Титульан Сторінка

Зміст

[Вступ 3](#_Toc323070718)

[Визнчення комбінаторних ігор, їх розподіл, види, приклади, відмінності 4](#_Toc323070719)

[Більше про рівноправні ігри – специфіка дослідження(наперід відомий результат), підказка до оптимальної стратегії, ациклічність, правила і тд; NP позиції **Error! Bookmark not defined.**](#_Toc323070720)

[Ігри залежні від попередніх ходів – коротко, забити на них **Error! Bookmark not defined.**](#_Toc323070721)

[Приклад тривіальної гри – палички з Форд Буаяр **Error! Bookmark not defined.**](#_Toc323070722)

[Гра Нім 11](#_Toc323070723)

[Теорія Шпрага-Гранді(теорема про еквівалентність кожно гри Німу), способи виведення значень шпрага-гранді. Існування функції Ш-Г. 14](#_Toc323070724)

[Ігри на графах(Queen, WhiteKnight), розглянути декілька графів з декількома термінальними точками, показати можливі переходи зі стану множинами(формулами) 15](#_Toc323070725)

[Суми ігор (теорема від Фергусона) 15](#_Toc323070726)

[Циклічні ігри(напр Chomps), неіснування розвязку, але теоретичне доведення його(ПЕРЕВІРИТИ мої висновки) 15](#_Toc323070727)

[Купа прикладів ігор 15](#_Toc323070728)

[Всі з проги 15](#_Toc323070729)

[Багато з російської статті 15](#_Toc323070730)

[Пару від амеранців 15](#_Toc323070731)

[Трохи рпо код 15](#_Toc323070732)

[Mex 15](#_Toc323070733)

[Кешування 15](#_Toc323070734)

[Різне задання ситуації в грі – однакові перетворення 15](#_Toc323070735)

[Перформенс результати 15](#_Toc323070736)

[Можна пару малюночків 15](#_Toc323070737)

[Трошки про людське виведенян результатів 15](#_Toc323070738)

[Висновки 15](#_Toc323070739)

[Користь функції шрпага гранді в дослідженні рівноправних ігор 15](#_Toc323070740)

[Реалізовані програми – прогнозування результату для n в нескінченості, виведенян закономірностей 15](#_Toc323070741)

[Аналіз рівноправних ігор N гравців – вузькі місця, можливості і тд 16](#_Toc323070742)

# Вступ

Все наше життя складається з неперервного прийняття рішень – коли ми обираємо обід в ресторані, коли ми обираємо книжку для прочитання, коли шахіст вирішує який хід зробити, коли футболіст вирішує на кого передати пас, коли бізнесмен вирішує чи погоджуватися на пропозицію, зрештою, коли ми обираємо чому приділити свій час.

Не кожен з нас задумується, над тим, що кожне рішення викреслює всі інші варіанти розвитку подій. Ніхто не знає, який з обраних варіантів насправді привів би кращого результату, тому що фактично можна побачити результат тільки одного вибору. Але в багатьох областях діяльності прийняття рішень піддається аналізу, і результати аналізу допомагають відповідальній людині зробити вибір, який принесе їй найбільше користі. Інколи результат являє собою великі суми грошей, інколи корисність проведеного часу, інколи навіть людські життя.

Часто так буває, що для того щоб досягти мети, потрібно зробити декілька кроків( прийняти декілька правильних рішень). В такому випадку вибирати стає складніше, бо варіантів розвитку подій набагато більше, і вони ще й переплітаютсья між собою. Зробивши перший вибір не найкращим, умови для другого будуть ще складніші, і кінцевий результат можливо й не вдасться досягти. Але водночас, якщо не дивитися на завдання в повному обсязі, а тільки на найближчий результат, то попри те, що кожен наступний вибір буде здаватися оптимальним в даному контексті, він буде віддаляти нас від поставленого завдання. Тому появилося таке поняття як оптимальна стратегія, яка являє собою обдуману послідовність прийняття рішень. До оптимальних стратегій змушені вдаватися бізнесмени, політики, менеджери і будь-хто, чия професія заставляє дивитися на декілька кроків вперід. Наприклад, керівник компанії може найняти молодого спеціаліста, без особливої цінності на той момент, і платити йому більше ніж він вартий, що на першому етапі виглядає безглуздим рішенням. Але якщо цей керівник розумний, то він може прийняти таке рішення, опираючись на свою оцінку людини – він вважає, що через 5 років, ця людина принесе його компанії набагато більше успіху і прибутку, ніж він потратив на неї спочатку. Тоді як з меншою зарплатнею цю людину міг хтось переманити на іншу компанію.

Особливим випадком прийняття рішень є *умови конфлікту,* тобто такі умови, в яких наші рішення, а точніше їх наслідки, переплітаються з рішеннями інших людей, які в свою чергу будуь впливати на наші наступні кроки. Це дуже поширена ситуація, і насправді, якщо задуматися – будь-які наші дії впливають на інших людей, деякі менше, деякі більше.

Якщо сумістити багатокрокрокові прийняття рішень і умови конфлікту, то виходить дуже цікавий обєкт для аналізу, який в науці назвали Теорією Ігор. Цікавим моментом є те, що назва ця не надумана, і крім того має багатосторонній зміст. Справді, більшість відомих ігор підпадають під це визначення, але сюди також і входять дуже складні життєві ситуації, як політичні баталії, біологічні процеси, економічні закони та ін. Іронія в тому, що, якою б серйозною не було ситуація, для математики вона всеодно залишиться лише грою.

Короткі історичні відомості

Теорія ігор бере свій початок у 1713 році, у листі Джеймса Вальдегрейва. З того часу вона досить пасивно розвивалася, поки в ХХ столітті Джон Фон Нейман опублікував свою роботу у 1928. В другій половині ХХ століття теорія ігор почала дуже активно розвиватися завдяки таким особистостям як Джон Неш, Рейнхард Зелтен, Джон Харсаньї, Джон Мейнард Сміт та ін. Забігаючи наперід, відмітимо той факт, що Теорія Шпрага-Гранді, яка розглядається в цій, роботі була розроблена у 1935-1939 роках, перед такими відомими результатами, як Ситуація Рівноваги Неша(Nash Equilibrium), Баєсівськими іграми та ін.

У 2001 році Теорія Ігор істотно популяризувлися завдяки фільму Рона Говарда “Ігри Розуму” (“Beautiful Mind”), в якому описується життя математика Джона Неша.

На сьогоднішній день теорія ігор активно розвивається. У березні 2012 року Стенфордський університет організував масові безплатні онлайн-курси навчання, в яких однією з найважливіших дисциплін була Теорія Ігор. Це не може не свідчити про широке використання цієї теорії.

Цікавим фактом щодо Теорії Ігор є те, що вона, на відміну від більшості математичних наук, націлена на на вирішенян задач фізики, а в основному на задачі економіки. Хоча, з часом коло питань, які підлягали аналізу в цій теорії розширилося до військової справи, медицини, соціального прогнозування, питання моралі, масової поведінки індивідів тощо.

Саме тому ця робота зконцентрована на дослідження теорії ігор, а конкретніше рівноправних ігор.

Постановка завдання

1. Ввести основні поняття і теоретичні висновки з теорії рівноправних ігор,
2. Реалізувати програмно декілька типів ігор з прогнозуванням результатів згідно наданої теорії.

Конкретно в теорії має бути розглянуто

1. класифікацію комбінаторних ігор,
2. гру Нім,
3. теорему Шпрага-Гранді
4. суми ігор,
5. ігри на графах
6. циклічні ігри(і чому функція Шпрага-Гранді безсильна для них)

З практичної частини має бути розглянуто такі ігри

1. «Нім»
2. «Палички» («Substraction games»)
3. «Білий Кінь» ()
4. «Ферзь» ()
5. «Кеглі» ()
6. «Гризун» ()
7. «Нім Ласкера»
8. «Шахи Доусона» в двох версіях(прямолінійна, оптимізована)
9. «Хрестики-Хрестики»
10. «Нім зі збільшеннями»

Більшість з цих ігор має бути запрограмовано, з передбаченням результатів для даної ситуації при оптимальній грі. Також для ігор в яких це можливо мають бути вказані оптимальні стратегії.

Має бути детально розглянуто структуру і реалізацію програми, зокрема функція Mex, відшукання виграшного ходу, і моделювання переходу станів ігор.

# Теоретичні відомості

* 1. Комбінаторна теорія ігор

Комбінаторан теорія ігор – це розділ теорії ігор, в якому розглядаютсья *послідовні* ігри *двох гравців* з *повною інформацією*. Почнемо з означення комбінаторної гри:

**Означення 1.1.** *Кобмінаторною грою* називають гру, яка задовільняє наступним умовам:

1. Є два гравці
2. Є множина, зазвичай скінченна, ситуацій гри
3. Для кожного гравця є множина можливих ходів
4. Гравці ходять по черзі
5. Гра закінчується, коли гравець, чия черга ходити, не може зробити хід
6. Гра закінчується за скінченне число ходів
7. Інформація про ходи гравців і правила гри відома обом гравцям.

Є декілкьа класифікацій комбінаторних ігор:

1. Кобмінаторні ігри можна грати *нормальним* способом, або в *піддавки*. Нормальний спосіб- коли гравець, який повинен робити хід, не може цього зробити – програє. У Піддавках він виграє. Піддавки важче піддаються аналізу і є менш поширеними.
2. Комбінаторні ігри бувають скінченні і нескінченні. Скінченна гра закінчуєтсья за зскінченну кількість кроків, як би гравці в неї не грали. Нескінченна гра може мати набір ходів, які циклічно переходять один в одного, і тому, при бажанні гравців, може продовжуватися вічно. Зазвичай обмежують кількість однакових повторюваних ходів і домовляються про нічию, для визначеності гри.
3. Рівноправні і партизанські. В рівноправних іграх множина ходів ніяк не залежить від гравця, а в партизанських – залежить(наприклад в шахах – білі/чорні фігури). Фактично в рівноправних іграх вся різниця між гравцем 1 і гравцем 2 полягає в тому, що гравець 1 ходить перший.
4. Ігри залежні/незалежні від інших умов. Бувають ігри, в яких певна множина ходів дозволена тільки після 6ої вечора, або тільки після спеціального ходу противника, або ще від інших зовнішніх умов. Такі ігри є набагато складнішими і важче піддаються аналізу. В даній роботі такі ігри не розглядаються.

В цій роботі ми вивчаємо теорію Шпрага-Гранді, яка застосовна до рівноправних скінченних ігор, в яких виключається нічия. Тобто при будь-якому розвитку подій, якийсь з гравців програє за скінченну кількість кроків, а саме – коли в нього не буде ходів. Крім того, нас цікавить в основному нормальний хід гри(а не піддавки), хоч багато розглянутого матеріалу застосовно і до піддавок. Тому далі при наведенні матеріалу буде допускатися, що мова йде саме про такі ігри, якщо не вказано інакше, і звертатися до них будемо як до рівноправних.

## Рівноправні ігри

Наш клас ігор можна відобразити орієнтованим ациклічним графом: вершинами в ньому є стани гри, а ребрами – переходи з одного стана в інший в результаті ходу гравця. Вершина, яка не має вихідних ребер називаєтсья термінальною, і означає програш для гравця, який має ходити, і виграш для гравця, який щойно походив.

Оскільки нічиї немає, то всі стани поділяють на два типи.

**Означення 1.2.** Станами рівноправної гри визначаються як:

1. N –стан (next player) – стан, виграшний для гравця, який зараз буде ходити
2. P – стан (previous player) – стан виграшний для гравця, який щойно походив

Нескладно побачити, що NP-стани можна визначити рекурсивно з термінальних станів.

1. Позначимо всі термінальні вершини як P-стани.
2. Знайдемо всі вершини, які мають напрямлені ребра до P-станів, і позначимо їх як N-стани.
3. Позначимо вершини, чиї ребра ведуть тільки до N-станів, як P-стани
4. Якшо в кроці (3) P-станів не знайдено – зупинитися, інакше – до кроку 2.

Отже, маємо ще один спосіб(рекурсивний) для визначення чи вершина є N-станом, чи P-станом.

**Означення 1.2’.** Стани рівноправної гри можна визначити рекурсивно:

1. Всі термінальні вершини є P-станами
2. З кожного N-стану є *хоча б один* хід у P-стан
3. З кожного P-стану всі ходи ведуть тільки в N-стан.

Наше завдання – визначити до якого класу належить поточний стан. Крім того, одним з найважливіших завдань теорії рівноправних ігор є *виявлення закономірності* залежності NP-стану від поточної ситуації в грі.

Визначення термінальних точок можна перефразувати на зрозумілішу мову

Якщо гравець в N-стані, тобто в виграшному становищі, то найдеться принаймні один перехід в програшний стан, в якому опиниться його противник. Якщо ж гравець в P-стані, тобто програшному становищі, то всі його ходи будуть вести в N-стан,в якому вже буде його противник.

Фактично, можемо дійти висновку, що якщо гравець в N-стані – він, при бажанні, може в ньмоу залишатисядо кінця гри, і зрештою виграти. Якщо гравець в P-стані, то при мудрій грі противника він ніяк не вийде з цього стану і зрешто програє. Єдина його надія на виграш – це те, що противник не знає оптимальної стратегії, і помилково з N-стану перейду знвоу у N-стан. Тоді гравці поміняються ролями, і той хто спочатку був в P-позиції тепер буде в N-позиції і зможе виграти.

Ось ми і вивели оптимальну стратегію для гравця – завжди залишатися в N-стані. Але як це зробити? Як сказати чи дана конкретна ситуація є N-станом чи P-станом? І який з ходів приведе гравця в P-стан? Відповіді на ці питання і дає теорія Шпрага-Гранді. Але перед тим як до неї перейти, потрібно розглянути ще декілька понять.

## Найпростіша рівноправна гра

Для кращого розуміння рівноправних ігор розглянемо один з найпростіших видів цих ігор, відомий під назвами палички, або віднімашки(Substraction games). Ця гра стала відомою завдяки французькому телевізійному шоу Ford Boyard. Суть гри проста: на столі є n паличок, кожен з гравців по черзі забирає 1,2 або 3 палички зі столу. Гра закінчуєтсья, коли гравець не може зробити хід, тобто коли на столі не залишилося паличок.

Проведемо простий аналіз такої гри. Позначимо як – ситуацію в грі, де залишилося *n* паличок. Термінальною позицією є позиція, в якій лишилося 0 паличок на столі, тобто . Це є P-позиція. В неї ми можемо попасти з позицій , , які є в свою чергу N-позиціями. Звернемо увагу на те, що з і можна перейти і не в виграшну позицію, а наприклад в , але нас цікавлять оптимальні стратегії, і згідно означення – позиція вважається N-позицією якщо існує хоча б один перехід в P-позицію, а такий перехід є – в стан . Підемо далі: стан – це P-стан, оскільки будь-який хід з нього приведе в N-стан (,). Провівши далі подібний аналіз, можна побачити закономірність: для позиції ,, ... – P-позиції, решта – N-позиції, і ми хочемо залишатися в них , шоб виграти гру.

Цікавим нюансом в цій грі, є те, що новачок зазвичай думає «я почну грати, а в ході гри зрозумію яка виграшна стратегія». А насправді весь хід гри залежить вді першого ходу. Якшо гравець попав хоч раз в P-позицію, то, при мудрій грі противника, він вже з неї не вийде.

## Гра Нім

Гра Нім є найвідомішою, і ключовою грою в рівноправних іграх( це ми невдовзі доведемо). Дамо її визначення

**Означення 1.3.** Грою Нім називають рівноправну гру з наступними правилами:

1. Є N купок з одиницями деякого предмету(далі будемо називати їх монетками)
2. За один хід гравець може взяти будь-яку позитивну кількість монеток з однієї купки
3. Виграє той, хто забрав останню монетку з останньої купки

Проаналізуємо цю гру. Очевидно- термінальною позицією є позиція (0,0,…,0). Гра з одною купкою – тривіальна. Достатньо просто забрати всі монетки і виграш забезпечений.

Для гри з двома купками P-позиціями будуть ті, в яких розміри купок еквівалентні, тобто (1,1), (2,2) і т.д. Справді, якшо черга суперника ходити – він змінить цю рівновагу, а першйи гравець знвоу її відновить. Так він за скінченню кількість кроків прийде до ситуації (0,0), тобто виграшу.

Якщо купок 3, ситуація стає складнішою. Очевидно, (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3) і (1, 2, 2) є всі N-позиціями тому що з них можна перейти в (1, 1, 0) або (0, 2, 2). Наступна найпростіша позиція - , тому що з неї можна перейти тільки в стані перераховані раніше, отже це – P-позиція. Далі продовжувати аналіз в такому дусі стане складніше, бо глибина рекурсії буде збільшуватися великими темпами.

Для подальшого аналізу гри Нім і їй подібних, введемо поняття Нім-Суми.

**Означення 1.4.** Нім-сумою двох додатніх натуральних чисел називають побітову xor-суму цих чисел.

Це означення потребує додатково пояснення. Кожне натуральне число має представлення у двійковому вигляді, тобто

*(1)*

Де кожне – 1 або 0,а m залежить від самого числа. Наприклад . Нім-сума рахуєтсья шляхом розкладання чисел в такий вигляд і операцією побітного додавання а модулем 2(xor-сума), а поітм перетворенням результату з 2ового в 10вий.

З таким уточненням можна ввести допоміжне означення Нім-суми

**Означення 1.4’.** Нім-сумою чисел і є , і ми кажемо, що

, де для всіх , тобто ,якщо , і в інших випадках.

наприклад

Нім-сума володіє більшістю властивостей, що й звичайне додавання – асоціативність, комутативність, має нейтральний елемент (0) і обернений елемент – саме це число. Тепер прийшов час застосувати знання про нім-суми до важливих теоретичних висновків.

**Теорема 1(Бутона).** У Німі позиція є P–позицією *тоді і тільки тоді*, коли нім-сума усіх розмірів купок рівна нулю.

**Доведення.** Позначимо через *P* множину Нім позицій з нім-сумою рівною нулю, і через *N* – решту ситуацій, тобто такі ситуації, нім-сума яких більша нуля. Перевіримо 3 уомви з означення **(1.2)**

1. *Всі кінцеві позиції є в P*.Єдина термінальна позиція є , і ця позиція входить в P.
2. *Для кожної позиції в N є перехід в позицію в P*. Збудуємо такий перехід наступним чином. Подивимося на нім-суму як на додавання колонок. Вибираємо найлівішу(найзначущішу) колонку з непарною кількістю 1(одиничок). Тепер вибираєм будь-який рядок, який має одиничку в цій колонці і міняємо всі його розряди так, щоб кількість одиничок в кожній колонці бул парна. Після цього число монеток в вибраній купці зменшиться(тому що 1 в найзнайчущому полі міняється на нуль – такі правила двійкових чисел), і кірм того загальна нум-сума буде рівною нулю. І отже – такий перехід цілком легальний.
3. *Кожен перехід з P веде в N.* Якщо ми в P, і ,і ми помніяємо на , то попередня сума вже не може бути рівною 0, що й доводить, що

З цих трьох властивостей виплаває, що P є множиною P-станів.

**Приклад 1.** Розглянемо наступну гру Нім . Прахуємо її нім-суму

Оскільки , то це N-позиція. Якщо трошки придивитися, то можна навтіь знайти виграшний перехід. Потрібно замінити одне з чисел так, щоб нім-сума була рівною нулю. Одною з таких замін є заміна 13 на 4, тобто відбирання 9 монет з купки.

Також можна відняти 7 монет з купки з 12а монетами, залишивши там 5 монет. Насправді, доведення теореми дає значні підказки для вибору наступного числа, і можна слідувати простому правилу – шукати заміну вибраному число як нім-суму решти купок монет.

## Теорія Шпрага-Гранді(теорема про еквівалентність кожно гри Німу),

Тепер ми переходимо до найважливішої частини дипломної робота – теорія Шпрага-Гранді. Перед основною теоремою роботи, потрібно розглянути допоміжну лему, відому під назвою «Лема про нім зі збільшеннями». Для цього дамо наступне означення

**Означення 1.5.** Нім зі збільшеннями-це гра, яка у всьому подібна до звичайного німу, але з одним вийнятком – додається ще один хід. Замість віднімання деякої кількості монеток, їх можна додати.

**Лема 1(про збільшення).** Нім зі збільшенням повністю еквівалентний звичайному німу, включно з теоремою Бутона.

**Доведення** здійснюєтсья дуже просто. Для цого нам всього лиш потрібно продемонструвати такий наочний приклад – якщо гравець замість віднімання монеток, додає нові – то його противнику достатньо зробити симетричний хід – відняти таку ж суму з тої купки. Тоді ситуація повністю повертаєтсья до такої яка була 2 ходи назад.

Суть цієї теореми в тому, що додавання монеток не допоможе гравцю, при оптимальінй стратегії, і тому вся гра «Нім зі збільшеннями» не мєа ніякого сенсу – вона еквівалентна Німу.

Тепер час перейти до найважливішої теореми в цій роботі.

**Теорема 2(Шпрага-Гранді).** Розглянемо деякий стан S рівноправної гри. З нього є переходи в деякі стани . Тоді, стану S цієї гри можна поставити у відповідність купку Німа деякого розміру x, яка буде повністю описувати стан нашої гри. Це число x називають значенням Шпрага-Гранді стану S.

Крім того, x можна знайти наступним рекурсивним способом: підрахуємо для кожного переходу , і тоді виконується

X = mex (), де mex – функція, яка повертає найменше цілу невідємне значення,яке не належить її множині-аргументу.

Таким чином, почавши з термінальних вершин можна порахувати значення Шпрага-Гранді для всіх станів нашої гри. Якщо значення функції рівне нулю – це P-стан, інакше – N-стан

**Доведення** теореми здійснюється по індукції.

Для термінальних вершин, згідно теореми , що цілком правильно – термінальні позиції – P-позиції.

Тепер розглянемо стан S, з якого є переходи. Припущення індукцїї – що всі , в які ми можемо перейти, вже пораховані.

Порахуємо величину . Тоді, згідно визначенян функції mex, ми можемо зробити висновок, що для кожного числа *I* в проміжку знайдетсья хоча б одинвідповіднйи перехід в якийсь зі станів . Крім того, можуть існувати і додаткові переходи, в стани, в яких значення Гранді більше ніж p.

Це означає. Що поточний стан еквівалентний стану Німа з зібліьшеннями з кучкою розміру P: насправді, в нас є переходи із поточного стану в стани з купками всіх менших розмірів, а так саом можуть бути і переходи в стани з купками більшими розмірів.

Отже, величина насправді є шуканим значенянм Шпрага-Гранді для поточного стану , що й треба було доказати

## способи виведення значень шпрага-гранді. Існування функції Ш-Г.

## Ігри на графах(Queen, WhiteKnight), розглянути декілька графів з декількома термінальними точками, показати можливі переходи зі стану множинами(формулами)

## Суми ігор (теорема від Фергусона)

## Циклічні ігри(напр Chomps), неіснування розвязку, але теоретичне доведення його(ПЕРЕВІРИТИ мої висновки)

# Програмна Реалізація

## Купа прикладів ігор

### Всі з проги

### Багато з російської статті

### Пару від амеранців

## Трохи рпо код

### Mex

### Кешування

### Різне задання ситуації в грі – однакові перетворення

## Перформенс результати

## Можна пару малюночків

## Трошки про людське виведенян результатів

# Висновки

## Користь функції шрпага гранді в дослідженні рівноправних ігор

## Реалізовані програми – прогнозування результату для n в нескінченості, виведенян закономірностей

## Аналіз рівноправних ігор N гравців – вузькі місця, можливості і тд