

Сравнение методов обновления LU-разложения для разреженных матриц типа ранг-1

Команда «LULU»

Артём Шейнов, Максим Смирнов, Марк Миргалеев, Семён Савоськин

Симплекс метод

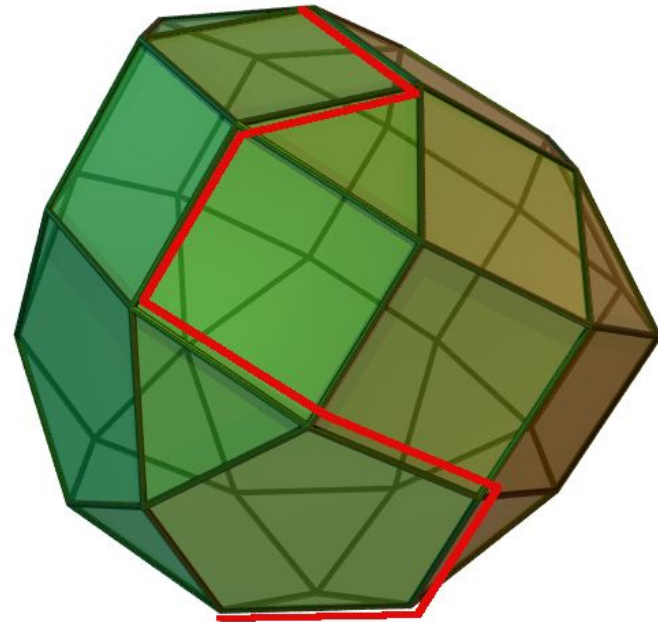
- Задача линейного программирования:

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \langle c, x \rangle$$

$$\text{s.t. } Ax = b$$

$$\alpha \leq x \leq \beta$$

- Одним из методов решения является модифицированный симплекс метод
 - Выбор базисных векторов
 - Вычисляем остаток целевой ф-ии
 - Если целевая функция не уменьшилась, то решение найдено
 - Иначе заменяем базисный вектор, соответствующая переменная которой дает меньший вклад



Обновление LU разложения

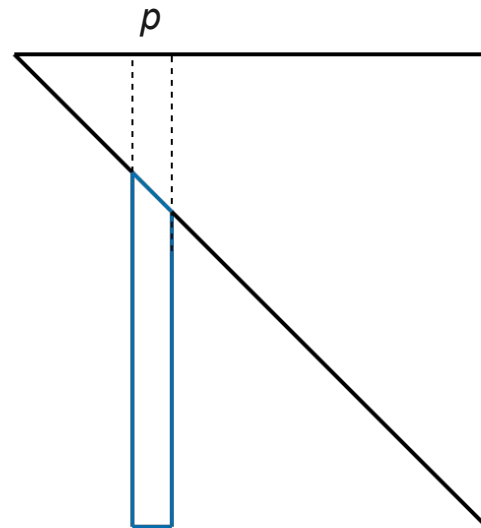
- Обновляем матрицу B базисных векторов
- Заменяем вектор, соответствующая переменная которой дает меньший вклад
- Для вычислений достаточно обновить матрицу U

$$PBQ' = LU$$

$$B = B + (a_q - Be_p) e'_p$$

$$L^{-1}B = U + (L^{-1}a_q - Ue_p) e'_p$$

$$g = L^{-1}a_q$$



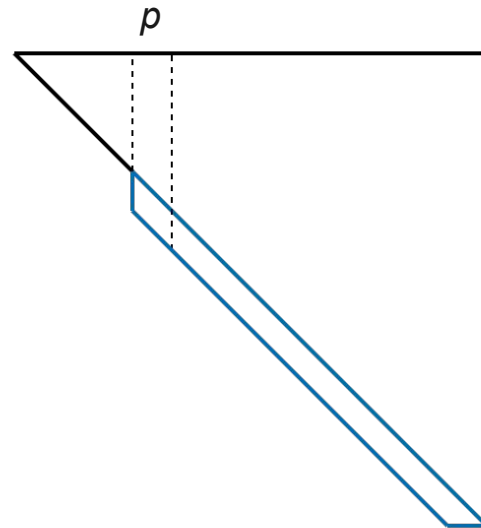
Матрица $L^{-1}B$

Метод Бартельса-Голуба

Описание метода

1. Переставить шип в последнюю позицию
2. Занулить элементы под диагональю
 - 2.1. Выбрать опорный элемент из диагонального и поддиагонального для лучшей устойчивости
 - 2.2. При необходимости поменять строки

Сложность метода: $O(n^2)$



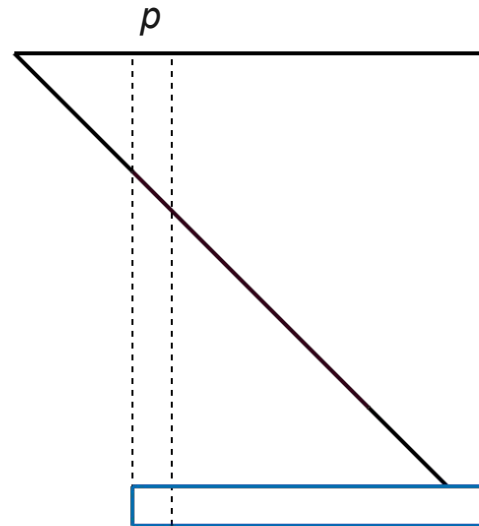
Матрица после перестановки столбцов

Метод Форреста-Томлина

Описание метода

1. Переставить шип в последнюю позицию
2. Переставить строку на p позицию в конец
3. Занулить элементы в последней строке

Сложность метода: $O(n^2)$



Матрица после перестановки
столбцов и строк

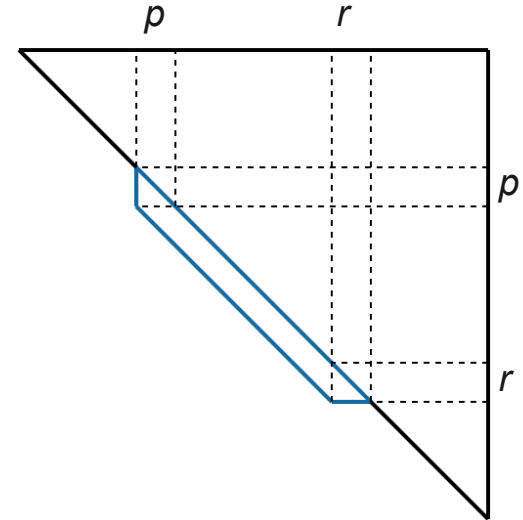
Метод Рунда

Описание метода

Пусть шип имеет высоту до позиции r

1. Переставить шип в позицию r
2. Найти все столбцы «одиночки» и совершить «поворот» матрицы так, чтобы столбец перешел в начало «бугра» — это уменьшит его размер
3. Найти все строки «одиночки» и совершить «поворот» матрицы так, чтобы строка перешла в конец «бугра» — это уменьшит его размер
4. Занулить элементы под диагональю, если таковые имеются

Сложность метода: $O(n^2)$



Матрица после перестановки столбцов и «поворотов» матрицы

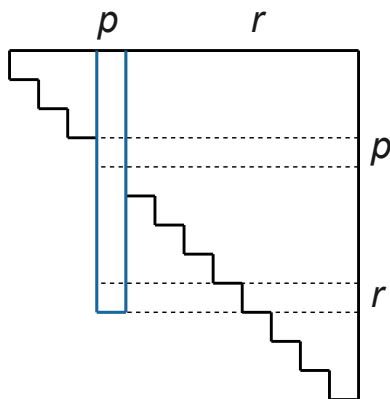
Метод Суль

Описание метода

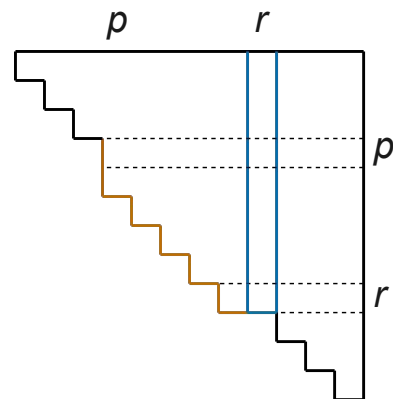
Пусть шип имеет высоту до позиции r

1. Переставить шип в позицию r
2. Занулить все элементы строки p от позиции p до позиции r с помощью строк $(p+1), \dots, (r-1)$
3. Переставить строку p в позицию r

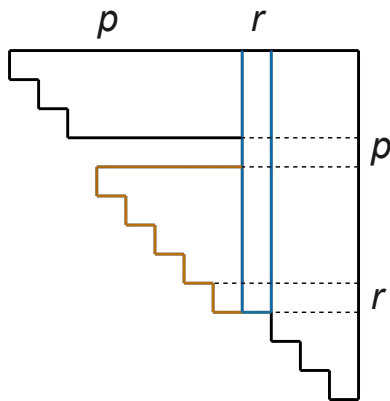
Сложность метода: $O(n^2)$



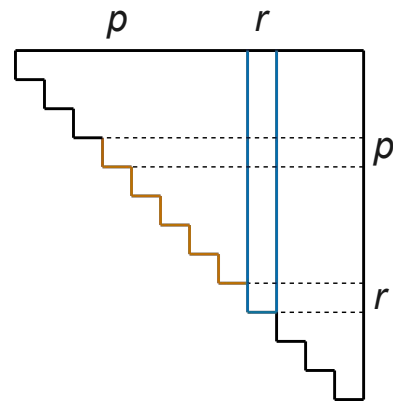
а) Столбец в позиции p



б) Изначальная верхняя матрица Гейзенберга



с) Верхняя матрица Гейзенберга после зануления строки

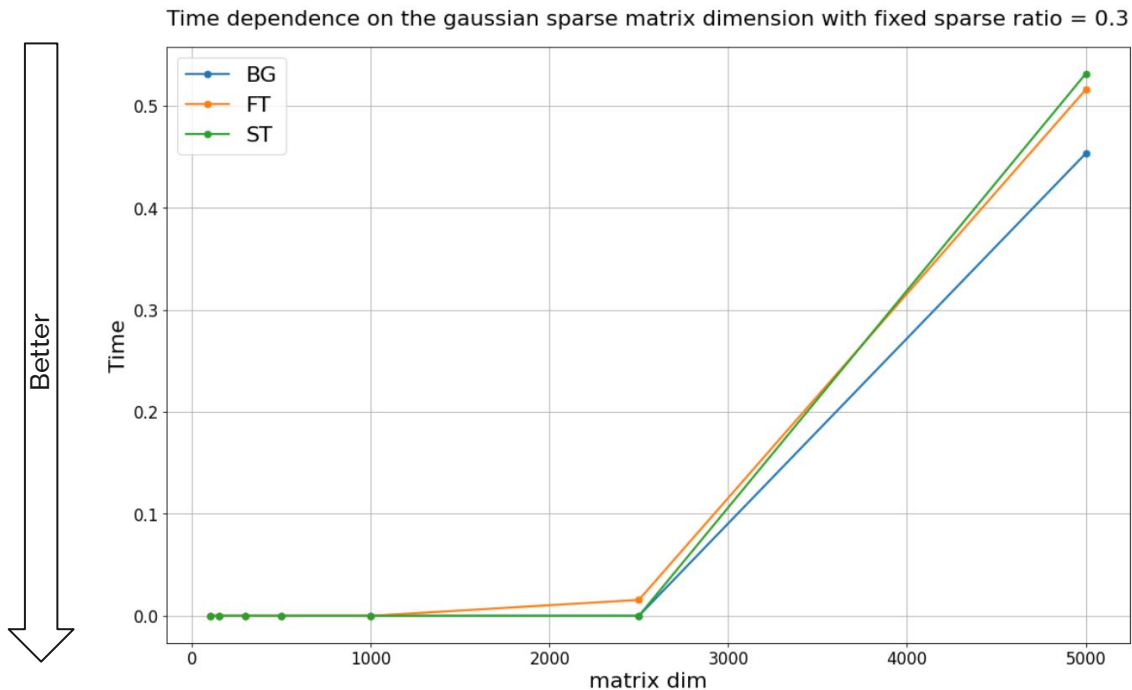


д) Верхнетреугольная матрица после перестановки строк

Результаты

Размер матрицы

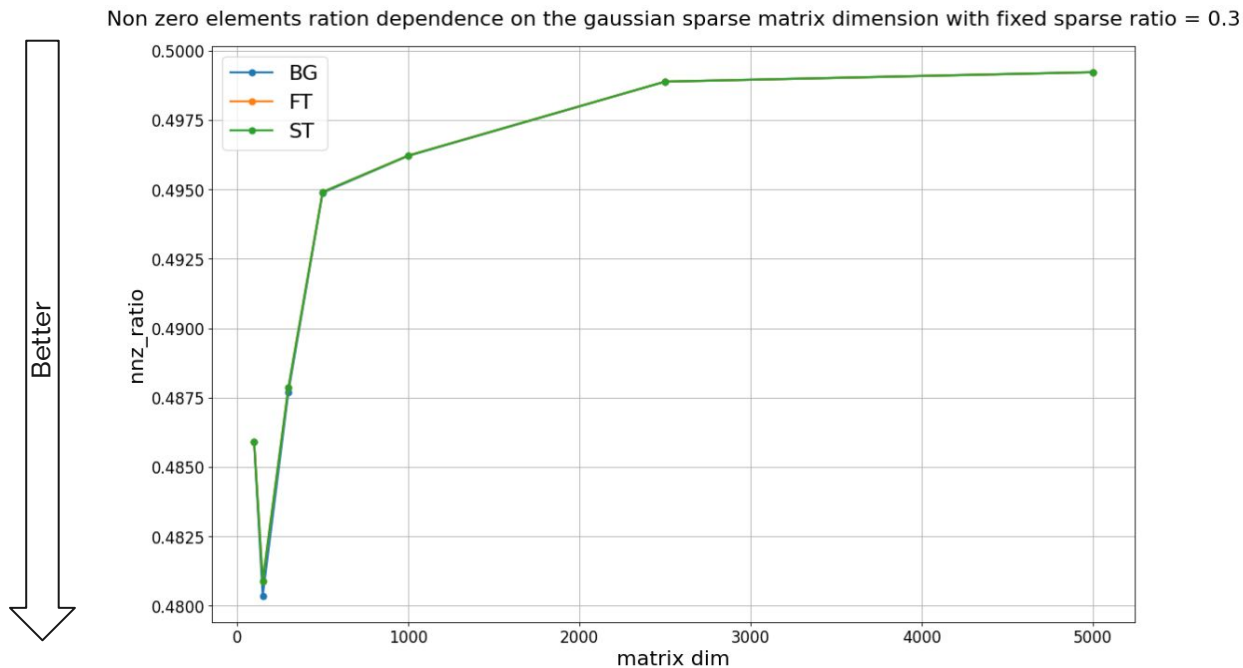
Время работы алгоритмов



Результаты

Размер матрицы

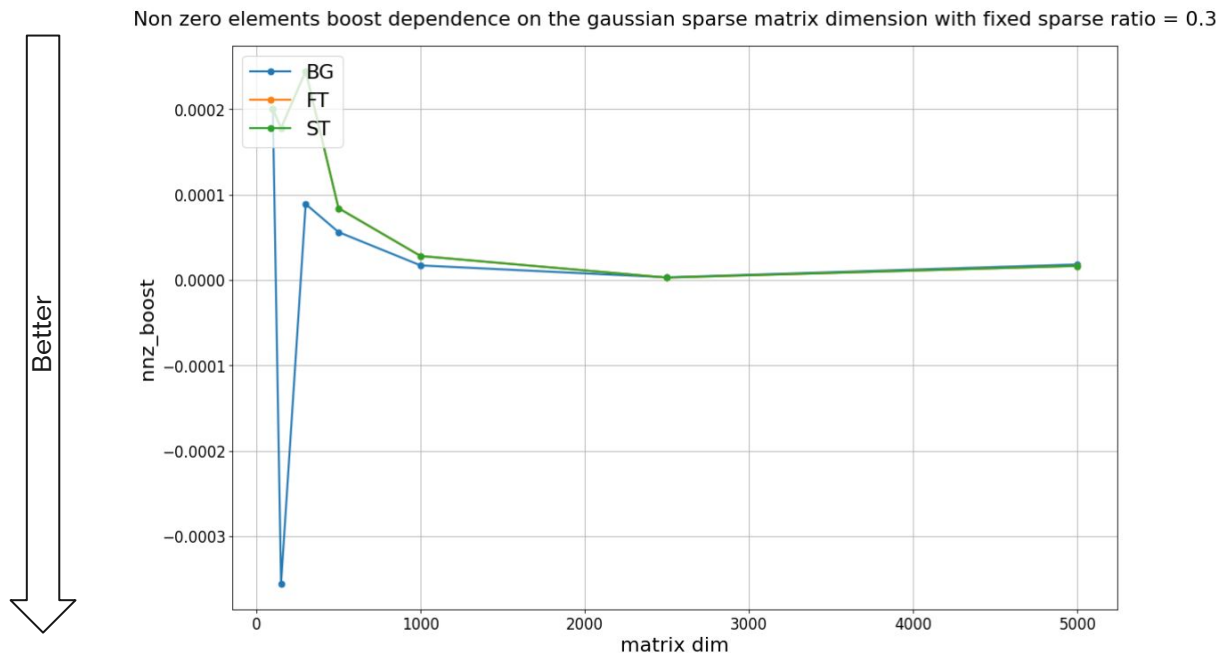
Отношение количества ненулевых элементов к общему числу элементов



Результаты

Размер матрицы

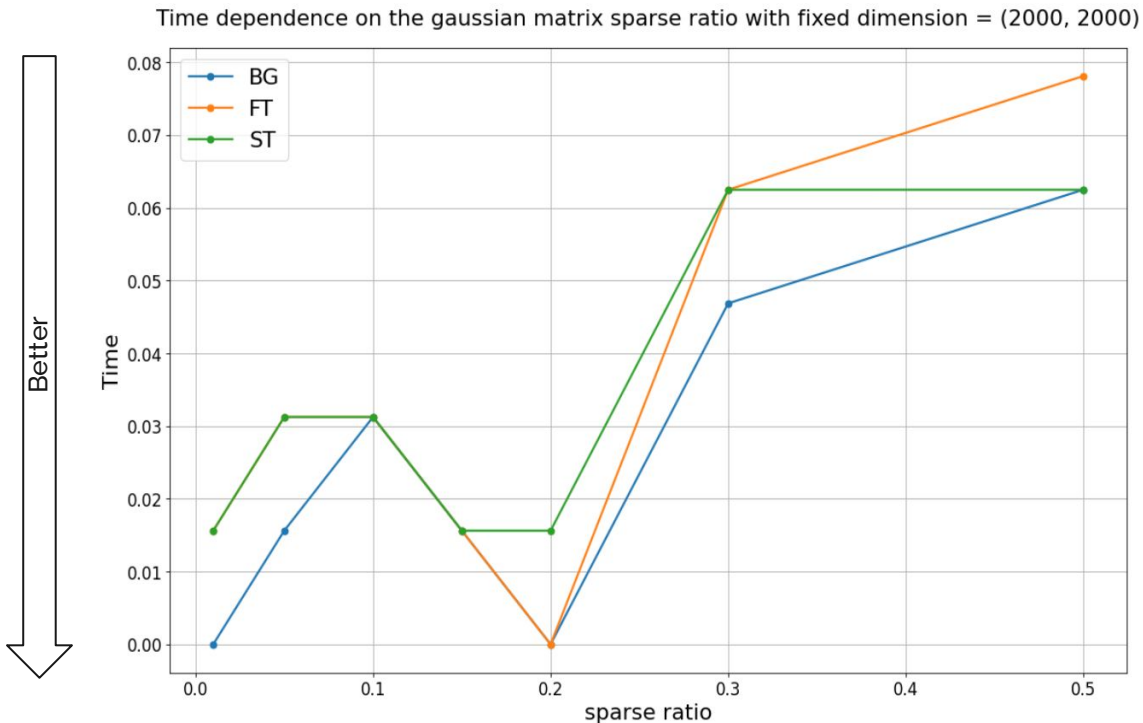
Отношение разности между количеством ненулевых элементов в матрице U , полученной классическим LU, и их количеством в матрице U_{update} , полученной алгоритмами, к общему числу элементов



Результаты

Степень разреженности матрицы

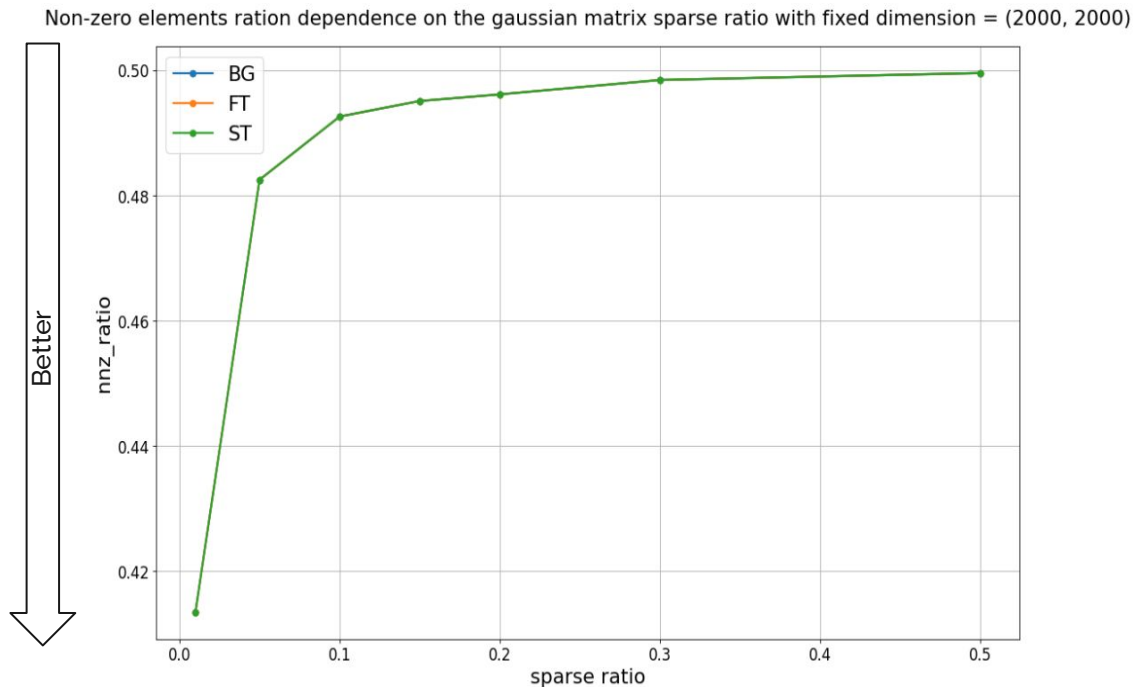
Время работы алгоритмов



Результаты

Степень разреженности матрицы

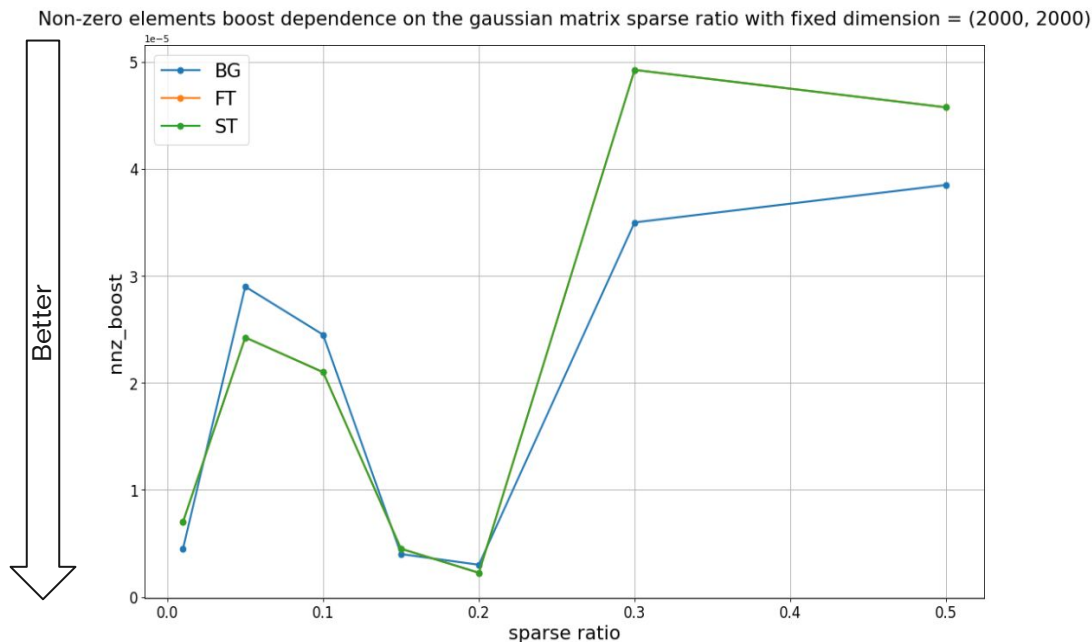
Отношение количества ненулевых элементов к общему числу элементов



Результаты

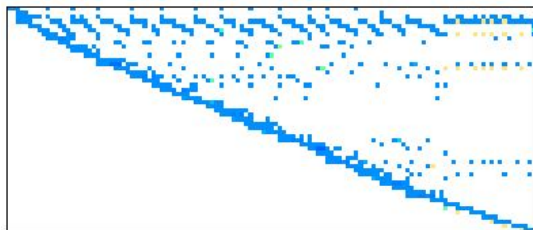
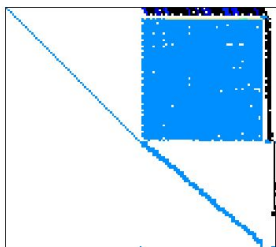
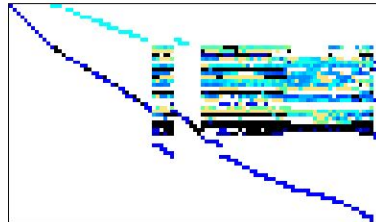
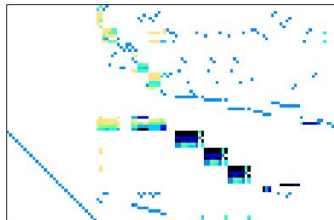
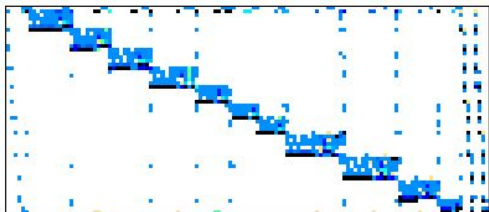
Степень разреженности матрицы

Отношение разности между количествами ненулевых элементов в матрице U , полученной классическим LU, и их количеством в матрице U_{update} , полученной алгоритмами, к общему числу элементов



Области применения

Множество методов, решающих задачи линейного программирования (которых больше 300 на [SuiteSparseMatrixCollection](#)), используют модифицированный симплекс метод с обновлением LU



Выводы

- Реализовали 3 метода замены столбцов в разреженных матрицах
 - Бартельса-Голуба
 - Фореста-Томлина
 - Суль
- Бартельса-Голуба показал себя лучше остальных (при этом будучи самым “старым”)
- Метод Рунда не был реализован из-за крайне низкой скорости работы при незначительных улучшениях и слишком сложной технической реализации с поворотами матрицы
- Что хотелось, но не успели:
 - Применить методы к известным задачам оптимизации с разреженными матрицами

Ссылки

- Репозиторий
 - https://github.com/Markm536/AIM_NLA_proj2
- Материалы:
 - <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02025534>
 - https://staff.ulsu.ru/semushin/_index/_pilocus/_gist/docs/mycourseware/9-linprogram/6-tools/simplex-DemoCD/_SIMPLEX-DemoTools/teor3/chapter2.htm#Figure%203
 - <https://www.mathnet.ru/links/f0b4bfb866bd2d79b639d97c2338b280/sjvm587.pdf>