Функція Шпрага-Гранді у комбінаторній теорії ігор

Виконав ст. групи ПМА-51м
Мацех М.О.

Теорія

Рівноправна гра

- *Рівноправна* гра – це гра, в якій
  1. Є 2 гравці
  2. Гравці ходять по черзі
  3. Є скінченна множина ситуацій
  4. Множина ходів не залежить від гравця
  5. Кінець наступає, коли немає ходів з позиції
  6. Вся інформація про гру відома обом гравцям

Класифікація

Розрізняють виграшні(N) і програшні(P) стани

1. Всі термінальні позиції є P-станами
2. З кожного N-стану є хоча б один хід у P-стан
3. З кожного P-стану всі ходи ведуть тільки в N-стан

Розв’язок

Для заданого стану знайти переможця при оптимальній грі

Гра Нім

Гравці по черзі віднімають додатню кількість об’єктів з однієї з n купок

Minimal Excludant

$$Mex(S) = \min_{x \notin S, x \geq 0}(x), \text{ де } S \subset \mathbb{N}$$

Нім-сума

$$\begin{array}{rr} 3 = & 011_2 \\ 4 = & 100_2 \\ 5 = & 101_2 \\ \hline & 010_2 \end{array}$$

$$(x_m \cdots x_0)_2 \oplus (y_m \cdots y_0)_2 = (z_m \cdots z_0)_2$$

де $\forall k, z_k = x_k \oplus y_k$

тобто $z_k = \begin{cases} 1, x_k + y_k = 1 \\ 0, \text{в інших випадках} \end{cases}$

Теорема Шпрага-Гранді

Будь-яка рівноправна гра еквівалентна грі Нім

Функція Шпрага-Гранді

$$F(S) = \begin{cases} 0, S = \emptyset \\ mex\big(F(S_0), F(S_1), \dots, F(S_N)\big), S \neq \emptyset \end{cases}$$

$де\, S_i, i = 0, \dots, N -$ всі можливі переходи зі стану S

Теорема Шпрага-Гранді про суму ігор

Сумою ігор називають гру, суть якої полягає у виборі однієї з n ігор і робленні ходу у цій конкретній грі.

Значення Шпрага-Гранді суми ігор рівне нім-сумі значень Шпрага-Гранді цих ігор

Алгоритм

Алгоритм

1. Виписати всі можливі переходи в інші стани

Алгоритм

2.
А) Якщо перехід веде в одну гру – виконати кроки 1, 2а для нової гри
Б) Якщо перехід веде в в суму ігор – порахувати значення Шпрага-Гранді як нім-суму значень Шпрага-Гранді цих ігор

Алгоритм

3. Порахувати *mex* для цих значень

Алгоритм

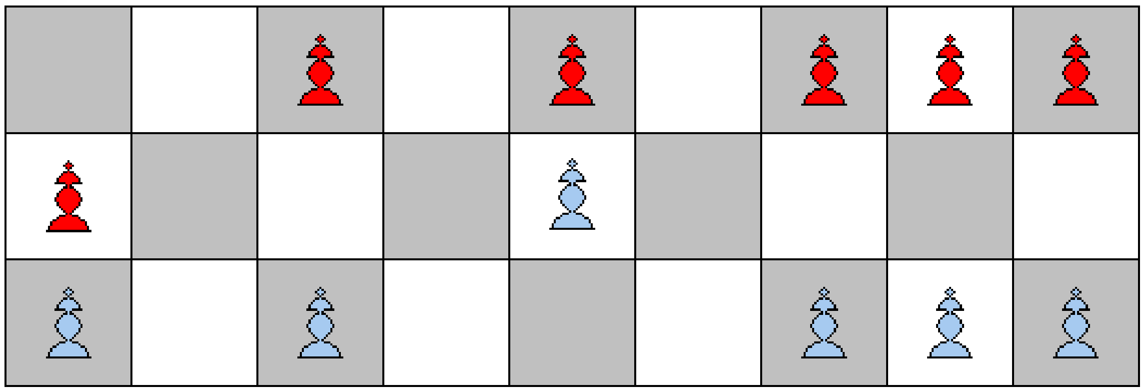
4. Якщо отримане значення рівне нулю - гравець програє. Інакше виграє

Оптимальна гра

Оптимальній хід можна знайти розв’язавши відповідне нім-рівняння

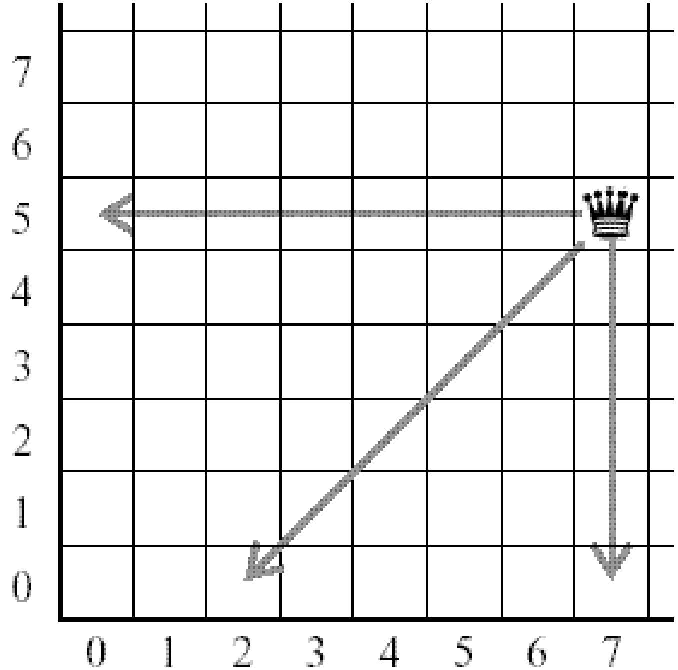
Практика

Гра «Шахи Доусона»



$$g(n) = mex\left\{g(n-2), \bigcup_{i=2}^{n-1} g(i-2) \oplus g(n-i-1)\right\}$$

Гра «Заведи ферзя в кут»

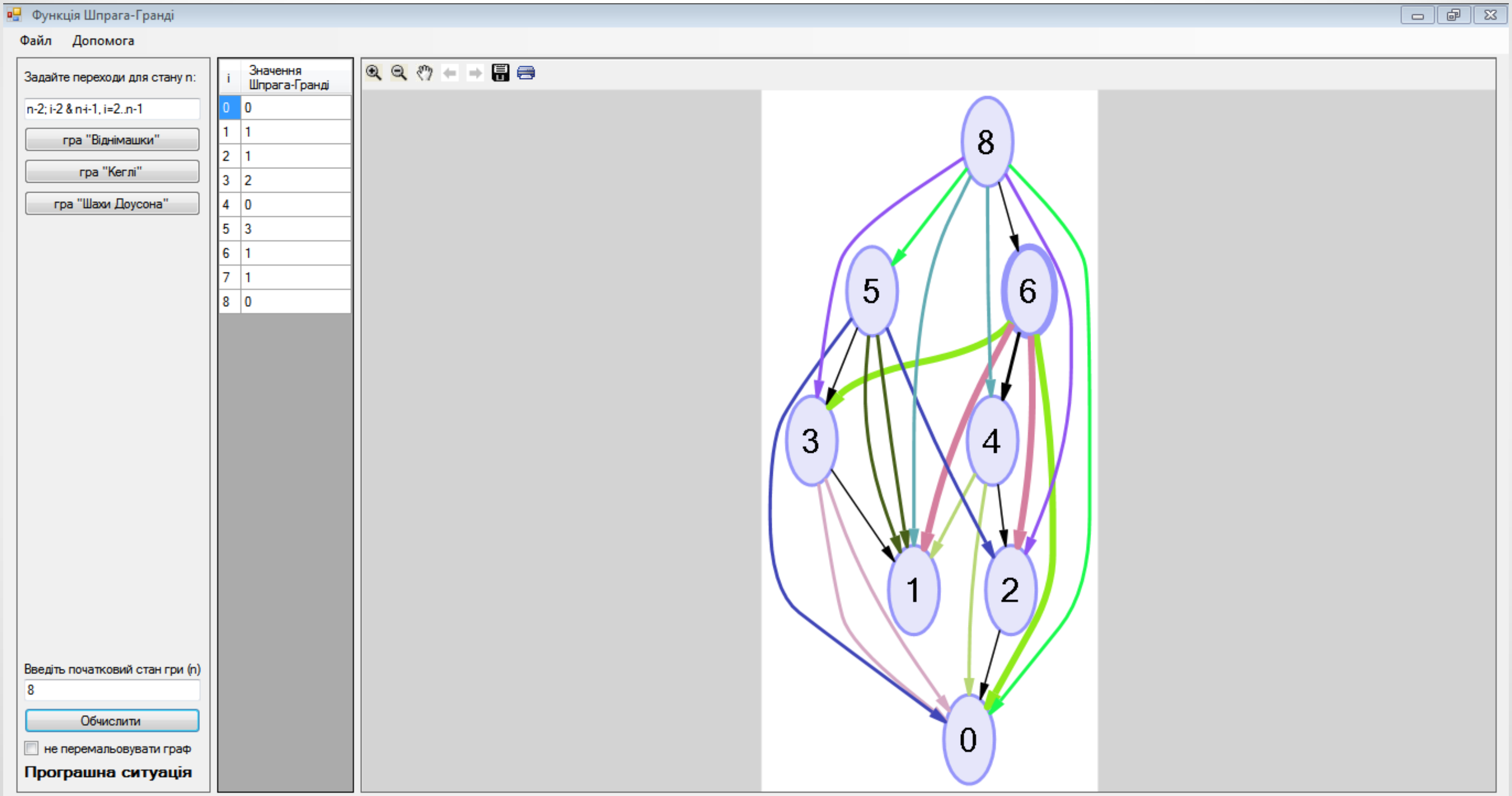


$$g(n,m) = mex\{\bigcup_{i=1}^{n-1} g(n-i,m) \cup \bigcup_{i=1}^{\min(n,m)-1} g(n-i,m-i) \cup \bigcup_{i=1}^{m-1} g(n,m-i)\}$$

Гра «Гризун» («Chomp»)

Не піддається аналізу теорією Шпрага – Гранді через наявність циклів у графі

Програмна реалізація



Висновок

- Розглянуто теорію рівноправних ігор
- Викладено і реалізовано алгоритм їх розв’язку
- Проведено аналіз швидкодії, додані оптимізації
- Знайдено спосіб пошуку оптимального ходу (для деяких ігор)
- Проаналізовано можливі подальші дослідження

Дякую за увагу!