \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{sen} x =$$

$$- 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+\pi/4}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-\pi/4}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{x+\pi/4}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi/4-x}{2}\right) =$$

$$= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi/4-x}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{x+\pi/4}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+\pi/4}{2}\right)\right)$$

Di conseguenza grazie alla sostituzione $y = (\pi/4-x)/2$ e al limite notevole $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x/x=1$, si ha

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\pi/4-x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{x+\pi/4}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+\pi/4}{2}\right)\right)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi/4-x}{2}\right)\right) \Big/ \left(\frac{\pi/4-x}{2}\right)$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{x+\pi/4}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi/4+x}{2}\right)\right) = \sqrt{2}.$$

.6 Funzioni potenze

1) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$

2) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+1}}{x\sqrt{1+x}}$

3) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

4) $\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x}\right)$

5) $\lim_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}\right)$

6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{tgx+3}-\sqrt{tgx+1}\right)$

7) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x+4}\right)$

8) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^2+2}}{x}$

9) $\lim_{x\to+\infty} lgx\left(\sqrt[3]{lg^2x}-\sqrt[3]{lg^2x+3}\right)$

0) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[5]{x^2+x+1}-\sqrt[5]{x^2}\right)$

1) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[4]{x^2+x+1}-\sqrt[4]{x^2+3}\right)$

12) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[17]{x+2}-\sqrt[17]{x-1}\right)$

3) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[4]{x^3+1}-\sqrt[2]{x\sqrt{x}+x}\right)\sqrt{x}$

4) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[9]{x}-\sqrt[9]{x-1}\right)x^{8/9}$

isultati

1) $+\infty$	2) 1	3) 0	4) 1/2
5) $+\infty$	6) 0	7) 0	8) 0
9) 0	10) 0	11) 0	12) 0
3) $-\infty$	14) 1/9		

Risoluzioni (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13)

1) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}-1\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}-1\right) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$$

3) Razionalizzando grazie al prodotto notevole $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$$

5) Razionalizzando, ancora grazie al prodotto notevole $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ si ottiene

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\right) = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x\sqrt{x^2+x}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{x}{x\sqrt{x^2+x}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)} = +\infty$$

7) Razionalizzando grazie al prodotto notevole $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x+4} = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x+4}\right)$$

$$\cdot \frac{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)(x+4)}+\sqrt[3]{(x+4)^2}\right)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)(x+4)}+\sqrt[3]{(x+4)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} - \frac{3}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt{(x+1)\,(x+4)}+\sqrt[3]{(x+4)^2}} = 0$$

9) Razionalizzando grazie al prodotto notevole

$$a^3-b^3=(a-b)\ (a^2+ab+b^2)$$

e utilizzando la sostituzione $y=\lg x$ si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \lg x \left(\sqrt[3]{\lg^2 x}-\sqrt[3]{\lg^2 x+3}\right) = \lim_{y\to+\infty} y \left(\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{y^2+3}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} y \left(\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{y^2+3}\right) \frac{\left(\sqrt[3]{y^4}+\sqrt[3]{y^2(y^2+3)}+\sqrt[3]{(y^2+3)^2}\right)}{\sqrt[3]{y^4}+\sqrt[3]{y^2(y^2+3)}+\sqrt[3]{(y^2+3)^2}}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} - \frac{3y}{y^{4/3}\left(1+\sqrt[3]{1+3/y^2}+\sqrt[3]{(1+3/y^2)^2}\right)} = 0$$

11) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{x^2+x+1} - \sqrt[4]{x^2+3} = \lim_{x\to+\infty} x^{1/2}\left[\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{1/4}-\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{1/4}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/2}\left[\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{1/4}-1+1-\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{1/4}\right]$$

D'altro canto grazie alla sostituzione $y=1/x+1/x^2$ e al limite notevole (cfr. par. 3.3 es. 10)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+1/x+1/x^2)^{1/4}-1}{1/x+1/x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{(1+y)^{1/4}-1}{y} = \frac{1}{4}$$

e analogamente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-(1+3/x^2)^{1/4}}{3/x^2} = -\frac{1}{4}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/2}\left[\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{1/4}-1+1-\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{1/4}\right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/2}\left(1/x+1/x^2\right)\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[(1+1/x+1/x^2)^{1/4}-1\right]}{1/x+1/x^2}+$$

$$+\lim_{x\to+\infty} x^{1/2}\frac{3}{x^2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[1-(1+3/x^2)^{1/4}\right]}{3/x^2}$$

$$= 0\cdot\frac{1}{4}+0\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

13) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x^3+1}-\sqrt[2]{x^{3/2}+x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{1/2}\,x^{3/4}\left[\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{1/4}-1+1-\left(1+\frac{1}{x^{1/2}}\right)^{1/2}\right]$$

D'altro canto grazie alla sostituzione $y=1/x^3$ e al limite notevole

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$$

si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+1/x^3)^{1/4}-1}{1/x^3} = \lim_{y\to+\infty} \frac{(1+y)^{1/4}-1}{y} = \frac{1}{4}$$

e analogamente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-(1+1/x^{1/2})^{1/2}}{1/x^{1/2}} = -\frac{1}{2}$$

Si ha così

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x^3+1} - \sqrt[2]{x^{3/2}+x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/4}}{x^3} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+1/x^3)^{1/4}-1}{1/x^3} +$$

$$+ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/4}}{x^{1/2}} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1-(1+1/x^{1/2})^{1/2}}{1/x^{1/2}} = 0 \cdot \frac{1}{4} + (+\infty) \cdot -\frac{1}{2} = -\infty$$

3.7 Funzioni esponenziali e logaritmiche

1) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2^x+1}{2}\right)^{1/x}$

2) $\lim_{x\to+\infty} \lg(x^4-x^2+1) - \lg x$

3) $\lim_{x\to+\infty} (1+e^x)^{1/x}$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x}$

5) $\lim_{x\to+\infty} x \lg\left(1+\frac{1}{2x}\right)$

6) $\lim_{x\to+\infty} 4^{-x^2}(4^x-3^x)$

7) $\lim_{x\to 0} \lg_{(x^2+1)}(x^3+1)$

8) $\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+2x+3x^2)}{x}$

9) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^x$

10) $\lim_{x\to+\infty} (e^{1/x^2}-1)\, x^2$

11) $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$

12) $\lim_{x\to 0} x^x$

13) $\lim_{x\to+\infty} (\lg x)^{1/\lg x}$

14) $\lim_{x\to 1^+} (\lg x)^{\lg x}$

15) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg_{10}(x+1)}{\lg_4 x}$

16) $\lim_{x\to+\infty} x\,(2^{1/x}-1)$

17) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg(x^3+1)}{\lg(x^2+1)}$

18) $\lim_{x\to+\infty} e^x/x^x$

19) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \lg \frac{1+x}{1-x}$

20) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)^{x+2}\, x^x}{(x+1)^{2(x+1)}}$

Risultati

1) $\sqrt{2}$ 2) $+\infty$ 3) e 4) 0

5) $1/2$ 6) 0 7) 0 8) 2

9) 1 10) 1 11) 1 12) 1

13) 1	14) 1	15) lg 4/ lg 10	16) lg2
17) 3/2	18) 0	19) 2	20) 1

Risoluzioni (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19)

1) Si osservi che

$$\left(\frac{2^x+1}{2}\right)^{1/x} = e^{\lg[(2^x+1)/2]/x}$$

D'altro canto

$$\frac{1}{x}\lg\frac{2^x+1}{2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{2}{2^x-1}\,\frac{2^x-1}{2}\lg\left(1+\frac{2^x-1}{2}\right)$$

Grazie al limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lg a$$

si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x} = \lg 2$$

Grazie alla sostituzione $y = (2^x-1)/2$ e al limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{\lg(1+x)}{x} = 1$$

si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{2^x-1}\lg\left(1+\frac{2^x-1}{2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\lg(1+y)}{y} = 1$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+1}{2}\right)^{1/x} = e^{1\cdot\lg 2\cdot 1/2} = \sqrt{2}$$

3) Si osservi che

$$(1+e^x)^{1/x} = e^{\lg(1+e^x)/x}$$

D'altro canto

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\lg(1+e^x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\lg\frac{1+e^x}{e^x}e^x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\lg\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\lg e^x = 1$$

in quanto

$$\lim_{x\to+\infty}\lg\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \lg 1 = 0$$

Si ottiene cosi

$$\lim_{x\to+\infty}(1+e^x)^{1/x} = e^1 = e$$

5) Grazie alla sostituzione $y = 1/2x$ e al limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{\lg(1+x)}{x} = 1$$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x\lg(1+1/2x) = \lim_{y\to 0}\frac{\lg(1+y)}{2y} = \frac{1}{2}$$

7) Ricordando che

$$\lg_b a = \lg_e a \,/\, \lg_e b$$

utilizzando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)}{x} = 1$$

e le sostituzioni $y=x^3$, $z=x^2$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \lg_{(x^2+1)}(x^3+1) = \lim_{x\to 0} \frac{\lg(x^3+1)}{\lg(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x^3)}{x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\lg(x^2+1)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\lg(1+y)}{y} \cdot \lim_{z\to 0} \frac{z}{\lg(1+z)} \lim_{x\to 0} x = 0$$

9) Si osservi che

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^x = e^{x \lg[(x^2+1)/(x^2-1)]}$$

D'altro canto si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x \lg\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{2}{x^2-1} \frac{x^2-1}{2} \lg\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2-1} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2} \lg\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)$$

Grazie alla sostituzione $y = 2/(x^2-1)$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2} \lg\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = 1$$

e pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^x = e^{0\cdot 1} = 1$$

11) Si osservi che

$$x^{1/x} = e^{\lg x/x}$$

D'altro canto (cfr. 3.3 es. 3)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{x} = 0$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = e^0 = 1$$

13) Si osservi che

$$(\lg x)^{1/\lg x} = e^{\lg \lg x/\lg x}$$

D'altro canto con il cambiamento di variabile $y=\lg x$ e grazie al limite notevole 3.3 es. 3 si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg \lg x}{\lg x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\lg y}{y} = 0$$

Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} (\lg x)^{1/\lg x} = e^0 = 1$$

15) Si osservi che grazie alle proprietà dei logaritmi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg_{10}(x+1)}{\lg_4 x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\lg(x+1)}{\lg x} \frac{\lg_{10} e}{\lg_4 e} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg(x+1)}{\lg x} \frac{\lg 4}{\lg 10}$$

D'altro canto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg(x+1)}{\lg x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x + \lg(1+1/(x))}{\lg x} = 1$$

e pertanto il limite proposto vale lg4/lg10

17) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg(x^3+1)}{\lg(x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\lg[x^3(1+1/x^3)]}{\lg[x^2(1+1/x^2)]} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\lg x + \lg(1+1/x^3)}{2\lg x + \lg(1+1/x^2)} = \frac{3}{2}$$

19) Si ha

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{x} \lg \frac{1+x}{1-x} = \lim_{x\to0} \frac{1}{x} \lg\left(1+\frac{2x}{1-x}\right) =$$

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{2x}{1-x}\right) \cdot \lg\left(1+\frac{2x}{1-x}\right) / \frac{2x}{1-x} =$$

$$= 2 \cdot \lim_{x\to0} \lg\left(1+\frac{2x}{1-x}\right) / \frac{2x}{1-x}$$

Grazie alla sostituzione y=2x/(1-x) al limite notevole 3.3 es. 6) si ha

$$\lim_{x\to0} \lg\left(1+\frac{2x}{1-x}\right) / \frac{2x}{1-x} = \lim_{y\to0} \frac{\lg(1+y)}{y} = 1$$

e pertanto il limite proposto vale 2.

3.8 Esercizi riassuntivi

1) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\right)^x$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+\operatorname{sen}x}{\lg x}$

3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (1+\cos x-\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{x-\pi/4}}$

4) $\lim_{x\to0} \frac{2^{\operatorname{tg}x}}{x}$

5) $\lim_{x\to0} \frac{\cos^2x + 2\cos x-3}{\operatorname{tg}x \lg(1+\operatorname{sen}x)}$

6) $\lim_{x\to0} \operatorname{sen}\frac{1}{x} \frac{\operatorname{arcsen}^2x}{\lg(1+x)}$

7) $\lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x-2}}{\lg x}$

8) $\lim_{x\to0} \operatorname{sen} e^{\frac{1}{x}}$

9) $\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]+\cos x}{x}$

10) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2^{\operatorname{tg}x}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

11) $\lim_{x\to0} \frac{x}{e^x-\operatorname{tg}x-3^x}$

12) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x^3-\operatorname{arctg}x}{e^x-x}$

13) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg}x+x^2-\operatorname{sen}x}{x^3+\lg(1+x)}$

14) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{arcsen}x - \sqrt{x} + x}{e^{x^2}+\operatorname{sen}^2x-1}$

15) $\lim_{x\to0} \frac{2^{\lg^2(1+x)}-2^x}{\operatorname{tg}x}$

16) $\lim_{x\to0} \frac{x \operatorname{sen}x}{e^x-1}$

17) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}|x|}{x}$

18) $\lim_{x\to1^-} \frac{(\operatorname{arcsen}x-\pi/2)^2}{\sqrt{x}-1}$

19) $\lim_{x\to1^-} \frac{1}{\lg x}\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+x^2}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right)$

20) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\operatorname{sen}^2x+\operatorname{sen}x-4}{\lg\left(1+\frac{\pi}{2}-x\right)}$

21) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\lg \operatorname{sen}x}{\cos x}$

22) $\lim_{x\to0} \frac{3e^{2x}-e^x-2}{\operatorname{sen}\pi x}$

23) $\lim_{x\to0} \frac{e^{|x|}-1}{x}$

24) $\lim_{x\to1} \frac{e^{|x-1|}-1}{1-x}$

25) $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$

26) $\lim_{x\to2} \frac{\lg x-\lg 2}{e^x-e^2}$

27) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}(x-[x]) \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

28) $\lim_{x\to1} \frac{|x^2+x-2|}{|\operatorname{arcsen}(x-1)|}$

29) $\lim_{x\to0} \frac{x-\operatorname{tg}x}{(e^x-1)^2}$

30) $\lim_{x\to 1} \frac{e^x-e}{\sqrt{x}-1}$

31) $\lim_{x\to 0} \left(1+\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}$

32) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(1+\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)^{1/\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

33) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{2}-\cos x}{e^{\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}-1}$

34) $\lim_{x\to 0} \frac{\lg\left(1+x^2\right)}{\operatorname{arcsen}x - \sqrt{x} + \operatorname{tg}x}$

35) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x - x}{x^2}$

36) $\lim_{x\to 1} \lg x \cdot \lg(1-x)$

37) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{\operatorname{sen}^2 x + x \lg(1+x)}$

38) $\lim_{x\to 3} \frac{3^x-x^3}{x-3}$

39) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\lg\left(x^4+e^x+1\right)}{\lg x+\operatorname{sen}x}$

40) $\lim_{x\to 0} \frac{2^x-\cos x}{x}$

Risultati

1) 1	2) $+\infty$	3) $e^{-\sqrt{2}}$	4) $+\infty$
5) -2	6) 0	7) $-\infty$	8) non esiste
9) 1	10) non esiste	11) $-1/\lg 3$	12) 0
13) 0	14) $-\infty$	15) $-\lg 2$	16) 0
17) non esiste	18) -2	19) $+\infty$	20) 0
21) 0	22) $5/\pi$	23) non esiste	24) non esiste
25) 0	26) $1/2e^2$	27) 0	28) 3
29) 0	30) $2e$	31) $+\infty$	32) e
33) $-\sqrt{3}/2$	34) 0	35) 0	36) 0

37) $-1/4$ 38) $27(\lg 3-1)$ 39) $+\infty$ 40) $\lg 2$

Risoluzioni (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19)

1) Si osservi che

$$\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\right)^x = e^{x \lg\left(1+\sqrt{x}/(x^2+1)\right)}$$

D'altro canto con la sostituzione $y=\sqrt{x}/(x^2+1)$ e grazie al limite notevole 3.3 es. 6 si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x \lg\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} x \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \lim \frac{\lg\left(1+\sqrt{x}\right)\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x}/\left(x^2+1\right)}$$

$$= 0 \lim_{y\to 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = 0 \quad 1 = 0$$

e dunque il limite proposto vale e^{-0} cioè 1

3) Si osservi che

$$(1+\cos x-\operatorname{sen}x)^{1/(x-\pi/4)}=e^{\{\lg(1+\cos x-\operatorname{sen}x)\}/(x-\pi/4)}$$

D'altro canto grazie alla sostituzione $y=\cos x-\operatorname{sen}x$ e al limite notevole 3.3 es. 6 si ha

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\lg(1+\cos x-\operatorname{sen}x)}{x-\pi/4} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{x-\pi/4} \cdot \frac{\lg(1+\cos x-\operatorname{sen}x)}{\cos x-\operatorname{sen}x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{x-\pi/4} \lim_{y\to 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{x-\pi/4}$$

Si osservi infine che

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{x-\pi/4} = -4 \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{\pi-4x}$$

Si può allora utilizzare il limite 3.5 es. 15 per concludere che il limite da studiare vale $e^{-\sqrt{2}}$

5) Si ha, con la regola di Ruffini, che la divisione di y^2+2y-3 per $y-1$ dà $y+3$ quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x+2\cos x-3}{\operatorname{tg}x \lg(1+\operatorname{sen}x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x-1)(\cos x+3)}{\operatorname{tg}x \lg(1+\operatorname{sen}x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x^2} \frac{x}{\operatorname{sen}x} \cos x \frac{\operatorname{sen}x}{\lg(1+\operatorname{sen}x)} \frac{x}{\operatorname{sen}x}(\cos x+3)$$

$$= 4 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}x} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x}{\lg(1+\operatorname{sen}x)}$$

Con la sostituzione $y=\operatorname{sen}x$ e grazie al limite 3.3 es.6 si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x}{\lg(1+\operatorname{sen}x)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\lg(1+y)} = 1$$

e grazie ai limiti (f)(l) del paragrafo 2.2 e 3.2 es. 2 si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x^2} = -\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}x} = 1.$$

Pertanto il limite proposto vale -2.

7) Razionalizzando si ha

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x-2}}{\lg x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{\lg x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{\lg x} \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x-2}} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{\lg x} \cdot +\infty$$

D'altro canto col cambiamento di variabili $y=1-x$ si ha grazie al limite 3.3 es. 6 si ha

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{\lg x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\lg(1-y)} = -1$$

e dunque il limite proposto vale $-\infty$

9) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|x|+\cos x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{x} + 0.$$

D'altro canto

$$x \le |x| \le x+1$$

e quindi applicando il teorema dei Carabinieri

$$1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} \le \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{x} \le \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1.$$

e il limite proposto vale 1.

11) Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-\operatorname{tg}x-3^x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1+1-3^x-\operatorname{tg}x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{(e^x-1)/x + (1-3^x)/x - \operatorname{tg}x/x}$$

e quindi applicando i limiti 3.3 es. 8 3.3 es. 9 e 3.2 es. 1 si ha subito che il limite proposto vale $-1/\lg 3$

13) Ponendo in evidenza $\operatorname{sen}x$ al numeratore e x al denominatore si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx+x^2-senx}{x^3+lg\,(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} \frac{(1/cosx+x^2/senx - 1)}{x^2+(lg(1+x))/x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{cosx} + \frac{x^2}{senx} - 1\right) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+(lg(1+x))/x}$$

Grazie al limite (f) (1) del paragrafo 2.2 e al limite 3.3 es. 6 il limite proposto vale pertanto 0.

15) Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{lg^2(1+x)}-2^x}{tgx} = \lim_{x\to 0} 2^x \cdot \frac{2^{lg^2(1+x)-x}-1}{tgx} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 2^x \frac{2^{lg^2(1+x)-x}-1}{lg^2(1+x)-x} \left(\frac{lg^2(1+x)-x}{x}\right) \frac{x}{tgx}$$

Grazie alla sostituzione $y=lg^2\,(1+x)-x$ e al limite 3.3 es. 9 si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{lg^2(1+x)-x}-1}{lg^2(1+x)-x} = lg\ 2$$

Grazie al limite 3.3 es. 6 si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{lg^2\,(1+x)}{x} = 0$$

Grazie al limite 3.3 es. 1 si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{tgx} = 1$$

Pertanto il limite proposto vale $-lg2$

17) Si osservi che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{sen\,|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{senx}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{sen\,|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{sen\,(-x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{senx}{x} = -1$$

Il limite destro vale pertanto 1, quello sinistro -1, e il limite non esiste

19) Si osservi che grazie alla sostituzione $y=(x+x^2)/2$ e al limite 3.3 es. 9 si ha

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{lgx} \left(arcsen\left(\frac{x+x^2}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-(x+x^2)/2}}{lgx} \cdot \frac{arcsen\,((x+x^2) - \pi/2)}{\sqrt{1-(x^2+x)/2}} =$$

$$\lim_{y\to 1} \frac{arcsen\ y - \pi/2}{\sqrt{1-y}} \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{lgx} \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1-(x+x^2)/2}}{1-x} =$$

$$-\sqrt{2} \cdot \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{lgx} \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-(x+x^2)/2}}{1-x}$$

D'altro canto grazie alla sostituzione $1-x=y$ e al limite 3.3 es. 6 si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{lgx} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{lg\,(1-y)} = -1.$$

Infine

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-(x+x^2)/2}}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{\frac{2-x-x^2}{2\,(1-x)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \sqrt{\frac{(1-x)\,(2+x)}{2\,(1-x)^2}} = +\infty$$

Pertanto il limite proposto vale $+\infty$.

4. Infinitesimi ed infiniti

4.1. - Infinitesimi

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni infinitesime in $x_0 \in R$; esista inoltre un intervallo I di centro x_0 tale che riesca $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ in $I-\{x_0\}$.

Se si ha(*)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

si dice che $f(x)$ *è un infinitesimo di ordine superiore a* $g(x)$ (o che $g(x)$ *è un infinitesimo di ordine inferiore a* $f(x)$) e si scrive

$$f(x) = o\,(g(x)) \quad (\text{in } x_0)$$

Nel caso in cui

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty$$

si dice che $f(x)$ *è un infinitesimo di ordine inferiore a* $g(x)$ (o che $g(x)$ *è un infinitesimo di ordine superiore a* $f(x)$).

Nel caso in cui

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 1 \in \,]0,+\infty[$$

si dirà che $f(x)$ e $g(x)$ *sono infinitesimi dello stesso ordine*; infine se $|f(x)|/|g(x)|$ non è regolare in x_0 se cioè tale rapporto non ha limite in x_0 si dirà che $f(x)$ e $g(x)$ sono *infinitesimi non confrontabili in* x_0.

(*) Tutto quanto sarà detto in questo paragrafo continua a valere se in luogo di $\lim_{x \to x_0}$ si considera $\lim_{x \to x_0^+}$ o $\lim_{x \to x_0^-}$.

Analoghe definizioni valgono se $x_0 = \pm\infty$

Sia adesso $x_0 \in R$; se esiste un numero positivo α tale che $|f(x)|$ ed $|x-x_0|^\alpha$ siano infinitesimi dello stesso ordine si dirà che $f(x)$ è *un infinitesimo di ordine* α *in* x_0; analogamente si dirà che $f(x)$ è *un infinitesimo di ordine* α *in* $\pm\infty$ se $f(x)$ è un infinitesimo dello stesso ordine di $1/|x|^\alpha$ in $\pm\infty$.

Richiamiamo infine alcune utili proprietà:

i) Se $f(x)$ è infinitesima di ordine α e $g(x)$ di ordine β in x_0 $f(x) \cdot g(x)$ è infinitesima di ordine $\alpha+\beta$ in x_0;

ii) Se $f(x)$ è infinitesima di ordine α in x_0 e γ è un numero positivo $|f(x)|^\gamma$ è infinitesimo di ordine $\alpha \cdot \gamma$ in x_0;

iii) Se $f(x)$ è infinitesima di ordine α e $g(x)$ di ordine β in x_0 con $\alpha > \beta$ $f(x)/g(x)$ è infinitesima in x_0 di ordine $\alpha-\beta$ ed $f(x) + g(x)$ di ordine β.

iv) Sia $f_1 = o(f_2)$ e $g_1 = o(g_2)$ in x_0; si ha (*principio di sostituzione degli infinitesimi*):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1+f_2}{g_1+g_2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_2}{g_2};$$

v) Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesime in x_0, si ha

$$\begin{cases} o(f) + o(f) = o(f) \\ o(f + o(f)) = o(f) \\ k \cdot o(f) = o(f); \quad k \neq 0 \\ o(o(f)) = o(f) \\ o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g) \\ (o(f))^a = o(f^a), \quad a > 0 \\ g(x) \cdot o(f) = o(f \cdot g) \end{cases}$$

Calcolare l'ordine dei seguenti infinitesimi nei punti indicati

1) $\operatorname{sen}x$, $x_0=0$

2) $1-\cos x$, $x_0=0$

3) e^x-1, $x_0=0$

4) $(1+x)-1$ $x_0=0$

5) $\operatorname{arctg}(x-1)$, $x_0=1$

6) $(\operatorname{tg}(x-\pi))^3$, $x_0=\pi$

7) $\log\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$, $x_0=0$

8) $\left(\sqrt{1+x}-1\right)^4$, $x_0=0$

9) $e^{x^2}-1$, $x_0=0$

10) $\sqrt[3]{\operatorname{sen} x^2}$, $x_0=0$

11) $1-\cos\sqrt{e^x-1}$, $x_0=0^+$

12) $\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x-3}$, $x_0=3^+$

13) $\operatorname{sen}x \quad (e^x-1)$, $x_0=0$

14) $e^{1/x^2}-1$, $x_0=+\infty$

15) $\left(\sqrt{x}-1\right)^{\sqrt{2}}$, $x_0=1^+$

16) $\dfrac{(x-3)^3+\operatorname{tg}^2(x-3)}{\sqrt[3]{(x-3)}}$, $x_0=3$

17) $\dfrac{\left(\operatorname{sen}(x-1)\right)^{\sqrt{2}}\left(x^{\pi}-1\right)^3+(x-1)^5}{(\log x)^2\cdot\operatorname{arcsen}(x-1)}$, $x_0=1^+$

18) $1-\cos(\log(x+1))$, $x_0=0$

19) $\log\left(1+(\operatorname{sen}x)^3\right)\cdot\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)$, $x_0=0$

20) $\log\dfrac{1+x^4}{x^4}$, $x_0=-\infty$

21) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right)\cdot\left(\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}\right)^{3/2}+x^2}{\left(2^{\operatorname{tg}x}-1\right)\left(1-\cos x\right)+\sqrt{x}}$, $x_0=0^+$

22) $\sqrt{x^4+2}-\sqrt{x^3+2}$, $x_0=0$

Risposte

1) 1 2) 2 3) 1 4) 1 5) 1 6) 3

7) 1/3 8) 4 9) 2 10) 2/3 11) 1 12) 1/4

13) 2 14) 2 15) $\sqrt{2}$ 16) 5/3 17) $\sqrt{2}$ 18) 2

19) 10/3 20) 4 21) 1/2 22) 3

Svolgimento (1, 2, 6, 7, 11, 14, 16, 17, 18, 20)

1) Dal limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$$

segue che $\operatorname{sen}x$ è un infinitesimo di ordine 1 in $x_0=0$

2) Dal limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

segue che l'ordine di infinitesimo di $1-\cos x$ in $x_0=0$ è 2.

6) Si ha:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg}(x-\pi)}{x-\pi}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}y}{y}=1$$

e quindi $\operatorname{tg}(x-\pi)$ è in $x_0=\pi$ un infinitesimo di ordine 1; quindi per ii) $(\operatorname{tg}x)^3$ e un infinitesimo di ordine 3.

7) Si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=1;$$

ne consegue che $\log\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$ e in $x_0=0$ un infinitesimo di ordine 1/3.

11) Si ha:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{e^x-1}}{e^x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}=\frac{1}{2};$$

quindi $1-\cos\sqrt{e^x-1}$ ha in $x_0=0^+$ lo stesso ordine di e^x-1; poiché si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

ne consegue che e^x-1 ha in $x_0=0^+$ un infinitesimo di ordine 1 e quindi anche $1-\cos\sqrt{e^x-1}$ ha in $x_0=0^+$ un infinitesimo di ordine 1.

14) Si ha facilmente che $e^{1/x^2}-1$ è un infinitesimo di ordine 2 a $+\infty$ poiché

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x^2}-1}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$$

16) La funzione $(x-3)^3+tg^2(x-3)$ è un infinitesimo di ordine 2 in $x=3$ poiché (cfr. iii) somma di un infinitesimo di ordine 3 e di uno di ordine 2; la funzione data è allora infinitesima di ordine 5/3 poiché (cfr. ancora iii) rapporto di un infinitesimo di ordine 2 e di uno di ordine 1/3.

17) Si ha:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^\pi-1}{x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^\pi-1}{y}=\pi$$

e quindi $x^\pi-1$ e un infinitesimo di ordine 1; quindi da ii) ed i) segue che $(\text{sen}\,(x-1))^{\sqrt{2}}\,(x^\pi-1)^3$ è un infinitesimo di ordine $\sqrt{2}+3$; tenuto poi conto che

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=1$$

ne segue che $\log x$ e in $x_0=1$ un infinitesimo di ordine 1; pertanto $(\log x)^2\cdot\text{arcsen}\,(x-1)$ e in forza di ii) ed i) un infinitesimo di ordine $2+1=3$; allora in definitiva la funzione data è infinitesima in $x_0=1^+$ di ordine $(\sqrt{2}+3)-3=\sqrt{2}$ (cfr. iii))

18) Si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\log(1+x))}{\log^2(1+x)}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}=\frac{1}{2};$$

quindi $1-\cos(\log(1+x))$ è un infinitesimo in $x_0=0$ dello stesso ordine di $\log^2(1+x)$ e cioe di ordine 2.

20) La funzione data e infinitesima in $-\infty$ di ordine 4 giacche

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\log\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)}{\frac{1}{x^4}}=\lim_{y\to 0}\log\frac{(1+y)}{y}=1.$$

4.2 Ulteriori esercizi sugli infinitesimi

1) Date le seguenti coppie di funzioni infinitesime in $x_0=0$ dire se sono confrontabili ed in caso affermativo eseguire il confronto

a) $1-\cos x^2,\ x^4$

b) $\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{1-x},\ \operatorname{sen}x$

c) $\sqrt[5]{(1+x)^4}-1,\ \operatorname{tg}\sqrt[5]{x}$

d) $\operatorname{sen}x\left(2+\cos\frac{1}{x}\right),\ \operatorname{tg}x$

e) $\left(\log\left(1+\operatorname{sen}^2x\right)\right)^{\pi},\ e^{x^3}-1$

f) $\operatorname{arctg}\left[\left(\log\left(1+\sqrt[5]{x}\right)\right)^2\right],\ \sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{\operatorname{sen}x}$

g) $x^2\log|x|,\ (\operatorname{sen}x)\sqrt[3]{x}$

h) $(\operatorname{arcsen}x^3)\log^2|x|,\ \operatorname{tg}x^3\log|x|$

2) Provare che

a) $e^{-1/x^2}=o\left(x^{\alpha}\right)\ \forall\alpha>0$ in $x=0$

b) $e^{-1/x}=o\left(\frac{1}{|x|^{\alpha}}\right)\ \forall\alpha>0$ in $x_0=\pm\infty$

c) $|x|^{\alpha}=o\left(\frac{1}{\log|x|}\right)\ \forall\alpha>0$ in $x=0$

3) Dimostrare che in $x=0$ si ha

$\log|x|\cdot\operatorname{sen}x=o\left(|x|^{\alpha}\right)\ \forall\alpha\in]0,1[;\ x=o(\log|x|\ \operatorname{sen}x)$

cioè: $\log|x|\cdot\operatorname{sen}x$ è un infinitesimo di ordine minore di 1 e maggiore di tutti i numeri minori di 1.

4) Calcolare, adoperando il principio di sostituzione degli infinitesimi, i seguenti limiti

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+x\ \operatorname{sen}^3x}{x^4+1-\cos x}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\log\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\right)^6+3\operatorname{tg}^2x+x^5}{\left(2^x-1\right)^2+e^{x^4}-1+\operatorname{arcsen}x^6}$

c) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3^x-1+\sqrt{x}-\left(1-\cos\sqrt{x}\right)\cdot\operatorname{tg}\sqrt{x}}{2\sqrt[4]{\operatorname{sen}x}\sqrt[4]{x}-x^3+\operatorname{tg}^2x}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(\log(x+1))+x\ \operatorname{sen}^2x+x^5}{\left(e^{\sqrt[3]{x}}-1\right)^8+x^2+\operatorname{tg}x\ \operatorname{arcsen}x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^4+2}-\sqrt{x^3+2}+\operatorname{sen}\log\left(1+x^4\right)+\sqrt{1+x^5}-1}{(1-\cos x)\ \operatorname{sen}x+\operatorname{arctg}\left(e^{x^5}-1\right)+\sqrt{|x|}\ \log\left(1+x^3\right)}$

f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}x^2}+1-\cos\sqrt{e^x-1}}{(\operatorname{sen}x)^2+\sqrt{|x|}}$

g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log\left(1+(\operatorname{sen}x)^3\right)\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)+x^7}{\operatorname{arctg}\left(\sqrt[3]{x}\cdot\operatorname{sen}x^3\right)+\operatorname{tg}^5x+x^6}$

h) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^3\log x+\operatorname{sen}^2x\ \log_3\left(1+\sqrt{x}\right)\sqrt{x}+\left(5^x-1\right)^4}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)^6+3\ \log\left(1+x^3\right)}$

i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}^5\left(\operatorname{arctg}x\right)+\left(\log\left(1+\operatorname{tg}^2x\right)\right)^{\pi}+x^8}{3x\left(1-\cos x^2\right)+\left(e^{x^4}-1\right)x^2+x^9}$

l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{arcsen}\frac{1}{x^2}+\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}+\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^2}$

Risposte

1) a) stesso ordine b) $\operatorname{sen}x=o\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{1+x}\right)$

c) $\sqrt[3]{(1+x^4)}-1 = o\left(\operatorname{tg} \sqrt[5]{x}\right)$

d) non confrontabili

e) $(\log(1+\operatorname{sen}^2 x))^{\pi} = o\left(e^{x^3}-1\right)$

f) stesso ordine

g) $x^2 \log|x| = o\left(\operatorname{sen} x \sqrt[3]{|x|}\right)$

h) $\operatorname{tg} x^3 \log|x| = o(\operatorname{arcsen} x^3 \log^2|x|)$

4) a) 2 b) $1/(\log 2)^2$ c) 1/2

d) 1/2 e) $-1/\sqrt{2}$ f) 0

g) 1 h) $-\infty$ i) 2/3

l) 0

Svolgimento (1 a, b, d, g; 2 a, b; 3; 4 a, b, c, d, h, l)

1) a) Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^4} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2}$$

e quindi le due funzioni sono infinitesime dello stesso ordine.

b) Si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-x}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}$$

Quindi $\sqrt{1+\sqrt{x}^3}-\sqrt{1-x}$ è un infinitesimo di ordine 1/3 in $x_0=0$; poichè senx è un infinitesimo di ordine 1 si ha:

$$\operatorname{sen} x = o\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}-\sqrt{1-x}\right)$$

d) Si ha facilmente che il limite in $x_0=0$ di

$$\frac{|\operatorname{sen} x|\left(2+\cos\frac{1}{x}\right)}{|\operatorname{tg} x|}$$

non esiste e quindi i due infinitesimi non sono confrontabili.

g) Si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \log|x|}{\sqrt[3]{x}\ \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \lim_{x\to 0} \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \log|x| = 1\cdot 0 = 0$$

e quindi $x^2 \log|x| = o\left(\sqrt[3]{x}\ \operatorname{sen} x\right)$

Il lettore osservi che non esiste $\alpha>0$ tale che x^α ed $x^2 \log x$ siano infinitesimi dello stesso ordine; precisamente $x^2 \log|x|$ è un infinitesimo di ordine minore di 2 e maggiore di ogni numero positivo minore di 2.

2) a) Si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{|x|^\alpha} = \left(\text{posto } \frac{1}{x^\alpha} = y\right) = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-y}}{y^{-\alpha/2}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^{\alpha/2}}{e^y} = 0$$

in forza del limite notevole dell'es. 1 del par. 3.3

b) Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|^\alpha}{\frac{1}{\log|x|}} = \lim_{x\to 0} |x|^\alpha \log|x| = 0$$

in forza del limite notevole dell'es. 2 del par. 3.3

3) Si ha fissato $\alpha\in]0,1[$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\log|x||\,|\operatorname{sen} x|}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{|\operatorname{sen} x|}{|x|} \lim_{x\to 0} |x|^{1-\alpha}\,|\log|x|| = 1\cdot 0$$

poichè $1-\alpha>0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} |x|^{1-\alpha}\,|\log|x|| = 0$; quindi

$$\log |x| \operatorname{sen} x = o(|x|^{\alpha});$$

analogamente si ha che $x = o(\log |x| \operatorname{sen} x)$

4) a) Osserviamo che:

$$\operatorname{ord} x^2 = 2,\ \operatorname{ord}(x \operatorname{sen}^3 x) = 4 \Rightarrow x \operatorname{sen}^3 x = o(x^2)$$

$$\operatorname{ord} x^4 = 4,\ \operatorname{ord}(1-\cos x) = 2 \Rightarrow x^4 = o(1-\cos x)$$

Quindi applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi (cioè *cancellando gli infinitesimi di ordine superiore*) si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x \operatorname{sen}^3 x}{x^4 + 1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = 2$$

b) Si ha:

$$\operatorname{ord}\left(\log\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\right)^6 = 2,\ \operatorname{ord}\left(\operatorname{tg}^3 x\right) = 3,\ \operatorname{ord}\left(x^5\right) = 5$$

$$\operatorname{ord}\left(2^x-1\right)^2 = 2,\ \operatorname{ord}\left(e^{x^3}-1\right) = 4,\ \operatorname{ord}\left(\operatorname{arc\,sen} x^6\right) = 6$$

e quindi cancellando gli infinitesimi di ordine superiore si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\log\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\right)^6 + 3\operatorname{tg}^3 x + x^5}{\left(2^x-1\right)^2 + e^{x^3}-1 + \operatorname{arcsen} x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\log\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\right)^6}{\left(2^x-1\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\log\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}\right)^6 \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{2^x-1}\right)^2 = 1 \quad \frac{1}{(\log 2)^2} = \frac{1}{\log^2 2}$$

c) Cancellando gli infinitesimi di ordine superiore si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3^x-1 + \sqrt{x} + \left(1-\cos\sqrt{x}\right)\operatorname{tg}\sqrt{x}}{2\sqrt[4]{\operatorname{sen} x}\,\sqrt[4]{x} - x^3 + \operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt[4]{\operatorname{sen} x}\,\sqrt[4]{x}} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\operatorname{sen} x}} = \frac{1}{2}$$

dal momento che

$$\operatorname{ord}\left(3^x-1\right) = 1,\ \operatorname{ord}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2},\ \operatorname{ord}\left(\left(1-\cos\sqrt{x}\right)\operatorname{tg}\sqrt{x}\right) = 2+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\operatorname{ord}\left(\sqrt[4]{\operatorname{sen} x}\ \sqrt[4]{x}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},\ \operatorname{ord}\left(x^3\right) = 3,\ \operatorname{ord}\left(\operatorname{tg}^2 x\right) = 2$$

d) Si ha cancellando gli infinitesimi di ordine superiore:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\log\left(x+1\right)\right) + x\operatorname{sen}^2 x + x^5}{\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)^8 + x^2 + \operatorname{tg} x \operatorname{arcsen} x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\log\left(x+1\right)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\log\left(x+1\right)}{\log^2\left(x+1\right)} \lim_{x\to 0} \frac{\log^2\left(x+1\right)}{x^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} \lim_{x\to 0} \frac{\log^2\left(x+1\right)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad 1 = \frac{1}{2}$$

h) Osservato che

$$\operatorname{ord}\left(\operatorname{sen}^2 x \log_3\left(1+\sqrt{x}\right)\sqrt{x}\right) = 3,\ \operatorname{ord}\left(\left(5^x-1\right)^4\right) = 4$$

mentre

$$x^3 = o\left(x^3 \log x\right)$$

si ha che

$$\operatorname{sen}^2 x \log_3\left(1+\sqrt{x}\right)\sqrt{x} = o\left(x^3 \log x\right),\ \left(5^x-1\right)^4 = o\left(x^3 \log x\right);$$

cancellando quindi gli infinitesimi di ordine superiore il limite dato è uguale a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 \log x}{3 \log (1+x^3)} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{\log (1+x^3)} \lim_{x\to 0^+} \log x =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (-\infty) = -\infty$$

1) Osservato che in $+\infty$

$$\text{ord}\left(\text{arcsen}\ \frac{1}{x^2}\right) = 2, \quad \text{ord}\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right) = 1$$

poiché

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \ \text{arcsen}\ \frac{1}{x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\text{arcsen}\ y}{y} = 1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} x \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = 1$$

e che

$$\text{ord}\left(\text{sen}\ \frac{1}{x}\right)^2 = 2 \ \text{e ord}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) = \frac{1}{2}$$

poiché

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\text{sen}\ \frac{1}{x}\right)^2 = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 y}{y^2} = 1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = 1,$$

cancellando gli infinitesimi di ordine superiore si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{arcsen}\ \frac{1}{x^2} + \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} + \left(\text{sen}\ \frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = 0$$

4.3 Infiniti

Siano $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitamente grandi in $x_0 \in R$ cioè sia

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty;$$

si dirà che $f(x)$ è in x_0 *un infinito di ordine superiore a* $g(x)$ (o che $g(x)$ *è un infinito di ordine inferiore ad* $f(x)$) se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty.$$

Nel caso in cui

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$$

si dirà che $f(x)$ è in x_0 *un infinito di ordine inferiore a* $g(x)$ (o che $g(x)$ è *un infinito di ordine superiore a* $f(x)$).

se poi riesce

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = l \in \ ]0,+\infty[$$

si dirà che $f(x)$ e $g(x)$ sono *infiniti dello stesso ordine* in x_0; infine se $|f(x)|/|g(x)|$ non è regolare in x_0 se cioè tale rapporto non ha limite in x_0 si dirà che $f(x)$ e $g(x)$ sono *infiniti non confrontabili* in x_0.

Analoghe definizioni valgono se $x_0 = \pm\infty$

Pur potendosi nel caso degli infiniti fare molte considerazioni analoghe a quelle fatte per gli infinitesimi ci limitiamo qui a richiamare il *principio di sostituzione degli infiniti*:

se $f_1(x)$ *è un infinito di ordine superiore ad* $f_2(x)$ in x_0 e se $g_1(x)$ *è un infinito di ordine superiore a* $g_2(x)$ allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

(si *cancellano*, cioè, *gli infiniti di ordine inferiore*).
Si osservi che lo stesso risultato vale se $f_2(x)$ e $g_2(x)$ sono funzioni limitate

Risolvere i seguenti esercizi

1) Provare che a^x $(a>1)$ è in $+\infty$ un infinito di ordine superiore ad x^α per ogni $\alpha>0$;

2) Provare che $\log_a |x|$ è un infinito di ordine inferiore ad $|x|^\alpha$ per ogni $\alpha>0$ in $+\infty$, ed è un infinito di ordine inferiore ad $1/|x|^\alpha$ per ogni $\alpha>0$ in $x=0$ $(a>1)$.

3) Confrontare le seguenti coppie di infiniti nei punti indicati:

a) 3^x, 2^x, $x_0=+\infty$ b) x^2, $x^2 \log |x|$ $x_0=+\infty$

c) $\frac{1}{x^4+x^2}$, $\frac{1}{x^2}$, $x_0=0$ d) e^{1/x^2}, $\frac{e^{\frac{x^2+1}{x^2}}}{\log |x|}$, $x_0=0$

e) $\operatorname{tg}x$, $1/|x-\pi/2|$, $x_0=\frac{\pi}{2}$

f) $4^x \log |x|$, $3^x (\log |x|)^{10}$, $x_0=+\infty$

g) $\sqrt{x^2+1}$, $\sqrt{x+1}$, $x_0=+\infty$ h) $\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}$, $\log^2 |x|$, $x_0=0$

i) x^x, e^{2x}, $x_0=+\infty$ l) x^x, e^{x^2}, $x_0 = +\infty$

4) Calcolare, adoperando il principio di sostituzione degli infiniti, i seguenti limiti

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4+5x+1}{x^2-6x^4+7}$ b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+x^2+3 \log x}{\sqrt[3]{x^2+1} + \sqrt{x}}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3 (\log^2 x) \cdot x + 2x - 3\sqrt{x} + 1}{4x - 7x \log^2 x + \log x}$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+3^{2x}+x^2+\log x}{1-9^x+7x \log x}$

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4-7^x+\operatorname{arctg}x}{x \log |x| + 9^x - \operatorname{sen}x}$

f) $\lim_{x\to0} \frac{e^{1/x^2}+\sqrt{(x^4+1)/x^4}+\log |x|}{e^{\frac{x^2+1}{x^2}} - (\log |x|)^5}$

g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^x + e^x + 5x^3}{x^4 + e^x + 1}$

h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^x + e^{3x} + 1}{e^{x^2} + x^{2x} + 7x^2}$

i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x)^{x^2} \cdot (3^{-x^2}) + x+1}{x^3 + 3^{x^2} + \operatorname{sen}x}$

Risposte

3) a) ord (3^x) > ord (2^x) b) ord $(x^2 \log |x|)$ > ord (x^2)

c) stesso ordine

d) ord $\left(e^{1/x^2}\right)$ > ord $\left(e^{\frac{x^2+1}{x^2}} / \log |x|\right)$

e) stesso ordine

f) ord $(4^x \log|x|)$ > ord $(3^x (\log |x|)^{10})$

g) ord $\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ > ord $\left(\sqrt{x+1}\right)$

h) ord $\left(\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}\right)$ > ord $\left(\log^2 |x|\right)$

i) ord (x^x) > ord (e^{2x})

l) ord $\left(e^{x^2}\right)$ > ord $\left(x^x\right)$

4) a) $-\frac{1}{2}$ b) $+\infty$ c) $-3/7$

d) -1 e) 0 f) $1/e$

g) $-\infty$ h) 0 i) $+\infty$

Svolgimento (1, 2; 3 a, b, c, d, h; 4 a, b, e, f, g, i)

1) Basta ricordare il limite notevole

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \ \forall\ a>1,\ \forall\ \alpha>0$$

2) Basta ricordare i limiti notevoli

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|x|^\alpha}{\log_a|x|} = +\infty,\quad \lim_{x\to0} \frac{\log_a|x|}{1/|x|^\alpha} = \lim_{x\to0} |x|^\alpha \log_a|x| = 0$$

3) a) Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = +\infty$$

e quindi ord (3^x) > ord (2^x) a $+\infty$.

b) Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \log|x|}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \log|x| = +\infty$$

e quindi $x^2 \log|x|$ è a $+\infty$ un infinito di ordine superiore ad x^2

c) Si ha:

$$\lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4+x^2}} = \lim_{x\to0} \left(x^2+1\right) = 1$$

e quindi $\frac{1}{x^2}$ ed $\frac{1}{x^4+x^2}$ sono infiniti dello stesso ordine in $x_0=0$

d) Si ha:

$$\lim_{x\to+0} \frac{e^{1/x^2}}{\frac{e^{\frac{x^2+1}{x^2}}}{\log|x|}} = \lim_{x\to+0} \log|x|\ e^{-1} = -\infty$$

e quindi ord $\left(e^{1/x^2}\right)$ > ord $\left(e^{\frac{x^2+1}{x^2}}/\log|x|\right)$

h) Si ha:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}}{\log^2|x|} = \lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2 \log^2|x|} = \lim_{x\to0} \sqrt{x^4+1}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2 \log^2|x|} = 1 \quad +\infty = +\infty;$$

quindi ord $\left(\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}\right)$ > ord $\left(\log^2|x|\right)$

4) a) Cancellando gli infiniti di ordine inferiore si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4+5x+1}{x^2-6x^4+7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4}{-6x^4} = -\frac{1}{2}$$

b) Cancellando gli infiniti di ordine inferiore si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+x^2+3\ \log x}{\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt[3]{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{2/3}}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}} = (+\infty)\ \ 1 = +\infty$$

e) Cancellando gli infiniti di ordine inferiore si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4-7^x+\operatorname{arctg}x}{x \log|x| + 9^x - \operatorname{sen}x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-7^x}{9^x} = 0$$

f) Si ha cancellando gli infiniti di ordine inferiore:

$$\lim_{x\to+0} \frac{e^{1/2^2}+\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}} + \log|x|}{e^{\frac{x^2+1}{x^2}} - (\log|x|)^5} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x^2}}{e^{\frac{x^2+1}{x^2}}} = \frac{1}{e}$$

g) Si ha cancellando gli infiniti di ordine inferiore:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^x+e^x+5x^3}{x^4+e^x+1} = -2 \lim_{x\to+\infty} \frac{x^x}{e^x} =$$

$$= -2 \lim_{x\to+\infty} e^{x(\log x - 1)} = -2\,(+\infty) = -\infty$$

i) Cancellando gli infiniti di ordine inferiore si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x)^{x^2}\ 3^{-x^2} + x + 1}{x^3 + 3^{x^2} + \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x)^{x^2}\ 3^{-x^2}}{3^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x)^{x^2}}{3^{2x^2}} = +\infty$$

5 - Successioni e continuità

5.1 Il teorema ponte

Sia f una funzione continua in un intervallo I e sia x_0 un punto di I o eventualmente un suo estremo. Sia inoltre $\{x_n\}$ una successione di punti di I avente x_0 come limite; prendiamo in considerazione il comportamento della successione $\{f(x_n)\}$.

Si ha, se $x_0 \in I$,

$$(1) \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

ovvero, se $x_0 (\notin I)$ è un estremo di I e la funzione f è regolare in x_0,

$$(1)' \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

La (1), (1)' ci dicono che il comportamento della funzione f in x_0 "detta" il comportamento della successione $\{f(x_n)\}$. Viceversa, se per ogni successione $\{x_n\}$ di punti di I tendente ad x_0, la successione $\{f(x_n)\}$ ammette limite e tale limite è indipendente dalla successione considerata allora sussiste, a seconda dei casi la (1) o la (1)'.

Tale risultato, noto come teorema "ponte", permette in sostanza di ricondurre la nozione di limite di una funzione a quella di limite di una successione e viceversa.

Facendo uso di tale risultato e di quanto detto nei precedenti paragrafi si calcolino i seguenti limiti.

1) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5^n+3^n}$

2) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{k} a_i^n}$

3) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{6^n+\cos^n n}$

4) $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^n$

5) $\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^n$

6) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n^2+3n)}{\lg(n+1)}$

7) $\lim_{n\to+\infty} \lg\left(\frac{1+e^n}{3e^n}\right)$ 8) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{\sqrt{n}}$

9) $\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\frac{1}{n} + \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^n$ 10) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{5^n} \operatorname{sen}\left(\frac{2^n}{n^n}\right)$

11) $\lim_{n\to+\infty} \left[\lg n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lg k\right]$ 12) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{5}{n}\right)^n}{\frac{2^n}{n!}}$

Risposte

1) 5	2) $\max\{a_1,\dots,a_k\}$	3) 6
4) e	5) 1	6) 2
7) $-\lg 3$	8) 1	9) e
10) 0	11) 1	12) 0

Svolgimento

1) Si ha

$$\sqrt[n]{5^n+3^n} = 5\sqrt[n]{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

Essendo

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1+\left(\frac{3}{5}\right)^x\right]^{\frac{1}{x}} = 1^0 = 1$$

dalla (1)' si ha anche

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{5^n+3^n} = 5.$$

4) Possiamo scrivere il termine generale della successione nel seguente modo

$$\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^n = \left[\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}}\right]^{\left(n\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)}.$$

Per la (1)', essendo

$$\lim_{x\to0}\left[(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}\right]^{\frac{\operatorname{sen}x}{x}} = e^1 = e,$$

si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^n = e$$

6) Si ha

$$\frac{\lg(n^2+3n)}{\lg(n+1)} = \frac{2\lg n + \lg\frac{n^2+3n}{n^2}}{\lg n + \lg\frac{n+1}{n}} =$$

$$= \frac{2+\frac{1}{\lg n}\lg\frac{n^2+3n}{n^2}}{1+\frac{1}{\lg n}\lg\frac{n+1}{n}}$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\lg(n^2+3n)}{\lg(n+1)} = \frac{2+0\cdot\lg 1}{1+0\cdot\lg 1} = 2.$$

10) Ricordando i limiti notevoli contenuti nella tab. 2 del paragrafo 1.4 si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{5^n}\operatorname{sen}\left(\frac{2^n}{n^n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2^n}{n^n}\right)}{\frac{2^n}{n^n}}\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}\left(\frac{2}{5}\right)^n =$$

$$(\text{cfr. } (1)') = \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot 0 = 1\cdot 0 = 0$$

11) Essendo (cfr. es. 8 del par. 1.4) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{n!} = e$,

si ha per la (1)

$$l = \lim_{n\to+\infty} \lg \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \left[\lg n - \frac{\sum_{k=1}^{n} \lg k}{n} \right].$$

5.2 Successioni definite per ricorrenza

In questo paragrafo tratteremo brevemente successioni definite per ricorrenza; con ciò si intende quelle successioni il cui termine n-esimo è dato, per esempio, da una relazione del tipo

$$a_n = f\ (a_{n-1})\quad n \geq 2$$

dove f è una funzione continua e il primo termine a_1 è assegnato.

Per studiare un tale tipo di successione si può utilmente seguire il procedimento qui appresso schematizzato:

1ª TAPPA: Verifica della regolarità della successione; in generale c'è da individuare una qualche monotonia. Se si dimostra che la successione diverge il problema è risolto, altrimenti si passa alla tappa successiva.

2ª TAPPA: Detto a il valore incognito del limite di $\{a_n\}$ si ha

$$a = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} f\ (a_{n-1}) = f\ (a).$$

3ª TAPPA: Studio dell'equazione $a=f(a)$. Se esiste un'unica soluzione tale valore è il limite cercato. Se esistono più soluzioni vanno in qualche modo escluse quelle estranee

Talora si può anche però procedere più semplicemente nel modo seguente: si risolve l'equazione $a=f(a)$ e si prova direttamente che $\{a_n\}$ tende ad a.

ESEMPIO 1 - Sia

$$a_1=2,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right).$$

Si ha

$$(2)\quad a_{n+1}-\sqrt{2} = \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 - 2\sqrt{2}\,a_n + 2\right) = \frac{\left(a_n-\sqrt{2}\right)^2}{2a_n} \geq 0.$$

Tutti i termini della successione sono pertanto maggiori o uguali di $\sqrt{2}$.

Risulta inoltre

$$a_n \geq \sqrt{2} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) < \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}\right) = a_n;$$

quindi la successione è decrescente e limitata inferiormente. Denotato con a il limite di $\{a_n\}$ risulta

$$a = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right).$$

L'equazione

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$$

ammette come una soluzione accettabile $\sqrt{2}$.

Il risultato può essere ottenuto più semplicemente osservando che dalla (2) si ottiene

$$(3)\quad 0 \leq a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(a_n - \sqrt{2})}{2a_n}\left(a_n - \sqrt{2}\right) < \frac{1}{2}\left(a_n - \sqrt{2}\right)$$

(dalla relazione $a_n \geq \sqrt{2}$ si ricava subito che $(a_n - \sqrt{2})/a_n \leq 1$).

Applicando ripetutamente la (3) si ottiene

$$(4)\quad 0 \leq a_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}\left(a_1 - \sqrt{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2^n}.$$

La (4) oltre che confermare la convergenza di $\{a_n\}$ a $\sqrt{2}$ fornisce una valutazione dell'errore che si commette approssimando $\sqrt{2}$ con un termine della successione.

ESEMPIO 2 - (Successione di Fibonacci). Poniamo

$$F_1=F_2=1,\quad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n.$$

La successione $\{F_n\}$ è a termini positivi e crescente essendo

$$(5)\quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_{n+2} \geq F_{n+1} \geq 1.$$

Detto F il limite di $\{F_n\}$ si ha

$$F = \lim_{n\to+\infty} F_{n+2} = \lim_{n\to+\infty} F_{n+1} + \lim_{n\to+\infty} F_n = 2F$$

Non può che essere $F=+\infty$ altrimenti dovrebbe essere $F=0$ e ciò contrasta con la (5).

Più riposto è lo studio della successione

$$(6)\quad R_{n+1} = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{R_n}$$

per la quale rimandiamo all'esercizio 2).

Calcolare i limiti delle seguenti successioni definite per ricorrenza.

1) $a_1 = 5,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right).$

2) Studiare il comportamento della successione (6) nell'esempio 2.

3) a) $a_1>3,\ a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}.$

b) $a_1\in\,]-6,3[,\ a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}.$

4) $a_1 = \pi/4$, $a_{n+1} = \text{sen } a_n$.

5) $a_1 = \alpha$, $a_{n+1} = a_n + (a_n - 1)^2$

Studiare i seguenti casi

a) $\alpha \in [0,1]$, b) $\alpha > 1$ c) $\alpha < 0$.

6) $a_1 = \alpha$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$

Studiare i seguenti casi

a) $\alpha \in]0,2[$, b) $\alpha > 2$.

7) $a_1 = \alpha > 0$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$.

8) $a_1 = \alpha > -1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$.

Risposte

1) $\sqrt{3}$

2) $(1+\sqrt{5})/2$

3) a) 3 b) 3

4) 0

5) a) 1 b) $+\infty$ c) $+\infty$

6) a) 1 b) $+\infty$

7) 1

8) $(\sqrt{5}-1)/2$

Svolgimento (1, 2, 3a, 5a, 6a – b, 8)

1) Si proceda come nell'esempio 1

2) Si osservi che $R_2 = 1$ e pertanto $R_n \geq 1$ per ogni n. Essendo

$$R_{n+2} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{R_{n+1}}$$

se la successione convergesse, detto R il suo limite, dovrebbe risultare

$$R = 1 + \frac{1}{R} \Rightarrow R = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Verifichiamo che tale valore è il limite della successione; infatti

$$\left| R_{n+2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| = \left| \frac{1}{R_{n+1}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}-1}{2\ R_{n+1}} \left| R_{n+1} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right|$$

$$\leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \left| R_{n+1} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right|.$$

Applicando ripetutamente la precedente relazione si ha

$$\left| R_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \left| R_2 - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right|;$$

essendo $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$ si ha che $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n = 0$ da cui anche, per il teorema del confronto

$$\lim_{n\to+\infty} R_{n+2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

3a) Si ha innanzitutto

$$a_n > 3 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} > 3;$$

ciò unitamente alla condizione iniziale $a_1>3$, per il principio di induzione, comporta che $a_n > 3$ $\forall n$. Risulta inoltre

$$a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} < a_n \Leftrightarrow a_n > 3.$$

Le successioni $\{a_n\}$ e quindi decrescente e limitata: detto a il suo limite, deve essere

$$a = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{6+a_n} = \sqrt{6+a}$$

da cui a=3.

5a) Essendo $a_{n+1}= a_n^2 - a_n+1$ risulta $a_{n+1} > 0$ $\forall n$ e

$$a_{n+1} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le a_n \le 1$$

Se quindi $a_1\in [0,1]$ si ha anche $a_n\in [0,1]$ $\forall n$. D'altra parte risulta

$$1-a_{n+1} = a_n-a_n^2 = a_n\ (1-a_n) \le 1-a_n$$

e quindi $a_n \le a_{n+1}$. La successione, essendo crescente e limitata, è convergente: sia a il suo limite. Si ha

$$a = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(a_n^2-a_n+1\right) = a^2-a+1 \Rightarrow a=1.$$

6a) Essendo $a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2$ si ha innanzitutto $a_{n+1} \ge 1$ $\forall n$. Inoltre risulta

$$a_{n+1} < 2 \Leftrightarrow 0 < a_n < 2;$$

se quindi $a_1\in]0,2[$ si ha $a_{n+1} \in [1,2[$ $\forall n$. Essendo

$$a_{n+1}-1 = a_n^2-2a_n+1 = (a_n-1)^2 \ \forall n$$

si ottiene

$$a_{n+1}-1= (a_n-1)^2 = (a_{n-1}-1)^4 = \dots = (a_1-1)^{2n}.$$

Poiché $(a_1-1) < 1$ si ha $\lim_{n\to+\infty} (a_{n+1}-1)=0$ cioe

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = 1$$

6b) In questo caso si ha $a_{n+1} > 2$ $\forall n$. Risulta

$$a_{n+1}-2 = a_n\ (a_n-2) > 2\ (a_n-2)$$

e quindi

$$a_{n+1}-2 > 2\ (a_n-2) > 2^2\ (a_{n-1}-2) > \dots > 2^n\ (a_1-2);$$

la successione allora diverge positivamente

8) Se la successione convergesse, detto a il suo limite, si avrebbe

$$a = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{1+a}$$

da cui $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Per verificare ciò procediamo nel modo seguente: con facili calcoli si ha, essendo $a_n > 0$

$$\left| a_{n+1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| = \left| \frac{1}{1+a_n} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ \frac{1}{1+a_n}\ \left| a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| \le$$

$$\leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \left| a_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right|$$

e quindi

$$\left| a_{n+1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \left| a_1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right|;$$

essendo $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$ risulta $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

CAPITOLO 7

DERIVAZIONE

1. - Derivazione delle funzioni elementari e regole di derivazione

Riportiamo qui di seguito la tabella delle derivate delle funzioni elementari

$DK = 0 \quad (K \in R)$	$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$
$Da^x = a^x \log a$	$De^x = e^x$
$D \log_a \lvert x \rvert = \frac{1}{x} \log_a e$	$D \log \lvert x \rvert = \frac{1}{x}$
$D \operatorname{sen} x = \cos x$	$D \cos x = -\operatorname{sen} x$
$D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	
$D \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\left(1 + \operatorname{cotg}^2 x\right)$	
$D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1 + x^2}$	$D \operatorname{senh} x = \cosh x$
$D \cosh x = \operatorname{senh} x$	$D \operatorname{tgh} x = \frac{1}{\cos^2 hx}$
$D \operatorname{settsenh} x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	$D \operatorname{settcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$D \operatorname{setttgh} x = \frac{1}{1 - x^2}$	

e quella delle regole di derivazione

$$D(K\ f(x)) = K\ Df(x) \qquad D(f(x) \pm g(x)) = Df(x) \pm Dg(x)$$

$$D(f(x)\ g(x)) = g(x)\ Df(x) + f(x)\ Dg(x)$$

$$D\ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\ Df(x) - f(x)\ Dg(x)}{g^2(x)}$$

Dimostrare, usando le derivate delle funzioni elementari e le regole di derivazione, le seguenti eguaglianze

1) $Dx^2 = 2x$ 2) $Dx^7 = 7x^6$ 3) $Dx^{-2} = -2x^{-3}$

4) $Dx^{\pi} = \pi x^{\pi-1}$ 5) $D4 = 0$ 6) $D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

7) $D\sqrt[3]{x^2} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 8) $D\sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n}\sqrt[n]{x^{m-n}}$ 9) $D3^x = 3^x \log 3$

10) $D \log_5 |x| = \frac{1}{x} \log_5 e$ 11) $D\frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

12) $D(\operatorname{sen}x + \cos x) = \cos x - \operatorname{sen}x$

13) $D\left(\sqrt[4]{x} - \operatorname{tang}x\right) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{\cos^2 x}$

14) $D\left(x \operatorname{arctg}x\right) = \operatorname{arctg}x + \frac{x}{1+x^2}$

15) $D\left(\log x \cdot \operatorname{arcsen}x\right) = \frac{\operatorname{arcsen}x}{x} + \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}$

16) $D\left(3 \operatorname{senh}x + 5 \operatorname{cotg}x\right) = 3 \cosh x - \frac{5}{\operatorname{sen}^2 x}$

17) $D\left(\frac{\cos x}{x^2+1}\right) = -\frac{(x^2+1)\operatorname{sen}x + 2x \cos x}{(x^2+1)^2}$

18) $D\left(\operatorname{tgh}x\ \operatorname{settsenh}x - 3\cosh x\right) = \frac{\operatorname{settsenh}x}{(\cos h x)^2} + \frac{\operatorname{tgh}x}{\sqrt{x^2+1}} - 3\operatorname{senh}x$

19) $D\left(\frac{\operatorname{sen}x \cos x}{x^3 + x}\right) = \frac{(x^3+x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - (3x^2+1)(\operatorname{sen}x \cos x)}{(x^3+x)^2}$

20) $D\left(3 \operatorname{settcosh}x - x \operatorname{setttgh}x\right) = \frac{3}{\sqrt{x^2-1}} - \operatorname{setttgh}x - \frac{x}{1-x^2}$

21) $D\left(\frac{1}{\arccos x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\ \arccos^2 x}$

22) $D\left(\frac{\sqrt{x}-x}{1+\log x}\right) = \frac{\log x\ (1-2\sqrt{x}) - 1}{2\sqrt{x}\ (1+\log x)^2}$

23) $D\left(\frac{2^x - \operatorname{sen}x}{1+3^x}\right) = \frac{(2^x \log 2 - \cos x)(1+3^x) - 3^x \log 3\ (2^x - \operatorname{sen}x)}{(1+3^x)^2}$

24) $D(x^2 e^x) = e^x (x^2 + 2x)$

25) $D\left(\frac{x^3-1}{x^2+1}\right) = \frac{x^4+3x^2+2x}{(x^2+1)^2}$

26) $D\left(\frac{3}{\operatorname{sen}x}\right) = -\frac{3 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

27) $D\left(x \operatorname{setttgh}x - 6x^2 + \frac{1}{x}\right) = \operatorname{setttgh}x + \frac{12x^5 - 11x^3 + x^2 - 1}{x^2(1-x^2)}$

28) $D\left(2^x \log_3 x + \frac{\operatorname{sen}x}{x}\right) = 2^x \log 2 \log_3 x +$
$+ \frac{1}{x} 2^x \log_3 e + \frac{x \cos x - \operatorname{sen}x}{x^2}$

29) $D(\cos^2 x) = -2 \operatorname{sen}x \cos x$

30) $D\left(2\sqrt{x} \cos x + x \log x\right) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} \operatorname{sen}x + \log x + 1$

31) $D\left(\frac{\operatorname{senh}x + e^x}{1 + e^x}\right) = \frac{\cosh x\ (e^x+1) + e^x (1 - \operatorname{senh}x)}{(1+e^x)^2}$

32) $D\left(\frac{1}{x \log x}\right) = -\frac{1 + \log x}{x^2 \log^2 x}$

33) $D\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\frac{2}{(1+x)^2}$

34) $D\left(x \operatorname{arctg}x \operatorname{sen}x\right) = \operatorname{arctg}x \operatorname{sen}x + \frac{x \operatorname{sen}x}{1+x^2} + x \cos x \operatorname{arctg}x$

35) $D\left(\frac{x}{1+x}\cdot\frac{\log x}{1-x}\right) = \frac{(x^2+1)\log x + 1-x^2}{(x^2-1)^2}$

36) $D\left((x^{\sqrt{2}}+e^x)(\cos x - \operatorname{sen} x)\right) = \cos x\, x^{\sqrt{2}-1}(\sqrt{2}-x) -$

$- \operatorname{sen} x\,(2e^x + x^{\sqrt{2}-1}(\sqrt{2}+x))$

37) $D\left(\sqrt[3]{x} + x\operatorname{sen} x\right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \operatorname{sen} x + x\cos x$

38) $D\left(\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\right) = \frac{-2\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}$

39) $D\left(\log|x|\cdot\operatorname{senh} x\cdot \operatorname{tg} x\right) = \frac{\operatorname{senh} x\ \operatorname{tg} x}{x} + \cosh x\ \log|x|\ \operatorname{tg} x +$

$+ \frac{\log|x|\ \operatorname{senh} x}{\cos^2 x}$

40) $D\left(x^2 e^x \operatorname{sen} x\right) = xe^x\left((2+x)\operatorname{sen} x + x\cos x\right)$

41) $D\left(\sqrt[4]{x^3}\ \operatorname{settsenh} x - 2\cosh x\right) = \frac{3\ \operatorname{settsenh} x}{4\sqrt[4]{x}} + \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{1+x^2}} -$

$- 2\operatorname{senh} x$

42) $D\left(\operatorname{setttgh}^3 x\right) = 3\ \operatorname{setttgh}^2 x\cdot\frac{1}{1-x^2}$

43) $D\left(x\left(\log^2 x + 3\operatorname{arctg} x\right)\right) = \log^2 x + 3\operatorname{arctg} x + 2\log x + \frac{3x}{1+x^2}$

44) $D\left(3^x \operatorname{arcsen} x - \frac{1}{\operatorname{tgh} x}\right) = 3^x \log 3\ \operatorname{arcsen} x +$

$+ \frac{3^x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\cosh^2 x\cdot \operatorname{tgh}^2 x}$

45) $D\left(x^3\operatorname{cotg} x\cdot \operatorname{settcosh} x\right) = 3x^2\operatorname{cotg} x\ \operatorname{settcosh} x -$

$- \frac{x^3\ \operatorname{settcosh} x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{x^3\operatorname{cotg} x}{\sqrt{x^2-1}}$

46) $D\left(x\log x\ e^x\operatorname{arctg} x\right) = e^x\left((1+x)\log x\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x + \frac{x\log x}{1+x^2}\right)$

47) $D\left(\frac{1-\log x}{\operatorname{senh} x}\right) = -\frac{\operatorname{senh} x + x\cosh x\,(1-\log x)}{x\operatorname{senh}^2 x}$

48) $D\left(\sqrt[5]{x} + 3x\sqrt{x} - 7e^{-x}\right) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} + \frac{9}{2}\sqrt{x} + 7e^{-x}$

49) $D\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x\sqrt{x^4}}\right) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^5} - \frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{5}{2x^2\sqrt[4]{x}}$

50) $D\left(\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x - \operatorname{sen} x}\right) = \frac{2}{(\cos x - \operatorname{sen} x)^2}$

51) $D\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\cos x}\right) = -\frac{1}{6x\sqrt[6]{x}} + \frac{2}{3x\sqrt[3]{x}} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

52) $D\left(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1\right) = (2\operatorname{tg} x - 1)(1 + \operatorname{tg}^2 x)$

53) $D\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}$

54) $D\left(x\sqrt{x} - x^2\sqrt[3]{x}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{7}{3}(\sqrt[3]{x})^4$

55) $D\left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x}\right) = -\frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^2 x}$

56) $D\left(7^x\log|x| - 2\operatorname{sen} x + 5\right) = 7^x\log 7\ \log|x| + \frac{7^x}{x} - 2\cosh x$

57) $D\left(\log x^5 + \log\sqrt{x} - \log\frac{1}{x^2}\right) = \frac{15}{2x}$

58) $D\left(x\arccos x + x^2e^x\right) = \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + e^x(x^2+2x)$

59) $D\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{senh} x} + \frac{\cos x}{\cosh x}\right) = \frac{\cos x\ \operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x\cosh x}{\operatorname{senh}^2 x} -$

$- \frac{\operatorname{sen} x\cosh x + \cos x\ \operatorname{senh} x}{\cosh^2 x}$

60) $D\left(x^5\log x - 6\operatorname{arcsen} x + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) = x^4(1+5\log x) -$

$- \frac{6}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x(1+\operatorname{tg}^2 x) - \operatorname{tg} x}{x^2}$

61) $D\ \frac{x^4-1}{x^4+1} = \frac{8x^3}{(x^4+1)^2}$

62) $D\left(e^{x+1}+2^{x+2}+6^{-x+2}\right) = e^{x+1} + 2^{x+2}\log 2 - 6^{-x+2}\log 6$

63) $D\left(\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x\right) = \frac{2}{(1+x^2)^2}$

64) $D\left(2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} 2x\right) = 2(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$

65) $D\left(\cos^2 x + \cos 2x\right) = -3\operatorname{sen} 2x$

66) $D\left(x^3 \operatorname{tg} x + \frac{3^x-1}{3^x+1}\right) = x^2\left(3\operatorname{tg} x + x\operatorname{tg}^2 x + x\right) + \frac{2\cdot 3^x \log 3}{(1+3^x)^2}$

67) $D\left(e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + \frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = 2e^x\left(\cos x + \frac{1}{(e^x+1)^2}\right)$

68) $D\left(\frac{\sqrt{x} - \operatorname{sen} x}{\sqrt{x} + \cos x}\right) = \frac{-2\sqrt{x} + \operatorname{sen} x\,(1+2x) + \cos x\,(1-2x)}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x} + \cos x)^2}$

69) $D\left(x^e \log x + (x^2+1)\operatorname{arctg} x\right) = x^{e-1}(e\log x + 1) +$
$+ 2x\operatorname{arctg} x + 1$

70) $D\left(x\operatorname{cotg} x + \frac{x^2}{2} - x\log x\operatorname{cotg} x\right) = x\operatorname{cotg}^2 x\,(\log x - 1) +$
$+ \log x\,(x - \operatorname{cotg} x)$

71) $D\left(e^x\frac{x^2+2}{x^2-2}\right) = \frac{e^x}{x^2-2}\left(x^2+2 - \frac{8x}{x^2-2}\right)$

72) $D\left(\log(x)^{\sqrt{x}} + \log(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\log x}{2} + 1\right) +$

$+ \cos x\,(\log \operatorname{sen} x + 1)$

Svolgimento (1, 6, 12, 14, 17, 34, 72)

I seguenti svolgimenti sono dati a titolo puramente esemplificativo

1) Dalla regola $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ con $\alpha=2$ segue $Dx^2=2x$

6) Dalla regola $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ con $\alpha=1/2$ segue

$$D\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

12) Ricordando che la derivata di una somma e la somma delle derivate si ha:

$D(\operatorname{sen} x + \cos x) = D\operatorname{sen} x + D\cos x = \cos x - \operatorname{sen} x.$

14) Dalla regola di derivazione del prodotto si ha:

$D(x\operatorname{arctg} x) = \operatorname{arctg} x\, Dx + x\, D\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}.$

17) Dalla regola di derivazione di un rapporto si ha

$$D\left(\frac{\cos x}{x^2+1}\right) = \frac{(x^2+1)\,D\cos x - \cos x\,D(x^2+1)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= -\frac{(x^2+1)\operatorname{sen} x + 2x\cos x}{(x^2+1)^2}.$$

34) Dalla regola di derivazione del prodotto si ha:

$D(x\operatorname{arctg} x\operatorname{sen} x) = \operatorname{arctg} x\operatorname{sen} x\, Dx + x\, D(\operatorname{arctg} x\operatorname{sen} x) =$

$= \operatorname{arctg} x\operatorname{sen} x + x(\operatorname{arctg} x\, D\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x\, D\operatorname{arctg} x) =$

$= \operatorname{arctg} x\operatorname{sen} x + x\operatorname{arctg} x\cos x + \frac{x\operatorname{sen} x}{1+x^2}.$

72) Basta ricordare che $\log a^b = b\log a$.

2. - Derivazione delle funzioni composte

Ricordiamo la *regola di derivazione delle funzioni composte*: sia f una funzione definita nell'intervallo I ed a valori nell'intervallo J e sia g definita in J; se f è derivabile in $x_0 \in I$ e g è derivabile in $f(x_0)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e si ha:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Da questa regola e dalle derivate delle funzioni elementari si ricava la seguente tabella la cui verifica costituisce per il lettore un utile esercizio

$D(f(x))^\alpha = \alpha(f(x))^{\alpha-1} \cdot f'(x)$	$Da^{f(x)} = a^{f(x)} \log a \; f'(x)$
$D\, e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$D \log_a \lvert f(x) \rvert = \frac{1}{f(x)} \log_a e \; f'(x)$
$D \log \lvert f(x) \rvert = \frac{1}{f(x)} f'(x)$	$D\, \mathrm{sen} f(x) = \cos f(x) \; f'(x)$
$D \cos f(x) = -\mathrm{sen} f(x) \; f'(x)$	$D\, \mathrm{tg} f(x) = \frac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x)$
$D \mathrm{cotg}\, f(x) = -\frac{1}{\mathrm{sen}^2 f(x)} f'(x)$	$D \arcsin f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} f'(x)$
$D \arccos f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} f'(x)$	$D \mathrm{arctg}\, f(x) = \frac{1}{1+f^2(x)} f'(x)$
$D \cosh f(x) = \mathrm{senh} f(x) \, f'(x)$	$D\, \mathrm{senh} f(x) = \cosh f(x) \; f'(x)$
$D \mathrm{tgh}\, f(x) = \frac{1}{\cosh^2 f(x)} f'(x)$	$D\, \mathrm{settcosh} f(x) = \frac{1}{\sqrt{f^2(x)-1}} f'(x)$
$D\, \mathrm{settsenh}\, f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+f^2(x)}} f'(x)$	
$D\, \mathrm{setttgh}\, f(x) = \frac{1}{1-f^2(x)} f'(x)$	
$D\,(f(x))^{g(x)} = D\, e^{g(x) \log f(x)} = (f(x))^{g(x)} \left(g'(x) \log f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right)$	

Dimostrare le seguenti eguaglianze

1) $D\, \mathrm{sen}^3 x = 3\, \mathrm{sen}^2 x \cos x$

2) $D \sqrt{\mathrm{tg} x} = \frac{1}{2 \cos^2 x \sqrt{\mathrm{tg} x}}$

3) $D \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \frac{-2x}{3 \left(x^2+1\right) \sqrt[3]{x^2+1}}$

4) $D \frac{\log^2 |x|}{x} = \frac{2 \log |x| - x \log^2 |x|}{x^2}$

5) $D\, (\mathrm{arctg} x)^4 \arcsin x = \frac{4\, (\mathrm{arctg} x)^3 \arcsin x}{x^2+1} + \frac{(\mathrm{arctg} x)^4}{\sqrt{1-x^2}}$

6) $D\, 6^{\cos x} = -6^{\cos x} \log 6 \; \mathrm{sen} x$

7) $D\, e^{x^5} = 5x^4 e^{x^5}$

8) $D\, e^{\sqrt{\log |x|}} = e^{\sqrt{\log |x|}} \frac{1}{2x \sqrt{\log |x|}}$

9) $D\, 3^{\mathrm{sen}^2 x} = 3^{\mathrm{sen}^2 x} \log 3 \; \mathrm{sen} 2x$

10) $D \log_2 |\mathrm{cotg} x| = -\frac{1}{\mathrm{cotg} x \, \mathrm{sen}^2 x} \log_2 e$

11) $D \log \sqrt{\mathrm{sen} x + 1} = \frac{\cos x}{2 (\mathrm{sen} x + 1)}$

12) $D \sqrt{\log (\mathrm{sen} x + 1)} = \frac{\cos x}{2 \sqrt{\log (\mathrm{sen} x + 1)} \, (\mathrm{sen} x + 1)}$

13) $D \log_2 |\arccos x| = -\frac{\log_2 e}{\arccos x \sqrt{1-x^2}}$

14) $D \cos 5x = -5\, \mathrm{sen} 5x$

15) $D \cos x^5 = -5x^4 \, \mathrm{sen} x^5$

16) $D \cos \log (x^2+1) = - \operatorname{sen} \log (x^2+1) \dfrac{2x}{x^2+1}$

17) $D \operatorname{sen} e^x = e^x \cos e^x$

18) $D \operatorname{sen} \sqrt{x^4+3} = \cos \sqrt{x^4+3} \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+3}}$

19) $D (\operatorname{sen} 4x \cos^2 x) = 4\cos 4x \cos^2 x - \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 2x$

20) $D \operatorname{tg} (e^x+4) = \dfrac{e^x}{\cos^2 (e^x+4)}$

21) $D \sqrt{\operatorname{tg} \log |x|} = \dfrac{1}{2x \sqrt{\operatorname{tg} \log |x|} \cos^2 \log |x|}$

22) $D \dfrac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - \operatorname{sen} \sqrt{x}}{2x \sqrt{x}}$

23) $D \operatorname{cotg} \left(3^x+1\right) = - \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 \left(3^x+1\right)} 3^x \log 3$

24) $D \dfrac{1}{\operatorname{cotg} \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x} \operatorname{ctg}^2 \sqrt{x} \operatorname{sen}^2 \sqrt{x}}$

25) $D e^{\operatorname{cotg} (1 + \log |x|)} = - \dfrac{e^{\operatorname{cotg} (1 + \log |x|)}}{x \operatorname{sen}^2 (1 + \log |x|)}$

26) $D \operatorname{arcsen} \log x = \dfrac{1}{x \sqrt{1 - \log^2 x}}$

27) $D \operatorname{arcsen} 9 x = \dfrac{9}{\sqrt{1 - 81 x^2}}$

28) $D \arccos e^x = - \dfrac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

29) $D \left(e^{2x} \arccos x^2\right) = 2 e^{2x} \arccos x^2 - \dfrac{2x e^{2x}}{\sqrt{1 - x^4}}$

30) $D \operatorname{arctg} \sqrt{x} = \dfrac{1}{2 \sqrt{x} (1 + x)}$

31) $D \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x + 1} = \dfrac{1}{2x^2 + 2x + 1}$

32) $D (\operatorname{arctg} \operatorname{sen} x)^3 = 3 (\operatorname{arctg} \operatorname{sen} x)^2 \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$

33) $D \sqrt{\arccos \sqrt{x}} = \dfrac{-1}{2 \sqrt{\arccos \sqrt{x}}} \dfrac{1}{2 \sqrt{x} \sqrt{1 - x}}$

34) $D \operatorname{senh} \log |x| = \dfrac{1}{x} \cosh \log |x|$

35) $D \dfrac{1}{\cosh 3^x} = - \dfrac{3^x \operatorname{senh} 3^x \log 3}{(\cosh 3^x)^2}$

36) $D \operatorname{tgh} 4x = \dfrac{4}{(\cosh 4x)^2}$

37) $D \operatorname{settsenh} x^2 = \dfrac{2x}{\sqrt{1 + x^4}}$

38) $D (\operatorname{settcosh} e^x)^2 = 2 \operatorname{settcosh} e^x \dfrac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$

39) $D \operatorname{setttgh} \sqrt{\cos x} = - \dfrac{1}{1 - \cos x} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 \sqrt{\cos x}}$

40) $D \left(\sqrt{5^x-1} - \sqrt{5^x+1}\right) = \dfrac{5^x \log 5}{2} \left(\dfrac{1}{\sqrt{5^x-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{5^x+1}}\right)$

41) $D x e^{1/x} = \dfrac{e^{1/x} (x-1)}{x}$

42) $D \sqrt[5]{(x \log |x|)^3} = \dfrac{3}{5 \sqrt[5]{(x \log |x|)^2}} (\log |x| + 1)$

43) $D \log |\operatorname{sen} x| = \operatorname{cotg} x$

44) $D \log \operatorname{sen} \log x = \dfrac{1}{x} \operatorname{cotg} \log x$

45) $D \log_2 |\operatorname{sen} x \cos x| = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} \log_2 e (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$

46) $D \dfrac{1}{\sqrt[3]{\log \sqrt{x}}} = - \dfrac{1}{6x \log \sqrt{x} \sqrt[3]{\log \sqrt{x}}}$

47) $D\sqrt{\operatorname{arctg}\log(x^2+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{arctg}\log(x^2+1)}} \cdot \dfrac{1}{1+(\log(x^2+1))^2}\,\dfrac{x}{x^2+1}$

48) $D\,e^{\operatorname{arcsen}(1/x)} = -\dfrac{e^{\operatorname{arcsen}(1/x)}}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

49) $D\,3^{\frac{1-x}{1+x}} = -3^{\frac{1-x}{1+x}}\log 3\,\dfrac{2}{(1+x)^2}$

50) $D(\log\cos\sqrt{x} + e^x \operatorname{arctg} x^2) = -\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + e^x\left(\operatorname{arctg}x^2 + \dfrac{2x}{1+x^4}\right)$

51) $D\,\dfrac{1}{\operatorname{tg}\log|x^2-4|} = -\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\log|x^2-4|}\,\dfrac{1}{\cos^2\log|x^2-4|}\,\dfrac{2x}{x^2-4}$

52) $D\sqrt{\dfrac{1+e^x}{1-e^x}} = \sqrt{\dfrac{1-e^x}{1+e^x}}\,\dfrac{e^x}{(1-e^x)^2}$

53) $D\,e^{1-\sqrt{\cos x}} = e^{1-\sqrt{\cos x}}\,\dfrac{\operatorname{sen}x}{2\sqrt{\cos x}}$

54) $D\left(\dfrac{3}{\operatorname{sen}^2 2x} - x^2\log|\operatorname{sen}4x|\right) = \dfrac{-12\cos 2x}{(\operatorname{sen}2x)^3} - 2x\left(\log|\operatorname{sen}4x| + 2x\operatorname{cotg}4x\right)$

55) $D\operatorname{arctg}\operatorname{sen}\log|x^2-1+2^x| = \dfrac{\cos\log|x^2-1+2^x|}{1+(\operatorname{sen}\log|x^2-1+2^x|)^2}\,\dfrac{2x+2^x\log 2}{x^2-1+2^x}$

56) $D\,x^x = x^x(\log x + 1)$

57) $D(\operatorname{sen}x)^x = (\operatorname{sen}x)^x(\log\operatorname{sen}x + x\operatorname{cotg}x)$

58) $D(\operatorname{arctg}x)^{\sqrt{x}} = (\operatorname{arctg}x)^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\log\operatorname{arctg}x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{\operatorname{arctg}x\,(1+x^2)}\right)$

59) $D\cos\log|\operatorname{arctg}(x+1)| = -\operatorname{sen}\log|\operatorname{arctg}(x+1)| \cdot \dfrac{1}{\operatorname{arctg}(x+1)\,(x^2+2x+2)}$

60) $D\left(x\operatorname{sen}\sqrt[3]{x+2}\right) = \operatorname{sen}\sqrt[3]{x+2} + \dfrac{x\cos\sqrt[3]{x+2}}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}$

61) $D(\operatorname{senh}(x^2+1)\operatorname{sen}x^2) = 2x(\cosh(x^2+1)\operatorname{sen}x^2 + \operatorname{senh}(x^2+1)\cos x^2)$

62) $D\left(\operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2} + x\log 5x\right) = \dfrac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}} + \log 5x + 1$

63) $D(7 + \operatorname{sen}\log|\log x|) = \cos\log|\log x|\,\dfrac{1}{x\log x}$

64) $D\,\dfrac{\operatorname{sen}2x\cos 4x}{x+1} = \dfrac{2(x+1)(\cos 2x\cos 4x - 2\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}4x) - \operatorname{sen}2x\cos 4x}{(x+1)^2}$

65) $D(\operatorname{sen}^2x+2)^{\sqrt{\log x}} = (\operatorname{sen}^2x+2)^{\log x}\left(\dfrac{\log(\operatorname{sen}^2x+2)}{2x\sqrt{\log x}} + \dfrac{\sqrt{\log x}\;2\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}^2x+2}\right)$

66) $D\operatorname{tg}\sqrt{1+e^{x^5}} = \dfrac{5x^4e^{x^5}}{2\sqrt{1+e^{x^5}}\cos^2\left(\sqrt{1+e^{x^5}}\right)}$

67) $D(1-\cos^3(x^2+3x))^{\pi} = 3\pi(1-\cos^3(x^2+3x))^{\pi-1}\cos^2(x^2+3x)\operatorname{sen}(x^2+3x)(2x+3)$

68) $D\operatorname{arctg}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$

69) $D\left(\log\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| + 2\ \mathrm{arctg}\ x^2\right) = \frac{8x^5}{x^8-1}$

70) $D\left(\mathrm{sen}^4(1+\log x) - \cos^4(1+\log x)\right) =$

$= \frac{4\ \mathrm{sen}\,(1+\log x)\cos(1+\log x)}{x}$

71) $D\left(\log\ \mathrm{cotg}x - \frac{1}{\mathrm{sen}\ 2x}\right) = -\frac{2\,(\mathrm{sen}\ 2x - \cos 2x)}{(\mathrm{sen}\ 2x)^2}$

72) $D\left(\mathrm{tgh}\ \log x \cdot \mathrm{settsenh}\ e^x\right) = \frac{\mathrm{settsenh}\ e^x}{(\cosh \log x)^2\ x} +$

$+ \frac{e^x\ \mathrm{tgh}\ \log x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

73) $D\ \mathrm{arcsen}\ \log x = \frac{1}{x\sqrt{1-\lg^2 x}}$

74) $D\left(\cosh\sqrt{x^2+1} + \sqrt{\mathrm{setttgh}\,(x+1)}\right) = \frac{x\ \mathrm{senh}\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} -$

$- \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{setttgh}\,(x+1)}} \cdot \frac{1}{x^2+2x}$

75) $D\left(\sqrt[3]{\log\ \log\ x}\right)^4 = \frac{4}{3}\ \frac{\sqrt[3]{\log\ \log\ x}}{x\ \log x}$

76) $D\left(\frac{\log\ \mathrm{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-x^2} + x\ \mathrm{arcsen}x\ \log\ \mathrm{arcsen}x}{\mathrm{arcsen}x\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$

77) $D\ \log\left|2^{\mathrm{arctg}\ 1/x} - 5\right| = -\frac{2^{\mathrm{arctg}\ 1/x}\ \log 2}{(x^2+1)\left(2^{\mathrm{arctg}\ 1/x}-5\right)}$

78) $D\left(\mathrm{arctg}x\ \log\ \mathrm{arctg}x + e^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}\right) =$

$= \frac{1}{1+x^2}\left(\log\ \mathrm{arctg}x + 1 - \frac{x\ e^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

79) $D\ 7^{1+\sqrt{x^4+1}} = 7^{1+\sqrt{x^4+1}}\ \log 7\ \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}$

80) $D\mathrm{cotg}\ \log\left(e^{\mathrm{sen}2x}+2\right) = -\frac{2e^{\mathrm{sen}\ 2x}\cos 2x}{\mathrm{sen}^2\ \log\left(e^{\mathrm{sen}\ 2x}+2\right)\left(e^{\mathrm{sen}\ 2x}+2\right)}$

81) $D\left(\mathrm{arcsen}\ \frac{x}{x+1}\right)^3 = 3\left(\mathrm{arcsen}\ \frac{x}{x+1}\right)^2 \frac{1}{|x+1|\sqrt{2x+1}}$

82) $D\ \mathrm{settsenh}\sqrt{x^2-1} = \frac{x}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

83) $D\sqrt{1+3^x}\ \cosh\sqrt{1+3^x} =$

$= \frac{3^x\ \log 3}{2}\left(\mathrm{senh}\sqrt{1+3^x} + \frac{\cosh\sqrt{1+3^x}}{\sqrt{1+3^x}}\right)$

84) $D\ \frac{1}{x\ \mathrm{sen}\,(1/x)} = \frac{\cos(1/x) - x\ \mathrm{sen}\,(1/x)}{x^3\ \mathrm{sen}^2\,(1/x)}$

85) $D\ e^{\sqrt[3]{1+\mathrm{sen}^2 x}} = e^{\sqrt[3]{1+\mathrm{sen}^2 x}}\ \frac{2\ \mathrm{sen}x\ \cos x}{3\sqrt[3]{\left(1+\mathrm{sen}^2 x\right)^2}}$

86) $D\left((x)^{\mathrm{sen}x}\ e^{\cos\ \log|x|}\right) = (x)^{\mathrm{sen}x}\ e^{\cos\ \log|x|}\left(\cos x\ \log|x| +\right.$

$\left.+ \frac{\mathrm{sen}x}{x} - \frac{\mathrm{sen}\ \log|x|}{x}\right)$

87) $D\left(\frac{(x)^{\cos x}\ (\mathrm{tg}x)^x}{e^{\cos x}}\right) = \frac{(x)^{\cos x}\ (\mathrm{tg}x)^x}{e^{\cos x}}\left(\frac{\cos x}{x} -\right.$

$\left.- \mathrm{sen}x\ \log x + \log\ \mathrm{tg}x + \frac{x}{\cos^2 x\ \mathrm{tg}x} + \mathrm{sen}x\right)$

88) $D\ \log_{1+e^x}(2+\cos x) =$

$- \frac{\mathrm{sen}x\ (e^x+1)\ \log\,(e^x+1) + e^x\ (2+\cos x)\ \log\,(2+\cos x)}{(2+\cos x)\ (e^x+1)\ \log^2\,(e^x+1)}$

89) $D\log_{\mathrm{tg}x}\left(x^4+2\right) = \frac{4x^3\ \cos^2 x\ \mathrm{tg}x\ \log\ \mathrm{tg}x - \left(x^4+2\right)\ \log\left(x^4+2\right)}{\left(x^4+2\right)\ \cos^2 x\ \mathrm{tg}x\ \log^2\ \mathrm{tg}x}$

90) $D\left(\frac{1}{x}\ \mathrm{arctg}\ \frac{x^2+2}{x^2-2}\right) = \frac{-4}{x^4+4} - \frac{1}{x^2}\ \mathrm{arctg}\ \frac{x^2+2}{x^2-2}$

Svolgimento (1, 3, 7, 10, 18, 59, 88)

I seguenti svolgimenti sono dati a titolo puramente esemplificativo.

1) Dalla regola $Df^{\alpha}=\alpha f^{\alpha-1}\cdot f'$ con $\alpha=3$ ed $f=\text{sen}x$ segue $D\ \text{sen}^3x = 3\text{sen}^2x\ \cos x$.

3) Dalla regola $Df^{\alpha}=\alpha f^{\alpha-1}\ f'$ con $\alpha = -1/3$ ed $f = x^2+1$ segue

$$D\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} = D\ (x^2+1)^{-1/3} = -\ \frac{1}{3}\ (x^2+1)^{-4/3}\ (2x)$$

7) Dalla regola $De^{f(x)}=e^{f(x)}f'$ con $f(x) = x^5$ segue $De^{x^5}= e^{x^5}(5x^4)$.

10) Dalla regola

$$D\ \log_a |f(x)| = \frac{1}{f(x)}\ \log_a e\ f'$$

con $f = \text{ctg}x$ ed $a=2$ segue

$$D\ \log_2 |\text{cotg}x| = \frac{1}{\text{cotg}x}\ \log_2 e\ \left(-\ \frac{1}{\text{sen}^2x}\right).$$

18) Dalla regola $D\text{sen}\ f(x) = \cos f(x)\ f'$ con $f(x) = \sqrt{x^4+3}$ segue

$$D\ \text{sen}\ \sqrt{x^4+3} = \cos\ \sqrt{x^4+3}\ D\ \sqrt{x^4+3};$$

dalla regola $Df^{\alpha}= \alpha\ f^{\alpha-1}\ f'$ con $f = x^4+3$ ed $\alpha=1/2$ segue

$$D\ \sqrt{x^4+3} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+3}};$$

in definitiva si ha

$$D\ \text{sen}\ \sqrt{x^4+3} = \cos\ \sqrt{x^4+3}\ \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+3}}.$$

59) Dalla regola $D\ \cos f(x) = -\ \text{sen}f(x)\cdot f'(x)$ con $f(x) = \log |\text{arctg}(x+1)|$ segue

$$D\ \cos \log |\text{arctg}\ (x+1)| = -\ \text{sen}\ \log |\text{arctg}\ (x+1)|\ D\ \log |\text{arctg}\ (x+1)|;$$

dalla regola $D\ \log |f(x)| = f'(x)/f(x)$ con $f(x) = \text{arctg}\ (x+1)$

segue

$$D\ \log |\text{arctg}\ (x+1)| = \frac{1}{\text{arctg}\ (x+1)}\ D\ \text{arctg}\ (x+1);$$

dalla regola

$$D\ \text{arctg}\ f(x) = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

con $f(x) = (x+1)$ segue:

$$D\ \text{arctg}\ (x+1) = \frac{1}{1\ +\ (x+1)^2};$$

in definitiva si ha quindi

$$D\ \cos \log |\text{arctg}\ (x+1)| = -\ \text{sen}\ \log |\text{arctg}\ (x+1)|\ \frac{1}{\text{arctg}\ (x+1)\ (x^2+2x+2)}$$

88) Basta osservare che $\log_b a = \log a\ /\ \log b$ e quindi

$$D\ \log_{1+e^x}\ (2\ +\ \cos x) = D\left(\frac{\log\ (2\ +\ \cos x)}{\log\ (1\ +\ e^x)}\right)$$

3. - Ulteriori esercizi

Risolvere i seguenti esercizi.

1) Date le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x \log|x| & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \log|x| & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

provare che in $x=0$ $g(x)$ è derivabile e si ha $g'(0)=0$ mentre $f(x)$ non è derivabile ed ha in $x=0$ un punto a tangente verticale.

2) Date le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x\geq 0 \\ x^2+1 & x<0 \end{cases}, \quad g(x) = |x| \operatorname{sen} x$$

provare che in $x=0$ $g(x)$ è derivabile e si ha $g'(0)=0$ mentre $f(x)$ non lo è ed ha in $x=0$ un punto angoloso.

3) Provare che le funzioni $f(x)=|x|^\alpha$, $\alpha\in]0,1[$ non è derivabile in $x=0$ e che ha in tale punto una cuspide.

4) Provare che le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

sono derivabili in $x=0$ e si ha $f'(0)=g'(0)=0$; provare inoltre che in $x=0$ $g'(x)$ è continua mentre $f'(x)$ non lo è.

5) Date le funzioni

a) $f_1(x) = \sqrt[3]{x^4+2x^3+x^2}$ b) $f_2(x) = \begin{cases} x^3+5x & x\geq 1 \\ 8x-2 & x<1 \end{cases}$

c) $f_3(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

d) $f_4(x) = \begin{cases} (x^2-1)(x-1)\log|x^2-1| & x\neq\pm 1 \\ 0 & x=\pm 1 \end{cases}$

e) $f_5(x) = |x|$ f) $f_6(x) = |x^2-4x|$

g) $f_7(x) = \operatorname{arcsen}(1-|x|)$ h) $f_8(x) = \log(x+1)+|x^2-x|$

i) $f_9(x) = x(\log^2 x+|\log x|-5)$

l) $f_{10}(x) = \sqrt{|x|+|x-1|}$

m) $f_{11}(x) = |x| + \sqrt{|x^2-3x+2|}$ n) $f_{12}(x) = \sqrt{\frac{|x|+x}{2}}$

o) $f_{13}(x) = x\, e^{\frac{x}{1-|x|}}$ p) $f_{14}(x) = \log(1+|e^x-e|)$

q) $f_{15}(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

r) $f_{16}(x) = |\operatorname{arctg} x| - a|x|$ $(a\in R)$

determinare l'insieme in cui sono derivabili ed individuarne gli eventuali punti a tangente verticale, cuspidi e punti angolosi.

6) Calcolare le seguenti derivate di ordine superiore:

$$D^4 \log|x|, \quad D^3\sqrt{x+1}, \quad D^5(x^5), \quad D^2 e^{\cos x}, \quad D^3 \frac{1-x}{1+x}.$$

7) Adoperando la regola di Leibnitz calcolare

$$D^3(x \log |x|), \quad D^2(x^5 \operatorname{tg} x), \quad D^4(x^4 e^x).$$

8) Scrivere l'equazione della tangente al grafico di

senx nel punto di ascissa $\pi/6$,
x^2+1 nel punto di ascissa $x=0$,
arctgx nel punto di ascissa $x=0$,
xlogx nel punto di ascissa $x=1$.

Svolgimento (da 1 a 8)

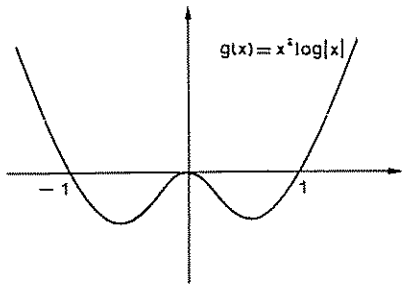
1) Si ha:

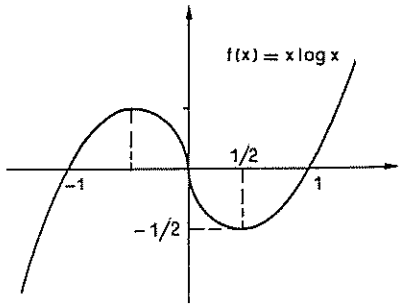
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \log |x|}{x} = \lim_{x\to 0} x \log |x| = 0$$

e quindi $g'(0)=0$ (cfr. fig 8.1); invece

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x \log |x|}{x} = \lim_{x\to 0} x \log |x| = -\infty$$

e quindi poiché il limite del rapporto incrementale esiste ma non è finito $x=0$ è un punto a tangente verticale.





2) Si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} |x| \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \cdot 1 = 0$$

e quindi $g'(0)=0$.

Passando alla funzione $f(x)$ utilizzando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$$

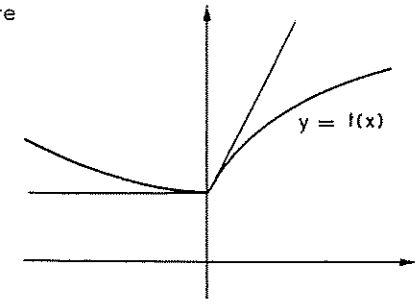
si ha:

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1-1}{x} = 0$$

e quindi $x=0$ è un punto angoloso del grafico di $f(x)$

N.B. Per calcolare $f'(0^+)$ e $f'(0^-)$ si può procedere anche diversamente: osservato che



$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} & x>0 \\ 2x & x<0 \end{cases}$$

si ha:

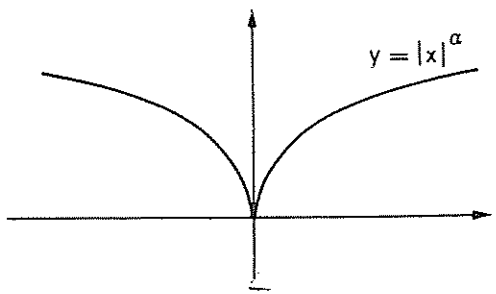
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(0^+) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0 \Rightarrow f'(0^-) = 0.$$

3) Si ha tenuto conto che $\alpha \in]0,1[$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|^\alpha}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|^\alpha}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(-x)^\alpha}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left(-(-x)^{\alpha-1}\right) = -\infty$$

quindi $f'(0^+) = +\infty$ ed $f'(0^-) = -\infty$; ne segue che $x=0$ è un punto di cuspide.



4) Si ha:

$$g'(x) = 3x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \cos\frac{1}{x} \quad \text{per } x\neq 0;$$

quindi poiché esiste il limite di $g'(x)$ per x che tende a zero e si ha:

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = 0$$

$g(x)$ è derivabile in $x=0$ e si ha $g'(0)=0$; da ciò consegue inoltre che $g'(x)$ è continua in $x=0$.
Si ha poi:

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \text{per } x\neq 0$$

e dunque non esistono i limiti destro e sinistro di $f'(x)$ in zero. Pertanto per stabilire se $f(x)$ è derivabile o meno in $x=0$ bisogna studiare il rapporto incrementale di $f(x)$ in 0; si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

e dunque $f(x)$ è derivabile in 0 e si ha $f'(0)=0$; $f'(x)$ ha in $x=0$ una discontinuità di II specie.

5) a) Posto

$$g(y) = \sqrt[3]{y}; \quad f(x) = x^4 + 2x^3+x^2$$

si ha:

$$f_1(x) = g(f(x));$$

poiché $g(y)$ è derivabile per $y\neq 0$ ed $f(x)$ è derivabile per ogni $x\in R$ dalla regola di derivazione delle funzioni composte segue che $f_1(x)$ è derivabile per $x\in R - \{0,-1\}$ poiché $f(0)=f(-1)=0$. Studiamo il rapporto incrementale in $x=0$ ed $x=-1$; si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2 (x+1)^2}}{x} = +\infty$$

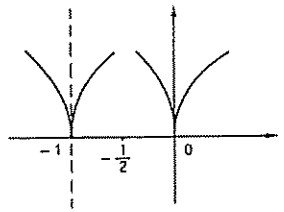
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2 (x+1)^2}}{x} = -\infty$$

quindi $x=0$ è un punto di cuspide; ancora:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{f_1(x) - f_1(-1)}{x + 1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt[3]{x^2 (x+1)^2}}{x + 1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{f_1(x) - f_1(-1)}{x + 1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{\sqrt[3]{x^2 (x+1)^2}}{x + 1} = -\infty$$

e quindi anche $x=-1$ è un punto di cuspide.



b) La funzione $f_2(x)$ è ovviamente derivabile per $x\neq 1$ e si ha:

$$f_2'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & x>1 \\ 8 & x<1 \end{cases};$$

quindi

$$f_2'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f_2'(x) = 8 = \lim_{x\to 1^-} f_2'(x) = f_2'(1^-)$$

ne consegue che $f_2(x)$ è derivabile anche nel punto $x=1$.

c) La funzione $f_3(x)$ è derivabile per $x\neq 0$ poiche rapporto delle funzioni derivabili senx ed x; studiamo il rapporto incrementale di $f_3(x)$ nel punto 0:

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\operatorname{sen}x}{x} - 1}{x} = \frac{\operatorname{sen}x - x}{x^2};$$

ricordando che $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x - x}{x^2} = 0$ ne consegue cne $f_3(x)$ è derivabile in $x=0$ e si ha $f_3'(0)=0$.

d) La funzione $f_4(x)$ è drivabile per $x\neq\pm 1$ in forza del teorema sulla derivazione delle funzioni composte e del teorema sulla derivazione di un prodotto; scrivendo poi il rapporto incrementale nel punto $x=1$ si ha:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f_4(x) - f_4(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x^2-1) \log |x^2-1| = \lim_{y\to 0} = y \log |y| = 0$$

e quindi $f_4(x)$ è derivabile nel punto $x=1$ e si ha $f_4'(1)=0$; si ha poi nel punto $x=-1$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f_4(x) - f_4(-1)}{x + 1} = \lim_{x\to -1} (x-1)^2 \log |x^2-1| = -\infty$$

Quindi in $x=-1$ la funzione $f_4(x)$ non è derivabile e presenta ivi un punto a tangente verticale.

e) Si ha:

$$f_5(x) = |x| = \begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

Quindi $f_5(x)$ è derivabile in $R-\{0\}$ e si ha

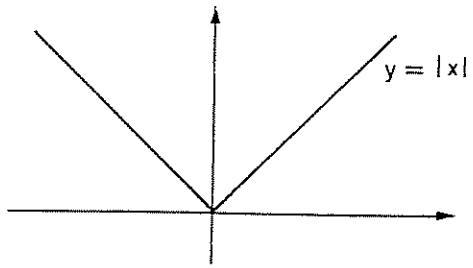
$$f_5'(x) = |x| = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}.$$

Da qui segue:

$$\lim_{x\to 0^+} f_5'(x) = 1 \text{ fi } f_5'(0^+) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f_5'(x) = -1 \Rightarrow f_5'(0^-) = -1.$$

Quindi $f_5(x)$ non è derivabile in $x=0$ e presenta ivi un punto angoloso.



f) Si ha:

$$f_6(x) = \begin{cases} x^2-4x \text{ in }]-\infty, 0] \cup]4,+\infty[\\ 4x-x^2 \text{ in }]0,4[\end{cases}$$

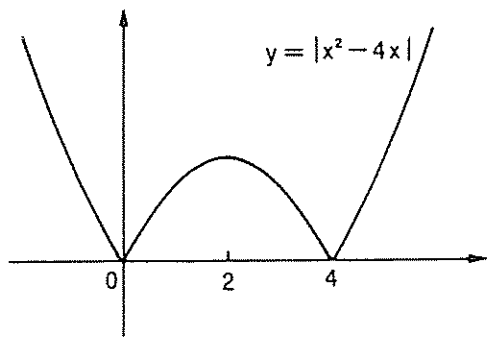
e quindi $f_6(x)$ e derivabile per $x\neq 0$ e $x\neq 4$ (ciò si ottiene anche osservando cne $f_6(x)$ è composta da $|y|$ che è derivabile per $y\neq 0$ e da $y=x^2-4x$ che si annulla per $x=0$ e $x=4$); dall'espressione di $f_6(x)$ si ottiene:

$$f_6'(x) = \begin{cases} 2x-4 \text{ in }]-\infty, 0[\cup]4,+\infty[\\ 4-2x \text{ in }]0,4[\end{cases}$$

da cui

$$f_6'(0^-) = -4 \neq f_6'(0^+) = 4,\ f_6'(4^+) = 4 \neq f_6'(4^-) = -4;$$

pertanto $f_6(x)$ è derivabile in $R-\{0,4\}$ ed $x=0$, $x=4$ sono punti angolosi.



g) La funzione $f_7(x)$ (che è definita in $[-2,2]$) è composta dalle funzioni $g(y)=\text{arcsen } y$ ed $f(x)= 1 - |x|$; per il teorema di derivazione delle funzioni composte $f_7(x)=g(f(x))$ è derivabile per x diverso da 0, 2 e −2 poiché in $f(2)=f(-2)=1$ non è derivabile $g(y)$ ed in $x=0$ non è derivabile $f(x)$ (né $g(y)$ è derivabile in $f(0)=1$).

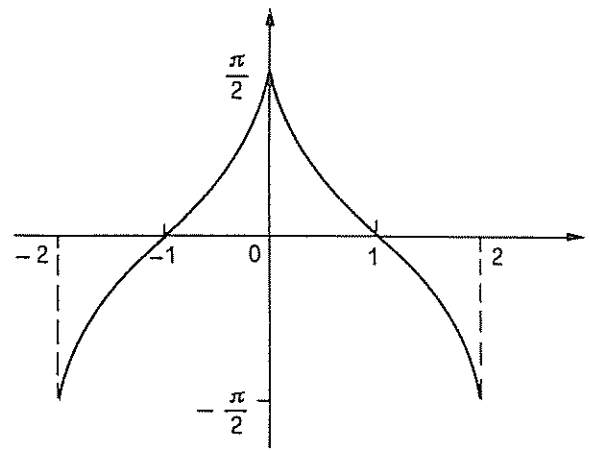
Si ha:

$$f_7'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}} &]0,2[\\ \dfrac{1}{\sqrt{-(x^2+2x)}} &]-2,0[\end{cases}$$

e da qui facilmente:

$$f_7'(0^+) = -\infty \neq f_7'(0^-) = +\infty$$

cosicché x=0 è un punto di cuspide. Si ha poi facilmente $f_7'(2^-)=-\infty$, $f_7'(-2^+)=+\infty$. Quindi $f_7(x)$ è derivabile in $]-2,0[\cup]0,2[$.



h) Si ha:

$$f_8(x) = \begin{cases} \log(x+1) + x^2-x &]-1,0] \cup [1,+\infty[\\ \log(x+1) + x-x^2 &]0,1[\end{cases};$$

da tale eguaglianza si ha subito che $f_8(x)$ è derivabile in $]-1,+\infty[-\{0,1\}$ (il lettore compirà un utile esercizio ricavando tale risultato dall'espressione iniziale di $f_8(x)$ tramite il teorema di derivazione delle funzioni composte); dall'espressione di $f_8(x)$ si ottiene subito

$$f_8'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + 2x-1 &]-1,0[\cup]1,+\infty[\\ \dfrac{1}{x+1} + 1-2x &]0,1[\end{cases};$$

per stabilire se $f_8(x)$ è derivabile in x=0 ed in x=1 calcoliamo al solito in tali punti i limiti destro e sinistro di $f_8'(x)$: si ricava

$$f_8'(0^-) = 0 \neq f_8'(0^+) = 2$$

$$f_8'(1^-) = -\frac{1}{2} \neq f_8'(1^+) = \frac{3}{2}.$$

i) Si ha:

$$f_9(x) = \begin{cases} x\left(\log^2 x + \log x - 5\right) & [1,+\infty[\\ x\left(\log^2 x - \log x - 5\right) &]0,1[\end{cases}$$

Pertanto $f_9(x)$ e derivabile per $x \in]0,+\infty[-\{1\}$ e si ha:

$$f_9'(x) = \begin{cases} \log^2 x + 3\log x - 4 &]1,+\infty[\\ \log^2 x + \log x - 6 &]0,1[\end{cases} ;$$

da qui segue:

$$f_9'(1^+) = -4 \neq f_9'(1^-) = -6.$$

Quindi in x=1 la funzione data non è derivabile e tale punto è angoloso.

l) Si ha

$$f_{10}(x) = \begin{cases} \sqrt{1-2x} &]-\infty,0[\\ 1 & [0,1] \\ \sqrt{2x-1} & [1,+\infty[\end{cases} ;$$

pertanto $f_{10}(x)$ è derivabile in $R-\{0,1\}$ e si ha:

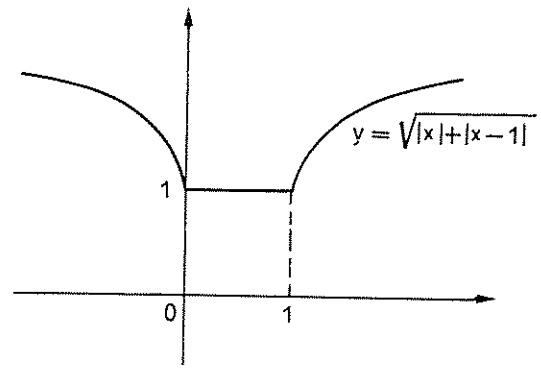
$$f_{10}'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}} &]-\infty,0[\\ 0 &]0,1[\\ \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} &]1,+\infty[\end{cases} ;$$

da qui segue subito

$$f_{10}'(0^-) = -1 \neq f_{10}'(0^+) = 0$$

$$f_{10}'(1^-) = 0 \neq f_{10}'(1^+) = 1.$$

Quindi in x=0 ed x=1 $f_{10}(x)$ non è derivabile e tali punti sono angolosi.



m) Si ha

$$f_{11}(x) = \begin{cases} -x+\sqrt{x^2-3x+2} &]-\infty,0[\\ x+\sqrt{x^2-3x+2} & [0,1] \cup [2,+\infty[\\ x+\sqrt{-x^2-3x+2} &]1,2[\end{cases} ,$$

e quindi ne consegue subito la derivabilità di $f_{11}(x)$ in $R-\{0,1,2\}$; inoltre è:

$$f_{11}'(x) = \begin{cases} -1 + \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}} &]-\infty,0[\\ 1 + \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}} &]0,1[\cup]2,+\infty[\\ 1 + \dfrac{3-2x}{2\sqrt{-x^2-3x+2}} &]1,2[\end{cases} ;$$

da qui si ottiene subito

$$f_{11}'(0^-) = -1 - \frac{3}{2\sqrt{2}} \neq f_{11}'(0^+) = 1 - \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

e quindi $f_{11}(x)$ non è derivabile in x=0 che è un punto angoloso; ed ancora:

$$f_{11}'(1^-) = -\infty \neq f_{11}'(1^+) = +\infty$$

$$f'_{11}(2^-) = -\infty \neq f'_{11}(2^+) = +\infty$$

e quindi $f_{11}(x)$ non è derivabile in x=1 nè in x=2 che sono cuspidi.

n) Si ha:

$$f_{12}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & [0,+\infty[\\ 0 &]-\infty,0[\end{cases};$$

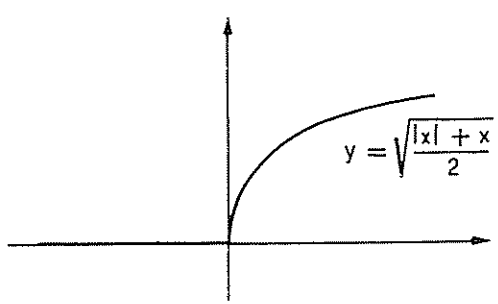
quindi $f_{12}(x)$ è derivabile per $x\neq 0$ ed inoltre

$$f'_{12}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} &]0,+\infty[\\ 0 &]-\infty,0[\end{cases};$$

in x=0 $f_{12}(x)$ non è derivabile poiché dall'espressione ottenuta per $f'_{12}(x)$ si ottiene

$$f'_{12}(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'_{12}(x) = +\infty \neq f'_{12}(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'_{12}(x) = 0;$$

x=0 è un punto angoloso.



o) Si ha:

$$f_{13}(x) = \begin{cases} x\, e^{x/(1-x)} & [0,1[\cup]1,+\infty[\\ x\, e^{x/(1+x)} &]-\infty,-1[\cup]-1,0[\end{cases};$$

ne segue che $f_{13}(x)$ è derivabile in $R-\{-1,0,1\}$; poiché la funzione non è definita in $x=\pm 1$ ci resta da studiarne la derivabilità solo in x=0. Si ha:

$$f'_{13}(x) = \begin{cases} e^{x/(1-x)}\left(1+\dfrac{x}{(1-x)^2}\right) &]0,1[\cup]1,+\infty[\\ e^{x/(1+x)}\left(1+\dfrac{x}{(x+1)^2}\right) &]-\infty,-1[\cup]-1,0[\end{cases},$$

e quindi

$$f'_{13}(0^-) = 1 = f'_{13}(0^+);$$

pertanto $f_{13}(x)$ è derivabile in x=0 e riesce $f'_{13}(0) = 1$.

p) Si ha

$$f_{14}(x) = \begin{cases} \log(e^x+1-e) & [1,+\infty[\\ \log(e+1-e^x) &]-\infty,1[\end{cases}$$

e quindi $f_{14}(x)$ è derivabile per $x\neq 1$ e si ha

$$f'_{14}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x+1-e} &]1,+\infty[\\ \dfrac{-e^x}{e+1-e^x} &]-\infty,1[\end{cases},$$

pertanto

$$f'_{14}(1^-) = -e \neq f'_{14}(1^+) = e.$$

q) La funzione data è derivabile in R-{0} perché ottenuta componendo funzioni derivabili; per studiare la derivabilità in x=0 calcoliamo i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale in x=0:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_{15}(x) - f_{15}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{y\to +\infty} y\, e^{-y} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f_{15}(x) - f_{15}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} = \lim_{y\to -\infty} y\, e^{y} = 0.$$

Pertanto $f_{15}(x)$ è derivabile in $x=0$ e si ha $f'_{15}(0) = 0$.

r) Poiche:

$$f_{16}(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x - ax &]0,+\infty[\\ -\operatorname{arctg} x + ax &]-\infty,0[\end{cases}$$

si ha subito che $f_{16}(x)$ è derivabile in $R-\{0\}$ qualunque sia il valore del parametro a; inoltre si ha

$$f'_{16}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} - a &]0,+\infty[\\ -\dfrac{1}{1+x^2} + a &]-\infty,0[\end{cases}$$

e quindi

$$f'_{16}(0^-) = a-1, \quad f'_{16}(0^+) = -a+1;$$

pertanto se $a=1$ la funzione $f_{16}(x)$ è derivabile in $x=0$ e la derivata in tale punto vale zero; se $a\neq 1$ $x=0$ è un punto angoloso per $f_{16}(x)$.

6) Posto $f(x) = \log|x|$ si ha:

$$f'(x) = \frac{1}{x}; \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}; \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}; \quad f^{IV}(x) = -\frac{6}{x^4}.$$

Posto $f(x) = \sqrt{x+1}$ si ha:

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{(x+1)^3}}; \quad f''(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad f'''(x) = \frac{1}{8\sqrt{(x+1)^5}}.$$

Posto $f(x) = x^5$ si ha

$$f'(x) = 5x^4; \quad f''(x) = 20x^3; \quad f'''(x) = 60x^2;$$
$$f^{IV}(x) = 120x; \quad f^{V}(x) = 120.$$

Posto $f(x) = e^{\cos x}$ si ha:

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x\, e^{\cos x}, \quad f''(x) = e^{\cos x}(\operatorname{sen}^2 x - \cos x).$$

Infine posto $f(x) = (1-x)/(1+x)$ si ha:

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{(1+x)^3}, \quad f'''(x) = -\frac{12}{(1+x)^4}.$$

7) Applichiamo la formula di Leibnitz

$$D^n(f(x)\ g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$$

con $f(x)=x$, $g(x)=\log|x|$, $n=3$; si ha:

$$\binom{3}{0} x\, D^3 \log|x| + \binom{3}{1} Dx\, D^2 \log|x| + \binom{3}{2} D^2x\, D \log|x| +$$
$$+ \binom{3}{3} D^3x \cdot \log|x|;$$

tenendo conto che $D^2x = D^3x=0$ e ricordando che

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{si ha}$$

$$D^3(x \log|x|) = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^2} = -\frac{1}{x^2};$$

ancora dalla formula di Leibnitz con $n=2$, $f(x)=x^5$, $g(x)=\operatorname{tg} x$ si ha:

$$D^2(x^5 \operatorname{tg} x) = \binom{2}{0} x^5 D^2 \operatorname{tg} x + \binom{2}{1} Dx^5\, D\operatorname{tg} x + \binom{2}{2} D^2x^5 \operatorname{tg} x =$$
$$= \frac{2x^5 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} + \frac{10x^4}{\cos^2 x} + 20\, x^3 \operatorname{tg} x;$$

infine dalla formula di Leibnitz con $f(x)=x^4$, $g(x)=e^x$, $n=4$ si ha

$$D^4(x^4 e^x) = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} D^k x^4 \quad D^{4-k} e^x = e^x \left[\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} D^k x^4\right]$$

$$= e^x\left[x^4 + 16x^3 + 72x^2 + 96x + 24\right].$$

8) L'equazione della tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa x_o è:

$$y-f(x_o) = f'(x_o)\ (x-x_o)$$

(ovviamente per l'esistenza della retta tangente $f(x)$ deve essere derivabile in x_o); pertanto

$f(x) = \operatorname{sen}x,\ x_o=\pi/6 \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right),$

$f(x) = x^2+1,\ x_o=0 \Rightarrow y = 1,$

$f(x) = \operatorname{arctg}e^x,\ x_o=0 \Rightarrow y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}x$

$f(x) = x\log x,\ x_o=1 \Rightarrow y = x-1$

CAPITOLO 8

APPLICAZIONI DELLA REGOLA DE L'HOPITAL

1. - Prime applicazioni della regola de l'Hopital

Nella tabella che segue richiamiamo la regola de l'Hopital:

i) Siano $f(x)$ e $g(x)$ derivabili in $]a, x_o[$ con $x_o \in R\cup\{+\infty\}$ (od in $]x_o,b[$ con $x_o \in R\cup\{-\infty\}$);

ii) $g'(x)$ abbia segno costante in $]a,x_o[$ (od in $]x_o,b[$);

iii) $\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o} g(x) = 0$ o $\lim_{x\to x_o} |f(x)| = \lim_{x\to x_o} |g(x)| = +\infty$;

<u>se esiste</u> $\lim_{x\to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ si ha:

(H) $$\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ (Regola de l'Hopital)

Prima di passare all'applicazione della regola de l'Hopital osserviamo che:

<u>se non esiste</u> $\lim_{x\to x_o} f'(x)/g'(x)$ <u>non si può concludere</u> <u>che non esiste</u> $\lim_{x\to x_o} f(x)/g(x)$;

ad esempio se $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$ e $g(x)=x$ si ha:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x} = 0,$$

mentre il rapporto

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = x\cos\frac{1}{x} - \mathrm{sen}\,\frac{1}{x}$$

è oscillante in 0.

Così se $f(x) = x+\cos x$ e $g(x) = 4x+\cos x$ si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{4x+\cos x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\cos x}{x}}{4+\frac{\cos x}{4}} = \frac{1}{4}$$

mentre

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1-\mathrm{sen}\,x}{4-\mathrm{sen}\,x}$$

non è regolare a $+\infty$.

A rigore pertanto per un uso corretto della regola de l'Hopital va studiato in via preliminare il comportamento in x_0 della funzione $f'(x)/g'(x)$.

1.1 Forme indeterminate 0/0 ed ∞/∞

a) Calcolare i seguenti limiti

1) $\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1+\mathrm{sen}\,x}{\log(x+1)}$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\mathrm{sen}\,x}{x^3}$

3) $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}+e^{1-x}-2}{x+\mathrm{sen}(x-1)-1}$

4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2\,\mathrm{arctg}\,x-\pi}{\log((x+1)/x)}$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{x-e^x+1}{x^4}$

6) $\lim_{x\to 2^+} \frac{\log(x-2)}{\mathrm{cotg}(x-2)}$

7) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{\log|x|}$

8) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log|x|}$ $(\alpha>0)$

9) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x}{x^3}$

10) $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha}$ $(a>1,\ \alpha>0)$

11) $\lim_{x\to 0} \frac{\log|x-\mathrm{sen}\,x|}{\log|x|^3}$

12) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{sen}\,x}{x-\log(x+1)}$

13) $\lim_{x\to\pi/4} \frac{\mathrm{tg}\,x-1}{\sqrt{2}\cos x-1}$

14) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}\,3x+x^3}{4x+1-\cos x}$

15) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\log(e^x+1)}{\log(3^x+1)}$

16) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-\cos x}{1-\sqrt{x+1}}$

17) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+\log|x|}{3x^2+\log^2|x|}$

18) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\mathrm{arcsen}\,x)}{e^{1/x}}$

19) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(4x^2+1)}{\log(3x^2+1)}$

20) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+\cos x}{x}$

21). $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4+2x+1}{x^2+x+1}$

22) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+5x^4+7}{4x^4-3x+9x^2}$

23) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$

24) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-x}{x^2}$

25) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arcsen}\,x-x}{x^3}$

26) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}\,x-x}{x^3}$

27) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\mathrm{tg}\,x}{x^3}$

28) $\lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\mathrm{sen}\,x}{(2x-\pi)^2}$

Risposte

1) $\log 2+1$ 2) $1/6$ 3) 0 4) -2

5) $-\infty$	6) 0	7) $+\infty$	8) $+\infty$
9) $+\infty$	10) $+\infty$	11) 1	12) $+\infty$
13) -2	14) 3/4	15) $+\infty$	16) -2
17) 1/3	18) 0	19) 1	20) $-\infty$
21) $+\infty$	22) 5/4	23) 1/2	24) $-1/2$
25) 1/6	26) $-1/3$	27) $-1/3$	28) 1/8

Svolgimento (da 1 a 14)

1) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$; calcoliamo il limite di $f'(x)/g'(x)$; si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x \log 2 + \cos x}{\frac{1}{x+1}} = \log 2 + 1.$$

Pertanto dalla regola de l'Hopital segue:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1 + \operatorname{sen} x}{\log(x+1)} = \log 2 + 1.$$

Il lettore osservi che tale risultato può essere conseguito anche dividendo per x numeratore e denominatore ed utilizzando i limiti notevoli.

2) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$; si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

dove si è tenuto conto che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto dalla regola dell'Hopital segue:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

3) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$; si ha:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-e^{1-x}}{1+\cos(x-1)} = 0,$$

Pertanto dalla regola de l'Hopital segue

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}+e^{1-x}-2}{x+\operatorname{sen}(x-1)-1} = 0.$$

4) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$; si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{1+x^2}}{\frac{x}{x+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = -2\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{x^2+1} = -2\cdot 1 = -2.$$

Abbiamo qui ritenuto noto al lettore che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{x^2+1} = 1$; ciò d'altro canto può essere facilmente ottenuto applicando ancora la regola de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{x^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{2x} = 1$$

5) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$; calcoliamo il limite di $f'(x)/g'(x)$; si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{4x^3}$$

che si presenta ancora nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applicando ancora la regola de l'Hopital si ottiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = -\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{12x^2} = -\infty$$

Sinteticamente si ha, applicando due volte la regola de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-e^x-1}{x^4}\left(=\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{4x^3}\left(=\frac{0}{0}\right) = -\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{12x^2} = -\infty$$

6) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; applicando la regola de l'Hopital si ha:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\log(x-2)}{\operatorname{ctg}(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x-2)}} =$$

$$= -\lim_{x\to 2^+} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2} \cdot \lim_{x\to 2^+} \operatorname{sen}(x-2) = 1\cdot 0 = 0$$

dove si è tenuto conto che

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1.$$

7) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; applicando la regola de l'Hopital si ha:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{\log|x|} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x\to\pm\infty} 2x^2 = +\infty.$$

8) Si procede come nel caso $\alpha=2$ studiato all'esercizio 7).

9) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; applicando tre volte la regola de l'Hopital si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x \log 3}{3x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x (\log 2)^2}{6x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 3^x \frac{(\log 3)^3}{6} = +\infty.$$

10) Si procede come nell'esercizio 9) ($a=3$, $\alpha=3$) applicando k volte la regola de l'Hopital dove k è il più piccolo intero maggiore od eguale ad α.

11) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; applicando due volte la regola de l'Hopital si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log|x - \operatorname{sen} x|}{\log x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x-\operatorname{sen} x}}{\frac{3}{x}} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{x(1-\cos x)}{x-\operatorname{sen} x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + x \operatorname{sen} x}{1-\cos x} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}\right).$$

Ancora dalla regola de l'Hopital si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{\operatorname{sen} x} = 1 +$$

$$+ \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \lim_{x\to 0} \cos x = 1 + 1 = 2.$$

Quindi il limite di partenza vale

$$\frac{1}{3}(1+2) = 1.$$

Il lettore osservi che $\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$ puo essere calcolato moltiplicando e dividendo per x il numeratore e ricordando i limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = 2.$$

12) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$; applicando la regola de l'Hopital si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \log(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{1 - \frac{1}{x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (x+1)\cdot\cos x \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = 1\cdot(+\infty) = +\infty.$$

13) Il limite si presenta nella forma indeterminato $\frac{0}{0}$; applicando la regola de l'Hopital si ha:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{2}\cos x - 1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{-\sqrt{2}\,\operatorname{sen}x} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\operatorname{sen}x\cos^2 x} = -2$$

14) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$; applicando la regola de l'Hopital si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}3x + x^3}{4x + 1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos 3x + 3x^2}{4 + \operatorname{sen}x} = \frac{3}{4}$$

b) Il lettore compirà un utile esercizio (anche mnemonico) verificando con l'uso della regola de l'Hopital le seguenti eguaglianze (*limiti notevoli*)

29) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

30) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$

31) $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a e$

32) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$

33) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}x}{x} = 1$

34) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}x}{x} = 1$

35) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}x}{x} = 1$

36) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

37) $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos x}{x-\pi/2} = -1$

Osserviamo esplicitamente che di tali eguaglianze - alcune delle quali possono essere utilizzate per calcolare le derivate di alcune funzioni elementari - è possibile dare una dimostrazione diretta senza utilizzare la regola de l'Hopital.

1.2 Forma indeterminata $0\cdot(\infty)$

Calcolare i seguenti limiti

1) $\lim_{x\to 0} x^3 \log|x|$

2) $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x \ (\alpha>0)$

3) $\lim_{x\to 0^+} x\, e^{1/x}$

4) $\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{arcsen}\frac{1}{x+1}$

5) $\lim_{x\to \pi/2} (2x-\pi)\operatorname{tg}x$

6) $\lim_{x\to +\infty} x\left(1 - e^{2\operatorname{arctg}x + \pi}\right)$

7) $\lim_{x\to 1^+} \operatorname{sen}3(x-1)\log(e^x-e)$

8) $\lim_{x\to +\infty} x\log\cos\frac{1}{x}$

9) $\lim_{x\to -\infty} x^3 e^x$

10) $\lim_{x\to +\infty} (2\operatorname{arctg}x - \pi)\, x$

Risposte

1) 0	2) 0	3) $+\infty$	4) 1
5) -2	6) 2	7) 0	8) 0
9) 0	10) -2		

Svolgimento (da 1) a 5))

1) Il limite si presenta nella forma indeterminata $0\cdot(-\infty)$; osservato che

$$x^3 \log|x| = \frac{\log|x|}{\frac{1}{x^3}}$$

lo studio del limite 1) è ricondotto al seguente

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log|x|}{\frac{1}{x^3}}$$

che si presenta nella forma indeterminata ∞/∞ ed al quale è pertanto applicabile la regola de l'Hopital; si ha:

$$\lim_{x\to 0} x^3 \log|x| = \lim_{x\to 0} \frac{\log|x|}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}} = -\frac{1}{3} \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

2) Si procede come fatto nell'esercizio 1) nel caso $\alpha=3$.

3) Il limite si presenta nella forma indeterminata $0\cdot(+\infty)$; si ha

$$\lim_{x\to 0} x\, e^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}} = \frac{+\infty}{+\infty};$$

applicando la regola de l'Hopital si ottiene:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty.$$

4) Il limite si presenta nella forma indeterminato $0\cdot(+\infty)$; si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{arcsen}\frac{1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arcsen}\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \text{(applicando}$$

$$\text{l'Hopital)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{(x+1)^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{(x+1)^2}}} = 1\cdot 1 = 1.$$

5) Il limite si presenta nella forma indeterminata $0\cdot(\infty)$; si ha:

$$\lim_{x\to\pi/2} (2x-\pi)\operatorname{tg}x = \lim_{x\to\pi/2} \frac{2x-\pi}{\operatorname{cotg}x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \text{(applicando}$$

$$\text{l'Hopital)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{2}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = -2.$$

1.3 Forma indeterminata $\infty-\infty$

1) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right)$

2) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)$

3) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{\log|x|}\right)$

4) $\lim_{x\to+\infty} (x^\alpha - \log|x|)$ $(\alpha>0)$

5) $\lim_{x\to+\infty} (x^5\, 2^x - e^x)$

6) $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - 2^{1/(x-1)}\right)$

7) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \log|x|\right)$

8) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\log(x+1)} - \frac{1}{x}\right)$

Risposte

1) $-1/2$ 2) 0 3) $-3/2$ 4) $+\infty$

5) $-\infty$ 6) $-\infty$ 7) $+\infty$ 8) $1/2$

Svolgimento (da 1) a 5))

1) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$; osservato che

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x-e^x+1}{x\,(e^x-1)}$$

lo studio del limite 1) è ricondotto a quello di un limite che si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ ed a cui è quindi applicabile la regola de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{x\,(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{e^x - 1 + x\,e^x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \text{(appl. ancora l'Hopital)} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2e^x+xe^x} = -\frac{1}{2}.$$

2) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$; si ha:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}x - x}{x\,\operatorname{sen}x}\right) = \frac{0}{0};$$

applicando la regola de l'Hopital si ha:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}x - x}{x\,\operatorname{sen}x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen}x + x\cos x} = \frac{0}{0},$$

applicando ancora la regola de l'Hopital si ottiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen}x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}x}{\cos x + \cos x - x\operatorname{sen}x} = \frac{0}{2} = 0.$$

3) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$; si ha:

$$\lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{\log|x|}\right] = \lim_{x\to 1} \left[\frac{\log|x| - x^2+x}{(x^2-x)\log|x|}\right] = \frac{0}{0};$$

applicando la regola de l'Hopital si ha:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log|x| - x^2 + x}{(x^2-x)\log|x|} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 2x + 1}{(2x-1)\log|x| + \frac{x^2-x}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-2x^2+x+1}{(2x^2-x)\log|x| + x^2-x} = \frac{0}{0} = \text{(appl. l'Hop.)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-4x+1}{(4x-1)\log|x|+2x-1+2x-1} = \frac{-3}{2}.$$

4) Quando

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \infty-\infty$$

può talvolta essere utile ricorrere alle identità

$$f-g = f\left(1 - \frac{g}{f}\right) = g\left(\frac{f}{g} - 1\right)$$

Nel caso dell'esercizio 4):

$$x^\alpha - \log|x| = x^\alpha\left(1 - \frac{\log|x|}{x^\alpha}\right).$$

Utilizzando la regola de l'Hopital (cfr. anche es. 8) n. 1.1) si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log|x|}{x^\alpha} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha\,x^\alpha} = \frac{1}{+\infty} = 0;$$

ne segue:

$$\lim_{x\to+\infty} (x^\alpha-\log|x|) = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha\left(1 - \frac{\log|x|}{x^\alpha}\right) = +\infty\ (1-0) = +\infty.$$

5) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$; si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} (x^5\,2^x-e^x) = \lim_{x\to+\infty} x^5\,2^x\left(1 - \frac{(e/2)^x}{x^5}\right) = +\infty\cdot(-\infty) = -\infty$$

poiché (cfr. es. 10 n. 1.1)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(e/2)^x}{x^5} = +\infty.$$

1.4 Forme indeterminate 0^0, ∞^0, 1^∞

1) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

2) $\lim_{x\to 0^+} (\text{arctg}x)^{1/2 \log x}$

3) $\lim_{x\to +\infty} (2^x+1)^{1/\sqrt{x}}$

4) $\lim_{x\to 0} (1+\text{tg}x)^{2/x}$

5) $\lim_{x\to +\infty} (\log x)^{1/x}$

6) $\lim_{x\to 0} \left(e^{x^2}+x\right)^{-1/x}$

7) $\lim_{x\to 0^+} \left(e^x-e^{-x}\right)^x$

8) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x}$

9) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{e^x+1}\right)^{1/x}$

10) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{e^x+x}\right)^{1/\log x}$

11) $\lim_{x\to 1^+} \left(e^{1/(x-1)}+2\right)^{\text{sen}\,(x-1)}$

12) $\lim_{x\to 1^+} (1+\log|x|)^{1/(x-1)^2}$

13) $\lim_{x\to +\infty} (x)^{-1/\sqrt{\log(x+1)}}$

Risposte

1) 1 2) $\sqrt{e}$ 3) $+\infty$ 4) e^2

5) 1 6) $1/e$ 7) 1 8) 1

9) $1/e$ 10) 0 11) e 12) $+\infty$

13) 0

Svolgimento (da 1) a 6))

1) Nel caso in cui

$$\lim_{x\to x_0} (f)^g$$

si presenta in una delle forme indeterminato 0^0, ∞^0, 1^∞ si ricorre all'identita

$$f^g = e^{g \log f}$$

ed il calcolo del limite è ricondotto a quello di

$$\lim_{x\to x_0} g \log f$$

che si presenta nella forma indeterminata $0(\pm\infty)$.

Nel caso dell'esercizio 1) il limite si presenta nella forma indeterminata 0^0; quindi si ricorre all'identità:

$$x^x = e^{x \log x}$$

e poiché (cfr es. 2) n. 1.2) $\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0$ si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x \log x} = \lim_{y\to 0^+} e^y = e^0 = 1.$$

2) Il limite si presenta nella forma indeterminata $(0)^0$; quindi

$$(\text{arctg}x)^{1/2 \log x} = e^{\frac{\log \text{arctg}x}{2 \log x}} ;$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log \text{arctg}x}{2 \log x} = \frac{-\infty}{-\infty} = (\text{applic. l'Hop.}) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2\,(x^2+1)\,\text{arctg}x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\text{arctg}x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

poiché (cfr es. 34 n 1.1)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\text{arctg}x} = 1 .$$

Ne segue:

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{arctg} x)^{1/2 \log x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\log \operatorname{arctg} x}{2 \log x}} = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

3) Il limite si presenta nella forma indeterminata $(+\infty)^0$; si ha allora:

$$\lim_{x\to+\infty} (2^x+1)^{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\log(2^x+1)}{\sqrt{x}}}.$$

Dalla regola dell'Hopital segue

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2^x+1)}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2^x \log 2}{2^x+1}\right) \cdot (2\sqrt{x})$$

$$= 2 \cdot \log 2 \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{2^x+1} = 2 \log 2 \cdot (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{2^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{y+1} = 1$,

Ne segue:

$$\lim_{x\to+\infty} (2^x+1)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e^{+\infty} = +\infty.$$

4) Il limite si presenta nella forma indeterminata $(1)^\infty$; si ha allora:

$$\lim_{x\to 0} (1+\operatorname{tg} x)^{2/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{2 \log(1+\operatorname{tg} x)}{x}}$$

e dalla regola dell'Hopital segue:

$$2 \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{tg} x)}{x} = \frac{0}{0} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg} x} = 2$$

quindi

$$\lim_{x\to 0} [1+\operatorname{tg} x]^{2/x} = e^2.$$

5) Il limite si presenta nella forma indeterminata $(+\infty)^0$; quindi

$$\lim_{x\to+\infty} [\log x]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\log \log x}{x}}.$$

Dalla regola de l'Hopital segue

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log \log x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x \log x} = \frac{1}{+\infty} = 0;$$

ne segue

$$\lim_{x\to+\infty} (\log x)^{1/x} = e^0 = 1,$$

6) Il limite si presenta nella forma indeterminata $(1)^\infty$; quindi

$$(e^{x^2}+x)^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{\log(e^{x^2}+x)}{x}}$$

Dalla regola de l'Hopital segue:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(e^{x^2}+x)}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\, e^{x^2} + 1}{e^{x^2} + x} = 1;$$

ne segue:

$$\lim_{x\to 0} (e^{x^2}+x)^{-\frac{1}{x}} = e^{-1}.$$

2. Ulteriori applicazioni della regola de l'Hopital

Con gli esercizi proposti in questo paragrafo vogliamo, tra l'altro, mettere in evidenza che *la regola de l'Hopital non va usata in modo meccanico:*

a) in taluni casi opportune semplificazioni eseguite prima di applicare la regola possono rendere i calcoli più agevoli minimizzando quindi la probabilità di errore (cfr. es. 1)- 8)).

b) in altri casi il limite di f'/g' si presenta ancora in una forma indeterminata e l'espressione f'/g' è complessa quanto f/g o più di f/g. In tal caso il calcolo del limite va eseguito ricorrendo a tecniche diverse o ancora eseguendo opportune semplificazioni prima di applicare la regola de l'Hopital (cfr. es. 9), 10)).

In entrambi i casi è molto utile (se non indispensabile) la conoscenza dei *limiti notevoli* (es. 29)-37) n. 1.1).

Calcolare i seguenti limiti

1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(3^x-1)\ \mathrm{sen}x\ \log(x+1)}{x-\mathrm{sen}x}$

2) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\log(x-1)\ \mathrm{tg}(x-2)\ \mathrm{arcsen}(x-2)}{(x-2)(x-1-e^{x-2})}$

3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arcsen}(x-\log(x+1))}{1-\cos x}$

4) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x(x-1)} - \dfrac{1}{\mathrm{sen}(x-1)}\right)$

5) $\lim_{x\to 0} \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\mathrm{sen}x - \mathrm{tg}x}{x^2(e^x-1)^3}\right)$

6) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log(x^2+x) + 2^x\ \mathrm{sen}^3x + 4}{\mathrm{arcsen}x + \log x + x^3 + 10}$

7) $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\sqrt{e^x-1}\ \mathrm{arcsen}x^2\ (\sqrt{1+x}-1)}{\sqrt{x}}\right)(\log\mathrm{arctg}x + x^2 - \mathrm{sen}(2x+1))$

8) $\lim_{x\to 0^+} (\mathrm{sen}x^2\ \log(1+x))^{(e^x-1)\ \mathrm{arctg}x}$

9) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{\mathrm{sen}x}}{x}$

10) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{1/x}}{2^{1/x^2}}$

11) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(2^x-1)(\sqrt{1+x}-1)\ \log(x+1)}{x-\mathrm{arctg}x}$

12) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{arcsen}x}\right)$

13) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2\mathrm{arctg}x + e^{-x}}{\sqrt{(x+1)/x}\ \log\mathrm{sen}(1/x) + 20}$

14) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\mathrm{arcsen}x - x} - 1}{(e^x-1)^2\ \mathrm{tg}(\log(x+1))}$

15) $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\log\dfrac{x+1}{x}\right)^{x^2 + \mathrm{arctg}x + 2^{-x}}$

16) $\lim_{x\to +\infty} \mathrm{arctg}\left[\log x\ \left(3^{1/x} + \dfrac{x+1}{x}\right)\right]^{1/\sqrt{x}}$

17) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x-\mathrm{tg}x}-1)\ \log(e^x-x)}{(1-\cos x)\ \mathrm{sen}^2x\ (2^x-1)}$

18) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{e^x-1}-e^x\sqrt{x}}{x}$

Risposte

1) $6\log 3$	2) -2	3) 1	4) -1
5) $-\pi/2$	6) 1	7) 0	8) 1
9) 0	10) 0	11) $\frac{3}{2}\log 2$	12) 0
13) $-\infty$	14) $1/6$	15) $+\infty$	16) $\pi/4$
17) $-1/(6\log 2)$	18) 0		

Svolgimento (da 1) a 10)

1) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$; moltiplicando e dividendo per x^3 si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(3^x-1)\,\mathrm{sen}x\,\log(x+1)}{x-\mathrm{sen}x} = \lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\mathrm{sen}x} = \log 3\cdot 1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\mathrm{sen}x};$$

dalla regola de l'Hopital segue (cfr. es. 2) n. 1.1)

$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\mathrm{sen}x} = 6$ e quindi il limite 1) vale $6\log 3$.

2) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$; è evidente che un'applicazione diretta della regola de l'Hopital porterebbe a calcoli molto laboriosi. D'altronde posto

$$x-2=y$$

si ha:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\log(x-1)\,\mathrm{tg}(x-2)\,\mathrm{arcsen}(x-2)}{(x-2)(x-1-e^{x-2})} =$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\log(y+1)\,\mathrm{tg}\,y\,\mathrm{arcsen}y}{y(y-e^y+1)} = \lim_{y\to 0}\frac{\log(y+1)}{y}\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{tg}y}{y}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{arcsen}y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y-e^y+1} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y-e^y+1} = \frac{0}{0};$$

dalla regola de l'Hopital segue subito: $\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y-e^y+1} = -2$.

3) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$; si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arcsen}(x-\log(x+1))}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arcsen}(x-\log(x+1))}{x-\log(x+1)}\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(x+1)}{x^2} = 2$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{arcsen}\,y}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(x+1)}{x^2} = 2\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(x+1)}{x^2}.$$

Pertanto il calcolo del limite di partenza è ricondotto al calcolo di

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(x+1)}{x^2} = \frac{0}{0};$$

una semplice applicazione della regola de l'Hopital mostra che (cfr. es. 24) n. 1.1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(x+1)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

e quindi il limite di partenza vale 1.

4) Il limite si presenta nella forma indeterminato $\infty-\infty$;

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x\,(x-1)}-\frac{1}{\operatorname{sen}\,(x-1)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\operatorname{sen}\,(x-1)-x\,(x-1)}{x\,(x-1)\operatorname{sen}\,(x-1)}\right)=$$

$$=(\text{poni } x-1=y)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}y-y\,(y+1)}{(y+1)\,y\,\operatorname{sen}y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y+1}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{sen}y}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}y-y\,(y+1)}{y^2}=1\cdot 1\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}y-y\,(y+1)}{y^2}=$$

$$=(\text{appl. l'Hop.})=\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-2y-1}{2y}=$$

$$\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\left(\frac{\cos y-1}{y}-2\right)=\frac{1}{2}(-2)=-1$$

5) La forma indeterminata $\frac{0}{0}$ si presenta "all'interno" della funzione arcotangente; pertanto va studiata a priori. Moltiplicando e dividendo per x^3 si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{tg}x}{x^2\,(e^x-1)^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{tg}x}{x^5}=$$

$$1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{tg}x}{x^5}=(\text{applic. l'Hopital})=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1/\cos^2 x}{5x^4}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x-1}{x^4}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}$$

$$\frac{\cos^3 x-1}{x^4}=(\text{appl. l'Hop.})=-\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\,\operatorname{sen}x}{4\,x^3}=$$

$$=-\frac{3}{20}\lim_{x\to 0}\cos^2 x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=-\frac{3}{20}\,(+\infty)=-\infty.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{tg}x}{x^2\,(e^x-1)^3}\right]=\lim_{y\to-\infty}\operatorname{arctg}y=-\frac{\pi}{2}.$$

6) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; dividendo numeratore e denominatore per $\log x$ si ha:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log|x^2+x|+2^x\operatorname{sen}^3 x+4}{\operatorname{arcsen}x+\log x+x^3+10}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\log(x^2+x)}{\log x}+\dfrac{2^x\operatorname{sen}^3 x+4}{\log x}}{1+\dfrac{x^3+10+\operatorname{arcsen}x}{\log x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(x^2+x)}{\log x}$$

poiché

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2^x\operatorname{sen}^3 x+4}{\log x}=\frac{4}{-\infty}=0;\quad\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3+10+\operatorname{arcsen}x}{\log x}=\frac{10}{-\infty}=0.$$

D'altro canto applicando la regola de l'Hopital si ha:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(x^2+x)}{\log x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{2x+1}{x^2+x}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+1}{x+1}=1.$$

7) Tenendo presente che $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{x}}=1$ si ha che il limite si presenta nella forma indeterminata $0\cdot(\infty)$. Dividendo e moltiplicando per x^3 si ha:

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\sqrt{e^x-1}\,\operatorname{arcsen}x^2\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{\sqrt{x}}\right]\cdot\left[\lg\operatorname{arctg}x+x^2-\operatorname{sen}(2x+1)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{e^x-1}{x}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{arcsen}x^2}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[x^3\lg\operatorname{arctg}x+x^5-x^3\operatorname{sen}(2x+1)\right]=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}x^3\log\operatorname{arctg}x$$

dove si è tra l'altro tenuto conto che $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}x^2}{x^2}=$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}y}{y}=1;$$

applicando la regola de l'Hopital si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 \log \operatorname{arctg} x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log \operatorname{arctg} x}{x^{-3}} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$-\frac{1}{3} \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{arctg} x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4}{x^2+1} = -\frac{1}{3} \cdot 1 \quad 0 = 0.$$

8) Il limite si presenta nella forma indeterminata $(0)^0$; si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\operatorname{sen} x^2 \log (1+x)\right)^{(e^x-1)\operatorname{arctg} x} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} \frac{\log (1+x)}{x}\right)^{(e^x-1)\operatorname{arctg} x} \cdot \lim_{x\to 0^+} (x^3)^{(e^x-1)\operatorname{arctg} x} =$$

$$= 1^0 \lim_{x\to 0^+} (x)^{3(e^x-1)\operatorname{arctg} x} = \lim_{x\to 0^+} (x)^{3x^2 \frac{e^x-1}{x} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}} =$$

$$= \left(\lim_{x\to 0^+} (x)^{3x^2}\right)^{\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}} = \lim_{x\to 0^+} (x)^{3x^2};$$

tenuto conto che

$$x^{3x^2} = e^{3x^2 \log x}$$

e ricordando che dalla regola de l'Hopital (cfr es. 2) n. 1.2) segue

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \log x = 0$$

si ha in definitiva

$$\lim_{x\to 0^+} x^{3x^2} = e^0 = 1.$$

9) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$; applicando la regola de l'Hopital si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\right) = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sqrt{\operatorname{sen} x} - \sqrt{x}\cos x}{\sqrt{x}\sqrt{\operatorname{sen} x}}\right) =$$

(dividendo e moltiplicando per $\sqrt{x}$)

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}}{\sqrt{x}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x} - \sqrt{x}\cos x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x} - \sqrt{x}\cos x}{\sqrt{x}}.$$

L'ultimo limite si presenta ancora nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ ma è "più complesso" di quello di partenza. In questo caso è più conveniente calcolare il limite di partenza moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x} + \sqrt{\operatorname{sen} x}$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\operatorname{sen} x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x\left(\sqrt{x} + \sqrt{\operatorname{sen} x}\right)} =$$

= (molt. e div. per $\sqrt{x}$ il denom)=

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x\sqrt{x}} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1 + \sqrt{\operatorname{sen} x / x}} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^{3/2}} =$$

$$(\text{appl. l'Hop.}) = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos x}{\frac{3}{2} x^{1/2}} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos x}{x}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

10) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; applicando la regola de l'Hopital si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}\left(-1/x^2\right)}{\log 2 \; 2^{1/x^2}\left(-2/x^3\right)} =$$

$$= \frac{1}{2 \log 2} \lim_{x\to 0^+} \frac{x\, e^{1/x}}{2^{1/x^2}} = \frac{\infty}{\infty};$$

è evidente che l'uso reiterato della regola de l'Hopital non sortisce altro effetto che di complicare l'espressione

di cui si vuol calcolare il limite: in altri termini *la regola de l'Hopital in questo caso è del tutto inefficace.*

Per calcolare il limite 10) osserviamo che:

$$\frac{e^{1/x}}{2^{1/x^2}} = e^{\log\left(e^{1/x}/2^{1/x^2}\right)} = e^{1/x - \log 2/x^2}$$

ed inoltre

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{\log 2}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\lim_{x\to 0^+}(x-\log 2) = +\infty\,(-\log 2) = -\infty;$$

ne segue:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{1/x}}{2^{1/x^2}} = e^{-\infty} = 0.$$

3. Esercizi di ricapitolazione

1) $\lim_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^5}$

3) $\lim_{x\to 1^+}\log|x|\log(\log|x|)$

4) $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen}x+\cos x)^{2/\operatorname{tg}x}$

5) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right)$

6) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\log|x|}$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\sqrt{2}}-1-\operatorname{tg}x}{\operatorname{sen}x}$

8) $\lim_{x\to 1^+}\frac{\log|x| - \operatorname{tg}(x-1)}{x-\operatorname{sen}(x-1) - 1}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^x}{x^2\operatorname{sen}x}$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{arcsen}x}{1-\cos x}$

11) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x + 1 - e^x}{\operatorname{sen}x - \log(1+x)}$

12) $\lim_{x\to 0^+}\frac{x\operatorname{sen}x - x}{\sqrt{\operatorname{arctg}x}}$

13) $\lim_{x\to +\infty}\frac{1 - \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)}{\operatorname{arctg}(1/x)}$

14) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\log(\pi+2\operatorname{arctg}x)}{\log|x|}$

15) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\log|1-\cos x|}{\log|x| + \log|1+x|}$

16) $\lim_{x\to 0}\operatorname{tg}x\log(\log(x^2+1))$

17) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x - 5x}{\operatorname{sen}3x - 4x}$

18) $\lim_{x\to 1}\frac{2^x-3^x+1}{1-x}$

19) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}x} - 1}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}$

20) $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$

21) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(x+1)} - \frac{1}{x}\right)$

22) $\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{tg}(\pi x/2) + \log|x-1|}{\log|e^x-e|}$

23) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{\operatorname{arctg}x}{x^3}\right)$

24) $\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{1/\sqrt{x}}$

25) $\lim_{x\to 0^+} (x)^{\operatorname{sen} x}$

26) $\lim_{x\to +\infty} (1+e^{-x})^{1/x}$

27) $\lim_{x\to 0^+} (x-\operatorname{sen} x)^{\log|x|}$

28) $\lim_{x\to 0} (1+\log|x+1|)^{1/\operatorname{sen} 3x}$

29) $\lim_{x\to 0^+} (x+\operatorname{sen} x)^{1/\log_3 x}$

30) $\lim_{x\to 0^+} \log_3 \dfrac{\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}4x}-1\right)\left(\cos 2x+x\right)}{e^{6x}-1}$

31) $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x}{1-\cos x}\right)^{1/\log(2^x-1)}$

32) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)(1-\cos x)+\log_3(1+x)\operatorname{sen}^2 x}{x-\operatorname{arcsen} x}$

33) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(e^{x-1}-x\right)}{(x-1)(\sqrt{x}-1)}$

34) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsen} x-\log(1+x)\right)}{\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-1\right)(2^x-1)}$

35) $\lim_{x\to +\infty} \left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right)^2 \log\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$

36) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(2^x-x^2)}{\operatorname{arcsen}(x^2+x)}$

37) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)\left(e^{\operatorname{sen}5x-\operatorname{sen}4x}-1\right)}{(\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}6x)\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-1\right)}$

38) $\lim_{x\to 0} \left|e^x-x\right|^{\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-1\right)/(x\operatorname{sen}x^2)}$

39) $\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-1\right)^{\sqrt{1+\operatorname{arctg}x}-1}$

40) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(x-\log(x+1)\right)^3}{\operatorname{arcsen}\left(x^2-\operatorname{sen}x^2\right)}$

41) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}\; 2^{\cos(1/\sqrt{x})}-2x\right)$

42) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}\; 2^{\cos(1/x)}-2x\right)$

43) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x-\log(x+1)\right)^2\left(\sqrt{\cos x}-1\right)}{\log\left(2\cos x+x^2-1\right)\left(e^{\operatorname{sen}^2 x}-1\right)}$

44) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2\log\left(2\cos(1/\sqrt{x})+1/x-1\right)\left(\sqrt{(1+x)/x}-1\right)}{\operatorname{arcsen}\left((x+1)/(x^2+1)\right)}$

Risposte

1) $4(\log 2-1)$	2) $+\infty$	3) 0	4) e^2
5) $-1/2$	6) 2	7) $\sqrt{2}-1$	8) $-\infty$
9) $-\infty$	10) 2	11) -1	12) 0
13) -1	14) -1	15) 2	16) 0
17) 3	18) $\log 27/4$	19) 0	20) -1
21) $1/2$	22) $+\infty$	23) $-\infty$	24) 1
25) 1	26) $1/e$	27) $+\infty$	28) $\sqrt[4]{e}$
29) 3	30) $-\log_3 2$	31) $1/e$	32) $-6(1/2+\log_3 e)$
33) 1	34) $1/\log 2$	35) 0	36) $\log 2$
37) $-2/3$	38) $\sqrt[4]{e}$	39) 1	40) $3/4$
41) $-\log 2$	42) 0	43) $-3/4$	44) $1/24$

Suggerimenti

Tra gli esercizi proposti ve ne sono alcuni che possono essere risolti molto rapidamente senza l'ausilio della regola de l'Hopital; il lettore compirà un utile esercizio individuandoli.

30) All'interno della funzione logaritmo dividi e moltiplica per sen2x+sen4x.

31) Moltiplica e dividi per x la base.

32) Moltiplica e dividi per x^3.

33) Moltiplica e dividi per $e^{x-1}-x$.

34) Moltiplica e dividi per arcsenx-log(1+x); poi moltiplica e dividi per x tgx.

35) Poni 1/x = t e poi moltiplica e dividi per t^2.

36) Moltiplica e dividi per x^2+x.

37) Moltiplica e dividi per sen5x-sen4x e poi per x senx.

38) Moltiplica e dividi l'esponente per x^2tgx.

39) Moltiplica e dividi la base per x senx e l'esponente per x arctgx.

40) Moltiplica e dividi per $(x-\log(x+1))^3/(x^2-\text{sen } x^2)$.

41) Aggiungi e sottrai $x2^{\cos 1/\sqrt{x}}$.

43) Moltiplica e dividi per $(x-\log(x+1))^2 \text{ sen}^2x$ poi per x^2.

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA NAPOLI Facoltà d'Ingegneria

7665